1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen (S. 7)

Imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

Alle Zahlen der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

bilden die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y : \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

Realteil von z:

$$\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Imaginärteil von z:

$$\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

Addition (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u) + i\,(y + v) \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

Inverses Element bzgl. Addition (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$.

$$-z = (-x) + i\,(-y) = -x - i\,y \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$.

$$z \cdot w := (x + i\,y) \cdot (u + i\,v) = (x\,u - y\,v) + i\,(x\,v + y\,u) \in \mathbb{C} \tag{1.8}$$

Inverses Element bzgl. Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(x + i\,y)} = \frac{x - i\,y}{(x + i\,y)\,(x - i\,y)} = \frac{x - i\,y}{x^2 - i^2\,y^2} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Satz 1.1: Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ (S. 8)

Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bilden mit oben definierter Addition (1.6) bzw. Multiplikation (1.8) einen Körper. Das Einselement dieses Körpers ist

$$1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{C} \tag{1.10}$$

und das Nullelement ist

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}. \tag{1.11}$$

Es gelten somit die Rechenregeln (für $z, v, w \in \mathbb{C}$; $z = x + i \cdot y$):

a) $(z + v) + w = z + (v + w)$ Assioziativgesetz

b) $z + 0 = z$ neutrales Element

c) $z + (-z) = 0$ inverses Element; wobei (1.7) gilt

d) $z + w = w + z$ Kommutativgesetz

e) $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot v)$ Assoziativgesetz

f) $z \cdot 1 = z$ neutrales Element

g) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ für $z \neq 0$ inverses Element; wobei (1.9) gilt

h) $z \cdot w = w \cdot z$ Kommutativgesetz

i) $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$ Distributivgesetz

Binomische Formel (S. 10)

Mit $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \tag{1.12}$$

Definition 1.1: Absolutbetrag, konjugiert komplexe Zahl (S. 10)

Es sei $z = x + i \cdot y = (x, y) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

der **Absolutbetrag** von z und

$$\overline{z} := x - i \cdot y$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Absolutbetrag mit konjugiert komplexer Zahl (S. 11)

Wegen $z \cdot \overline{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ folgt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \tag{1.13}$$

Abstand komplexer Zahlen (S. 11)

Sei $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ und $w = u + i\,v \in \mathbb{C}$. Dann ist ihr Abstand:

$$|z - w| = |(x - u) + i\,(y - v)| \overset{\text{Def. 1}}{=} \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \tag{1.14}$$

Satz 1.2: Rechenregeln (S. 11)

Für $z = x + i\,y$, $w = u + i\,v$ gelten folgende Rechenregeln:

1. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $(w \neq 0)$
4. $\overline{(\overline{z})} = z$
5. $|\overline{z}| = |z|$
6. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2}$
7. $\mathrm{Re}(z_1 + \dots + z_n) = \mathrm{Re}(z_1) + \dots + \mathrm{Re}(z_n)$
$\mathrm{Im}(z_1 + \dots + z_n) = \mathrm{Im}(z_1) + \dots + \mathrm{Im}(z_n)$
8. $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$
$\mathrm{Im}(z) \leq |z|$
9. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $(w \neq 0)$

Dreiecksungleichung (S. 12)

Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt (wie im Reellen) für den Betrag im Komplexen die **Dreiecksungleichung**:

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \tag{1.15}$$

Allgemein gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} z_k\,|z_k| \tag{1.16}$$

Definition 1.2: Kreisscheibe, r-Umgebung einer komplexen Zahl (S. 12)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Dann ist die Menge

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < r\} \tag{1.17}$$

die **(offene) Kreisscheibe** um a mit Radius $r > 0$ (oder **r-Umgebung** von a)

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (S. 14)

Eine komplexe Zahl $z = x + i\,y, z = 0$, ist eindeutig bestimmt durch den **Betrag**

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.18}$$

und durch das **Argument**

$$\arg(z) := \varphi,\ (0 \le \varphi < 2\pi). \tag{1.19}$$

Es gilt:

$$x = |z| \cdot \cos\varphi \text{ und } y = |z| \cdot \sin\varphi. \tag{1.20}$$

Man nennt

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \tag{1.21}$$

die **Polarkoordinatendarstellung** von $z \neq 0$. Es gilt auch:

$$z = r \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)]\,,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1.22}$$

Umrechnung zwischen Darstellungen (S. 15)

Für die Umrechnung zwischen den Darstellungen $z = x + i\,y$ und $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ gelten folgende Regeln:

1. Gegeben sei $z = x + i\,y \neq 0$. Mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \tag{1.23}$$

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{für } y \ge 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

gilt

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,. \tag{1.25}$$

2. Gegeben sei $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ mit $r > 0,\ \varphi \in [o, 2\pi)$. Mit

$$x := r \cdot \cos\varphi \text{ und} \tag{1.26}$$

$$y := r \cdot \sin\varphi \tag{1.27}$$

gilt

$$z = x + i\,y. \tag{1.28}$$

Satz 1.3 (S. 16)

Sind $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)\,, \quad w = |w| \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)\,, \tag{1.29}$$

so gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)]\,, \tag{1.30}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]\,. \tag{1.31}$$

Folgerung (S. 16)

Aus Satz 1.3 folgt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi} \tag{1.32}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi} \tag{1.33}$$

1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)

Reelle Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte reelle Exponentialfunktion ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{1.34}$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \tag{1.35}$$

Komplexe Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte Komplexe Exponentialfunktion ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{1.36}$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \tag{1.37}$$

Eulersche Gleichung (S. 18)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + i\,y$ gilt:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\sin(y) \qquad \text{Eulersche Gleichung} \tag{1.38}$$

$$e^z = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x \cdot e^{i\,y} = e^x \cdot [\cos(y) + i\,\sin(y)] \tag{1.39}$$

Eulersche Identität (S. 18)

Aus der Eulerschen Gleichung folgt sofort die Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Satz 1.4 (S. 19)

1. Es gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos y = \operatorname{Re}\left(e^{iy}\right) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \tag{1.40}$$

$$\sin y = \operatorname{Im}\left(e^{iy}\right) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{1.41}$$

2. Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \tag{1.42}$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ schreiben.

3. Für $z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\psi}$ gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{\varphi + \psi} \tag{1.43}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{\varphi - \psi}\ (w \neq 0). \tag{1.44}$$

Satz 1.5: Formel von Moivre (S. 19)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \cos(n\,\varphi) + i\,\sin(n\,\varphi) \tag{1.45}$$

1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene

Definition 1.3: Gebiet (S.20)

Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängen ist.

Definition 1.4: einfach zusammenhängend (S.21)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn das Innere jedes in G verlaufenden geschlossenen Streckenzuges ganz zu G gehört, d.h. wenn G keine Löcher hat.

Randpunkt, Rand von D (S. 21)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, so heißt ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ein **Randpunkt** von D, wenn in jeder r-Umgebung (Def. 1.2 S. 1) von z sowohl Punkte aus D liegen, als auch Punkte, die nicht zu D gehören. Der **Rand von D** ist die Menge aller Randpunkte; er wird mit

$$\partial D \tag{1.46}$$

bezeichnet.

abgeschlossen (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Rand von D zu D gehört: $\partial D \subseteq D$. Man nennt $\overline{D} := D \cup \partial D$ den **Abschluss** von D.

beschränkt, unbeschränkt (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir nennen D **beschränkt**, wenn es eine (hinreichend große) Kreisscheibe $K_r(0)$ gibt, die D umfasst. Andernfalls heißt D **unbeschränkt**.

1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene

Definition 1.5: konvergente Folge (S. 22)

Man sagt, eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\geq 0}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \to z, \tag{1.47}$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in N(\varepsilon). \tag{1.48}$$

Konvergiert die Folge nicht, so nennt man sie **divergent**.

$z_n \to \infty$ (S. 23)

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, falls für die **reelle** Folge $(|z_n|)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty.$$

Rechenregeln konvergenter komplexer Folgen (S. 23)

Wie bei reellen Folgen ist der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge eindeutig bestimmt und es gelten die bekannten Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} z_n &= z\\ \lim_{n\to\infty} w_n &= w\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) & = z \pm w\\ \lim\limits_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) & = z \cdot w\\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} & = \dfrac{z}{w}\ (w_n, w \neq 0)\\ \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| & = |z|\end{cases} \tag{1.49}$$

2 Elementare Funktionen

2.1 Grundlagen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit

2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)

2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

2.5 Die trigonometrischen Funktionen

2.6 Wurzeln

2.7 Möbius-Transformationen

3 Potenzreihen

3.1 Unendliche Reihen

3.2 Potenzreihen

3.3 Gleichmäßige Konvergenz

4 Differentiation, analytische Funktionen

4.1 Definition und Rechenregeln

4.2 Die Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen

4.3 Geometrische Deutung der Ableitung

4.4 Das komplexe Potenzial

4.5 Harmonische Funktionen

5 Integration

5.1 Grundlagen

5.2 Der Cauchy-Integralsatz

5.3 Die Cauchy-Integralformel

6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel

6.1 Die Taylor-Reihe

6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra

6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

6.4 Folgen analytischer Funktionen

7 Laurent-Reihen und Singularitäten

7.1 Laurent-Reihen

7.2 Isolierte Singularitäten

8 Residuentheorie

8.1 Der Residuensatz

8.2 Methoden der Residuenberechnung

8.3 Beispiele zum Residuensatz

8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

8.5 Meromorphe Funktionen