

VARIABLE COMPLEJA  
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

JULIO 30 DE 2024

ALEXIS

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ

**Ejercicio 1.** Suponga que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

converge a una función analítica  $X(z)$  en algún anillo  $R_1 < |z| < R_2$ . La suma  $X(z)$  es llamada la  **$z$ -transformada** de  $x[n]$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Use la expresión (5), Sec. 66, para los coeficientes en una serie de Laurent para mostrar que si el anillo contiene la circunferencia unitaria  $|z| = 1$ , entonces la  $z$ -transformada inversa de  $X(z)$  puede escribirse como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*Prueba.* Llamemos  $A$  a la región anular  $R_1 < |z| < R_2$ , y  $C$  a la circunferencia  $|z| = 1$  orientada positivamente. Supongamos que  $C$  está contenido en  $A$ . Como  $X(z)$  es analítica en  $A$  y  $C$  es un contorno simple orientado positivamente alrededor de 0 y contenido en  $A$ , se sigue que  $X(z)$  tiene representación en serie de Laurent

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (z \in A)$$

donde, para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{X(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Como además, para todo  $z \in A$  tenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

por la unicidad de la representación en serie de Laurent, se sigue que para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{X(z)}{z^{-n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) z^{n-1} dz. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $z = e^{i\theta}$ ,  $dz = ie^{i\theta}d\theta$ , se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_C X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) (e^{i\theta})^{n-1} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta,\end{aligned}$$

con lo que concluimos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

□

**Ejercicio 2.** (Segundo punto)

*Prueba.* (Prueba segundo punto)

□

**Ejercicio 3.** Calcule  $\oint_{|z|=2} \frac{\sinh(1/z)}{z-1} dz$ .

*Solución.* Asumimos que el contorno  $|z| = 2$  está orientado positivamente. Llamemos  $f(z) = \frac{\sinh(1/z)}{z-1}$ . Como  $\sinh$  es una función entera, los únicos puntos en que  $f$  no es analítica son  $z_0 = 0$  y  $z_1 = 1$ , que se encuentran dentro de  $|z| = 2$ , y por tanto son puntos singulares aislados de  $f$ . Por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sinh(1/z)}{z-1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^1 \text{Res}_{z=z_k} f(z).$$

- Calculemos  $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ . Sabemos que

$$\sinh(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C}),$$

luego,

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} + \dots \quad (z \in \mathbb{C} - \{0\}).$$

También, para  $|z| < 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -1 - z - z^2 - \dots,\end{aligned}$$

de modo que para  $0 < |z| < 1$  se tiene

$$\begin{aligned}f(z) &= \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z-1} \\ &= \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} + \dots\right) (-1 - z - z^2 - \dots).\end{aligned}$$

En particular, podemos ver que el coeficiente de  $1/z$  en la anterior serie es

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= -1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

Sabemos que, para todo  $z \in \mathbb{C}$  se tiene  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ , de modo que

$$\begin{aligned}e - e^{-1} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{2}{5!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{e - e^{-1}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

De lo anterior obtenemos

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = -\frac{e - e^{-1}}{2} = -\sinh(1).$$

- Calculemos  $\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z)$ . Como  $\sinh(1/z)$  es analítica y no nula en  $z_1 = 1$ , tenemos que  $z_1 = 1$  es un polo simple de  $f$  y por tanto  $\operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \sinh(1)$ .

Con los ítems anteriores concluimos

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{\sinh(1/z)}{z-1} dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \\ &= 2\pi i (-\sinh(1) + \sinh(1)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

#### Ejercicio 4.

*Solución.*

□

**Ejercicio 5.** Calcule usando residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

donde  $a, b$  y  $c$  son reales tales que  $b^2 < 4ac$ .

*Solución.*

I.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Llamemos  $f(z) = 1/(az^2 + bz + c)$ . Como  $4ac > b^2 \geq 0$ , tenemos  $a \neq 0$ . Así, tomando

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|} \quad \text{y} \quad z_2 = -\frac{b}{2|a|} - i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \bar{z}_1,$$

tenemos

$$f(z) = \frac{1}{a(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Llamando  $q(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$ , como  $4ac - b^2 \neq 0$ , tenemos que  $q(z)$  no tiene ceros reales, y  $z_1$  es su único cero sobre el eje real. Además, como la función  $1/(a(z-z_2))$  es analítica y no nula en  $z_1$ , se tiene que  $z_1$  es un polo simple de  $f(z)$ , y

$$\begin{aligned} B &:= \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) \\ &= \frac{1}{a(z_1-z_2)} \\ &= \frac{1}{a(z_1-\bar{z}_1)} \\ &= \frac{1}{2ia \cdot \operatorname{Im}(z_1)} \\ &= \frac{1}{2ia \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|}} \\ &= \frac{|a|}{ia\sqrt{4ac-b^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(a) \frac{1}{i\sqrt{4ac-b^2}}. \end{aligned}$$

Tomamos  $R > |z_1|$  y llamamos  $C_R$  a la curva  $Re^{i\theta}$  con  $\theta \in [0, \pi]$ , y  $C$  a la curva que consta del eje real de  $-R$  a  $R$  junto a  $C_R$ . Por el teorema de los residuos de Cauchy tenemos

$$\int_{-R}^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = \int_C f(z)dz = 2\pi iB,$$

y por tanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx = 2\pi iB + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz.$$

Para cada  $z \in C_R$  tenemos

$$\begin{aligned} |z - z_1| &\geq ||z| - |z_1|| \\ &= |R - |z_1|| \\ &= R - |z_1| \end{aligned}$$

(pues  $R > |z_1|$ ), y

$$\begin{aligned} |z - z_2| &\geq ||z| - |z_2|| \\ &= |R - |z_2|| \\ &= |R - |\bar{z}_1|| \\ &= |R - |z_1|| \\ &= R - |z_1|. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{1}{(R - |z_1|)^2} \geq \frac{1}{|z - z_1||z - z_2|},$$

de modo que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{1}{a(z - z_1)(z - z_2)} \right| \\ &= \frac{1}{|a||z - z_1||z - z_2|} \\ &\leq \frac{1}{|a|(R - |z_1|)^2}, \end{aligned}$$

con lo cual tenemos

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{|a|(R - |z_1|)^2}.$$

Como  $\lim_{R \rightarrow \infty} (\pi R) / (|a|(R - |z_1|)^2) = 0$ , se sigue que  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$ . Con lo anterior

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i B,$$

es decir,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right) = 2\pi i B.$$

Por el criterio de la integral,  $\int_0^\infty f(x) dx$  converge si y solo si  $\sum_{n=0}^\infty f(n)$  converge, pero vemos que esto es cierto haciendo comparación del límite con la serie convergente  $\sum_{n=1}^\infty 1/(an^2)$ . Por tanto,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$  converge; como  $\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right)$  converge, también lo hace  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx$ , de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty f(x) dx, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= 2\pi i B \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname{sgn}(a) \frac{1}{i\sqrt{4ac - b^2}} \\ &= \operatorname{sgn}(a) \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}. \end{aligned}$$

## II. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}$

(Seguimos usando  $z_1, z_2, C, \dots$  con el mismo significado del ítem I.) Llamando  $g(z) = 1/(az^2 + bz + c)^2$  tenemos

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2}.$$

Notemos que  $r(z) := a^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2$  no tiene ceros reales y  $z_1$  es su único cero por encima del eje real. Además, como la función  $1/(a^2(z - z_2)^2)$  es analítica y no nula en  $z_1$ , se tiene que  $z_1$  es un polo de orden 2

de  $g(z)$ , y

$$\begin{aligned}
D &:= \operatorname{Res}_{z=z_1} g(z) \\
&= \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{a^2(z-z_2)^2} \right) \Big|_{z=z_1} \\
&= \frac{-2}{a^2(z-z_2)^3} \Big|_{z=z_1} \\
&= \frac{-2}{a^2(z_1-z_2)^3} \\
&= \frac{-2}{a^2(z_1-\bar{z}_1)^3} \\
&= \frac{-2}{a^2(2i\operatorname{Im}(z_1))^3} \\
&= \frac{-2}{a^2 \left( 2i \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2|a|} \right)^3} \\
&= \frac{-2}{-\frac{i}{|a|}(4ac-b^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{2i|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Como  $q(z)$  y  $r(z)$  tienen el mismo cero sobre el eje real, podemos integrar  $g(z)$  sobre el contorno  $C$  para, de forma similar a como se hizo en **I.**, llegar a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx &= 2\pi i D \\
&= 2\pi i \left( -\frac{2i|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{4\pi|a|}{(4ac-b^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

□

### Ejercicio 6.

*Solución.*

□

**Ejercicio 7.** Muestre que para  $n-m > 2$  se tiene que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n+1} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}[\pi(m+1)/n]}.$$

*Prueba.*

□

### Ejercicio 8.

*Solución.*

□