Integración y Series

Primera entrega de ejercicios

Agosto 31 de 2023

Juan Camilo Lozano Suárez

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

Lema 1. *Sea* f *una función monótona en* $[a,b]$*. Entonces* $V_f(a,b) = |f(b) - f(a)|$.

Prueba. Analizamos dos casos:

- Supongamos $f \nearrow$ en $[a,b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$.

- Supongamos $f \searrow$ en $[a,b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|$.

En cualquier caso, se tiene $V_f(a,b) = \sup\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{|f(b) - f(a)|\} = |f(b) - f(a)|$.

□

Lema 2. *Sea* f *una función continua en* $[a,b]$*, tal que* f' *existe y es acotada en* (a,b)*. Entonces* $f \in VA[a,b]$.

Prueba. Existe $A \geq 0$ tal que $|f(c)| \leq A$ para todo $c \in [a,b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ cualquiera. Para cada k=1,..., n, por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Luego, $\Delta f {=} f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{n} (|f'(c_k)||x_k - x_{k-1}|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} A|x_k - x_{k-1}| \\
&= A \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= A(b-a),
\end{aligned}$$

con lo cual f es de variación acotada en $[a,b]$.

□

Ejercicio 6.3. *Probar que una función polinómica* f *es de variación acotada en todo intervalo compacto* $[a,b]$*. Describir un método que permita calcular la variación total de* f *en* $[a,b]$ *conociendo los ceros de la derivada* f'*.*

Prueba. Sea f una función polinómica en $[a,b]$. Sabemos que f es continua en $[a,b]$ y que f' (que también es una función polinómica) existe y es acotada en (a,b). Por tanto f es de variación acotada en $[a,b]$.
Si f es constante en $[a,b]$, se tiene $V_f(a,b)=0$. Supongamos $\mathtt{grado}(f)$¿1, de modo que $\mathtt{grado}(f')\geq 0$ y f' no es el polinomio nulo. Si f' no tiene ceros en $[a,b]$, se sigue que $f'(x)>0$ para todo x en $[a,b]$, o $f'(x)<0$ para todo x en $[a,b]$ (si $f'(c)>0$ y $f'(d)>0$ para $c,d\in[a,b]$, por el teorema del valor intermedio f' tendría algún cero en $[a,b]$. En todo caso, f es monótona en $[a,b]$ y $V_f(a,b)=|f(b)-f(a)|$. Supongamos que f' tiene ceros en $[a,b]$. Como f' tiene a lo más $\mathtt{grado}(f)\in\mathcal{Z}^+$ ceros en $\mathcal{R}$, podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean $x_1<x_2<\cdots<x_m$ todos los ceros de f' en $[a,b]$, y llamemos $x_0:=a$ y $x_{m+1}:=b$. Notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ (con $k\in\{1,\dots,m+1\}$ la función f es monótona y por tanto $V_f(x_{k-1},x_k)=|f(x_k)-f(x_{k-1})|$. Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a,b)=\sum_{k=1}^{m+1}V_f(x_{k-1},x_k)=\sum_{k=1}^{m+1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

$\square$