Variable Compleja

Segundo Examen Parcial

Julio 30 de 2024

Alexis

Juan Camilo Lozano Suárez

Ejercicio 1. *Suponga que la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

*converge a una función analítica $X(z)$ en algún anillo $R_1 < |z| < R_2$. La suma $X(z)$ es llamada la **z-transformada** de $x[n]$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Use la expresión (5), Sec. 66, para los coeficientes en una serie de Laurent para mostrar que si el anillo contiene la circunferencia unitaria $|z| = 1$, entonces la z-transformada inversa de $X(z)$ puede escribirse como*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Prueba. Llamemos A a la región anular $R_1 < |z| < R_2$, y C a la circunferencia $|z| = 1$ orientada positivamente. Supongamos que C está contenido en A. Como $X(z)$ es analítica en A y C es un contorno simple orientado positivamente alrededor de 0 y contenido en A, se sigue que $X(z)$ tiene representación en serie de Laurent

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (z \in A)$$

donde, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Como además, para todo $z \in A$ tenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

por la unicidad de la representación en serie de Laurent, se sigue que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{-n+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})(e^{i\theta})^{n-1}ie^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta,\end{aligned}$$

con lo que concluimos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

□

Ejercicio 2. *(Segundo punto)*

Prueba. (Prueba segundo punto) □

Ejercicio 3. *Calcule* $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}dz$.

Solución. Asumimos que el contorno $|z| = 2$ está orientado positivamente. Llamemos $f(z) = \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}$. Como senh es una función entera, los únicos puntos en que f no es analítica son $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$, que se encuentran dentro de $|z| = 2$, y por tanto son puntos singulares aislados de f. Por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

- Calculemos $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. Sabemos que

  $$\operatorname{senh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

  luego,

  $$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \dots \qquad (z \in \mathbb{C} - \{0\}).$$

  También, para $|z| < 1$:

  $$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -1 - z - z^2 - \dots,\end{aligned}$$

  de modo que para $0 < |z| < 1$ se tiene

  $$\begin{aligned}f(z) &= \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z-1} \\ &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \dots\right)\left(-1 - z - z^2 - \dots\right).\end{aligned}$$

En particular, podemos ver que el coeficiente de $1/z$ en la anterior serie es

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= -1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

Sabemos que, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, de modo que

$$\begin{aligned}e - e^{-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-(-1)^n)\frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{2}{5!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{e-e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

De lo anterior obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{e-e^{-1}}{2} = -\operatorname{senh}(1).$$

- Calculemos $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$. Como $\operatorname{senh}(1/z)$ es analítica y no nula en $z_1 = 1$, tenemos que $z_1 = 1$ es un polo simple de f y por tanto $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname{senh}(1)$.

Con los ítems anteriores concluimos

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1} dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \\ &= 2\pi i\,(-\operatorname{senh}(1) + \operatorname{senh}(1)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□