

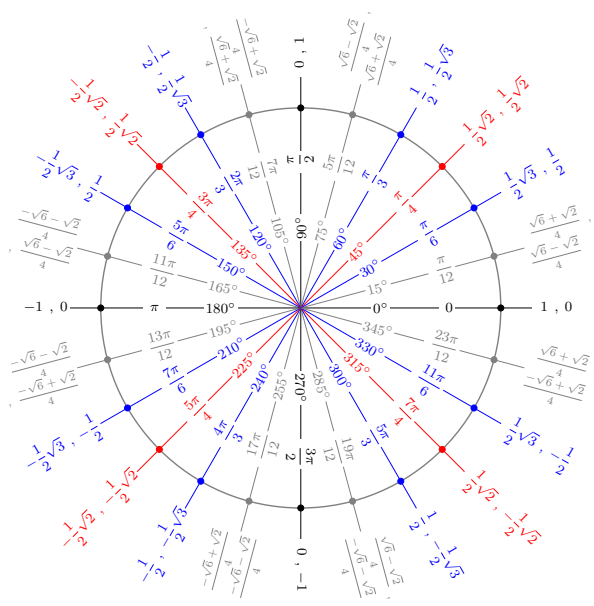
Funktionentheorie

Vorlesung Prof. Dr. Stefan Reitz
Sommersemester 2019

Jens Calov

10. Juli 2019

Die Inhalte dieser Zusammenfassung sind fast ausschließlich dem Vorlesungsskript entnommen. Die Seitenzahlen in den Box-Überschriften beziehen auf das Vorlesungsskript.



Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	2
1.1 Komplexe Zahlen	2
1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)	3
1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene	3
1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene	3
2 Elementare Funktionen	4
2.1 Grundlagen	4
2.2 Grenzwerte und Stetigkeit	4
2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)	4
2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen	4
2.5 Die trigonometrischen Funktionen	4
2.6 Wurzeln	4
2.7 Möbius-Transformationen	5
3 Potenzreihen	5
3.1 Unendliche Reihen	5
3.2 Potenzreihen	6
3.3 Gleichmäßige Konvergenz	6
4 Differentiation, analytische Funktionen	6
4.1 Definition und Rechenregeln	6
4.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen	6
4.3 Geometrische Deutung der Ableitung	7
4.4 Das komplexe Potenzial	7
4.5 Harmonische Funktionen	7
5 Integration	7
5.1 Grundlagen	7
5.2 Der Cauchy-Integralsatz	7
5.3 Die Cauchy-Integralformel	8
6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel	8
6.1 Die Taylor-Reihe	8
6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra	8
6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip	8
6.4 Folgen analytischer Funktionen	8
6.5 Eigenschaften analytischer Funktionen (Zusammenfassung)	9
7 Laurent-Reihen und Singularitäten	9
7.1 Laurent-Reihen	9
7.2 Isolierte Singularitäten	9
8 Residuentheorie	10
8.1 Der Residuensatz	10
8.2 Methoden der Residuenberechnung	10
8.3 Beispiele zum Residuensatz	10
8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz	10
8.5 Meromorphe Funktionen	10
9 Anhang	10
9.1 Trigonometrische Funktionen	10

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen (S. 7)

Imaginäre Einheit:

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

Alle Zahlen der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

bilden die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

Realteil von z :

$$\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Imaginärteil von z :

$$\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

Addition (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

$$z + w := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C} \quad (1.6)$$

Inverses Element bzgl. Addition (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$-z = (-x) + i(-y) = -x - iy \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

$$z \cdot w := (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C} \quad (1.8)$$

Inverses Element bzgl. Multiplikation (S. 8)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(x + iy)} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Satz 1.1: Körpereigenschaften von \mathbb{C} (S. 8)

Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen bilden mit oben definierter Addition (1.6) bzw. Multiplikation (1.8) einen Körper. Das Einselement dieses Körpers ist

$$1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

und das Nullelement ist

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

Es gelten somit die Rechenregeln (für $z, v, w \in \mathbb{C}; z = x + iy$):

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $(z + v) + w = z + (v + w)$ | Assoziativgesetz |
| b) $z + 0 = z$ | neutrales Element |
| c) $z + (-z) = 0$ | inverses Element; wobei (1.7) gilt |
| d) $z + w = w + z$ | Kommutativgesetz |
| e) $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w)$ | Assoziativgesetz |
| f) $z \cdot 1 = z$ | neutrales Element |
| g) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ für $z \neq 0$ | inverses Element; wobei (1.9) gilt |
| h) $z \cdot w = w \cdot z$ | Kommutativgesetz |
| i) $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$ | Distributivgesetz |

Binomische Formel (S. 10)

Mit $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \quad (1.12)$$

Definition 1.1: Absolutbetrag, konjugiert komplexe Zahl (S. 10)

Es sei $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

der **Absolutbetrag** von z und

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Absolutbetrag mit konjugiert komplexer Zahl (S. 11)

Wegen $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ folgt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (1.13)$$

Abstand komplexer Zahlen (S. 11)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$. Dann ist ihr Abstand:

$$|z - w| = |(x - u) + i(y - v)| \stackrel{\text{Def. 1.1}}{=} \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \quad (1.14)$$

Satz 1.2: Rechenregeln (S. 11)

Für $z = x + iy, w = u + iv$ gelten folgende Rechenregeln:

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
 $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Re}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Re}(z_1) + \dots + \operatorname{Re}(z_n)$
 $\operatorname{Im}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Im}(z_1) + \dots + \operatorname{Im}(z_n)$
- $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$
 $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

Dreiecksungleichung (S. 12)

Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt (wie im Reellen) für den Betrag im Komplexen die **Dreiecksungleichung**:

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \quad (1.15)$$

Allgemein gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (1.16)$$

Definition 1.2: Kreisscheibe, r -Umgebung einer komplexen Zahl (S. 12)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Dann ist die Menge

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad (1.17)$$

die (**offene**) **Kreisscheibe** um a mit Radius $r > 0$ (oder **r -Umgebung** von a)

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (S. 14)

Eine komplexe Zahl $z = x + iy, z \neq 0$, ist eindeutig bestimmt durch den **Betrag**

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.18)$$

und durch das **Argument**

$$\arg(z) := \varphi, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (1.19)$$

Es gilt:

$$x = |z| \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = |z| \cdot \sin \varphi. \quad (1.20)$$

Man nennt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (1.21)$$

die **Polarkoordinatendarstellung** von $z \neq 0$. Es gilt auch:

$$z = r \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

Umrechnung zwischen Darstellungen (S. 15)

Für die Umrechnung zwischen den Darstellungen $z = x + iy$ und $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ gelten folgende Regeln:

1. Gegeben sei $z = x + iy \neq 0$. Mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \quad (1.23)$$

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

gilt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \quad (1.25)$$

2. Gegeben sei $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ mit $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Mit

$$x := r \cdot \cos \varphi \text{ und} \quad (1.26)$$

$$y := r \cdot \sin \varphi \quad (1.27)$$

gilt

$$z = x + iy. \quad (1.28)$$

Satz 1.3 (S. 16)

Sind $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi), \quad w = |w| \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi), \quad (1.29)$$

so gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)], \quad (1.30)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]. \quad (1.31)$$

Folgerung (S. 16)

Aus Satz 1.3 folgt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.32)$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.33)$$

1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)**Reelle Exponentialfunktion (S. 17)**

Bekannte reelle Exponentialfunktion ($x, y \in \mathbb{R}$):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.34)$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (1.35)$$

Komplexe Exponentialfunktion (S. 17)

Bekannte Komplexe Exponentialfunktion ($z, w \in \mathbb{C}$):

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.36)$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (1.37)$$

Eulersche Gleichung (S. 18)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z := x + iy$ gilt:

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad \text{Eulersche Gleichung} \quad (1.38)$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \sin(y)] \quad (1.39)$$

Eulersche Identität (S. 18)

Aus der Eulerschen Gleichung folgt sofort die Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Satz 1.4 (S. 19)

1. Es gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos y = \operatorname{Re}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad (1.40)$$

$$\sin y = \operatorname{Im}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (1.41)$$

2. Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (1.42)$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ schreiben.

3. Für $z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$, $w = s \cdot e^{i\psi}$ gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i\varphi + i\psi} \quad (1.43)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{i\varphi - i\psi} \quad (w \neq 0). \quad (1.44)$$

Satz 1.5: Formel von Moivre (S. 20)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (1.45)$$

1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene**Definition 1.3: Gebiet (S.20)**

Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängend ist.

Definition 1.4: einfach zusammenhängend (S.21)

Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn das Innere jedes in G verlaufenden geschlossenen Streckenzuges ganz zu G gehört, d.h. wenn G keine Löcher hat.

Randpunkt, Rand von D (S. 21)

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Menge, so heißt ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ein **Randpunkt** von D , wenn in jeder r -Umgebung (Def. 1.2 S. 2) von z sowohl Punkte aus D liegen, als auch Punkte, die nicht zu D gehören. Der **Rand von D** ist die Menge aller Randpunkte; er wird mit

$$\partial D \quad (1.46)$$

bezeichnet.

abgeschlossen (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn der Rand von D zu D gehört: $\partial D \subseteq D$. Man nennt $\bar{D} := D \cup \partial D$ den **Abschluss** von D .

beschränkt, unbeschränkt (S. 22)

Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir nennen D **beschränkt**, wenn es eine (hinreichend große) Kreisscheibe $K_r(0)$ gibt, die D umfasst. Andernfalls heißt D **unbeschränkt**.

1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene**Definition 1.5: konvergente Folge (S. 22)**

Man sagt, eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert** gegen den Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z, \quad (1.47)$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in N(\varepsilon). \quad (1.48)$$

Konvergiert die Folge nicht, so nennt man sie **divergent**.

 $z_n \rightarrow \infty$ (S. 23)

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, falls für die **reelle** Folge $(|z_n|)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

Rechenregeln konvergenter komplexer Folgen (S. 23)

Wie bei reellen Folgen ist der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge eindeutig bestimmt und es gelten die bekannten Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= z \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_n &= w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) &= z \pm w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) &= z \cdot w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} &= \frac{z}{w} \quad (w_n, w \neq 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= |z| \end{cases} \quad (1.49)$$

2 Elementare Funktionen

2.1 Grundlagen

2.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 2.1: Grenzwert, Stetigkeit (S. 27)

- Die Funktion f sei definiert in einer r -Umgebung (Kreisscheibe) um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, mit der Einschränkung, dass f am Punkt z_0 eventuell undefiniert ist. Die Zahl w_0 heißt **Grenzwert** von f für $z \rightarrow z_0$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (2.1)$$

wenn für jedes (beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (2.2)$$

Bei **beliebiger Annäherung** von z an z_0 müssen sich die Funktionswerte $f(z)$ also dem Wert w_0 annähern; andernfalls existiert der Grenzwert nicht!

- f heißt **stetig** in z_0 , wenn f in z_0 definiert ist und wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.3)$$

$\lim f(z) = \infty$ (S. 27)

Man schreibt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, falls gilt: $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)

Die komplexe e -Funktion (S. 27)

Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (2.4)$$

für $z = x + iy$. Man schreibt auch

$$f(z) = \exp(z). \quad (2.5)$$

- Gerade $x = x_0$ wird auf Kreis abgebildet.
- Gerade $y = y_0$ wird auf Halbgerade von 0 mit Winkel y_0 abgebildet.
- Der **Fundamentalstreifen**:

$$F := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq \pi\} \quad (2.6)$$

Satz 2.1 (S. 29)

Die Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Periodizität (S. 30)

Die Funktion $f(z) = e^z$ hat die **Periode** $2k\pi i$, denn es gilt

$$f(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z = f(z). \quad (2.7)$$

Jeder Streifen der Form

$$S = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq (2k+1)\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.8)$$

wird bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet, da S durch Verschiebung um $2k\pi i$ aus F (2.6) entsteht.

2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

Umkehrfunktion von e^z (S. 30)

$f(z) = e^z$ ist eine bijektive Abbildung von F (2.6) auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, daher existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow F, \quad w \mapsto z = f^{-1}(w) \quad (2.9)$$

Komplexer Logarithmus (S. 30)

Zu gegebenem $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\operatorname{Ln}(w) := \ln|w| + i \arg(w) \quad (2.10)$$

mit $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$, wobei \ln der natürliche Logarithmus für reelle Zahlen ist. Man nennt dies den **Hauptwert des komplexen Logarithmus**. Wegen $e^{z+2k\pi i} = e^z$ gilt auch

$$\operatorname{Ln}_k(w) := \ln|w| + i \arg(w) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.11)$$

Für $k \neq 0$ nennt man dies die **Nebenzweige des komplexen Logarithmus**.

Vorsicht (S. 31)

Die Regel $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$ gilt **nicht** im Allgemeinen!

Allgemeine Potenzen in \mathbb{C} (S. 31)

Für $a, z \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ definiert man wie im Reellen:

$$a^z := e^{z \cdot \operatorname{Ln}(a)} \quad (2.12)$$

Rechenregeln (S. 31)

Für $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^z \cdot a^w = a^{z+w} \quad (2.13)$$

$$(a^z)^n = a^{n \cdot z} \quad (2.14)$$

2.5 Die trigonometrischen Funktionen

Definition 2.2 (S. 31)

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.15)$$

$$\sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (2.16)$$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{falls } \cos z \neq 0, \quad (2.17)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{falls } \sin z \neq 0. \quad (2.18)$$

Sinus und Kosinus hyperbolicus (Formelsammlung)

Sinus hyperbolicus:

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix) \quad (2.19)$$

Kosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cos(ix) \quad (2.20)$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen (S. 32)

- Symmetrien:

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad (2.21)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad (2.22)$$

- Additionstheoreme:

$$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \quad (2.23)$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \quad (2.24)$$

- Eulersche Gleichung:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (2.25)$$

Dies stellt **nicht** die Zerlegung in Real- und Imaginärteil dar, die sieht so aus:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} (\cos x + i \sin x) \quad (2.26)$$

$$\operatorname{Re}(iz) = e^{-y} \cos x \quad (2.27)$$

$$\operatorname{Im}(iz) = e^{-y} \sin x \quad (2.28)$$

Mit Definition 2.2 gilt:

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y + i (-\sin x \cdot \sinh y) \quad (2.29)$$

$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i (-\cos x \cdot \sinh y) \quad (2.30)$$

- Periodizität:

$\cos z$ und $\sin z$ sind 2π -periodisch.

- Nullstellen:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

- Keine Beschränktheit:

Es gilt **nicht**: $|\sin z| \leq 1$ und $|\cos z| \leq 1$

- Stetigkeit:

Die trigonometrischen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig.

2.6 Wurzeln

Satz 2.2: n -te Wurzeln (S. 32)

Ist $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, so ist jede der Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.33)$$

eine n -te Wurzel von a .

$\sqrt[n]{0}$ (S. 33)

Für $a = 0$ setzt man $\sqrt[n]{0} := 0$.

Einheitswurzeln (S. 33)

Für $a = 1$ spricht man von den **Einheitswurzeln**. Wegen $a = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ lauten die Einheitswurzeln nach Satz 2.2:

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.34)$$

$$z_0 = 1 \quad (2.35)$$

Die n -ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - 1. \quad (2.36)$$

Hauptwert der n -ten Wurzel (S. 33)

Um für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Funktion $f(z) = \sqrt[n]{z}$ definieren zu können, muss man einen der n Werte z_0, \dots, z_{n-1} auswählen und definiert daher die Funktion

$$\sqrt[n]{z} := z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (2.37)$$

und spricht vom **Hauptwert der n -ten Wurzel**.

2.7 Möbius-Transformationen**Möbius-Transformation (S. 34)**

Die gebrochen-linearen Funktionen oder **Möbius-Transformationen** haben die Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (2.38)$$

Erweiterung der komplexen Zahlen (S. 34)

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, erweitert man die komplexen Zahlen \mathbb{C} zur **abgeschlossenen komplexen Ebene**

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (2.39)$$

Erweiterung der Möbius-Transformation mit $\hat{\mathbb{C}}$ (S. 34)

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \quad (2.40)$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \quad (2.41)$$

Umkehrabbildung der Möbius-Transformation (S. 34)

Durch (2.38), (2.40) und (2.41) ist eine bijektive Abbildung $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definiert. Die Umkehrabbildung ist ebenfalls eine Möbius-Transformation:

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(w) = z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.42)$$

Verknüpfung zweier Möbius-Transformationen (S. 34)

Die Verknüpfung $w = (f \circ g)(z)$ zweier Möbius-Transformationen vom Typ (2.38) ergibt wieder eine Möbius-Transformation.

Satz 2.3 (S. 34)

Jede Möbius-Transformation entsteht durch Hintereinanderausführung von Abbildungen der folgenden Art:

Drehstreckung:

$$z \mapsto u \cdot z \quad (2.43)$$

Translation:

$$z \mapsto z + v \quad (2.44)$$

Inversion:

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad (2.45)$$

Satz 2.4 (S. 35)

Die Möbius-Transformation ist kreis-, winkel- und orientierungstreu, d.h.:

- Kreise in \mathbb{C} werden auf Kreise oder Geraden in \mathbb{C} abgebildet. Geraden in \mathbb{C} werden auf Kreise oder Geraden in \mathbb{C} abgebildet.
- Zwei Kurven in der z -Ebene schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Bildkurven in der w -Ebene.
- Die linke Seite eines orientierten Kreises (bzw. einer orientierten Gerade) wird auf die linke Seite des Bildkreises bzw. der Bildgeraden abgebildet.

Kreisgleichung (S. 35)

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1 \quad (2.46)$$

Satz 2.5 (S. 36)

Zu je drei beliebig vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ und drei weiteren paarweise verschiedenen Punkten $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ gibt es genau eine Möbius-Transformation f mit der Eigenschaft $f(z_1) = w_1$ und $f(z_2) = w_2$ und $f(z_3) = w_3$.

3 Potenzreihen**3.1 Unendliche Reihen****Unendliche Reihe (S. 39)**

Die mit einer komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n \geq 0}$ gebildete Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \quad n \geq 0, \quad (3.1)$$

heißt **unendliche Reihe**, sie wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{oder} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \dots \quad (3.2)$$

bezeichnet.

Konvergenz, Divergenz (S. 39)

Man sagt, die Reihe **konvergiert** gegen $s \in \mathbb{C}$, bzw. sie hat die **Summe** $s \in \mathbb{C}$, und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = s, \quad (3.3)$$

wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + z_2 + \dots) = s. \quad (3.4)$$

Die Reihe („Summe“) **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

Absolute Konvergenz (S. 39)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$ heißt **absolut konvergent**,

wenn die reelle Reihe der Beträge $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergiert.

Satz 3.1 (S. 39)

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergiert.} \quad (3.5)$$

Satz 3.2: Majorantenkriterium (S. 40)

Es gelte $|z_k| \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent.} \quad (3.6)$$

Satz 3.3: Quotientenkriterium (S. 40)

Es gelte $z_k \neq 0$ für $k \geq k_0$. Dann folgt:

$$\text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent,}$$

$$\text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ divergent.}$$

Geometrische Reihe (S. 40)

Wie im Reellen gilt für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3.7)$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (3.8)$$

3.2 Potenzreihen

Potenzreihe (S. 40)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \quad (3.9)$$

mit $a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$ heißt **Potenzreihe** mit **Zentrum** z_0 oder **Entwicklungspunkt** z_0 und **Koeffizienten** a_k .

Achtung: Es dürfen nur nichtnegative Potenzen von $z - z_0$ auftreten!

Konvergenzradius (S. 40)

Wie im Reellen zeigt man, dass für eine Potenzreihe (3.9) nur die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Die Potenzreihe konvergiert nur für $z = z_0$.
3. Es gibt eine positive Zahl R , so dass die Potenzreihe für alle z mit
 - $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert,
 - $|z - z_0| > R$ divergiert,
 - $|z - z_0| = R$ konvergiert oder divergiert (auch gemischt möglich).

Die Zahl R heißt **Konvergenzradius** der Reihe und $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ der **Konvergenzkreis**. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen definiert man im Fall 1 den Konvergenzradius $R = \infty$ und im Fall 2 den Konvergenzradius $R = 0$.

Berechnung Konvergenzradius (S. 41)

Zur Berechnung des Konvergenzradius R ist häufig das Quotienten oder Wurzelkriterium anwendbar:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in [0, \infty], \quad (3.10)$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty]. \quad (3.11)$$

Der Grenzwert (3.10) existiert nicht immer. Der größte Häufungswert (3.11) einer Folge existiert jedoch immer.

3.3 Gleichmäßige Konvergenz

Gleichmäßige Konvergenz (S. 42)

$(f_n(z))$ konvergiert auf $D \subseteq \mathbb{C}$ **gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion** $f(z)$, wenn es zu jedem beliebig kleinen Radius $\varepsilon > 0$ einen für alle $z \in D$ gemeinsamen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für $n \geq N(\varepsilon)$ sämtliche Funktionswerte $f_n(z)$ in die ε -Umgebung von $f(z)$ fallen:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon). \quad (3.12)$$

Punktweise Konvergenz (S. 42)

Bei **punktweiser Konvergenz** ist die „Konvergenzgeschwindigkeit“ evtl. von Punkt zu Punkt verschieden. Bei punktweiser Konvergenz gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon, z). \quad (3.13)$$

Sätze: Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Eine Potenzreihe (3.9) mit Konvergenzradius $R > 0$ ist in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe D innerhalb ihres Konvergenzkreises ($D := \{z : |z - z_0| \leq r < R\}$) gleichmäßig konvergent.

Eigenschaften bei gleichmäßiger Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Für $s_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ und $s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gilt:

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Gleichmäßige Konvergenz garantiert die Eigenschaften der **Grenzfunktion**:

$$s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R. \quad (3.15)$$

Insbesondere ist deshalb $s(z)$ in der Menge $\{z : |z - z_0| < R\}$ **stetig**. Die Stetigkeit einer Potenzreihe in z^* können wir auch wie folgt schreiben:

$$\lim_{z \rightarrow z^*} s(z) = s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n. \quad (3.16)$$

Alle komplexen Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind, sind stetig.

4 Differentiation, analytische Funktionen

4.1 Definition und Rechenregeln

Definition 4.1 (S. 43)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt in $z_0 \in G$ **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.1)$$

im Sinne von Definition 2.1 existiert. $f'(z_0)$ heißt **Ableitung** von f an der Stelle z_0 . $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **analytisch** (oder **holomorph**), wenn $f'(z)$ für jedes $z \in G$ existiert.

Bemerkungen, Rechenregeln (S. 43)

1. Der Grenzwert des Differenzenquotienten muss bei jeder Annäherung von z an z_0 existieren und gleich $f'(z_0)$ sein. Andernfalls ist die Funktion an z_0 nicht differenzierbar.
2. Differenzierbare Funktionen sind stetig.
3. Sind f und g differenzierbar (bzw. analytisch), so sind auch die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (für $g(z) \neq 0$) und $f \circ g$ differenzierbar (bzw. analytisch), und es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Linearität:

$$(a f + b g)' = a f' + b g' \quad (4.2)$$

b) Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (4.3)$$

c) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (4.4)$$

insbesondere

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad (4.5)$$

d) Kettenregel:

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g' \quad (4.6)$$

Satz 4.1: Potenzreihen sind analytisch und unendlich oft diff.bar (S. 45)

Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ stellt im Inneren des Konvergenzkreises eine analytische Funktion dar.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (4.7)$$

ist analytisch in $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad (4.8)$$

Die abgeleitete Reihe ist wieder eine Potenzreihe und hat denselben Konvergenzradius R . Das Ableiten kann also beliebig oft wiederholt werden. Die Koeffizienten lassen sich aus der Funktion f berechnen und sind daher durch f eindeutig bestimmt:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

4.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

Satz 4.2: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (S. 47)

Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar an $z_0 = x_0 + i y_0$ und gilt

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (4.10)$$

so erfüllen u und v die **Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen** an der Stelle (x_0, y_0) :

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad (4.11)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (4.12)$$

Ist f differenzierbar für alle $z \in G$, wobei G eine offene Menge in \mathbb{C} ist, so gelten diese Differentialgleichungen in ganz G .

Folgerung aus Satz 4.2: Funktionen mit Ableitung 0 sind konstant (S. 47)

Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ein in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktion mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$. Dann gilt: $f(z) = \text{const.}$

4.3 Geometrische Deutung der Ableitung

Satz 4.3 (S. 47)

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f'(z) \neq 0$ in dem Gebiet G , dann ist die Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ in allen Punkten $z_0 \in G$ **lokal konform** (d.h. **winkeltreu** und **orientierungstreu**), d.h. der Schnittwinkel zwischen zwei glatten Kurven durch $z_0 \in G$ ist samt Drehsinn der gleiche wie für die beiden Bildkurven durch $f(z_0)$.

4.4 Das komplexe Potenzial

4.5 Harmonische Funktionen

Harmonische Funktionen (S. 50)

Ist $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ eine analytische Funktion, so gilt aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad (4.13)$$

$$u_y = -v_x. \quad (4.14)$$

Es folgt $u_{xx} = v_{yx}$ und $u_{yy} = -v_{xy}$. Wegen $v_{xy} = v_{yx}$ haben wir: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Man schreibt dafür auch

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.15)$$

und nennt Funktionen dieser Eigenschaft **harmonisch**. Es gilt auch

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (4.16)$$

(S. 50)

Es sei nun $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und es sei nur die Funktion $u(x, y)$ vorgegeben. Gesucht ist die Funktion $v(x, y)$, sodass

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (4.17)$$

eine analytische Funktion ist. Wir gehen wie folgt vor:

1. u_x und u_y berechnen
2. Aus dem Ansatz $v_y = u_x$ durch unbestimmte Integration nach y

$$v = \int u_x dy + c(x) \quad (4.18)$$

bestimmen.

3. Nach x differenzieren, $v_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int u_x dy \right) + c'(x)$, dies mit $-u_y$ gleichsetzen und daraus $c(x)$ berechnen.
4. Zur analytischen Funktion (4.17) zusammensetzen.

5 Integration

5.1 Grundlagen

Kurve / Weg (S. 52)

Eine **Kurve** (oder ein **Weg**) C in der komplexen Ebene wird in der Form

$$z(t) = x(t) + i y(t) \quad \text{mit } t \in [a; b] \subseteq \mathbb{R} \quad (5.1)$$

dargestellt. Stetigkeit und Differenzierbarkeit beziehen sich dabei auf die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$. Es gilt

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t). \quad (5.2)$$

Definition 5.1: Kurvenintegral (S. 52)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und durch $z(t)$, $t \in [a, b]$ sei eine **stetig differenzierbare** Kurve C gegeben. Dann heißt

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b \underbrace{f(z(t)) \cdot z'(t)}_{\in \mathbb{C}} dt \quad (5.3)$$

$$:= \int_a^b \operatorname{Re}(f(z(t)) \cdot z'(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(z(t)) \cdot z'(t)) dt \quad (5.4)$$

das **Kurvenintegral** von f längs C . Für eine Kurve C , die aus endlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken C_1, \dots, C_n besteht, definiert man

$$\int_C f(z) dz := \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (5.5)$$

Kurvenintegral, einfach geschlossene Kurve (S. 52)

Ist C eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird (das Innere liegt links in Durchlaufrichtung), so nennt man C **einfach geschlossen** und schreibt

$$\oint_C f(z) dz \quad (5.6)$$

für das Kurvenintegral. Bei einem Kreis mit $z(t) = a + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ schreibt man

$$\oint_{|z-a|=r} f(z) dz. \quad (5.7)$$

Das Fundamentintegral (S. 52)

Ein zentraler Baustein der Funktionentheorie ist das **Fundamentintegral**, das wichtigste Integral der Analysis! Für $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ gilt:

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m dz = 0, \quad \text{falls } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1 \quad (5.8)$$

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \quad (m = -1) \quad (5.9)$$

Berechnung des Integrals im Skript, Seiten 52-53.

Satz 5.1 (S. 54)

Aus Definition 5.1 ergeben sich die folgenden Regeln:

- a) **Linearität:** Mit $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_C [a f(z) + b g(z)] dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz \quad (5.10)$$

- b) **Additivität bei zusammengesetzten Wegen:** $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad (5.11)$$

- c) **Abhängigkeit der Orientierung:** Für die zu C entgegengesetzt durchlaufende Kurve C^* gilt

$$\int_{C^*} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \quad (5.12)$$

- d) **Abschätzung:**

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot (\text{Länge von } C) \quad (5.13)$$

5.2 Der Cauchy-Integralsatz

Satz 5.2: Cauchy-Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie (S. 55)

Für jede analytische Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und für jede stückweise stetig differenzierbare einfach geschlossene Kurve C in G gilt

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.14)$$

Satz 5.3: Wegunabhängigkeit des Integrals (S. 57)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann gilt für zwei Punkte $z_0, z_1 \in G$ und zwei beliebige (stückweise stetig differenzierbare) Kurven C_1 und C_2 in G , die von z_0 nach z_1 führen:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (5.15)$$

Satz 5.4: Stammfunktion mittels Integral (S. 58)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $z_0 \in G$ fest gewählt und $z \in G$ beliebig. Ist C irgendeine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve von z_0 nach z in G , so ist das wegunabhängige Integral

$$I(z) := \int_{z_0}^z f(w) dw := \int_C f(w) dw \quad (5.16)$$

eine Stammfunktion von $f : I'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Bemerkung (S. 58)

Wie im Reellen gilt: zwei Stammfunktionen F_1 und F_2 von f unterscheiden sich nur durch eine Konstante, also:

$$F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \Rightarrow F_1(z) = F_2(z) + c, \quad c \in \mathbb{C} \quad (5.17)$$

Damit ergibt sich: Ist F eine beliebige Stammfunktion von f , so folgt:

$$\int_{z_0}^z f(w) dw = I(z) = F(z) + c. \quad (5.18)$$

Wegen $0 = \int_{z_0}^{z_0} f(w) dw = F(z_0) + c$ folgt $c = -F(z_0)$, d.h.:

$$\int_{z_0}^z f(w) dw = F(z) - F(z_0) \quad (5.19)$$

5.3 Die Cauchy-Integralformel**Satz 5.5 (S. 59)**

Ist G nicht einfach zusammenhängend (mit „Löchern“) und f analytisch auf G , dann gilt für je zweifach geschlossene Kurven C_1 und C_2 aus G , die dieselbe Ausnahmemeenge („Löcher“) in gleicher Richtung einmal umlaufen:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz. \quad (5.20)$$

Satz 5.6 (Cauchy-Integralformel)

S. 60 Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, C eine einfach geschlossene Kurve in G , deren Inneres ganz in G liegt. Dann gilt für alle z im Innern von C :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (5.21)$$

6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel**6.1 Die Taylor-Reihe****Satz 6.1 (S. 61)**

Es sei $a \in \mathbb{C}$ und $w \neq a$. Dann gilt

$$|w - a| > |z - a| \Rightarrow \frac{1}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(w - a)^{k+1}}, \quad (6.1)$$

(Potenzreihe bzgl. z)

$$|w - a| < |z - a| \Rightarrow \frac{1}{w - z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - a)^k}{(z - a)^{k+1}}. \quad (6.2)$$

(keine Potenzreihe bzgl. z)

Bemerkung (S. 61)

Eine analytische Funktion f ist beliebig oft differenzierbar und (lokal) immer durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

Satz 6.2: Taylor-Reihe (S. 62)

Jede im Gebiet G analytische Funktion f besitzt innerhalb jeder r -Umgebung $K_r(a)$ (vgl. Def. 1.2, S. 2), die ganz in G liegt, die Potenzreihendarstellung (**Taylor-Entwicklung**)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k, \quad z \in K_r(a); \quad (6.3)$$

insbesondere ist f in G beliebig oft differenzierbar mit den Ableitungen (**verallgemeinerte Cauchy-Integralformeln**)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad |w-a| < \rho < r, n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.4)$$

Folgerung (S. 62)

Ist f in ganz \mathbb{C} analytisch (also $G = \mathbb{C}$), so hat die Taylor-Reihe den Konvergenzradius $R = \infty$.

Regel von l'Hospital (S. 63)

Sind f und g analytische Funktionen mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und gilt $g'(z_0) \neq 0$, so folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (6.5)$$

Bemerkung (S. 63)

Ist R der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von f , so befindet sich auf dem Rand des Konvergenzkreises immer eine Stelle, an der f nicht differenzierbar ist („Singularität“). Für die Funktion $\text{Ln}(1+z)$ ist diese Singularität bei -1 .

Definition 6.1 (S. 64)

Man sagt, eine analytische Funktion habe eine Nullstelle a der **Ordnung** m , wenn gilt

$$f(z) = (z - a)^m \cdot f_1(z) \quad \text{in einer Umgebung } K_r(a) \quad (6.6)$$

mit einer analytischen Funktion f_1 , für die gilt $f_1(a) \neq 0$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (6.7)$$

Satz 6.3: Identitätssatz (S. 64)

Für analytische Funktionen $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet G sind äquivalent:

- $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$
- $f(z_n) = g(z_n)$ für alle Punkte (z_n) einer unendlichen Folge mit verschiedenen Folgengliedern und Häufungswert a in G .

6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra**Satz 6.4: Satz von Liouville (S. 65)**

Ist f auf ganz \mathbb{C} analytisch und beschränkt ($|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$), so ist f eine konstante Funktion: $f(z) = \text{const.}$

Satz 6.5: Fundamentalsatz der Algebra (S. 66)

Jedes nichtkonstante Polynom

$$p(z) = a_m z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 1, a_n \neq 0 \quad (6.8)$$

hat in \mathbb{C} genau n Nullstellen, wobei wir eine Nullstelle der Ordnung m (vgl. Def. 6.1) m -mal zählen.

6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip**Mittelwerteigenschaft (S. 66)**

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, G ein Gebiet, so gilt gemäß Cauchy-Integralformel (Satz 5.6):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (6.9)$$

Schreiben wir den Kreis $|w - z| = \rho$ in der Form $C = \{w : w = z + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi)\}$, so folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{z + \rho e^{it} - z} \cdot i \cdot \rho e^{it} dt \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt \quad (6.11)$$

Der Funktionswert $f(z)$ ist der mittlere Wert aller Funktionswerte $f(z + \rho e^{it})$ auf der Kreislinie C (**Mittelwerteigenschaft**).

Satz 6.6: Maximumprinzip (S. 67)

Ist G ein beschränktes Gebiet, $f : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht konstant, dann liegt jede Maximalstelle z_0 der Funktion $|f(z)|$ auf dem Rand von G (und nicht im Innern von G), d.h. die Betragsfläche $z \mapsto |f(z)|$ hat keine Gipfel im Innern des Gebiets.

6.4 Folgen analytischer Funktionen**Lemma 6.1 (S. 68)**

Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und für jede im Gebiet G verlaufende einfach geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Kurve C , die samt ihres Innern in G liegt, gelte $\oint_C f(z) dz = 0$. Dann ist f analytisch in G .

Satz 6.7: Weierstraß (S. 68)

Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen in dem Gebiet G , so ist auch die Grenzfunktion f analytisch in G . Es gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z) = f'(z). \quad (6.12)$$

Satz 6.8 (S. 69)

Ist (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen mit Grenzfunktion f in dem Gebiet G , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6.13)$$

für jede stückweise differenzierbare Kurve C in G .

Bemerkung (S. 69)

Da in Satz 6.8 $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ gilt, können wir auch schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz, \quad (6.14)$$

falls die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

6.5 Eigenschaften analytischer Funktionen (Zusammenfassung)**Eigenschaften analytischer Funktionen (S. 70)**

Es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} und C eine einfach geschlossene Kurve in G . Dann gilt:

1. **Cauchy-Integralsatz** (Satz 5.2):

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (6.15)$$

2. $F(z) := \int_{z_0}^z f(w) dw$ ist wegunabhängig (Satz 5.3); $F'(z) = f(z)$.

3. **Cauchy-Integralformeln** (Sätze 5.6, 6.2):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (6.16)$$

für alle z aus dem Inneren von C .

4. **Taylor-Entwicklung um $a \in G$** (Satz 6.2):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (6.17)$$

in jeder offenen Kreisscheibe $|z-a| < r$, die ganz in G liegt.

5. Im Fall $G = \mathbb{C}$ gilt der **Satz von Liouville** (Satz 6.4) für beschränkte, analytische Funktionen.

6. **Identitätssatz** (Satz 6.3)

7. **Mittelwerteigenschaft**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt \quad z \in G. \quad (6.18)$$

8. **Maximumprinzip** (Satz 6.6): Ist f nicht konstant, so nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an (falls G beschränkt).

9. **Identitätssatz** (Satz 6.3)

10. **Konvergenzsätze** (Sätze 6.7, 6.8): Ist (f_n) eine gleichmäßig gegen f konvergierende Folge analytische Funktionen, so konvergieren auch die ersten Ableitungen und die Kurvenintegrale der Funktionen f_n gegen die erste Ableitung bzw. das Kurvenintegral von f .

7 Laurent-Reihen und Singularitäten**7.1 Laurent-Reihen****Satz 7.1: Laurent-Reihen (S. 72)**

Es sei f im Kreisring $K_{r,R}(a) = \{z: 0 \leq r < |z-a| < R\}$ analytisch, wobei $0 \leq r < r \leq \infty$. Dann gilt:

- a) $f(z)$ lässt sich für alle $z \in K_{r,R}(a)$ als **Laurent-Reihe** schreiben:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (7.1)$$

- b) Die Koeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt durch ($n \in \mathbb{Z}$, $r < \rho < R$):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw. \quad (7.2)$$

7.2 Isolierte Singularitäten**Isolierte Singularität, Hauptteil, Nebenteil (S. 75)**

Man nennt eine Singularität von f **isoliert**, wenn f an z_0 nicht definiert ist, aber in $\{z: 0 < |z-z_0| < r\}$ analytisch ist. Nach Satz 7.1 besitzt f die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < r. \quad (7.3)$$

In dieser Entwicklung nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \text{den **Hauptteil** und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad \text{den **Nebenteil** (oder analytischen Anteil).}$$

Die Koeffizienten c_n sind eindeutig bestimmt durch (7.2).

Definition 7.1 (S. 75)

Die isolierte Singularität z_0 mit Laurent-Entwicklung (7.3) heißt

- a) **hebbar**, wenn der Hauptteil verschwindet; d.h. wenn $c_{-n} = 0$ für alle $n \geq 1$,
- b) **Pol der Ordnung m** , $m \geq 1$, wenn im Hauptteil $c_{-m} \neq 0$ und $c_{-n} = 0$ für alle $n > m$,
- c) **wesentlich**, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten $\neq 0$ sind.

Bedingungen für isolierte Singularitäten (S. 75)

Die Laurent-Reihe um eine isolierte Singularität z_0 .

- a) z_0 ist **hebbar**, genau dann wenn gilt:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (7.4)$$

- b) z_0 ist **Pol** der Ordnung m , genau dann wenn gilt:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \text{analytisch} \quad (c_{-m} \neq 0) \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} f_1(z), \quad f_1(z) \text{ analytisch in } z_0, \quad f_1(z_0) \neq 0 \quad (7.6)$$

- c) z_0 ist **wesentlich**, genau dann wenn gilt:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \text{analytisch}, \quad \text{unendlich viele } c_{-n} \neq 0. \quad (7.7)$$

Satz 7.2: Heb bare Singularität (S. 76)

Eine isolierte Singularität z_0 ist genau dann hebbar, wenn gilt

$$|f(z)| \leq C \quad \text{für } 0 \leq |z-z_0| \leq \varepsilon \quad (*) \quad (7.8)$$

(f ist beschränkt) für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

Satz 7.3: Singularität mit Pol der Ordnung m (S. 77)

Eine isolierte Singularität z_0 ist genau dann ein Pol der Ordnung m , wenn die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z)} \quad (z \neq z_0) \quad \text{mit} \quad g(z_0) := 0 \quad (7.9)$$

an z_0 eine Nullstelle der Ordnung m besitzt.

Polstellen bei rationaler Funktion ohne gemeinsame Nullstellen (S. 77)

Bei einer **rationalen** Funktion ohne gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner kommen als Singularitäten nur **Polstellen** in Frage.

Satz 7.4 (S. 77)

Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann ein Pol, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (7.10)$$

Satz 7.5: Satz von Picard (S. 78)

Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f , so nimmt f in **jeder** Umgebung von z_0 **jeden** Wert aus \mathbb{C} (mit höchstens einer Ausnahme) als Funktionswert unendlich oft an.

8 Residuentheorie

8.1 Der Residuensatz

Definition 8.1: Residuum (S. 79)

Der Koeffizient c_{-1} in der Laurent-Reihe von f heißt das **Residuum** von f in z_0 :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (8.1)$$

Kurvenintegral mit Residuum berechnen (S. 79)

Damit gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_0). \quad (8.2)$$

Satz 8.1: Residuensatz (S. 80)

Es sei f in dem Gebiet G bis auf endlich viele isolierte Singularitäten a_1, \dots, a_N analytisch und C eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in G , die a_1, \dots, a_N umschließt, aber selbst durch keine Singularität geht. Dann gilt

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (8.3)$$

8.2 Methoden der Residuenberechnung

A) Residuum aus der Laurent-Reihe ablesen (S. 80)

Residuum aus der Laurent-Reihe ablesen:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}. \quad (8.4)$$

B) Residuum an einem einfachen Pol (S. 80)

Das Residuum an einem einfachen Pol bestimmt man mit

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z). \quad (8.5)$$

Sonderfall:

$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$; g, h analytisch, z_0 einfache Nullstelle von $h(z)$ (also $h(z_0) \neq 0$) und $g(z) \neq 0$. f hat einfachen Pol an z_0 . Dann gilt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (8.6)$$

C) Residuum an einem mehrfachen Pol (S. 80)

Das Residuum an einem mehrfachen Pol berechnet man mit

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left((z - z_0)^m \cdot f(z) \right)^{(m-1)} \Big|_{z=z_0} \quad (8.7)$$

8.3 Beispiele zum Residuensatz S. 82

8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

Satz 8.2 (S. 83)

Es sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; p, q teilerfremde Polynome; $\operatorname{Grad}(q) \geq \operatorname{Grad}(p)$; q ohne reelle Nullstellen; z_1, \dots, z_N die komplexen Nullstellen des Polynoms $q(x)$ in der oberen Halbebene ($\operatorname{Im}(z) > 0$). Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (8.8)$$

8.5 Meromorphe Funktionen

Definition 8.2: Meromorphe Funktion (S. 87)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **meromorph**, wenn sie bis auf isolierte Polstellen analytisch in G ist.

Satz 8.3: Anzahlformel für Null- und Polstellen (S. 87)

Es sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph und C eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve, auf der keine Null- oder Polstellen von f liegen. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_C - P_C, \quad (8.9)$$

wobei N_C die Anzahl der Nullstellen und P_C die Anzahl der Polstellen von f (jeweils mit Vielfachheit) im Inneren von C bedeutet.

9 Anhang

9.1 Trigonometrische Funktionen

φ	φ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
0°	0	1	0	1	0
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0.9659	0.2588
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0.866	0.5
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	0.7071
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	0.866
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	0.2588	0.9659
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	1
105°	$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	-0.2588	0.9659
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	0.866
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	0.7071
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.866	0.5
165°	$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	-0.9659	0.2588
180°	π	-1	0	-1	0
195°	$\frac{13\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	-0.9659	-0.2588
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	-0.866	-0.5
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	-0.7071
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	-0.866
255°	$\frac{17\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	-0.2588	-0.9659
270°	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	-1
285°	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0.2588	-0.9659
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	-0.866
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	-0.7071
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0.866	-0.5
345°	$\frac{23\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	0.9659	-0.2588

