Teoría de categorías (2024-I)
Trabajo de profundización

Dos aproximaciones equivalentes a la noción de haz

Juan Camilo Lozano Suárez [1]

Resumen. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probamos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

Palabras Clave. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manojo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

Contents

[1]Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X, al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de U. Una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U, y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V^U : V \to \mathbb{R}$ (la restricción de f de U a V) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 6.0.1), un apropiado conocimiento local de U nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

(P2) Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f|_{U_i}^U : U_i \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces f es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X, y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante "$V \subseteq U$". Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U:

$$CU := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad CU &\to CV \\ f &\longmapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de U en $\mathbb{R}$ le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V, que a su vez es una función continua de V en $\mathbb{R}$. Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U, $C(V \subseteq U) : CU \to CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

Prueba.

- Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$C(1_U): \quad \begin{aligned} CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

  es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W, $C(W \subseteq U) : CU \to CW$. Tenemos ademas en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \to CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

  con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

$\square$

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz)**.** *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria $\boldsymbol{C}$, sean $f, g : A \to B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e\rangle$, con $E \in \boldsymbol{C}$ y $e : E \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u\rangle$ con $U \in \boldsymbol{C}$ y $u : U \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \to E$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $e \circ v = u$.*

En el siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “ diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B. Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e\rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A:*

- *Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.*
- *Supongamos que existe $\langle U, u\rangle$ con $U \in$ **Set** y $u : U \to A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \to E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una fleca de $U \to E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.*

$\Diamond$

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por " igualador" tanto al par $\langle E, e\rangle$ como simplemente a la flecha e. Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

Prueba. Sean **C** una categoría, $f, g : A \to B$ flechas paralelas en **C** y $\langle E, e\rangle$ un igualador de f y g. Supongamos que existen flechas $i, j : F \to E$ en **C** tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "e\circ j = e \circ i"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g, existe una única flecha $k : F \to E$ en **C** tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i, pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en **C**.

$\square$

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que en* **Set** el siguiente es un diagrama igualador:

$$E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ $(\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A}\rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g, con lo cual, existe una única flecha $v : F \to E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$.

$\square$

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro "ejemplo como motivación" (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena "condición de pegado", en el sentido de que las funciones $f|^U_{U_i}$ $(i \in I)$ se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|^U_{U_i}(x) = f(x) = f|^U_{U_j}(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\left\{f|^U_{U_i}\right\}_{i\in I}$. Notemos que $\left\{f|^U_{U_i}\right\}_{i\in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i\in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|^U_{U_i} \in CU_i$ y $f|^U_{U_j} \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|^U_{U_i})|^{U_i}_{U_i\cap U_j}, (f|^U_{U_j})|^{U_j}_{U_i\cap U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\left\{(f|^U_{U_i})|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$ y $\left\{(f|^U_{U_j})|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \to \prod_{i\in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\left\{f|^U_{U_i}\right\}_{i\in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Proposición 1.3.1. *En* **Set** *el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} CU_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba. • Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\ &= \pi_1\left(\left\{f|^U_{U_i}\right\}_{i\in I}\right) \\ &= \left\{(f|^U_{U_i})\,|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \left\{f|^U_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \left\{(f|^U_{U_j})|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \pi_2\left(\left\{f|^U_{U_i}\right\}_{i\in I}\right) \\ &= \pi_2(e(f)) \\ &= (\pi_2 \circ e)(f),\end{aligned}$$

y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e\rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in \mathbf{Set}$ y $u : X \to \prod_{i\in I} CU_i$ en $\mathbf{Set}$ tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{tikzcd} CU \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in I} CU_i \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i\cap U_j) \\ X \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i\in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \to \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\left\{g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} = \left\{g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j} = g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}$ y $g_i(x) = g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j}(x) = g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 6.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i\in I} g_i$ es una función continua de U en $\mathbb{R}$, es decir, $\bigcup_{i\in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \to CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i\in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned}(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\ &= e(\bigcup_{i\in I} g_i) \\ &= \left\{(\bigcup_{j\in I} g_j)|^U_{U_i}\right\}_{i\in I} \\ &= \{g_i\}_{i\in I} \\ &= u(g),\end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \to CU$ en $\mathbf{Set}$ tal que $e \circ v' = u$.

Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} \left\{ (v'(g))|_{U_i}^{U} \right\}_{i \in I} &= u(g) \\ &= e(v(g)) \\ &= \left\{ (v(g))|_{U_i}^{U} \right\}_{i \in I}, \end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|_{U_i}^{U} = (v(g))|_{U_i}^{U}$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned} v'(g) &= \bigcup_{i \in I} (v'(g))|_{U_i}^{U} \\ &= \bigcup_{i \in I} (v(g))|_{U_i}^{U} \\ &= v(g), \end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba.

$\square$

Notemos que la Proposición 1.3.1 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto U y el cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de U. El hecho de que e sea el igualador de π_1 y π_2 nos traduce la "condición de pegado" que se satisface al restringir funciones continuas de U a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 6.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

Notación 1.4.1. *Dado X un espacio topológico y $P : \mathcal{O}(X)^{op} \to$ **Set** un funtor (es decir un prehaz de conjuntos sobre X) y dada la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$,2 para toda $t \in PU$ denotamos*

$$t|_{V}^{U} := (P(V \subseteq U))(t).$$

Ahora generalizamos las funciones e, π_1 y π_2 que se trabajaron en la Sección 1.3:

Definición 1.4.2 (Funciones canónicas)**.** *Sea P un prehaz sobre un espacio topológico X. Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U, definimos las siguientes funciones:*

- $e : PU \to \prod_{i \in I} PU_i$ *que a cada $f \in PU$ le asigna la familia* $\left\{ f|_{U_i}^{U} \right\}_{i \in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} PU_i \to \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$ le asigna la familia* $\left\{ f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$.

- $\pi_2 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i\cap U_j)$ *que a cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ *le asigna la familia* $\left\{ f_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j} \right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Llamamos a e *la función canónica de* PU *en* $\prod_{i\in I} PU_i$ *y a* π_1 *y* π_2 *las funciones canónicas de* $\prod_{i\in I} PU_i$ *en* $\prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i\cap U_j)$.

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

Definición 1.4.3 (Haz de conjuntos)**.** *Un haz de conjuntos* P *sobre un espacio topológico* X *es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier* $U \in \mathcal{O}(X)$ *y cualquier cubrimiento abierto* $\{U_i\}_{i\in I}$ *de* U*, el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{\ e\ } \prod_{i\in I} PU_i \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i\cap U_j)$$

donde e, π_1 *y* π_2 *son las respectivas funciones canónicas.*

En la anterior definición P es por tanto un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos, $\mathbb{F}$-álgebras, $\mathbb{F}$-módulos, etc. (para un campo $\mathbb{F}$) obtenemos haces de anillos, de $\mathbb{F}$-álgebras, de $\mathbb{F}$-módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor C de nuestro "ejemplo como motivación", puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de $\mathbb{R}$-álgebras o $\mathbb{R}$-módulos al dotar cada conjunto CU ($U \in \mathcal{O}(X)$) con las operaciones adecuadas. A C lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre X. En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 1.4.4 (Categoría de haces sobre un espacio topológico)**.** *Dado un espacio topológico* X*, la categoría de funtores* $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$ *tiene como objetos todos los prehaces sobre* X *y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por* $\mathrm{PreSh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de prehaces sobre* X*". La subcategoría plena de* $\mathrm{PreSh}(X)$ *que tiene por objetos todos los haces sobre* X *se denota* $\mathrm{Sh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de haces sobre* X*"; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre* X*.*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathrm{PreSh}(X)$.

2 Espacios étalé o espacios fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé proveniente del francés; viene a significar "ramificado", "extendido", "esparcido", "repartido", etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.

2.1 Manojos

Definición 2.1.1 (Manojo)**.** *Un manojo sobre un espacio topológico X es una pareja $\langle Y, p\rangle$ con Y un espacio topológico y $p : Y \to X$ una función continua.*

Según el contexto, es frecuente referirnos al manojo $\langle Y, p\rangle$ simplemente por p. La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 2.1.2 (Categoría $\mathbf{Top}/X$)**.** *La categoría $\mathbf{Top}/X$ (léase "categoría Top sobre X") o $\mathbf{Bund}(X)$ tiene por objetos todos los manojos sobre X. Dados $\langle Y, p\rangle, \langle Y', q\rangle \in \mathbf{Top}/X$, f es una flecha $\langle Y, p\rangle \to \langle Y', q\rangle$ en $\mathbf{Top}/X$ si $f : Y \to Y'$ es una función continua y $q \circ f = p$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La categoría $\mathbf{Top}/X$ es un ejemplo de "categoría coma" (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por $(X \downarrow \mathbf{Top})$). La notación $\mathbf{Bund}(X)$ es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manojo*. Un concepto esencial al trabajar con manojos es el de *sección*:

Definición 2.1.3 (Secciones)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X.*

- *Una flecha $s : 1_X \to p$ en $\mathbf{Top}/X$ es llamada una sección transversal de p. En este caso decimos que s es una sección global de p.*
- *Dado $U \overset{ab}{\subseteq} X$, una flecha $s : in_{U,X} \to p$ en $\mathbf{Top}/X$ es llamada una sección transversal de p sobre U. En este caso decimos que s es una sección local de p.*

De esta forma, una sección global (local) es una función continua que hace que el siguiente diagrama de la izquierda (derecha) conmute:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "1_X"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "in_{U,X}"'] & X \end{tikzcd}$$

Vemos también que s se presenta como una inversa (local), a derecha, de p.

2.2 Espacios étalé

Para introducir los espacios étalé recordamos un concepto de topología:

Definición 2.2.1 (Homeomorfismo local)**.** *Dados X y Y espacios topológicos, decimos que una función $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local sobre X si para todo $y \in Y$ existe $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ con $y \in V_y$ tal que:*

(i) $p(V_y)$ es un subconjunto abierto de X.

(ii) $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ *es un homeomorfismo.*

Una propiedad importante de los homeomorfismos locales (cuya prueba se presenta en la Sección 6 (Apéndice)) es la siguiente:

Proposición 2.2.2. *Si* $p : Y \to X$ *es un homeomorfismo local, entonces* p *es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de* Y *que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de* Y*.*

Con esto, podemos introducir los espacios fibrados o étalé como un caso particular de manojo:

Definición 2.2.3 (Espacio étalé)**.** *Un espacio fibrado o étalé sobre un espacio topológico* X *es un manojo* $\langle p, Y \rangle$*, donde* $p : Y \to X$ *es además un homeomorfismo local.*

Con lo anterior, podemos considerar la subcategoría plena de $\mathbf{Top}/X$ que tiene por objetos todos los espacios étalé sobre X, y que denotamos por $\mathbf{Etale}(X)$.

Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, las inversas puntuales $p^{-1}\{x\}$ $(x \in X)$ son llamadas las fibras de p sobre X. De este modo, el espacio Y se presenta como la unión disyunta de las fibras de p, justificando así el uso de las palabras *fibrado* y *étalé* en las definiciones dadas. Así mismo, hablamos de Y como el espacio alto o desplegado, y nos referimos a X como el espacio bajo o base. El espacio Y se muestra, primero, como un despliegue vertical del espacio X, representado en las fibras de cada elemento en el espacio base, y segundo, como un despliegue horizontal de X, representado mediante el pegamiento de fibras que establecen los conjuntos abiertos de Y. Así mismo, la función p se presenta como una proyección del espacio alto en el espacio bajo. Las secciones de un espacio étalé se comportan especialmente bien; muestra de ello lo da la siguiente proposición (para su prueba ver la Sección 6):

Proposición 2.2.4. *Sean* $U \overset{ab}{\subseteq} X$ *y* s *una sección transversal, de un espacio étalé* $\langle p, Y \rangle$*, sobre* U*. Entonces:*

- $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.
- $s : U \to s(U)$ *es un homeomorfismo.*
- $s(U)$ *es un subconjunto abierto de* Y*.*

Lo anterior nos permite por tanto caracterizar las secciones de $\langle p, Y \rangle$ con los abiertos básicos de Y. Ésto a su vez nos muestra que el pegamiento horizontal de fibras que se da en Y mediante conjuntos abiertos es bien portado en términos de continuidad. Un problema crucial en la teoría es el de la posibilidad de pegar secciones locales para construir secciones mayores y eventualmente globales [Zalamea, 2021], lo cual captura las problemáticas de lo local versus lo global que motivaron nuestra definición de haz. Estos paralelismos manifiestos entre haces y espacios étalé permiten que la equivalencia entre las categorías $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathbf{Etale}(X)$, cuya prueba constituye nuestro objetivo en lo que sigue, no nos parezca en absoluto ajena.

3 De manojos a prehaces

(A lo largo de esta sección y la siguiente, X denota un espacio topológico fijo).

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Γ de la categoría $\mathbf{Top}/X$ de los manojos sobre X, en la categoría $\mathrm{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X.

Definición 3.0.1 (Acción de Γ_p sobre objetos)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X. Para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos $\Gamma_p U$ como el conjunto de todas las secciones transversales de p sobre U.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p U & Y \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[ur, bend left=60] \arrow[ur, bend left=30] \arrow[ur, "\cdots" description] \arrow[ur, bend right=30] \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

Notemos que si se tiene la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, para cada $s \in \Gamma_p U$ surge una sección transversal de p sobre V, a saber, $s \circ \iota_{V,U} = s|_V^U$, es decir $s|_V^U \in \Gamma_p V$:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dd, "p"] \\
 & U \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, hook, "\iota_{U,X}"] & \\
V \arrow[uurr, bend left, "s|_V^U"] \arrow[ur, hook, "\iota_{V,U}"] \arrow[rr, hook, "\iota_{V,X}"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Definición 3.0.2 (Acción de Γ_p sobre flechas)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X. Para cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la flecha (de* **Set***) $\Gamma_p(V \subseteq U) : \Gamma_p U \to \Gamma_p V : s \mapsto s|_V^U$.*

Las anteriores asignaciones de flechas y objetos hacen de Γ_p un funtor contravariante $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to$ **Set**, es decir, un prehaz sobre X; más aún, Γ_p resulta ser un haz sobre X.

Proposición 3.0.3. *Para cada manojo $p : Y \to X$, Γ_p es un haz sobre X.*

Prueba.

- La prueba de que Γ_p es un prehaz sobre X es similar a la que se da para la Proposición (1.1.1).

- Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U. El siguiente diagrama en **Set** es un igualador:

$$\Gamma_p U \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} \Gamma_p(U_i \cap U_j)$$

  La prueba de esto es similar a la que se da para la Proposición (1.3.1), sumada al siguiente hecho: dada una familia $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma_p U$, se tiene $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U,X}$: dada $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$; como $g_j : U_j \to Y$ es una sección transversal de p sobre U_j, se tiene

$p \circ g_j = \iota_{U_j,X}$, y por tanto

$$
\begin{aligned}
\left(p \circ \bigcup_{i\in I} g_i\right)(x) &= p\left(\bigcup_{i\in I} g_i(x)\right)\\
&= p(g_j(x))\\
&= \iota_{U_j,X}(x)\\
&= x\\
&= \iota_{U,X}(x);
\end{aligned}
$$

con esto $p \circ \bigcup_{i\in I} g_i = \iota_{U,X}$. Lo anterior se hace para garantizar $\bigcup_{i\in I} g_i \in \Gamma_p U$.

Por tanto Γ_p es un haz sobre X. □

A los haces del tipo Γ_p, con $p : Y \to X$ un manojo sobre X, los llamamos *haces de secciones transversales* sobre X. En ocaciones denotamos ΓY en lugar de Γ_p. Obtenemos por cada $p \in \mathbf{Top}/X$ un objeto $\Gamma_p \in \mathrm{Sh}(X)$. Ahora deseamos obtener, por cada flecha $f : \langle Y, p\rangle \to \langle Y', p'\rangle$ en $\mathbf{Top}/X$, una flecha $\Gamma_f : \Gamma_p \to \Gamma'_p$ de $\mathrm{Sh}(X)$, es decir, una transformación natural entre los funtores $\Gamma_p, \Gamma'_p : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$; para esto necesitamos asignar, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$, una función $\Gamma_f U$ entre los conjuntos $\Gamma_p U$ y $\Gamma'_p U$, que además nos garantice que si $V \subseteq U$ es una flecha en $\mathcal{O}(X)$, entonces el siguiente diagrama de $\mathbf{Set}$ conmute:

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_p V \arrow[r, "\Gamma_f V"] & \Gamma_{p'} V \\
\Gamma_p U \arrow[u, "\Gamma_p(V\subseteq U)"] \arrow[r, "\Gamma_f U"'] & \Gamma_{p'} U \arrow[u, "\Gamma_{p'}(V\subseteq U)"']
\end{tikzcd}
$$

Notemos que la función $\Gamma_f U$ nos exige asignar a cada sección transversal s de p sobre U (i.e. $s : U \to Y$ es una función continua y $p \circ s = \iota_{U,X}$) una sección transversal $\Gamma_f U(s)$ de p' sobre U (i.e. una función continua $\Gamma_f U(s) : U \to Y'$ tal que $p' \circ \Gamma_f U(s) = \iota_{U,X}$). El siguiente diagrama que se forma en $\mathbf{Top}/X$

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y' \\
U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "\iota_{U,X}"'] & X \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}
$$

nos muestra que $f \circ s$ es una función continua de U en Y, y

$$
\begin{aligned}
p' \circ (f \circ s) &= (p' \circ f) \circ s\\
&= p \circ s\\
&= \iota_{U,X},
\end{aligned}
$$

sugiriéndonos tomar $\Gamma_f U(s) = f \circ s$. Con esto tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U))(s) &= \Gamma_f V(\Gamma_p(V \subseteq U)(s)) \\
&= \Gamma_f V(s|_V^U) \\
&= f \circ s|_V^U \\
&= f \circ (s \circ \iota_{V,U}) \\
&= (f \circ s) \circ \iota_{V,U} \\
&= (f \circ s)|_V^U \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(f \circ s) \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U)(s),
\end{aligned}$$

Y por tanto $\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U) = \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U$. Lo anterior prueba que Γ_f es una transformación natural, para cada flecha f en $\mathbf{Top}/X$. Estas asignaciones hacen de Γ un funtor de $\mathbf{Top}/X$ en $\mathrm{PreSh}(X)$ (de hecho, en $\mathrm{Sh}(X)$, pero las razones de tomar la categoría de prehaces sobre X como codominio de Γ se entenderán más adelante):

Proposición 3.0.4. *Las asignaciones $p \mapsto \Gamma_p$ para cada $p \in \mathbf{Top}/X$ y $f \mapsto \Gamma_f$ para cada flecha f en $\mathbf{Top}/X$, determinan un funtor $\Gamma : \mathbf{Top}/X \to \mathrm{PreSh}(X)$.*

Prueba.

- Veamos que Γ respeta identidades. Sea $\langle Y, p\rangle \in \mathbf{Top}/X$. Debemos ver $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$, donde 1_{Γ_p} es la transformación natural identidad del funtor Γ_p en sí mismo. Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$, tenemos que $\Gamma_{1_p} U$ es una función de $\Gamma_p U$ en $\Gamma_p U$ y $\Gamma_{1_p} U(s) = 1_p \circ s = s$; por tanto $\Gamma_{1_p} U = 1_{\Gamma_p U} = 1_{\Gamma_p} U$. Como lo anterior se tiene para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue que $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$.

- Veamos que Γ respeta composiciones. Supongamos que tenemos en $\mathbf{Top}/X$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g \circ f"'] & \\
& p' \arrow[dl, "g"] \\
p'' &
\end{tikzcd}$$

  y veamos que en $\mathrm{PreSh}(X)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p \arrow[dr, "\Gamma_f"] \arrow[dd, "\Gamma_{g \circ f}"'] & \\
& \Gamma_{p'} \arrow[dl, "\Gamma_g"] \\
\Gamma_{p''} &
\end{tikzcd}$$

Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$. Tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{g\circ f} U)(s) &= (g \circ f) \circ s \\
&= g \circ (f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_g U \circ \Gamma_f U)(s).
\end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g U \circ \Gamma_f U$; como esto vale para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g \circ \Gamma_f$.
Lo anterior prueba que Γ es un funtor de $\mathbf{Top}/X$ en $\mathrm{PreSh}(X)$. □

4 De prehaces a manojos

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Λ de la categoría $\mathrm{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X en la categoría $\mathbf{Top}/X$ de manojos sobre X.

4.1 Suelos, gérmenes y tallos

Iniciamos definiendo el "suelo" de un elemento de X respecto a un prehaz sobre X:

Definición 4.1.1 (P-suelo de x)**.** *Dados $x \in X$ y $P \in \mathrm{PreSh}(X)$, definimos el "P-suelo de x" (denotado como* $\text{P-Su}(x)$*) como el conjunto* $\{(U, s) \mid x \in U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$

Buscamos definir una relación de equivalencia sobre el suelo de cada elemento de X:

Definición 4.1.2. *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Definimos en* $\text{P-Su}(x)$ *la relación $\sim_{P,x}$ de la siguiente manera:*

Dados $(U, s), (V, t) \in \text{P-Su}(x)$, $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, si y sólo si, existe $W \in \mathcal{O}(X)$ tal que
$x \in W \subseteq U \cap V$ y $s|_W^U = t|_W^V$.

Si $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, decimos que (U, s) y (V, t) tienen el mismo P-germen en x.

La igualdad $s|_W^U = t|_W^V$ con $W \subseteq U \cap V$ nos recuerda la idea de "coincidir localmente" que se mostró en las motivaciones dadas en la primera sección.

Notemos que la condición $W \subseteq U \cap V$ se tiene si y sólo si $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$, y que en este caso $s|_W^U$ y $t|_W^V$ son elementos de $P(W)$, siempre que $s \in PU$ y $t \in PV$. De esta forma, podemos representar $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$ con el cumplimiento simultaneo de los dos siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
U & & \\
& W \arrow[ul] \arrow[dl] & x \arrow[l, "\in"'] \\
V & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
PU \arrow[dr] & s \arrow[l, "\in"'] & \\
& PW & s|_W^U = t|_W^V \arrow[l, "\in"'] \\
PV \arrow[ur] & t \arrow[l, "\in"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde el diagrama de la izquierda está en $\mathcal{O}(X)$, el de la derecha en Set y las flechas azules denotan pertenencia conjuntista.

En las dos anteriores definiciones, si es claro el prehaz P con el que se está trabajando, solemos denotar $\mathrm{Su}(x)$ y $\sim_x$ en lugar de P-Su(x) y $\sim_{P,x}$, respectivamente.

Proposición 4.1.3. *Para cualesquiera* $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ *y* $x \in X$*, la relación* $\sim_x$ *es de equivalencia sobre* $\mathrm{Su}(x)$*.*

Prueba. La reflexividad y simetría de $\sim_x$ se siguen directamente de la definición. Veamos que $\sim_x$ es transitiva. Sean $(T, r), (U, s), (V, t) \in \mathrm{Su}(x)$ tales que $(T, r) \sim_x (U, s)$ y $(U, s) \sim_x (V, t)$. Existen $W_1, W_2 \in \mathcal{O}(X)$ tales que $x \in W_1 \subseteq T \cap U$ y $x \in W_2 \subseteq U \cap V$. Además $r|^T_{W_1} = s|^U_{W_1}$ y $s|^U_{W_1} = t|^V_{W_2}$. Tenemos $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}(X)$ y $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq T \cap V$; se forma en $\mathcal{O}(X)$ el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T & & & \\
& W_1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
U & & W_1 \cap W_2 \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[uull, bend right] \arrow[ddll, bend left] & x \arrow[l, "\in"'] \\
& W_2 \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
V & & &
\end{tikzcd}$$

Como P es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**, obtenemos en **Set** el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
PT \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
& PW_1 \arrow[dr] & \\
PU \arrow[ur] \arrow[dr] & & P(W_1 \cap W_2) \\
& PW_2 \arrow[ur] & \\
PV \arrow[ur] \arrow[uurr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Siguiéndolo tenemos que

$$\begin{aligned} r|^{T}_{W_1\cap W_2} &= (r|^{T}_{W_1})|^{W_1}_{W_1\cap W_2} \\ &= (s|^{U}_{W_1})|^{W_1}_{W_1\cap W_2} \\ &= s|^{U}_{W_1\cap W_2} \\ &= (s|^{U}_{W_2})|^{W_2}_{W_1\cap W_2} \\ &= (t|^{V}_{W_2})|^{W_2}_{W_1\cap W_2} \\ &= t|^{V}_{W_1\cap W_2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $(T, r) \sim_x (V, t)$ y $\sim_x$ es transitiva. Obtenemos que $\sim_x$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Su}(x)$. $\square$

Ahora consideramos las clases de equivalencia generadas por la relación de tener el mismo germen en un punto:

Definición 4.1.4 (Germen en un punto)**.** *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Para cada $(U, s) \in \mathrm{Su}(x)$, la clase de equivalencia de (U, s) respecto a $\sim_{P,x}$ se denota por* $\text{P-germ}_x s_U$*, y la llamamos el germen de (U, s) en x.*

Nuevamente, si por el contexto es claro con qué prehaz estamos trabajando, puede omitirse el "$P-$" en la anterior definición.

El siguiente lema, que será utilizado más adelante, nos muestra que el germen de un elemento se conserva bajo restricciones; propiedad que en efecto concuerda con la intuición desarrollada hasta el momento.

Lema 4.1.5. *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $U, V \in \mathcal{O}(X)$ con $V \subseteq U$ y $s \in PU$. Si $x \in V$ entonces* $\mathrm{germ}_x s_U = \mathrm{germ}_x (s|^{U}_{V})_V$.

Prueba. Supongamos que $x \in V$; en particular $x \in V \subseteq U \cap V$. Tenemos los diagramas (izquierda en $\mathcal{O}(X)$ y derecha en **Set**):

$$\begin{tikzcd} U & \\ & V \arrow[ul, "U\subseteq V"'] \arrow[dl, "V\subseteq V"] \\ V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PU \arrow[dr, "P(U\subseteq V)"] & \\ & PV \\ PV \arrow[ur, "P(V\subseteq V)"'] & \end{tikzcd}$$

Como $V \subseteq V$ es la flecha identidad de V, y P es en particular un funtor, entonces $P(V \subseteq V)$ es la flecha identidad de PV; como $s \in PU$ entonces $P(U \subseteq V)(s) = s|^{U}_{V} \in PV$, luego

$$s|^{U}_{V} = P(V \subseteq V)(s|^{U}_{V}) = (s|^{U}_{V})|^{V}_{V}.$$

Luego $(s, U) \sim_x (s|^{U}_{V}, V)$, de modo que las respectivas clases de equivalencia son iguales, es decir, $\mathrm{germ}_x s_U = \mathrm{germ}_x (s|^{U}_{V})_V$. $\square$

Al pasar al cociente por la relación de equivalencia de "tener el mismo germen", obtenemos el tallo (stalk en inglés) de un prehaz en un punto dado:

Definición 4.1.6 (Tallo en un punto)**.** *Sean* $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ *y* $x \in X$*. Al conjunto cociente*

$$P_x := \text{P-Su}(x)/\sim_x = \{\text{P-germ}_x s_U \mid (U,s) \in \text{P-Su}(x)\}$$

lo llamamos el tallo de P *en* x*.*

Los tallos de un prehaz no son necesariamente disyuntos; ello lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.7. *Tomemos* $X = \{a,b\}$ *(con* $a \neq b$*) dotado con la topología trivial* $\tau = \{\phi, X\}$*,* C *el haz de funciones continuas sobre* $\mathbb{R}$ *y* $f : X \to \mathbb{R}$ *la función constante en* 0 *(*$f(a) = f(b) = 0$*). Las únicas funciones continuas de* X *en* $\mathbb{R}$ *son las constantes, es decir* $CX = \{g : X \to \mathbb{R} \mid g(a) = f(a)\}$*. Notemos que*

$$\begin{aligned}\mathrm{Su}(a) &= \left\{(U,g) \mid a \in U \overset{ab}{\subseteq} X; g \in CU\right\} \\ &= \{(X,g) \mid g : X \to \mathbb{R} \text{ es continua}\} \\ &= \{(X,g) \mid g(a) = g(b)\}\,;\end{aligned}$$

del mismo modo se llega a $\mathrm{Su}(b) = \{(X,g) \mid g(a) = g(b)\}$*, y por tanto* $\mathrm{Su}(a) = \mathrm{Su}(b)$*. Sea* $(X,g) \in \mathrm{germ}_a f_X$*. Entonces* $(X,g) \in \mathrm{Su}(a) = \mathrm{Su}(b)$ *y* $(X,g) \sim_a (X,f)$ *y por tanto existe* $W \overset{ab}{\subseteq} X$ *tal que* $a \in W \overset{ab}{\subseteq} X$ *y* $g|_W^X = f|_W^X$*; pero como el único abierto no vacío de* X *es* X*, tenemos* $W = X$ *y* $f = f|_X^X = g|_X^X = g$*. De este modo* $\mathrm{germ}_a f_X = \{(X,f)\}$*. Análogamente se llega a* $\mathrm{germ}_b f_X = \{(X,f)\}$*. Con lo anterior,* $\mathrm{germ}_a f_X \in C_a \cap C_b$*, esto es,* C_a *y* C_b *no son disyuntos para* $a \neq b$*. Por lo tanto los tallos del haz* C *no son disyuntos.*

4.2 El manojo $\langle \Lambda_P, \mathfrak{p} \rangle$

Nos interesa forzar a los tallos de un prehaz a que tengan intersección vacía; para esto tomamos su unión disyunta (que resulta ser el coproducto de los tallos en la categoría **Set**):

Definición 4.2.1. *Sea* $P \in \mathrm{PreSh}(X)$*. Denotamos por* Λ_P *a la unión disyunta de los tallos de* P *en los elementos de* X*:*

$$\begin{aligned}\Lambda_P &:= \coprod_{x \in X} P_x \\ &= \bigcup_{x \in X} (P_x \times \{x\}) \\ &= \{(\text{P-germ}_x s_U, x) \mid x \in X; (U,s) \in \text{P-Su}(x)\}\,.\end{aligned}$$

Queremos obtener por cada prehaz sobre X un manojo sobre X; el conjunto Λ_P es el primer paso para esto; ahora definimos una función de dicho conjunto en X:

Definición 4.2.2. *Sea* $P \in \mathrm{PreSh}(X)$*. Definimos la función* $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ *mediante* $\mathfrak{p}(\text{P-germ}_x s_U, x) = x$ *para cada* $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$*, y la llamamos la función canónica de* Λ_P *en* X*.*

Para que $\mathfrak{p}$ represente un manojo sobre X, debemos dotar a Λ_P de una topología; con este fin introducimos una nueva familia de funciones:

Definición 4.2.3. *Para cualesquiera $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$, definimos la función $\dot{s} : U \to \Lambda_P$ mediante $\dot{s}(x) = (\text{P-germ}_x s_U, x)$ para cada $x \in U$.*

Para cada función $\dot{s}$, el siguiente diagrama en **Set** es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \Lambda_P \arrow[d, "\mathfrak{p}"] \\ U \arrow[ur, "\dot{s}"] \arrow[r, hook, "\iota_{U,X}"'] & X \end{tikzcd}$$

Este diagrama nos recuerda las secciones transversales sobre un manojo. Deseamos que la topología que asignemos a Λ_P haga de cada función $\dot{s}$ una sección transversal sobre $\mathfrak{p}$.

Proposición 4.2.4. *Sea $P \in \text{PreSh}(X)$. El conjunto*

$$\mathcal{B}_{\Lambda_P} := \{\dot{s}(U) \mid U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$$

es base para una topología sobre Λ_P.

Prueba. Hacemos uso de la caracterización dada en la Proposición 6.0.4.

- Veamos que $\bigcup \mathcal{B}_{\Lambda_P} = \Lambda_P$, es decir,

$$\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ s \in PU}} \dot{s}(U) = \Lambda_P.$$

  La contenencia $\subseteq$ es inmediata, pues $\dot{s}(U) \subseteq \Lambda_P$ para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$. Ahora, sea $z \in \Lambda_P$. Existen $y \in X$ y $(V, t) \in \text{Su}(y)$ tales que $z = (\text{germ}_y t_V, y)$. Tenemos $y \in V \in \mathcal{O}(X)$ y $t \in PV$; como $\dot{t}_V(y) = (\text{germ}_y t_V, y) = z$, tenemos $z \in \dot{t}(V) \subseteq \bigcup \dot{s}(U)$; esto nos da la contenencia $\supseteq$. Obtenemos que Λ_P es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$.

- Ahora, sean $A, B \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$ y probemos que $A \cap B$ es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Existen $T, V \in \mathcal{O}(X), t \in PT$ y $r \in PV$ tales que $A = \dot{t}(T)$ y $B = \dot{r}(V)$. Si $A \cap B = \phi$, entonces $A \cap B$ es la unión vacía de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Supongamos que $A \cap B \neq \phi$. Dado

$$z \in A \cap B = \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = \{(\text{germ}_x t_T, x) \mid x \in T\} \cap \{(\text{germ}_x r_V, x) \mid x \in V\},$$

  existe $x \in T \cap V \in \mathcal{O}(X)$ tal que $z = (germ_x t_T, x) = (germ_x r_V, x)$; luego $germ_x t_T = germ_x r_V$ y $(T, t) \sim_x (V, r)$. Así, existe $W_z \in \mathcal{O}(X)$ tal que $x \in W_z \subseteq T \cap V$ y $t|^T_{W_z} = r|^V_{W_z} \in PW_z$. Probemos que

$$A \cap B = \bigcup_{z \in A \cap B} (\dot{t|^T_{W_z}})(W_z).$$

($\subseteq$) Sea $\omega \in A \cap B$. Existe $x \in W_\omega$ tal que $\omega = (\text{germ}_x t_T, x)$. Como, por el Lema 4.1.5 se tiene $\text{germ}_x t_T = \text{germ}_x(t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}$, entonces

$$\begin{aligned}\omega &= (\text{germ}_x t_T, x)\\ &= (\text{germ}_x(t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}, x)\\ &= (t\dot{|}^T_{W_\omega})_{W_\omega}(x)\end{aligned}$$

con $x \in W_\omega$; así,

$$\omega \in (t\dot{|}^T_{W_\omega})(W_\omega)$$

con $\omega \in A \cap B$, luego

$$\omega \in \bigcup_{z \in A \cap B} (t\dot{|}^T_{W_z})(W_z),$$

y con esto,

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{z \in A \cap B} (t\dot{|}^T_{W_z})(W_z).$$

($\supseteq$) Sea $y \in \bigcup_{z \in A \cap B} (t\dot{|}^T_{W_z})(W_z)$. Existe $\omega \in A \cap B$ tal que $y \in (t\dot{|}^T_{W_\omega})(W_\omega)$, de modo que existe $x \in W_\omega$ tal que $y = (t\dot{|}^T_{W_\omega})(x) = (\text{germ}_x(t|^T_{W_\omega}), x)$ con $W_\omega \subseteq T \cap V$ y $t|^T_{W_\omega} = r|^V_{W_\omega}$, con lo cual $(T,t) \sim_x (V,r)$ y $\text{germ}_x t_T = \text{germ}_x r_V$. Como $\text{germ}_x t_T = germ_x(t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}$, tenemos

$$\begin{aligned}y &= (\text{germ}_x(t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}, x)\\ &= (\text{germ}_x t_T, x)\\ &= (\text{germ}_x r_V, x),\end{aligned}$$

es decir $y = \dot{t}(x) = \dot{r}(x)$ con $x \in W_\omega \subseteq T \cap V$, de modo que $y \in \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = A \cap B$. Obtenemos $\bigcup_{z \in A \cap B} (t\dot{|}^T_{W_z})(W_z) \subseteq A \cap B$.

Así, $A \cap B = \bigcup_{z \in A \cap B} (t\dot{|}^T_{W_z})(W_z)$, y para cada $z \in A \cap B$, $(t\dot{|}^T_{W_z})(W_z) \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$; es decir, la intersección de dos elementos de Λ_P es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Concluimos que $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ es base para una topología sobre Λ_P.

□

Teniendo en cuenta la anterior proposición, a partir de ahora consideramos, para cada prehaz P sobre X, a Λ_P como espacio topológico, con la topología generada por $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ (es decir, aquella que tiene por conjuntos abiertos todas las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$). Igualmente, cada $U \in \mathcal{O}(X)$ se considera con la topología de subespacio heredada de X.

Las siguientes proposiciones nos muestran, respectivamente, que hemos logrado obtener, con $(\Lambda_P, \mathfrak{p})$, un manojo sobre X para cada $P \in \text{PreSh}(X)$, y que hemos cumplido nuestro propósito de que cada función del tipo $\dot{s}$ sea una sección transversal sobre $\mathfrak{p}$.

Proposición 4.2.5. *Sea $P \in \text{PreSh}(X)$. La función $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ es continua.*

Prueba. Probemos que $\mathfrak{p}$ devuelve abiertos de X en abiertos de Λ_P por la imagen inversa. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$ y $z \in \mathfrak{p}^{-1}(U) \subseteq \Lambda$. Por la definición de Λ_P, existen $x \in X$ y $(V, t) \in \mathrm{Su}(x)$ (i.e. $x \in V \overset{ab}{\subseteq} X$ y $t \in PV$), tales que $z = (\mathrm{germ}_x t_V, x)$; así, $x = \mathfrak{p}(z) \in U$ y $x \in U \cap V$.

- Probemos $z \in (\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U \cap V) \subseteq \mathfrak{p}^{-1}(U)$. Como $x \in U \cap V$ y

$$\begin{aligned}(\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(x) &= (\mathrm{germ}_x (t|_{U\cap V}^{V})_{U\cap V}, x)\\ &= (\mathrm{germ}_x t_V, x)\\ &= z,\end{aligned}$$

  luego $z \in (\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U \cap V)$. Ahora, sea $w \in (\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U \cap V)$. Existe $y \in U \cap V$ tal que $w = (\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(y) = (\mathrm{germ}_y (t|_{U\cap V}^{V})_{U\cap V}, y) = (\mathrm{germ}_y t_V, y)$, luego $\mathfrak{p}(w) = \mathfrak{p}(\mathrm{germ}_y t_V, y) = y$, con $y \in U$, de modo que $w \in \mathfrak{p}^{-1}(U)$. Así, $(\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U \cap V) \subseteq \mathfrak{p}^{-1}(U)$.

Notemos que $(\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U\cap V) \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$, luego $(\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U\cap V) \overset{ab}{\subseteq} \Lambda_P$. Como $z \in (\dot{t|_{U\cap V}^{V}})(U\cap V) \subseteq \mathfrak{p}^{-1}(U)$, hemos probado que $\mathfrak{p}^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} \Lambda_P$. Concluimos que $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ es una función continua. $\square$

Proposición 4.2.6. *Sea $P \in \mathrm{PreSh}(X)$. Para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ y cada $s \in PU$ se tiene que la función $\dot{s} : U \to \Lambda_P$ es continua. Además $\mathfrak{p} \circ \dot{s} = \iota_{U,X}$.*

Prueba. Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$ cualesquiera. Veamos que $\dot{s} : U \to \Lambda_P$ devuelve abiertos de Λ_P en abiertos de U por la imagen recíproca. Sea $\omega \overset{ab}{\subseteq} \Lambda_P$. Existen $\{V_i\}_{i\in I}$ familia de abiertos de X y $\{t_i\}_{i\in I}$ con $t_i \in PV_i$ para cada $i \in I$, tales que $\omega = \bigcup_{i\in I} \dot{t_i}(V_i)$. Ahora, sea $x \in \dot{s}^{-1}(\omega)$, y probemos que x tiene una vecindad abierta (en X) contenida en $\dot{s}^{-1}(\omega)$. Tenemos $\dot{s}(x) \in \omega = \bigcup_{i\in I} (\dot{t_i})(V_i)$, de modo que existe $j \in J$ tal que $\dot{s}(x) \in (\dot{t_j})(V_j)$, luego, existe $y \in V_j$ tal que $\dot{s}(x) = (\dot{t_j})(y)$, es decir, $(\mathrm{germ}_x s_U, x) = (\mathrm{germ}_y (t_j)_{V_j}, y)$; así $x = y$, y, $x \in U \cap V$ y $\mathrm{germ}_x s_U = \mathrm{germ}_x (t_j)_{V_j}$, luego $(U, s) \sim_x (V_j, t_j)$, es decir, existe $W \in \mathcal{O}(X)$ con $x \in W \subseteq U \cap V_j$ tal que $s|_W^U = t|_W^{V_j}$. Tomemos $a \in W$. Inmediatamente tenemos $(U, s) \sim_a (V_j, t_j)$, es decir, $\mathrm{germ}_a s_U = \mathrm{germ}_a (T_j)_{V_j}$ y $\dot{s}(a) = (\dot{t_j})(a)$ con $a \in V_j$, luego $\dot{s}(a) \in (\dot{t_j})(V_j)$ con $j \in I$, así que $\dot{s}(a) \in \bigcup_{i\in I} (\dot{t_i}) = \omega$, y $a \in \dot{s}^{-1}(\omega)$. Así $W \subseteq \dot{s}^{-1}(\omega)$, con $W \overset{ab}{\subseteq} X$ y $W \subseteq U$, es decir, $W \overset{ab}{\subseteq} U$, y $x \in W$. Esto prueba que $\dot{s}^{-1}(\omega) \overset{ab}{\subseteq} U$, y por tanto, que $\dot{s} : U \to \Lambda_P$ es continua. Además, dado $u \in U$ se tiene

$$(\mathfrak{p} \circ \dot{s})(u) = \mathfrak{p}(\dot{s}(u)) = \mathfrak{p}(\mathrm{germ}_u s_U, u) = u = \iota_{U,X}(u).$$

Por tanto $\mathfrak{p} \circ \dot{s} = \iota_{U,X}$. $\square$

Definición 4.2.7 (Manojo de gérmenes)**.** *Dado $P \in \mathrm{PreSh}(X)$, llamamos a $(\Lambda_P, \mathfrak{p})$ el manojo de gérmenes de P sobre X.*

Ahora probamos que $\mathfrak{p}$, aun más que una función continua, es un homeomorfismo local sobre X, y que por tanto Λ_P es un espacio étalé sobre X:

Lema 4.2.8. *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$, $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$. La función $\dot{s} : U \to \dot{s}(U) \subseteq \Lambda_P$ es abierta, inyectiva y tiene a $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}$ como inversa bilátera.*

Prueba.

- La propiedad de ser abierta de $\dot{s}$ se sigue directamente de la definición de la topología de Λ_P.

- Dados $x, y \in U$, si $\dot{s}(x) = \dot{s}(y)$ entonces $(\mathrm{germ}_x s_U, x) = (\mathrm{germ}_y s_U, y)$ y $x = y$. Por tanto $\dot{s}$ es inyectiva.

- Dado $y \in \dot{s}(U)$, se tiene $y = \dot{s}(x) = ((\mathrm{germ}_x s_U), x)$ para algún $x \in U$. Entonces $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}(y) = \mathfrak{p}(\mathrm{germ}_x s_U, x) = x \in U$. Por tanto $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}$ es una función sobreyectiva de $\dot{s}(U)$ en U.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend left, "\dot{s}"] & \dot{s}(U) \arrow[l, bend left, "\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}"] \end{tikzcd}$$

Dado $x \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}(\dot{s}(x)) &= \mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}(\mathrm{germ}_x s_U, x) \\ &= x \\ &= 1_U(x), \end{aligned}$$

así que $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P} \circ \dot{s} = 1_U$. Dado $z \in \dot{s}(U)$, existe $w \in U$ tal que $z = \dot{s}(w) = (\mathrm{germ}_w s_U, w)$; entonces

$$\begin{aligned} \dot{s}(\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}(\mathrm{germ}_w s_U, w)) &= \dot{s}(w) \\ &= w \\ &= 1_{\dot{s}(U)}(y), \end{aligned}$$

luego $\dot{s} \circ \mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P} = 1_{\dot{s}(U)}$. Obtenemos que $\dot{s} : U \to \dot{s}(U)$ tiene a $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}$ como inversa bilátera.

$\square$

Corolario 4.2.9. *Sea $P \in \mathrm{PreSh}(X)$. El manojo $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ es un homeomorfismo local.*

Prueba. Sea $z \in \Lambda_P$. Existen $x \in X$ y $(U, s) \in \mathrm{Su}(x)(U \in \mathcal{O}(X), x \in U, s \in PU)$ tales que $z = (\mathrm{germ}_x s_U, x)$.

- Tenemos $\dot{s}(U) \overset{ab}{\subseteq} \Lambda_P$, y como $x \in U$ y $\dot{s}(x) = (\mathrm{germ}_x s_U, x) = z$; entonces $z \in \dot{s}(U)$.

- $\mathfrak{p}(\dot{s}(U)) = \mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}(\dot{s}(U)) = U \overset{ab}{\subseteq} X$.

- Como $\mathfrak{p}$ es continua, su restricción $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P}$ es continua, y ésta tiene por inversa a la función continua $\dot{s}(U)$. Por tanto $\mathfrak{p}|_{\dot{s}(U)}^{\Lambda_P} : \dot{s}(U) \to U$ es un homeomorfismo. Obtenemos que $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ es un homeomorfismo local.

$\square$

4.3 El funtor Λ

Como hemos resaltado, obtenemos el manojo Λ_P sobre X, por cada prehaz P sobre X. Nuestro deseo es que esta asignación en objetos nos produzca un funtor $\Lambda : \mathrm{PreSh}(X) \to \mathbf{Top}/X$; surge la pregunta de qué flecha de $\mathbf{Top}/X$ asignar a una flecha $h : P \dot{\to} Q$ en $\mathrm{PreSh}(X)$.

Sea $h : P \dot{\to} Q$ una transformación natural entre prehaces sobre X; queremos definir $\Lambda_h : \Lambda_P \to \Lambda_Q$, de modo que Λ_h sea una función continua, y que $\mathfrak{q} \circ \Lambda_h = \mathfrak{p}$, es decir, que el siguiente diagrama en $\mathbf{Top}$ conmute:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_P \arrow[r, "\Lambda_h"] \arrow[dr, "\mathfrak{p}"'] & \Lambda_Q \arrow[d, "\mathfrak{q}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Recordemos que

$$\Lambda_P = \left\{ (\text{P-germ}_x s_U, x) \mid x \in U \overset{ab}{\subseteq} X, s \in PU \right\}$$

y

$$\Lambda_Q = \left\{ (\text{Q-germ}_x s_U, x) \mid x \in U \overset{ab}{\subseteq} X, s \in QU \right\}.$$

Podría pensarse $\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x) = (\text{Q-germ}_x s_U, x)$ (para cada $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$) como una asignación natural; sin embargo, el no uso de la transformación natural h genera dudas. Otro camino que puede pensarse es el siguiente: dado $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$, como $U \in \mathcal{O}(X)$ y $h : \Lambda_P \dot{\to} \Lambda_Q$ es una transformación natural entre los funtores $\Lambda_P, \Lambda_Q : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, tenemos la función de conjuntos $h_U : PU \to QU$; como $s \in PU$ entonces $h_U s \in QU$, y $\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x) = (\text{Q-germ}_x (h_U s)_U, x)$ (para cada $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$) nos sugiere otra definición de Λ_h. Como la anterior función trabaja con clases de equivalencia (los gérmenes sobre cada punto), debemos garantizar que está bien definida.

- Sean $x \in X; (U, s), (V, t) \in \text{P-Su}(X)$. Supongamos $\text{P-germ}_x s_U = \text{P-germ}_x t_V$ y garanticemos $\text{Q-germ}_x (h_U s)_U = \text{Q-germ}_x (h_V t)_V$. Tenemos $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, luego existe $W \overset{ab}{\subseteq} X$ tal que $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$, con $x \in W$, y además $s|_W^U = t|_W^V$. Tenemos en $\mathcal{O}(X)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} U & \\ & W \arrow[ul] \arrow[dl] \\ V & \end{tikzcd}$$

  Como $h : P \dot{\to} Q$ es una transformación natural, tenemos en $\mathbf{Set}$ el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "(\ )|_W^U"'] & & QU \arrow[dr, "(\ )|_W^U"] & \\ & PW \arrow[rr, "h_W"] & & QW \\ PV \arrow[rr, "h_V"] \arrow[ur, "(\ )|_W^V"] & & QV \arrow[ur, "(\ )|_W^V"'] & \end{tikzcd}$$

Como $s \in PU, t \in PV$ y $s|^U_W = t|^V_W$, siguiendo en anterior diagrama vemos que:

$$(h_U s)|^U_W = h_W(s|^U_W) = h_W(t|^V_W) = (h_V t)|^V_W,$$

de modo que $(U, h_U s) \sim_{Q,x} (V, h_V t)$ y $\text{Q-germ}_x(h_U s)_U = \text{Q-germ}_x(h_V t)_V$. Con esto, Λ_h está bien definida, pues dados $(\text{P-germ}_x s_U, x), (\text{P-germ}_x t_V, x) \in \Lambda_P$, si $(\text{P-germ}_x s_U, x) = (\text{P-germ}_x t_V, x)$ entonces

$$\begin{aligned}\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x) &= (\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x)\\ &= (\text{Q-germ}_x(H_V t)_V, x)\\ &= \Lambda_h(\text{P-germ}_x t_V, x).\end{aligned}$$

Ahora veamos que Λ_h es continua:

- Probamos que Λ_h es continua puntualmente. Sea $(\text{P-germ}_x s_u, x) \in \Lambda_P$ (tenemos $x \in U \overset{ab}{\subseteq} (X), s \in PU$). Tenemos $\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x) = (\text{Q-germ}_x(h_U s), x)$. Sea $\dot{t}(V) \in \mathcal{B}_{\Lambda_Q}$ una vecindad abierta básica de $(\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x)$, es decir, $V \in \mathcal{O}(X)$, $t \in QV$ y $(\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x) \in \dot{t}_V(V)$, con lo cual existe $y \in V$ tal que:

$$\begin{aligned}(\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x) &= \dot{t}_V(y)\\ &= (\text{Q-germ}_y t_V, y).\end{aligned}$$

  De este modo, $x = y$, $x \in V$ y $\text{Q-germ}_x(h_U s)_U = \text{Q-germ}_x t_V$, es decir, $(U, h_U s) \sim_{Q,x} (V, t)$; así, existe $W \in \mathcal{O}(X)$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$ y $(h_U s)|^U_W = t|^V_W$. Como $h : P \dot{\to} Q$ es una transformación natural y $W \subseteq U$, tenemos en **Set** el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "(\ )|^U_W"'] & QU \arrow[d, "(\ )|^U_W"] \\ PW \arrow[r, "h_W"'] & QW \end{tikzcd}$$

  Como $s \in PU$,

$$h_W(s|^U_W) = (h_U s)|^U_W = t|^V_W.$$

  Notemos que $x \in W$ y

$$(\dot{s|^U_W})_W(x) = (\text{P-germ}_x(s|^U_W)_W, x) = (\text{P-germ}_x s_U, x),$$

  y por tanto $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in (\dot{s|^U_W})(W)$. Además $\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x) = (\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x)$, con lo cual $(\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x) \in \Lambda_h((\dot{s|^U_W})(W))$. Ahora, sea $z \in \Lambda_h((\dot{s|^U_W})(W))$. Existe $\tilde{w} \in (\dot{s|^U_W})(W)$ tal que $z = \Lambda_h(\tilde{w})$. Existe $w \in W \subseteq V$ tal que $\tilde{w} = (\dot{s|^U_W})(w) = (\text{P-germ}_w(s|^U_W), w)$.

Por ende

$$\begin{aligned}
z &= \Lambda_h(\tilde{w}) \\
&= \Lambda_h(\text{P-germ}_w(s|^U_W), w) \\
&= (\text{Q-germ}_w(h_W(s|^U_W))_W, w) \\
&= (\text{Q-germ}_w(t|^V_W)_W, w) \\
&= (\text{Q-germ}_w t_V, w) \\
&= \dot{t}_V(w)
\end{aligned}$$

y $w \in V$, con lo cual $z \in \dot{t}_V(V)$ y $\Lambda_h(\dot{(s|^U_W)}(W)) \subseteq \dot{t}_V(V)$. Como $\dot{(s|^U_W)}(W) \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$, esto completa la prueba de que $\Lambda_h : \Lambda_P \to \Lambda_Q$ es una función continua.

- Sumado a lo anterior, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_P \arrow[r, "\Lambda_h"] \arrow[dr, "\mathfrak{p}"'] & \Lambda_Q \arrow[d, "\mathfrak{q}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

pues, dado $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}(\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x)) &= \mathfrak{q}(\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x) \\
&= x \\
&= \mathfrak{p}(\text{P-germ}_x s_U, x),
\end{aligned}$$

luego $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \circ \Lambda_h$.

Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 4.3.1. *Para cada* $h : P \to Q$ *en* $\text{PreSh}(X)$*, la función*

$$\Lambda_h : \Lambda_P \to \Lambda_Q : (\text{P-germ}_x s_U, x) \mapsto (\text{Q-germ}_x(h_U s)_U, x)$$

es una flecha de $(\Lambda_P, \mathfrak{p}) \to (\Lambda_Q, \mathfrak{q})$ *en* $\mathbf{Top}/X$*.*

Con la siguiente proposición alcanzamos el objetivo de la presente sección:

Proposición 4.3.2. *La función* Λ *que a cada* $P \in \text{PreSh}(X)$ *le asigna el manojo* $\Lambda_P \in \mathbf{Top}/X$*, y a cada* $h : P \dot{\to} Q$ *en* $\text{PreSh}(X)$ *le asigna la flecha* $\Lambda_h : \Lambda_P \to \Lambda_Q$ *en* $\mathbf{Top}/X$*, es un funtor covariante de* $\text{PreSh}(X)$ *en* $\mathbf{Top}/X$*.*

Prueba. • Veamos que Λ respeta identidades. Dado $P \in \text{PreSh}(X)$, para cada $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1_P}(\text{P-germ}_x s_U) &= (\text{P-germ}_x((1_P)_U s)_U, x) \\
&= (\text{P-germ}_x(1_{PU} s)_U, x) \\
&= (\text{P-germ}_x s_U, x) \\
&= 1_{\Lambda_P}(\text{P-germ}_x s_U, x),
\end{aligned}$$

y por tanto $\Lambda_{1_P} = 1_{\Lambda_P}$.

- Veamos que Λ respeta composiciones. Supongamos que tenemos flechas y objetos de $\mathrm{PreSh}(X)$ en la disposición

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "k\bullet h"'] & \\
& Q \arrow[dl, "k"] \\
R &
\end{tikzcd}$$

y probemos que el siguiente diagrama en $\mathbf{Top}/X$ conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_P \arrow[dr, "\Lambda_h"] \arrow[dd, "\Lambda_{k\bullet h}"'] & \\
& \Lambda_Q \arrow[dl, "\Lambda_k"] \\
\Lambda_R &
\end{tikzcd}$$

Dado $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$, tenemos

$$\begin{aligned}
(\Lambda_k \circ \Lambda_h)(\text{P-germ}_x s_U, x) &= \Lambda_k(\Lambda_h(\text{P-germ}_x s_U, x)) \\
&= \Lambda_k(\text{Q-germ}_x (h_U s)_U, x) \\
&= (\text{R-germ}_x (k_U(h_U s))_U, x) \\
&= (\text{R-germ}_x ((k_U \circ h_U)(s))_U, x) \\
&= (\text{R-germ}_x ((k \bullet h)_U(s))_U, x) \\
&= \Lambda_{k\bullet h}(\text{P-germ}_x s_U, x),
\end{aligned}$$

y con esto $\Lambda_k \circ \Lambda_h = \Lambda_{k\bullet h}$.

Concluimos que $\Lambda : \mathrm{PreSh}(X) \to \mathbf{Top}/X$ es un funtor. □

5 Diálogo entre funtores

En la presente sección, usamos la teoría de funtores adjuntos para probar que Λ y Γ determinan una adjunción, y también para, a partir de esto, derivar la equivalencia de las categorías $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathbf{Etale}(X)$ para cada espacio topológico X, lo cual constituye nuestro objetivo principal. Los resultados que usemos acerca de la teoría de funtores adjuntos se presentarán sin prueba (pues su estudio no constituye directamente un propósito del presente escrito; para referencia puede visitarse [Mac Lane, 1998, Chapter 4], por ejemplo), y éstos son esencialmente dos:

Teorema 5.0.1. *Sean B, A categorías y $F : B \to A$, $G : A \to B$ funtores. Una adjunción entre F y G queda completamente determinada por transformaciones naturales $\eta : 1_B \dot{\to} GF$ y $\epsilon : FG \dot{\to} 1_A$, que satisfacen que las siguientes composiciones sean identidades*

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G \qquad , \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

de G y F, respectivamente, donde:

- $\eta G : G \dot{\to} GFG$ *es la transformación natural que a cada $a \in A$ le asigna la flecha η_{Ga} de B.*
- $G\epsilon : GFG \dot{\to} G$ *es la transformación natural que a cada $a \in A$ le asigna la flecha $G\eta_a : GFGa \to Ga$ en B.*
- $F\eta : F \dot{\to} FGF$ *es la transformación natural que a cada $b \in B$ le asigna la flecha $F\eta_b : F_b \to FGF_b$ en A.*
- $\epsilon F : FGF \dot{\to} F$ *es la transformación natural que a cada $b \in B$ le asigna la flecha $\epsilon_{Fb} : FGFb \to Fb$ en A.*

A η y ϵ las llamamos respectivamente la unidad y counidad de la adjunción.

Lema 5.0.2. *Sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ categorías y $L : \mathcal{P} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{P}$ funtores adjuntos con unidad η y counidad ϵ que satisfacen las siguientes propiedades:*

(L1) *Para todo $B \in \mathcal{B}$, $\eta_{GB} : GB \to GLGB$ es un isomorfismo*

(L2) *Para todo $P \in \mathcal{P}$, $\epsilon_{LP} : LGLP \to LP$ es un isomorfismo.*

Sean $\mathcal{P}_0$ la subcategoría plena de $\mathcal{P}$ cuyos objetos son isomorfos a algún GB, y $\mathcal{B}_0$ la subcategoría plena de $\mathcal{B}$ cuyos objetos son isomorfos al algún LP. Entonces L y G se restringen a una equivalencia de dichas subcategorías, como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_0 \arrow[r, shift left, "L_0"] \arrow[d, "\iota_P"'] & \mathcal{B}_0 \arrow[l, shift left, "G_0"] \arrow[d, "\iota_B"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, shift left, "L"] & B \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las respectivas inclusiones.

Para poder aplicar estos teoremas a nuestros funtores de interés, comenzamos garantizando la existencia de η y ϵ como en el Teorema 5.0.1 para $\Lambda : \mathrm{PreSh}(X) \to \mathbf{Top}/X$ y $\Gamma : \mathbf{Top}/X \to \mathrm{PreSh}(X)$.

5.1 La transformación natural η

5.2 La transformación natural ϵ

6 Apéndice

Teorema 6.0.1 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente "condición de pegado": para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es una función continua de U en Y.*

Prueba.

- Veamos que f es en efecto una función de U en Y. Sea $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x)\rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y. Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f = \bigcup_{i\in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y\rangle \in f_j$ y $\langle x, y'\rangle \in f_k$, es decir $x \in I_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' \in f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y, es decir, f es una función de U en Y.

- Probemos que $f : U \to Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca . Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$:

  $\subseteq$: Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$.

  $\supseteq$: Sea $x \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

  Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \overset{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U.$$

  Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i\in I} f_i : U \to Y$ es continua.

□

Proposición 6.0.2. *Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y.*

Prueba.

- Probamos la continuidad de p puntualmente. Sean $y \in Y$ y $U \overset{ab}{\subseteq} X$ con $p(y) \in U$. Tenemos que $y \in V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $p(y) \in p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Tomando $W = p(V_y) \cap U$ se tiene $p(y) \in W \overset{ab}{\subseteq} X$. Además $W \subseteq p(V_y)$ y $W \subseteq U$. Como $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, entonces $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$, así que $y \in p^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} Y$; igualmente, $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$, lo cual prueba que p es continua en y. Como y es arbitraria en Y, obtenemos que $p : Y \to X$ es continua.

- Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$; probemos que $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Para cada $y \in V$ definimos $W_y = V_y \cap V \overset{ab}{\subseteq} V_y$. Como $p|_{V_y}^{V} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego $p(W_y) = (p|_{V_y}^{V})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$; como $p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ entonces $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ para cada $y \in V$, luego $\bigcup_{y\in V} p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Ya que
$$\begin{aligned}\bigcup_{y\in V} p(W_y) &= \bigcup_{y\in V} p(V \cap V_y)\\ &= p\left(\bigcup_{y\in V}(V \cap V_y)\right)\\ &= p\left(V \cap \bigcup_{y\in V} V_y\right)\\ &= p(V),\end{aligned}$$
pues $V \subseteq \bigcup_{y\in V} V_y$, entonces $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Obtenemos así que $p : Y \to X$ es una función abierta.
- Llamemos $\mathcal{B} = \left\{W \overset{ab}{\subseteq} Y \mid p(W) \overset{ab}{\subseteq} X,\ p|_W^Y : W \to p(W) \text{ es homeomorfismo}\right\}$ y probemos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y. Sean $V \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $y \in V$. Llamemos $W_y = V_y \cap V$, de modo que $y \in W_y \subseteq V$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $W_y \overset{ab}{\subseteq} Y$. Tenemos que $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo; como $W_y \overset{ab}{\subseteq} V_y$ y todo homeomorfismo es en particular una función abierta, obtenemos $p(W_y) = (p|_{V_y}^{Y})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$, de modo que $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$; además, ya que la restricción de homeomorfismos es un homeomorfismo, entonces $(p|_{V_y}^{Y})|_{W_y}^{V_y} = p|_{W_y}^{Y} : W_y \to p(W_y)$ es un homeomorfismo. Así, $W_y \in \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}$ es base para la topología de Y.

□

Proposición 6.0.3. *Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y\rangle$, sobre U. Entonces:*

(i) $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.

(ii) $s : U \to s(U)$ *es un homeomorfismo.*

(iii) $s(U)$ *es un subconjunto abierto de* Y.

Prueba. (i) Dado $x \in U$ tenemos
$$\begin{aligned}(p|_{s(U)}^{Y} \circ s)(x) &= p|_{s(U)}^{Y}(s(x))\\ &= p(s(x))\\ &= in_{U,X}(x)\\ &= x\\ &= 1_U(x),\end{aligned}$$

luego $p|^Y_{s(U)} \circ s = 1_U(x)$. Dado $y \in s(U)$, existe $z \in U$ tal que $y = s(z)$, y:

$$\begin{aligned}(s \circ p|^Y_{s(U)})(y) &= s(p|^Y_{s(U)}(y)) \\ &= s(p(y)) \\ &= s(p(s(z))) \\ &= s(z) \\ &= y,\end{aligned}$$

de modo que $s \circ p|^Y_{s(U)} = 1_{s(U)}$. Esto prueba *(i)*.

(ii) Sabemos que s es una función continua, y su inversa $p|^Y_{s(U)}$ es continua por ser la restricción de una función continua; por tanto, $s : U \to s(U)$ es un homeomorfismo.

(iii) Ahora veamos que $s(U) \overset{ab}{\subseteq} Y$. Sea $y \in s(U)$. Dado $x \in s^{-1}(V_y)$, tenemos $s(x) \in V_y$ y $x = p(s(x)) \in p(V_y)$; por tanto $s^{-1}(V_y) \subseteq p(V_y)$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $s : U \to Y$ es continua, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} U$; como $U \overset{ab}{\subseteq} X$, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ y $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$. Como $p|^Y_{V_y}$ es en particular continua, se tiene $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq} V_y$; como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq} Y$. Además, como $y \in s(U)$, se sigue que $s(p|^Y_{V_y}(y)) = s(p|^Y_{s(U)}(y)) = s(s^{-1}(y)) = y \in V_y$ y por tanto $y \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, nos falta probar que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$; para esto basta ver que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) = V_y \cap s(U)$:

$\subseteq$: Por definición sabemos que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y$. Sea $t \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Tenemos que $s(p|^Y_{V_y}(t)) \in V_y$ y $p|^Y_{V_y}(t) \in s^{-1}(V_y) \subseteq U$. Además,

$$p|^Y_{V_y}(s(p|^Y_{V_y}(t))) = p(s(p|^Y_{V_y}(t))) = p|^Y_{V_y}(t).$$

Como $p|^Y_{V_y}$ es en particular inyectiva, obtenemos $t = s(p|^Y_{V_y}(t))$; ya que $p|^Y_{V_y}(t) \in U$, se sigue $t \in s(U)$. Con lo anterior se tiene $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$ y por lo tanto $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y \cap s(U)$.

$\supseteq$: Sea $t \in V_y \cap s(U)$. Tenemos $p|^Y_{V_y}(t) = p(t) = p|^Y_{s(U)}(t)$, luego

$$s(p|^Y_{V_y}(t)) = s(p|^Y_{s(U)}(t)) = s(s^{-1}(t)) = t \in V_y,$$

de modo que $t \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, $V_y \cap s(U) \subseteq (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$.

□

Proposición 6.0.4. *Sea Σ una familia de subconjuntos de X. Se tiene que Σ es base para una topología sobre X, si y solo si, tanto X como la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ, es unión de elementos de Σ.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que Σ es base para una topología sobre X. Como X es abierto, es unión de elementos de Σ. Como los elementos de Σ son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de Σ es abierta y por tanto es unión de elementos de Σ.

($\Leftarrow$) Supongamos que X es unión de elementos de Σ y que la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ es unión de elementos de Σ. Sea τ_Σ el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de Σ. Veamos que τ_Σ es una topología sobre X:

- Como los elementos de Σ son subconjuntos de X, entonces la unión de elementos de Σ es subconjunto de X, de modo que τ_Σ es una familia de subconjuntos de X.
- X es unión de elementos de Σ, así que $X \in \tau_\Sigma$. El conjunto ϕ es la unión vacía de elementos de Σ, así que $\phi \in \tau_\Sigma$.
- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_Σ. Para cada $i \in I$ existe una familia $\left\{V_j^i\right\}_{j\in J}$ de elementos de Σ tal que $U_i = \bigcup_{j\in J} V_j^i$. Por tanto

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} U_i &= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} V_j^i\right)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} V_i^j,\end{aligned}$$

  luego $\bigcup_{i\in I} U_i$ es unión de elementos de Σ y por tanto pertenece a τ_Σ.
- Sean $U, V \in \tau_\Sigma$. Existen $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$, familias de elementos de Σ tales que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y $V = \bigcup_{j\in J} V_j$. Entonces

$$\begin{aligned}U\cap V &= U \cap \bigcup_{j\in J} V_j\\ &= \bigcup_{j\in J}(U\cap V_j)\\ &= \bigcup_{j\in J}\left(\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)\cap V_j\right)\\ &= \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(U_i\cap V_j)\right)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(U_i\cap V_j),\end{aligned}$$

  y $U_i \cap V_j \in \Sigma$ para cualesquiera $i \in I, j \in J$, así que $U \cap V$ es unión de elementos de Σ, es decir $U \cap V \in \tau_\Sigma$.

Lo anterior prueba que τ_Σ es una topología sobre X. El hecho de que Σ es base para τ_Σ es trivial, pues cada elemento de τ_Σ es unión de elementos de Σ.

□

Referencias

[Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.

[Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician.* Springer.

[Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic.* Springer-Verlag.

[Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology.* Springer Spektrum.

[Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático.* Editorial Universidad Nacional de Colombia.