

## DOS APROXIMACIONES EQUIVALENTES A LA NOCIÓN DE HAZ

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ <sup>1</sup>

---

RESUMEN. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

PALABRAS CLAVE. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manjo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

### Contents

<b>1</b>	<b>Haz como funtor</b>	<b>2</b>
1.1	Un ejemplo como motivación . . . . .	2
1.2	Igualadores . . . . .	3
1.3	Un ejemplo como motivación (continuación) . . . . .	5
1.4	Definición funtorial de Haz . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Espacios étalé o fibrados</b>	<b>8</b>
2.1	Manojos y homeomorfismos locales . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Apéndice</b>	<b>9</b>

---

<sup>1</sup>Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.  
Email: jclozanos@unal.edu.co

# 1 Haz como functor

## 1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean  $X$  un espacio topológico y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , al cual dotamos con un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos abiertos de  $U$ . Una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto  $U$ , y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de  $U$  en el siguiente sentido:

**(P1)** Si  $V \stackrel{ab}{\subseteq} U$  entonces  $f|_V^U : V \rightarrow \mathbb{R}$  (la restricción de  $f$  de  $U$  a  $V$ ) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 3.0.1), un apropiado conocimiento local de  $U$  nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

**(P2)** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $f|_{U_i}^U : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  es continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f$  es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría  $\mathcal{O}(X)$  que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de  $X$ , y en la cual, dados  $U, V \in \mathcal{O}(X)$ , hay una flecha de  $V$  en  $U$  si y solo si  $V \subseteq U$ ; dicha flecha en  $\mathcal{O}(X)$  (que será la única de  $V$  en  $U$ ) la representamos igualmente mediante “ $V \subseteq U$ ”. Ahora, para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  definimos el conjunto  $CU$  de todas las funciones reales continuas sobre  $U$ :

$$CU := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , definimos la función de conjuntos

$$C(V \subseteq U) : \quad \begin{aligned} CU &\rightarrow CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de  $U$  en  $\mathbb{R}$  le asigna su respectiva función restricción al subconjunto  $V$ , que a su vez es una función continua de  $V$  en  $\mathbb{R}$ . Tendremos entonces la siguiente propiedad:

**Proposición 1.1.1.** *La regla  $C$  que a cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  le asigna el conjunto  $CU$  y a cada flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$  le asigna la función restricción de  $V$  en  $U$ ,  $C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CV$ , es un functor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

**Prueba.** • Trivialmente se tiene que  $C$  respeta identidades, pues para cualquier  $U \in \mathcal{O}(X)$  tenemos

$$C(1_U) : \quad \begin{aligned} CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir,  $C(1_U) = 1_{CU}$ .

- Supongamos que en  $\mathcal{O}(X)$  tenemos  $W \subseteq V \subseteq U$ . Entonces  $W \subseteq U$  y en **Set** tenemos la función restricción de  $U$  en  $W$ ,  $C(W \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Tenemos además en **Set** la composición  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Para cada  $f \in CU$  se tiene

$$\begin{aligned}
(C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\
&= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\
&= (f|_V^U)|_W^V \\
&= f|_W^U \\
&= C(W \subseteq U)(f),
\end{aligned}$$

con lo cual  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$  y  $C$  respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que  $C$  es un **prehaz** (de conjuntos):

**Definición 1.1.2** (Prehaz). *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico  $X$  es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

## 1.2 Igualadores

**Definición 1.2.1.** *En una categoría arbitraria  $\mathbf{C}$ , sean  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas. Un igualador de  $f$  y  $g$  es una pareja  $\langle E, e \rangle$ , con  $E \in \mathbf{C}$  y  $e : E \rightarrow A$  en  $\mathbf{C}$ , tal que  $f \circ e = g \circ e$ , y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in \mathbf{C}$  y  $u : U \rightarrow A$  en  $\mathbf{C}$ , tal que  $f \circ u = g \circ u$ , entonces existe una única flecha  $v : U \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $e \circ v = u$ .*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{array}{ccccc}
E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\
\uparrow v & \nearrow u & & & \\
U & & & & 
\end{array}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

**Ejemplo 1.2.2.** *Sean  $A$  y  $B$  conjuntos y  $f, g$  funciones de  $A$  en  $B$ . Verifiquemos que un igualador de  $f$  y  $g$  está dado por  $\langle E, e \rangle$ , donde  $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$  y  $e$  es la función inclusión de  $E$  en  $A$ :*

- Dado  $x \in E$  se tiene  $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$ , es decir,  $f \circ e = g \circ e$ .

- Supongamos que existe  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in \mathbf{Set}$  y  $u : U \rightarrow A$  en  $\mathbf{Set}$ , tal que  $f \circ u = g \circ u$ . Podemos definir  $v : U \rightarrow E$  vía  $v(x) = u(x)$  para todo  $x \in U$ , e inmediatamente se tendrá  $e \circ v = u$ ; igualmente, si  $v'$  es una flecha de  $U \rightarrow E$  en  $\mathbf{Set}$  tal que  $e \circ v' = u$  entonces para cada  $x \in U$  se tiene  $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$ , de modo que  $v = v'$ .

◇

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por “igualador” tanto al par  $\langle E, e \rangle$  como simplemente a la flecha  $e$ . Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

**Proposición 1.2.3.** *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

**Prueba.** Sean  $\mathbf{C}$  una categoría,  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas en  $\mathbf{C}$  y  $\langle E, e \rangle$  un igualador de  $f$  y  $g$ . Supongamos que existen flechas  $i, j : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tales que  $e \circ i = e \circ j$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ \uparrow i & & \nearrow e \circ j = e \circ i & & \\ F & & & & \end{array}$$

Tenemos  $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$ , es decir,  $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$ . Como  $e$  es un igualador de  $f$  y  $g$ , existe una única flecha  $k : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $e \circ k = e \circ j$ ; trivialmente  $j$  cumple esta propiedad, pero también lo hace  $i$ , pues por hipótesis  $e \circ i = e \circ j$ . Se sigue que  $i = j$  y por tanto  $e$  es un monomorfismo en  $\mathbf{C}$ .

□

Como en  $\mathbf{Set}$ , para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en  $\mathbf{Set}$  es una función inyectiva.

**Proposición 1.2.4.** *Supongamos que en  $\mathbf{Set}$  el siguiente es un diagrama igualador:*

$$E \xrightarrow{e} A \xrightarrow[f]{g} B$$

Entonces, para todo  $a \in A$  tal que  $f(a) = g(a)$ , existe  $\alpha \in E$  tal que  $e(\alpha) = a$ .

**Prueba.** Definimos  $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} (\subseteq A)$ . Por la Proposición 1.2.3, sabemos que  $\langle F, in_{F,A} \rangle$  (donde  $in_{F,A}$  es la función inclusión de  $F$  en  $A$ ), es un igualador de  $f$  y  $g$ , con lo cual, existe una única flecha  $v : F \rightarrow E$  tal que  $e \circ v = in_{F,A}$ . Como  $a \in F$ , tenemos  $\alpha := v(a) \in E$  y  $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$ .

□

### 1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro “ejemplo como motivación” (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena “condición de pegado”, en el sentido de que las funciones  $f|_{U_i}^U$  ( $i \in I$ ) se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera  $i, j \in I$  y cualquier  $x \in U_i \cap U_j$ , se tiene  $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$ ; es este buen comportamiento local en subconjuntos de  $U$  lo que nos permite el paso a un conocimiento global de  $U$  mediante la función continua  $f$  que se reconstruye al pegar los elementos de la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ . Notemos que  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$  es un elemento del producto cartesiano  $\prod_{i \in I} CU_i$ . Como, para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f|_{U_i}^U \in CU_i$  y  $f|_{U_j}^U \in CU_j$ , y como  $U_i \cap U_j \subseteq U_i$  y  $U_i \cap U_j \subseteq U_j$ , obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones  $(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$ , con las cuales formamos las familias  $\left\{ (f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$  y  $\left\{ (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ , que a su vez son elementos del producto cartesiano  $\prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ . Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$  que a cada  $f \in CU$  le asigna la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ .
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{ f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .
- $\pi_2 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{ f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

**Proposición 1.3.1.** *En Set el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$$

**Prueba.** • Dado  $f \in CU$  tenemos

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\ &= \pi_1\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\ &= \left\{ (f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \left\{ f|_{U_i \cap U_j}^U \right\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \left\{ (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \pi_2\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\ &= \pi_2(e(f)) \\ &= (\pi_2 \circ e)(f), \end{aligned}$$

y por tanto  $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$ .

- Veamos que la pareja  $\langle CU, e \rangle$  es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen  $X \in \mathbf{Set}$  y  $u : X \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$  en **Set** tales que  $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ .

$$\begin{array}{ccc}
CU & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j) \\
\uparrow v & \nearrow u & \\
X & & 
\end{array}$$

Para cada  $g \in X$ , existe  $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  tal que  $g(u) = \{g_i\}_{i \in I}$ . Para todo  $i \in I$  tenemos que  $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, y además  $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$  implica  $\left\{g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I} = \left\{g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ , con lo cual para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}$  y  $g_i(x) = g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$  para todo  $x \in U_i \cap U_j$ . Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 3.0.1) para afirmar que  $\bigcup_{i \in I} g_i$  es una función continua de  $U$  en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\bigcup_{i \in I} g_i \in CU$ . Definimos así  $v : X \rightarrow CU$  vía  $v(g) = \bigcup_{i \in I} g_i$  para cada  $g \in X$ . Como

$$\begin{aligned}
(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\
&= e\left(\bigcup_{i \in I} g_i\right) \\
&= \left\{\left(\bigcup_{j \in I} g_j\right)|_{U_i}^U\right\}_{i \in I} \\
&= \{g_i\}_{i \in I} \\
&= u(g),
\end{aligned}$$

entonces  $e \circ v = u$ . Ahora, supongamos que existe  $v' : X \rightarrow CU$  en **Set** tal que  $e \circ v' = u$ .

Entonces para toda  $g \in X$  se tiene

$$\begin{aligned}
\{(v'(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I} &= u(g) \\
&= e(v(g)) \\
&= \{(v(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I},
\end{aligned}$$

y por tanto  $(v'(g))|_{U_i}^U = (v(g))|_{U_i}^U$  para todo  $i \in I$ . Con lo anterior

$$\begin{aligned}
v'(g) &= \bigcup_{i \in I} (v'(g))|_{U_i}^U \\
&= \bigcup_{i \in I} (v(g))|_{U_i}^U \\
&= v(g),
\end{aligned}$$

obteniendo  $v' = v$ , lo cual completa la prueba. □

Notemos que la Proposición 1.2.4 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto  $U$  y el cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  (haciendo las respectivas modificaciones en la definición de  $e, \pi_1$  y  $\pi_2$ ). El hecho de que  $e$  sea el igualador de  $\pi_1$  y  $\pi_2$  nos traduce la “condición de pegado” que se satisface al restringir funciones continuas de  $U$  a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 3.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

## 1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

**Notación 1.4.1.** Dado  $X$  un espacio topológico y  $P : \mathcal{O}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  un funtor (es decir un prehaz sobre  $X$ ) y dada la flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , para toda  $t \in PU$  denotamos  $t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t)$ .

Ahora generalizamos las funciones  $e, \pi_1$  y  $\pi_2$  que se trabajaron en la Sección 1.3:

**Definición 1.4.2** (Funciones canónicas). Sea  $P$  un prehaz sobre un espacio topológico  $X$ . Dados  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$ , definimos las siguientes funciones:

- $e : PU \rightarrow \prod_{i \in I} PU_i$  que a cada  $f \in PU$  le asigna la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ .
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$  le asigna la familia  $\left\{f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .
- $\pi_2 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$  le asigna la familia  $\left\{f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

Llamamos a  $e$  la función canónica de  $PU$  en  $\prod_{i \in I} PU_i$  y a  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las funciones canónicas de  $\prod_{i \in I} PU_i$  en  $\prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$ .

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

**Definición 1.4.3.** Un haz de conjuntos  $P$  sobre un espacio topológico  $X$  es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier  $U \in \mathcal{O}(X)$  y cualquier cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$ , el siguiente es un diagrama igualador:

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} PU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde  $e, \pi_1$  y  $\pi_2$  son las respectivas funciones canónicas.

En la anterior definición  $P$  es por tanto un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en  $\mathbf{Set}$ . Al variar la categoría  $\mathbf{Set}$  por la categoría de anillos,  $\mathbb{F}$ -álgebras,  $\mathbb{F}$ -módulos, etc (para un campo  $\mathbb{F}$ ) obtenemos haces de anillos, de  $\mathbb{F}$ -álgebras, de  $\mathbb{F}$ -módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor  $C$  de nuestro “ejemplo como motivación”, puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de  $\mathbb{R}$ -álgebras o  $\mathbb{R}$ -módulos al dotar cada conjunto  $CU$  ( $U \in \mathcal{O}(X)$ ) con las operaciones adecuadas. A  $C$  lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre  $X$ . En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

**Definición 1.4.4** (Categoría de haces sobre un espacio topológico). *Dado un espacio topológico  $X$ , la categoría de funtores  $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\text{op}}}$  tiene como objetos todos los prehaces sobre  $X$  y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por  $\text{PreSh}(X)$  y la llamamos “la categoría de prehaces sobre  $X$ ”. La subcategoría plena de  $\text{PreSh}(X)$  que tiene por objetos todos los haces sobre  $X$  se denota  $\text{Sh}(X)$  y la llamamos “la categoría de haces sobre  $X$ ”; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre  $X$ .*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación  $\text{Sh}(X)$  y  $\text{PreSh}(X)$ .

## 2 Espacios étalé o fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé, proveniente del francés, viene a significar “ramificado”, “extendido”, “esparcido”, “repartido”, etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.

### 2.1 Manojos y homeomorfismos locales

**Definición 2.1.1** (Manojo). *Un manojito sobre un espacio topológico  $X$  es una pareja  $\langle Y, p \rangle$  con  $Y$  un espacio topológico y  $p : Y \rightarrow X$  una función continua.*

Según el contexto, es frecuente denotar al manojito  $\langle Y, p \rangle$  simplemente por  $p$ . Las inversas puntuales  $p^{-1}\{x\}$  ( $x \in X$ ) son llamadas las fibras de  $p$  sobre  $X$ . La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

**Definición 2.1.2** (Categoría  $\mathbf{Top}/X$ ). *La categoría  $\mathbf{Top}/X$  (léase “categoría  $\mathbf{Top}$  sobre  $X$ ”) o  $\text{Bund}(X)$  tiene por objetos todos los manojos sobre  $X$ . Dados  $\langle Y, p \rangle, \langle Y', q \rangle \in \mathbf{Top}/X$ ,  $f$  es una flecha  $\langle Y, p \rangle \rightarrow \langle Y', q \rangle$  en  $\mathbf{Top}/X$  si  $f : Y \rightarrow Y'$  es una función continua y  $q \circ f = p$ .*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ & \searrow p & \downarrow q \\ & & X \end{array}$$

La categoría  $\mathbf{Top}/X$  es un ejemplo de “categoría sobre” (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por  $(\mathbf{Top} \downarrow X)$ ). La notación  $\text{Bund}(X)$  es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manojito*.

**Definición 2.1.3** (Homeomorfismo local). *Dados  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, decimos que una función  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local sobre  $X$  si para todo  $y \in Y$  existe  $V_y \stackrel{ab}{\subseteq} Y$  con  $y \in V_y$  tal que  $p(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} X$  y  $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo.*



La siguiente proposición, cuya prueba se presenta en la Sección 3 (Apéndice) nos permite considerar a un homeomorfismo local sobre  $X$  como un caso especial de manajo sobre  $X$ .

**Proposición 2.1.4.** *Si  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local, entonces  $p$  es una función continua y abierta.*

### 3 Apéndice

**Teorema 3.0.1** (Lema de pegado). *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Sean  $U \subseteq X$ ,  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$  y  $\{f_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones, de modo que para cada  $i \in I$ ,  $f_i : U_i \rightarrow Y$  es una función continua. Además suponemos la siguiente “condición de pegado”: para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f_i(x) = f_j(x)$  para todo  $x \in U_i \cap U_j$ . Entonces,  $f := \bigcup_{i \in I} f_i$  es una función continua de  $U$  en  $Y$ .*

**Prueba.** • Veamos que  $f$  es en efecto una función de  $U$  en  $Y$ . Sea  $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $\langle x, f_j(x) \rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i = f$ . Como  $f_j(x) \in Y$ , obtenemos que  $f$  relaciona a  $x$  con un elemento de  $Y$ . Supongamos que para  $y, y' \in Y$  se tiene  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f = \bigcup_{i \in I} f_i$ . Existen  $j, k \in I$  tales que  $\langle x, y \rangle \in f_j$  y  $\langle x, y' \rangle \in f_k$ , es decir  $x \in U_j$  y  $y = f_j(x)$ , y,  $x \in U_k$  y  $y' \in f_k(x)$ ; entonces  $x \in U_j \cap U_k$  y por la condición de pegado se tiene  $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$ , con lo cual  $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$ . Lo anterior nos muestra que  $f$  relaciona cada elemento de  $U$  con un único elemento de  $Y$ , es decir,  $f$  es una función de  $U$  en  $Y$ .

- Probemos que  $f : U \rightarrow Y$  es continua mostrando que devuelve abiertos de  $Y$  en abiertos de  $U$  por la imagen recíproca. Sea  $V \subseteq Y$ . Notemos que  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ :

$\subseteq$ : Sea  $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$ , es decir,  $f(x) \in V$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $f_j(x) = f(x) \in V$ , y  $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ .

$\supseteq$ : Sea  $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ , es decir  $x \in f_j^{-1}(V)$  para algún  $j \in I$ . Entonces  $f(x) = f_j(x) \in V$  y  $x \in f^{-1}(V)$ .

Ahora bien, para cada  $i \in I$  tenemos  $f_i^{-1}(U) \subseteq^{ab} U_i$ , luego  $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$  con  $W_i \subseteq^{ab} U$ . Como  $U_i \subseteq^{ab} U$  entonces  $f_i^{-1}(V) \subseteq^{ab} U$ , de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \subseteq^{ab} U.$$

Con esto, concluimos que  $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \rightarrow Y$  es continua.

□

**Proposición 3.0.2.** *Si  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local, entonces  $p$  es una función continua y abierta.*

**Prueba.** • Probamos la continuidad de  $p$  puntualmente. Sean  $y \in Y$  y  $U \subseteq^{\text{ab}} X$  con  $p(y) \in U$ . Tenemos que  $y \in V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$  y  $p(y) \in p(V_y) \subseteq^{\text{ab}} X$ . Tomando  $W = p(V_y) \cap U$  se tiene  $p(y) \in W \subseteq^{\text{ab}} X$ . Además  $W \subseteq p(V_y)$  y  $W \subseteq U$ . Como  $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo, entonces  $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^Y)^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$ , así que  $y \in p^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} Y$ ; igualmente,  $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$ , lo cual prueba que  $p$  es continua en  $y$ . Como  $y$  es arbitraria en  $Y$ , obtenemos que  $p : Y \rightarrow X$  es continua.

- Sea  $V \subseteq^{\text{ab}} Y$ ; probemos que  $p(V) \subseteq^{\text{ab}} X$ . Para cada  $y \in V$  definimos  $W_y = V_y \cap V \subseteq^{\text{ab}} V_y$ . Como  $p|_{V_y}^V : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego  $p(W_y) = (p|_{V_y}^V)(W_y) \subseteq^{\text{ab}} p(V_y)$ ; como  $p(V_y) \subseteq^{\text{ab}} X$  entonces  $p(W_y) \subseteq^{\text{ab}} X$  para cada  $y \in V$ , luego  $\bigcup_{y \in V} p(W_y) \subseteq^{\text{ab}} X$ . Ya que

$$\begin{aligned} \bigcup_{y \in V} p(W_y) &= \bigcup_{y \in V} p(V \cap V_y) \\ &= p \left( \bigcup_{y \in V} (V \cap V_y) \right) \\ &= p \left( V \cap \bigcup_{y \in V} V_y \right) \\ &= p(V), \end{aligned}$$

pues  $V \subseteq \bigcup_{y \in V} V_y$ , entonces  $p(V) \subseteq^{\text{ab}} X$ . Obtenemos así que  $p : Y \rightarrow X$  es una función abierta.  $\square$

**Proposición 3.0.3.** Sea  $\Sigma$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se tiene que  $\Sigma$  es base para una topología sobre  $X$ , si y solo si, tanto  $X$  como la intersección de cualesquiera dos elementos de  $\Sigma$ , es unión de elementos de  $\Sigma$ .

**Prueba.**  $(\Rightarrow)$  Supongamos que  $\Sigma$  es base para una topología sobre  $X$ . Como  $X$  es abierto, es unión de elementos de  $\Sigma$ . Como los elementos de  $\Sigma$  son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de  $\Sigma$  es abierta y por tanto es unión de elementos de  $\Sigma$ .

$(\Leftarrow)$  Supongamos que  $X$  es unión de elementos de  $\Sigma$  y que la intersección de cualesquiera dos elementos de  $\Sigma$  es unión de elementos de  $\Sigma$ . Sea  $\tau_\Sigma$  el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de  $\Sigma$ . Veamos que  $\tau_\Sigma$  es una topología sobre  $X$ :

- Como los elementos de  $\Sigma$  son subconjuntos de  $X$ , entonces la unión de elementos de  $\Sigma$  es subconjunto de  $X$ , de modo que  $\tau_\Sigma$  es una familia de subconjuntos de  $X$ .
- $X$  es unión de elementos de  $\Sigma$ , así que  $X \in \tau_\Sigma$ . El conjunto  $\emptyset$  es la unión vacía de elementos de  $\Sigma$ , así que  $\emptyset \in \tau_\Sigma$ .

- Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una familia de elementos de  $\tau_\Sigma$ . Para cada  $i \in I$  existe una familia  $\{V_j^i\}_{j \in J}$  de elementos de  $\Sigma$  tal que  $U_i = \bigcup_{j \in J} V_j^i$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i &= \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j \in J} V_j^i \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} V_j^i, \end{aligned}$$

luego  $\bigcup_{i \in I} U_i$  es unión de elementos de  $\Sigma$  y por tanto pertenece a  $\tau_\Sigma$ .

- Sean  $U, V \in \tau_\Sigma$ . Existen  $\{U_i\}_{i \in I}, \{V_j\}_{j \in J}$ , familias de elementos de  $\Sigma$  tales que  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  y  $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ . Entonces

$$\begin{aligned} U \cap V &= U \cap \bigcup_{j \in J} V_j \\ &= \bigcup_{j \in J} (U \cap V_j) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left( \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap V_j \right) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left( \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V_j) \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (U_i \cap V_j), \end{aligned}$$

y  $U_i \cap V_j \in \Sigma$  para cualesquiera  $i \in I, j \in J$ , así que  $U \cap V$  es unión de elementos de  $\Sigma$ , es decir  $U \cap V \in \tau_\Sigma$ .

Lo anterior prueba que  $\tau_\Sigma$  es una topología sobre  $X$ . El hecho de que  $\Sigma$  es base para  $\tau_\Sigma$  es trivial, pues cada elemento de  $\tau_\Sigma$  es unión de elementos de  $\Sigma$ .

□

## Referencias

- [Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.
- [Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- [Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag.
- [Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum.
- [Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.