

INTEGRACIÓN Y SERIES

NOTAS DE CLASE

SEPTIEMBRE 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

1 El criterio de la integral

Teorema 1.1 (Criterio de la integral). *Sea f una función positiva y decreciente definida en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos*

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x)dx, \quad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces tenemos:

i) $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ existe.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si la sucesión $\{t_n\}$ converge.

iv) $0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.

Prueba. **i)** Ya que f es positiva en $[1, \infty)$, inmediatamente se tiene $0 < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $f \searrow$ en $[1, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos $f(x) \leq f(k)$ para todo $x \in [k, k+1]$, de modo que $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k)dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) \int_k^{k+1} dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Así, se sigue $-S_n \leq -t_{n+1}$ y $S_{n+1} - S_n \leq S_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, pero $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k) = f(n+1)$, luego $f(n+1) \leq d_{n+1}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $f(x) \geq f(n+1)$ para todo $x \in [n, n+1]$ (nuevamente, porque $f \searrow_{en[1, \infty)}$), por tanto

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1) \int_n^{n+1} dx = f(n+1),$$

y $\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (S_n - t_n) - (S_{n+1} - t_{n+1}) \\ &= (t_{n+1} - t_n) - (S_{n+1} - S_n) \\ &= \left(\int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k) \right) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0, \end{aligned}$$

con lo cual $d_{n+1} \leq d_n$. Como lo anterior vale para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, hemos probado que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente, y por tanto para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$d_n \leq d_1 = S_1 - t_1 = \sum_{k=1}^1 f(k) - \int_1^1 f(x)dx = f(1),$$

lo cual completa la prueba de **i**).

- ii)** De **i**) se tiene que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0, y por lo tanto $\{d_n\}$ converge, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ existe.
- iii)** Se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - t_n)$ existe, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, también lo hace $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - (S_n - t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, y recíprocamente, si $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ existe, también lo hace $\lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n - t_n) + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Así, $\{t_n\}$ converge, si y sólo si $\{S_n\}$ converge, es decir, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.
- iv)** Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera. En la prueba de **i**) se dedujo $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1)$. Como además tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n) \int_n^{n+1} dx = f(n),$$

tenemos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \leq f(n) - f(n+1).$$

Como esto vale para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario, para cualesquiera $k, \omega \in \mathbb{Z}^+$ con $\omega \geq k$, tendremos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\omega} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\omega} (f(n) - f(n+1)),$$

y por lo tanto

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)).$$

Notemos además que las series $\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1})$ y $\sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1))$ son telescópicas, de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) = d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1} = d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n,$$

y,

$$\sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)) = f(k) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = f(k),$$

pues por hipótesis $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Así, obtenemos

$$0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k),$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera.

□

Observación 1.2. ■ Que la sucesión $\{t_n\}$ converja quiere decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx$ exista, es decir, que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converja. Así, **iii)** nos dice que $\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge; en la práctica, esta es la forma de usar el criterio de la integral para estudiar la convergencia de series.

■ Si llamamos $D = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$, entonces **i)** implica $0 \leq D \leq f(1)$, y de **iv)** se tiene

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx - D \leq f(n) \quad (1)$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$. Esta desigualdad es extremadamente útil para calcular ciertas sumas finitas mediante integrales.

Ejemplo 1.3. Sea $s \in \mathbb{R}$ cualquiera, y estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Si $s \leq 0$, se tiene $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^s} \neq 0$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ diverge trivialmente. Supongamos $s > 0$ con $s \neq 1$, y consideremos $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como la función definida mediante $f(x) = \frac{1}{x^s}$ para cualquier $x \in [1, \infty)$. Tenemos que f es positiva decreciente y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^s} = 0$; por ende podemos usar el criterio de la integral. Se tiene

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s} \right) \Big|_1^{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-s} (\omega^{1-s} - 1) \right);$$

este límite converge si $1 < s$ y diverge si $0 < s < 1$. Por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $0 < s < 1$. Si $s = 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y obtenemos la serie armónica, que es divergente.

2 La notación O grande y o pequeña

Definición 2.1. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones reales con $b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Escribimos $a_n = O(b_n)$ (léase “ a_n es O grande de b_n ”), si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \leq M b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Escribimos $a_n = o(b_n)$ (léase “ a_n es o pequeña de b_n ”) cuando $n \rightarrow \infty$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Observación 2.2. Una ecuación de la forma $a_n = c_n + O(b_n)$ significa que $a_n - c_n = O(b_n)$. Similarmente, $a_n = c_n + o(b_n)$ significa $a_n - c_n = o(b_n)$. La ventaja de esta notación es que nos permite reemplazar ciertas desigualdades por igualdades. Por ejemplo, la desigualdad 1 implica

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x)dx + D + O(f(n)). \quad (2)$$

Ejemplo 2.3. Tomemos $f(x) = \frac{1}{x}$ en el Teorema 1.1. Tenemos entonces $t_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \log n$, y el inciso **ii)** nos garantiza la existencia del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right),$$

un famoso número conocido como constante de Euler, o constante de Euler-Mascheroni (no confundir con el número de Euler “e”), y se denota usualmente por C (o por γ). Así, de la Ecuación 2 obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ejemplo 2.4. Ahora, dado $s \in \mathbb{R}$ cualquiera, con $s \neq 1$, tomemos $f(x) = \frac{1}{x^s}$ en el Teorema 1.1. En el ejemplo 1.3 probamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge únicamente cuando $s > 1$. Para $s > 1$, dicha serie define una importante función conocida como la función zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

Para $s > 0, s \neq 1$, podemos aplicar la Ecuación 2 para obtener

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} + C(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

donde $C(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \right) - \frac{n^{1-s} - 1}{1-s} \right)$.

3 Límite superior y límite inferior de una sucesión de números reales

En el curso de Introducción al Análisis real se estudió el concepto de límite superior y límite inferior de una sucesión con valores reales. En la presente sección hacemos un pequeño recuerdo de las definiciones y algunos teoremas que se usarán más adelante.

Definición 3.1. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Suponga que existe $U \in \mathbb{R}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier $n > N$ se tiene

$$a_n < U + \varepsilon.$$

ii) Para todo $\varepsilon > 0$ y para todo entero $m > 0$ existe un entero $n > m$ tal que

$$a_n > U - \varepsilon.$$

Entonces U es llamado el límite superior de $\{a_n\}$ y escribimos

$$U = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

El inciso (i) implica que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente; si no lo está, definimos $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Si la sucesión está acotada superiormente pero no inferiormente, y si no tiene límite superior finito, definimos $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. El límite inferior de $\{a_n\}$ se define como:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

Observación 3.2. El inciso (i) significa que a partir de cierto punto todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ estarán a la izquierda de $U + \varepsilon$; esto también lo expresamos diciendo que “casi toda la sucesión” está a la izquierda de $U + \varepsilon$. El inciso (ii) significa que hay infinitos términos de la sucesión a la derecha de $U - \varepsilon$.

Teorema 3.3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces se tiene:

- a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- b) La sucesión $\{a_n\}$ converge si, y sólo si, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ son ambos finitos e iguales; en este caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- c) La sucesión $\{a_n\}$ diverge hacia ∞ si, y sólo si, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
- d) La sucesión $\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ si, y sólo si, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Teorema 3.4. Suponga que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces se tiene:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Ejemplo 3.5.

- 1. $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- 2. $a_n = (-1)^n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- 3. $a_n = (-1)^n n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
- 4. $a_n = n^2 \sin^2(\frac{1}{2}n\pi)$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

4 Criterio del cociente y criterio de la raíz

Teorema 4.1 (Criterio del cociente). Sea $\sum a_n$ una serie de números complejos no nulos, y tomemos

$$r = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Entonces se tiene que: