Integración y Series

Notas de Clase

Septiembre 31 de 2023

Juan Camilo Lozano Suárez

1 El criterio de la integral

Teorema 1. ***(Criterio de la integral)*** *Sea f una función positiva y decreciente definida en el intervalo $[1,\infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x)dx, \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces tenemos:

i) $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, *para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.*

ii) $\lim_{n\to\infty} d_n$ *existe.*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge, si y sólo si la sucesión $\{t_n\}$ converge.*

iv) $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$, *para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Prueba. **i)** Ya que f es positiva en $[1,\infty)$, inmediatamente se tiene $0 < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $f \searrow$ en $[1,\infty)$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos $f(x) \leq f(k)$ para todo $x \in [k, k+1]$, de modo que $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \int_k^{k+1} dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Así, se sigue $-S_n \leq -t_{n+1}$ y $S_{n+1} - S_n \leq S_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, pero $S_{n+1} - S_n = \sum_{k}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n+1)$, luego $f(n+1) \leq d_{n+1}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $f(x) \geq f(n+1)$ para todo $x \in [n, n+1]$ (nuevamente, porque $f \searrow en[1, \infty)$), por tanto

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1) \int_n^{n+1} dx = f(n+1),$$

y $\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (S_n - t_n) - (S_{n+1} - t_{n+1}) \\ &= (t_{n+1} - t_n) - (S_{n+1} - S_n) \\ &= \left(\int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^{n} f(x)dx \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) \right) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0, \end{aligned}$$

con lo cual $d_{n+1} \leq d_n$. Como lo anterior vale para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, hemos probado que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente, y por tanto para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$d_n \leq d_1 = S_1 - t_1 = \sum_{k=1}^{1} f(k) - \int_1^1 f(x)dx = f(1),$$

lo cual completa la prueba de ***i)***.

ii) De ***i)*** se tiene que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0, y por lo tanto $\{d_n\}$ converge, es decir, $\lim_{n\to\infty} d_n$ existe.

iii) Se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge. Como $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - t_n)$ existe, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, también lo hace $\lim_{n\to\infty}(S_n - (S_n - t_n)) = \lim_{n\to\infty} t_n$, y recíprocamente, si $\lim_{n\to\infty} t_n$ existe, también lo hace $\lim_{n\to\infty}((S_n - t_n) + t_n) = \lim_{n\to\infty} S_n$. Así, $\{t_n\}$ converge, si y sólo si $\{S_n\}$ converge, es decir, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

iv) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera. En la prueba de ***i)*** se dedujo $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1)$. Como además tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n) \int_n^{n+1} dx = f(n),$$

tenemos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \leq f(n) - f(n+1).$$

Como esto vale para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario, para cualesquiera $k, \omega \in \mathbb{Z}^+$ con $\omega \geq k$, tendremos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\omega} (d_n - d_n + 1) \leq \sum_{n=k}^{\omega} (f(n) - f(n+1)),$$

y por lo tanto

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)).$$

Notemos además que las series $\sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1})$ y $\sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n+1))$ son telescópicas, de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1}) = d_k - \lim_{n\to\infty} d_{n+1} = d_k - \lim_{n\to\infty} d_n,$$

y,

$$\sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n+1)) = f(k) - \lim_{n\to\infty} f(n+1) = f(k),$$

pues por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Así, obtenemos

$$0 \le d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \le f(k),$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera.

□

Observación 2.

- *Que la sucesión $\{t_n\}$ converja quiere decir que $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$ exista, es decir, que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. Así,* ***iii)*** *nos dice que $\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge; en la práctica, esta es la forma de usar el criterio de la integral para estudiar la convergencia de series.*

- *Si llamamos $D = \lim_{n\to\infty} d_n$, entonces* ***i)*** *implica $0 \le D \le f(1)$, y de* ***iv)*** *se tiene*

$$0 \le \sum_{l=1}^{k} f(l) - \int_1^k f(x)dx - D \le f(k)$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$. Esta desigualdad es extremadamente útil para calcular ciertas sumas finitas mediante integrales.

Ejemplo 3. *Sea $s \in \mathbb{R}$ cualquiera, y estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Si $s \le 0$, se tiene $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^s} \ne 0$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ diverge trivialmente. Supongamos $s > 0$ con $s \ne 1$, y consideremos $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ como la función definida mediante $f(x) = \frac{1}{x^s}$ para cualquier $x \in [1,\infty)$. Tenemos que f es positiva decreciente y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0$; por ende podemos usar el criterio de la integral. Se tiene*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s}\right)\Bigg|_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{1}{1-s}(w^{1-s} - 1)\right);$$

este límite converge si $1 < s$ y diverge si $0 < s < 1$. Por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $0 < s < 1$. Si $s = 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y obtenemos la serie armónica, que es divergente.