Variable Compleja

Segundo Examen Parcial

Julio 30 de 2024

Alexis

Juan Camilo Lozano Suárez

Ejercicio 1. *Suponga que la serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

converge a una función analítica $X(z)$ *en algún anillo* $R_1 < |z| < R_2$. *La suma* $X(z)$ *es llamada la* ***z-transformada*** *de* $x[n]$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. *Use la expresión (5), Sec. 66, para los coeficientes en una serie de Laurent para mostrar que si el anillo contiene la circunferencia unitaria* $|z| = 1$, *entonces la z-transformada inversa de* $X(z)$ *puede escribirse como*

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Prueba. Llamemos A a la región anular $R_1 < |z| < R_2$, y C a la circunferencia $|z| = 1$ orientada positivamente. Supongamos que C está contenido en A. Como $X(z)$ es analítica en A y C es un contorno simple orientado positivamente alrededor de 0 y contenido en A, se sigue que $X(z)$ tiene representación en serie de Laurent

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad (z \in A)$$

donde, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Como además, para todo $z \in A$ tenemos

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

por la unicidad de la representación en serie de Laurent, se sigue que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} x[n] &= c_{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{X(z)}{z^{-n+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C X(z)z^{n-1}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})(e^{i\theta})^{n-1}ie^{i\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta,\end{aligned}$$

con lo que concluimos

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

□