Teoría de categorías (2024-I)
Trabajo de profundización

Dos aproximaciones equivalentes a la noción de haz

Juan Camilo Lozano Suárez [1]

Resumen. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

Palabras Clave. Haz; espacio étalé; homeomorfismo local; manojo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X, al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de U. Una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U, y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V^U : V \to \mathbb{R}$ (la restricción de f de U a V) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 2.0.1), un apropiado conocimiento local de U nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

[1]Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

(P2) Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f|_{U_i}^{U} : U_i \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces f es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X, y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante "$V \subseteq U$". Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U:

$$CU := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{array}{rrcl} C(V \subseteq U): & CU & \to & CV \\ & f & \mapsto & f|_V^U \end{array}$$

que a cada función continua de U en $\mathbb{R}$ le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V, que a su vez es una función continua de V en $\mathbb{R}$. Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U, $C(V \subseteq U) : CU \to CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

Prueba.

- Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{array}{rrcl} C(1_U): & CU & \longrightarrow & CU \\ & f & \longmapsto & f|_U^U = f \end{array}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W, $C(W \subseteq U) : CU \to CW$. Tenemos ademas en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \to CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz)**.** *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria $\boldsymbol{C}$, sean $f, g : A \to B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e\rangle$, con $E \in \boldsymbol{C}$ y $e : E \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u\rangle$ con $U \in \boldsymbol{C}$ y $u : U \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \to E$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $e \circ v = u$.*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como " diagrama igualador", se resume la anterior definición:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B. Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e\rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A:*

- *Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.*
- *Supongamos que existe $\langle U, u\rangle$ con $U \in$ **Set** y $u : U \to A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \to E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una fleca de $U \to E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.*

$\Diamond$

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por " igualador" tanto al par $\langle E, e\rangle$ como simplemente a la flecha e. Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

Prueba. Sean $\mathbf{C}$ una categoría, $f, g : A \to B$ flechas paralelas en $\mathbf{C}$ y $\langle E, e\rangle$ un igualador de f y g. Supongamos que existen flechas $i, j : F \to E$ en $\mathbf{C}$ tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "e\circ j = e\circ i"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g, existe una única flecha $k : F \to E$ en $\mathbf{C}$ tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i, pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en $\mathbf{C}$.

$\square$

Como en $\mathbf{Set}$, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en $\mathbf{Set}$ es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que en* $\mathbf{Set}$ el siguiente es un diagrama igualador:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ $(\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A}\rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g, con lo cual, existe una única flecha $v : F \to E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$.

$\square$

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro "ejemplo como motivación" (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena "condición de pegado", en el sentido de que las funciones $f|^U_{U_i}$ $(i \in I)$ se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|^U_{U_i}(x) = f(x) = f|^U_{U_j}(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\{f|^U_{U_i}\}_{i\in I}$. Notemos que $\{f|^U_{U_i}\}_{i\in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i\in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|^U_{U_i} \in CU_i$ y $f|^U_{U_j} \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|^U_{U_i})|^{U_i}_{U_i\cap U_j}, (f|^U_{U_j})|^{U_j}_{U_i\cap U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\left\{(f|^U_{U_i})|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$ y $\left\{(f|^U_{U_j})|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \to \prod_{i\in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Proposición 1.3.1. *En* **Set** *el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} CU_i \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba.

- Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\
&= \pi_1\left(\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}\right) \\
&= \left\{\left(f|_{U_i}^{U}\right)|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\
&= \left\{f|_{U_i\cap U_j}^{U}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\
&= \left\{(f|_{U_j}^{U})|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\
&= \pi_2\left(\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}\right) \\
&= \pi_2(e(f)) \\
&= (\pi_2 \circ e)(f),
\end{aligned}$$

  y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e\rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in$ **Set** y $u : X \to \prod_{i\in I} CU_i$ en **Set** tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
CU \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in I} CU_i \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j) \\
X \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & &
\end{tikzcd}$$

  Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i\in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \to \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\left\{g_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I} = \left\{g_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}$ y $g_i(x) = g_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 2.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i\in I} g_i$ es una función continua de U en $\mathbb{R}$, es decir,

$\bigcup_{i\in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \to CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i\in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned}(e \circ v)(g) &= e(v(g))\\ &= e(\bigcup_{i\in I} g_i)\\ &= \left\{ (\bigcup_{j\in I} g_j)|_{U_i}^{U} \right\}_{i\in I}\\ &= \{g_i\}_{i\in I}\\ &= u(g),\end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \to CU$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$. Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\{(v'(g))|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I} &= u(g)\\ &= e(v(g))\\ &= \left\{(v(g))|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I},\end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|_{U_i}^{U} = (v(g))|_{U_i}^{U}$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned}v'(g) &= \bigcup_{i\in I}(v'(g))|_{U_i}^{U}\\ &= \bigcup_{i\in I}(v(g))|_{U_i}^{U}\\ &= v(g),\end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba.

□

Notemos que la Proposición 1.2.4 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto U y el cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U (haciendo las respectivas modificaciones en la definición de e, π_1 y π_2). El hecho de que e sea el igualador de π_1 y π_2 nos traduce la "condición de pegado" que se satisface al restringir funciones continuas de U a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 2.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

Notación 1.4.1. *Dado X un espacio topológico y $P : \mathbb{O}(X)^{op} \to$ **Set** un funtor (es decir un prehaz sobre X) y dada la flecha $V \subseteq U$ en $\mathbb{O}(X)$, para toda $t \in PU$ denotamos $t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t)$.*

Ahora generalizamos las funciones e, π_1 y π_2 que se trabajaron en la Sección 1.3:

Definición 1.4.2 (Funciones canónicas)**.** *Sea P un prehaz sobre un espacio topológico X. Dados $U \in \mathbb{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, definimos las siguientes funciones:*

- $e : PU \to \prod_{i\in I} PU_i$ *que a cada $f \in PU$ le asigna la familia* $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ *le asigna la familia* $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ *le asigna la familia* $\left\{f_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Llamamos a e la función canónica de PU en $\prod_{i\in I} PU_i$ y a π_1 y π_2 las funciones canónicas de $\prod_{i\in I} PU_i$ en $\prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$.

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

Definición 1.4.3. *Un haz de conjuntos P sobre un espacio topológico X es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier $U \in \mathbb{O}(X)$ y cualquier cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{\ e\ } \prod_{i\in I} PU_i \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde e, π_1 y π_2 son las respectivas funciones canónicas.

En la anterior definición P es por tanto un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos, $\mathbb{F}$-álgebras, $\mathbb{F}$-módulos, etc (para un campo $\mathbb{F}$) obtenemos haces de anillos, de $\mathbb{F}$-álgebras, de $\mathbb{F}$-módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor C de nuestro "ejemplo como motivación", puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de $\mathbb{R}$-álgebras o $\mathbb{R}$-módulos al dotar cada conjunto CU ($U \in \mathcal{O}(X)$) con las operaciones adecuadas. A C lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre X. En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

2 Anexos

Teorema 2.0.1 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente "condición de pegado": para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es una función continua de U en Y.*

Prueba.

- Veamos que f es en efecto una función de U en Y. Sea $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x)\rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y. Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f = \bigcup_{i\in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y\rangle \in f_j$ y $\langle x, y'\rangle \in f_k$, es decir $x \in I_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' \in f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y, es decir, f es una función de U en Y.

- Probemos que $f : U \to Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca . Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$:

  $\subseteq$: Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$.

  $\supseteq$: Sea $x \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

  Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \overset{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U.$$

  Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i\in I} f_i : U \to Y$ es continua.

□