

# DOS APROXIMACIONES EQUIVALENTES A LA NOCIÓN DE HAZ

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ <sup>1</sup>

---

RESUMEN. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

PALABRAS CLAVE. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manojos; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

## Contents

<b>1</b>	<b>Haz como funtor</b>	<b>2</b>
1.1	Un ejemplo como motivación . . . . .	2
1.2	Igualadores . . . . .	3
1.3	Un ejemplo como motivación (continuación) . . . . .	5
1.4	Definición funtorial de Haz . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Espacios étalé o espacios fibrados</b>	<b>8</b>
2.1	Manojos . . . . .	9
2.2	Espacios étalé . . . . .	9
<b>3</b>	<b>De manojos a prehaces</b>	<b>11</b>

---

<sup>1</sup>Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.  
Email: jclozanos@unal.edu.co

4	De prehaces a manojos	14
5	Diálogo entre funtores	18
6	Apéndice	19

# 1 Haz como funtor

## 1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean  $X$  un espacio topológico y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , al cual dotamos con un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos abiertos de  $U$ . Una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto  $U$ , y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de  $U$  en el siguiente sentido:

**(P1)** Si  $V \stackrel{ab}{\subseteq} U$  entonces  $f|_V^U : V \rightarrow \mathbb{R}$  (la restricción de  $f$  de  $U$  a  $V$ ) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 6.0.1), un apropiado conocimiento local de  $U$  nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

**(P2)** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función tal que  $f|_{U_i}^U : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  es continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f$  es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría  $\mathcal{O}(X)$  que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de  $X$ , y en la cual, dados  $U, V \in \mathcal{O}(X)$ , hay una flecha de  $V$  en  $U$  si y solo si  $V \subseteq U$ ; dicha flecha en  $\mathcal{O}(X)$  (que será la única de  $V$  en  $U$ ) la representamos igualmente mediante “ $V \subseteq U$ ”. Ahora, para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  definimos el conjunto  $CU$  de todas las funciones reales continuas sobre  $U$ :

$$CU := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad CU &\rightarrow CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de  $U$  en  $\mathbb{R}$  le asigna su respectiva función restricción al subconjunto  $V$ , que a su vez es una función continua de  $V$  en  $\mathbb{R}$ . Tendremos entonces la siguiente propiedad:

**Proposición 1.1.1.** *La regla  $C$  que a cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  le asigna el conjunto  $CU$  y a cada flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$  le asigna la función restricción de  $V$  en  $U$ ,  $C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CV$ , es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

**Prueba.** • Trivialmente se tiene que  $C$  respeta identidades, pues para cualquier  $U \in \mathcal{O}(X)$  tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U) : \quad CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir,  $C(1_U) = 1_{C(U)}$ .

- Supongamos que en  $\mathcal{O}(X)$  tenemos  $W \subseteq V \subseteq U$ . Entonces  $W \subseteq U$  y en **Set** tenemos la función restricción de  $U$  en  $W$ ,  $C(W \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Tenemos además en **Set** la composición  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Para cada  $f \in CU$  se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$  y  $C$  respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que  $C$  es un **prehaz** (de conjuntos):

**Definición 1.1.2** (Prehaz). *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico  $X$  es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

## 1.2 Igualadores

**Definición 1.2.1.** *En una categoría arbitraria  $\mathbf{C}$ , sean  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas. Un igualador de  $f$  y  $g$  es una pareja  $\langle E, e \rangle$ , con  $E \in \mathbf{C}$  y  $e : E \rightarrow A$  en  $\mathbf{C}$ , tal que  $f \circ e = g \circ e$ , y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in \mathbf{C}$  y  $u : U \rightarrow A$  en  $\mathbf{C}$ , tal que  $f \circ u = g \circ u$ , entonces existe una única flecha  $v : U \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $e \circ v = u$ .*

En el siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\ \uparrow v & \nearrow u & & & \\ U & & & & \end{array}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

**Ejemplo 1.2.2.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos y  $f, g$  funciones de  $A$  en  $B$ . Verifiquemos que un igualador de  $f$  y  $g$  está dado por  $\langle E, e \rangle$ , donde  $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$  y  $e$  es la función inclusión de  $E$  en  $A$ :

- Dado  $x \in E$  se tiene  $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$ , es decir,  $f \circ e = g \circ e$ .
- Supongamos que existe  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in \mathbf{Set}$  y  $u : U \rightarrow A$  en **Set**, tal que  $f \circ u = g \circ u$ . Podemos definir  $v : U \rightarrow E$  vía  $v(x) = u(x)$  para todo  $x \in U$ , e inmediatamente se tendrá  $e \circ v = u$ ; igualmente, si  $v'$  es una flecha de  $U \rightarrow E$  en **Set** tal que  $e \circ v' = u$  entonces para cada  $x \in U$  se tiene  $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$ , de modo que  $v = v'$ .

◇

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por “igualador” tanto al par  $\langle E, e \rangle$  como simplemente a la flecha  $e$ . Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

**Proposición 1.2.3.** En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.

**Prueba.** Sean  $\mathbf{C}$  una categoría,  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas en  $\mathbf{C}$  y  $\langle E, e \rangle$  un igualador de  $f$  y  $g$ . Supongamos que existen flechas  $i, j : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tales que  $e \circ i = e \circ j$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ \uparrow i & & \nearrow e \circ j = e \circ i & & \\ F & & & & \end{array}$$

Tenemos  $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$ , es decir,  $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$ . Como  $e$  es un igualador de  $f$  y  $g$ , existe una única flecha  $k : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $e \circ k = e \circ j$ ; trivialmente  $j$  cumple esta propiedad, pero también lo hace  $i$ , pues por hipótesis  $e \circ i = e \circ j$ . Se sigue que  $i = j$  y por tanto  $e$  es un monomorfismo en  $\mathbf{C}$ .

□

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

**Proposición 1.2.4.** Supongamos que en **Set** el siguiente es un diagrama igualador:

$$E \xrightarrow{e} A \xrightarrow[f]{g} B$$

Entonces, para todo  $a \in A$  tal que  $f(a) = g(a)$ , existe  $\alpha \in E$  tal que  $e(\alpha) = a$ .

**Prueba.** Definimos  $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} (\subseteq A)$ . Por la Proposición 1.2.3, sabemos que  $\langle F, in_{F,A} \rangle$  (donde  $in_{F,A}$  es la función inclusión de  $F$  en  $A$ ), es un igualador de  $f$  y  $g$ , con lo cual, existe una única flecha  $v : F \rightarrow E$  tal que  $e \circ v = in_{F,A}$ . Como  $a \in F$ , tenemos  $\alpha := v(a) \in E$  y  $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$ .

□

### 1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro “ejemplo como motivación” (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena “condición de pegado”, en el sentido de que las funciones  $f|_{U_i}^U$  ( $i \in I$ ) se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera  $i, j \in I$  y cualquier  $x \in U_i \cap U_j$ , se tiene  $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$ ; es este buen comportamiento local en subconjuntos de  $U$  lo que nos permite el paso a un conocimiento global de  $U$  mediante la función continua  $f$  que se reconstruye al pegar los elementos de la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ . Notemos que  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$  es un elemento del producto cartesiano  $\prod_{i \in I} CU_i$ . Como, para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f|_{U_i}^U \in CU_i$  y  $f|_{U_j}^U \in CU_j$ , y como  $U_i \cap U_j \subseteq U_i$  y  $U_i \cap U_j \subseteq U_j$ , obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones  $(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$ , con las cuales formamos las familias  $\left\{ (f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$  y  $\left\{ (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ , que a su vez son elementos del producto cartesiano  $\prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ . Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$  que a cada  $f \in CU$  le asigna la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ .
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{ f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .
- $\pi_2 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{ f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

**Proposición 1.3.1.** *En Set el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} CU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$$

**Prueba.** • Dado  $f \in CU$  tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\
&= \pi_1\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \{(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \{f|_{U_i \cap U_j}^U\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \{(f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \pi_2\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\
&= \pi_2(e(f)) \\
&= (\pi_2 \circ e)(f),
\end{aligned}$$

y por tanto  $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$ .

- Veamos que la pareja  $\langle CU, e \rangle$  es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen  $X \in \mathbf{Set}$  y  $u : X \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$  en  $\mathbf{Set}$  tales que  $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ .

$$\begin{array}{ccc}
CU & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in I} CU_i \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j) \\
\uparrow v & \nearrow u & \\
X & & 
\end{array}$$

Para cada  $g \in X$ , existe  $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  tal que  $g(u) = \{g_i\}_{i \in I}$ . Para todo  $i \in I$  tenemos que  $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, y además  $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$  implica  $\{g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I} = \{g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I}$ , con lo cual para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}$  y  $g_i(x) = g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$  para todo  $x \in U_i \cap U_j$ . Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 6.0.1) para afirmar que  $\bigcup_{i \in I} g_i$  es una función continua de  $U$  en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\bigcup_{i \in I} g_i \in CU$ . Definimos así  $v : X \rightarrow CU$  vía  $v(g) = \bigcup_{i \in I} g_i$  para cada  $g \in X$ . Como

$$\begin{aligned}
(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\
&= e\left(\bigcup_{i \in I} g_i\right) \\
&= \left\{\left(\bigcup_{j \in I} g_j\right)|_{U_i}^U\right\}_{i \in I} \\
&= \{g_i\}_{i \in I} \\
&= u(g),
\end{aligned}$$

entonces  $e \circ v = u$ . Ahora, supongamos que existe  $v' : X \rightarrow CU$  en  $\mathbf{Set}$  tal que  $e \circ v' = u$ .

Entonces para toda  $g \in X$  se tiene

$$\begin{aligned}\{(v'(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I} &= u(g) \\ &= e(v(g)) \\ &= \{(v(g))|_{U_i}^U\}_{i \in I},\end{aligned}$$

y por tanto  $(v'(g))|_{U_i}^U = (v(g))|_{U_i}^U$  para todo  $i \in I$ . Con lo anterior

$$\begin{aligned}v'(g) &= \bigcup_{i \in I} (v'(g))|_{U_i}^U \\ &= \bigcup_{i \in I} (v(g))|_{U_i}^U \\ &= v(g),\end{aligned}$$

obteniendo  $v' = v$ , lo cual completa la prueba. □

Notemos que la Proposición 1.3.1 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto  $U$  y el cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$ . El hecho de que  $e$  sea el igualador de  $\pi_1$  y  $\pi_2$  nos traduce la “condición de pegado” que se satisface al restringir funciones continuas de  $U$  a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 6.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

## 1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

**Notación 1.4.1.** Dado  $X$  un espacio topológico y  $P : \mathcal{O}(X)^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$  un funtor (es decir un prehaz de conjuntos sobre  $X$ ) y dada la flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ ,<sup>2</sup> para toda  $t \in PU$  denotamos

$$t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t).$$

Ahora generalizamos las funciones  $e, \pi_1$  y  $\pi_2$  que se trabajaron en la Sección 1.3:

**Definición 1.4.2** (Funciones canónicas). Sea  $P$  un prehaz sobre un espacio topológico  $X$ . Dados  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$ , definimos las siguientes funciones:

- $e : PU \rightarrow \prod_{i \in I} PU_i$  que a cada  $f \in PU$  le asigna la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ .
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$  le asigna la familia  $\left\{f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

- $\pi_2 : \prod_{i \in I} PU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} PU_i$  le asigna la familia  $\left\{f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

Llamamos a  $e$  la función canónica de  $PU$  en  $\prod_{i \in I} PU_i$  y a  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las funciones canónicas de  $\prod_{i \in I} PU_i$  en  $\prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$ .

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

**Definición 1.4.3** (Haz de conjuntos). *Un haz de conjuntos  $P$  sobre un espacio topológico  $X$  es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier  $U \in \mathcal{O}(X)$  y cualquier cubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$ , el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} PU_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde  $e, \pi_1$  y  $\pi_2$  son las respectivas funciones canónicas.

En la anterior definición  $P$  es por tanto un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos,  $\mathbb{F}$ -álgebras,  $\mathbb{F}$ -módulos, etc. (para un campo  $\mathbb{F}$ ) obtenemos haces de anillos, de  $\mathbb{F}$ -álgebras, de  $\mathbb{F}$ -módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor  $C$  de nuestro “ejemplo como motivación”, puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de  $\mathbb{R}$ -álgebras o  $\mathbb{R}$ -módulos al dotar cada conjunto  $CU$  ( $U \in \mathcal{O}(X)$ ) con las operaciones adecuadas. A  $C$  lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre  $X$ . En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

**Definición 1.4.4** (Categoría de haces sobre un espacio topológico). *Dado un espacio topológico  $X$ , la categoría de funtores  $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\text{op}}}$  tiene como objetos todos los prehaces sobre  $X$  y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por  $\text{PreSh}(X)$  y la llamamos “la categoría de prehaces sobre  $X$ ”. La subcategoría plena de  $\text{PreSh}(X)$  que tiene por objetos todos los haces sobre  $X$  se denota  $\text{Sh}(X)$  y la llamamos “la categoría de haces sobre  $X$ ”; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre  $X$ .*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación  $\text{Sh}(X)$  y  $\text{PreSh}(X)$ .

## 2 Espacios étalé o espacios fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé proveniente del francés; viene a significar “ramificado”, “extendido”, “esparcido”, “repartido”, etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.



## 2.1 Manojos

**Definición 2.1.1** (Manojo). *Un manojo sobre un espacio topológico  $X$  es una pareja  $\langle Y, p \rangle$  con  $Y$  un espacio topológico y  $p : Y \rightarrow X$  una función continua.*

Según el contexto, es frecuente referirnos al manojo  $\langle Y, p \rangle$  simplemente por  $p$ . La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

**Definición 2.1.2** (Categoría  $\mathbf{Top}/X$ ). *La categoría  $\mathbf{Top}/X$  (léase “categoría Top sobre  $X$ ”) o  $\mathbf{Bund}(X)$  tiene por objetos todos los manojos sobre  $X$ . Dados  $\langle Y, p \rangle, \langle Y', q \rangle \in \mathbf{Top}/X$ ,  $f$  es una flecha  $\langle Y, p \rangle \rightarrow \langle Y', q \rangle$  en  $\mathbf{Top}/X$  si  $f : Y \rightarrow Y'$  es una función continua y  $q \circ f = p$ .*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ & \searrow p & \downarrow q \\ & & X \end{array}$$

La categoría  $\mathbf{Top}/X$  es un ejemplo de “categoría coma” (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por  $(X \downarrow \mathbf{Top})$ ). La notación  $\mathbf{Bund}(X)$  es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manejo*. Un concepto esencial al trabajar con manojos es el de *sección*:

**Definición 2.1.3** (Secciones). *Sea  $p : Y \rightarrow X$  un manojo sobre  $X$ .*

- *Una flecha  $s : 1_X \rightarrow p$  en  $\mathbf{Top}/X$  es llamada una sección transversal de  $p$ . En este caso decimos que  $s$  es una sección global de  $p$ .*
- *Dado  $U \overset{ab}{\subseteq} X$ , una flecha  $s : in_{U,X} \rightarrow p$  en  $\mathbf{Top}/X$  es llamada una sección transversal de  $p$  sobre  $U$ . En este caso decimos que  $s$  es una sección local de  $p$ .*

De esta forma, una sección global (local) es una función continua que hace que el siguiente diagrama de la izquierda (derecha) conmute:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ s \nearrow & \downarrow p & \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y & \\ s \nearrow & \downarrow p & \\ U & \xrightarrow{in_{U,X}} & X \end{array}$$

Vemos también que  $s$  se presenta como una inversa (local), a derecha, de  $p$ .

## 2.2 Espacios étalé

Para introducir los espacios étalé recordamos un concepto de topología:

**Definición 2.2.1** (Homeomorfismo local). *Dados  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, decimos que una función  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local sobre  $X$  si para todo  $y \in Y$  existe  $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$  con  $y \in V_y$  tal que:*

- (i)  $p(V_y)$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

(ii)  $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo.

Una propiedad importante de los homeomorfismos locales (cuya prueba se presenta en la Sección 6 (Apéndice)) es la siguiente:

**Proposición 2.2.2.** *Si  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local, entonces  $p$  es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de  $Y$  que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de  $Y$ .*

Con esto, podemos introducir los espacios fibrados o étalé como un caso particular de manajo:

**Definición 2.2.3** (Espacio étalé). *Un espacio fibrado o étalé sobre un espacio topológico  $X$  es un manajo  $\langle p, Y \rangle$ , donde  $p : Y \rightarrow X$  es además un homeomorfismo local.*

Con lo anterior, podemos considerar la subcategoría plena de  $\mathbf{Top}/X$  que tiene por objetos todos los espacios étalé sobre  $X$ , y que denotamos por  $\mathbf{Etale}(X)$ .

Si  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local, las inversas puntuales  $p^{-1}\{x\}$  ( $x \in X$ ) son llamadas las fibras de  $p$  sobre  $X$ . De este modo, el espacio  $Y$  se presenta como la unión disyunta de las fibras de  $p$ , justificando así el uso de las palabras *fibrado* y *étalé* en las definiciones dadas. Así mismo, hablamos de  $Y$  como el espacio alto o desplegado, y nos referimos a  $X$  como el espacio bajo o base. El espacio  $Y$  se muestra, primero, como un despliegue vertical del espacio  $X$ , representado en las fibras de cada elemento en el espacio base, y segundo, como un despliegue horizontal de  $X$ , representado mediante el pegamiento de fibras que establecen los conjuntos abiertos de  $Y$ . Así mismo, la función  $p$  se presenta como una proyección del espacio alto en el espacio bajo. Las secciones de un espacio étalé se comportan especialmente bien; muestra de ello lo da la siguiente proposición (para su prueba ver la Sección 6):

**Proposición 2.2.4.** *Sean  $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$  y  $s$  una sección transversal, de un espacio étalé  $\langle p, Y \rangle$ , sobre  $U$ . Entonces:*

- $p|_{s(U)}^Y = s^{-1}$ .
- $s : U \rightarrow s(U)$  es un homeomorfismo.
- $s(U)$  es un subconjunto abierto de  $Y$ .

Lo anterior nos permite por tanto caracterizar las secciones de  $\langle p, Y \rangle$  con los abiertos básicos de  $Y$ . Ésto a su vez nos muestra que el pegamiento horizontal de fibras que se da en  $Y$  mediante conjuntos abiertos es bien portado en términos de continuidad. Un problema crucial en la teoría es el de la posibilidad de pegar secciones locales para construir secciones mayores y eventualmente globales [Zalamea, 2021], lo cual captura las problemáticas de lo local versus lo global que motivaron nuestra definición de haz. Estos paralelismos manifiestos entre haces y espacios étalé permiten que la equivalencia entre las categorías  $\mathbf{Sh}(X)$  y  $\mathbf{Etale}(X)$ , cuya prueba constituye nuestro objetivo en lo que sigue, no nos parezca en absoluto ajena.

### 3 De manojos a prehaces

(A lo largo de esta sección y la siguiente,  $X$  denota un espacio topológico fijo).

En esta sección construimos y estudiamos un funtor  $\Gamma$  de la categoría  $\mathbf{Top}/X$  de los manojos sobre  $X$ , en la categoría  $\mathbf{PreSh}(X)$  de prehaces sobre  $X$ .

**Definición 3.0.1** (Acción de  $\Gamma_p$  sobre objetos). *Sea  $p : Y \rightarrow X$  un manajo sobre  $X$ . Para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  definimos  $\Gamma_p U$  como el conjunto de todas las secciones transversales de  $p$  sobre  $U$ .*



Notemos que si se tiene la flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , para cada  $s \in \Gamma_p U$  surge una sección transversal de  $p$  sobre  $V$ , a saber,  $s \circ \iota_{V,U} = s|_V^U$ , es decir  $s|_V^U \in \Gamma_p V$ :



**Definición 3.0.2** (Acción de  $\Gamma_p$  sobre flechas). *Sea  $p : Y \rightarrow X$  un manajo sobre  $X$ . Para cada flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , definimos la flecha (de **Set**)  $\Gamma_p(V \subseteq U) : \Gamma_p U \rightarrow \Gamma_p V : s \mapsto s|_V^U$ .*

Las anteriores asignaciones de flechas y objetos hacen de  $\Gamma_p$  un funtor contravariante  $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ , es decir, un prehaz sobre  $X$ ; más aún,  $\Gamma_p$  resulta ser un haz sobre  $X$ .

**Proposición 3.0.3.** *Para cada manajo  $p : Y \rightarrow X$ ,  $\Gamma_p$  es un haz sobre  $X$ .*

**Prueba.** • La prueba de que  $\Gamma_p$  es un prehaz sobre  $X$  es similar a la que se da para la Proposición (1.1.1).

- Sean  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$ . El siguiente diagrama en **Set** es un igualador:

$$\Gamma_p U \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} \Gamma_p (U_i \cap U_j)$$

La prueba de esto es similar a la que se da para la Proposición (1.3.1), sumada al siguiente hecho: dada una familia  $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i$ , se tiene  $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U,X}$ : dada  $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ ; como  $g_j : U_j \rightarrow Y$  es una sección transversal de  $p$  sobre  $U_j$ , se tiene

$p \circ g_j = \iota_{U_j, X}$ , y por tanto

$$\begin{aligned} \left( p \circ \bigcup_{i \in I} g_i \right) (x) &= p \left( \bigcup_{i \in I} g_i(x) \right) \\ &= p(g_j(x)) \\ &= \iota_{U_j, X}(x) \\ &= x \\ &= \iota_{U, X}(x); \end{aligned}$$

con esto  $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U, X}$ . Lo anterior se hace para garantizar  $\bigcup_{i \in I} g_i \in \Gamma_p U$ .

Por tanto  $\Gamma_p$  es un haz sobre  $X$ . □

A los haces del tipo  $\Gamma_p$ , con  $p : Y \rightarrow X$  un manjojo sobre  $X$ , los llamamos *haces de secciones transversales* sobre  $X$ . En ocasiones denotamos  $\Gamma Y$  en lugar de  $\Gamma_p$ . Obtenemos por cada  $p \in \mathbf{Top}/X$  un objeto  $\Gamma_p \in \mathbf{Sh}(X)$ . Ahora deseamos obtener, por cada flecha  $f : \langle Y, p \rangle \rightarrow \langle Y', p' \rangle$  en  $\mathbf{Top}/X$ , una flecha  $\Gamma_f : \Gamma_p \rightarrow \Gamma_{p'}$  de  $\mathbf{Sh}(X)$ , es decir, una transformación natural entre los funtores  $\Gamma_p, \Gamma_{p'} : \mathcal{O}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ; para esto necesitamos asignar, para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$ , una función  $\Gamma_f U$  entre los conjuntos  $\Gamma_p U$  y  $\Gamma_{p'} U$ , que además nos garantice que si  $V \subseteq U$  es una flecha en  $\mathcal{O}(X)$ , entonces el siguiente diagrama de  $\mathbf{Set}$  conmute:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_p V & \xrightarrow{\Gamma_f V} & \Gamma_{p'} V \\ \Gamma_p(V \subseteq U) \uparrow & & \uparrow \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \\ \Gamma_p U & \xrightarrow{\Gamma_f U} & \Gamma_{p'} U \end{array}$$

Notemos que la función  $\Gamma_f U$  nos exige asignar a cada sección transversal  $s$  de  $p$  sobre  $U$  (i.e.  $s : U \rightarrow Y$  es una función continua y  $p \circ s = \iota_{U, X}$ ) una sección transversal  $\Gamma_f U(s)$  de  $p'$  sobre  $U$  (i.e. una función continua  $\Gamma_f U(s) : U \rightarrow Y'$  tal que  $p' \circ \Gamma_f U(s) = \iota_{U, X}$ ). El siguiente diagrama que se forma en  $\mathbf{Top}/X$

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ & \nearrow s & \downarrow p & \nearrow p' & \\ U & \xrightarrow{\iota_{U, X}} & X & & \end{array}$$

nos muestra que  $f \circ s$  es una función continua de  $U$  en  $Y$ , y

$$\begin{aligned} p' \circ (f \circ s) &= (p' \circ f) \circ s \\ &= p \circ s \\ &= \iota_{U, X}, \end{aligned}$$

sugiriéndonos tomar  $\Gamma_f U(s) = f \circ s$ . Con esto tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U))(s) &= \Gamma_f V(\Gamma_p(V \subseteq U)(s)) \\
&= \Gamma_f V(s|_V^U) \\
&= f \circ s|_V^U \\
&= f \circ (s \circ \iota_{V,U}) \\
&= (f \circ s) \circ \iota_{V,U} \\
&= (f \circ s)|_V^U \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(f \circ s) \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U)(s),
\end{aligned}$$

Y por tanto  $\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U) = \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U$ . Lo anterior prueba que  $\Gamma_f$  es una transformación natural, para cada flecha  $f$  en  $\mathbf{Top}/X$ . Estas asignaciones hacen de  $\Gamma$  un funtor de  $\mathbf{Top}/X$  en  $\mathbf{PreSh}(X)$  (de hecho, en  $\mathbf{Sh}(X)$ , pero las razones de tomar la categoría de prehaces sobre  $X$  como codominio de  $\Gamma$  se entenderán más adelante):

**Proposición 3.0.4.** *Las asignaciones  $p \mapsto \Gamma_p$  para cada  $p \in \mathbf{Top}/X$  y  $f \mapsto \Gamma_f$  para cada flecha  $f$  en  $\mathbf{Top}/X$ , determinan un funtor  $\Gamma : \mathbf{Top}/X \rightarrow \mathbf{PreSh}(X)$ .*

**Prueba.** • Veamos que  $\Gamma$  respeta identidades. Sea  $\langle Y, p \rangle \in \mathbf{Top}/X$ . Debemos ver  $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$ , donde  $1_{\Gamma_p}$  es la transformación natural identidad del funtor  $\Gamma_p$  en sí mismo. Dados  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $s \in \Gamma_p U$ , tenemos que  $\Gamma_{1_p} U$  es una función de  $\Gamma_p U$  en  $\Gamma_p U$  y  $\Gamma_{1_p} U(s) = 1_p \circ s = s$ ; por tanto  $\Gamma_{1_p} U = 1_{\Gamma_p U} = 1_{\Gamma_p} U$ . Como lo anterior se tiene para  $U \in \mathcal{O}(X)$  arbitrario, se sigue que  $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$ .

- Veamos que  $\Gamma$  respeta composiciones. Supongamos que tenemos en  $\mathbf{Top}/X$  el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
p & & \\
\downarrow g \circ f & \searrow f & \\
& & p' \\
& \swarrow g & \\
& & p''
\end{array}$$

y veamos que en  $\mathbf{PreSh}(X)$  el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_p & & \\
\downarrow \Gamma_{g \circ f} & \searrow \Gamma_f & \\
& & \Gamma_{p'} \\
& \swarrow \Gamma_g & \\
& & \Gamma_{p''}
\end{array}$$

Sean  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $s \in \Gamma_p U$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{g \circ f} U)(s) &= (g \circ f) \circ s \\
&= g \circ (f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_g U \circ \Gamma_f U)(s).
\end{aligned}$$

Por tanto  $\Gamma_{g \circ f} = \Gamma_g U \circ \Gamma_f U$ ; como esto vale para  $U \in \mathcal{O}(X)$  arbitrario, se sigue  $\Gamma_{g \circ f} = \Gamma_g \circ \Gamma_f$ .  
Lo anterior prueba que  $\Gamma$  es un funtor de  $\mathbf{Top}/X$  en  $\mathbf{PreSh}(X)$ .  $\square$

## 4 De prehaces a manojos

En esta sección construimos y estudiamos un funtor  $\Lambda$  de la categoría  $\mathbf{PreSh}(X)$  de prehaces sobre  $X$  en la categoría  $\mathbf{Top}/X$  de manojos sobre  $X$ .

Iniciamos definiendo el “suelo” de un elemento de  $X$  respecto a un prehaz sobre  $X$ :

**Definición 4.0.1** (*P-suelo de  $x$* ). Dados  $x \in X$  y  $P \in \mathbf{PreSh}(X)$ , definimos el “*P-suelo de  $x$* ” (denotado como  $\mathbf{P-Su}(x)$ ) como el conjunto  $\{(U, s) \mid x \in U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$

Buscamos definir una relación de equivalencia sobre el suelo de cada elemento de  $X$ :

**Definición 4.0.2.** Sean  $P \in \mathbf{PreSh}(X)$  y  $x \in X$ . Definimos en  $\mathbf{P-Su}(x)$  la relación  $\sim_{P,x}$  de la siguiente manera:

Dados  $(U, s), (V, t) \in \mathbf{P-Su}(x)$ ,  $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$ , si y sólo si, existe  $W \in \mathcal{O}(X)$  tal que

$$x \in W \subseteq U \cap V \text{ y } s|_W^U = t|_W^V.$$

Si  $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$ , decimos que  $(U, s)$  y  $(V, t)$  tienen el mismo *P-germen* en  $x$ .

La igualdad  $s|_W^U = t|_W^V$  con  $W \subseteq U \cap V$  nos recuerda la idea de “coincidir localmente” que se mostró en las motivaciones dadas en la primera sección.

Notemos que la condición  $W \subseteq U \cap V$  se tiene si y sólo si  $W \subseteq U$  y  $W \subseteq V$ , y que en este caso  $s|_W^U$  y  $t|_W^V$  son elementos de  $P(W)$ , siempre que  $s \in PU$  y  $t \in PV$ . De esta forma, podemos representar  $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$  con el cumplimiento simultaneo de los dos siguientes diagramas:

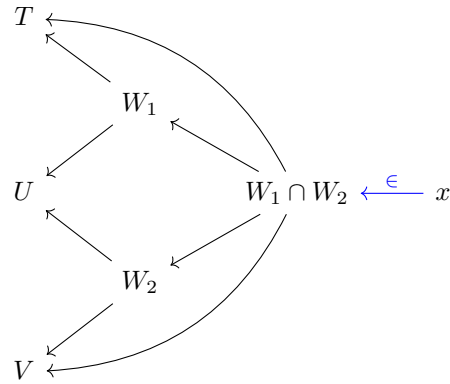
$$\begin{array}{ccc}
U & & PU \xleftarrow{\epsilon} s \\
& \swarrow & \searrow \\
& W \xleftarrow{\epsilon} x & PW \xleftarrow{\epsilon} s|_W^U = t|_W^V \\
& \swarrow & \nwarrow \\
V & & PV \xleftarrow{\epsilon} t
\end{array}$$

Donde el diagrama de la izquierda está en  $\mathcal{O}(X)$ , el de la derecha en  $\mathbf{Set}$  y las flechas azules denotan pertenencia conjuntista.

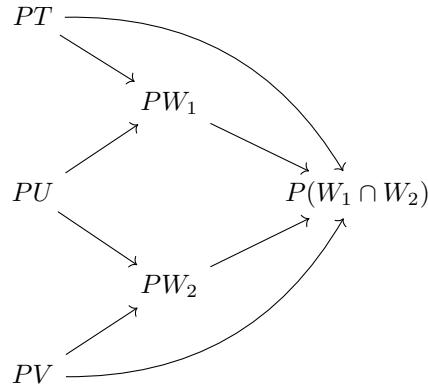
En las dos anteriores definiciones, si es claro el prehaz  $P$  con el que se está trabajando, solemos denotar  $\text{Su}(x)$  y  $\sim_x$  en lugar de  $P\text{-Su}(x)$  y  $\sim_{P,x}$ , respectivamente.

**Proposición 4.0.3.** *Para cualesquiera  $P \in \text{PreSh}(X)$  y  $x \in X$ , la relación  $\sim_x$  es de equivalencia sobre  $\text{Su}(x)$ .*

**Prueba.** La reflexividad y simetría de  $\sim_x$  se siguen directamente de la definición. Veamos que  $\sim_x$  es transitiva. Sean  $(T, r), (U, s), (V, t) \in \text{Su}(x)$  tales que  $(T, r) \sim_x (U, s)$  y  $(U, s) \sim_x (V, t)$ . Existen  $W_1, W_2 \in \mathcal{O}(X)$  tales que  $x \in W_1 \subseteq T \cap U$  y  $x \in W_2 \subseteq U \cap V$ . Además  $r|_{W_1}^T = s|_{W_1}^U$  y  $s|_{W_1}^U = t|_{W_2}^V$ . Tenemos  $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}(X)$  y  $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq T \cap V$ ; se forma en  $\mathcal{O}(X)$  el siguiente diagrama conmutativo:



Como  $P$  es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en  $\mathbf{Set}$ , obtenemos en  $\mathbf{Set}$  el siguiente diagrama conmutativo:



Siguiéndolo tenemos que

$$\begin{aligned}
r|_{W_1 \cap W_2}^T &= (r|_{W_1}^T)|_{W_1 \cap W_2}^{W_1} \\
&= (s|_{W_1}^U)|_{W_1 \cap W_2}^{W_1} \\
&= s|_{W_1 \cap W_2}^U \\
&= (s|_{W_2}^U)|_{W_1 \cap W_2}^{W_2} \\
&= (t|_{W_2}^V)|_{W_1 \cap W_2}^{W_2} \\
&= t|_{W_1 \cap W_2}^V.
\end{aligned}$$

Por tanto,  $(T, r) \sim_x (V, t)$  y  $\sim_x$  es transitiva. Obtenemos que  $\sim_x$  es una relación de equivalencia en  $\text{Su}(x)$ .  $\square$

Ahora consideramos las clases de equivalencia generadas por la relación de tener el mismo germen en un punto:

**Definición 4.0.4** (Germen en un punto). *Sean  $P \in \text{PreSh}(X)$  y  $x \in X$ . Para cada  $(U, s) \in \text{Su}(x)$ , la clase de equivalencia de  $(U, s)$  respecto a  $\sim_{P,x}$  se denota por  $P\text{-germ}_x s_U$ , y la llamamos el germen de  $(U, s)$  en  $x$ .*

Nuevamente, si por el contexto es claro con qué preñez estamos trabajando, puede omitirse el “ $P$ –” en la anterior definición.

El siguiente lema, que será utilizado más adelante, nos muestra que el germen de un elemento se conserva bajo restricciones; propiedad que en efecto concuerda con la intuición desarrollada hasta el momento.

**Lema 4.0.5.** *Sean  $P \in \text{PreSh}(X)$  y  $U, V \in \mathcal{O}(X)$  con  $V \subseteq U$  y  $s \in PU$ . Si  $x \in V$  entonces  $\text{germ}_x s_U = \text{germ}_x (s|_V^U)_V$ .*

**Prueba.** Supongamos que  $x \in V$ ; en particular  $x \in V \subseteq U \cap V$ . Tenemos los diagramas (izquierda en  $\mathcal{O}(X)$  y derecha en **Set**):

$$\begin{array}{ccc}
U & & PU \\
\swarrow U \subseteq V & & \searrow P(U \subseteq V) \\
& V & PV \\
\swarrow V \subseteq V & & \nearrow P(V \subseteq V) \\
V & & PV
\end{array}$$

Como  $V \subseteq V$  es la flecha identidad de  $V$ , y  $P$  es en particular un funtor, entonces  $P(V \subseteq V)$  es la flecha identidad de  $PV$ ; como  $s \in PU$  entonces  $P(U \subseteq V)(s) = s|_V^U \in PV$ , luego

$$s|_V^U = P(V \subseteq V)(s|_V^U) = (s|_V^U)|_V^V.$$

Luego  $(s, U) \sim_x (s|_V^U, V)$ , de modo que las respectivas clases de equivalencia son iguales, es decir,  $\text{germ}_x s_U = \text{germ}_x (s|_V^U)_V$ .  $\square$



Al pasar al cociente por la relación de equivalencia de “tener el mismo germen”, obtenemos el tallo (stalk en inglés) de un prehaz en un punto dado:

**Definición 4.0.6** (Tallo en un punto). Sean  $P \in \text{PreSh}(X)$  y  $x \in X$ . Al conjunto cociente

$$P_x := \text{P-Su}(x) / \sim_x = \{\text{P-germ}_x s_U \mid (U, s) \in \text{P-Su}(x)\}$$

lo llamamos el tallo de  $P$  en  $x$ .

Los tallos de un prehaz no son necesariamente disyuntos; ello lo muestra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.0.7.** Tomemos  $X = \{a, b\}$  (con  $a \neq b$ ) dotado con la topología trivial  $\tau = \{\emptyset, X\}$ ,  $C$  el haz de funciones continuas sobre  $\mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  la función constante en 0 ( $f(a) = f(b) = 0$ ). Las únicas funciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{R}$  son las constantes, es decir  $CX = \{g : X \rightarrow \mathbb{R} \mid g(a) = f(a)\}$ . Notemos que

$$\begin{aligned} \text{Su}(a) &= \left\{ (U, g) \mid a \in U \stackrel{ab}{\subseteq} X; g \in CU \right\} \\ &= \{(X, g) \mid g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ es continua}\} \\ &= \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}; \end{aligned}$$

del mismo modo se llega a  $\text{Su}(b) = \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}$ , y por tanto  $\text{Su}(a) = \text{Su}(b)$ . Sea  $(X, g) \in \text{germ}_a f_X$ . Entonces  $(X, g) \in \text{Su}(a) = \text{Su}(b)$  y  $(X, g) \sim_a (X, f)$  y por tanto existe  $W \stackrel{ab}{\subseteq} X$  tal que  $a \in W \stackrel{ab}{\subseteq} X$  y  $g|_W^X = f|_W^X$ ; pero como el único abierto no vacío de  $X$  es  $X$ , tenemos  $W = X$  y  $f = f|_X^X = g|_X^X = g$ . De este modo  $\text{germ}_a f_X = \{(X, f)\}$ . Análogamente se llega a  $\text{germ}_b f_X = \{(X, f)\}$ . Con lo anterior,  $\text{germ}_a f_X \in C_a \cap C_b$ , esto es,  $C_a$  y  $C_b$  no son disyuntos para  $a \neq b$ . Por lo tanto los tallos del haz  $C$  no son disyuntos.

Nos interesa forzar a los tallos de un prehaz a que tengan intersección vacía; para esto tomamos su unión disyunta (que resulta ser el coproducto de los tallos en la categoría **Set**):

**Definición 4.0.8.** Sea  $P \in \text{PreSh}(X)$ . Denotamos por  $\Lambda_P$  a la unión disyunta de los tallos de  $P$  en los elementos de  $X$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_P &:= \coprod_{x \in X} P_x \\ &= \bigcup_{x \in X} (P_x \times \{x\}) \\ &= \{(\text{P-germ}_x s_U \mid x \in X; (U, s) \in \text{P-Su}(x))\}. \end{aligned}$$

Queremos obtener por cada prehaz sobre  $X$  un manojito sobre  $X$ ; el conjunto  $\Lambda_P$  es el primer paso para esto; ahora definimos una función de dicho conjunto en  $X$ :

**Definición 4.0.9.** Sea  $P \in \text{PreSh}(X)$ . Definimos la función  $\mathbf{p} : \Lambda_P \rightarrow X$  mediante  $\mathbf{p}(\text{P-germ}_x s_U, x) = x$  para cada  $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$ , y la llamamos la función canónica de  $\Lambda_P$  en  $X$ .

Para que  $\mathbf{p}$  represente un manojito sobre  $X$ , debemos dotar a  $\Lambda_P$  de una topología; con este fin introducimos una nueva familia de funciones:

**Definición 4.0.10.** Para cualesquiera  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $s \in PU$ , definimos la función  $\dot{s} : U \rightarrow \Lambda_P$  mediante  $\dot{s}(x) = (\text{P-germ}_x s_U, x)$  para cada  $x \in U$ .

Para cada función  $\dot{s}$ , el siguiente diagrama en **Set** es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \Lambda_P \\ & \nearrow \dot{s} & \downarrow \mathfrak{p} \\ U & \xrightarrow{\iota_{U,X}} & X \end{array}$$

Este diagrama nos recuerda las secciones transversales sobre un manajo. Deseamos que la topología que asignemos a  $\Lambda_P$  haga de cada función  $\dot{s}$  una sección transversal sobre  $\mathfrak{p}$ .

**Proposición 4.0.11.** Sea  $P \in \text{PreSh}(X)$ . El conjunto

$$\mathcal{B}_{\Lambda_P} := \{\dot{s}(U) \mid U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$$

es base para una topología sobre  $\Lambda_P$ .

**Prueba.** Hacemos uso de la caracterización dada en la Proposición 6.0.4.

- Veamos que  $\bigcup \mathcal{B}_{\Lambda_P} = \Lambda_P$ , es decir,

$$\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ s \in PU}} \dot{s}(U) = \Lambda_P.$$

La contención  $\subseteq$  es inmediata, pues  $\dot{s}(U) \subseteq \Lambda_P$  para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  y  $s \in PU$ . Ahora, sea  $z \in \Lambda_P$ . Existen  $y \in X$  y  $(V, t) \in \text{Su}(y)$  tales que  $z = (\text{germ}_y t_V, y)$ . Tenemos  $y \in V \in \mathcal{O}(X)$  y  $t \in PV$ ; como  $\dot{t}_V(y) = (\text{germ}_y t_V, y) = z$ , tenemos  $z \in \dot{t}(V)$ ; esto nos da la contención  $\supseteq$ . Obtenemos que  $\Lambda_P$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ .

- Ahora, sean  $A, B \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$  y probemos que  $A \cap B$  es unión de elementos de  $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ . Existen  $T, V \in \mathcal{O}(X)$ ,  $t \in PT$ ,  $r \in PV$  tales que  $A = \dot{t}(T)$  y  $B = \dot{r}(V)$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $A \cap B$  es la unión vacía de elementos de  $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ . Supongamos que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Sea

$$z \in A \cap B = \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = \{(\text{germ}_x t_T, x) \mid x \in T\} \cap \{(\text{germ}_x r_V, x) \mid x \in V\}.$$

Existe  $x \in T \cap V \in \mathcal{O}(X)$  tal que  $z = \text{germ}_x t_T = \text{germ}_x r_V$ ; de modo que  $(T, t) \sim_x (V, r)$ . Así, existe  $W_z \in \mathcal{O}(X)$  tal que  $x \in W_z \subseteq T \cap V$  y  $t|_{W_z}^T = r|_{W_z}^V \in PW_z$ . Probemos que

$$A \cap B = \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = \bigcup_{z \in B}.$$

□

## 5 Diálogo entre funtores

## 6 Apéndice

**Teorema 6.0.1** (Lema de pegado). Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Sean  $U \subseteq^{\text{ab}} X$ ,  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$  y  $\{f_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones, de modo que para cada  $i \in I$ ,  $f_i : U_i \rightarrow Y$  es una función continua. Además suponemos la siguiente “condición de pegado”: para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f_i(x) = f_j(x)$  para todo  $x \in U_i \cap U_j$ . Entonces,  $f := \bigcup_{i \in I} f_i$  es una función continua de  $U$  en  $Y$ .

**Prueba.** • Veamos que  $f$  es en efecto una función de  $U$  en  $Y$ . Sea  $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $\langle x, f_j(x) \rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i = f$ . Como  $f_j(x) \in Y$ , obtenemos que  $f$  relaciona a  $x$  con un elemento de  $Y$ . Supongamos que para  $y, y' \in Y$  se tiene  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f = \bigcup_{i \in I} f_i$ . Existen  $j, k \in I$  tales que  $\langle x, y \rangle \in f_j$  y  $\langle x, y' \rangle \in f_k$ , es decir  $x \in U_j$  y  $y = f_j(x)$ , y,  $x \in U_k$  y  $y' = f_k(x)$ ; entonces  $x \in U_j \cap U_k$  y por la condición de pegado se tiene  $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$ , con lo cual  $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$ . Lo anterior nos muestra que  $f$  relaciona cada elemento de  $U$  con un único elemento de  $Y$ , es decir,  $f$  es una función de  $U$  en  $Y$ .

- Probemos que  $f : U \rightarrow Y$  es continua mostrando que devuelve abiertos de  $Y$  en abiertos de  $U$  por la imagen recíproca. Sea  $V \subseteq^{\text{ab}} Y$ . Notemos que  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ :

$\subseteq$ : Sea  $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$ , es decir,  $f(x) \in V$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $f_j(x) = f(x) \in V$ , y  $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ .

$\supseteq$ : Sea  $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ , es decir  $x \in f_j^{-1}(V)$  para algún  $j \in I$ . Entonces  $f(x) = f_j(x) \in V$  y  $x \in f^{-1}(V)$ .

Ahora bien, para cada  $i \in I$  tenemos  $f_i^{-1}(U) \subseteq^{\text{ab}} U_i$ , luego  $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$  con  $W_i \subseteq^{\text{ab}} U$ . Como  $U_i \subseteq^{\text{ab}} U$  entonces  $f_i^{-1}(V) \subseteq^{\text{ab}} U$ , de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \subseteq^{\text{ab}} U.$$

Con esto, concluimos que  $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \rightarrow Y$  es continua. □

**Proposición 6.0.2.** Si  $p : Y \rightarrow X$  es un homeomorfismo local, entonces  $p$  es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de  $Y$  que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de  $Y$ .

**Prueba.** • Probamos la continuidad de  $p$  puntualmente. Sean  $y \in Y$  y  $U \subseteq^{\text{ab}} X$  con  $p(y) \in U$ . Tenemos que  $y \in V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$  y  $p(y) \in p(V_y) \subseteq^{\text{ab}} X$ . Tomando  $W = p(V_y) \cap U$  se tiene  $p(y) \in W \subseteq^{\text{ab}} X$ . Además  $W \subseteq p(V_y)$  y  $W \subseteq U$ . Como  $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo, entonces  $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^Y)^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} V_y \subseteq^{\text{ab}} Y$ , así que  $y \in p^{-1}(W) \subseteq^{\text{ab}} Y$ ; igualmente,  $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$ , lo cual prueba que  $p$  es continua en  $y$ . Como  $y$  es arbitraria en  $Y$ , obtenemos que  $p : Y \rightarrow X$  es continua.

- Sea  $V \subseteq^{ab} Y$ ; probemos que  $p(V) \subseteq^{ab} X$ . Para cada  $y \in V$  definimos  $W_y = V_y \cap V \subseteq^{ab} V_y$ . Como  $p|_{V_y}^V : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego  $p(W_y) = (p|_{V_y}^V)(W_y) \subseteq^{ab} p(V_y)$ ; como  $p(V_y) \subseteq^{ab} X$  entonces  $p(W_y) \subseteq^{ab} X$  para cada  $y \in V$ , luego  $\bigcup_{y \in V} p(W_y) \subseteq^{ab} X$ . Ya que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{y \in V} p(W_y) &= \bigcup_{y \in V} p(V \cap V_y) \\
&= p\left(\bigcup_{y \in V} (V \cap V_y)\right) \\
&= p\left(V \cap \bigcup_{y \in V} V_y\right) \\
&= p(V),
\end{aligned}$$

pues  $V \subseteq \bigcup_{y \in V} V_y$ , entonces  $p(V) \subseteq^{ab} X$ . Obtenemos así que  $p : Y \rightarrow X$  es una función abierta.

- Llamemos  $\mathcal{B} = \left\{ W \subseteq^{ab} Y \mid p(W) \subseteq^{ab} X, p|_W^Y : W \rightarrow p(W) \text{ es homeomorfismo} \right\}$  y probemos que  $\mathcal{B}$  es una base para la topología de  $Y$ . Sean  $V \subseteq^{ab} Y$  y  $y \in V$ . Llamemos  $W_y = V_y \cap V$ , de modo que  $y \in W_y \subseteq V$ . Como  $V_y \subseteq^{ab} Y$  entonces  $W_y \subseteq^{ab} Y$ . Tenemos que  $p|_{V_y}^Y : V_y \rightarrow p(V_y)$  es un homeomorfismo; como  $W_y \subseteq^{ab} V_y$  y todo homeomorfismo es en particular una función abierta, obtenemos  $p(W_y) = (p|_{V_y}^Y)(W_y) \subseteq^{ab} p(V_y) \subseteq^{ab} X$ , de modo que  $p(W_y) \subseteq^{ab} X$ ; además, ya que la restricción de homeomorfismos es un homeomorfismo, entonces  $(p|_{V_y}^Y)|_{W_y}^{V_y} = p|_{W_y}^Y : W_y \rightarrow p(W_y)$  es un homeomorfismo. Así,  $W_y \in \mathcal{B}$ , y  $\mathcal{B}$  es base para la topología de  $Y$ . □

**Proposición 6.0.3.** Sean  $U \subseteq^{ab} X$  y  $s$  una sección transversal, de un espacio étalé  $\langle p, Y \rangle$ , sobre  $U$ . Entonces:

- (i)  $p|_{s(U)}^Y = s^{-1}$ .
- (ii)  $s : U \rightarrow s(U)$  es un homeomorfismo.
- (iii)  $s(U)$  es un subconjunto abierto de  $Y$ .

**Prueba.** (i) Dado  $x \in U$  tenemos

$$\begin{aligned}
(p|_{s(U)}^Y \circ s)(x) &= p|_{s(U)}^Y(s(x)) \\
&= p(s(x)) \\
&= in_{U,X}(x) \\
&= x \\
&= 1_U(x),
\end{aligned}$$

luego  $p|_{s(U)}^Y \circ s = 1_U(x)$ . Dado  $y \in s(U)$ , existe  $z \in U$  tal que  $y = s(z)$ , y:

$$\begin{aligned} (s \circ p|_{s(U)}^Y)(y) &= s(p|_{s(U)}^Y(y)) \\ &= s(p(y)) \\ &= s(p(s(z))) \\ &= s(z) \\ &= y, \end{aligned}$$

de modo que  $s \circ p|_{s(U)}^Y = 1_{s(U)}$ . Esto prueba (i).

(ii) Sabemos que  $s$  es una función continua, y su inversa  $p|_{s(U)}^Y$  es continua por ser la restricción de una función continua; por tanto,  $s : U \rightarrow s(U)$  es un homeomorfismo.

(iii) Ahora veamos que  $s(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ . Sea  $y \in s(U)$ . Dado  $x \in s^{-1}(V_y)$ , tenemos  $s(x) \in V_y$  y  $x = p(s(x)) \in p(V_y)$ ; por tanto  $s^{-1}(V_y) \subseteq p(V_y)$ . Como  $V_y \stackrel{ab}{\subseteq} Y$  y  $s : U \rightarrow Y$  es continua, entonces  $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} U$ ; como  $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$ , entonces  $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} X$  y  $s^{-1}(V_y) \stackrel{ab}{\subseteq} p(V_y)$ . Como  $p|_{V_y}^Y$  es en particular continua, se tiene  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \stackrel{ab}{\subseteq} V_y$ ; como  $V_y \stackrel{ab}{\subseteq} Y$  entonces  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ . Además, como  $y \in s(U)$ , se sigue que  $s(p|_{V_y}^Y(y)) = s(p|_{s(U)}^Y(y)) = s(s^{-1}(y)) = y \in V_y$  y por tanto  $y \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$ . Así, nos falta probar que  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$ ; para esto basta ver que  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) = V_y \cap s(U)$ :

$\subseteq$ : Por definición sabemos que  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y$ . Sea  $t \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$ . Tenemos que  $s(p|_{V_y}^Y(t)) \in V_y$  y  $p|_{V_y}^Y(t) \in s^{-1}(V_y) \subseteq U$ . Además,

$$p|_{V_y}^Y(s(p|_{V_y}^Y(t))) = p(s(p|_{V_y}^Y(t))) = p|_{V_y}^Y(t).$$

Como  $p|_{V_y}^Y$  es en particular inyectiva, obtenemos  $t = s(p|_{V_y}^Y(t))$ ; ya que  $p|_{V_y}^Y(t) \in U$ , se sigue  $t \in s(U)$ . Con lo anterior se tiene  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$  y por lo tanto  $(p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y \cap s(U)$ .

$\supseteq$ : Sea  $t \in V_y \cap s(U)$ . Tenemos  $p|_{V_y}^Y(t) = p(t) = p|_{s(U)}^Y(t)$ , luego

$$s(p|_{V_y}^Y(t)) = s(p|_{s(U)}^Y(t)) = s(s^{-1}(t)) = t \in V_y,$$

de modo que  $t \in (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$ . Así,  $V_y \cap s(U) \subseteq (p|_{V_y}^Y)^{-1}(s^{-1}(V_y))$ .

□

**Proposición 6.0.4.** Sea  $\Sigma$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Se tiene que  $\Sigma$  es base para una topología sobre  $X$ , si y solo si, tanto  $X$  como la intersección de cualesquiera dos elementos de  $\Sigma$ , es unión de elementos de  $\Sigma$ .

**Prueba.** ( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\Sigma$  es base para una topología sobre  $X$ . Como  $X$  es abierto, es unión de elementos de  $\Sigma$ . Como los elementos de  $\Sigma$  son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de  $\Sigma$  es abierta y por tanto es unión de elementos de  $\Sigma$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $X$  es unión de elementos de  $\Sigma$  y que la intersección de cualesquiera dos elementos de  $\Sigma$  es unión de elementos de  $\Sigma$ . Sea  $\tau_\Sigma$  el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de  $\Sigma$ . Veamos que  $\tau_\Sigma$  es una topología sobre  $X$ :

- Como los elementos de  $\Sigma$  son subconjuntos de  $X$ , entonces la unión de elementos de  $\Sigma$  es subconjunto de  $X$ , de modo que  $\tau_\Sigma$  es una familia de subconjuntos de  $X$ .
- $X$  es unión de elementos de  $\Sigma$ , así que  $X \in \tau_\Sigma$ . El conjunto  $\emptyset$  es la unión vacía de elementos de  $\Sigma$ , así que  $\emptyset \in \tau_\Sigma$ .
- Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una familia de elementos de  $\tau_\Sigma$ . Para cada  $i \in I$  existe una familia  $\{V_j^i\}_{j \in J}$  de elementos de  $\Sigma$  tal que  $U_i = \bigcup_{j \in J} V_j^i$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i &= \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{j \in J} V_j^i \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} V_j^i, \end{aligned}$$

luego  $\bigcup_{i \in I} U_i$  es unión de elementos de  $\Sigma$  y por tanto pertenece a  $\tau_\Sigma$ .

- Sean  $U, V \in \tau_\Sigma$ . Existen  $\{U_i\}_{i \in I}, \{V_j\}_{j \in J}$ , familias de elementos de  $\Sigma$  tales que  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  y  $V = \bigcup_{j \in J} V_j$ . Entonces

$$\begin{aligned} U \cap V &= U \cap \bigcup_{j \in J} V_j \\ &= \bigcup_{j \in J} (U \cap V_j) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left( \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap V_j \right) \\ &= \bigcup_{j \in J} \left( \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V_j) \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (U_i \cap V_j), \end{aligned}$$

y  $U_i \cap V_j \in \Sigma$  para cualesquiera  $i \in I, j \in J$ , así que  $U \cap V$  es unión de elementos de  $\Sigma$ , es decir  $U \cap V \in \tau_\Sigma$ .

Lo anterior prueba que  $\tau_\Sigma$  es una topología sobre  $X$ . El hecho de que  $\Sigma$  es base para  $\tau_\Sigma$  es trivial, pues cada elemento de  $\tau_\Sigma$  es unión de elementos de  $\Sigma$ .

□

## Referencias

- [Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.
- [Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- [Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag.
- [Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum.
- [Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.