

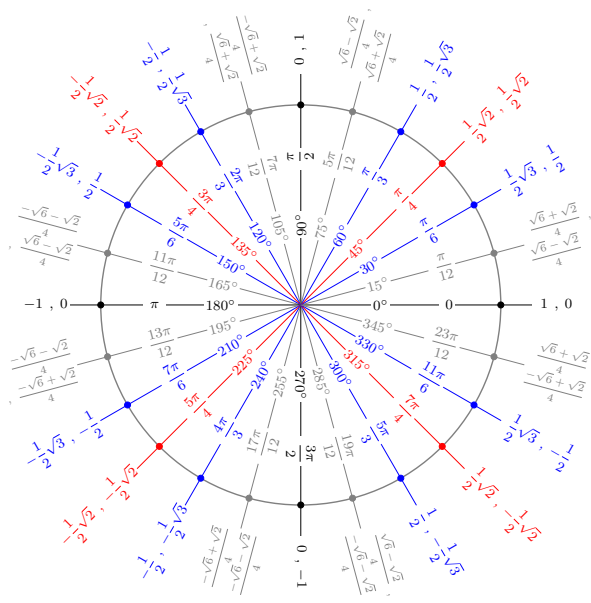
# Funktionentheorie

Vorlesung Prof. Dr. Stefan Reitz  
Sommersemester 2019

Jens Calov

12. Juli 2019

Die Inhalte dieser Zusammenfassung sind fast ausschließlich dem Vorlesungsskript entnommen. Die Seitenzahlen in den Box-Überschriften beziehen auf das Vorlesungsskript.



## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>2</b>
1.1 Komplexe Zahlen	2
1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)	3
1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene	3
1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene	3
<b>2 Elementare Funktionen</b>	<b>4</b>
2.1 Grundlagen	4
2.2 Grenzwerte und Stetigkeit	4
2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)	4
2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen	4
2.5 Die trigonometrischen Funktionen	4
2.6 Wurzeln	4
2.7 Möbius-Transformationen	5
<b>3 Potenzreihen</b>	<b>5</b>
3.1 Unendliche Reihen	5
3.2 Potenzreihen	6
3.3 Gleichmäßige Konvergenz	6
<b>4 Differentiation, analytische Funktionen</b>	<b>6</b>
4.1 Definition und Rechenregeln	6
4.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen	6
4.3 Geometrische Deutung der Ableitung	7
4.4 Das komplexe Potenzial	7
4.5 Harmonische Funktionen	7
<b>5 Integration</b>	<b>7</b>
5.1 Grundlagen	7
5.2 Der Cauchy-Integralsatz	7
5.3 Die Cauchy-Integralformel	8
<b>6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel</b>	<b>8</b>
6.1 Die Taylor-Reihe	8
6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra	8
6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip	8
6.4 Folgen analytischer Funktionen	8
6.5 Eigenschaften analytischer Funktionen (Zusammenfassung)	9
<b>7 Laurent-Reihen und Singularitäten</b>	<b>9</b>
7.1 Laurent-Reihen	9
7.2 Isolierte Singularitäten	9
<b>8 Residuentheorie</b>	<b>10</b>
8.1 Der Residuensatz	10
8.2 Methoden der Residuenberechnung	10
8.3 Beispiele zum Residuensatz	10
8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz	10
8.5 Meromorphe Funktionen	10
<b>9 Anhang</b>	<b>10</b>
9.1 Trigonometrische Funktionen	10
9.2 Ableitungen	11

# 1 Grundlagen

## 1.1 Komplexe Zahlen

### Komplexe Zahlen (S. 7)

**Imaginäre Einheit:**

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

Alle Zahlen der Form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

bilden die Menge

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1.3)$$

**Realteil** von  $z$ :

$$\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

**Imaginärteil** von  $z$ :

$$\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

### Addition (S. 8)

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ .

$$z + w := (x + u) + i(y + v) \in \mathbb{C} \quad (1.6)$$

### Inverses Element bzgl. Addition (S. 8)

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

$$-z = (-x) + i(-y) = -x - iy \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

### Multiplikation (S. 8)

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ .

$$z \cdot w := (x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C} \quad (1.8)$$

### Inverses Element bzgl. Multiplikation (S. 8)

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(x + iy)} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.9)$$

### Satz 1.1: Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ (S. 8)

Die Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen bilden mit oben definierter Addition (1.6) bzw. Multiplikation (1.8) einen Körper. Das Einselement dieses Körpers ist

$$1 + 0 \cdot i = 1 \in \mathbb{C} \quad (1.10)$$

und das Nullelement ist

$$z = 0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}. \quad (1.11)$$

Es gelten somit die Rechenregeln (für  $z, v, w \in \mathbb{C}; z = x + iy$ ):

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| a) $(z + v) + w = z + (v + w)$                 | Assoziativgesetz                   |
| b) $z + 0 = z$                                 | neutrales Element                  |
| c) $z + (-z) = 0$                              | inverses Element; wobei (1.7) gilt |
| d) $z + w = w + z$                             | Kommutativgesetz                   |
| e) $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w)$ | Assoziativgesetz                   |
| f) $z \cdot 1 = z$                             | neutrales Element                  |
| g) $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ für $z \neq 0$    | inverses Element; wobei (1.9) gilt |
| h) $z \cdot w = w \cdot z$                     | Kommutativgesetz                   |
| i) $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$   | Distributivgesetz                  |

### Binomische Formel (S. 10)

Mit  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot z^k \cdot w^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot z^k \cdot w^{n-k} \quad (1.12)$$

### Definition 1.1: Absolutbetrag, konjugiert komplexe Zahl (S. 10)

Es sei  $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \in \mathbb{R}$$

der **Absolutbetrag** von  $z$  und

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**.

### Absolutbetrag mit konjugiert komplexer Zahl (S. 11)

Wegen  $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$  folgt:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \Rightarrow |z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad (1.13)$$

### Abstand komplexer Zahlen (S. 11)

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $w = u + iv \in \mathbb{C}$ . Dann ist ihr Abstand:

$$|z - w| = |(x - u) + i(y - v)| \stackrel{\text{Def. 1.1}}{=} \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} \quad (1.14)$$

### Satz 1.2: Rechenregeln (S. 11)

Für  $z = x + iy, w = u + iv$  gelten folgende Rechenregeln:

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (w \neq 0)$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$   
 $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Re}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Re}(z_1) + \dots + \operatorname{Re}(z_n)$   
 $\operatorname{Im}(z_1 + \dots + z_n) = \operatorname{Im}(z_1) + \dots + \operatorname{Im}(z_n)$
- $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$   
 $\operatorname{Im}(z) \leq |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$   
 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

### Dreiecksungleichung (S. 12)

Sei  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann gilt (wie im Reellen) für den Betrag im Komplexen die **Dreiecksungleichung**:

$$|z \pm w| \leq |z| + |w| \quad (1.15)$$

Allgemein gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (1.16)$$

### Definition 1.2: Kreisscheibe, $r$ -Umgebung einer komplexen Zahl (S. 12)

Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $r \in \mathbb{R}, r > 0$ . Dann ist die Menge

$$K_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \quad (1.17)$$

die (**offene**) **Kreisscheibe** um  $a$  mit Radius  $r > 0$  (oder  **$r$ -Umgebung** von  $a$ )

### Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen (S. 14)

Eine komplexe Zahl  $z = x + iy, z \neq 0$ , ist eindeutig bestimmt durch den **Betrag**

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.18)$$

und durch das **Argument**

$$\arg(z) := \varphi, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (1.19)$$

Es gilt:

$$x = |z| \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = |z| \cdot \sin \varphi. \quad (1.20)$$

Man nennt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (1.21)$$

die **Polarkoordinatendarstellung** von  $z \neq 0$ . Es gilt auch:

$$z = r \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \cdot \sin(\varphi + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

**Umrechnung zwischen Darstellungen (S. 15)**

Für die Umrechnung zwischen den Darstellungen  $z = x + iy$  und  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  gelten folgende Regeln:

1. Gegeben sei  $z = x + iy \neq 0$ . Mit

$$r := |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \quad (1.23)$$

$$\arg(z) = \varphi := \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

gilt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \quad (1.25)$$

2. Gegeben sei  $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$  mit  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Mit

$$x := r \cdot \cos \varphi \text{ und} \quad (1.26)$$

$$y := r \cdot \sin \varphi \quad (1.27)$$

gilt

$$z = x + iy. \quad (1.28)$$

**Satz 1.3 (S. 16)**

Sind  $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi), \quad w = |w| \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi), \quad (1.29)$$

so gilt

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)], \quad (1.30)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]. \quad (1.31)$$

**Folgerung (S. 16)**

Aus Satz 1.3 folgt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.32)$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi} \quad (1.33)$$

**1.2 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 1)****Reelle Exponentialfunktion (S. 17)**

Bekannte reelle Exponentialfunktion ( $x, y \in \mathbb{R}$ ):

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (1.34)$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (1.35)$$

**Komplexe Exponentialfunktion (S. 17)**

Bekannte Komplexe Exponentialfunktion ( $z, w \in \mathbb{C}$ ):

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (1.36)$$

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (1.37)$$

**Eulersche Gleichung (S. 18)**

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $z := x + iy$  gilt:

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad \text{Eulersche Gleichung} \quad (1.38)$$

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot [\cos(y) + i \sin(y)] \quad (1.39)$$

**Eulersche Identität (S. 18)**

Aus der Eulerschen Gleichung folgt sofort die Eulersche Identität:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

**Satz 1.4 (S. 19)**

1. Es gilt für  $y \in \mathbb{R}$ :

$$\cos y = \operatorname{Re}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad (1.40)$$

$$\sin y = \operatorname{Im}(e^{iy}) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad (1.41)$$

2. Jede komplexe Zahl  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  lässt sich in der Form

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad (1.42)$$

mit  $r = |z|$  und  $\varphi = \arg(z)$  schreiben.

3. Für  $z \cdot r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $w = s \cdot e^{i\psi}$  gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s \cdot e^{i\varphi + i\psi} \quad (1.43)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} \cdot e^{i\varphi - i\psi} \quad (w \neq 0). \quad (1.44)$$

**Satz 1.5: Formel von Moivre (S. 20)**

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) \quad (1.45)$$

**1.3 Punktmengen in der komplexen Ebene****Definition 1.3: Gebiet (S.20)**

Eine Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{C}$  heißt **Gebiet**, wenn  $G$  offen und zusammenhängend ist.

**Definition 1.4: einfach zusammenhängend (S.21)**

Ein Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn das Innere jedes in  $G$  verlaufenden geschlossenen Streckenzuges ganz zu  $G$  gehört, d.h. wenn  $G$  keine Löcher hat.

**Randpunkt, Rand von  $D$  (S. 21)**

Ist  $D \subseteq \mathbb{C}$  eine beliebige Menge, so heißt ein Punkt  $z \in \mathbb{C}$  ein **Randpunkt** von  $D$ , wenn in jeder  $r$ -Umgebung (Def. 1.2 S. 2) von  $z$  sowohl Punkte aus  $D$  liegen, als auch Punkte, die nicht zu  $D$  gehören. Der **Rand von  $D$**  ist die Menge aller Randpunkte; er wird mit

$$\partial D \quad (1.46)$$

bezeichnet.

**abgeschlossen (S. 22)**

Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt **abgeschlossen**, wenn der Rand von  $D$  zu  $D$  gehört:  $\partial D \subseteq D$ . Man nennt  $\bar{D} := D \cup \partial D$  den **Abschluss** von  $D$ .

**beschränkt, unbeschränkt (S. 22)**

Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Wir nennen  $D$  **beschränkt**, wenn es eine (hinreichend große) Kreisscheibe  $K_r(0)$  gibt, die  $D$  umfasst. Andernfalls heißt  $D$  **unbeschränkt**.

**1.4 Zahlenfolgen in der komplexen Ebene****Definition 1.5: konvergente Folge (S. 22)**

Man sagt, eine komplexe Zahlenfolge  $(z_n)_{n \geq 0}$  **konvergiert** gegen den Grenzwert  $z \in \mathbb{C}$ , und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{oder} \quad z_n \rightarrow z, \quad (1.47)$$

wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$  gibt, so dass gilt:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in N(\varepsilon). \quad (1.48)$$

Konvergiert die Folge nicht, so nennt man sie **divergent**.

 **$z_n \rightarrow \infty$  (S. 23)**

Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ , falls für die **reelle** Folge  $(|z_n|)$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty.$$

**Rechenregeln konvergenter komplexer Folgen (S. 23)**

Wie bei reellen Folgen ist der Grenzwert einer konvergenten komplexen Folge eindeutig bestimmt und es gelten die bekannten Rechenregeln für  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= z \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w_n &= w \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) &= z \pm w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) &= z \cdot w \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} &= \frac{z}{w} \quad (w_n, w \neq 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| &= |z| \end{cases} \quad (1.49)$$

## 2 Elementare Funktionen

### 2.1 Grundlagen

### 2.2 Grenzwerte und Stetigkeit

#### Definition 2.1: Grenzwert, Stetigkeit (S. 27)

- Die Funktion  $f$  sei definiert in einer  $r$ -Umgebung (Kreisscheibe) um einen Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ , mit der Einschränkung, dass  $f$  am Punkt  $z_0$  eventuell undefiniert ist. Die Zahl  $w_0$  heißt **Grenzwert** von  $f$  für  $z \rightarrow z_0$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0, \quad (2.1)$$

wenn für jedes (beliebig kleine)  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $\delta > 0$  existiert mit

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (2.2)$$

Bei **beliebiger Annäherung** von  $z$  an  $z_0$  müssen sich die Funktionswerte  $f(z)$  also dem Wert  $w_0$  annähern; andernfalls existiert der Grenzwert nicht!

- $f$  heißt **stetig** in  $z_0$ , wenn  $f$  in  $z_0$  definiert ist und wenn gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.3)$$

#### $\lim f(z) = \infty$ (S. 27)

Man schreibt  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , falls gilt:  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ .

### 2.3 Die komplexe Exponentialfunktion (Teil 2)

#### Die komplexe $e$ -Funktion (S. 27)

Es sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (2.4)$$

für  $z = x + iy$ . Man schreibt auch

$$f(z) = \exp(z). \quad (2.5)$$

- Gerade  $x = x_0$  wird auf Kreis abgebildet.
- Gerade  $y = y_0$  wird auf Halbgerade von 0 mit Winkel  $y_0$  abgebildet.
- Der **Fundamentalstreifen**:

$$F := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq \pi\} \quad (2.6)$$

#### Satz 2.1 (S. 29)

Die Exponentialfunktion  $f(z) = e^z$  ist eine bijektive Abbildung von  $F$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

#### Periodizität (S. 30)

Die Funktion  $f(z) = e^z$  hat die **Periode**  $2k\pi i$ , denn es gilt

$$f(z + 2k\pi i) = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z = f(z). \quad (2.7)$$

Jeder Streifen der Form

$$S = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < y = \operatorname{Im}(z) \leq (2k+1)\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (2.8)$$

wird bijektiv auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  abgebildet, da  $S$  durch Verschiebung um  $2k\pi i$  aus  $F$  (2.6) entsteht.

### 2.4 Der komplexe Logarithmus und allgemeine Potenzen

#### Umkehrfunktion von $e^z$ (S. 30)

$f(z) = e^z$  ist eine bijektive Abbildung von  $F$  (2.6) auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , daher existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow F, \quad w \mapsto z = f^{-1}(w) \quad (2.9)$$

#### Komplexer Logarithmus (S. 30)

Zu gegebenem  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definieren wir

$$\operatorname{Ln}(w) := \ln|w| + i \arg(w) \quad (2.10)$$

mit  $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$ , wobei  $\ln$  der natürliche Logarithmus für reelle Zahlen ist. Man nennt dies den **Hauptwert des komplexen Logarithmus**. Wegen  $e^{z+2k\pi i} = e^z$  gilt auch

$$\operatorname{Ln}_k(w) := \ln|w| + i \arg(w) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.11)$$

Für  $k \neq 0$  nennt man dies die **Nebenzweige des komplexen Logarithmus**.

#### Vorsicht (S. 31)

Die Regel  $\operatorname{Ln}(z \cdot w) = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(w)$  gilt **nicht** im Allgemeinen!

#### Allgemeine Potenzen in $\mathbb{C}$ (S. 31)

Für  $a, z \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$  definiert man wie im Reellen:

$$a^z := e^{z \cdot \operatorname{Ln}(a)} \quad (2.12)$$

#### Rechenregeln (S. 31)

Für  $z, w \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$a^z \cdot a^w = a^{z+w} \quad (2.13)$$

$$(a^z)^n = a^{n \cdot z} \quad (2.14)$$

### 2.5 Die trigonometrischen Funktionen

#### Definition 2.2 (S. 31)

Für  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir:

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad (2.15)$$

$$\sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}), \quad (2.16)$$

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{falls } \cos z \neq 0, \quad (2.17)$$

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{falls } \sin z \neq 0. \quad (2.18)$$

#### Sinus und Kosinus hyperbolicus (Formelsammlung)

Sinus hyperbolicus:

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix) \quad (2.19)$$

Kosinus hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cos(ix) \quad (2.20)$$

#### Eigenschaften trigonometrischer Funktionen (S. 32)

- Symmetrien:

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad (2.21)$$

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad (2.22)$$

- Additionstheoreme:

$$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \quad (2.23)$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \quad (2.24)$$

- Eulersche Gleichung:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (2.25)$$

Dies stellt **nicht** die Zerlegung in Real- und Imaginärteil dar, die sieht so aus:

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} (\cos x + i \sin x) \quad (2.26)$$

$$\operatorname{Re}(iz) = e^{-y} \cos x \quad (2.27)$$

$$\operatorname{Im}(iz) = e^{-y} \sin x \quad (2.28)$$

Mit Definition 2.2 gilt:

$$\cos z = \cos x \cdot \cosh y + i (-\sin x \cdot \sinh y) \quad (2.29)$$

$$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i (-\cos x \cdot \sinh y) \quad (2.30)$$

- Periodizität:

$\cos z$  und  $\sin z$  sind  $2\pi$ -periodisch.

- Nullstellen:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.31)$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

- Keine Beschränktheit:

Es gilt **nicht**:  $|\sin z| \leq 1$  und  $|\cos z| \leq 1$

- Stetigkeit:

Die trigonometrischen Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich jeweils stetig.

### 2.6 Wurzeln

#### Satz 2.2: $n$ -te Wurzeln (S. 32)

Ist  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $a = r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , so ist jede der Zahlen

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.33)$$

eine  $n$ -te Wurzel von  $a$ .

#### $\sqrt[n]{0}$ (S. 33)

Für  $a = 0$  setzt man  $\sqrt[n]{0} := 0$ .

**Einheitswurzeln (S. 33)**

Für  $a = 1$  spricht man von den **Einheitswurzeln**. Wegen  $a = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$  lauten die Einheitswurzeln nach Satz 2.2:

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.34)$$

$$z_0 = 1 \quad (2.35)$$

Die  $n$ -ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^n - 1. \quad (2.36)$$

**Hauptwert der  $n$ -ten Wurzel (S. 33)**

Um für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  die Funktion  $f(z) = \sqrt[n]{z}$  definieren zu können, muss man einen der  $n$  Werte  $z_0, \dots, z_{n-1}$  auswählen und definiert daher die Funktion

$$\sqrt[n]{z} := z_0 = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi}{n}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (2.37)$$

und spricht vom **Hauptwert der  $n$ -ten Wurzel**.

**2.7 Möbius-Transformationen****Möbius-Transformation (S. 34)**

Die gebrochen-linearen Funktionen oder **Möbius-Transformationen** haben die Form

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (2.38)$$

**Erweiterung der komplexen Zahlen (S. 34)**

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, erweitert man die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  zur **abgeschlossenen komplexen Ebene**

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (2.39)$$

**Erweiterung der Möbius-Transformation mit  $\hat{\mathbb{C}}$  (S. 34)**

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \quad (2.40)$$

$$f(\infty) := \frac{a}{c} \quad (2.41)$$

**Umkehrabbildung der Möbius-Transformation (S. 34)**

Durch (2.38), (2.40) und (2.41) ist eine bijektive Abbildung  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definiert. Die Umkehrabbildung ist ebenfalls eine Möbius-Transformation:

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(w) = z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.42)$$

**Verknüpfung zweier Möbius-Transformationen (S. 34)**

Die Verknüpfung  $w = (f \circ g)(z)$  zweier Möbius-Transformationen vom Typ (2.38) ergibt wieder eine Möbius-Transformation.

**Satz 2.3 (S. 34)**

Jede Möbius-Transformation entsteht durch Hintereinanderausführung von Abbildungen der folgenden Art:

Drehstreckung:

$$z \mapsto u \cdot z \quad (2.43)$$

Translation:

$$z \mapsto z + v \quad (2.44)$$

Inversion:

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad (2.45)$$

**Satz 2.4 (S. 35)**

Die Möbius-Transformation ist kreis-, winkel- und orientierungstreu, d.h.:

- Kreise in  $\mathbb{C}$  werden auf Kreise oder Geraden in  $\mathbb{C}$  abgebildet. Geraden in  $\mathbb{C}$  werden auf Kreise oder Geraden in  $\mathbb{C}$  abgebildet.
- Zwei Kurven in der  $z$ -Ebene schneiden sich unter dem gleichen Winkel wie ihre Bildkurven in der  $w$ -Ebene.
- Die linke Seite eines orientierten Kreises (bzw. einer orientierten Gerade) wird auf die linke Seite des Bildkreises bzw. der Bildgeraden abgebildet.

**Kreisgleichung (S. 35)**

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2 = 1 \quad (2.46)$$

**Satz 2.5 (S. 36)**

Zu je drei beliebig vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  und drei weiteren paarweise verschiedenen Punkten  $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$  gibt es genau eine Möbius-Transformation  $f$  mit der Eigenschaft  $f(z_1) = w_1$  und  $f(z_2) = w_2$  und  $f(z_3) = w_3$ .

**3 Potenzreihen****3.1 Unendliche Reihen****Unendliche Reihe (S. 39)**

Die mit einer komplexen Zahlenfolge  $(z_n)_{n \geq 0}$  gebildete Partialsummenfolge

$$s_n := \sum_{k=0}^n z_k = z_0 + z_1 + \dots + z_n, \quad n \geq 0, \quad (3.1)$$

heißt **unendliche Reihe**, sie wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \quad \text{oder} \quad z_0 + z_1 + z_2 + \dots \quad (3.2)$$

bezeichnet.

**Konvergenz, Divergenz (S. 39)**

Man sagt, die Reihe **konvergiert** gegen  $s \in \mathbb{C}$ , bzw. sie hat die **Summe**  $s \in \mathbb{C}$ , und man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = s, \quad (3.3)$$

wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_0 + z_1 + z_2 + \dots) = s. \quad (3.4)$$

Die Reihe („Summe“) **divergiert**, wenn sie nicht konvergiert.

**Absolute Konvergenz (S. 39)**

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$  heißt **absolut konvergent**,

wenn die reelle Reihe der Beträge  $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$  konvergiert.

**Satz 3.1 (S. 39)**

Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ konvergiert} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ konvergiert.} \quad (3.5)$$

**Satz 3.2: Majorantenkriterium (S. 40)**

Es gelte  $|z_k| \leq b_k$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent.} \quad (3.6)$$

**Satz 3.3: Quotientenkriterium (S. 40)**

Es gelte  $z_k \neq 0$  für  $k \geq k_0$ . Dann folgt:

$$\text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ absolut konvergent,}$$

$$\text{b) } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{k+1}}{z_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ divergent.}$$

**Geometrische Reihe (S. 40)**

Wie im Reellen gilt für  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (3.7)$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (3.8)$$

### 3.2 Potenzreihen

#### Potenzreihe (S. 40)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k \quad (3.9)$$

mit  $a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$  heißt **Potenzreihe** mit **Zentrum**  $z_0$  oder **Entwicklungspunkt**  $z_0$  und **Koeffizienten**  $a_k$ .

**Achtung:** Es dürfen nur nichtnegative Potenzen von  $z - z_0$  auftreten!

#### Konvergenzradius (S. 40)

Wie im Reellen zeigt man, dass für eine Potenzreihe (3.9) nur die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
2. Die Potenzreihe konvergiert nur für  $z = z_0$ .
3. Es gibt eine positive Zahl  $R$ , so dass die Potenzreihe für alle  $z$  mit
  - $|z - z_0| < R$  absolut konvergiert,
  - $|z - z_0| > R$  divergiert,
  - $|z - z_0| = R$  konvergiert oder divergiert (auch gemischt möglich).

Die Zahl  $R$  heißt **Konvergenzradius** der Reihe und  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  der **Konvergenzkreis**. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen definiert man im Fall 1 den Konvergenzradius  $R = \infty$  und im Fall 2 den Konvergenzradius  $R = 0$ .

#### Berechnung Konvergenzradius (S. 41)

Zur Berechnung des Konvergenzradius  $R$  ist häufig das Quotienten oder Wurzelkriterium anwendbar:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \in [0, \infty], \quad (3.10)$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \in [0, \infty]. \quad (3.11)$$

Der Grenzwert (3.10) existiert nicht immer. Der größte Häufungswert (3.11) einer Folge existiert jedoch immer.

### 3.3 Gleichmäßige Konvergenz

#### Gleichmäßige Konvergenz (S. 42)

$(f_n(z))$  konvergiert auf  $D \subseteq \mathbb{C}$  **gleichmäßig** gegen die **Grenzfunktion**  $f(z)$ , wenn es zu jedem beliebig kleinen Radius  $\varepsilon > 0$  einen für alle  $z \in D$  gemeinsamen Index  $N(\varepsilon)$  gibt, so dass für  $n \geq N(\varepsilon)$  sämtliche Funktionswerte  $f_n(z)$  in die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $f(z)$  fallen:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon). \quad (3.12)$$

#### Punktweise Konvergenz (S. 42)

Bei **punktweiser Konvergenz** ist die „Konvergenzgeschwindigkeit“ evtl. von Punkt zu Punkt verschieden. Bei punktweiser Konvergenz gilt:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon, z). \quad (3.13)$$

#### Sätze: Gleichmäßige Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Eine Potenzreihe (3.9) mit Konvergenzradius  $R > 0$  ist in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe  $D$  innerhalb ihres Konvergenzkreises ( $D := \{z : |z - z_0| \leq r < R\}$ ) gleichmäßig konvergent.

#### Eigenschaften bei gleichmäßiger Konvergenz einer Potenzreihe (S. 42)

Für  $s_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$  und  $s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  gilt:

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D, n \geq N(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Gleichmäßige Konvergenz garantiert die Eigenschaften der **Grenzfunktion**:

$$s(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R. \quad (3.15)$$

Insbesondere ist deshalb  $s(z)$  in der Menge  $\{z : |z - z_0| < R\}$  **stetig**. Die Stetigkeit einer Potenzreihe in  $z^*$  können wir auch wie folgt schreiben:

$$\lim_{z \rightarrow z^*} s(z) = s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^* - z_0)^n. \quad (3.16)$$

Alle komplexen Funktionen, die über Potenzreihen definiert sind, sind stetig.

## 4 Differentiation, analytische Funktionen

### 4.1 Definition und Rechenregeln

#### Definition 4.1 (S. 43)

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ .  $f$  heißt in  $z_0 \in G$  **komplex differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4.1)$$

im Sinne von Definition 2.1 existiert.  $f'(z_0)$  heißt **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $z_0$ .  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **analytisch** (oder **holomorph**), wenn  $f'(z)$  für jedes  $z \in G$  existiert.

#### Bemerkungen, Rechenregeln (S. 43)

1. Der Grenzwert des Differenzenquotienten muss bei jeder Annäherung von  $z$  an  $z_0$  existieren und gleich  $f'(z_0)$  sein. Andernfalls ist die Funktion an  $z_0$  nicht differenzierbar.
2. Differenzierbare Funktionen sind stetig.
3. Sind  $f$  und  $g$  differenzierbar (bzw. analytisch), so sind auch die Funktionen  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  (für  $g(z) \neq 0$ ) und  $f \circ g$  differenzierbar (bzw. analytisch), und es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Linearität:

$$(a f + b g)' = a f' + b g' \quad (4.2)$$

b) Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (4.3)$$

c) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad (4.4)$$

insbesondere

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad (4.5)$$

d) Kettenregel:

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g' \quad (4.6)$$

#### Satz 4.1: Potenzreihen sind analytisch und unendlich oft diff.bar (S. 45)

Eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit Konvergenzradius  $R > 0$  stellt im Inneren des Konvergenzkreises eine analytische Funktion dar.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (4.7)$$

ist analytisch in  $K_R(z_0) = \{z : |z - z_0| < R\}$ . Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad (4.8)$$

Die abgeleitete Reihe ist wieder eine Potenzreihe und hat denselben Konvergenzradius  $R$ . Das Ableiten kann also beliebig oft wiederholt werden. Die Koeffizienten lassen sich aus der Funktion  $f$  berechnen und sind daher durch  $f$  eindeutig bestimmt:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

### 4.2 Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

#### Satz 4.2: Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (S. 47)

Ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar an  $z_0 = x_0 + i y_0$  und gilt

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y), \quad (4.10)$$

so erfüllen  $u$  und  $v$  die **Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen** an der Stelle  $(x_0, y_0)$ :

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad (4.11)$$

$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \quad (4.12)$$

Ist  $f$  differenzierbar für alle  $z \in G$ , wobei  $G$  eine offene Menge in  $\mathbb{C}$  ist, so gelten diese Differentialgleichungen in ganz  $G$ .

#### Folgerung aus Satz 4.2: Funktionen mit Ableitung 0 sind konstant (S. 47)

Es sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ein in dem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  analytische Funktion mit  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in G$ . Dann gilt:  $f(z) = \text{const.}$



### 4.3 Geometrische Deutung der Ableitung

#### Satz 4.3 (S. 47)

Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion mit  $f'(z) \neq 0$  in dem Gebiet  $G$ , dann ist die Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  in allen Punkten  $z_0 \in G$  **lokal konform** (d.h. **winkeltreu** und **orientierungstreu**), d.h. der Schnittwinkel zwischen zwei glatten Kurven durch  $z_0 \in G$  ist samt Drehsinn der gleiche wie für die beiden Bildkurven durch  $f(z_0)$ .

### 4.4 Das komplexe Potenzial

### 4.5 Harmonische Funktionen

#### Harmonische Funktionen (S. 50)

Ist  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  eine analytische Funktion, so gilt aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad (4.13)$$

$$u_y = -v_x. \quad (4.14)$$

Es folgt  $u_{xx} = v_{yx}$  und  $u_{yy} = -v_{xy}$ . Wegen  $v_{xy} = v_{yx}$  haben wir:  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Man schreibt dafür auch

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (4.15)$$

und nennt Funktionen dieser Eigenschaft **harmonisch**. Es gilt auch

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (4.16)$$

#### (S. 50)

Es sei nun  $G \subseteq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend und es sei nur die Funktion  $u(x, y)$  vorgegeben. Gesucht ist die Funktion  $v(x, y)$ , sodass

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (4.17)$$

eine analytische Funktion ist. Wir gehen wie folgt vor:

1.  $u_x$  und  $u_y$  berechnen
2. Aus dem Ansatz  $v_y = u_x$  durch unbestimmte Integration nach  $y$

$$v = \int u_x dy + c(x) \quad (4.18)$$

bestimmen.

3. Nach  $x$  differenzieren,  $v_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \int u_x dy \right) + c'(x)$ , dies mit  $-u_y$  gleichsetzen und daraus  $c(x)$  berechnen.
4. Zur analytischen Funktion (4.17) zusammensetzen.

## 5 Integration

### 5.1 Grundlagen

#### Kurve / Weg (S. 52)

Eine **Kurve** (oder ein **Weg**)  $C$  in der komplexen Ebene wird in der Form

$$z(t) = x(t) + i y(t) \quad \text{mit } t \in [a; b] \subseteq \mathbb{R} \quad (5.1)$$

dargestellt. Stetigkeit und Differenzierbarkeit beziehen sich dabei auf die Funktionen  $x(t)$  und  $y(t)$ . Es gilt

$$z'(t) = x'(t) + i y'(t). \quad (5.2)$$

#### Definition 5.1: Kurvenintegral (S. 52)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und durch  $z(t)$ ,  $t \in [a, b]$  sei eine **stetig differenzierbare** Kurve  $C$  gegeben. Dann heißt

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b \underbrace{f(z(t)) \cdot z'(t)}_{\in \mathbb{C}} dt \quad (5.3)$$

$$:= \int_a^b \operatorname{Re}(f(z(t)) \cdot z'(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(z(t)) \cdot z'(t)) dt \quad (5.4)$$

das **Kurvenintegral** von  $f$  längs  $C$ . Für eine Kurve  $C$ , die aus endlich vielen stetig differenzierbaren Kurvenstücken  $C_1, \dots, C_n$  besteht, definiert man

$$\int_C f(z) dz := \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (5.5)$$

#### Kurvenintegral, einfach geschlossene Kurve (S. 52)

Ist  $C$  eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird (das Innere liegt links in Durchlaufrichtung), so nennt man  $C$  **einfach geschlossen** und schreibt

$$\oint_C f(z) dz \quad (5.6)$$

für das Kurvenintegral. Bei einem Kreis mit  $z(t) = a + r e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  schreibt man

$$\oint_{|z-a|=r} f(z) dz. \quad (5.7)$$

#### Das Fundamentintegral (S. 52)

Ein zentraler Baustein der Funktionentheorie ist das **Fundamentintegral**, das wichtigste Integral der Analysis! Für  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  gilt:

$$\oint_{|z-a|=r} (z-a)^m dz = 0, \quad \text{falls } m \in \mathbb{Z}, m \neq -1 \quad (5.8)$$

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i \quad (m = -1) \quad (5.9)$$

Berechnung des Integrals im Skript, Seiten 52-53.

#### Satz 5.1 (S. 54)

Aus Definition 5.1 ergeben sich die folgenden Regeln:

- a) **Linearität:** Mit  $a, b \in \mathbb{C}$  gilt

$$\int_C [a f(z) + b g(z)] dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz \quad (5.10)$$

- b) **Additivität bei zusammengesetzten Wegen:**  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz \quad (5.11)$$

- c) **Abhängigkeit der Orientierung:** Für die zu  $C$  entgegengesetzt durchlaufende Kurve  $C^*$  gilt

$$\int_{C^*} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \quad (5.12)$$

- d) **Abschätzung:**

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C} |f(z)| \cdot (\text{Länge von } C) \quad (5.13)$$

### 5.2 Der Cauchy-Integralsatz

#### Satz 5.2: Cauchy-Integralsatz, Hauptsatz der Funktionentheorie (S. 55)

Für jede analytische Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  und für jede stückweise stetig differenzierbare einfach geschlossene Kurve  $C$  in  $G$  gilt

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (5.14)$$

#### Satz 5.3: Wegunabhängigkeit des Integrals (S. 57)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  einfach zusammenhängend,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch. Dann gilt für zwei Punkte  $z_0, z_1 \in G$  und zwei beliebige (stückweise stetig differenzierbare) Kurven  $C_1$  und  $C_2$  in  $G$ , die von  $z_0$  nach  $z_1$  führen:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad (5.15)$$

#### Satz 5.4: Stammfunktion mittels Integral (S. 58)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $z_0 \in G$  fest gewählt und  $z \in G$  beliebig. Ist  $C$  irgendeine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve von  $z_0$  nach  $z$  in  $G$ , so ist das wegunabhängige Integral

$$I(z) := \int_{z_0}^z f(w) dw := \int_C f(w) dw \quad (5.16)$$

eine Stammfunktion von  $f : I'(z) = f(z)$  für alle  $z \in G$ .

**Bemerkung (S. 58)**

Wie im Reellen gilt: zwei Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  von  $f$  unterscheiden sich nur durch eine Konstante, also:

$$F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \Rightarrow F_1(z) = F_2(z) + c, \quad c \in \mathbb{C} \quad (5.17)$$

Damit ergibt sich: Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , so folgt:

$$\int_{z_0}^z f(w) dw = I(z) = F(z) + c. \quad (5.18)$$

Wegen  $0 = \int_{z_0}^{z_0} f(w) dw = F(z_0) + c$  folgt  $c = -F(z_0)$ , d.h.:

$$\int_{z_0}^z f(w) dw = F(z) - F(z_0) \quad (5.19)$$

**5.3 Die Cauchy-Integralformel****Satz 5.5 (S. 59)**

Ist  $G$  nicht einfach zusammenhängend (mit „Löchern“) und  $f$  analytisch auf  $G$ , dann gilt für je zweifach geschlossene Kurven  $C_1$  und  $C_2$  aus  $G$ , die dieselbe Ausnahmestelle („Löcher“) in gleicher Richtung einmal umlaufen:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz. \quad (5.20)$$

**Satz 5.6 (Cauchy-Integralformel)**

S. 60 Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $C$  eine einfach geschlossene Kurve in  $G$ , deren Inneres ganz in  $G$  liegt. Dann gilt für alle  $z$  im Innern von  $C$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (5.21)$$

**6 Anwendungen der Cauchy-Integralformel****6.1 Die Taylor-Reihe****Satz 6.1 (S. 61)**

Es sei  $a \in \mathbb{C}$  und  $w \neq a$ . Dann gilt

$$|w - a| > |z - a| \Rightarrow \frac{1}{w - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(w - a)^{k+1}}, \quad (6.1)$$

(Potenzreihe bzgl.  $z$ )

$$|w - a| < |z - a| \Rightarrow \frac{1}{w - z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - a)^k}{(z - a)^{k+1}}. \quad (6.2)$$

(keine Potenzreihe bzgl.  $z$ )

**Bemerkung (S. 61)**

Eine analytische Funktion  $f$  ist beliebig oft differenzierbar und (lokal) immer durch eine Taylor-Reihe darstellbar.

**Satz 6.2: Taylor-Reihe (S. 62)**

Jede im Gebiet  $G$  analytische Funktion  $f$  besitzt innerhalb jeder  $r$ -Umgebung  $K_r(a)$  (vgl. Def. 1.2, S. 2), die ganz in  $G$  liegt, die Potenzreihendarstellung (**Taylor-Entwicklung**)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k, \quad z \in K_r(a); \quad (6.3)$$

insbesondere ist  $f$  in  $G$  beliebig oft differenzierbar mit den Ableitungen (**verallgemeinerte Cauchy-Integralformeln**)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad |w-a| < \rho < r, n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.4)$$

**Folgerung (S. 62)**

Ist  $f$  in ganz  $\mathbb{C}$  analytisch (also  $G = \mathbb{C}$ ), so hat die Taylor-Reihe den Konvergenzradius  $R = \infty$ .

**Regel von l'Hospital (S. 63)**

Sind  $f$  und  $g$  analytische Funktionen mit  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  und gilt  $g'(z_0) \neq 0$ , so folgt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \quad (6.5)$$

**Bemerkung (S. 63)**

Ist  $R$  der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von  $f$ , so befindet sich auf dem Rand des Konvergenzkreises immer eine Stelle, an der  $f$  nicht differenzierbar ist („Singularität“). Für die Funktion  $\text{Ln}(1+z)$  ist diese Singularität bei  $-1$ .

**Definition 6.1 (S. 64)**

Man sagt, eine analytische Funktion habe eine Nullstelle  $a$  der **Ordnung**  $m$ , wenn gilt

$$f(z) = (z - a)^m \cdot f_1(z) \quad \text{in einer Umgebung } K_r(a) \quad (6.6)$$

mit einer analytischen Funktion  $f_1$ , für die gilt  $f_1(a) \neq 0$ . Dies ist gleichbedeutend mit

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (6.7)$$

**Satz 6.3: Identitätssatz (S. 64)**

Für analytische Funktionen  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $G$  sind äquivalent:

- $f(z) = g(z)$  für alle  $z \in G$
- $f(z_n) = g(z_n)$  für alle Punkte  $(z_n)$  einer unendlichen Folge mit verschiedenen Folgengliedern und Häufungswert  $a$  in  $G$ .

**6.2 Der Fundamentalsatz der Algebra****Satz 6.4: Satz von Liouville (S. 65)**

Ist  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  analytisch und beschränkt ( $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ), so ist  $f$  eine konstante Funktion:  $f(z) = \text{const.}$

**Satz 6.5: Fundamentalsatz der Algebra (S. 66)**

Jedes nichtkonstante Polynom

$$p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 1, a_n \neq 0 \quad (6.8)$$

hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen, wobei wir eine Nullstelle der Ordnung  $m$  (vgl. Def. 6.1)  $m$ -mal zählen.

**6.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip****Mittelwerteigenschaft (S. 66)**

Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $G$  ein Gebiet, so gilt gemäß Cauchy-Integralformel (Satz 5.6):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z|=\rho} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (6.9)$$

Schreiben wir den Kreis  $|w - z| = \rho$  in der Form  $C = \{w : w = z + \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi)\}$ , so folgt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{it})}{z + \rho e^{it} - z} \cdot i \cdot \rho e^{it} dt \quad (6.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt \quad (6.11)$$

Der Funktionswert  $f(z)$  ist der mittlere Wert aller Funktionswerte  $f(z + \rho e^{it})$  auf der Kreislinie  $C$  (**Mittelwerteigenschaft**).

**Satz 6.6: Maximumprinzip (S. 67)**

Ist  $G$  ein beschränktes Gebiet,  $f : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch und nicht konstant, dann liegt jede Maximalstelle  $z_0$  der Funktion  $|f(z)|$  auf dem Rand von  $G$  (und nicht im Innern von  $G$ ), d.h. die Betragsfläche  $z \rightarrow |f(z)|$  hat keine Gipfel im Innern des Gebiets.

**6.4 Folgen analytischer Funktionen****Lemma 6.1 (S. 68)**

Es sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, und für jede im Gebiet  $G$  verlaufende einfach geschlossene (stückweise stetig differenzierbare) Kurve  $C$ , sie samt ihres Innern in  $G$  liegt, gelte  $\oint_C f(z) dz = 0$ . Dann ist  $f$  analytisch in  $G$ .

**Satz 6.7: Weierstraß (S. 68)**

Ist  $(f_n)$  eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen in dem Gebiet  $G$ , so ist auch die Grenzfunktion  $f$  analytisch in  $G$ . Es gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(z) = f'(z). \quad (6.12)$$



**Satz 6.8 (S. 69)**

Ist  $(f_n)$  eine gleichmäßig konvergente Folge analytischer Funktionen mit Grenzfunktion  $f$  in dem Gebiet  $G$ , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6.13)$$

für jede stückweise differenzierbare Kurve  $C$  in  $G$ .

**Bemerkung (S. 69)**

Da in Satz 6.8  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$  gilt, können wir auch schreiben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz, \quad (6.14)$$

falls die Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert.

**6.5 Eigenschaften analytischer Funktionen (Zusammenfassung)****Eigenschaften analytischer Funktionen (S. 70)**

Es sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch,  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet in  $\mathbb{C}$  und  $C$  eine einfach geschlossene Kurve in  $G$ . Dann gilt:

1. **Cauchy-Integralsatz** (Satz 5.2):

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (6.15)$$

2.  $F(z) := \int_{z_0}^z f(w) dw$  ist wegunabhängig (Satz 5.3);  $F'(z) = f(z)$ .

3. **Cauchy-Integralformeln** (Sätze 5.6, 6.2):

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (6.16)$$

für alle  $z$  aus dem Inneren von  $C$ .

4. **Taylor-Entwicklung um  $a \in G$**  (Satz 6.2):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad (6.17)$$

in jeder offenen Kreisscheibe  $|z-a| < r$ , die ganz in  $G$  liegt.

5. Im Fall  $G = \mathbb{C}$  gilt der **Satz von Liouville** (Satz 6.4) für beschränkte, analytische Funktionen.

6. **Identitätssatz** (Satz 6.3)

7. **Mittelwerteigenschaft**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{it}) dt \quad z \in G. \quad (6.18)$$

8. **Maximumprinzip** (Satz 6.6): Ist  $f$  nicht konstant, so nimmt  $|f|$  das Maximum auf  $\partial G$  an (falls  $G$  beschränkt).

9. **Identitätssatz** (Satz 6.3)

10. **Konvergenzsätze** (Sätze 6.7, 6.8): Ist  $(f_n)$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge analytische Funktionen, so konvergieren auch die ersten Ableitungen und die Kurvenintegrale der Funktionen  $f_n$  gegen die erste Ableitung bzw. das Kurvenintegral von  $f$ .

**7 Laurent-Reihen und Singularitäten****7.1 Laurent-Reihen****Satz 7.1: Laurent-Reihen (S. 72)**

Es sei  $f$  im Kreisring  $K_{r,R}(a) = \{z : 0 \leq r < |z-a| < R\}$  analytisch, wobei  $0 \leq r < r \leq \infty$ . Dann gilt:

- a)  $f(z)$  lässt sich für alle  $z \in K_{r,R}(a)$  als **Laurent-Reihe** schreiben:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (7.1)$$

- b) Die Koeffizienten  $c_n$  sind eindeutig bestimmt durch ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $r < \rho < R$ ):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw. \quad (7.2)$$

**7.2 Isolierte Singularitäten****Isolierte Singularität, Hauptteil, Nebenteil (S. 75)**

Man nennt eine Singularität von  $f$  **isoliert**, wenn  $f$  an  $z_0$  nicht definiert ist, aber in  $\{z : 0 < |z-z_0| < r\}$  analytisch ist. Nach Satz 7.1 besitzt  $f$  die Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < r. \quad (7.3)$$

In dieser Entwicklung nennt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \text{den **Hauptteil** und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n \quad \text{den **Nebenteil** (oder analytischen Anteil).}$$

Die Koeffizienten  $c_n$  sind eindeutig bestimmt durch (7.2).

**Definition 7.1 (S. 75)**

Die isolierte Singularität  $z_0$  mit Laurent-Entwicklung (7.3) heißt

- a) **hebbar**, wenn der Hauptteil verschwindet; d.h. wenn  $c_{-n} = 0$  für alle  $n \geq 1$ ,
- b) **Pol der Ordnung  $m$** ,  $m \geq 1$ , wenn im Hauptteil  $c_{-m} \neq 0$  und  $c_{-n} = 0$  für alle  $n > m$ ,
- c) **wesentlich**, wenn im Hauptteil unendlich viele Koeffizienten  $\neq 0$  sind.

**Bedingungen für isolierte Singularitäten (S. 75)**

Die Laurent-Reihe um eine isolierte Singularität  $z_0$ .

- a)  $z_0$  ist **hebbar**, genau dann wenn gilt:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (7.4)$$

- b)  $z_0$  ist **Pol der Ordnung  $m$** , genau dann wenn gilt:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \text{analytisch} \quad (c_{-m} \neq 0) \quad (7.5)$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^m} f_1(z), \quad f_1(z) \text{ analytisch in } z_0, \quad f_1(z_0) \neq 0 \quad (7.6)$$

- c)  $z_0$  ist **wesentlich**, genau dann wenn gilt:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \text{analytisch}, \quad \text{unendlich viele } c_{-n} \neq 0. \quad (7.7)$$

**Satz 7.2: Heb bare Singularität (S. 76)**

Eine isolierte Singularität  $z_0$  ist genau dann hebbar, wenn gilt

$$|f(z)| \leq C \quad \text{für } 0 \leq |z-z_0| \leq \varepsilon \quad (*) \quad (7.8)$$

( $f$  ist beschränkt) für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$ .

**Satz 7.3: Singularität mit Pol der Ordnung  $m$  (S. 77)**

Eine isolierte Singularität  $z_0$  ist genau dann ein Pol der Ordnung  $m$ , wenn die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z)} \quad (z \neq z_0) \quad \text{mit} \quad g(z_0) := 0 \quad (7.9)$$

an  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  besitzt.

**Polstellen bei rationaler Funktion ohne gemeinsame Nullstellen (S. 77)**

Bei einer **rationalen** Funktion ohne gemeinsame Nullstellen von Zähler und Nenner kommen als Singularitäten nur **Polstellen** in Frage.

**Satz 7.4 (S. 77)**

Eine isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  ist genau dann ein Pol, wenn gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (7.10)$$

**Satz 7.5: Satz von Picard (S. 78)**

Ist  $z_0$  eine wesentliche Singularität von  $f$ , so nimmt  $f$  in **jeder** Umgebung von  $z_0$  **jeden** Wert aus  $\mathbb{C}$  (mit höchstens einer Ausnahme) als Funktionswert unendlich oft an.

## 8 Residuentheorie

### 8.1 Der Residuensatz

#### Definition 8.1: Residuum (S. 79)

Der Koeffizient  $c_{-1}$  in der Laurent-Reihe von  $f$  heißt das **Residuum** von  $f$  in  $z_0$ :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (8.1)$$

#### Kurvenintegral mit Residuum berechnen (S. 79)

Damit gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_0). \quad (8.2)$$

#### Satz 8.1: Residuensatz (S. 80)

Es sei  $f$  in dem Gebiet  $G$  bis auf endlich viele isolierte Singularitäten  $a_1, \dots, a_N$  analytisch und  $C$  eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve in  $G$ , die  $a_1, \dots, a_N$  umschließt, aber selbst durch keine Singularität geht. Dann gilt

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, a_k). \quad (8.3)$$

### 8.2 Methoden der Residuenberechnung

#### A) Residuum aus der Laurent-Reihe ablesen (S. 80)

Residuum aus der Laurent-Reihe ablesen:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = c_{-1}. \quad (8.4)$$

#### B) Residuum an einem einfachen Pol (S. 80)

Das Residuum an einem einfachen Pol bestimmt man mit

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z). \quad (8.5)$$

**Sonderfall:**

$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ;  $g, h$  analytisch,  $z_0$  einfache Nullstelle von  $h(z)$  (also  $h(z_0) \neq 0$ ) und  $g(z) \neq 0$ .  $f$  hat einfachen Pol an  $z_0$ . Dann gilt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (8.6)$$

#### C) Residuum an einem mehrfachen Pol (S. 80)

Das Residuum an einem mehrfachen Pol berechnet man mit

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left( (z - z_0)^m \cdot f(z) \right)^{(m-1)} \Big|_{z=z_0} \quad (8.7)$$

### 8.3 Beispiele zum Residuensatz S. 82

### 8.4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

#### Satz 8.2 (S. 83)

Es sei  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ;  $p, q$  teilerfremde Polynome;  $\operatorname{Grad}(q) \geq \operatorname{Grad}(p)$ ;  $q$  ohne reelle Nullstellen;  $z_1, \dots, z_N$  die komplexen Nullstellen des Polynoms  $q(x)$  in der oberen Halbebene ( $\operatorname{Im}(z) > 0$ ). Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k). \quad (8.8)$$

### 8.5 Meromorphe Funktionen

#### Definition 8.2: Meromorphe Funktion (S. 87)

Es sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **meromorph**, wenn sie bis auf isolierte Polstellen analytisch in  $G$  ist.

#### Satz 8.3: Anzahlformel für Null- und Polstellen (S. 87)

Es sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  meromorph und  $C$  eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve, auf der keine Null- oder Polstellen von  $f$  liegen. Dann gilt:

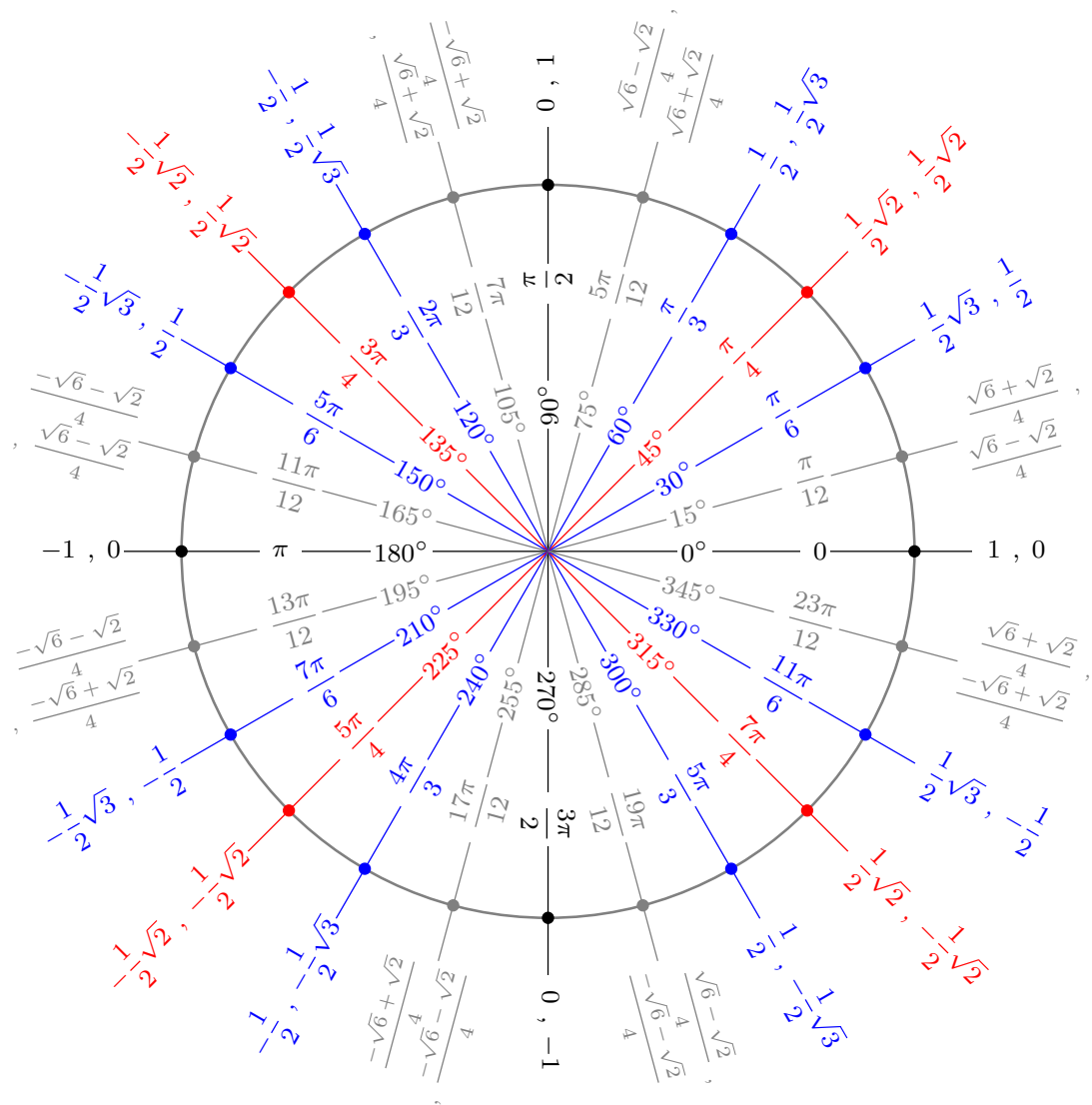
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_C - P_C, \quad (8.9)$$

wobei  $N_C$  die Anzahl der Nullstellen und  $P_C$  die Anzahl der Polstellen von  $f$  (jeweils mit Vielfachheit) im Inneren von  $C$  bedeutet.

## 9 Anhang

### 9.1 Trigonometrische Funktionen

$\varphi$	$\varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
$0^\circ$	0	1	0	1	0
$15^\circ$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0.9659	0.2588
$30^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0.866	0.5
$45^\circ$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	0.7071
$60^\circ$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	0.866
$75^\circ$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	0.2588	0.9659
$90^\circ$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	0	1
$105^\circ$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	-0.2588	0.9659
$120^\circ$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	0.866
$135^\circ$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	0.7071
$150^\circ$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	-0.866	0.5
$165^\circ$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	-0.9659	0.2588
$180^\circ$	$\pi$	-1	0	-1	0
$195^\circ$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	-0.9659	-0.2588
$210^\circ$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	-0.866	-0.5
$225^\circ$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-0.7071	-0.7071
$240^\circ$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-0.5	-0.866
$255^\circ$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	-0.2588	-0.9659
$270^\circ$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	-1
$285^\circ$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0.2588	-0.9659
$300^\circ$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.5	-0.866
$315^\circ$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.7071	-0.7071
$330^\circ$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0.866	-0.5
$345^\circ$	$\frac{23\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	0.9659	-0.2588



$f(z)$	$f'(z)$	Bereich	Bemerkung
$z^n$	$n z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{C}$	
$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$	$n a_n z^{n-1} + \dots + a_1$	$\mathbb{C}$	
$\frac{a z + b}{c z + d}$	$\frac{ad - bc}{(c z + d)^2}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$	Möbius-Transformation; Ableitung für $f(z) = \infty$ nicht definiert
$e^{a z}$	$a e^{a z}$	$\mathbb{C}$	
$\sin z$	$\cos z$	$\mathbb{C}$	
$\cos z$	$-\sin z$	$\mathbb{C}$	
$\operatorname{Ln} z$	$\frac{1}{z}$	$\mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}$	
$\sqrt{z}$	$\frac{1}{2\sqrt{z}}$	$\mathbb{C} \setminus \{x : x \leq 0\}$	Positive reelle Achse angenommen (anders als im Reellen)!