

INTEGRACIÓN Y SERIES
PRIMERA ENTREGA DE EJERCICIOS
AGOSTO 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

Lema 1. Sea f una función monótona en $[a, b]$. Entonces $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$.

Prueba. Analizamos dos casos:

- Supongamos $f \nearrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$

- Supongamos $f \searrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

En cualquier caso, se tiene $V_f(a, b) = \sup \{ \sum(P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \} = \sup \{ |f(b) - f(a)| \} = |f(b) - f(a)|$.

□

Lema 2. Sea f una función continua en $[a, b]$, tal que f' existe y es acotada en (a, b) . Entonces $f \in VA[a, b]$.

Prueba. Existe $A \geq 0$ tal que $|f'(c)| \leq A$ para todo $c \in (a, b)$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ cualquiera. Para cada $k=1, \dots, n$, por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Luego, $\Delta f_k = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De este modo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^n (|f'(c_k)| |x_k - x_{k-1}|) \\ &\leq \sum_{k=1}^n A |x_k - x_{k-1}| \\ &= A \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= A(b - a), \end{aligned}$$

con lo cual $f \in VA[a, b]$.

□

Ejercicio 6.3. Probar que una función polinómica f es de variación acotada en todo intervalo compacto $[a, b]$. Describir un método que permita calcular la variación total de f en $[a, b]$ conociendo los ceros de la derivada f' .

Prueba. Sea f una función polinómica en $[a, b]$. Sabemos que f es continua en $[a, b]$ y que f' (que también es una función polinómica) existe y es acotada en (a, b) . Por tanto f es de variación acotada en $[a, b]$.

Si f es constante en $[a, b]$, se tiene $V_f(a, b) = 0$. Supongamos $\text{grado}(f) \geq 1$, de modo que $\text{grado}(f') \geq 0$ y f' no es el polinomio nulo. Si f' no tiene ceros en $[a, b]$, se sigue que $f'(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$, o $f'(x) < 0$ para todo x en $[a, b]$ (si $f'(c) < 0$ y $f'(d) > 0$ para $c, d \in [a, b]$, por el teorema del valor intermedio f' tendría algún cero en $[a, b]$). En todo caso, f es monótona en $[a, b]$ y $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$. Supongamos que f' tiene ceros en $[a, b]$. Como f' tiene a lo más $\text{grado}(f) \in \mathbb{Z}^+$ ceros en \mathbb{R} , podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ todos los ceros de f' en $[a, b]$, y llamemos $x_0 := a$ y $x_{m+1} := b$. Notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ (con $k \in \{1, \dots, m+1\}$) la función f es monótona y por tanto $V_f(x_{k-1}, x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a, b) = \sum_{k=1}^{m+1} V_f(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{m+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

□

Ejercicio 7.1. Probar que $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, directamente a partir de la definición de integral de Riemann-Stieltjes.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $P_\varepsilon = \{a, b\} \in \mathcal{P}[a, b]$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante en 1. Para cualquier $P \supseteq P_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned} |S(P, f, \alpha) - (\alpha(b) - \alpha(a))| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta\alpha_k \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{k=1}^n \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\ &= |(\alpha(b) - \alpha(a)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\ &= 0 \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

□

Ejercicio 7.2. Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y si $\int_a^b f d\alpha = 0$ para cada f monótona en $[a, b]$, probar que α es constante en $[a, b]$.

Prueba. Sea $c \in (a, b)$ cualquiera. Definimos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vía $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}$ para todo $x \in [a, b]$.

Claramente f es monótona en $[a, b]$, así que por hipótesis $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $\int_a^b f d\alpha = 0$. Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ entonces $\alpha \in \mathcal{R}(f)$ en $[a, b]$. Veamos que $\int_a^b \alpha df = \alpha(c)$:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a, b]$ tal que para cualquier $P \supseteq P_\varepsilon$ y para cualquier elección $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene $|S(P, \alpha, f) - \int_a^b \alpha df| < \varepsilon$. Tomemos $P = P_\varepsilon \cup \{c\} = \{x_0 = a, \dots, x_\gamma = c, \dots, x_n = b\} \supseteq P_\varepsilon$ con la elección $t_k = x_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$. Se tiene

$$\begin{aligned} S(P, \alpha, f) &= \sum_{k=1}^n \alpha(x_{k-1}) \Delta f_k \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha(x_{k-1}) (f(x_k) - f(x_{k-1})). \end{aligned}$$

Para $1 \leq k \leq \gamma$ tenemos $f(x_k) - f(x_{k-1}) = 0 - 0 = 0$; para $k = \gamma + 1$ tenemos $f(x_{\gamma+1}) - f(x_\gamma) = f(x_{\gamma+1}) - f(c) = 1 - 0 = 1$; para $\gamma + 2 \leq k \leq n$ tenemos $f(x_k) - f(x_{k-1}) = 1 - 1 = 0$. De este modo $S(P, \alpha, f) = \alpha(x_\gamma) = \alpha(c)$. Así, $\left| \alpha(c) - \int_a^b \alpha df \right| = \left| S(P, \alpha, f) - \int_a^b \alpha df \right| < \varepsilon$. Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\left| \alpha(c) - \int_a^b \alpha df \right| = 0$ y $\int_a^b \alpha df = \alpha(c)$.

Ahora, haciendo integración por partes tenemos

$$0 + \alpha(c) = \int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \alpha(b),$$

y $\alpha(c) = \alpha(b)$, para $c \in (a, b)$ cualquiera. Como además la función constante en 1 es monótona en $[a, b]$, tenemos $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b d\alpha = 0$, y $\alpha(a) = \alpha(b)$, completando la prueba de que α es constante en $[a, b]$. □

Ejercicio 7.11. Si $\alpha \nearrow$ en $[a, b]$, probar que se verifica:

- a) $\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha$, ($a < c < b$),
- b) $\int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$,
- c) $\int_a^b (f + g) d\alpha \geq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha$.

Prueba. a) Sea $P \in \mathcal{P}[a, b]$ cualquiera. Tomamos $P' = P \cup \{c\}$. Supongamos $P' = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c, \dots, x_n = b\}$.

Tomemos $P'_1 = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a, c]$ y $P'_2 = \{c = x_\gamma, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c, b]$. Notemos que

$$\begin{aligned} U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f) \Delta \alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k \\ &= U(P', f, \alpha). \end{aligned}$$

Como $P' \supseteq P$, tenemos $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$, y por tanto $U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. Ya que $P'_1 \in \mathcal{P}[a, c]$ y $P'_2 \in \mathcal{P}[c, b]$, se sigue

$$\int_a^c f d\alpha \leq U(P'_1, f, \alpha), \quad y, \quad \int_c^b f d\alpha \leq U(P'_2, f, \alpha).$$

Por tanto

$$\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq U(P'_1, f, \alpha) + U(P'_2, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

Como lo anterior se tiene para $P \in \mathcal{P}[a, b]$ arbitraria, $\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha$ es cota inferior del conjunto $\{U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$, y por tanto

$$\int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq \int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha. \quad (1)$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y existen $P_1 = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a, c]$ y $P_2 = \{c = x_\gamma, \dots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c, b]$ tales que

$$U(P_1, f, \alpha) < \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y, \quad U(P_2, f, \alpha) < \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego,

$$U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha) < \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha + \varepsilon.$$

Notemos que, como $P_1 \cup P_2 = \{a = x_0, \dots, x_\gamma = c, \dots, x_n = b\}$, entonces

$$\begin{aligned} U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f) \Delta\alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^n M_k(f) \Delta\alpha_k \\ &= U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha). \end{aligned}$$

Por tanto $U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) < \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha + \varepsilon$. Además, como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$, tenemos $\int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq U(P_1 \cup P_2, f, \alpha)$, y así

$$\int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha < \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha + \varepsilon.$$

Lo anterior vale para $\varepsilon > 0$ arbitrario, por lo que obtenemos

$$\int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha \leq \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha. \quad (2)$$

De (1) y (2) se concluye $\int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha = \int_a^{\bar{c}} f \, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f \, d\alpha$.

b) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ tales que

$$U(P_1, f, \alpha) < \int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y, \quad U(P_2, g, \alpha) < \int_a^{\bar{b}} g \, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha) < \int_a^{\bar{b}} f \, d\alpha + \int_a^{\bar{b}} g \, d\alpha + \varepsilon$. Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ y es más fina que P_1 y que P_2 , entonces $U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + U(P_1 \cup P_2, g, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha)$.

Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P_1 \cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned} M_k(f + g) &= \sup \{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\leq \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup \{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &= M_k(f) + M_k(g), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
U(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha) &= \sum_{k=1}^n M_k(f + g) \Delta \alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^n (M_k(f) + M_k(g)) \Delta \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta \alpha_k + \sum_{k=1}^n M_k(g) \Delta \alpha_k \\
&= U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + U(P_1 \cup P_2, g, \alpha).
\end{aligned}$$

También, $\int_a^b (f + g) d\alpha \leq U(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f + g) d\alpha &\leq U(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha) \\
&\leq U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + U(P_1 \cup P_2, g, \alpha) \\
&< \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\int_a^b (f + g) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha.$$

c) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ tales que

$$\int_a^b f d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f, \alpha), \quad y, \quad \int_a^b g d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, g, \alpha).$$

Entonces $\int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha - \varepsilon < L(P_1, f, \alpha) + L(P_2, g, \alpha)$. Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a, b]$ y es más fina que P_1 y que P_2 , entonces $L(P_1, f, \alpha) + L(P_2, g, \alpha) \leq L(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + L(P_1 \cup P_2, g, \alpha)$.

Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P_1 \cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned}
m_k(f) + m_k(g) &= \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \inf \{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\
&\leq \inf \{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\
&= m_k(f + g),
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
L(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + L(P_1 \cup P_2, g, \alpha) &= \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta \alpha_k + \sum_{k=1}^n m_k(g) \Delta \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^n (m_k(f) + m_k(g)) \Delta \alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^n m_k(f + g) \Delta \alpha_k \\
&= L(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha).
\end{aligned}$$

También, $L(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha) \leq \int_a^b (f + g) d\alpha$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha - \varepsilon &< L(P_1, f, \alpha) + L(P_2, g, \alpha) \\ &\leq L(P_1 \cup P_2, f + g, \alpha) \\ &\leq \int_a^b (f + g) d\alpha, \end{aligned}$$

y así $\int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha < \int_a^b (f + g) d\alpha + \varepsilon$. Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b g d\alpha \leq \int_a^b (f + g) d\alpha.$$

□

Ejercicio 7.12. Dar un ejemplo de una función acotada f y de una función creciente α definidas en $[a, b]$ tales que $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ pero para las que $\int_a^b f d\alpha$ no exista.

Solución. Tomemos

$$\begin{aligned} f &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha(x) = x. \end{aligned}$$

Tenemos que $|f|$ es la función constante en 1 en $[0, 1]$ y por el Ejercicio 7.1 se sigue que $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[0, 1]$. Ahora bien, para toda $P \in \mathcal{P}[0, 1]$ se tiene

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n \Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^n (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
L(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta \alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^n -\Delta \alpha_k \\
&= -\sum_{k=1}^n \Delta \alpha_k \\
&= -1,
\end{aligned}$$

con lo cual $\bar{\int}_0^1 f \, d\alpha = \inf \{U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}[0, 1]\} = \inf \{1\} = 1$, y $\underline{\int}_0^1 f \, d\alpha = \sup \{L(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}[0, 1]\} = \sup \{-1\} = -1$. Por tanto $\underline{\int}_0^1 f \, d\alpha \neq \bar{\int}_0^1 f \, d\alpha$ y $f \notin \mathcal{R}(\alpha)$ en $[0, 1]$. Con lo anterior concluimos que $\int_0^1 f \, d\alpha$ no existe.

□