

# INTEGRACIÓN Y SERIES

## PRIMERA ENTREGA DE EJERCICIOS

AGOSTO 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

**Lema 1.** Sea  $f$  una función monótona en  $[a, b]$ . Entonces  $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$ .

*Prueba.* Analizamos dos casos:

- Supongamos  $f \nearrow$  en  $[a, b]$ . Para cualquier partición  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$

- Supongamos  $f \searrow$  en  $[a, b]$ . Para cualquier partición  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

En cualquier caso, se tiene  $V_f(a, b) = \sup\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{|f(b) - f(a)|\} = |f(b) - f(a)|$ .

□

**Lema 2.** Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ , tal que  $f'$  existe y es acotada en  $(a, b)$ . Entonces  $f \in VA[a, b]$ .

*Prueba.* Existe  $A \geq 0$  tal que  $|f'(c)| \leq A$  para todo  $c \in (a, b)$ . Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  cualquiera. Para cada  $k=1, \dots, n$ , por el teorema del valor medio para derivadas, existe  $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$  tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Luego,  $\Delta f = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$ . De este modo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^n (|f'(c_k)| |x_k - x_{k-1}|) \\ &\leq \sum_{k=1}^n A |x_k - x_{k-1}| \\ &= A \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= A(b - a), \end{aligned}$$

con lo cual  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$ .

□

**Ejercicio 6.3.** Probar que una función polinómica  $f$  es de variación acotada en todo intervalo compacto  $[a, b]$ . Describir un método que permita calcular la variación total de  $f$  en  $[a, b]$  conociendo los ceros de la derivada  $f'$ .

*Prueba.* Sea  $f$  una función polinómica en  $[a, b]$ . Sabemos que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y que  $f'$  (que también es una función polinómica) existe y es acotada en  $(a, b)$ . Por tanto  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$ .

Si  $f$  es constante en  $[a, b]$ , se tiene  $V_f(a, b) = 0$ . Supongamos  $\text{grado}(f) > 1$ , de modo que  $\text{grado}(f') \geq 0$  y  $f'$  no es el polinomio nulo. Si  $f'$  no tiene ceros en  $[a, b]$ , se sigue que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $[a, b]$ , o  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $[a, b]$  (si  $f'(c) > 0$  y  $f'(d) < 0$  para  $c, d \in [a, b]$ , por el teorema del valor intermedio  $f'$  tendría algún cero en  $[a, b]$ ). En todo caso,  $f$  es monótona en  $[a, b]$  y  $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$ . Supongamos que  $f'$  tiene ceros en  $[a, b]$ . Como  $f'$  tiene a lo más  $\text{grado}(f) \in \mathbb{Z}^+$  ceros en  $\mathbb{R}$ , podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$  todos los ceros de  $f'$  en  $[a, b]$ , y llamemos  $x_0 := a$  y  $x_{m+1} := b$ . Notemos que en cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  (con  $k \in \{1, \dots, m+1\}$ ) la función  $f$  es monótona y por tanto  $V_f(x_{k-1}, x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$ . Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a, b) = \sum_{k=1}^{m+1} V_f(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{m+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

□

**Ejercicio 7.1.** Probar que  $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$ , directamente a partir de la definición de integral de Riemann-Stieltjes.

*Prueba.* Sea  $\varepsilon > 0$  cualquiera. Tomemos  $P_\varepsilon = \{a, b\} \in \mathcal{P}[a, b]$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la función constante en 1. Si  $P \supseteq P_\varepsilon$  tenemos

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - (\alpha(b) - \alpha(a))| &= \left| \left( \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{k=1}^n \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= |(\alpha(x_n) - \alpha(x_0)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\ &= |(\alpha(b) - \alpha(a)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\ &= 0 \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba  $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$ .

□

**Ejercicio 7.11.** Si  $\alpha \nearrow$  en  $[a, b]$ , probar que se verifica :

$$a) \int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha, \quad (a < c < b),$$

$$b) \int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha,$$

$$c) \int_a^b (f + g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha.$$

*Prueba.* a) Sea  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  cualquiera. Tomamos  $P' = P \cup \{c\}$ . Supongamos  $P' = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c, \dots, x_n = b\}$ .

Tomemos  $P'_1 = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $P'_2 = \{c = x_\gamma, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c, b]$ . Notemos que

$$\begin{aligned} U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f) \Delta \alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k \\ &= U(P', f, \alpha). \end{aligned}$$

Como  $P' \supseteq P$  tenemos  $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$ , y por tanto  $U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$ . Ya que  $P'_1 \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $P'_2 \in \mathcal{P}[c, b]$ , se sigue

$$\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha \leq U(P'_1, f, \alpha), \quad \text{y}, \quad \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq U(P'_2, f, \alpha).$$

Por tanto

$$\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

Como lo anterior se tiene para  $P \in \mathcal{P}[a, b]$  arbitraria,  $\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha$  es cota inferior del conjunto  $\{U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}\}$ , y por tanto

$$\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq \int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha. \quad (1)$$

Ahora, sea  $\epsilon > 0$  cualquiera. Entonces  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  y existen  $P_1 \in \mathcal{P}[a, c]$  y  $P_2 \in \mathcal{P}[c, b]$  tales que

$$U(P_1, f, \alpha) < \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{y}, \quad U(P_2, f, \alpha) < \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha + \frac{\epsilon}{2},$$

□