

INTEGRACIÓN Y SERIES

NOTAS DE CLASE

SEPTIEMBRE 31 DE 2023

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

1 El criterio de la integral

Teorema 1. (Criterio de la integral) Sea f una función positiva y decreciente definida en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x)dx, \quad d_n = s_n - t_n.$$

Entonces tenemos:

i) $0 < f(n+1) \leq d_{n+1} \leq d_n \leq f(1)$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ existe.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si la sucesión $\{t_n\}$ converge.

iv) $0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$.

Prueba. **i)** Ya que f es positiva en $[1, \infty)$, inmediatamente se tiene $0 < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $f \searrow$ en $[1, \infty)$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ tenemos $f(x) \leq f(k)$ para todo $x \in [k, k+1]$, de modo que $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$. Así, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \int_1^{n+1} f(x)dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(k)dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) \int_k^{k+1} dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(k) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Así, se sigue $-S_n \leq -t_{n+1}$ y $S_{n+1} - S_n \leq S_{n+1} - t_{n+1} = d_{n+1}$, pero $S_{n+1} - S_n = \sum_k^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k) = f(n+1)$, luego $f(n+1) \leq d_{n+1}$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $f(x) \geq f(n+1)$ para todo $x \in [n, n+1]$ (nuevamente, porque $f \searrow_{en[1, \infty)}$), por tanto

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx = f(n+1) \int_n^{n+1} dx = f(n+1),$$

y $\int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (S_n - t_n) - (S_{n+1} - t_{n+1}) \\ &= (t_{n+1} - t_n) - (S_{n+1} - S_n) \\ &= \left(\int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^n f(k) \right) \\ &= \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \geq 0, \end{aligned}$$

con lo cual $d_{n+1} \leq d_n$. Como lo anterior vale para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$, hemos probado que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente, y por tanto para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$d_n \leq d_1 = S_2 - t_1 = \sum_{k=1}^1 f(k) - \int_1^1 f(x)dx = f(1),$$

lo cual completa la prueba de **i**).

- ii)** De **i**) se tiene que $\{d_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por 0, y por lo tanto $\{d_n\}$ converge, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ existe.
- iii)** Se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge, si y sólo si su sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - t_n)$ existe, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, también lo hace $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - (S_n - t_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, y recíprocamente, si $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ existe, también lo hace $\lim_{n \rightarrow \infty} ((S_n - t_n) + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Así, $\{t_n\}$ converge, si y sólo si $\{S_n\}$ converge, es decir, si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.
- iv)** Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera. En la prueba de **i**) se dedujo $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1)$. Como además tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n) \int_n^{n+1} dx = f(n),$$

tenemos

$$0 \leq d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) \leq f(n) - f(n+1).$$

Como esto vale para $n \in \mathbb{Z}^+$ arbitrario, para cualesquiera $k, \omega \in \mathbb{Z}^+$ con $\omega \geq k$, tendremos

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\omega} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\omega} (f(n) - f(n+1)),$$

y por lo tanto

$$0 \leq \sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)).$$

Notemos además que las series $\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1})$ y $\sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1))$ son telescópicas, de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty} (d_n - d_{n+1}) = d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1} = d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n,$$

y,

$$\sum_{n=k}^{\infty} (f(n) - f(n+1)) = f(k) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = f(k),$$

pues por hipótesis $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Así, obtenemos

$$0 \leq d_k - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n \leq f(k),$$

para $k \in \mathbb{Z}^+$ cualquiera.

□