

INTEGRACIÓN Y SERIES

PRIMERA ENTREGA DE EJERCICIOS

AGOSTO 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

Lema 1. Sea f una función monótona en $[a, b]$. Entonces $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$.

Prueba. Analizamos dos casos:

- Supongamos $f \nearrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$

- Supongamos $f \searrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

En cualquier caso, se tiene $V_f(a, b) = \sup\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{|f(b) - f(a)|\} = |f(b) - f(a)|$.

□

Lema 2. Sea f una función continua en $[a, b]$, tal que f' existe y es acotada en (a, b) . Entonces $f \in VA[a, b]$.

Prueba. Existe $A \geq 0$ tal que $|f'(c)| \leq A$ para todo $c \in (a, b)$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ cualquiera. Para cada $k=1, \dots, n$, por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Luego, $\Delta f = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De este modo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^n (|f'(c_k)| |x_k - x_{k-1}|) \\ &\leq \sum_{k=1}^n A |x_k - x_{k-1}| \\ &= A \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= A(b - a), \end{aligned}$$

con lo cual f es de variación acotada en $[a, b]$.

□

Ejercicio 6.3. Probar que una función polinómica f es de variación acotada en todo intervalo compacto $[a, b]$. Describir un método que permita calcular la variación total de f en $[a, b]$ conociendo los ceros de la derivada f' .

Prueba. Sea f una función polinómica en $[a, b]$. Sabemos que f es continua en $[a, b]$ y que f' (que también es una función polinómica) existe y es acotada en (a, b) . Por tanto f es de variación acotada en $[a, b]$.

Si f es constante en $[a, b]$, se tiene $V_f(a, b) = 0$. Supongamos $\text{grado}(f) > 1$, de modo que $\text{grado}(f') \geq 0$ y f' no es el polinomio nulo. Si f' no tiene ceros en $[a, b]$, se sigue que $f'(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$, o $f'(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$ (si $f'(c) > 0$ y $f'(d) < 0$ para $c, d \in [a, b]$, por el teorema del valor intermedio f' tendría algún cero en $[a, b]$). En todo caso, f es monótona en $[a, b]$ y $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$. Supongamos que f' tiene ceros en $[a, b]$. Como f' tiene a lo más $\text{grado}(f) \in \mathbb{Z}^+$ ceros en \mathbb{R} , podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ todos los ceros de f' en $[a, b]$, y llamemos $x_0 := a$ y $x_{m+1} := b$. Notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ (con $k \in \{1, \dots, m+1\}$) la función f es monótona y por tanto $V_f(x_{k-1}, x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a, b) = \sum_{k=1}^{m+1} V_f(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{m+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

□

Ejercicio 7.4. Probar que $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, directamente a partir de la definición de integral de Riemann-Stieltjes.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $P_\varepsilon = \{a, b\} \in \mathcal{P}[a, b]$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante en 1. Si $P \supseteq P_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - (\alpha(b) - \alpha(a))| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{k=1}^n \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= |(\alpha(x_n) - \alpha(x_0)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\ &= |(\alpha(b) - \alpha(a)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\ &= 0 \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

□