Variable Compleja

Segundo Examen Parcial

Julio 30 de 2024

Alexis

Juan Camilo Lozano Suárez

Ejercicio 1. *Suponga que la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

converge a una función analítica $X(z)$ en algún anillo $R_1 < |z| < R_2$. La suma $X(z)$ es llamada la ***z-transformada*** *de $x[n]$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Use la expresión (5), Sec. 66, para los coeficientes en una serie de Laurent para mostrar que si el anillo contiene la circunferencia unitaria $|z| = 1$, entonces la z-transformada inversa de $X(z)$ puede escribirse como*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Solución. Llamemos A a la región anular $R_1 < |z| < R_2$, y C a la circunferencia $|z| = 1$ orientada positivamente. Supongamos que C está contenido en A. Como $X(z)$ es analítica en A y C es un contorno simple orientado positivamente alrededor de 0 y contenido en A, se sigue que $X(z)$ tiene representación en serie de Laurent

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (z \in A)$$

donde, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Como además, para todo $z \in A$ tenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

por la unicidad de la representación en serie de Laurent, se sigue que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{-n+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})(e^{i\theta})^{n-1}ie^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta,\end{aligned}$$

con lo que concluimos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

□

Ejercicio 2. *(Segundo punto)*

Solución. (Prueba segundo punto) □

Ejercicio 3. *Calcule* $\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}dz$.

Solución. Asumimos que el contorno $|z| = 2$ está orientado positivamente. Llamemos $f(z) = \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}$. Como senh es una función entera, los únicos puntos en que f no es analítica son $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$, que se encuentran dentro de $|z| = 2$, y por tanto son puntos singulares aislados de f. Por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos

$$\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1}dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

- Calculemos $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$. Sabemos que

$$\operatorname{senh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

luego,

$$\operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \dots \qquad (z \in \mathbb{C} - \{0\}).$$

También, para $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -1 - z - z^2 - \dots,\end{aligned}$$

de modo que para $0 < |z| < 1$ se tiene

$$\begin{aligned}f(z) &= \operatorname{senh}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z-1} \\ &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \dots\right)\left(-1 - z - z^2 - \dots\right).\end{aligned}$$

En particular, podemos ver que el coeficiente de $1/z$ en la anterior serie es

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) &= -1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

Sabemos que, para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, de modo que

$$\begin{aligned}e - e^{-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-(-1)^n)\frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{2}{5!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{e-e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

De lo anterior obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{e-e^{-1}}{2} = -\operatorname{senh}(1).$$

- Calculemos $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)$. Como $\operatorname{senh}(1/z)$ es analítica y no nula en $z_1 = 1$, tenemos que $z_1 = 1$ es un polo simple de f y por tanto $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname{senh}(1)$.

Con los ítems anteriores concluimos

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh}(1/z)}{z-1} dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \\ &= 2\pi i \left(-\operatorname{senh}(1) + \operatorname{senh}(1)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 4.

Solución. □

Ejercicio 5. *Calcule usando residuos:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}$$

donde a, b y c son reales tales que $b^2 < 4ac$.

Solución. **I.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Llamemos $f(z) = 1/(az^2 + bz + c)$. Como $4ac > b^2 \geq 0$, tenemos $a \neq 0$. Así, tomando

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2|a|} \qquad \text{y} \qquad z_2 = -\frac{b}{2|a|} - i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \overline{z_1},$$

tenemos

$$f(z) = \frac{1}{a(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Llamando $q(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$, como $4ac - b^2 \neq 0$, tenemos que $q(z)$ no tiene ceros reales, y z_1 es su único cero sobre el eje real. Además, como la función $1/(a(z - z_2))$ es analítica y no nula en z_1, se tiene que z_1 es un polo simple de $f(z)$, y

$$\begin{aligned} B := &= \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \\ &= \frac{1}{a(z_1 - z_2)} \\ &= \frac{1}{a(z_1 - \overline{z_1})} \\ &= \frac{1}{2ia \cdot \operatorname{Im}(z_1)} \\ &= \frac{1}{2ia\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|}} \\ &= \frac{|a|}{ia\sqrt{4ac - b^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(a)\frac{1}{i\sqrt{4ac - b^2}}. \end{aligned}$$

Tomamos $R > |z_1|$ y llamamos C_R a la curva $Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$, y C a la curva que consta del eje real de $-R$ a R junto a C_R. Por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = \int_{C} f(z)dz = 2\pi iB,$$

y por tanto,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi iB - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz.$$

Para cada $z \in C_R$ tenemos

$$\begin{aligned} |z - z_1| &\geq ||z| - |z_1|| \\ &= |R - |z_1|| \\ &= R - |z_1| \end{aligned}$$

(pues $R > |z_1|$), y

$$\begin{aligned} |z - z_2| &\geq ||z| - |z_2|| \\ &= |R - |z_2|| \\ &= |R - |\overline{z_1}|| \\ &= |R - |z_1|| \\ &= R - |z_1|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{(R-|z_1|)^2} \geq \frac{1}{|z-z_1||z-z_2|},$$

de modo que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)}\right| \\
&= \frac{1}{|a||z-z_1||z-z_2|} \\
&\leq \frac{1}{|a|(R-|z_1|)^2},
\end{aligned}$$

con lo cual tenemos

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{|a|(R-|z_1|)^2}.$$

Como $\lim_{R\to\infty}(\pi R)/(|a|(R-|z_1|)^2) = 0$, se sigue que $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$. Con lo anterior

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i B,$$

es decir,

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{R} f(x)dx\right) = 2\pi i B.$$

Por el criterio de la integral, $\int_0^\infty f(x)dx$ converge si y solo si $\sum_{n=0}^\infty f(n)$ converge, pero vemos que esto es cierto haciendo comparación del límite con la serie convergente $\sum_{n=1}^\infty 1/(an^2)$. Por tanto, $\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$ converge; como $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^0 f(x)dx + \int_0^R f(x)dx\right)$ converge, también lo hace $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^0 f(x)dx$, de modo que

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{R} f(x)dx\right) &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\infty} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 2\pi i B \\
&= 2\pi i\cdot\operatorname{sgn}(a)\frac{1}{i\sqrt{4ac-b^2}} \\
&= \operatorname{sgn}(a)\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}.
\end{aligned}$$

II. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2}$

(Seguimos usando $z_1, z_2, C, \ldots$ con el mismo significado del ítem **I.**) Llamando $g(z) = 1/(az^2+bz+c)^2$ tenemos

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}.$$

Notemos que $r(z) := a^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2$ no tiene ceros reales y z_1 es su único cero por encima del eje real. Además, como la función $1/(a^2(z-z_2)^2)$ es analítica y no nula en z_1, se tiene que z_1 es un polo de orden 2 de $g(z)$, y

$$
\begin{aligned}
D := &= \operatorname*{Res}_{z=z_1} g(z) \\
&= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{a^2(z-z_2)^2}\right)\Bigg|_{z=z_1} \\
&= \frac{-2}{a^2(z-z_2)^3}\Bigg|_{z=z_1} \\
&= \frac{-2}{a^2(z_1-z_2)^3} \\
&= \frac{-2}{a^2(z_1-\overline{z_1})^3} \\
&= \frac{-2}{a^2\left(2i\mathrm{Im}(z_1)\right)^3} \\
&= \frac{-2}{a^2\left(2i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|}\right)^3} \\
&= \frac{-2}{-\frac{i}{|a|}(4ac-b^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{2i|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Como $q(z)$ y $r(z)$ tienen el mismo cero sobre el eje real, podemos integrar $g(z)$ sobre el contorno C para, de forma similar a como se hizo en **I.**, llegar a

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx &= 2\pi i D \\
&= 2\pi i\left(-\frac{2i|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{4\pi|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 6.

Solución. □

Ejercicio 7. *Muestre que para $n-m>2$ se tiene que*

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{x^n+1} = \frac{\pi}{n\ \operatorname{sen}[\pi(m+1)/n]}.$$

Solución. Asumimos $m, n \in \mathbb{N}$. Llamemos $f(z) = z^m/(z^n+1)$ y $z_k = e^{\pi i(2k+1)/n}$ para $k \in 0, 1, \ldots, n-1$; además, tomemos $\varphi = 2\pi/n$ y $R > 1$. Con lo anterior, llamamos C_R a la curva $Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \varphi]$, C_1 a la curva $re^{i\varphi}$ con r variando de R a 0, y C a la curva que consiste del eje real de 0 a R, C_R y C_1 (ver Figura 1).

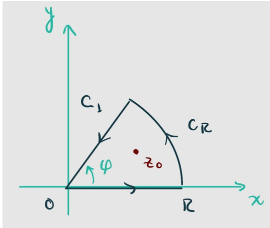

Figura 1

Llamando

$$\phi(z) = \frac{z^m}{\prod\limits_{0<k\leq n-1} (z - z_k)},$$

tenemos $f(z) = \phi(z)/(z - z_0)$. Como $\phi(z)$ es analítica y no nula en z_0, entonces z_0 es un polo simple de $f(z)$ y

$$\begin{aligned} B &:= \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \\ &= \phi(z_0) \\ &= \frac{{z_0}^m}{\prod\limits_{0<k\leq n-1} (z_0 - z_k)} \\ &= \frac{{z_0}^m}{\left(\frac{z^n-1}{z-z_0}\right)\Big|_{z=z_0}}. \end{aligned}$$

Haciendo división sintética puede verse que

$$\frac{z^n - 1}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{n} {z_0}^{k-1} z^{n-k},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left(\frac{z^n - 1}{z - z_0}\right)\Bigg|_{z=z_0} &= \left(\sum_{k=1}^{n} {z_0}^{k-1} z^{n-k}\right)\Bigg|_{z=z_0} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {z_0}^{k-1} {z_0}^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {z_0}^{n-1} \\ &= n{z_0}^{n-1}, \end{aligned}$$

y con esto

$$\begin{aligned} B &= \frac{{z_0}^m}{n{z_0}^{n-1}} \\ &= \frac{{z_0}^{m+1}}{n z_0^n} \\ &= -\frac{{z_0}^{m+1}}{n}. \end{aligned}$$

Como z_0 es el único cero de $z^n + 1$ dentro de C, se tiene que $f(z)$ es analítica en C y su interior salvo z_0. Por el teorema de los residuos de Cauchy obtenemos

$$\int_0^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz = \int_C f(z)dz = 2\pi i B,$$

o,

$$\int_0^R f(x)dx + \int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i B - \int_{C_R} f(z)dz,$$

Haciendo el cambio de variable $z = re^{i\varphi}$, $dz = e^{i\varphi}dr$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} f(z)dz &= -\int_0^R f(re^{i\varphi})e^{i\varphi}dr \\
&= -e^{i\varphi}\int_0^R \frac{(re^{i\varphi})^m}{(re^{i\varphi})^n+1}dr \\
&= -e^{i\varphi}\int_0^R \frac{r^m e^{im\varphi}}{r^n e^{in\varphi}+1}dr \\
&= -e^{i\varphi(m+1)}\int_0^R \frac{r^m}{r^n+1}dr \qquad (e^{in\varphi} = e^{in\frac{2\pi}{n}} = e^{i2\pi} = 1) \\
&= -e^{i\varphi(m+1)}\int_0^R f(r)dr \\
&= -e^{i\varphi(m+1)}\int_0^R f(x)dx.
\end{aligned}$$

Así, de la igualdad

$$\int_0^R f(x)dx + \int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i B - \int_{C_R} f(z)dz$$

se sigue

$$\begin{aligned}
2\pi i B - \int_{C_R} f(z)dz &= \int_0^R f(x)dx - e^{i\varphi(m+1)}\int_0^R f(x)dx \\
&= \left(1 - e^{i\varphi(m+1)}\right)\int_0^R f(x)dx,
\end{aligned}$$

y, haciendo tender R a ∞,

$$\left(1 - e^{i\varphi(m+1)}\right)\int_0^\infty f(x)dx = 2\pi i B - \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz.$$

Para cada $z \in C_R$ tenemos

$$\begin{aligned}
|z^n + 1| &= |z^n - (-1)| \\
&\geq ||z^n| - |-1|| \\
&= |R^n - 1| \\
&= R^n - 1,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que, como $R > 1$ entonces $R^n > 1$. Con lo anterior $1/|z^{n+1}| \leq 1/(R^n - 1)$, de modo que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{z^m}{z^n+1}\right| \\
&= \frac{|z|^m}{|z^n+1|} \\
&= \frac{R^m}{|z^n+1|} \\
&\leq \frac{R^m}{R^n-1},
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| &\leq \frac{R^m}{R^n-1}\varphi R \\ &= \varphi\frac{R^{m+1}}{R^n-1}.\end{aligned}$$

Como $n > m+2$, se tiene $\lim_{R\to\infty} \varphi R^{m+1}/(R^n-1) = 0$, y con esto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Así,

$$\left(1-e^{i\varphi(m+1)}\right)\int_0^\infty f(x)dx = 2\pi i B,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)dx &= \frac{2\pi i B}{1-e^{i\varphi(m+1)}} \\ &= -\frac{{z_0}^{m+1}}{n}\cdot\frac{2\pi i}{1-e^{i\varphi(m+1)}} \\ &= -\frac{{z_0}^{m+1}}{n}\cdot\frac{2\pi i}{1-\left(e^{i\varphi}\right)^{m+1}}.\end{aligned}$$

Notemos que $e^{i\varphi} = e^{2\pi i/n} = \left(e^{\pi i/n}\right)^2 = {z_0}^2$, con lo que

$$\begin{aligned}-\frac{{z_0}^{m+1}}{n}\cdot\frac{2\pi i}{1-\left(e^{i\varphi}\right)^{m+1}} &= -\frac{{z_0}^{m+1}}{n}\cdot\frac{2\pi i}{1-{z_0}^{2(m+1)}} \\ &= \frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{1}{{z_0}^{m+1}-{z_0}^{-(m+1)}}.\end{aligned}$$

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}{z_0}^{m+1}-{z_0}^{-(m+1)} &= e^{\pi i(m+1)/n} - e^{-\pi i(m+1)/n} \\ &= e^{\pi i(m+1)/n} - \overline{e^{\pi i(m+1)/n}} \\ &= 2i\cdot\mathrm{Im}\left(e^{i\pi(m+1)/n}\right) \\ &= 2i\cdot\mathrm{sen}[\pi(m+1)/n].\end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{1}{{z_0}^{m+1}-{z_0}^{-(m+1)}} &= \frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{1}{2i\cdot\mathrm{sen}[\pi(m+1)/n]} \\ &= \frac{\pi}{n\cdot\mathrm{sen}[\pi(m+1)/n]},\end{aligned}$$

con lo que podemos concluir

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi}{n\cdot\mathrm{sen}[\pi(m+1)/n]}.$$

□

Ejercicio 8.

Solución. □