Integración y Series

Primera entrega de ejercicios

Agosto 31 de 2023

Juan Camilo Lozano Suárez

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

Lema 1. *Sea* f *una función monótona en* $[a, b]$*. Entonces* $V_f(a, b) = |f(b) - f(a)|$.

Prueba. Analizamos dos casos:

- Supongamos $f \nearrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$

- Supongamos $f \searrow$ en $[a, b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

En cualquier caso, se tiene $V_f(a, b) = \sup\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \sup\{|f(b) - f(a)|\} = |f(b) - f(a)|$.

$\square$

Lema 2. *Sea* f *una función continua en* $[a, b]$*, tal que* f' *existe y es acotada en* (a, b)*. Entonces* $f \in VA[a, b]$.

Prueba. Existe $A \geq 0$ tal que $|f(c)| \leq A$ para todo $c \in [a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ cualquiera. Para cada k=1,..., n, por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$

Luego, $\Delta f_= f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{n} (|f'(c_k)||x_k - x_{k-1}|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} A|x_k - x_{k-1}| \\
&= A\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= A(b - a),
\end{aligned}$$

con lo cual f es de variación acotada en $[a, b]$.

$\square$

Ejercicio 6.3. *Probar que una función polinómica* f *es de variación acotada en todo intervalo compacto* $[a,b]$. *Describir un método que permita calcular la variación total de* f *en* $[a,b]$ *conociendo los ceros de la derivada* f'.

Prueba. Sea f una función polinómica en $[a,b]$. Sabemos que f es continua en $[a,b]$ y que f' (que también es una función polinómica) existe y es acotada en (a,b). Por tanto f es de variación acotada en $[a,b]$.
Si f es constante en $[a,b]$, se tiene $V_f(a,b)=0$. Supongamos $\mathtt{grado}(f)>1$, de modo que $\mathtt{grado}(f')\geq 0$ y f' no es el polinomio nulo. Si f' no tiene ceros en $[a,b]$, se sigue que $f'(x)>0$ para todo x en $[a,b]$, o $f'(x)<0$ para todo x en $[a,b]$ (si $f'(c)>0$ y $f'(d)>0$ para $c,d\in[a,b]$, por el teorema del valor intermedio f' tendría algún cero en $[a,b]$. En todo caso, f es monótona en $[a,b]$ y $V_f(a,b)=|f(b)-f(a)|$. Supongamos que f' tiene ceros en $[a,b]$. Como f' tiene a lo más $\mathtt{grado}(f)\in\mathbb{Z}^+$ ceros en $\mathbb{R}$, podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean $x_1<x_2<\cdots<x_m$ todos los ceros de f' en $[a,b]$, y llamemos $x_0:=a$ y $x_{m+1}:=b$. Notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$ (con $k\in\{1,\ldots,m+1\}$ la función f es monótona y por tanto $V_f(x_{k-1},x_k)=|f(x_k)-f(x_{k-1})|$. Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a,b)=\sum_{k=1}^{m+1}V_f(x_{k-1},x_k)=\sum_{k=1}^{m+1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|.$$

□

Ejercicio 7.1. *Probar que* $\int_a^b d\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(a)$, *directamente a partir de la definición de integral de Riemann-Stieltjes.*

Prueba. Sea $\varepsilon>0$ cualquiera. Tomemos $P_\varepsilon=\{a,b\}\in\mathcal{P}[a,b]$ y $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función constante en 1. Si $P\supseteq P_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned}
|S(P,f,\alpha)-(\alpha(b)-\alpha(a))| &= \left|\left(\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\,\Delta\alpha_k\right)-(\alpha(b)-\alpha(a))\right|\\
&= \left|\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})\right)-(\alpha(b)-\alpha(a))\right|\\
&= |(\alpha(x_n)-\alpha(x_0))-(\alpha(b)-\alpha(a))|\\
&= |(\alpha(b)-\alpha(a))-(\alpha(b)-\alpha(a))|\\
&= 0\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba $\int_a^b d\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(a)$.

□

Ejercicio 7.11. *Si* $\alpha\nearrow$ *en* $[a,b]$, *probar que se verifica :*

a) $\overline{\int_a^b} f\ d\alpha=\overline{\int_a^c} f\ d\alpha+\overline{\int_c^b} f\ d\alpha$, $(a<c<b)$,

b) $\overline{\int_a^b}(f+g)\ d\alpha\leq\overline{\int_a^b} f\ d\alpha+\overline{\int_a^b} g\ d\alpha$,

c) $\underline{\int_a^b}(f+g)\ d\alpha\geq\underline{\int_a^b} f\ d\alpha+\underline{\int_a^b} g\ d\alpha$.

Prueba. ***a)*** Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ cualquiera. Tomamos $P' = P \cup \{c\}$. Supongamos $P' = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c, \ldots, x_n = b\}$. Tomemos $P_1' = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2' = \{c = x_\gamma, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c,b]$. Notemos que

$$\begin{aligned} U(P_1', f, \alpha) + U(P_2', f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= U(P', f, \alpha). \end{aligned}$$

Como $P' \supseteq P$ tenemos $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$, y por tanto $U(P_1', f, \alpha) + U(P_2', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. Ya que $P_1' \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2' \in \mathcal{P}[c,b]$, se sigue

$$\overline{\int_a^c} f\, d\alpha \leq U(P_1', f, \alpha), \quad y, \quad \overline{\int_c^b} f\, d\alpha \leq U(P_2', f, \alpha).$$

Por tanto

$$\overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha \leq U(P_1', f, \alpha) + U(P_2', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha).$$

Como lo anterior se tiene para $P \in \mathcal{P}[a,b]$ arbitraria, $\overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha$ es cota inferior del conjunto $\{U(P, f, \alpha) : P \in \mathcal{P}\}$, y por tanto

$$\overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha. \tag{1}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ cuaquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y existen $P_1 \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2 \in \mathcal{P}[c,b]$ tales que

$$U(P_1, f, \alpha) < \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y, \quad U(P_2, f, \alpha) < \overline{\int_c^b} f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego,

$$U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) = U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha + \varepsilon.$$

Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, tenemos $\overline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq U(P_1 \cup P_2, f, \alpha)$, y

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha + \varepsilon.$$

Lo anterior vale para $\varepsilon > 0$ arbitrario, por lo que obtenemos

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha. \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye $\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int_a^c} f\, d\alpha + \overline{\int_c^b} f\, d\alpha$.

b) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$U(P_1, f, \alpha) < \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \frac{E}{2}, \quad y, \quad U(P_2, g, \alpha) < \overline{\int_a^b} g\, d\alpha + \frac{E}{2}.$$

Entonces $U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha) < \overline{\int_a^b} f\, d\alpha + \overline{\int_a^b} g\, d\alpha + \varepsilon$. Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ y es más fina que P_1 y que P_2, entonces $U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + U(P_1 \cup P_2, g, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha)$.

Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P_1 \cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned} M_k(f+g) &\leq \sup\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &= M_k(f) + M_k(g), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
U(P_1\cup P_2, f+g,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f+g)\,\Delta\alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (M_k(f)+M_k(g))\,\Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} M_k(g)\,\Delta\alpha_k \\
&= U(P_1\cup P_2, f,\alpha) + U(P_1\cup P_2, g,\alpha).
\end{aligned}$$

También, $\overline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha \leq U(P_1\cup P_2, f+g,\alpha)$. Por consiguiente,

$$\overline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha + \varepsilon.$$

Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\overline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha.$$

c) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f,\alpha), \quad y, \quad \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2, g,\alpha).$$

Entonces $\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \varepsilon < L(P_1, f,\alpha) + L(P_2, g,\alpha)$. Como $P_1\cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ y es más fina que P_1 y que P_2, entonces $L(P_1, f,\alpha) + L(P_2, g,\alpha) \leq L(P_1\cup P_2, f,\alpha) + L(P_1\cup P_2, g,\alpha)$.

Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P_1\cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned}
m_k(f) + m_k(g) &= \inf\{f(x) : x\in[x_{k-1},x_k]\} + \inf\{g(x) : x\in[x_{k-1},x_k]\} \\
&\leq \inf\{f(x)+g(x) : x\in[x_{k-1},x_k]\} \\
&= m_k(f+g),
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
L(P_1\cup P_2, f,\alpha) + L(P_1\cup P_2, g,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} m_k(g)\,\Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (m_k(f)+m_k(g))\,\Delta\alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} m_k(f+g)\,\Delta\alpha_k \\
&= L(P_1\cup P_2, f+g,\alpha).
\end{aligned}$$

También, $L(P_1\cup P_2, f+g,\alpha) \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha$. Por consiguiente,

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha,$$

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha + \varepsilon.$$

Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha.$$

$\square$