

DOS APROXIMACIONES EQUIVALENTES A LA NOCIÓN DE HAZ

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ ¹

RESUMEN. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

PALABRAS CLAVE. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manojos; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

Contents

1	Haz como funtor	2
1.1	Un ejemplo como motivación	2
1.2	Igualadores	3
1.3	Un ejemplo como motivación (continuación)	5
1.4	Definición funtorial de Haz	7
2	Espacios étalé o espacios fibrados	8
2.1	Manojos	9
2.2	Espacios étalé	9
3	De manojos a prehaces	11

¹Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

4	De prehaces a manojos	14
5	Diálogo entre funtores	17
6	Apéndice	18

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X , al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de U . Una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U , y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \stackrel{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V^U : V \rightarrow \mathbb{R}$ (la restricción de f de U a V) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 6.0.1), un apropiado conocimiento local de U nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

(P2) Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f|_{U_i}^U : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces f es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X , y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante “ $V \subseteq U$ ”. Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U :

$$CU := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad CU &\rightarrow CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de U en \mathbb{R} le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V , que a su vez es una función continua de V en \mathbb{R} . Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U , $C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**.*

Prueba. • Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U) : \quad CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W , $C(W \subseteq U) : CU \rightarrow CW$. Tenemos además en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz). *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**.*

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria \mathbf{C} , sean $f, g : A \rightarrow B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e \rangle$, con $E \in \mathbf{C}$ y $e : E \rightarrow A$ en \mathbf{C} , tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u \rangle$ con $U \in \mathbf{C}$ y $u : U \rightarrow A$ en \mathbf{C} , tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \rightarrow E$ en \mathbf{C} tal que $e \circ v = u$.*

En el siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\ \uparrow v & \nearrow u & & & \\ U & & & & \end{array}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B . Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e \rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A :

- Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.
- Supongamos que existe $\langle U, u \rangle$ con $U \in \mathbf{Set}$ y $u : U \rightarrow A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \rightarrow E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una flecha de $U \rightarrow E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.

◇

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por “igualador” tanto al par $\langle E, e \rangle$ como simplemente a la flecha e . Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.

Prueba. Sean \mathbf{C} una categoría, $f, g : A \rightarrow B$ flechas paralelas en \mathbf{C} y $\langle E, e \rangle$ un igualador de f y g . Supongamos que existen flechas $i, j : F \rightarrow E$ en \mathbf{C} tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ \uparrow i & & \nearrow e \circ j = e \circ i & & \\ F & & & & \end{array}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g , existe una única flecha $k : F \rightarrow E$ en \mathbf{C} tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i , pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en \mathbf{C} .

□

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. Supongamos que en **Set** el siguiente es un diagrama igualador:

$$E \xrightarrow{e} A \xrightarrow[f]{g} B$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} (\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A} \rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g , con lo cual, existe una única flecha $v : F \rightarrow E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$.

□

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro “ejemplo como motivación” (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena “condición de pegado”, en el sentido de que las funciones $f|_{U_i}^U$ ($i \in I$) se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$. Notemos que $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i \in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|_{U_i}^U \in CU_i$ y $f|_{U_j}^U \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\left\{ (f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ y $\left\{ (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{ f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{ f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$.

Proposición 1.3.1. *En Set el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba. • Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\
&= \pi_1\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \{(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \{f|_{U_i \cap U_j}^U\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \{(f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \pi_2\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \pi_2(e(f)) \\
&= (\pi_2 \circ e)(f),
\end{aligned}$$

y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e \rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in \mathbf{Set}$ y $u : X \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$ en \mathbf{Set} tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{array}{ccc}
CU & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in I} CU_i \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j) \\
\uparrow v & \nearrow u & \\
X & &
\end{array}$$

Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i \in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\{g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I} = \{g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}$ y $g_i(x) = g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 6.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i \in I} g_i$ es una función continua de U en \mathbb{R} , es decir, $\bigcup_{i \in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \rightarrow CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i \in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned}
(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\
&= e\left(\bigcup_{i \in I} g_i\right) \\
&= \left\{\left(\bigcup_{j \in I} g_j\right)|_{U_i}^U\right\}_{i \in I} \\
&= \{g_i\}_{i \in I} \\
&= u(g),
\end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \rightarrow CU$ en \mathbf{Set} tal que $e \circ v' = u$.

Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\{(v'(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I} &= u(g) \\ &= e(v(g)) \\ &= \{(v(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I},\end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|_{U_i}^U = (v(g))|_{U_i}^U$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned}v'(g) &= \bigcup_{i \in I} (v'(g))|_{U_i}^U \\ &= \bigcup_{i \in I} (v(g))|_{U_i}^U \\ &= v(g),\end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba. □

Notemos que la Proposición 1.3.1 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto U y el cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de U . El hecho de que e sea el igualador de π_1 y π_2 nos traduce la “condición de pegado” que se satisface al restringir funciones continuas de U a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 6.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

Notación 1.4.1. Dado X un espacio topológico y $P : \mathcal{O}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ un funtor (es decir un prehaz de conjuntos sobre X) y dada la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$,² para toda $t \in PU$ denotamos

$$t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t).$$

Ahora generalizamos las funciones e, π_1 y π_2 que se trabajaron en la Sección 1.3:

Definición 1.4.2 (Funciones canónicas). Sea P un prehaz sobre un espacio topológico X . Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U , definimos las siguientes funciones:

- $e : PU \rightarrow \prod_{i \in I} PU_i$ que a cada $f \in PU$ le asigna la familia $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$.

- $\pi_2 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$.

Llamamos a e la función canónica de PU en $\prod_{i \in I} PU_i$ y a π_1 y π_2 las funciones canónicas de $\prod_{i \in I} PU_i$ en $\prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$.

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

Definición 1.4.3 (Haz de conjuntos). *Un haz de conjuntos P sobre un espacio topológico X es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ y cualquier cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de U , el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} PU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde e, π_1 y π_2 son las respectivas funciones canónicas.

En la anterior definición P es por tanto un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos, \mathbb{F} -álgebras, \mathbb{F} -módulos, etc. (para un campo \mathbb{F}) obtenemos haces de anillos, de \mathbb{F} -álgebras, de \mathbb{F} -módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor C de nuestro “ejemplo como motivación”, puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de \mathbb{R} -álgebras o \mathbb{R} -módulos al dotar cada conjunto CU ($U \in \mathcal{O}(X)$) con las operaciones adecuadas. A C lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre X . En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 1.4.4 (Categoría de haces sobre un espacio topológico). *Dado un espacio topológico X , la categoría de funtores $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\text{op}}}$ tiene como objetos todos los prehaces sobre X y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por $\text{PreSh}(X)$ y la llamamos “la categoría de prehaces sobre X ”. La subcategoría plena de $\text{PreSh}(X)$ que tiene por objetos todos los haces sobre X se denota $\text{Sh}(X)$ y la llamamos “la categoría de haces sobre X ”; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre X .*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación $\text{Sh}(X)$ y $\text{PreSh}(X)$.

2 Espacios étalé o espacios fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé proveniente del francés; viene a significar “ramificado”, “extendido”, “esparcido”, “repartido”, etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.

2.1 Manojos

Definición 2.1.1 (Manojo). *Un manojo sobre un espacio topológico X es una pareja $\langle Y, p \rangle$ con Y un espacio topológico y $p : Y \rightarrow X$ una función continua.*

Según el contexto, es frecuente referirnos al manojo $\langle Y, p \rangle$ simplemente por p . La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 2.1.2 (Categoría \mathbf{Top}/X). *La categoría \mathbf{Top}/X (léase “categoría Top sobre X ”) o $\mathbf{Bund}(X)$ tiene por objetos todos los manojos sobre X . Dados $\langle Y, p \rangle, \langle Y', q \rangle \in \mathbf{Top}/X$, f es una flecha $\langle Y, p \rangle \rightarrow \langle Y', q \rangle$ en \mathbf{Top}/X si $f : Y \rightarrow Y'$ es una función continua y $q \circ f = p$.*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ & \searrow p & \downarrow q \\ & & X \end{array}$$

La categoría \mathbf{Top}/X es un ejemplo de “categoría coma” (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por $(X \downarrow \mathbf{Top})$). La notación $\mathbf{Bund}(X)$ es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manejo*. Un concepto esencial al trabajar con manojos es el de *sección*:

Definición 2.1.3 (Secciones). *Sea $p : Y \rightarrow X$ un manojo sobre X .*

- *Una flecha $s : 1_X \rightarrow p$ en \mathbf{Top}/X es llamada una sección transversal de p . En este caso decimos que s es una sección global de p .*
- *Dado $U \overset{ab}{\subseteq} X$, una flecha $s : in_{U,X} \rightarrow p$ en \mathbf{Top}/X es llamada una sección transversal de p sobre U . En este caso decimos que s es una sección local de p .*

De esta forma, una sección global (local) es una función continua que hace que el siguiente diagrama de la izquierda (derecha) conmute:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ s \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ s \nearrow & \downarrow p & \\ U & \xrightarrow{in_{U,X}} & X \end{array}$$

Vemos también que s se presenta como una inversa (local), a derecha, de p .

2.2 Espacios étalé

Para introducir los espacios étalé recordamos un concepto de topología:

Definición 2.2.1 (Homeomorfismo local). *Dados X y Y espacios topológicos, decimos que una función $p : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local sobre X si para todo $y \in Y$ existe $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ con $y \in V_y$ tal que:*

- (i) $p(V_y)$ es un subconjunto abierto de X .

(ii) $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$ es un homeomorfismo.

Una propiedad importante de los homeomorfismos locales (cuya prueba se presenta en la Sección 6 (Apéndice)) es la siguiente:

Proposición 2.2.2. *Si $p : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y .*

Con esto, podemos introducir los espacios fibrados o étalé como un caso particular de manajo:

Definición 2.2.3 (Espacio étalé). *Un espacio fibrado o étalé sobre un espacio topológico X es un manajo $\langle p, Y \rangle$, donde $p : Y \rightarrow X$ es además un homeomorfismo local.*

Con lo anterior, podemos considerar la subcategoría plena de **Top**/ X que tiene por objetos todos los espacios étalé sobre X , y que denotamos por **Etale**(X).

Si $p : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local, las inversas puntuales $p^{-1}\{x\}$ ($x \in X$) son llamadas las fibras de p sobre X . De este modo, el espacio Y se presenta como la unión disyunta de las fibras de p , justificando así el uso de las palabras *fibrado* y *étalé* en las definiciones dadas. Así mismo, hablamos de Y como el espacio alto o desplegado, y nos referimos a X como el espacio bajo o base. El espacio Y se muestra, primero, como un despliegue vertical del espacio X , representado en las fibras de cada elemento en el espacio base, y segundo, como un despliegue horizontal de X , representado mediante el pegamiento de fibras que establecen los conjuntos abiertos de Y . Así mismo, la función p se presenta como una proyección del espacio alto en el espacio bajo. Las secciones de un espacio étalé se comportan especialmente bien; muestra de ello lo da la siguiente proposición (para su prueba ver la Sección 6):

Proposición 2.2.4. *Sean $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y \rangle$, sobre U . Entonces:*

- $p|_{s(U)}^Y = s^{-1}$.
- $s : U \rightarrow s(U)$ es un homeomorfismo.
- $s(U)$ es un subconjunto abierto de Y .

Lo anterior nos permite por tanto caracterizar las secciones de $\langle p, Y \rangle$ con los abiertos básicos de Y . Ésto a su vez nos muestra que el pegamiento horizontal de fibras que se da en Y mediante conjuntos abiertos es bien portado en términos de continuidad. Un problema crucial en la teoría es el de la posibilidad de pegar secciones locales para construir secciones mayores y eventualmente globales [Zalamea, 2021], lo cual captura las problemáticas de lo local versus lo global que motivaron nuestra definición de haz. Estos paralelismos manifiestos entre haces y espacios étalé permiten que la equivalencia entre las categorías $\text{Sh}(X)$ y **Etale**(X), cuya prueba constituye nuestro objetivo en lo que sigue, no nos parezca en absoluto ajena.

3 De manojos a prehaces

(A lo largo de esta sección y la siguiente, X denota un espacio topológico fijo).

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Γ de la categoría \mathbf{Top}/X de los manojos sobre X , en la categoría $\mathbf{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X .

Definición 3.0.1 (Acción de Γ_p sobre objetos). *Sea $p : Y \rightarrow X$ un manajo sobre X . Para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos $\Gamma_p U$ como el conjunto de todas las secciones transversales de p sobre U .*



Notemos que si se tiene la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, para cada $s \in \Gamma_p U$ surge una sección transversal de p sobre V , a saber, $s \circ \iota_{V,U} = s|_V^U$, es decir $s|_V^U \in \Gamma_p V$:



Definición 3.0.2 (Acción de Γ_p sobre flechas). *Sea $p : Y \rightarrow X$ un manajo sobre X . Para cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la flecha (de \mathbf{Set}) $\Gamma_p(V \subseteq U) : \Gamma_p U \rightarrow \Gamma_p V : s \mapsto s|_V^U$.*

Las anteriores asignaciones de flechas y objetos hacen de Γ_p un funtor contravariante $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, es decir, un prehaz sobre X ; más aún, Γ_p resulta ser un haz sobre X .

Proposición 3.0.3. *Para cada manajo $p : Y \rightarrow X$, Γ_p es un haz sobre X .*

Prueba. • La prueba de que Γ_p es un prehaz sobre X es similar a la que se da para la Proposición (1.1.1).

- Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U . El siguiente diagrama en \mathbf{Set} es un igualador:

$$\Gamma_p U \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} \Gamma_p (U_i \cap U_j)$$

La prueba de esto es similar a la que se da para la Proposición (1.3.1), sumada al siguiente hecho: dada una familia $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i$, se tiene $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U,X}$: dada $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$; como $g_j : U_j \rightarrow Y$ es una sección transversal de p sobre U_j , se tiene

$p \circ g_j = \iota_{U_j, X}$, y por tanto

$$\begin{aligned}
\left(p \circ \bigcup_{i \in I} g_i \right) (x) &= p \left(\bigcup_{i \in I} g_i(x) \right) \\
&= p(g_j(x)) \\
&= \iota_{U_j, X}(x) \\
&= x \\
&= \iota_{U, X}(x);
\end{aligned}$$

con esto $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U, X}$. Lo anterior se hace para garantizar $\bigcup_{i \in I} g_i \in \Gamma_p U$.

Por tanto Γ_p es un haz sobre X . □

A los haces del tipo Γ_p , con $p : Y \rightarrow X$ un manjojo sobre X , los llamamos *haces de secciones transversales* sobre X . En ocasiones denotamos ΓY en lugar de Γ_p . Obtenemos por cada $p \in \mathbf{Top}/X$ un objeto $\Gamma_p \in \mathbf{Sh}(X)$. Ahora deseamos obtener, por cada flecha $f : \langle Y, p \rangle \rightarrow \langle Y', p' \rangle$ en \mathbf{Top}/X , una flecha $\Gamma_f : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_{p'}$ de $\mathbf{Sh}(X)$, es decir, una transformación natural entre los funtores $\Gamma_p, \Gamma_{p'} : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$; para esto necesitamos asignar, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$, una función $\Gamma_f U$ entre los conjuntos $\Gamma_p U$ y $\Gamma_{p'} U$, que además nos garantice que si $V \subseteq U$ es una flecha en $\mathcal{O}(X)$, entonces el siguiente diagrama de \mathbf{Set} conmute:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_p V & \xrightarrow{\Gamma_f V} & \Gamma_{p'} V \\
\Gamma_p(V \subseteq U) \uparrow & & \uparrow \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \\
\Gamma_p U & \xrightarrow{\Gamma_f U} & \Gamma_{p'} U
\end{array}$$

Notemos que la función $\Gamma_f U$ nos exige asignar a cada sección transversal s de p sobre U (i.e. $s : U \rightarrow Y$ es una función continua y $p \circ s = \iota_{U, X}$) una sección transversal $\Gamma_f U(s)$ de p' sobre U (i.e. una función continua $\Gamma_f U(s) : U \rightarrow Y'$ tal que $p' \circ \Gamma_f U(s) = \iota_{U, X}$). El siguiente diagrama que se forma en \mathbf{Top}/X

$$\begin{array}{ccccc}
& & Y & \xrightarrow{f} & Y' \\
& \nearrow s & \downarrow p & \nearrow p' & \\
U & \xrightarrow{\iota_{U, X}} & X & &
\end{array}$$

nos muestra que $f \circ s$ es una función continua de U en Y , y

$$\begin{aligned}
p' \circ (f \circ s) &= (p' \circ f) \circ s \\
&= p \circ s \\
&= \iota_{U, X},
\end{aligned}$$

sugiriéndonos tomar $\Gamma_f U(s) = f \circ s$. Con esto tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U))(s) &= \Gamma_f V(\Gamma_p(V \subseteq U)(s)) \\
&= \Gamma_f V(s|_V^U) \\
&= f \circ s|_V^U \\
&= f \circ (s \circ \iota_{V,U}) \\
&= (f \circ s) \circ \iota_{V,U} \\
&= (f \circ s)|_V^U \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(f \circ s) \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U)(s),
\end{aligned}$$

Y por tanto $\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U) = \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U$. Lo anterior prueba que Γ_f es una transformación natural, para cada flecha f en \mathbf{Top}/X . Estas asignaciones hacen de Γ un funtor de \mathbf{Top}/X en $\mathbf{PreSh}(X)$ (de hecho, en $\mathbf{Sh}(X)$, pero las razones de tomar la categoría de prehaces sobre X como codominio de Γ se entenderán más adelante):

Proposición 3.0.4. *Las asignaciones $p \mapsto \Gamma_p$ para cada $p \in \mathbf{Top}/X$ y $f \mapsto \Gamma_f$ para cada flecha f en \mathbf{Top}/X , determinan un funtor $\Gamma : \mathbf{Top}/X \rightarrow \mathbf{PreSh}(X)$.*

Prueba. • Veamos que Γ respeta identidades. Sea $\langle Y, p \rangle \in \mathbf{Top}/X$. Debemos ver $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$, donde 1_{Γ_p} es la transformación natural identidad del funtor Γ_p en sí mismo. Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$, tenemos que $\Gamma_{1_p} U$ es una función de $\Gamma_p U$ en $\Gamma_p U$ y $\Gamma_{1_p} U(s) = 1_p \circ s = s$; por tanto $\Gamma_{1_p} U = 1_{\Gamma_p U} = 1_{\Gamma_p} U$. Como lo anterior se tiene para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue que $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$.

- Veamos que Γ respeta composiciones. Supongamos que tenemos en \mathbf{Top}/X el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
p & & \\
\downarrow g \circ f & \searrow f & \\
& & p' \\
& \swarrow g & \\
& & p''
\end{array}$$

y veamos que en $\mathbf{PreSh}(X)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_p & & \\
\downarrow \Gamma_{g \circ f} & \searrow \Gamma_f & \\
& & \Gamma_{p'} \\
& \swarrow \Gamma_g & \\
& & \Gamma_{p''}
\end{array}$$

Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$. Tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{g \circ f} U)(s) &= (g \circ f) \circ s \\
&= g \circ (f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_g U \circ \Gamma_f U)(s).
\end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_{g \circ f} = \Gamma_g U \circ \Gamma_f U$; como esto vale para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue $\Gamma_{g \circ f} = \Gamma_g \circ \Gamma_f$.
Lo anterior prueba que Γ es un funtor de \mathbf{Top}/X en $\mathbf{PreSh}(X)$. \square

4 De prehaces a manojos

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Λ de la categoría $\mathbf{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X en la categoría \mathbf{Top}/X de manojos sobre X .

Iniciamos definiendo el “suelo” de un elemento de X respecto a un prehaz sobre X :

Definición 4.0.1 (*P-suelo de x*). Dados $x \in X$ y $P \in \mathbf{PreSh}(X)$, definimos el “*P-suelo de x* ” (denotado como $\mathbf{P-Su}(x)$) como el conjunto $\{(U, s) \mid x \in U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$

Buscamos definir una relación de equivalencia sobre el suelo de cada elemento de X :

Definición 4.0.2. Sean $P \in \mathbf{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Definimos en $\mathbf{P-Su}(x)$ la relación $\sim_{P,x}$ de la siguiente manera:

Dados $(U, s), (V, t) \in \mathbf{P-Su}(x)$, $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, si y sólo si, existe $W \in \mathcal{O}(X)$ tal que

$$x \in W \subseteq U \cap V \text{ y } s|_W^U = t|_W^V.$$

Si $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, decimos que (U, s) y (V, t) tienen el mismo *P-germen* en x .

La igualdad $s|_W^U = t|_W^V$ con $W \subseteq U \cap V$ nos recuerda la idea de “coincidir localmente” que se mostró en las motivaciones dadas en la primera sección.

Notemos que la condición $W \subseteq U \cap V$ se tiene si y sólo si $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$, y que en este caso $s|_W^U$ y $t|_W^V$ son elementos de $P(W)$, siempre que $s \in PU$ y $t \in PV$. De esta forma, podemos representar $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$ con el cumplimiento simultaneo de los dos siguientes diagramas:

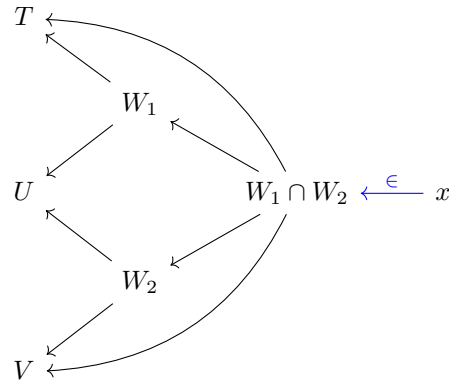
$$\begin{array}{ccc}
U & & PU \xleftarrow{\epsilon} s \\
& \swarrow & \searrow \\
& W \xleftarrow{\epsilon} x & PW \xleftarrow{\epsilon} s|_W^U = t|_W^V \\
& \swarrow & \nwarrow \\
V & & PV \xleftarrow{\epsilon} t
\end{array}$$

Donde el diagrama de la izquierda está en $\mathcal{O}(X)$, el de la derecha en \mathbf{Set} y las flechas azules denotan pertenencia conjuntista.

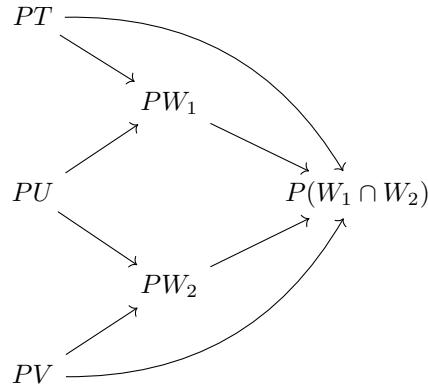
En las dos anteriores definiciones, si es claro el prehaz P con el que se está trabajando, solemos denotar $\text{Su}(x)$ y \sim_x en lugar de $P\text{-Su}(x)$ y $\sim_{P,x}$, respectivamente.

Proposición 4.0.3. *Para cualesquiera $P \in \text{PreSh}(X)$ y $x \in X$, la relación \sim_x es de equivalencia sobre $\text{Su}(x)$.*

Prueba. La reflexividad y simetría de \sim_x se siguen directamente de la definición. Veamos que \sim_x es transitiva. Sean $(T, r), (U, s), (V, t) \in \text{Su}(x)$ tales que $(T, r) \sim_x (U, s)$ y $(U, s) \sim_x (V, t)$. Existen $W_1, W_2 \in \mathcal{O}(X)$ tales que $x \in W_1 \subseteq T \cap U$ y $x \in W_2 \subseteq U \cap V$. Además $r|_{W_1}^T = s|_{W_1}^U$ y $s|_{W_1}^U = t|_{W_2}^V$. Tenemos $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}(X)$ y $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq T \cap V$; se forma en $\mathcal{O}(X)$ el siguiente diagrama conmutativo:



Como P es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en \mathbf{Set} , obtenemos en \mathbf{Set} el siguiente diagrama conmutativo:



Siguiéndolo tenemos que

$$\begin{aligned}
r|_{W_1 \cap W_2}^T &= (r|_{W_1}^T)|_{W_1 \cap W_2}^{W_1} \\
&= (s|_{W_1}^U)|_{W_1 \cap W_2}^{W_1} \\
&= s|_{W_1 \cap W_2}^U \\
&= (s|_{W_2}^U)|_{W_1 \cap W_2}^{W_2} \\
&= (t|_{W_2}^V)|_{W_1 \cap W_2}^{W_2} \\
&= t|_{W_1 \cap W_2}^V.
\end{aligned}$$

Por tanto, $(T, r) \sim_x (V, t)$ y \sim_x es transitiva. Obtenemos que \sim_x es una relación de equivalencia en $\text{Su}(x)$. \square

Ahora consideramos las clases de equivalencia generadas por la relación de tener el mismo germen en un punto:

Definición 4.0.4. Sean $P \in \text{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Para cada $(U, s) \in \text{Su}(x)$, la clase de equivalencia de (U, s) respecto a $\sim_{P,x}$ se denota por $\text{P-germ}_x s_U$, y la llamamos el germen de (U, s) en x .

Nuevamente, si por el contexto es claro con qué prehaz estamos trabajando, puede omitirse el “ P –” en la anterior definición.

El siguiente lema, que será utilizado más adelante, nos muestra que el germen de un elemento se conserva bajo restricciones; propiedad que en efecto concuerda con la intuición desarrollada hasta el momento.

Lema 4.0.5. Sean $P \in \text{PreSh}(X)$ y $U, V \in \mathcal{O}(X)$ con $V \subseteq U$ y $s \in PU$. Si $x \in V$ entonces $\text{germ}_x s_U = \text{germ}_x (s|_V^U)_V$.

Prueba. Supongamos que $x \in V$; en particular $x \in V \subseteq U \cap V$. Tenemos los diagramas (izquierda en $\mathcal{O}(X)$ y derecha en **Set**):

$$\begin{array}{ccc}
U & & PU \\
\swarrow U \subseteq V & & \searrow P(U \subseteq V) \\
& V & PV \\
\swarrow V \subseteq V & & \nearrow P(V \subseteq V) \\
V & & PV
\end{array}$$

Como $V \subseteq V$ es la flecha identidad de V , y P es en particular un funtor, entonces $P(V \subseteq V)$ es la flecha identidad de PV ; como $s \in PU$ entonces $P(U \subseteq V)(s) = s|_V^U \in PV$, luego

$$s|_V^U = P(V \subseteq V)(s|_V^U) = (s|_V^U)|_V^V.$$

Luego $(s, U) \sim_x (s|_V^U, V)$, de modo que las respectivas clases de equivalencia son iguales, es decir, $\text{germ}_x s_U = \text{germ}_x (s|_V^U)_V$. \square

Al pasar al cociente por la relación de equivalencia de “tener el mismo germen”, obtenemos el tallo (stalk en inglés) de un prehaz en un punto dado:

Definición 4.0.6. Sean $P \in \text{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Al conjunto cociente

$$P_x := \text{P-Su}(x) / \sim_x = \{\text{P-germ}_x s_U \mid (U, s) \in \text{P-Su}(x)\}$$

lo llamamos el tallo de P en x .

Los tallos de un prehaz no son necesariamente disyuntos; ello lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.0.7. Tomemos $X = \{a, b\}$ (con $a \neq b$) dotado con la topología trivial $\tau = \{\emptyset, X\}$, C el haz de funciones continuas sobre \mathbb{R} y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante en 0 ($f(a) = f(b) = 0$). Las únicas funciones continuas de X en \mathbb{R} son las constantes, es decir $CX = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} \mid g(a) = f(a)\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Su}(a) &= \left\{ (U, g) \mid a \in U \stackrel{ab}{\subseteq} X; g \in CU \right\} \\ &= \{(X, g) \mid g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ es continua}\} \\ &= \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}; \end{aligned}$$

del mismo modo se llega a $\text{Su}(b) = \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}$, y por tanto $\text{Su}(a) = \text{Su}(b)$. Sea $(X, g) \in \text{germ}_a f_X$. Entonces $(X, g) \in \text{Su}(a) = \text{Su}(b)$ y $(X, g) \sim_a (X, f)$ y por tanto existe $W \stackrel{ab}{\subseteq} X$ tal que $a \in W \stackrel{ab}{\subseteq} X$ y $g|_W^X = f|_W^X$; pero como el único abierto no vacío de X es X , tenemos $W = X$ y $f = f|_X^X = g|_X^X = g$. De este modo $\text{germ}_a f_X = \{(X, f)\}$. Análogamente se llega a $\text{germ}_b f_X = \{(X, f)\}$. Con lo anterior, $\text{germ}_a f_X \in C_a \cap C_b$, esto es, C_a y C_b no son disyuntos para $a \neq b$. Por lo tanto los tallos del haz C no son disyuntos.

Nos interesa forzar a los tallos de un prehaz a que tengan intersección vacía; para esto tomamos su unión disyunta (que resulta ser el coproducto de los tallos en la categoría **Set**):

Definición 4.0.8. Sea $P \in \text{PreSh}(X)$. Denotamos por Λ_P a la unión disyunta de los tallos de P en los elementos de X :

$$\begin{aligned} \Lambda_P &:= \coprod_{x \in X} P_x \\ &= \bigcup_{x \in X} (P_x \times \{x\}) \\ &= \{(\text{P-germ}_x s_U \mid x \in X; (U, s) \in \text{P-Su}(x))\}. \end{aligned}$$

5 Diálogo entre funtores

6 Apéndice

Teorema 6.0.1 (Lema de pegado). Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \subseteq^{\text{ab}} X$, $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \rightarrow Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente “condición de pegado”: para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i \in I} f_i$ es una función continua de U en Y .

Prueba. • Veamos que f es en efecto una función de U en Y . Sea $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x) \rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y . Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y \rangle \in f_j$ y $\langle x, y' \rangle \in f_k$, es decir $x \in U_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' = f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y , es decir, f es una función de U en Y .

- Probemos que $f : U \rightarrow Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca. Sea $V \subseteq^{\text{ab}} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$:

\subseteq : Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$.

\supseteq : Sea $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \subseteq^{\text{ab}} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \subseteq^{\text{ab}} U$. Como $U_i \subseteq^{\text{ab}} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \subseteq^{\text{ab}} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \subseteq^{\text{ab}} U.$$

Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \rightarrow Y$ es continua. □

Proposición 6.0.2. Si $p : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y .

Prueba. • Probamos la continuidad de p puntualmente. Sean $y \in Y$ y $U \subseteq^{\text{ab}} X$ con $p(y) \in U$. Tenemos que $y \in V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$ y $p(y) \in p(V_y) \subseteq^{\text{ab}} X$. Tomando $W = p(V_y) \cap U$ se tiene $p(y) \in W \subseteq^{\text{ab}} X$. Además $W \subseteq p(V_y)$ y $W \subseteq U$. Como $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$ es un homeomorfismo, entonces $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^Y)^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$, así que $y \in p^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} Y$; igualmente, $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$, lo cual prueba que p es continua en y . Como y es arbitraria en Y , obtenemos que $p : Y \rightarrow X$ es continua.

- Sea $V \subseteq^{ab} Y$; probemos que $p(V) \subseteq^{ab} X$. Para cada $y \in V$ definimos $W_y = V_y \cap V \subseteq^{ab} V_y$. Como $p|_{V_y}^V : V_y \rightarrow p(V_y)$ es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego $p(W_y) = (p|_{V_y}^V)(W_y) \subseteq^{ab} p(V_y)$; como $p(V_y) \subseteq^{ab} X$ entonces $p(W_y) \subseteq^{ab} X$ para cada $y \in V$, luego $\bigcup_{y \in V} p(W_y) \subseteq^{ab} X$. Ya que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{y \in V} p(W_y) &= \bigcup_{y \in V} p(V \cap V_y) \\
&= p\left(\bigcup_{y \in V} (V \cap V_y)\right) \\
&= p\left(V \cap \bigcup_{y \in V} V_y\right) \\
&= p(V),
\end{aligned}$$

pues $V \subseteq \bigcup_{y \in V} V_y$, entonces $p(V) \subseteq^{ab} X$. Obtenemos así que $p : Y \rightarrow X$ es una función abierta.

- Llamemos $\mathcal{B} = \left\{ W \subseteq^{ab} Y \mid p(W) \subseteq^{ab} X, p|_W^Y : W \rightarrow p(W) \text{ es homeomorfismo} \right\}$ y probemos que \mathcal{B} es una base para la topología de Y . Sean $V \subseteq^{ab} Y$ y $y \in V$. Llamemos $W_y = V_y \cap V$, de modo que $y \in W_y \subseteq V$. Como $V_y \subseteq^{ab} Y$ entonces $W_y \subseteq^{ab} Y$. Tenemos que $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$ es un homeomorfismo; como $W_y \subseteq^{ab} V_y$ y todo homeomorfismo es en particular una función abierta, obtenemos $p(W_y) = (p|_{V_y}^Y)(W_y) \subseteq^{ab} p(V_y) \subseteq^{ab} X$, de modo que $p(W_y) \subseteq^{ab} X$; además, ya que la restricción de homeomorfismos es un homeomorfismo, entonces $(p|_{V_y}^Y)|_{W_y}^{V_y} = p|_{W_y}^Y : W_y \rightarrow p(W_y)$ es un homeomorfismo. Así, $W_y \in \mathcal{B}$, y \mathcal{B} es base para la topología de Y . □

Proposición 6.0.3. Sean $U \subseteq^{ab} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y \rangle$, sobre U . Entonces:

- (i) $p|_{s(U)}^Y = s^{-1}$.
- (ii) $s : U \rightarrow s(U)$ es un homeomorfismo.
- (iii) $s(U)$ es un subconjunto abierto de Y .

Prueba. (i) Dado $x \in U$ tenemos

$$\begin{aligned}
(p|_{s(U)}^Y \circ s)(x) &= p|_{s(U)}^Y(s(x)) \\
&= p(s(x)) \\
&= in_{U,X}(x) \\
&= x \\
&= 1_U(x),
\end{aligned}$$

luego $p|_{s(U)}^Y \circ s = 1_U(x)$. Dado $y \in s(U)$, existe $z \in U$ tal que $y = s(z)$, y:

$$\begin{aligned} (s \circ p|_{s(U)}^Y)(y) &= s(p|_{s(U)}^Y(y)) \\ &= s(p(y)) \\ &= s(p(s(z))) \\ &= s(z) \\ &= y, \end{aligned}$$

de modo que $s \circ p|_{s(U)}^Y = 1_{s(U)}$. Esto prueba (i).

(ii) Sabemos que s es una función continua, y su inversa $p|_{s(U)}^Y$ es continua por ser la restricción de una función continua; por tanto, $s : U \rightarrow s(U)$ es un homeomorfismo.

(iii) Ahora veamos que $s(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y$. Sea $y \in s(U)$. Dado $x \in s^{-1}(V_y)$, tenemos $s(x) \in V_y$ y $x = p(s(x)) \in p(V_y)$; por tanto $s^{-1}(V_y) \subseteq p(V_y)$. Como $V_y \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ y $s : U \rightarrow Y$ es continua, entonces $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} U$; como $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$, entonces $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} X$ y $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} p(V_y)$. Como $p|_{V_y}^Y$ es en particular continua, se tiene $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \stackrel{ab}{\subseteq} V_y$; como $V_y \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ entonces $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \stackrel{ab}{\subseteq} Y$. Además, como $y \in s(U)$, se sigue que $s(p|_{V_y}^Y(y)) = s(p|_{s(U)}^Y(y)) = s(s^{-1}(y)) = y \in V_y$ y por tanto $y \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, nos falta probar que $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$; para esto basta ver que $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) = V_y \cap s(U)$:

\subseteq : Por definición sabemos que $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y$. Sea $t \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Tenemos que $s(p|_{V_y}^Y(t)) \in V_y$ y $p|_{V_y}^Y(t) \in s^{-1}(V_y) \subseteq U$. Además,

$$p|_{V_y}^Y(s(p|_{V_y}^Y(t))) = p(s(p|_{V_y}^Y(t))) = p|_{V_y}^Y(t).$$

Como $p|_{V_y}^Y$ es en particular inyectiva, obtenemos $t = s(p|_{V_y}^Y(t))$; ya que $p|_{V_y}^Y(t) \in U$, se sigue $t \in s(U)$. Con lo anterior se tiene $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$ y por lo tanto $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y \cap s(U)$.

\supseteq : Sea $t \in V_y \cap s(U)$. Tenemos $p|_{V_y}^Y(t) = p(t) = p|_{s(U)}^Y(t)$, luego

$$s(p|_{V_y}^Y(t)) = s(p|_{s(U)}^Y(t)) = s(s^{-1}(t)) = t \in V_y,$$

de modo que $t \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, $V_y \cap s(U) \subseteq (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$.

□

Proposición 6.0.4. Sea Σ una familia de subconjuntos de X . Se tiene que Σ es base para una topología sobre X , si y solo si, tanto X como la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ , es unión de elementos de Σ .

Prueba. (\Rightarrow) Supongamos que Σ es base para una topología sobre X . Como X es abierto, es unión de elementos de Σ . Como los elementos de Σ son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de Σ es abierta y por tanto es unión de elementos de Σ .

(\Leftarrow) Supongamos que X es unión de elementos de Σ y que la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ es unión de elementos de Σ . Sea τ_Σ el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de Σ . Veamos que τ_Σ es una topología sobre X :

- Como los elementos de Σ son subconjuntos de X , entonces la unión de elementos de Σ es subconjunto de X , de modo que τ_Σ es una familia de subconjuntos de X .
- X es unión de elementos de Σ , así que $X \in \tau_\Sigma$. El conjunto ϕ es la unión vacía de elementos de Σ , así que $\phi \in \tau_\Sigma$.
- Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de τ_Σ . Para cada $i \in I$ existe una familia $\{V_j^i\}_{j \in J}$ de elementos de Σ tal que $U_i = \bigcup_{j \in J} V_j^i$. Por tanto

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i &= \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} V_j^i \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} V_j^i, \end{aligned}$$

luego $\bigcup_{i \in I} U_i$ es unión de elementos de Σ y por tanto pertenece a τ_Σ .

- Sean $U, V \in \tau_\Sigma$. Existen $\{U_i\}_{i \in I}, \{V_j\}_{j \in J}$, familias de elementos de Σ tales que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y $V = \bigcup_{j \in J} V_j$. Entonces

$$\begin{aligned} U \cap V &= U \cap \bigcup_{j \in J} V_j \\ &= \bigcup_{j \in J} (U \cap V_j) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left(\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap V_j \right) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} (U_i \cap V_j) \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (U_i \cap V_j), \end{aligned}$$

y $U_i \cap V_j \in \Sigma$ para cualesquiera $i \in I, j \in J$, así que $U \cap V$ es unión de elementos de Σ , es decir $U \cap V \in \tau_\Sigma$.

Lo anterior prueba que τ_Σ es una topología sobre X . El hecho de que Σ es base para τ_Σ es trivial, pues cada elemento de τ_Σ es unión de elementos de Σ .

□

Referencias

- [Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.
- [Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- [Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag.
- [Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum.
- [Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.