

DOS APROXIMACIONES EQUIVALENTES A LA NOCIÓN DE HAZ

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ ¹

RESUMEN. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

PALABRAS CLAVE. Haz; espacio étalé; homeomorfismo local; manojos; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X , al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos de U . Una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U , y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \stackrel{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 2.0.1), f nos permite pasar de un apropiado conocimiento local de U a un conocimiento global, en la siguiente forma:

¹Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

(P2) Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U . Si $f|_{U_i}^U : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ (la restricción de f a U_i) es continua para todo $i \in I$, entonces $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X , y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante “ $V \subseteq U$ ”. Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U :

$$CU := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad CU &\rightarrow CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de U en \mathbb{R} le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V , que a su vez es una función continua de V en \mathbb{R} . Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U , $C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**.*

Prueba. • Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U) : \quad CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{CU}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W , $C(W \subseteq U) : CU \rightarrow CW$. Tenemos además en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz). *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**.*

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria C , sean $f, g : A \rightarrow B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e \rangle$, con $E \in C$ y $e : E \rightarrow A$ en C , tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u \rangle$ con $U \in C$ y $u : U \rightarrow A$ en C , tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \rightarrow E$ en C tal que $e \circ v = u$.*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\ \uparrow v & \nearrow u & & & \\ U & & & & \end{array}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B . Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e \rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A :*

- Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.
- Supongamos que existe $\langle U, u \rangle$ con $U \in \mathbf{Set}$ y $u : U \rightarrow A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \rightarrow E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una flecha de $U \rightarrow E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.

◇

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por “igualador” tanto al par $\langle E, e \rangle$ como simplemente a la flecha e . Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

Prueba. Sean \mathbf{C} una categoría, $f, g : A \rightarrow B$ flechas paralelas en \mathbf{C} y $\langle E, e \rangle$ un igualador de f y g . Supongamos que existen flechas $i, j : F \rightarrow E$ en \mathbf{C} tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ \uparrow i & & \nearrow e \circ j = e \circ i & & \\ F & & & & \end{array}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g , existe una única flecha $k : F \rightarrow E$ en \mathbf{C} tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i , pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en \mathbf{C} . □

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que en **Set** el siguiente es un diagrama igualador:*

$$E \xrightarrow{e} A \xrightarrow[f]{g} B$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} (\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A} \rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g , con lo cual, existe una única flecha $v : F \rightarrow E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$. □

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro “ejemplo como motivación” (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena “condición de pegado”, en el sentido de que las funciones $f|_{U_i}^U$ ($i \in I$) se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$. Notemos que $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i \in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|_{U_i}^U \in CU_i$ y $f|_{U_j}^U \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\{(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I}$ y $\{(f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$.

Proposición 1.3.1. *En Set el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba. • Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\
&= \pi_1\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \left\{(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \left\{f|_{U_i \cap U_j}^U\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \left\{(f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \pi_2\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \pi_2(e(f)) \\
&= (\pi_2 \circ e)(f),
\end{aligned}$$

y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e \rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in \mathbf{Set}$ y $u : X \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$ en \mathbf{Set} tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{array}{ccc}
CU & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j) \\
\uparrow v & \nearrow u & \\
X & &
\end{array}$$

Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i \in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\left\{g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I} = \left\{g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}$ y $g_i(x) = g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 2.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i \in I} g_i$ es una función continua de U en \mathbb{R} , es decir,

$\bigcup_{i \in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \rightarrow CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i \in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned} (e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\ &= e\left(\bigcup_{i \in I} g_i\right) \\ &= \left\{ \left(\bigcup_{j \in I} g_j\right)|_{U_i}^U \right\}_{i \in I} \\ &= \{g_i\}_{i \in I} \\ &= u(g), \end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \rightarrow CU$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$. Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} \{(v'(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I} &= u(g) \\ &= e(v(g)) \\ &= \{(v(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I}, \end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|_{U_i}^U = (v(g))|_{U_i}^U$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned} v'(g) &= \bigcup_{i \in I} (v'(g))|_{U_i}^U \\ &= \bigcup_{i \in I} (v(g))|_{U_i}^U \\ &= v(g), \end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba. □

2 Anexos

Teorema 2.0.1 (Lema de pegado). *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \subseteq^{ab} X$, $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \rightarrow Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente “condición de pegado”: para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i \in I} f_i$ es una función continua de U en Y .*

Prueba. • Veamos que f es en efecto una función de U en Y . Sea $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x) \rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y . Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y \rangle \in f_j$ y $\langle x, y' \rangle \in f_k$, es decir $x \in U_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' = f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$,

con lo cual $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y , es decir, f es una función de U en Y .

- Probemos que $f : U \rightarrow Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca. Sea $V \stackrel{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$:

\subseteq : Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$.

\supseteq : Sea $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \stackrel{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \stackrel{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \stackrel{ab}{\subseteq} U$, de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \stackrel{ab}{\subseteq} U.$$

Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \rightarrow Y$ es continua.

□