Integración y Series

Primera entrega de ejercicios

Agosto 31 de 2023

Juan Camilo Lozano Suárez

Los siguientes lemas serán usados en algunas soluciones:

Lema 1. *Sea f una función monótona en $[a,b]$. Entonces $V_f(a,b) = |f(b) - f(a)|$.*

Prueba. Analizamos dos casos:

- Supongamos $f \nearrow$ *en* $[a,b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene
$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|.$$
- Supongamos $f \searrow$ *en* $[a,b]$. Para cualquier partición $P \in \mathcal{P}[a,b]$ se tiene
$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) = f(a) - f(b) = |f(b) - f(a)|.$$

En cualquier caso, se tiene $V_f(a,b) = sup\left\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\right\} = sup\left\{|f(b) - f(a)|\right\} = |f(b) - f(a)|$.

$\square$

Lema 2. *Sea f una función continua en $[a,b]$, tal que f' existe y es acotada en (a,b). Entonces $f \in VA[a,b]$.*

Prueba. Existe $A \geq 0$ tal que $|f'(c)| \leq A$ para todo $c \in (a,b)$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ cualquiera. Para cada k=1,..., n, por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que
$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{\Delta f_k}{x_k - x_{k-1}}.$$
Luego, $\Delta f_k = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$. De este modo,
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{n} (|f'(c_k)||x_k - x_{k-1}|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} A|x_k - x_{k-1}| \\
&= A\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= A(b-a),
\end{aligned}$$
con lo cual $f \in VA[a,b]$.

$\square$

Ejercicio 6.3. *Probar que una función polinómica f es de variación acotada en todo intervalo compacto $[a,b]$. Describir un método que permita calcular la variación total de f en $[a,b]$ conociendo los ceros de la derivada f'.*

Prueba. Sea f una función polinómica en $[a,b]$. Sabemos que f es continua en $[a,b]$ y que f' (que también es una función polinómica) existe y es acotada en (a,b). Por tanto f es de variación acotada en $[a,b]$.
Si f es constante en $[a,b]$, se tiene $V_f(a,b) = 0$. Supongamos $grado\,(f) \geq 1$, de modo que $grado\,(f') \geq 0$ y f' no es el polinomio nulo. Si f' no tiene ceros en $[a,b]$, se sigue que $f'(x) > 0$ para todo x en $[a,b]$, o $f'(x) < 0$ para todo x en $[a,b]$ (si $f'(c) > 0$ y $f'(d) > 0$ para $c, d \in [a,b]$, por el teorema del valor intermedio f' tendría algún cero en $[a,b]$). En todo caso, f es monótona en $[a,b]$ y $V_f(a,b) = |f(b) - f(a)|$. Supongamos que f' tiene ceros en $[a,b]$. Como f' tiene a lo más $grado\,(f) \in \mathbb{Z}^+$ ceros en $\mathbb{R}$, podemos enumerarlos y ordenarlos. Así, sean $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ todos los ceros de f' en $[a,b]$, y llamemos $x_0 := a$ y $x_{m+1} := b$. Notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ (con $k \in \{1, \ldots, m+1\}$) la función f es monótona y por tanto $V_f(x_{k-1}, x_k) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$. Por la propiedad aditiva de la variación total, se sigue que

$$V_f(a,b) = \sum_{k=1}^{m+1} V_f(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{m+1} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

□

Ejercicio 7.1. *Probar que $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$, directamente a partir de la definición de integral de Riemann-Stieltjes.*

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Tomemos $P_\varepsilon = \{a,b\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función constante en 1. Para cualquier $P \supseteq P_\varepsilon$ tenemos

$$\begin{aligned}
|S(P,f,\alpha) - (\alpha(b) - \alpha(a))| &= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta\alpha_k \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\
&= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) \right) - (\alpha(b) - \alpha(a)) \right| \\
&= |(\alpha(b) - \alpha(a)) - (\alpha(b) - \alpha(a))| \\
&= 0 \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba $\int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a)$.

□

Ejercicio 7.2. *Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ y si $\int_a^b f\ d\alpha = 0$ para cada f monótona en $[a,b]$, probar que α es constante en $[a,b]$.*

Prueba. Sea $c \in (a,b)$ cualquiera. Definimos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vía $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}$ para todo $x \in [a,b]$.
Claramente f es monótona en $[a,b]$, así que por hipótesis $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a,b]$ y $\int_a^b f\ d\alpha = 0$. Como $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ entonces $\alpha \in \mathcal{R}(f)$ en $[a,b]$. Veamos que $\int_a^b \alpha\ df = \alpha(c)$:

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que para cualquier $P \supseteq P_\varepsilon$ y para cualquier elección $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ se tiene $\left|S(P,\alpha,f) - \int_a^b \alpha\ df\right| < \varepsilon$. Tomemos $P = P_\varepsilon \cup \{c\} = \{x_0 = a, \ldots, x_\gamma = c, \ldots, x_n = b\} \supseteq P_\varepsilon$ con la elección $t_k = x_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$. Se tiene

$$\begin{aligned} S(P,\alpha,f) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\,\Delta f_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha(x_{k-1})\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right). \end{aligned}$$

Para $1 \leq k \leq \gamma$ tenemos $f(x_k) - f(x_{k-1}) = 0 - 0 = 0$; para $k = \gamma + 1$ tenemos $f(x_{\gamma+1}) - f(x_\gamma) = f(x_{\gamma+1}) - f(c) = 1 - 0 = 1$; para $\gamma + 2 \leq k \leq n$ tenemos $f(x_k) - f(x_{k-1}) = 1 - 1 = 0$. De este modo $S(P,\alpha,f) = \alpha(x_\gamma) = \alpha(c)$. Así, $\left|\alpha(c) - \int_a^b \alpha\ df\right| = \left|S(P,\alpha,f) - \int_a^b \alpha\ df\right| < \varepsilon$. Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\left|\alpha(c) - \int_a^b \alpha\ df\right| = 0$ y $\int_a^b \alpha\ df = \alpha(c)$.

Ahora, haciendo integración por partes tenemos

$$0 + \alpha(c) = \int_a^b f\ d\alpha + \int_a^b \alpha\ df = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) = \alpha(b),$$

y $\alpha(c) = \alpha(b)$, para $c \in (a,b)$ cualquiera. Como además la función constante en 1 es monótona en $[a,b]$, tenemos $\alpha(b) - \alpha(a) = \int_a^b d\alpha = 0$, y $\alpha(a) = \alpha(b)$, completando la prueba de que α es constante en $[a,b]$.

$\square$

Ejercicio 7.11. *Si $\alpha \nearrow$ en $[a,b]$, probar que se verifica:*

a) $\overline{\int_a^b} f\ d\alpha = \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha$, $(a < c < b)$,

b) $\overline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha$,

c) $\underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha \geq \underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha$.

Prueba. ***a)*** Sea $P \in \mathcal{P}[a,b]$ cualquiera. Tomamos $P' = P \cup \{c\}$. Supongamos $P' = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c, \ldots, x_n = b\}$. Tomemos $P_1' = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2' = \{c = x_\gamma, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c,b]$. Notemos que

$$\begin{aligned} U(P_1', f, \alpha) + U(P_2', f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f)\,\Delta\alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= U(P', f, \alpha). \end{aligned}$$

Como $P' \supseteq P$, tenemos $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$, y por tanto $U(P_1', f, \alpha) + U(P_2', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$. Ya que $P_1' \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2' \in \mathcal{P}[c,b]$, se sigue

$$\overline{\int_a^c} f\ d\alpha \leq U(P_1', f, \alpha), \quad y, \quad \overline{\int_c^b} f\ d\alpha \leq U(P_2', f, \alpha).$$

Por tanto

$$\overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha \leq U\left(P_1', f, \alpha\right) + U\left(P_2', f, \alpha\right) \leq U\left(P, f, \alpha\right).$$

Como lo anterior se tiene para $P \in \mathcal{P}[a,b]$ arbitraria, $\overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha$ es cota inferior del conjunto $\{U(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$, y por tanto

$$\overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\ d\alpha. \tag{1}$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ cuaquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y existen $P_1 = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c\} \in \mathcal{P}[a,c]$ y $P_2 = \{c = x_\gamma, \ldots, x_n = b\} \in \mathcal{P}[c,b]$ tales que

$$U\left(P_1, f, \alpha\right) < \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y, \quad U\left(P_2, f, \alpha\right) < \overline{\int_c^b} f\ d\alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

luego,

$$U\left(P_1, f, \alpha\right) + U\left(P_2, f, \alpha\right) < \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha + \varepsilon.$$

Notemos que, como $P_1 \cup P_2 = \{a = x_0, \ldots, x_\gamma = c, \ldots, x_n = b\}$, entonces

$$\begin{aligned} U\left(P_1 \cup P_2, f, \alpha\right) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{\gamma} M_k(f)\, \Delta\alpha_k + \sum_{k=\gamma+1}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k \\ &= U\left(P_1, f, \alpha\right) + U\left(P_2, f, \alpha\right). \end{aligned}$$

Por tanto $U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) < \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha + \varepsilon$. Además, como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$, tenemos $\overline{\int_a^b} f\ d\alpha \leq U(P_1 \cup P_2, f, \alpha)$, y así

$$\overline{\int_a^b} f\ d\alpha \leq \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha + \varepsilon.$$

Lo anterior vale para $\varepsilon > 0$ arbitrario, por lo que obtenemos

$$\overline{\int_a^b} f\ d\alpha \leq \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha. \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye $\overline{\int_a^b} f\ d\alpha = \overline{\int_a^c} f\ d\alpha + \overline{\int_c^b} f\ d\alpha$.

b) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ tales que

$$U\left(P_1, f, \alpha\right) < \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y, \quad U\left(P_2, g, \alpha\right) < \overline{\int_a^b} g\ d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces $U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha) < \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha + \varepsilon$. Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ y es más fina que P_1 y que P_2, entonces $U(P_1 \cup P_2, f, \alpha) + U(P_1 \cup P_2, g, \alpha) \leq U(P_1, f, \alpha) + U(P_2, g, \alpha)$.

Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de $P_1 \cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned} M_k(f+g) &= sup\left\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\} \\ &\leq sup\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\} + sup\left\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\right\} \\ &= M_k(f) + M_k(g), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
U\left(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha\right) &= \sum_{k=1}^{n} M_k\left(f+g\right) \Delta\alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(M_k\left(f\right) + M_k\left(g\right)\right) \Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} M_k\left(f\right) \Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} M_k\left(g\right) \Delta\alpha_k \\
&= U\left(P_1 \cup P_2, f, \alpha\right) + U\left(P_1 \cup P_2, g, \alpha\right).
\end{aligned}$$

También, $\overline{\int_a^b} \left(f+g\right)\ d\alpha \leq U\left(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha\right)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} \left(f+g\right)\ d\alpha &\leq U\left(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha\right) \\
&\leq U\left(P_1 \cup P_2, f, \alpha\right) + U\left(P_1 \cup P_2, g, \alpha\right) \\
&< \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\overline{\int_a^b} \left(f+g\right)\ d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\ d\alpha + \overline{\int_a^b} g\ d\alpha.$$

c) Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Existen $P_1, P_2 \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$ tales que

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L\left(P_1, f, \alpha\right), \quad y, \quad \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L\left(P_2, g, \alpha\right).$$

Entonces $\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \varepsilon < L\left(P_1, f, \alpha\right) + L\left(P_2, g, \alpha\right)$. Como $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}\left[a,b\right]$ y es más fina que P_1 y que P_2, entonces $L\left(P_1, f, \alpha\right) + L\left(P_2, g, \alpha\right) \leq L\left(P_1 \cup P_2, f, \alpha\right) + L\left(P_1 \cup P_2, g, \alpha\right)$.
Ahora bien, notemos que en cada subintervalo $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ de $P_1 \cup P_2$ tenemos

$$\begin{aligned}
m_k\left(f\right) + m_k\left(g\right) &= inf\left\{f\left(x\right) : x \in \left[x_{k-1}, x_k\right]\right\} + inf\left\{g\left(x\right) : x \in \left[x_{k-1}, x_k\right]\right\} \\
&\leq inf\left\{f\left(x\right) + g\left(x\right) : x \in \left[x_{k-1}, x_k\right]\right\} \\
&= m_k\left(f+g\right),
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
L\left(P_1 \cup P_2, f, \alpha\right) + L\left(P_1 \cup P_2, g, \alpha\right) &= \sum_{k=1}^{n} m_k\left(f\right) \Delta\alpha_k + \sum_{k=1}^{n} m_k\left(g\right) \Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(m_k\left(f\right) + m_k\left(g\right)\right) \Delta\alpha_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} m_k\left(f+g\right) \Delta\alpha_k \\
&= L\left(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha\right).
\end{aligned}$$

También, $L(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha) \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha - \varepsilon &< L(P_1, f, \alpha) + L(P_2, g, \alpha) \\
&\leq L(P_1 \cup P_2, f+g, \alpha) \\
&\leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha,
\end{aligned}$$

y así $\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha + \varepsilon$. Como esto se tiene para $\varepsilon > 0$ arbitrario, concluimos

$$\underline{\int_a^b} f\ d\alpha + \underline{\int_a^b} g\ d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f+g)\ d\alpha.$$

$\square$

Ejercicio 7.12. *Dar un ejemplo de una función acotada f y de una función creciente α definidas en $[a,b]$ tales que $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ pero para las que $\int_a^b f\ d\alpha$ no exista.*

Solución. Tomemos

$$\begin{aligned}
f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\alpha : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \alpha(x) = x.
\end{aligned}$$

Tenemos que $|f|$ es la función constante en 1 en $[0,1]$ y por el Ejercicio 7.1 se sigue que $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[0,1]$. Ahora bien, para toda $P \in \mathcal{P}[0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
U(P, f, \alpha) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\, \Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} L(P,f,\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta\alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} -\Delta\alpha_k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k \\ &= -1, \end{aligned}$$

con lo cual $\overline{\int_0^1} f\ d\alpha = inf\{U(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = inf\{1\} = 1$, y $\underline{\int_0^1} f\ d\alpha = sup\{L(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = sup\{-1\} = -1$. Por tanto $\underline{\int_0^1} f\ d\alpha \neq \overline{\int_0^1} f\ d\alpha$ y $f \notin \mathcal{R}(\alpha)$ en $[0,1]$. Con lo anterior concluimos que $\int_0^1 f\ d\alpha$ no existe.

$\square$