

INTEGRACIÓN Y SERIES

NOTAS DE CLASE

SEPTIEMBRE 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

1 El criterio de la integral

Teorema 1. (Criterio de la integral) Sea f una función positiva y decreciente definida en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x) dx, \quad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces tenemos:

- i)* $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.
- ii)* $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ existe.
- iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si la sucesión $\{t_n\}$ converge.
- iv)* $0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.