Integración y Series

Notas de Clase

Septiembre 31 de 2023

Juan Camilo Lozano Suárez

1 El criterio de la integral

Teorema 1.1 (Criterio de la integral)**.** *Sea f una función positiva y decreciente definida en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad t_n = \int_1^n f(x)dx, \qquad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces tenemos:

i) $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$*, para cualquier* $n \in \mathbb{Z}^+$*.*

ii) $\lim_{n\to\infty} d_n$ *existe.*

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *converge, si y sólo si la sucesión* $\{t_n\}$ *converge.*

iv) $0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$*, para cualquier* $k \in \mathbb{Z}^+$*.*

Prueba. **i)** Ya que f es positiva en $[1, \infty)$, inmediatamente se tiene $0 < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $f \searrow$ en $[1, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos $f(x) \leq f(k)$ para todo $x \in [k, k+1]$, de modo que $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) \int_k^{k+1} dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) \\
&= S_n.
\end{aligned}$$

Así, se sigue $-S_n \leq -t_{n+1}$ y $S_{n+1} - S_n \leq S_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, pero $S_{n+1} - S_n = \sum_{k}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n+1)$, luego $f(n+1) \leq d_{n+1}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $f(x) \geq f(n+1)$ para todo $x \in [n, n+1]$ (nuevamente, porque $f \searrow en[1,\infty)$), por tanto

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1)\int_n^{n+1} dx = f(n+1),$$

y $\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (S_n - t_n) - (S_{n+1} - t_{n+1}) \\ &= (t_{n+1} - t_n) - (S_{n+1} - S_n) \\ &= \left(\int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^{n} f(x)dx\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k)\right) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0, \end{aligned}$$

con lo cual $d_{n+1} \leq d_n$. Como lo anterior vale para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, hemos probado que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente, y por tanto para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$d_n \leq d_1 = S_1 - t_1 = \sum_{k=1}^{1} f(k) - \int_1^1 f(x)dx = f(1),$$

lo cual completa la prueba de ***i)***.

ii) De ***i)*** se tiene que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0, y por lo tanto $\{d_n\}$ converge, es decir, $\lim_{n\to\infty} d_n$ existe.

iii) Se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge. Como $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - t_n)$ existe, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe, también lo hace $\lim_{n\to\infty}(S_n - (S_n - t_n)) = \lim_{n\to\infty} t_n$, y recíprocamente, si $\lim_{n\to\infty} t_n$ existe, también lo hace $\lim_{n\to\infty}((S_n - t_n) + t_n) = \lim_{n\to\infty} S_n$. Así, $\{t_n\}$ converge, si y sólo si $\{S_n\}$ converge, es decir, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

iv) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera. En la prueba de ***i)*** se dedujo $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1)$. Como además tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n)\int_n^{n+1} dx = f(n),$$

tenemos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \leq f(n) - f(n+1).$$

Como esto vale para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario, para cualesquiera $k, \omega \in \mathbb{Z}^+$ con $\omega \geq k$, tendremos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\omega}(d_n - d_n + 1) \leq \sum_{n=k}^{\omega}(f(n) - f(n+1)),$$

y por lo tanto

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n+1)).$$

Notemos además que las series $\sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1})$ y $\sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n+1))$ son telescópicas, de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty}(d_n - d_{n+1}) = d_k - \lim_{n\to\infty} d_{n+1} = d_k - \lim_{n\to\infty} d_n,$$

y,

$$\sum_{n=k}^{\infty}(f(n) - f(n+1)) = f(k) - \lim_{n\to\infty} f(n+1) = f(k),$$

pues por hipótesis $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Así, obtenemos

$$0 \le d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \le f(k),$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera.

□

Observación 1.2.

- *Que la sucesión $\{t_n\}$ converja quiere decir que $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$ exista, es decir, que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. Así, **iii)** nos dice que $\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge; en la práctica, esta es la forma de usar el criterio de la integral para estudiar la convergencia de series.*

- *Si llamamos $D = \lim_{n\to\infty} d_n$, entonces **i)** implica $0 \le D \le f(1)$, y de **iv)** se tiene*

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx - D \le f(n) \tag{1}$$

para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$. Esta desigualdad es extremadamente útil para calcular ciertas sumas finitas mediante integrales.

Ejemplo 1.3. *Sea $s \in \mathbb{R}$ cualquiera, y estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Si $s \le 0$, se tiene $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^s} \neq 0$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ diverge trivialmente. Supongamos $s > 0$ con $s \neq 1$, y consideremos $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ como la función definida mediante $f(x) = \frac{1}{x^s}$ para cualquier $x \in [1,\infty)$. Tenemos que f es positiva decreciente y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0$; por ende podemos usar el criterio de la integral. Se tiene*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x^s}dx = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s}\right)\Bigg|_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{1}{1-s}(w^{1-s} - 1)\right);$$

este límite converge si $1 < s$ y diverge si $0 < s < 1$. Por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $s > 1$ y diverge si $0 < s < 1$. Si $s = 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, y obtenemos la serie armónica, que es divergente.

2 La notación O grande y o pequeña

Definición 2.1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones reales con $b_n \ge 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Escribimos $a_n = O(b_n)$ (léase "a_n es O grande de b_n"), si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| \le Mb_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Escribimos $a_n = o(b_n)$ (léase "a_n es o pequeña de b_n") cuando $n \to \infty$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.*

Observación 2.2. *Una ecuación de la forma* $a_n = c_n + O(b_n)$ *significa que* $a_n - c_n = O(b_n)$*. Similarmente,* $a_n = c_n + o(b_n)$ *significa* $a_n - c_n = o(b_n)$*. La ventaja de esta notación es que nos permite reemplazar ciertas desigualdades por igualdades. Por ejemplo, la desigualdad 1 implica*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + D + O(f(n)). \tag{2}$$

Ejemplo 2.3. *Tomemos* $f(x) = \frac{1}{x}$ *en el Teorema 1.1. Tenemos entonces* $t_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \log n$*, y el inciso* ***ii)*** *nos garantiza la existencia del límite*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right),$$

un famoso número conocido como constante de Euler, o constante de Euler-Mascheroni (no confundir con el número de Euler "e"), y se denota usualmente por C *(o por* γ*). Así, de la Ecuación 2 obtenemos:*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ejemplo 2.4. *Ahora, dado* $s \in \mathbb{R}$ *cualquiera, con* $s \neq 1$*, tomemos* $f(x) = \frac{1}{x^s}$ *en el Teorema 1.1. En el ejemplo 1.3 probamos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ *converge únicamente cuando* $s > 1$*. Para* $s > 1$*, dicha serie define una importante función conocida como la función zeta de Riemann:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (s > 1).$$

Para $s > 0, s \neq 1$*, podemos aplicar la Ecuación 2 para obtener*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} + C(s) + O\left(\frac{1}{n^s}\right),$$

donde $C(s) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\right) - \frac{n^{1-s}-1}{1-s}\right)$.

3 Límite superior y límite inferior de una sucesión de números reales

En el curso de Introducción al Análisis real se estudió el concepto de límite superior y límite inferior de una sucesión con valores reales. En la presente sección hacemos un pequeño recuerdo de las definiciones y algunos teoremas que se usarán más adelante.

Definición 3.1. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Suponga que existe* $U \in \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes dos condiciones:*

i) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{Z}^+$ *tal que para cualquier* $n > N$ *se tiene*

$$a_n < U + \varepsilon.$$

ii) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *y para todo entero* $m > 0$ *existe un entero* $n > m$ *tal que*

$$a_n > U - \varepsilon.$$

Entonces U es llamado el límite superior de $\{a_n\}$ y escribimos

$$U = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

*El inciso **(i)** implica que la sucesión $\{a_n\}$ está aacotada superiormente; si no lo está, definimos* $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$*. Si la sucesión está acotada superiormente pero no inferiormente, y si no tiene límite superior finito, definimos* $\limsup_{n\to\infty} = -\infty$*. El límite inferior de $\{a_n\}$ se define como:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

Observación 3.2. *El inciso **(i)** significa que a partir de cierto punto todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ estarán a la izquierda de $U+\varepsilon$; esto también lo expresamos diciendo que "casi toda la sucesión" está a la izquierda de $U+\varepsilon$. El inciso **(ii)** significa que hay infinitos términos de la sucesión a la derecha de $U-\varepsilon$.*

Teorema 3.3. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces se tiene:*

a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) *La sucesión $\{a_n\}$ converge si, y sólo si,* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *y* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *son ambos finitos e iguales; en este caso,* $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

c) *La sucesión $\{a_n\}$ diverge hacia ∞ si, y sólo si,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

d) *La sucesión $\{a_n\}$ diverge hacia $-\infty$ si, y sólo si,* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Teorema 3.4. *Suponga que $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces se tiene:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \quad y \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Ejemplo 3.5.

1. $a_n = (-1)^n(1+1/n)$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup a_n = 1$.

2. $a_n = (-1)^n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.

3. $a_n = (-1)^n n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. $a_n = n^2\sin^2\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup a_n = \infty$.

4 Criterio del cociente y criterio de la raíz

Teorema 4.1 (Criterio del cociente)**.** *Sea $\sum a_n$ una serie de números complejos no nulos, y tomemos*

$$r = \liminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \qquad R = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Entonces se tiene que:

a) *Si $R<1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutamente.*

b) *Si $r>1$, la serie $\sum a_n$ diverge.*

c) *Si $r \leq 1 \leq R$, el criterio no decide.*

Prueba. **a)** Supongamos que $R < 1$. Entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $R < x < 1$. Tomemos $\varepsilon := x - R > 0$. Por la definición de R, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < R + \varepsilon = R + (x - R) = x$. Sea $n \geq N$ cualquiera. Como $x = \frac{x^{n+1}}{x^n}$ (sabemos que $x \neq 0$ pues $R \geq 0$, ya que $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$ es una sucesión de términos positivos), se tiene $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{x^{n+1}}{x^n}$, y,

$$\frac{|a_{n+1}|}{x^{n+1}} < \frac{|a_n|}{x^n} \leq \frac{|a_n|}{x^n},$$

con lo cual, para cualquier $n \geq N$ se tiene $|a_n| \leq cx^n$, donde $c = \frac{|a_n|}{x^N} \in \mathbb{R}^+$. Tenemos que $\sum x^n$ es una sevie geométrica de radio $x \in (0, L)$, y por tanto $\sum x^n$ convenge. Así, por el criterio de companación se deduce que $\sum |a_n|$ converge, es decir, $\sum a_n$ converge absolutamente.

b) Suponganos que $r > 1$. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $r > x > 1$, Tomenos $\varepsilon = r - x > 0$. Por la defintición de r, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r - \varepsilon = r - (r - x) = x > 1$, y por tanto $|a_{n+1}| > |a_n|$. Esto quiere decir que a partir de cierto punto, $\{|a_n|\}$ se comporta como una sucesión creciente de términos positivos, lo que implica $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, con lo cual $\sum a_n$ diverge.

c) Para probar ***c)*** consideremos los siguientes dos ejemplos: para la serie $\sum \frac{1}{n}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1,$$

luego $r = R = 1$, y se tiene que $\sum \frac{1}{n}$ diverge; para la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

y $r = R = 1$, pero en este caso, por el Ejemplo 1.3, se tiene que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

□

Teorema 4.2 (Criterio de la raiz)**.** *Sea $\sum a_n$ una serie de números complejos, y tomemos*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Entonces se tiene:

a) *Si $\rho < 1$, la serie $\sum a_n$ converge absolutanente.*

b) *Si $\rho > 1$, la serie $\sum a_n$ diverge.*

c) *Si $\rho = 1$, el criterio no decide.*

Prueba. **a)** Supongamos que $\rho < 1$. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal gue $\rho < x < 1$. Tomemos $\varepsilon = x - \rho > 0$. Por la definición de ρ, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para cualquier $n \geq N$ se tiene $\sqrt[n]{|a_n|} < p + \varepsilon = p + (x - p) = x$, y por tanto $|a_n| < x^n$. Notemos que $\sum x^n$ es una serie geométrica con radio $x \in (0, 1)$ (tenemos $x > \rho$ y $\rho \geq 0$ pues $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ es una sucesión de términos no negativos), y por tanto converge. Del criterio de comparación se sigue que $\sum |a_n|$ converge, es decir, $\sum a_n$ converge absolutamente.

b) Supongamos que $\rho > 1$. Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\rho > x > 1$. Tomemos $\varepsilon = \rho - x > 0$. Por la definición de ρ, para todo $m > 0$ existe $n > m$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} > p - \varepsilon = p - (p - x) = x > 1$, y por tanto se tiene $|a_n| > 1$ infinitas veces, con lo cual $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Con lo anterior, $\sum a_n$ diverge.

c) Para probar ***c)*** podemos tomar los mismos ejemplos usados en el Teorema 4.1: para la serie divergente $\sum \frac{1}{n}$ tenemos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ y por tanto $\rho = 1$, y para la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ también se tiene $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ y $\rho = 1$.

$\square$