1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen (S. 7)

Imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

Alle Zahlen der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

bilden die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y : \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

Realteil von z:

$$\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Imaginärteil von z:

$$\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

Addition (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u) + i\,(y + v) \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

Inverses Element bzgl. Addition (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$.

$$-z = (-x) + i\,(-y) = -x - i\,y \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$.

$$z \cdot w := (x + i\,y) \cdot (u + i\,v) = (x\,u - y\,v) + i\,(x\,v + y\,u) \in \mathbb{C} \tag{1.8}$$

Inverses Element bzgl. Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(x + i\,y)} = \frac{x - i\,y}{(x + i\,y)\,(x - i\,y)} = \frac{x - i\,y}{x^2 - i^2\,y^2} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Satz 1.1: Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ (S. 8)

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bilden mit oben definierter Addition (1.6) bzw. Multiplikation (1.8) einen Körper. Das Einselement dieses Körpers ist

$$1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{C} \tag{1.10}$$

und das Nullelement ist

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}. \tag{1.11}$$

Es gelten somit die Rechenregeln (für $z, v, w \in \mathbb{C}$; $z = x + i \cdot y$):

a) $(z + v) + w = z + (v + w)$	Assioziativgesetz
b) $z + 0 = z$	neutrales Element
c) $z + (-z) = 0$	inverses Element; wobei (1.7) gilt
d) $z + w = w + z$	Kommutativgesetz
e) $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot v)$	Assoziativgesetz
f) $z \cdot 1 = z$	neutrales Element
g) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ für $z \neq 0$	inverses Element; wobei (1.9) gilt
h) $z \cdot w = w \cdot z$	Kommutativgesetz
i) $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$	Distributivgesetz

Binomische Formel (S. 10)

Mit $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \tag{1.12}$$

Definition 1.1: Absolutbetrag, konjugiert komplexe Zahl (S. 10)

Es sei $z = x + i \cdot y = (x, y) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

der **Absolutbetrag** von z und

$$\overline{z} := x - i \cdot y$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Absolutbetrag mit konjugiert komplexer Zahl (S. 11)

Wegen $z \cdot \overline{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ folgt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \tag{1.13}$$

Abstand komplexer Zahlen (S. 11)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$. Dann ist ihr Abstand:

$$|z - w| = |(x - u) + i\,(y - v)| \overset{\text{Def. 1.1}}{=} \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \tag{1.14}$$

Satz 1.2: Rechenregeln (S. 11)

Für $z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$ gelten folgende Rechenregeln:

1. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $(w \neq 0)$
4. $\overline{(\overline{z})} = z$
5. $|\overline{z}| = |z|$
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$
7. $\mathrm{Re}(z_1 + \cdots + z_n) = \mathrm{Re}(z_1) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n)$
$\mathrm{Im}(z_1 + \cdots + z_n) = \mathrm{Im}(z_1) + \cdots + \mathrm{Im}(z_n)$
8. $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$
$\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
9. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $(w \neq 0)$

Dreiecksungleichung (S. 12)

Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt (wie im Reellen) für den Betrag im Komplexen die **Dreiecksungleichung**:

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \tag{1.15}$$

Allgemein gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} z_k\,|z_k| \tag{1.16}$$

Definition 1.2: Kreisscheibe, r-Umgebung einer komplexen Zahl (S. 12)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann ist die Menge

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < r\} \tag{1.17}$$

die **(offene) Kreisscheibe** um a mit Radius $r > 0$ (oder **r-Umgebung** von a)

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (S. 14)

Eine komplexe Zahl $z = x + i\,y, z = 0$, ist eindeutig bestimmt durch den **Betrag**

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.18}$$

und durch das **Argument**

$$\arg(z) := \varphi, \ (0 \leq \varphi < 2\pi). \tag{1.19}$$

Es gilt:

$$x = |z| \cdot \cos\varphi \text{ und } y = |z| \cdot \sin\varphi. \tag{1.20}$$

Man nennt

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \tag{1.21}$$

die **Polarkoordinatendarstellung** von $z \neq 0$. Es gilt auch:

$$z = r \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)]\,, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{1.22}$$

Umrechnung zwischen Darstellungen (S. 15)

Für die Umrechnung zwischen den Darstellungen $z = x + i\,y$ und $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ gelten folgende Regeln:

1. Gegeben sei $z = x + i\,y \neq 0$. Mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \tag{1.23}$$

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

gilt

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,. \tag{1.25}$$

2. Gegeben sei $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ mit $r > 0$, $\varphi \in [o, 2\pi)$. Mit

$$x := r \cdot \cos\varphi \text{ und} \tag{1.26}$$

$$y := r \cdot \sin\varphi \tag{1.27}$$

gilt

$$z = x + i\,y. \tag{1.28}$$

Satz 1.3 (S. 16)

Sind $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,, \quad w = |w| \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)\,, \tag{1.29}$$

so gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)]\,, \tag{1.30}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]\,. \tag{1.31}$$

Folgerung (S. 16)

Aus Satz 1.3 folgt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi} \tag{1.32}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi} \tag{1.33}$$

1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)

Reelle Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte reelle Exponentialfunktion ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{1.34}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \tag{1.35}$$

Komplexe Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte Komplexe Exponentialfunktion ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.36}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{1.37}$$

Eulersche Gleichung (S. 18)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + i\,y$ gilt:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\sin(y) \qquad \text{Eulersche Gleichung} \tag{1.38}$$

$$e^z = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x \cdot [\cos(y) + i\,\sin(y)] \tag{1.39}$$

Eulersche Identität (S. 18)

Aus der Eulerschen Gleichung folgt sofort die Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Satz 1.4 (S. 19)

1. Es gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos y = \operatorname{Re}\left(e^{iy}\right) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \tag{1.40}$$

$$\sin y = \operatorname{Im}\left(e^{iy}\right) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{1.41}$$

2. Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \tag{1.42}$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ schreiben.

3. Für $z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\psi}$ gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{\varphi + \psi} \tag{1.43}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{\varphi - \psi} \ (w \neq 0). \tag{1.44}$$

Satz 1.5: Formel von Moivre (S. 19)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi) \tag{1.45}$$

1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene

Definition 1.3: Gebiet (S.20)

Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängen ist.

Definition 1.4: einfach zusammenhängend (S.21)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn das Innere jedes in G verlaufenden geschlossenen Streckenzuges ganz zu G gehört, d.h. wenn G keine Löcher hat.

Randpunkt, Rand von D (S. 21)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, so heißt ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ein **Randpunkt** von D, wenn in jeder r-Umgebung (Def. 1.2 S. 1) von z sowohl Punkte aus D liegen, als auch Punkte, die nicht zu D gehören. Der **Rand von D** ist die Menge aller Randpunkte; er wird mit

$$\partial D \tag{1.46}$$

bezeichnet.

abgeschlossen (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Rand von D zu D gehört: $\partial D \subseteq D$. Man nennt $\overline{D} := D \cup \partial D$ den **Abschluss** von D.

beschränkt, unbeschränkt (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir nennen D **beschränkt**, wenn es eine (hinreichend große) Kreisscheibe $K_r(0)$ gibt, die D umfasst. Andernfalls heißt D **unbeschränkt**.

1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene

Definition 1.5: konvergente Folge (S. 22)

Man sagt, eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \to z, \tag{1.47}$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in N(\varepsilon). \tag{1.48}$$

Konvergiert die Folge nicht, so nennt man sie **divergent**.

$z_n \to \infty$ (S. 23)

Wir schreiben $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$, falls für die **reelle** Folge $(|z_n|)$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = +\infty.$$

Rechenregeln konvergenter komplexer Folgen (S. 23)

Wie bei reellen Folgen ist der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge eindeutig bestimmt und es gelten die bekannten Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} z_n = z \\ \lim\limits_{n \to \infty} w_n = w \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} (z_n \pm w_n) & = z \pm w \\ \lim\limits_{n \to \infty} (z_n \cdot w_n) & = z \cdot w \\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{z_n}{w_n} & = \dfrac{z}{w} \ (w_n, w \neq 0) \\ \lim\limits_{n \to \infty} |z_n| & = |z| \end{cases} \tag{1.49}$$

2 Elementare Funktionen

2.1 Grundlagen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.1: Grenzwert, Stetigkeit (S. 27)

1. Die Funktion f sei definiert in einer r-Umgebung (Kreisscheibe) um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, mit der Einschränkung, dass f am Punkt z_0 eventuell undefiniert ist. Die Zahl w_0 heißt **Grenzwert** fon f für $z \to z_0$,
$$\lim_{z\to z_0} = w_0, \tag{2.1}$$
wenn für jedes (beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{2.2}$$
Bei **beliebiger Annäherung** von z an z_0 müssen sich die Funktionswerte $f(z)$ also dem Wert w_0 annähern; anderfalls existiert der Grenzwert nicht!
2. f heißt **stetig** in z_0, wenn f in z_0 definiert ist und wenn gilt:
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.3}$$

$\lim f(z) = \infty$ (S. 27)

Man schreibt $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, falls gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)

Die komplexe e-Funktion (S. 27)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\, \sin y)\,, \tag{2.4}$$
für $z = x + iy$. Man schreibt auch
$$f(z) = \exp(z). \tag{2.5}$$

1. Gerade $x = x_0$ wird auf Kreis abgebildet.
2. Gerade $y = y_0$ wird auf Halbgerade von 0 mit Winkel y_0 abgebildet.
3. Der **Fundamentalstreifen**:
$$F := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < y = \operatorname{Im}(z) \le \pi\} \tag{2.6}$$

Satz 2.1 (S. 29)

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Periodizität (S. 30)

Die Funktion $f(z) = e^z$ hat die **Periode** $2k\pi i$, denn es gilt
$$f(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z = f(z). \tag{2.7}$$
Jeder Streifen der Form
$$S = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\,\pi < y = \operatorname{Im}(z) \le (2k+1)\,\pi\} \;\; (k \in \mathbb{Z}) \tag{2.8}$$
wird bijektiv auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ abgebildet, da S durch Verschiebung um $2k\pi i$ aus F (2.6) entsteht.

2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Umkehrfunktion von e^z (S. 30)

$f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F (2.6) auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, daher existiert die Umkehrfunktion
$$f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to F, \quad w \mapsto z = f^{-1}(w) \tag{2.9}$$

Komplexer Logarithmus (S. 30)

Zu gegebenem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir
$$\operatorname{Ln}(w) := \ln|w| + i\, \arg(w) \tag{2.10}$$
mit $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$, wobei ln der natürliche Logarithmus für reelle Zahlen ist. Man nennt dies den **Hauptwert des komplexen Logarithmus**. Wegen $e^{z+2k\pi i} = e^z$ gilt auch
$$\operatorname{Ln}_k(w) := \ln|w| + i\, \arg(w) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{2.11}$$
Für $k \neq 0$ nennt man dies die **Nebenzweige des komplexen Logarithmus**.

Vorsicht (S. 31)

Die Regel $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$ gilt **nicht** im Allgemeinen!

Allgemeine Potenzen in $\mathbb{C}$ (S. 31)

Für $a, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ definiert man wie im Reellen:
$$a^z := e^{z\cdot \operatorname{Ln}(a)} \tag{2.12}$$

Rechenregeln (S. 31)

Für $z, w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$a^z \cdot a^w = a^{z+w} \tag{2.13}$$
$$\left(a^z\right)^n = a^{n\cdot z} \tag{2.14}$$

2.5 Die trigonometrischen Funktionen

Definition 2.2 (S. 31)

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:
$$\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \tag{2.15}$$
$$\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \tag{2.16}$$
$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{falls } \cos z \neq 0, \tag{2.17}$$
$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{falls } \sin z \neq 0. \tag{2.18}$$

Sinus und Kosinus hyperbolicus (Formelsammlung)

Sinus hyperbolicus:
$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -i\, \sin(i\,x) \tag{2.19}$$
Kosinus hyperbolicus:
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cos(i\,x) \tag{2.20}$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen (S. 32)

1. Symmetrien:
$$\cos(-z) = \cos(z) \tag{2.21}$$
$$\sin(-z) = -\sin(z) \tag{2.22}$$
2. Additionstheoreme:
$$\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \tag{2.23}$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \tag{2.24}$$
3. Eulersche Gleichung:
$$e^{i\cdot z} = \cos z + i \sin z \tag{2.25}$$
Dies stellt **nicht** die Zerlegung in Real- und Imaginärteil dar, die sieht so aus:
$$e^{iz} = e^{i\,(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}\,(\cos x + i\, \sin x) \tag{2.26}$$
$$\operatorname{Re}(iz) = e^{-y}\, \cos x \tag{2.27}$$
$$\operatorname{Im}(iz) = e^{-y}\, \sin x \tag{2.28}$$
Mit Definition 2.2 gilt:
$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y + i\,(-\sin x \cdot \sinh y) \tag{2.29}$$
$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i\,(-\cos x \cdot \sinh y) \tag{2.30}$$
4. Periodizität:
$\cos z$ und $\sin z$ sind 2π-periodisch.
5. Nullstellen:
$$\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{(2k+1)\,\pi}{2}, \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{2.31}$$
$$\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\,\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \tag{2.32}$$
6. Keine Beschränktheit:
Es gilt **nicht**: $|\sin z| \le 1$ und $|\cos z| \le 1$
7. Stetigkeit:
Die trigonometrischen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig.

2.6 Wurzeln

Satz 2.2: n-te Wurzeln (S. 32)

Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, so ist jede der Zahlen
$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \tag{2.33}$$
eine n-te Wurzel von a.

$\sqrt[n]{0}$ (S. 33)

Für $a = 0$ setzt man $\sqrt[n]{0} := 0$.

Einheitswurzeln (S. 33)

Für $a = 1$ spricht man von den **Einheitswurzeln**. Wegen $a = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ laten die Einheitswurzeln nach Satz 2.2:

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \tag{2.34}$$

$$z_0 = 1 \tag{2.35}$$

Die n-ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - 1. \tag{2.36}$$

Hauptwert der n-ten Wurzel (S. 33)

Um für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Funktion $f(z) = \sqrt[n]{z}$ definieren zu können, muss man einen der n Werte $z_0, \dots, z_{n-1}$ auswählen und definiert daher die Funktion

$$\sqrt[n]{z} := z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{2.37}$$

und spricht vom **Hauptwert der n-ten Wurzel**.

2.7 Möbius-Transformationen

Möbius-Transformation (S. 34)

Die gebrochen-linearen Funktionen oder **Möbius-Transformationen** haben die Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \; ad - bc \neq 0. \tag{2.38}$$

Erweiterung der komplexen Zahlen (S. 34)

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, erweitert man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zur **abgeschlossenen komplexen Ebene**

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \tag{2.39}$$

Erweiterung der Möbius-Transformation mit $\hat{\mathbb{C}}$ (S. 34)

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \tag{2.40}$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \tag{2.41}$$

Umkehrabbildung der Möbius-Transformation (S. 34)

Durch (2.38), (2.40) und (2.41) ist eine bijektive Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiert. Die Umkehrabbildung ist ebenfalls eine Möbius-Transformation:

$$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(w) = z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0 \tag{2.42}$$

Verknüpfung zweier Möbius-Transformationen (S. 34)

Die Verknüpfung $w = (f \circ g)(z)$ zweier Möbius-Transformationen vom Typ (2.38) ergibt wieder eine Möbius-Transformation.

Satz 2.3 (S. 34)

Jede Möbius-Transformation entsteht durch Hintereinanderausführung von Abbildungen der folgenden Art:

Drehstreckung:

$$z \mapsto u \cdot z \tag{2.43}$$

Translation:

$$z \mapsto z + v \tag{2.44}$$

Inversion:

$$z \mapsto \frac{1}{z} \tag{2.45}$$

Satz 2.4 (S. 35)

Die Möbius-Transformation ist kreis-, winkel- und orientierungstreu, d.h.:

a) Kreise in $\mathbb{C}$ werden auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet. Geraden in $\mathbb{C}$ werden auf Kreise oder Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet.

b) Zwei Kurven in der z-Ebene schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Bildkurven in der w-Ebene.

c) Die linke Seite eines orientierten Kreises (bzw. einer orientierten Gerade) wird auf die linke Seite des Bildkreises bzw. der Bildgeraden abgebildet.

Kreisgleichung (S. 35)

$$\left(\frac{x - x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{r}\right)^2 = 1 \tag{2.46}$$

Satz 2.5 (S. 36)

Zu je drei beliebig vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und drei weiteren paarweise verschiedenen Punkten $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine Möbius-Transformation f mit der Eigenschaft $f(z_1) = w_1$ und $f(z_2) = w_2$ und $f(z_3) = w_3$.

3 Potenzreihen

3.1 Unendliche Reihen

Unendliche Reihe (S. 39)

Die mit einer komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ gebildete Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \quad n \geq 0, \tag{3.1}$$

heißt **unendliche Reihe**, sie wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{oder} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \cdots \tag{3.2}$$

bezeichnet.

Konvergenz, Divergenz (S. 39)

Man sagt, die Reihe **konvergiert** gegen $s \in \mathbb{C}$, bzw. sie hat die **Summe** $s \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = s, \tag{3.3}$$

wenn

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (z_0 + z_1 + z_2 + \cdots) = s. \tag{3.4}$$

Die Reihe („Summe") **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

Absolute Konvergenz (S. 39)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ heißt **absolut konvergent**, wenn die reelle Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Satz 3.1 (S. 39)

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergiert.} \tag{3.5}$$

Satz 3.2: Majorantenkriterium (S. 40)

Es gelte $|z_k| \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} bk \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent.} \tag{3.6}$$

Satz 3.3: Quotientenkriterium (S. 40)

Es gelte $z_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Dann folgt:

a) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent,

b) $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ divergent.

Geometrische Reihe (S. 40)

Wie im Reellen gilt für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{3.7}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \tag{3.8}$$

3.2 Potenzreihen

Potenzreihe (S. 40)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \tag{3.9}$$

mit $a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$ heißt **Potenzreihe** mit **Zentrum** z_0 oder **Entwicklungspunkt** z_0 und **Koeffizienten** a_k.

Achtung: Es dürfen nur nichtnegative Potenzen von $z - z_0$ auftreten!

Konvergenzrdius (S. 40)

Wie im Reellen zeigt man, dass für eine Potenzreihe (3.9) nur die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Die Potenzreihe konvergiert nur für $z = z_0$.
3. Es gibt eine positive Zahl R, so dass die Potenzreihe für alle z mit
   - $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert,
   - $|z - z_0| > R$ divergiert,
   - $|z - z_0| = R$ konvergiert oder divergiert (auch gemischt möglich).

Die Zahl R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ der **Konvergenzkreis**. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen definiert man im Fall 1 den Konvergenzradius $R = \infty$ und im Fall 2 den Konvergenzradius $R = 0$.

Berechnung Konvergenzrdius (S. 41)

Zur Berechnung des Konvergenzradius R ist häufig das Quotienten oder Wurzelkriterium anwendbar:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in [0, \infty], \tag{3.10}$$

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty]. \tag{3.11}$$

Der Grenzwert (3.10) existiert nicht immer. Der größte Häufungswert (3.11) einer Folge existiert jedoch immer.

3.3 Gleichmäßige Konvergenz

Gleichmäßige Konvergenz (S. 42)

$(f_n(z))$ konvergiert auf $D \subseteq \mathbb{C}$ **gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion** $f(z)$, wenn es zu jedem beliebig kleinen Radius $\varepsilon > 0$ einen für alle $z \in D$ gemeinsamen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für $n \geq N(\varepsilon)$ sämtliche Funktionswerte $f_n(z)$ in die ε-Umgebung von $f(z)$ fallen:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D,\ n \geq N(\varepsilon). \tag{3.12}$$

Punktweise Konvergenz (S. 42)

Bei **punktweiser Konvergenz** ist die „Konvergenzgeschwindigkeit" evtl. von Punkt zu Punkt verschieden. Bei punktweiser Konvergenz gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D,\ n \geq N(\varepsilon, z). \tag{3.13}$$

Sätzle: Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Eine Potenzreihe (3.9) mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe D innerhalb ihres Konvergenzkreises ($D := \{z : |z - z_0| \leq r < R\}$) gleichmäßig konvergent.

Eigenschaften bei gleichmäßiger Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Für $s_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ und $s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt:

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D,\ n \geq N(\varepsilon). \tag{3.14}$$

Gleichmäßige Konvergenz garantiert die Eigenschaften der **Grenzfunktion**:

$$s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R. \tag{3.15}$$

Insbesondere ist deshalb $s(z)$ in der Menge $\{z : |z - z_0| < R\}$ **stetig**. Die Stetigkeit einer Potenzreihe in z^* können wir auch wie folgt schreiben:

$$\lim_{z\to z^*} s(z) = s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n. \tag{3.16}$$

Alle komplexen Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind, sind stetig.

4 Differentiation, analytische Funktionen

4.1 Definition und Rechenregeln

Definition 4.1 (S. 43)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$. f heißt in $z_0 \in G$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{4.1}$$

im Sinne von Definition 2.1 existiert. $f'(z_0)$ heißt **Ableitung** von f an der Stelle z_0. $f : g \to \mathbb{C}$ heißt **analytisch** (oder **holomorph**), wenn $f'(z)$ für jedes $z \in G$ existiert.

Bemerkungen, Rechenregeln (S. 43)

1. Der Grenzwert des Differenzenquotienten muss bei jeder Annäherung von z an z_0 existieren und gleich $f'(z_0)$ sein. Andernfalls ist die Funktion an z_0 nicht differenzierbar.
2. Differenzierbare Funktionen sind stetig.
3. Sind f und g differenzierbar (bzw. analytisch), so sind auch die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (für $g(z) \neq 0$) und $f \circ g$ differenzierbar (bzw. analytisch), und es gelten die folgenden Rechenregeln:
   a) Linearität:
   $$(a\,f + b\,g)' = a\,f' + b\,g' \tag{4.2}$$
   b) Produktregel:
   $$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{4.3}$$
   c) Quotientenregel:
   $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{4.4}$$
   insbesondere
   $$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \tag{4.5}$$
   d) Kettenregel:
   $$\big(f(g)\big)' = f'(g) \cdot g' \tag{4.6}$$

Satz 4.1: Potenzreihen sind analytisch und unendlich oft diff.bar (S. 45)

Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ stellt im Inneren des Konvergenzkreises eine analytische Funktion dar.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{4.7}$$

ist analytisch in $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k (z - z_0)^{k-1} \tag{4.8}$$

Die abgeleitete Reihe ist wieder eine Potenzreihe und hat denselben Konvergenzradius R. Das Ableiten kann also beliebig oft wiederholt werden. Die Koeffizienten lassen sich aus der Funktion f berechnen und sind daher durch f eindeutig bestimmt:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{4.9}$$

4.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Satz 4.2: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (S. 47)

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar an $z_0 = x_0 + i\,y_0$ und gilt

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y), \tag{4.10}$$

so erfüllen u und v die **Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen** an der Stelle (x_0, y_0):

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \tag{4.11}$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \tag{4.12}$$

Ist f differenzierbar für alle $z \in G$, wobei G eine offene Menge in $\mathbb{C}$ ist, so gelten diese Differentialgleichungen in ganz G.

Folgerung aus Satz 4.2: Funktionen mit Ableitung 0 sind konstant (S. 47)

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ ein in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktion mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Dann gilt: $f(z) = \text{const}$.

4.3 Geometrische Deutung der Ableitung

Satz 4.3 (S. 47)

Ist $f: G \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f'(z) \neq 0$ in dem Gebiet G, dann ist die Abbildung $f: G \to \mathbb{C}$ in allen Punkten $z_0 \in G$ **lokal konform** (d.h. **winkeltreu** und **orientierungstreu**), d.h. der Schnittwinkel zwischen zwei glatten Kurven durch $z_0 \in G$ ist samt Drehsinn der gleiche wie für die beiden Bildkurven durch $f(z_0)$.

4.4 Das komplexe Potenzial

4.5 Harmonische Funktionen

Harmonische Funktionen (S. 50)

Ist $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ eine analytische Funktion, so gilt aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \tag{4.13}$$
$$u_y = -v_x. \tag{4.14}$$

Es folgt $u_{xx} = v_{yx}$ und $u_{yy} = -v_{xy}$. Wegen $v_{xy} = v_{yx}$ haben wir: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Man schreibt dafür auch

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.15}$$

und nennt Funktionen dieser Eigenschaft **harmonisch**. Es gilt auch

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0. \tag{4.16}$$

(S. 50)

Es sei nun $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und es sei nur die Funktion $u(x,y)$ vorgegeben. Gesucht ist die Funktion $v(x,y)$, sodass

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{4.17}$$

eine analytische Funktion ist. Wir gehen wie folgt vor:

1. u_x und u_y berechnen
2. Aus dem Ansatz $v_y = u_x$ durch unbestimmte Integration nach y
$$v = \int u_x\,dy + c(x) \tag{4.18}$$
bestimmen.
3. Nach x differenzieren, $v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int u_x\,dy\right) + c'(x)$, dies mit $-u_y$ gleichsetzen und daraus $c(x)$ berechnen.
4. Zur analytischen Funktion (4.17) zusammensetzen.

5 Integration

5.1 Grundlagen

Kurve / Weg (S. 52)

Eine **Kurve** (oder ein **Weg**) C in der komplexen Ebene wird in der Form

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \text{mit } t \in [a;b] \subseteq \mathbb{R} \tag{5.1}$$

dargestellt. Stetigkeit und Differenzierbarkeit beziehen sich dabei auf die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Es gilt

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t). \tag{5.2}$$

Definition 5.1: Kurvenintegral (S. 52)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und durch $z(t)$, $t \in [a,b]$ sei eine **stetig differenzierbare** Kurve C gegeben. Dann heißt

$$\int_C f(z)\,dz := \int_a^b \underbrace{f(z(t)) \cdot z'(t)}_{\in\mathbb{C}}\,dt \tag{5.3}$$

$$:= \int_a^b \mathrm{Re}(f(z(t)) \cdot z'(t))\,dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(z(t)) \cdot z'(t))\,dt \tag{5.4}$$

das **Kurvenintegral** von f längs C. Für eine Kurve C, die aus endlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken $C_1, \ldots, C_n$ besteht, definiert man

$$\int_C f(z)\,dz := \int_{C_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz. \tag{5.5}$$

Kurvenintegral, einfach geschlossene Kurve (S. 52)

Ist C eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird (das Innere liegt links in Durchlaufrichtung), so nennt man C **einfach geschlossen** und schreibt

$$\oint_C f(z)\,dz \tag{5.6}$$

für das Kurvenintegral. Bei einem Kreis mit $z(t) = a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$ schreibt man

$$\oint_{|z-a|=r} f(z)\,dz. \tag{5.7}$$

Das Fundematalintegral (S. 52)

Ein zentraler Baustein der Funktionentheorie ist das **Fundamentalintegral**, das wichtigste Integral der Analysis! Für $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ gilt:

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m\,dz = 0, \qquad \text{falls } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1 \tag{5.8}$$

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i \qquad (m = -1) \tag{5.9}$$

Berechnung des Integrals im Skript, Seiten 52-53.

Satz 5.1 (S. 54)

Aus Definition 5.1 ergeben sich die folgenden Regeln:

a) **Linearität**: Mit $a, b \in \mathbb{C}$ gilt
$$\int_C [a\,f(z) + b\,g(z)]\,dz = a\int_C f(z)\,dz + b\int_C g(z)\,dz \tag{5.10}$$

b) **Additivität bei zusammengesetzten Wegen**: $C = C_1 \cup \cdots \cup C_n$
$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz \tag{5.11}$$

c) **Abhängigkeit der Orientierung**: Für die zu C entgegengesetzt durchlaufende Kurve $C*$ gilt
$$\int_{C*} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz \tag{5.12}$$

d) **Abschätzung**:
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| =\leq \max_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \cdot (\text{Länge von } C) \tag{5.13}$$

5.2 Der Cauchy-Integralsatz

Satz 5.2: Cauchy-Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie (S. 55)

Für jede analytische Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und für jede stückweise stetig differenzierbar einfach geschlossene Kurve C in G gilt

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{5.14}$$

Satz 5.3: Wegunabhängigkeit des Integrals (S. 57)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt für zwei Punkte $z_0, z_1 \in G$ und zwei beliebige (stückweise stetig differenzierbare) Kurven C_1 und C_2 in G, die von z_0 nach z_1 führen:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \tag{5.15}$$

Satz 5.4: Stammfunktion mittels Integral (S. 58)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ analytisch, $Z_0 \in G$ fest gewählt und $z \in G$ beliebig. Ist C irgendeine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve von z_0 nach z in G, so ist das wegunabhängige Integral

$$I(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw := \int_C f(w)\,dw \tag{5.16}$$

eine Stammfunktion von f : $I'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Bemerkung (S. 58)

Wie im Reellen gilt: zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, also:

$$F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \quad \Rightarrow \quad F_1(z) = F_2(z) + c, \quad c \in \mathbb{C} \tag{5.17}$$

Damit ergibt sich: Ist F eine **beliebige** Stammfunktion von f, so folgt:

$$\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = I(z) = F(z) + c. \tag{5.18}$$

Wegen $0 = \displaystyle\int_{z_0}^{z_0} f(w)\,dw = F(z_0) + c$ folgt $c = -F(z_0)$, d.h.:

$$\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = F(z) - F(z_0) \tag{5.19}$$

5.3 Die Cauchy-Integralformel

Satz 5.5 (S. 59)

Ist G nicht einfach zusammenhängend (mit „Löchern“) und f analytisch auf G, dann gilt für je zweifach geschlossene Kurven C_1 und C_2 aus G, die dieselbe Ausnahmemenge („Löcher“) in gleicher Richtung einmal umlaufen:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz. \tag{5.20}$$

Satz 5.6 (Cauchy-Integralformel)

S. 60 Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $F : G \to \mathbb{C}$ analytisch, C eine einfach geschlossene Kurve in G, deren Inneres danz in G liegt. Dann gilt für alle z im Innern von C:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z}\,dw \tag{5.21}$$

6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel

6.1 Die Taylor-Reihe

Satz 6.1 (S. 61)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $w \neq a$. Dann gilt

$$|w - a| > |z - a| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(w - a =^{k+1})}, \tag{6.1}$$

(Potenzreihe bzgl. z)

$$|w - a| < |z - a| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{w - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-a)^k}{(z - a =^{k+1})}. \tag{6.2}$$

(keine Potenzreihe bzgl. z)

Bemerkung (S. 61)

Eine analytische Funktion f ist beliebig oft differenzierbar und (lokal) immer durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

Satz 6.2: Taylor-Reihe (S. 62)

Jede im Gebiet G analytische Funktion f besitzt innerhalb jeder r-Umgebung $K_r(a)$ (vgl. Def. 1.2, S. 1), die ganz in G liegt, die Potenzreihendarstellung (**Taylor-Entwicklung**)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k, \qquad z \in K_r(a); \tag{6.3}$$

insbesondere ist f in G beliebig oft differenzierbar mit den Ableitungen (**verallgemeinerte Cauchy-Integralformeln**)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \qquad |w - a| < \rho < r, n \in \mathbb{N}_0. \tag{6.4}$$

Folgerung (S. 62)

Ist f in ganz $\mathbb{C}$ analytisch (also $G = \mathbb{C}$), so hat die Taylor-Reihe den Konvergenzradius $R = \infty$.

Regel von l'Hospital (S. 63)

Sind f und g analytische Funktionen mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und gilt $g'(z_0) \neq 0$, so folgt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g(z_0)}. \tag{6.5}$$

Bemerkung (S. 63)

Ist R der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von f, so befindet sich auf dem Rand des Konvergenzkreises immer eine Stelle, an der f nicht differenzierbar ist („Singularität“). Für die Funktion $\mathrm{Ln}(1+z)$ ist diese Singularität bei -1.

Definition 6.1 (S. 64)

Man sagt, eine analytische Funktion habe eine Nullstelle a der **Ordnung** m, wenn gilt

$$f(z) = (z - a)^m \cdot f_1(z) \quad \text{in einer Umgebung } K_r(a) \tag{6.6}$$

mit einer analytischen Funktion f_1, für die gilt $f_1(a) \neq 0$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \tag{6.7}$$

Satz 6.3: Identitätssatz (S. 64)

Für analytische Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G sind äquivalent:

a) $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$

b) $f(z_n) = g(z_n)$ für alle Punkte (z_n) einer unendlichen Folge mit verschiedenen Folgengliedern und Häufungswert a in G.

6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz 6.4: Satz von Liouville (S. 65)

Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch und beschränkt ($|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$), so ist f eine konstante Funktion: $f(z) = \text{const}$.

Satz 6.5: Fundamentalsatz der Algebra (S. 66)

Jedes nichtkonstante Poylnom

$$p(z) = a_m\, z^n + \cdots + a_1\, z + a_0, \quad n \geq 1, a_n \neq 0 \tag{6.8}$$

hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei wir eine Nullstelle der Ordnung m (vgl. Def. 6.1) m-mal zählen.

6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

Mittelwerteigenschaft (S. 66)

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, G ein Gebiet, so gilt gemäß Cauchy-Integralformel (Satz 5.6):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\rho} \frac{f(w)}{w - z}\,dw. \tag{6.9}$$

Schreiben wir den Kreis $|w - z| = \rho$ in der Form $C = \{w : w = z + \rho\, e^{it},\ t \in [0, 2\pi)\}$, so folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + \rho\, e^{it}\right)}{z + \rho\, e^{it} - z} \cdot i \cdot \rho\, e^{it}\,dw \tag{6.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \rho\, e^{it}\right)\,dt \tag{6.11}$$

Der Funktionswert $f(z)$ ist der mittlere Wert aller Funktionswerte $f\left(z + \rho\, e^{it}\right)$ auf der Kreislinie C (**Mittelwerteigenschaft**).

Satz 6.6: Maximumprinzip (S. 67)

Ist G ein beschränktes Gebiet, $f : G \cup \partial G \to \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant, dann liegt jede Maximalstelle z_0 der Funktion $|f(z)|$ auf dem Rand von G (und nicht im Innern von G), d.h. die Betragsfläche $z \to |f(z)|$ hat keine Gipfel im Innern des Gebiets.

6.4 Folgen analytischer Funktionen

Lemma 6.1 (S. 68)

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, und für jede im Gebiet G verlaufende einfach geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Kurve C, sie samt ihres Innern in G liegt, gelte $\oint_C f(z)\,dz = 0$. Dann ist f analytisch in G.

Satz 6.7: Weierstraß (S. 68)

Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen in dem Gebiet G, so ist auch die Grenzfunktion f analytisch in G. Es gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(z) = f'(z). \tag{6.12}$$

Satz 6.8 (S. 69)

Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen mit Grenzfunktion f in dem Gebiet G, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz \qquad (n \to \infty) \tag{6.13}$$

für jede stpckweise differenzierbare Kurve C in G.

Bemerkung (S. 69)

Da in Satz 6.8 $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ gilt, können wir auch schreiben:

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz, \tag{6.14}$$

falls die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

6.5 Eigenschaften analytischer Funktionen (Zusammenfassung)

Eigenschaften analytischer Funktionen (S. 70)

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ und C eine einfach geschlossene Kurve in G. Dann gilt:

1. **Cauchy-Integralsatz** (Satz 5.2):
$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{6.15}$$
2. $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$ ist wegunabhängig (Satz 5.3); $F'(z) = f(z)$.
3. **Cauchy-Integralformeln** (Sätze 5.6, 6.2):
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.16}$$
für alle z aus dem Inneren von C.
4. **Taylor-Entwicklung um** $a \in G$ (Satz 6.2):
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \tag{6.17}$$
in jeder offenen Kreisscheibe $|z-a| < r$, die ganz in G liegt.
5. Im Fall $G = \mathbb{C}$ gilt der **Satz von Liouville** (Satz 6.4) für beschränkte, analytische Funktionen.
6. **Identitätssatz** (Satz 6.3)
7. **Mittelwerteigenschaft**:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + \rho\, e^{it}\right)\,dt \qquad z \in G. \tag{6.18}$$
8. **Maximumprinzip** (Satz 6.6): Ist f nicht konstant, so nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an (falls G beschränkt).
9. **Identitätssatz** (Satz 6.3)
10. **Konvergenzsätze** (Sätze 6.7, 6.8): Ist (f_n) eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge analytische Funktionen, so konvergieren auch die ersten Ableitungen und die Kurvenintegrale der Funktionen f_n gegen die erste Ableitung bzw. das Kurvenintegral von f.

7 Laurent-Reihen und Singularitäten

7.1 Laurent-Reihen

Satz 7.1: Laurent-Reihen (S. 72)

Es sei f im Kreisring $K_{r,R}(a) = \{z : 0 \le r < |z-a| < R\}$ analytisch, wobei $0 \le r < r \le \infty$. Dann gilt:

a) $f(z)$ lässt sich für alle $z \in K_{r,R}(a)$ als **Laurent-Reihe** schreiben:
$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} \\ &= \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{7.1}$$

b) Die Koeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt durch ($n \in \mathbb{Z}$, $r < \rho < R$):
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw. \tag{7.2}$$

7.2 Isolierte Singularitäten

Isolierte Singularität, Hauptteil, Nebenteil (S. 75)

Man nennt eine Singularität von f **isoliert**, wenn f an z_0 nicht definiert ist, aber in $\{z : 0 < |z-z_0| < r\}$ analytisch ist. Nach Satz 7.1 besitzt f die Laurent-Entwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n, \qquad 0 < |z-z_0| < r. \end{aligned} \tag{7.3}$$

In dieser Entwicklung nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \text{den } \textbf{Hauptteil} \text{ und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad \text{den } \textbf{Nebenteil} \text{ (oder analytischen Anteil).}$$

Die Koeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt durch (7.2).

Definition 7.1 (S. 75)

Die isolierte Singularität z_0 mit Laurent-Entwicklung (7.3) heißt

a) **hebbar**, wenn der Hauptteil verschwindet; d.h. wenn $c_{-n} = 0$ für alle $n \ge 1$,

b) **Pol der Ordnung** m, $m \ge 1$, wenn im Hauptteil $c_{-m} \ne 0$ und $c_{-n} = 0$ für alle $n > m$,

c) **wesentlich**, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten $\ne 0$ sind.

Isolierte Singularität, Hauptteil, Nebenteil (S. 75)

Die Laurent-Reihe um eine isolierte Singularität z_0.

a) z_0 ist hebbar, genau dann wenn gilt:
$$f(z) = c_0 + c_1\,(z-z_0) + c_2\,(z-z_0)^2 + \cdots . \tag{7.4}$$

b) z_0 ist Pol der Ordnung m, genau dann wenn gilt:
$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \text{analytisch} \quad (c_{-m} \ne 0) \tag{7.5}$$
$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} f_1(z), \quad f_1(z) \text{ analytisch in } z_0, \quad f_1(z_0) \ne 0 \tag{7.6}$$

c) z_0 ist wesentlich, genau dann wenn gilt:
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \text{analytisch}, \quad \text{unendlich viele } c_{-n} \ne 0. \tag{7.7}$$

Satz 7.2: Hebbare Singularität (S. 76)

Eine isolierte Singularität z_0 ist genau dann hebbar, wenn gilt

$$|f(z)| \le C \quad \text{für } 0 \le |z-z_0| \le \varepsilon \qquad (*) \tag{7.8}$$

(f ist beschränkt) für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

Satz 7.3: Singularität mit Pol der Ordnung m (S. 77)

Eine isolierte Singularität z_0 ist genau dann ein Pol der Ordnung m, wenn die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z)} \;(z \ne z_0) \quad \text{mit} \quad g(z_0) := 0 \tag{7.9}$$

an z_0 eine Nullstelle der Ordnung m besitzt.

Polstellen bei rationaler Funktion ohne gemeinsame Nullstellen (S. 77)

Bei einer **rationalen** Funktion ohne gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner kommen als Singularitäten nur **Polstellen** in Frage.

Satz 7.4 (S. 77)

Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol, wenn gilt

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty. \tag{7.10}$$

Satz 7.5: Satz von Picard (S. 78)

Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so nimmt f in **jeder** Umgebung von z_0 **jeden** Wert aus $\mathbb{C}$ (mit höchstens einer Ausnahme) als Funktionswert unendlich oft an.

8 Residuentheorie

8.1 Der Residuensatz

8.2 Methoden der Residuenberechnung

8.3 Beispiele zum Residuensatz

8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

8.5 Meromorphe Funktionen

9 Anhang

9.1 Trigonometrische Funktionen

φ	φ	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
0°	0	1	0	1	0
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0.9659	0.2588
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0.866	0.5
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	0.7071
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	0.866
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	0.2588	0.9659
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	1
105°	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-0.2588	0.9659
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	0.866
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	0.7071
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	-0.866	0.5
165°	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	-0.9659	0.2588
180°	π	-1	0	-1	0
195°	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-0.9659	-0.2588
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	-0.866	-0.5
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	-0.7071
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	-0.866
255°	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	-0.2588	-0.9659
270°	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	-1
285°	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0.2588	-0.9659
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	-0.866
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	-0.7071
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0.866	-0.5
345°	$\frac{23\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	0.9659	-0.2588