Teoría de categorías (2024-I)
Trabajo de profundización

Dos aproximaciones equivalentes a la noción de haz

Juan Camilo Lozano Suárez [1]

Resumen. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

Palabras Clave. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manojo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

Contents

[1] Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X, al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de U. Una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U, y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V^U : V \to \mathbb{R}$ (la restricción de f de U a V) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 3.0.1), un apropiado conocimiento local de U nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

(P2) Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f|_{U_i}^U : U_i \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces f es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X, y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante "$V \subseteq U$". Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U:

$$CU := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad & CU \to CV \\ & f \mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de U en $\mathbb{R}$ le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V, que a su vez es una función continua de V en $\mathbb{R}$. Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U, $C(V \subseteq U) : CU \to CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

Prueba.

- Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U) : \quad & CU \longrightarrow CU \\ & f \mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W, $C(W \subseteq U) : CU \to CW$. Tenemos ademas en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \to CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned}(C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f),\end{aligned}$$

  con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz)**.** *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria $\boldsymbol{C}$, sean $f, g : A \to B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e\rangle$, con $E \in \boldsymbol{C}$ y $e : E \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u\rangle$ con $U \in \boldsymbol{C}$ y $u : U \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \to E$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $e \circ v = u$.*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como " diagrama igualador", se resume la anterior definición:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B. Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e\rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A:*

- *Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.*

- *Supongamos que existe $\langle U, u\rangle$ con $U \in$ **Set** y $u : U \to A$ en* **Set**, *tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \to E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una fleca de $U \to E$ en* **Set** *tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.*

$\Diamond$

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por " igualador" tanto al par $\langle E, e\rangle$ como simplemente a la flecha e. Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

Prueba. Sean **C** una categoría, $f, g : A \to B$ flechas paralelas en **C** y $\langle E, e\rangle$ un igualador de f y g. Supongamos que existen flechas $i, j : F \to E$ en **C** tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "e\circ j = e\circ i"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g, existe una única flecha $k : F \to E$ en **C** tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i, pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en **C**.

$\square$

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que en* **Set** el siguiente es un diagrama igualador:

$$E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ $(\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A}\rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g, con lo cual, existe una única flecha $v : F \to E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$.

$\square$

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro "ejemplo como motivación" (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena "condición de pegado", en el sentido de que las funciones $f|_{U_i}^U$ $(i \in I)$ se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}$. Notemos que $\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i\in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|_{U_i}^U \in CU_i$ y $f|_{U_j}^U \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|_{U_i}^U)|_{U_i\cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i\cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\left\{(f|_{U_i}^U)|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$ y $\left\{(f|_{U_j}^U)|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \to \prod_{i\in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Proposición 1.3.1. *En* **Set** *el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} CU_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba.

- Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\ &= \pi_1\left(\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}\right) \\ &= \left\{(f|_{U_i}^U)\,|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \left\{f|_{U_i\cap U_j}^U\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \left\{(f|_{U_j}^U)|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} \\ &= \pi_2\left(\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}\right) \\ &= \pi_2(e(f)) \\ &= (\pi_2 \circ e)(f),\end{aligned}$$

  y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e\rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in$ **Set** y $u : X \to \prod_{i\in I} CU_i$ en **Set** tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{tikzcd} CU \arrow[r, "e"] & \prod_{i\in I} CU_i \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i\cap U_j) \\ X \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i\in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \to \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\left\{g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I} = \left\{g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j} = g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}$ y $g_i(x) = g_i|^{U_i}_{U_i\cap U_j}(x) = g_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 3.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i\in I} g_i$ es una función continua de U en $\mathbb{R}$, es decir, $\bigcup_{i\in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \to CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i\in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned}(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\ &= e(\bigcup_{i\in I} g_i) \\ &= \left\{(\bigcup_{j\in I} g_j)|^{U}_{U_i}\right\}_{i\in I} \\ &= \{g_i\}_{i\in I} \\ &= u(g),\end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \to CU$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$. Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\{(v'(g))|^{U}_{U_i}\right\}_{i\in I} &= u(g) \\ &= e(v(g)) \\ &= \left\{(v(g))|^{U}_{U_i}\right\}_{i\in I},\end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|^{U}_{U_i} = (v(g))|^{U}_{U_i}$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned}v'(g) &= \bigcup_{i\in I}(v'(g))|^{U}_{U_i} \\ &= \bigcup_{i\in I}(v(g))|^{U}_{U_i} \\ &= v(g),\end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba.

$\square$

Notemos que la Proposición 1.2.4 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto U y el cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U (haciendo las respectivas modificaciones en la definición de e, π_1 y π_2). El hecho de que e sea el igualador de π_1 y π_2 nos traduce la "condición de pegado" que se satisface al restringir funciones continuas de U a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 3.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

Notación 1.4.1. *Dado X un espacio topológico y $P : \mathcal{O}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ un funtor (es decir un prehaz sobre X) y dada la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, para toda $t \in PU$ denotamos $t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t)$.*

Ahora generalizamos las funciones e, π_1 y π_2 que se trabajaron en la Sección 1.3:

Definición 1.4.2 (Funciones canónicas)**.** *Sea P un prehaz sobre un espacio topológico X. Dados $U \in \mathbb{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, definimos las siguientes funciones:*

- $e : PU \to \prod_{i\in I} PU_i$ *que a cada $f \in PU$ le asigna la familia $\left\{f|_{U_i}^U\right\}_{i\in I}$.*
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.*
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.*

Llamamos a e la función canónica de PU en $\prod_{i\in I} PU_i$ y a π_1 y π_2 las funciones canónicas de $\prod_{i\in I} PU_i$ en $\prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$.

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

Definición 1.4.3. *Un haz de conjuntos P sobre un espacio topológico X es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ y cualquier cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} PU_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde e, π_1 y π_2 son las respectivas funciones canónicas.

En la anterior definición P es por tanto un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos, $\mathbb{F}$-álgebras, $\mathbb{F}$-módulos, etc (para un campo $\mathbb{F}$) obtenemos haces de anillos, de $\mathbb{F}$-álgebras, de $\mathbb{F}$-módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor C de nuestro "ejemplo como motivación", puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de $\mathbb{R}$-álgebras o $\mathbb{R}$-módulos al dotar cada conjunto CU ($U \in \mathcal{O}(X)$) con las operaciones adecuadas. A C lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre X. En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 1.4.4 (Categoría de haces sobre un espacio topológico)**.** *Dado un espacio topológico X, la categoría de funtores* $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$ *tiene como objetos todos los prehaces sobre X y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por* $\mathrm{PreSh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de prehaces sobre X". La subcategoría plena de* $\mathrm{PreSh}(X)$ *que tiene por objetos todos los haces sobre X se denota* $\mathrm{Sh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de haces sobre X"; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre X.*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathrm{PreSh}(X)$.

2 Espacios étalé o fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé, proveniente del francés, viene a significar "ramificado", "extendido", "esparcido", "repartido", etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.

2.1 Manojos

Definición 2.1.1 (Manojo)**.** *Un manojo sobre un espacio topológico X es una pareja $\langle Y, p\rangle$ con Y un espacio topológico y $p : Y \to X$ una función continua.*

Según el contexto, es frecuente referirnos al manojo $\langle Y, p\rangle$ simplemente por p. La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 2.1.2 (Categoría $\mathbf{Top}/X$)**.** *La categoría $\mathbf{Top}/X$ (léase "categoría Top sobre X") o $\mathbf{Bund}(X)$ tiene por objetos todos los manojos sobre X. Dados $\langle Y, p\rangle, \langle Y', q\rangle \in \mathbf{Top}/X$, f es una flecha $\langle Y, p\rangle \to \langle Y', q\rangle$ en $\mathbf{Top}/X$ si $f : Y \to Y'$ es una función continua y $q \circ f = p$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La categoría $\mathbf{Top}/X$ es un ejemplo de "categoría sobre" (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por $(\mathbf{Top} \downarrow X)$). La notación $\mathbf{Bund}(X)$ es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manojo*. Un concepto esencial al trabajar con manojos es el de *sección*:

Definición 2.1.3 (Secciones)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X.*

- *Una flecha $s : 1_X \to p$ en $\mathbf{Top}/X$ es llamada una sección transversal de p. En este caso decimos que s es una sección global de p.*

- *Dado $U \overset{ab}{\subseteq} X$, una flecha $s : in_{U,X} \to p$ en* $\mathbf{Top}/X$ *es llamada una sección transversal de p sobre U. En este caso decimos que s es una sección local de p.*

De esta forma, una sección global (local) es una función continua que hace que el siguiente diagrama de la izquierda (derecha) conmute:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "1_X"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "in_{U,X}"'] & X \end{tikzcd}$$

Vemos también que s se presenta como una inversa (local), a derecha, de p.

2.2 Espacios étalé

Para introducir los espacios étalé recordamos un concepto de topología:

Definición 2.2.1 (Homeomorfismo local). *Dados X y Y espacios topológicos, decimos que una función $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local sobre X si para todo $y \in Y$ existe $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ con $y \in V_y$ tal que:*

(i) $p(V_y)$ es un subconjunto abierto de X.

(ii) $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo.

Una propiedad importante de los homeomorfismos locales (cuya prueba se presenta en la Sección 3 (Apéndice)) es la siguiente:

Proposición 2.2.2. *Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y.*

Con esto, podemos introducir los espacios fibrados o étalé como un caso particular de manojo:

Definición 2.2.3 (Espacio étalé). *Un espacio fibrado o étalé sobre un espacio topológico X es un manojo $\langle p, Y \rangle$, donde $p : Y \to X$ es además un homeomorfismo local.*

Con lo anterior, podemos considerar la subcategoría plena de $\mathbf{Top}/X$ que tiene por objetos todos los espacios étalé sobre X, y que denotamos por $\mathbf{Etale}(X)$.

Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, las inversas puntuales $p^{-1}\{x\}$ $(x \in X)$ son llamadas las fibras de p sobre X. De este modo, el espacio Y se presenta como la unión disyunta de las fibras de p, justificando así el uso de las palabras *fibrado* y *étalé* en las definiciones dadas. Así mismo, hablamos de Y como el espacio alto o desplegado, y nos referimos a X como el espacio bajo o base. El espacio Y se muestra, primero, como un despliegue vertical del espacio X, representado en las fibras de cada elemento en el espacio base, y segundo, como un despliegue horizontal de X, representado mediante el pegamiento de fibras que establecen los conjuntos abiertos de Y. Así mismo, la función p se presenta como una proyección del espacio alto en el espacio bajo. Las secciones de un espacio étalé se comportan especialmente bien; muestra de ello lo da la siguiente proposición (para su prueba ver la Sección 3):

Proposición 2.2.4. *Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y\rangle$, sobre U. Entonces:*

- $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.
- *$s : U \to s(U)$ es un homeomorfismo y por tanto s queda completamente determinada por $s(U)$.*
- *$s(U)$ es un subconjunto abierto de Y.*

Lo anterior nos permite por tanto caracterizar las secciones de $\langle p, Y\rangle$ con los abiertos básicos de Y. Ésto a su vez nos muestra que el pegamiento horizontal de fibras que se da en Y mediante conjuntos abiertos es bien portado en términos de continuidad. Un problema crucial en la teoría es el de la posibilidad de pegar secciones locales para construir secciones mayores y eventualmente globales [Zalamea, 2021], lo cual captura las problemáticas de lo local versus lo global que motivaron nuestra definición de haz. Estos paralelismos manifiestos entre haces y espacios étalé permiten que la equivalencia entre las categorías $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathbf{Etale}(X)$, cuya prueba constituye nuestro objetivo en lo que sigue, no nos parezca en absoluto ajena.

3 Apéndice

Teorema 3.0.1 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente "condición de pegado": para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es una función continua de U en Y.*

Prueba.

- Veamos que f es en efecto una función de U en Y. Sea $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x)\rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y. Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f = \bigcup_{i\in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y\rangle \in f_j$ y $\langle x, y'\rangle \in f_k$, es decir $x \in I_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' \in f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y, es decir, f es una función de U en Y.
- Probemos que $f : U \to Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca . Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$:

$\subseteq$: Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$.

$\supseteq$: Sea $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \overset{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U.$$

Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \to Y$ es continua.

$\square$

Proposición 3.0.2. *Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y.*

Prueba.

- Probamos la continuidad de p puntualmente. Sean $y \in Y$ y $U \overset{ab}{\subseteq} X$ con $p(y) \in U$. Tenemos que $y \in V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $p(y) \in p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Tomando $W = p(V_y) \cap U$ se tiene $p(y) \in W \overset{ab}{\subseteq} X$. Además $W \subseteq p(V_y)$ y $W \subseteq U$. Como $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, entonces $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$, así que $y \in p^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} Y$; igualmente, $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$, lo cual prueba que p es continua en y. Como y es arbitraria en Y, obtenemos que $p : Y \to X$ es continua.

- Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$; probemos que $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Para cada $y \in V$ definimos $W_y = V_y \cap V \overset{ab}{\subseteq} V_y$. Como $p|_{V_y}^{V} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego $p(W_y) = (p|_{V_y}^{V})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$; como $p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ entonces $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ para cada $y \in V$, luego $\bigcup_{y \in V} p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Ya que

$$\begin{aligned} \bigcup_{y \in V} p(W_y) &= \bigcup_{y \in V} p(V \cap V_y) \\ &= p\left(\bigcup_{y \in V} (V \cap V_y)\right) \\ &= p\left(V \cap \bigcup_{y \in V} V_y\right) \\ &= p(V), \end{aligned}$$

pues $V \subseteq \bigcup_{y \in V} V_y$, entonces $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Obtenemos así que $p : Y \to X$ es una función abierta.

- Llamemos $\mathcal{B} = \left\{ W \overset{ab}{\subseteq} Y \mid p(W) \overset{ab}{\subseteq} X,\ p|_{W}^{Y} : W \to p(W) \text{ es homeomorfismo} \right\}$ y probemos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y. Sean $V \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $y \in V$. Llamemos $W_y = V_y \cap V$, de modo que $y \in W_y \subseteq V$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $W_y \overset{ab}{\subseteq} Y$. Tenemos que $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo; como $W_y \overset{ab}{\subseteq} V_y$ y todo homeomorfismo es en particular una función abierta, obtenemos $p(W_y) = (p|_{V_y}^{Y})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$, de modo que $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$; además, ya que la restricción de homeomorfismos es un homeomorfismo, entonces $(p|_{V_y}^{Y})|_{W_y}^{V_y} = p|_{W_y}^{Y} : W_y \to p(W_y)$ es un homeomorfismo. Así, $W_y \in \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}$ es base para la topología de Y.

□

Proposición 3.0.3. *Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y\rangle$, sobre U. Entonces:*

(i) $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.

(ii) $s : U \to s(U)$ *es un homeomorfismo y por tanto s queda completamente determinada por $s(U)$.*

(iii) $s(U)$ *es un subconjunto abierto de Y.*

Prueba. (i) Dado $x \in U$ tenemos

$$\begin{aligned}(p|_{s(U)}^{Y} \circ s)(x) &= p|_{s(U)}^{Y}(s(x))\\ &= p(s(x))\\ &= in_{U,X}(x)\\ &= x\\ &= 1_U(x),\end{aligned}$$

luego $p|_{s(U)}^{Y} \circ s = 1_U(x)$. Dado $y \in s(U)$, existe $z \in U$ tal que $y = s(z)$, y:

$$\begin{aligned}(s \circ p|_{s(U)}^{Y})(y) &= s(p|_{s(U)}^{Y}(y))\\ &= s(p(y))\\ &= s(p(s(z)))\\ &= s(z)\\ &= y,\end{aligned}$$

de modo que $s \circ p|_{s(U)}^{Y} = 1_{s(U)}$. Esto prueba *(i)*.

(ii) Sabemos que s es una función continua, y su inversa $p|_{s(U)}^{Y}$ es continua por ser la restricción de una función continua; por tanto, $s : U \to s(U)$ es un homeomorfismo.

(iii) Ahora veamos que $s(U) \overset{ab}{\subseteq} Y$. Sea $y \in s(U)$. Dado $x \in s^{-1}(V_y)$, tenemos $s(x) \in V_y$ y $x = p(s(x)) \in p(V_y)$; por tanto $s^{-1}(V_y) \subseteq p(V_y)$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $s : U \to Y$ es continua, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} U$; como $U \overset{ab}{\subseteq} X$, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ y $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$. Como $p|_{V_y}^{Y}$ es en particular continua, se tiene $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq} V_y$; como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq}$

Y. Además, como $y \in s(U)$, se sigue que $s(p|_{V_y}^{Y}(y)) = s(p|_{s(U)}^{Y}(y)) = s(s^{-1}(y)) = y \in V_y$ y por tanto $y \in (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, nos falta probar que $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$; para esto basta ver que $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) = V_y \cap s(U)$:

$\subseteq$: Por definición sabemos que $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y$. Sea $t \in (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Tenemos que $s(p|_{V_y}^{Y}(t)) \in V_y$ y $p|_{V_y}^{Y}(t) \in s^{-1}(V_y) \subseteq U$. Además,

$$p|_{V_y}^{Y}(s(p|_{V_y}^{Y}(t))) = p(s(p|_{V_y}^{Y}(t))) = p|_{V_y}^{Y}(t).$$

Como $p|_{V_y}^{Y}$ es en particular inyectiva, obtenemos $t = s(p|_{V_y}^{Y}(t))$; ya que $p|_{V_y}^{Y}(t) \in U$, se sigue $t \in s(U)$. Con lo anterior se tiene $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$ y por lo tanto $(p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y \cap s(U)$.

$\supseteq$: Sea $t \in V_y \cap s(U)$. Tenemos $p|_{V_y}^{Y}(t) = p(t) = p|_{s(U)}^{Y}(t)$, luego

$$s(p|_{V_y}^{Y}(t)) = s(p|_{s(U)}^{Y}(t)) = s(s^{-1}(t)) = t \in V_y,$$

de modo que $t \in (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, $V_y \cap s(U) \subseteq (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$.

□

Proposición 3.0.4. *Sea Σ una familia de subconjuntos de X. Se tiene que Σ es base para una topología sobre X, si y solo si, tanto X como la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ, es unión de elementos de Σ.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que Σ es base para una topología sobre X. Como X es abierto, es unión de elementos de Σ. Como los elementos de Σ son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de Σ es abierta y por tanto es unión de elementos de Σ.

($\Leftarrow$) Supongamos que X es unión de elementos de Σ y que la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ es unión de elementos de Σ. Sea τ_Σ el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de Σ. Veamos que τ_Σ es una topología sobre X:

- Como los elementos de Σ son subconjuntos de X, entonces la unión de elementos de Σ es subconjunto de X, de modo que τ_Σ es una familia de subconjuntos de X.
- X es unión de elementos de Σ, así que $X \in \tau_\Sigma$. El conjunto ϕ es la unión vacía de elementos de Σ, así que $\phi \in \tau_\Sigma$.
- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_Σ. Para cada $i \in I$ existe una familia $\left\{V_j^i\right\}_{j\in J}$ de elementos de Σ tal que $U_i = \bigcup_{j\in J} V_j^i$. Por tanto

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} U_i &= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} V_j^i\right)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} V_i^j,\end{aligned}$$

luego $\bigcup_{i\in I} U_i$ es unión de elementos de Σ y por tanto pertenece a τ_Σ.

- Sean $U, V \in \tau_\Sigma$. Existen $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$, familias de elementos de Σ tales que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y $V = \bigcup_{j\in J} V_j$. Entonces

$$\begin{aligned} U \cap V &= U \cap \bigcup_{j\in J} V_j \\ &= \bigcup_{j\in J} (U \cap V_j) \\ &= \bigcup_{j\in J} \left(\left(\bigcup_{i\in I} U_i \right) \cap V_j \right) \\ &= \bigcup_{j\in J} \left(\bigcup_{i\in I} (U_i \cap V_j) \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}} (U_i \cap V_j), \end{aligned}$$

  y $U_i \cap V_j \in \Sigma$ para cualesquiera $i \in I, j \in J$, así que $U \cap V$ es unión de elementos de Σ, es decir $U \cap V \in \tau_\Sigma$.

Lo anterior prueba que τ_Σ es una topología sobre X. El hecho de que Σ es base para τ_Σ es trivial, pues cada elemento de τ_Σ es unión de elementos de Σ.

$\square$

Referencias

[Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.

[Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.

[Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag.

[Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum.

[Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.