Teoría de categorías (2024-I)
Trabajo de profundización

Dos aproximaciones equivalentes a la noción de haz

Juan Camilo Lozano Suárez [1]

Resumen. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

Palabras Clave. Haz; espacio étalé; homeomorfismo local; manojo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X, al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de U. Una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U, y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V : V \to \mathbb{R}$ es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 2.1), f nos permite pasar de un apropiado conocimiento local de U a un conocimiento global, en la siguiente forma:

[1]Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

(P2) Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U. Si $f_i : f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces $f : U \to \mathbb{R}$ es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X, y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante "$V \subseteq U$". Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U:

$$CU := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{array}{rrcl} C(V \subseteq U): & CU & \to & CV \\ & f & \longmapsto & f|_V^U \end{array}$$

que a cada función continua de U en $\mathbb{R}$ le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V, que a su vez es una función continua de V en $\mathbb{R}$. Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U, $C(V \subseteq U) : CU \to CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

Prueba.

- Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{array}{rrcl} C(1_U): & CU & \longrightarrow & CU \\ & f & \longmapsto & f|_U^U = f \end{array}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W, $C(W \subseteq U) : CU \to CW$. Tenemos ademas en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \to CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones. □

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1 (Prehaz)**.** *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

La Proposición 1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto categórico de *igualadores.*

1.2 Igualadores

Definición 1.2. *En una categoría arbitraria $\boldsymbol{C}$, sean $f, g : A \to B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e\rangle$, con $E \in \boldsymbol{C}$ y $e : E \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u\rangle$ con $U \in \boldsymbol{C}$ y $u : U \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \to E$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $e \circ v = u$.*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como " diagrama igualador", se resume la anterior definición:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B. Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e\rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A:*

- *Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.*
- *Supongamos que existe $\langle U, u\rangle$ con $U \in$ **Set** y $u : U \to A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \to E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una fleca de $U \to E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.*

$\Diamond$

Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles másadelante:

Proposición 1.2.

2 Anexos

Teorema 2.1 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$, $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to Y$*

es una función continua. Además suponemos la siguiente "condición de pegado": para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es una función continua de U en Y.

Prueba.

- Veamos que f es en efecto una función de U en Y. Sea $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x)\rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y. Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f = \bigcup_{i\in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y\rangle \in f_j$ y $\langle x, y'\rangle \in f_k$, es decir $x \in I_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' \in f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y, es decir, f es una función de U en Y.

- Probemos que $f : U \to Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca . Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$:

  $\subseteq$: Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$.

  $\supseteq$: Sea $x \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

  Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \overset{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U.$$

  Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i\in I} f_i : U \to Y$ es continua.

$\square$