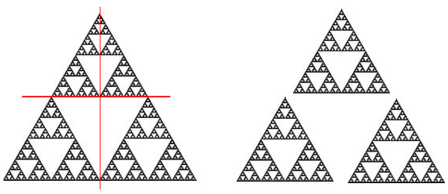
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Sistemas Numéricos
Examen 1 (II-2017) Prof. José L. Ramírez

Nombre:.. Código:.................. Fecha:....................

1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros.
   - (0.5) Demuestre que $(\mathbb{Z}, *)$, donde $a * b = a + b - 1$ es un grupo abeliano.
   - (0.5) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}, *)$ son grupos isomorfos.
2. Sea $(G, *)$ un grupo. Definimos el conjunto $H_G := \{h \in G : h' = h\}$.
   - (0.5) Demuestre que si G es un grupo abeliano entonces H_G es un subgrupo de G.
   - (0.5) Si la definición de H_G se extiende para una estructura algebraica cualquiera, encuentre H_G para $G = (\mathbb{Z}_6, \cdot)$.
3. (1.0) Demostrar que si $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$ entonces para todo número natural $p \neq 0$,
$$mp < np.$$
4. Considere la sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ definida por $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ para $n \geq 2$, con los valores iniciales $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$.
   - (0.5) Demuestre que para todo número natural $n \geq 0$ se tiene que
   $$\sum_{k=0}^{n} P_{2k+1} = \frac{1}{2} P_{2n+2}.$$
   - (0.5) Sea Q_n el número de formas de teselar una cinta de tamaño $2 \times n\, (n \geq 1)$ con las siguientes tres baldosas:

   Demuestre que $Q_n = P_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.
5. Sea F_n el n-ésimo número de Fibonacci. Demuestre que $F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo número natural $n \geq 1$.