

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen (S. 7)

Imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

Alle Zahlen der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

bilden die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

Realteil von z :

$$\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Imaginärteil von z :

$$\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Addition (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C} \quad (1.6)$$

Inverses Element bzgl. Addition (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$-z = (-x) + i(-y) = -x - iy \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

$$z \cdot w := (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C} \quad (1.8)$$

Inverses Element bzgl. Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(x + iy)} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Satz 1.1: Körpereigenschaften von \mathbb{C} (S. 8)

Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen bilden mit oben definierter Addition (1.6) bzw. Multiplikation (1.8) einen Körper. Das Einselement dieses Körpers ist

$$1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

und das Nullelement ist

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

Es gelten somit die Rechenregeln (für $z, v, w \in \mathbb{C}; z = x + iy$):

- a) $(z + v) + w = z + (v + w)$ Assoziativgesetz
- b) $z + 0 = z$ neutrales Element
- c) $z + (-z) = 0$ inverses Element; wobei (1.7) gilt
- d) $z + w = w + z$ Kommutativgesetz
- e) $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w)$ Assoziativgesetz
- f) $z \cdot 1 = z$ neutrales Element
- g) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ für $z \neq 0$ inverses Element; wobei (1.9) gilt
- h) $z \cdot w = w \cdot z$ Kommutativgesetz
- i) $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$ Distributivgesetz

Binomische Formel (S. 10)

Mit $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \quad (1.12)$$

Definition 1.1: Absolutbetrag, konjugiert komplexe Zahl (S. 10)

Es sei $z = x + i \cdot y = (x, y) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

der **Absolutbetrag** von z und

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Absolutbetrag mit konjugiert komplexer Zahl (S. 11)

Wegen $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ folgt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad (1.13)$$

Abstand komplexer Zahlen (S. 11)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Dann ist ihr Abstand:

$$|z - w| = |(x - u) + i(y - v)| \stackrel{\text{Def. 1.1}}{=} \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \quad (1.14)$$

Satz 1.2: Rechenregeln (S. 11)

Für $z = x + iy, w = u + iv$ gelten folgende Rechenregeln:

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$
4. $\overline{(\bar{z})} = z$
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
 $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$
7. $\operatorname{Re}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Re}(z_1) + \dots + \operatorname{Re}(z_n)$
 $\operatorname{Im}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Im}(z_1) + \dots + \operatorname{Im}(z_n)$
8. $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$
 $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$
9. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

Dreiecksungleichung (S. 12)

Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt (wie im Reellen) für den Betrag im Komplexen die **Dreiecksungleichung**:

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \quad (1.15)$$

Allgemein gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (1.16)$$

Definition 1.2: Kreisscheibe, r -Umgebung einer komplexen Zahl (S. 12)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Dann ist die Menge

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad (1.17)$$

die (**offene**) **Kreisscheibe** um a mit Radius $r > 0$ (oder **r -Umgebung** von a)

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (S. 14)

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$, $z \neq 0$, ist eindeutig bestimmt durch den **Betrag**

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.18)$$

und durch das **Argument**

$$\arg(z) := \varphi, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (1.19)$$

Es gilt:

$$x = |z| \cdot \cos \varphi \text{ und } y = |z| \cdot \sin \varphi. \quad (1.20)$$

Man nennt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (1.21)$$

die **Polarkoordinatendarstellung** von $z \neq 0$. Es gilt auch:

$$z = r \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

Umrechnung zwischen Darstellungen (S. 15)

Für die Umrechnung zwischen den Darstellungen $z = x + iy$ und $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ gelten folgende Regeln:

1. Gegeben sei $z = x + iy \neq 0$. Mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \quad (1.23)$$

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

gilt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \quad (1.25)$$

2. Gegeben sei $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ mit $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Mit

$$x := r \cdot \cos \varphi \text{ und} \quad (1.26)$$

$$y := r \cdot \sin \varphi \quad (1.27)$$

gilt

$$z = x + iy. \quad (1.28)$$

Satz 1.3 (S. 16)

Sind $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi), \quad w = |w| \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi), \quad (1.29)$$

so gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)], \quad (1.30)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]. \quad (1.31)$$

Folgerung (S. 16)

Aus Satz 1.3 folgt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.32)$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.33)$$

1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)**Reelle Exponentialfunktion (S. 17)**

Bekannte reelle Exponentialfunktion ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.34)$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (1.35)$$

Komplexe Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte Komplexe Exponentialfunktion ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.36)$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (1.37)$$

Eulersche Gleichung (S. 18)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + iy$ gilt:

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad \text{Eulersche Gleichung} \quad (1.38)$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \sin(y)] \quad (1.39)$$

Eulersche Identität (S. 18)

Aus der Eulerschen Gleichung folgt sofort die Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Satz 1.4 (S. 19)

1. Es gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos y = \operatorname{Re}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad (1.40)$$

$$\sin y = \operatorname{Im}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (1.41)$$

2. Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (1.42)$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ schreiben.

3. Für $z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\psi}$ gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i\varphi + i\psi} \quad (1.43)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{i\varphi - i\psi} \quad (w \neq 0). \quad (1.44)$$

Satz 1.5: Formel von Moivre (S. 19)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (1.45)$$

1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene**Definition 1.3: Gebiet (S.20)**

Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängen ist.

Definition 1.4: einfach zusammenhängend (S.21)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn das Innere jedes in G verlaufenden geschlossenen Streckenzuges ganz zu G gehört, d.h. wenn G keine Löcher hat.

Randpunkt, Rand von D (S. 21)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, so heißt ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ein **Randpunkt** von D , wenn in jeder r -Umgebung (Def. 1.2 S. 1) von z sowohl Punkte aus D liegen, als auch Punkte, die nicht zu D gehören. Der **Rand von D** ist die Menge aller Randpunkte; er wird mit

$$\partial D \quad (1.46)$$

bezeichnet.

abgeschlossen (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Rand von D zu D gehört: $\partial D \subseteq D$. Man nennt $\bar{D} := D \cup \partial D$ den **Abschluss** von D .

beschränkt, unbeschränkt (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir nennen D **beschränkt**, wenn es eine (hinreichend große) Kreisscheibe $K_r(0)$ gibt, die D umfasst. Andernfalls heißt D **unbeschränkt**.

1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene**Definition 1.5: konvergente Folge (S. 22)**

Man sagt, eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z, \quad (1.47)$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in N(\varepsilon). \quad (1.48)$$

Konvergiert die Folge nicht, so nennt man sie **divergent**.

$z_n \rightarrow \infty$ (S. 23)

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, falls für die **reelle** Folge $(|z_n|)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Rechenregeln konvergenter komplexer Folgen (S. 23)

Wie bei reellen Folgen ist der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge eindeutig bestimmt und es gelten die bekannten Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w} \quad (w_n, w \neq 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z| \end{array} \right. \quad (1.49)$$

2 Elementare Funktionen

2.1 Grundlagen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.1: Grenzwert, Stetigkeit (S. 27)

- Die Funktion f sei definiert in einer r -Umgebung (Kreisscheibe) um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, mit der Einschränkung, dass f am Punkt z_0 eventuell undefiniert ist. Die Zahl w_0 heißt **Grenzwert** von f für $z \rightarrow z_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (2.1)$$

wenn für jedes (beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (2.2)$$

Bei **beliebiger Annäherung** von z an z_0 müssen sich die Funktionswerte $f(z)$ also dem Wert w_0 annähern; andernfalls existiert der Grenzwert nicht!

- f heißt **stetig** in z_0 , wenn f in z_0 definiert ist und wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.3)$$

$\lim f(z) = \infty$ (S. 27)

Man schreibt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, falls gilt: $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)

Die komplexe e -Funktion (S. 27)

Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (2.4)$$

für $z = x + iy$. Man schreibt auch

$$f(z) = \exp(z). \quad (2.5)$$

- Gerade $x = x_0$ wird auf Kreis abgebildet.
- Gerade $y = y_0$ wird auf Halbgerade von 0 mit Winkel y_0 abgebildet.
- Der **Fundamentalstreifen**:

$$F := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq \pi\} \quad (2.6)$$

Satz 2.1 (S. 29)

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Periodizität (S. 30)

Die Funktion $f(z) = e^z$ hat die **Periode** $2k\pi i$, denn es gilt

$$f(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z = f(z). \quad (2.7)$$

Jeder Streifen der Form

$$S = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq (2k+1)\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.8)$$

wird bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet, da S durch Verschiebung um $2k\pi i$ aus F (2.6) entsteht.

2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Umkehrfunktion von e^z (S. 30)

$f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F (2.6) auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, daher existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow F, \quad w \mapsto z = f^{-1}(w) \quad (2.9)$$

Komplexer Logarithmus (S. 30)

Zu gegebenem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\operatorname{Ln}(w) := \ln|w| + i \arg(w) \quad (2.10)$$

mit $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$, wobei \ln der natürliche Logarithmus für reelle Zahlen ist. Man nennt dies den **Hauptwert des komplexen Logarithmus**. Wegen $e^{z+2k\pi i} = e^z$ gilt auch

$$\operatorname{Ln}_k(w) := \ln|w| + i \arg(w) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.11)$$

Für $k \neq 0$ nennt man dies die **Nebenzweige des komplexen Logarithmus**.

Vorsicht (S. 31)

Die Regel $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$ gilt **nicht** im Allgemeinen!

Allgemeine Potenzen in \mathbb{C} (S. 31)

Für $a, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ definiert man wie im Reellen:

$$a^z := e^{z \cdot \operatorname{Ln}(a)} \quad (2.12)$$

Rechenregeln (S. 31)

Für $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^z \cdot a^w = a^{z+w} \quad (2.13)$$

$$(a^z)^n = a^{n \cdot z} \quad (2.14)$$

2.5 Die trigonometrischen Funktionen

Definition 2.2 (S. 31)

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.15)$$

$$\sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (2.16)$$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{falls } \cos z \neq 0, \quad (2.17)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{falls } \sin z \neq 0. \quad (2.18)$$

Sinus und Kosinus hyperbolicus (Formelsammlung)

Sinus hyperbolicus:

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix) \quad (2.19)$$

Kosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cos(ix) \quad (2.20)$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen (S. 32)

1. Symmetrien:

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad (2.21)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad (2.22)$$

2. Additionstheoreme:

$$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \quad (2.23)$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \quad (2.24)$$

3. Eulersche Gleichung:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (2.25)$$

Dies stellt **nicht** die Zerlegung in Real- und Imaginärteil dar, die sieht so aus:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} (\cos x + i \sin x) \quad (2.26)$$

$$\operatorname{Re}(iz) = e^{-y} \cos x \quad (2.27)$$

$$\operatorname{Im}(iz) = e^{-y} \sin x \quad (2.28)$$

Mit Definition 2.2 gilt:

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y + i(-\sin x \cdot \sinh y) \quad (2.29)$$

$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i(-\cos x \cdot \sinh y) \quad (2.30)$$

4. Periodizität:

$\cos z$ und $\sin z$ sind 2π -periodisch.

5. Nullstellen:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

6. Keine Beschränktheit:

Es gilt **nicht**: $|\sin z| \leq 1$ und $|\cos z| \leq 1$

7. Stetigkeit:

Die trigonometrischen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig.

2.6 Wurzeln**Satz 2.2: n -te Wurzeln (S. 32)**

Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, so ist jede der Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.33)$$

eine n -te Wurzel von a .

 $\sqrt[n]{0}$ (S. 33)

Für $a = 0$ setzt man $\sqrt[n]{0} := 0$.

Einheitswurzeln (S. 33)

Für $a = 1$ spricht man von den **Einheitswurzeln**. Wegen $a = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ lauten die Einheitswurzeln nach Satz 2.2:

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.34)$$

$$z_0 = 1 \quad (2.35)$$

Die n -ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - 1. \quad (2.36)$$

Hauptwert der n -ten Wurzel (S. 33)

Um für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Funktion $f(z) = \sqrt[n]{z}$ definieren zu können, muss man einen der n Werte z_0, \dots, z_{n-1} auswählen und definiert daher die Funktion

$$\sqrt[n]{z} := z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (2.37)$$

und spricht vom **Hauptwert der n -ten Wurzel**.

Möbius-Transformation (S. 34)

Die gebrochen-linearen Funktionen oder **Möbius-Transformationen** haben die Form

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0. \quad (2.38)$$

Erweiterung der komplexen Zahlen (S. 34)

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, erweitert man die komplexen Zahlen \mathbb{C} zur **abgeschlossenen komplexen Ebene**

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (2.39)$$

Erweiterung der Möbius-Transformation mit $\hat{\mathbb{C}}$ (S. 34)

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \quad (2.40)$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \quad (2.41)$$

Umkehrabbildung der Möbius-Transformation (S. 34)

Durch (2.38), (2.40) und (2.41) ist eine bijektive Abbildung $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definiert. Die Umkehrabbildung ist ebenfalls eine Möbius-Transformation:

$$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(w) = z = \frac{dw-b}{-cw+a}, \quad ad-bc \neq 0 \quad (2.42)$$

Verknüpfung zweier Möbius-Transformationen (S. 34)

Die Verknüpfung $w = (f \circ g)(z)$ zweier Möbius-Transformationen vom Typ (2.38) ergibt wieder eine Möbius-Transformation.

Satz 2.3 (S. 34)

Jede Möbius-Transformation entsteht durch Hintereinanderausführung von Abbildungen der folgenden Art:

Drehstreckung:

$$z \mapsto u \cdot z \quad (2.43)$$

Translation:

$$z \mapsto z + v \quad (2.44)$$

Inversion:

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad (2.45)$$

Satz 2.4 (S. 35)

Die Möbius-Transformation ist kreis-, winkel- und orientierungstreu, d.h.:

- Kreise in \mathbb{C} werden auf Kreise oder Geraden in \mathbb{C} abgebildet. Geraden in \mathbb{C} werden auf Kreise oder Geraden in \mathbb{C} abgebildet.
- Zwei Kurven in der z -Ebene schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Bildkurven in der w -Ebene.
- Die linke Seite eines orientierten Kreises (bzw. einer orientierten Gerade) wird auf die linke Seite des Bildkreises bzw. der Bildgeraden abgebildet.

Kreisgleichung (S. 35)

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1 \quad (2.46)$$

Satz 2.5 (S. 36)

Zu je drei beliebig vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und drei weiteren paarweise verschiedenen Punkten $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine Möbius-Transformation f mit der Eigenschaft $f(z_1) = w_1$ und $f(z_2) = w_2$ und $f(z_3) = w_3$.

3 Potenzreihen**3.1 Unendliche Reihen****2.7 Möbius-Transformationen**

Unendliche Reihe (S. 39)

Die mit einer komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ gebildete Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \quad n \geq 0, \quad (3.1)$$

heißt **unendliche Reihe**, sie wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{oder} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \dots \quad (3.2)$$

bezeichnet.

Konvergenz, Divergenz (S. 39)

Man sagt, die Reihe **konvergiert** gegen $s \in \mathbb{C}$, bzw. sie hat die **Summe** $s \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = s, \quad (3.3)$$

wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + z_2 + \dots) = s. \quad (3.4)$$

Die Reihe („Summe“) **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

Absolute Konvergenz (S. 39)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ heißt **absolut konvergent**, wenn

die reelle Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Satz 3.1 (S. 39)

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergiert.} \quad (3.5)$$

Satz 3.2: Majorantenkriterium (S. 40)

Es gelte $|z_k| \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent.} \quad (3.6)$$

Satz 3.3: Quotientenkriterium (S. 40)

Es gelte $z_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| < 1 & \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent,} \\ \text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| > 1 & \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ divergent.} \end{aligned}$$

Geometrische Reihe (S. 40)

Wie im Reellen gilt für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3.7)$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (3.8)$$

Potenzreihe (S. 40)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \quad (3.9)$$

mit $a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$ heißt **Potenzreihe** mit **Zentrum** z_0 oder **Entwicklungspunkt** z_0 und **Koeffizienten** a_k .

Achtung: Es dürfen nur nichtnegative Potenzen von $z - z_0$ auftreten!

Konvergenzradius (S. 40)

Wie im Reellen zeigt man, dass für eine Potenzreihe (3.9) nur die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Die Potenzreihe konvergiert nur für $z = z_0$.
3. Es gibt eine positive Zahl R , so dass die Potenzreihe für alle z mit
 - $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert,
 - $|z - z_0| > R$ divergiert,
 - $|z - z_0| = R$ konvergiert oder divergiert (auch gemischt möglich).

Die Zahl R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ der **Konvergenzkreis**. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen definiert man im Fall 1 den Konvergenzradius $R = \infty$ und im Fall 2 den Konvergenzradius $R = 0$.

Berechnung Konvergenzradius (S. 41)

Zur Berechnung des Konvergenzradius R ist häufig das Quotienten oder Wurzelkriterium anwendbar:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in [0, \infty], \quad (3.10)$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty]. \quad (3.11)$$

Der Grenzwert (3.10) existiert nicht immer. Der größte Häufungswert (3.11) einer Folge existiert jedoch immer.

3.3 Gleichmäßige Konvergenz**Gleichmäßige Konvergenz (S. 42)**

$(f_n(z))$ konvergiert auf $D \subseteq \mathbb{C}$ **gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion** $f(z)$, wenn es zu jedem beliebig kleinen Radius $\varepsilon > 0$ einen für alle $z \in D$ gemeinsamen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für $n \geq N(\varepsilon)$ sämtliche Funktionswerte $f_n(z)$ in die ε -Umgebung von $f(z)$ fallen:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, \quad n \geq N(\varepsilon). \quad (3.12)$$

Punktweise Konvergenz (S. 42)

Bei **punktweiser Konvergenz** ist die „Konvergenzgeschwindigkeit“ evtl. von Punkt zu Punkt verschieden. Bei punktweiser Konvergenz gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, \quad n \geq N(\varepsilon, z). \quad (3.13)$$

Sätze: Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Eine Potenzreihe (3.9) mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe D innerhalb ihres Konvergenzkreises ($D := \{z : |z - z_0| \leq r < R\}$) gleichmäßig konvergent.

Eigenschaften bei gleichmäßiger Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Für $s_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ und $s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt:

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, \quad n \geq N(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Gleichmäßige Konvergenz garantiert die Eigenschaften der **Grenzfunktion**:

$$s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R. \quad (3.15)$$

Insbesondere ist deshalb $s(z)$ in der Menge $\{z : |z - z_0| < R\}$ **stetig**. Die Stetigkeit einer Potenzreihe in z^* können wir auch wie folgt schreiben:

$$\lim_{z \rightarrow z^*} s(z) = s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n. \quad (3.16)$$

Alle komplexen Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind, sind stetig.

8.5 Meromorphe Funktionen**4 Differentiation, analytische Funktionen****4.1 Definition und Rechenregeln****4.2 Die Cauchy-Riemann-Differenzialgleichungen****4.3 Geometrische Deutung der Ableitung****4.4 Das komplexe Potenzial****4.5 Harmonische Funktionen****5 Integration****5.1 Grundlagen****5.2 Der Cauchy-Integralsatz****5.3 Die Cauchy-Integralformel****6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel****6.1 Die Taylor-Reihe****6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra****6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip****6.4 Folgen analytischer Funktionen****7 Laurent-Reihen und Singularitäten****7.1 Laurent-Reihen****7.2 Isolierte Singularitäten****8 Residuentheorie****8.1 Der Residuensatz****8.2 Methoden der Residuenberechnung****8.3 Beispiele zum Residuensatz****8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz**