Teoría de categorías (2024-I)
Trabajo de profundización

Dos aproximaciones equivalentes a la noción de haz

Juan Camilo Lozano Suárez [1]

Resumen. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

Palabras Clave. Haz; espacio étalé; prehaz; homeomorfismo local; manojo; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

Contents

[1] Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.
Email: jclozanos@unal.edu.co

1 Haz como funtor

1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean X un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X, al cual dotamos con un cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos abiertos de U. Una función continua $f : U \to \mathbb{R}$ se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto U, y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de U en el siguiente sentido:

(P1) Si $V \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f|_V^U : V \to \mathbb{R}$ (la restricción de f de U a V) es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 6.0.1), un apropiado conocimiento local de U nos permite pasar a un conocimiento global, en la siguiente forma:

(P2) Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f|_{U_i}^U : U_i \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i \in I$, entonces f es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de X, y en la cual, dados $U, V \in \mathcal{O}(X)$, hay una flecha de V en U si y solo si $V \subseteq U$; dicha flecha en $\mathcal{O}(X)$ (que será la única de V en U) la representamos igualmente mediante "$V \subseteq U$". Ahora, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos el conjunto CU de todas las funciones reales continuas sobre U:

$$CU := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U): \quad CU &\to CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de U en $\mathbb{R}$ le asigna su respectiva función restricción al subconjunto V, que a su vez es una función continua de V en $\mathbb{R}$. Tendremos entonces la siguiente propiedad:

Proposición 1.1.1. *La regla C que a cada $U \in \mathcal{O}(X)$ le asigna el conjunto CU y a cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$ le asigna la función restricción de V en U, $C(V \subseteq U) : CU \to CV$, es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

Prueba. • Trivialmente se tiene que C respeta identidades, pues para cualquier $U \in \mathcal{O}(X)$ tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U): \quad CU &\longrightarrow CU \\ f &\longmapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir, $C(1_U) = 1_{C(U)}$.

- Supongamos que en $\mathcal{O}(X)$ tenemos $W \subseteq V \subseteq U$. Entonces $W \subseteq U$ y en **Set** tenemos la función restricción de U en W, $C(W \subseteq U) : CU \to CW$. Tenemos ademas en **Set** la composición $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \to CW$. Para cada $f \in CU$ se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$ y C respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que C es un **prehaz** (de conjuntos):

Definición 1.1.2 (Prehaz)**.** *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico X es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en* **Set**.

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores.*

1.2 Igualadores

Definición 1.2.1. *En una categoría arbitraria $\boldsymbol{C}$, sean $f, g : A \to B$ flechas paralelas. Un igualador de f y g es una pareja $\langle E, e\rangle$, con $E \in \boldsymbol{C}$ y $e : E \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ e = g \circ e$, y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja $\langle U, u\rangle$ con $U \in \boldsymbol{C}$ y $u : U \to A$ en $\boldsymbol{C}$, tal que $f \circ u = g \circ u$, entonces existe una única flecha $v : U \to E$ en $\boldsymbol{C}$ tal que $e \circ v = u$.*

En el siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como " diagrama igualador", se resume la anterior definición:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ U \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

Ejemplo 1.2.2. *Sean A y B conjuntos y f, g funciones de A en B. Verifiquemos que un igualador de f y g está dado por $\langle E, e\rangle$, donde $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ y e es la función inclusión de E en A:*

- *Dado $x \in E$ se tiene $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$, es decir, $f \circ e = g \circ e$.*
- *Supongamos que existe $\langle U, u\rangle$ con $U \in$ **Set** y $u : U \to A$ en **Set**, tal que $f \circ u = g \circ u$. Podemos definir $v : U \to E$ vía $v(x) = u(x)$ para todo $x \in U$, e inmediatamente se tendrá $e \circ v = u$; igualmente, si v' es una fleca de $U \to E$ en **Set** tal que $e \circ v' = u$ entonces para cada $x \in U$ se tiene $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$, de modo que $v = v'$.*

$\Diamond$

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por " igualador" tanto al par $\langle E, e\rangle$ como simplemente a la flecha e. Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

Proposición 1.2.3. *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

Prueba. Sean **C** una categoría, $f, g : A \to B$ flechas paralelas en **C** y $\langle E, e\rangle$ un igualador de f y g. Supongamos que existen flechas $i, j : F \to E$ en **C** tales que $e \circ i = e \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "e\circ j = e\circ i"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$, es decir, $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$. Como e es un igualador de f y g, existe una única flecha $k : F \to E$ en **C** tal que $e \circ k = e \circ j$; trivialmente j cumple esta propiedad, pero también lo hace i, pues por hipótesis $e \circ i = e \circ j$. Se sigue que $i = j$ y por tanto e es un monomorfismo en **C**.

$\square$

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

Proposición 1.2.4. *Supongamos que en* **Set** el siguiente es un diagrama igualador:

$$E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Entonces, para todo $a \in A$ tal que $f(a) = g(a)$, existe $\alpha \in E$ tal que $e(\alpha) = a$.

Prueba. Definimos $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ $(\subseteq A)$. Por la Proposición 1.2.3, sabemos que $\langle F, in_{F,A}\rangle$ (donde $in_{F,A}$ es la función inclusión de F en A), es un igualador de f y g, con lo cual, existe una única flecha $v : F \to E$ tal que $e \circ v = in_{F,A}$. Como $a \in F$, tenemos $\alpha := v(a) \in E$ y $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$.

$\square$

1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro "ejemplo como motivación" (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena "condición de pegado", en el sentido de que las funciones $f|_{U_i}^{U}$ $(i \in I)$ se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera $i, j \in I$ y cualquier $x \in U_i \cap U_j$, se tiene $f|_{U_i}^{U}(x) = f(x) = f|_{U_j}^{U}(x)$; es este buen comportamiento local en subconjuntos de U lo que nos permite el paso a un conocimiento global de U mediante la función continua f que se reconstruye al pegar los elementos de la familia $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$. Notemos que $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$ es un elemento del producto cartesiano $\prod_{i\in I} CU_i$. Como, para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f|_{U_i}^{U} \in CU_i$ y $f|_{U_j}^{U} \in CU_j$, y como $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j \subseteq U_j$, obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones $(f|_{U_i}^{U})|_{U_i\cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^{U})|_{U_i\cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$, con las cuales formamos las familias $\left\{(f|_{U_i}^{U})|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$ y $\left\{(f|_{U_j}^{U})|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$, que a su vez son elementos del producto cartesiano $\prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$. Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \to \prod_{i\in I} CU_i$ que a cada $f \in CU$ le asigna la familia $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$.
- $\pi_1 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.
- $\pi_2 : \prod_{i\in I} CU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} CU_i$ le asigna la familia $\left\{f_j|_{U_i\cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Proposición 1.3.1. *En* **Set** *el siguiente es un diagrama igualador*

$$CU \xrightarrow{\ e\ } \prod_{i\in I} CU_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} C(U_i \cap U_j)$$

Prueba. • Dado $f \in CU$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\
&= \pi_1\left(\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i \in I}\right) \\
&= \left\{(f|_{U_i}^{U})\,|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \left\{f|_{U_i \cap U_j}^{U}\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \left\{(f|_{U_j}^{U})|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I} \\
&= \pi_2\left(\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i \in I}\right) \\
&= \pi_2(e(f)) \\
&= (\pi_2 \circ e)(f),
\end{aligned}$$

y por tanto $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$.

- Veamos que la pareja $\langle CU, e \rangle$ es universal con la anterior propiedad. Supongamos que existen $X \in \mathbf{Set}$ y $u : X \to \prod_{i \in I} CU_i$ en $\mathbf{Set}$ tales que $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
CU \arrow[r, "e"] & \prod_{i \in I} CU_i \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j) \\
X \arrow[u, dashed, "v"] \arrow[ur, "u"'] & &
\end{tikzcd}$$

Para cada $g \in X$, existe $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$ tal que $g(u) = \{g_i\}_{i \in I}$. Para todo $i \in I$ tenemos que $g_i : U_i \to \mathbb{R}$ es una función continua, y además $\pi_1 \circ u = \pi_2 \circ u$ implica $\left\{g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j) \in I \times I} = \left\{g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$, con lo cual para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}$ y $g_i(x) = g_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i}(x) = g_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}(x) = g_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Podemos por tanto usar el lema de pegado (Teorema 6.0.1) para afirmar que $\bigcup_{i \in I} g_i$ es una función continua de U en $\mathbb{R}$, es decir, $\bigcup_{i \in I} g_i \in CU$. Definimos así $v : X \to CU$ vía $v(g) = \bigcup_{i \in I} g_i$ para cada $g \in X$. Como

$$\begin{aligned}
(e \circ v)(g) &= e(v(g)) \\
&= e(\bigcup_{i \in I} g_i) \\
&= \left\{(\bigcup_{j \in I} g_j)|_{U_i}^{U}\right\}_{i \in I} \\
&= \{g_i\}_{i \in I} \\
&= u(g),
\end{aligned}$$

entonces $e \circ v = u$. Ahora, supongamos que existe $v' : X \to CU$ en $\mathbf{Set}$ tal que $e \circ v' = u$.

Entonces para toda $g \in X$ se tiene

$$\begin{aligned}\left\{(v'(g))|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I} &= u(g)\\ &= e(v(g))\\ &= \left\{(v(g))|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I},\end{aligned}$$

y por tanto $(v'(g))|_{U_i}^{U} = (v(g))|_{U_i}^{U}$ para todo $i \in I$. Con lo anterior

$$\begin{aligned}v'(g) &= \bigcup_{i\in I}(v'(g))|_{U_i}^{U}\\ &= \bigcup_{i\in I}(v(g))|_{U_i}^{U}\\ &= v(g),\end{aligned}$$

obteniendo $v' = v$, lo cual completa la prueba.

□

Notemos que la Proposición 1.3.1 vale para cualesquiera que sean el conjunto abierto U y el cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de U. El hecho de que e sea el igualador de π_1 y π_2 nos traduce la "condición de pegado" que se satisface al restringir funciones continuas de U a subconjuntos de éste, a saber, que las funciones resultantes coincidan en las respectivas intersecciones. Es a su vez ésta condición de pegado la que, mediante el Teorema 6.0.1, nos permite el paso de lo local a lo global que se expresa en la propiedad **(P2)**.

1.4 Definición funtorial de Haz

Son situaciones como la anterior las que motivan la definición de haz que daremos en esta sección, y que constituye una generalización natural del proceso que se ha realizado hasta ahora. Para empezar, señalamos algo de notación, que a su vez mantiene registro del germen de las ideas que prosiguen:

Notación 1.4.1. *Dado X un espacio topológico y $P : \mathcal{O}(X)^{op} \to$ **Set** un funtor (es decir un prehaz de conjuntos sobre X) y dada la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$,2 para toda $t \in PU$ denotamos*

$$t|_V^U := (P(V \subseteq U))(t).$$

Ahora generalizamos las funciones e, π_1 y π_2 que se trabajaron en la Sección 1.3:

Definición 1.4.2 (Funciones canónicas)**.** *Sea P un prehaz sobre un espacio topológico X. Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U, definimos las siguientes funciones:*

- *$e : PU \to \prod_{i\in I} PU_i$ que a cada $f \in PU$ le asigna la familia $\left\{f|_{U_i}^{U}\right\}_{i\in I}$.*
- *$\pi_1 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ que a cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ le asigna la familia $\left\{f_i|_{U_i\cap U_j}^{U_i}\right\}_{(i,j)\in I\times I}$.*

- $\pi_2 : \prod_{i\in I} PU_i \to \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$ *que a cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} PU_i$ *le asigna la familia* $\left\{ f_j|^{U_j}_{U_i\cap U_j} \right\}_{(i,j)\in I\times I}$.

Llamamos a e *la función canónica de* PU *en* $\prod_{i\in I} PU_i$ *y a* π_1 *y* π_2 *las funciones canónicas de* $\prod_{i\in I} PU_i$ *en* $\prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$.

Damos entonces la definición de haz, que garantiza capturar la esencia de las propiedades **(P1)** y **(P2)** (paso de lo global a lo local y de lo local a lo global, respectivamente):

Definición 1.4.3 (Haz de conjuntos)**.** *Un haz de conjuntos* P *sobre un espacio topológico* X *es un prehaz de conjuntos tal que para cualquier* $U \in \mathcal{O}(X)$ *y cualquier cubrimiento abierto* $\{U_i\}_{i\in I}$ *de* U*, el siguiente es un diagrama igualador:*

$$PU \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} PU_i \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} P(U_i \cap U_j)$$

donde e, π_1 *y* π_2 *son las respectivas funciones canónicas.*

En la anterior definición P es por tanto un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**. Al variar la categoría **Set** por la categoría de anillos, $\mathbb{F}$-álgebras, $\mathbb{F}$-módulos, etc. (para un campo $\mathbb{F}$) obtenemos haces de anillos, de $\mathbb{F}$-álgebras, de $\mathbb{F}$-módulos, etc., respectivamente. Así, el funtor C de nuestro "ejemplo como motivación", puede verse como un haz de conjuntos, pero también como haz de $\mathbb{R}$-álgebras o $\mathbb{R}$-módulos al dotar cada conjunto CU ($U \in \mathcal{O}(X)$) con las operaciones adecuadas. A C lo llamamos el haz de funciones reales continuas sobre X. En el presente escrito nos enfocaremos exclusivamente en haces (prehaces) de conjuntos, y en adelante nos referiremos a ellos simplemente como haces (prehaces).

La colección de todos los haces sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 1.4.4 (Categoría de haces sobre un espacio topológico)**.** *Dado un espacio topológico* X*, la categoría de funtores* $\mathbf{Set}^{\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}}$ *tiene como objetos todos los prehaces sobre* X *y como flechas todas las transformaciones naturales entre éstos. Dicha categoría también la representamos por* $\mathrm{PreSh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de prehaces sobre* X*". La subcategoría plena de* $\mathrm{PreSh}(X)$ *que tiene por objetos todos los haces sobre* X *se denota* $\mathrm{Sh}(X)$ *y la llamamos "la categoría de haces sobre* X*"; tendrá por tanto como flechas todas las transformaciones naturales entre haces sobre* X*.*

La traducción al inglés de las palabras *haz* y *prehaz* es, respectivamente, *sheaf* (en plural *sheaves*) y *presheaf* (en plural *presheaves*); de acá que se adopte la notación $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathrm{PreSh}(X)$.

2 Espacios étalé o espacios fibrados

En esta sección introducimos los espacios étalé. La palabra étalé proveniente del francés; viene a significar "ramificado", "extendido", "esparcido", "repartido", etc. Se entiende entonces que los espacios étalé también se conozcan como espacios fibrados. Algunos autores entienden por haces a los espacios fibrados. Un objetivo de este escrito será comprobar que esta acepción es completamente válida.

2.1 Manojos

Definición 2.1.1 (Manojo). *Un manojo sobre un espacio topológico X es una pareja $\langle Y, p\rangle$ con Y un espacio topológico y $p : Y \to X$ una función continua.*

Según el contexto, es frecuente referirnos al manojo $\langle Y, p\rangle$ simplemente por p. La colección de todos los manojos sobre un espacio topológico tiene estructura de categoría:

Definición 2.1.2 (Categoría $\mathbf{Top}/X$). *La categoría $\mathbf{Top}/X$ (léase "categoría Top sobre X") o $\mathbf{Bund}(X)$ tiene por objetos todos los manojos sobre X. Dados $\langle Y, p\rangle, \langle Y', q\rangle \in \mathbf{Top}/X$, f es una flecha $\langle Y, p\rangle \to \langle Y', q\rangle$ en $\mathbf{Top}/X$ si $f : Y \to Y'$ es una función continua y $q \circ f = p$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Y' \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd}$$

La categoría $\mathbf{Top}/X$ es un ejemplo de "categoría coma" (ver por ejemplo [Mac Lane, 1998, p. 45] donde se denota por $(X \downarrow \mathbf{Top})$). La notación $\mathbf{Bund}(X)$ es debido a *bundle*, la traducción al inglés de la palabra *manojo*. Un concepto esencial al trabajar con manojos es el de *sección*:

Definición 2.1.3 (Secciones). *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X.*

- *Una flecha $s : 1_X \to p$ en $\mathbf{Top}/X$ es llamada una sección transversal de p. En este caso decimos que s es una sección global de p.*
- *Dado $U \overset{ab}{\subseteq} X$, una flecha $s : in_{U,X} \to p$ en $\mathbf{Top}/X$ es llamada una sección transversal de p sobre U. En este caso decimos que s es una sección local de p.*

De esta forma, una sección global (local) es una función continua que hace que el siguiente diagrama de la izquierda (derecha) conmute:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "1_X"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "in_{U,X}"'] & X \end{tikzcd}$$

Vemos también que s se presenta como una inversa (local), a derecha, de p.

2.2 Espacios étalé

Para introducir los espacios étalé recordamos un concepto de topología:

Definición 2.2.1 (Homeomorfismo local). *Dados X y Y espacios topológicos, decimos que una función $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local sobre X si para todo $y \in Y$ existe $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ con $y \in V_y$ tal que:*

(i) $p(V_y)$ es un subconjunto abierto de X.

(ii) $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ *es un homeomorfismo.*

Una propiedad importante de los homeomorfismos locales (cuya prueba se presenta en la Sección 6 (Apéndice)) es la siguiente:

Proposición 2.2.2. *Si* $p : Y \to X$ *es un homeomorfismo local, entonces* p *es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de* Y *que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de* Y*.*

Con esto, podemos introducir los espacios fibrados o étalé como un caso particular de manojo:

Definición 2.2.3 (Espacio étalé)**.** *Un espacio fibrado o étalé sobre un espacio topológico* X *es un manojo* $\langle p, Y \rangle$*, donde* $p : Y \to X$ *es además un homeomorfismo local.*

Con lo anterior, podemos considerar la subcategoría plena de $\mathbf{Top}/X$ que tiene por objetos todos los espacios étalé sobre X, y que denotamos por $\mathbf{Etale}(X)$.

Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, las inversas puntuales $p^{-1}\{x\}$ $(x \in X)$ son llamadas las fibras de p sobre X. De este modo, el espacio Y se presenta como la unión disyunta de las fibras de p, justificando así el uso de las palabras *fibrado* y *étalé* en las definiciones dadas. Así mismo, hablamos de Y como el espacio alto o desplegado, y nos referimos a X como el espacio bajo o base. El espacio Y se muestra, primero, como un despliegue vertical del espacio X, representado en las fibras de cada elemento en el espacio base, y segundo, como un despliegue horizontal de X, representado mediante el pegamiento de fibras que establecen los conjuntos abiertos de Y. Así mismo, la función p se presenta como una proyección del espacio alto en el espacio bajo. Las secciones de un espacio étalé se comportan especialmente bien; muestra de ello lo da la siguiente proposición (para su prueba ver la Sección 6):

Proposición 2.2.4. *Sean* $U \overset{ab}{\subseteq} X$ *y* s *una sección transversal, de un espacio étalé* $\langle p, Y \rangle$*, sobre* U*. Entonces:*

- $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.
- $s : U \to s(U)$ *es un homeomorfismo.*
- $s(U)$ *es un subconjunto abierto de* Y*.*

Lo anterior nos permite por tanto caracterizar las secciones de $\langle p, Y \rangle$ con los abiertos básicos de Y. Ésto a su vez nos muestra que el pegamiento horizontal de fibras que se da en Y mediante conjuntos abiertos es bien portado en términos de continuidad. Un problema crucial en la teoría es el de la posibilidad de pegar secciones locales para construir secciones mayores y eventualmente globales [Zalamea, 2021], lo cual captura las problemáticas de lo local versus lo global que motivaron nuestra definición de haz. Estos paralelismos manifiestos entre haces y espacios étalé permiten que la equivalencia entre las categorías $\mathrm{Sh}(X)$ y $\mathbf{Etale}(X)$, cuya prueba constituye nuestro objetivo en lo que sigue, no nos parezca en absoluto ajena.

3 De manojos a prehaces

(A lo largo de esta sección y la siguiente, X denota un espacio topológico fijo).

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Γ de la categoría $\mathbf{Top}/X$ de los manojos sobre X, en la categoría $\mathrm{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X.

Definición 3.0.1 (Acción de Γ_p sobre objetos)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X. Para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ definimos $\Gamma_p U$ como el conjunto de todas las secciones transversales de p sobre U.*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p U & Y \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[ur, bend left=60] \arrow[ur, bend left=30] \arrow[ur, "\cdots" description] \arrow[ur, bend right=30] \arrow[r, hook] & X
\end{tikzcd}$$

Notemos que si se tiene la flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, para cada $s \in \Gamma_p U$ surge una sección transversal de p sobre V, a saber, $s \circ \iota_{V,U} = s|_V^U$, es decir $s|_V^U \in \Gamma_p V$:

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \arrow[dd, "p"] \\
 & U \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, hook, "\iota_{U,X}"] & \\
V \arrow[uurr, bend left, "s|_V^U"] \arrow[ur, hook, "\iota_{V,U}"] \arrow[rr, hook, "\iota_{V,X}"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Definición 3.0.2 (Acción de Γ_p sobre flechas)**.** *Sea $p : Y \to X$ un manojo sobre X. Para cada flecha $V \subseteq U$ en $\mathcal{O}(X)$, definimos la flecha (de* **Set***) $\Gamma_p(V \subseteq U) : \Gamma_p U \to \Gamma_p V : s \mapsto s|_V^U$.*

Las anteriores asignaciones de flechas y objetos hacen de Γ_p un funtor contravariante $\Gamma_p : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to$ **Set**, es decir, un prehaz sobre X; más aún, Γ_p resulta ser un haz sobre X.

Proposición 3.0.3. *Para cada manojo $p : Y \to X$, Γ_p es un haz sobre X.*

Prueba.

- La prueba de que Γ_p es un prehaz sobre X es similar a la que se da para la Proposición (1.1.1).

- Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de U. El siguiente diagrama en **Set** es un igualador:

  $$\Gamma_p U \xrightarrow{\;e\;} \prod_{i \in I} \Gamma_p U_i \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in I \times I} \Gamma_p(U_i \cap U_j)$$

  La prueba de esto es similar a la que se da para la Proposición (1.3.1), sumada al siguiente hecho: dada una familia $\{g_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Gamma_p U$, se tiene $p \circ \bigcup_{i \in I} g_i = \iota_{U,X}$: dada $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$; como $g_j : U_j \to Y$ es una sección transversal de p sobre U_j, se tiene

$p \circ g_j = \iota_{U_j,X}$, y por tanto

$$\begin{aligned}\left(p \circ \bigcup_{i\in I} g_i\right)(x) &= p\left(\bigcup_{i\in I} g_i(x)\right)\\ &= p(g_j(x))\\ &= \iota_{U_j,X}(x)\\ &= x\\ &= \iota_{U,X}(x);\end{aligned}$$

con esto $p \circ \bigcup_{i\in I} g_i = \iota_{U,X}$. Lo anterior se hace para garantizar $\bigcup_{i\in I} g_i \in \Gamma_p U$.

Por tanto Γ_p es un haz sobre X. □

A los haces del tipo Γ_p, con $p : Y \to X$ un manojo sobre X, los llamamos *haces de secciones transversales* sobre X. En ocaciones denotamos ΓY en lugar de Γ_p. Obtenemos por cada $p \in \mathbf{Top}/X$ un objeto $\Gamma_p \in \mathrm{Sh}(X)$. Ahora deseamos obtener, por cada flecha $f : \langle Y, p\rangle \to \langle Y', p'\rangle$ en $\mathbf{Top}/X$, una flecha $\Gamma_f : \Gamma_p \to \Gamma'_p$ de $\mathrm{Sh}(X)$, es decir, una transformación natural entre los funtores $\Gamma_p, \Gamma'_p : \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$; para esto necesitamos asignar, para cada $U \in \mathcal{O}(X)$, una función $\Gamma_f U$ entre los conjuntos $\Gamma_p U$ y $\Gamma'_p U$, que además nos garantice que si $V \subseteq U$ es una flecha en $\mathcal{O}(X)$, entonces el siguiente diagrama de $\mathbf{Set}$ conmute:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_p V \arrow[r, "\Gamma_f V"] & \Gamma_{p'} V \\ \Gamma_p U \arrow[u, "\Gamma_p(V\subseteq U)"] \arrow[r, "\Gamma_f U"'] & \Gamma_{p'} U \arrow[u, "\Gamma_{p'}(V\subseteq U)"'] \end{tikzcd}$$

Notemos que la función $\Gamma_f U$ nos exige asignar a cada sección transversal s de p sobre U (i.e. $s : U \to Y$ es una función continua y $p \circ s = \iota_{U,X}$) una sección transversal $\Gamma_f U(s)$ de p' sobre U (i.e. una función continua $\Gamma_f U(s) : U \to Y'$ tal que $p' \circ \Gamma_f U(s) = \iota_{U,X}$). El siguiente diagrama que se forma en $\mathbf{Top}/X$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y' \\ U \arrow[ur, "s"] \arrow[r, hook, "\iota_{U,X}"'] & X \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

nos muestra que $f \circ s$ es una función continua de U en Y, y

$$\begin{aligned} p' \circ (f \circ s) &= (p' \circ f) \circ s\\ &= p \circ s\\ &= \iota_{U,X}, \end{aligned}$$

sugiriéndonos tomar $\Gamma_f U(s) = f \circ s$. Con esto tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U))(s) &= \Gamma_f V(\Gamma_p(V \subseteq U)(s)) \\
&= \Gamma_f V(s|_V^U) \\
&= f \circ s|_V^U \\
&= f \circ (s \circ \iota_{V,U}) \\
&= (f \circ s) \circ \iota_{V,U} \\
&= (f \circ s)|_V^U \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(f \circ s) \\
&= \Gamma_{p'}(V \subseteq U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U)(s),
\end{aligned}$$

Y por tanto $\Gamma_f V \circ \Gamma_p(V \subseteq U) = \Gamma_{p'}(V \subseteq U) \circ \Gamma_f U$. Lo anterior prueba que Γ_f es una transformación natural, para cada flecha f en $\mathbf{Top}/X$. Estas asignaciones hacen de Γ un funtor de $\mathbf{Top}/X$ en $\mathrm{PreSh}(X)$ (de hecho, en $\mathrm{Sh}(X)$, pero las razones de tomar la categoría de prehaces sobre X como codominio de Γ se entenderán más adelante):

Proposición 3.0.4. *Las asignaciones $p \mapsto \Gamma_p$ para cada $p \in \mathbf{Top}/X$ y $f \mapsto \Gamma_f$ para cada flecha f en $\mathbf{Top}/X$, determinan un funtor $\Gamma : \mathbf{Top}/X \to \mathrm{PreSh}(X)$.*

Prueba.

- Veamos que Γ respeta identidades. Sea $\langle Y, p\rangle \in \mathbf{Top}/X$. Debemos ver $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$, donde 1_{Γ_p} es la transformación natural identidad del funtor Γ_p en sí mismo. Dados $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$, tenemos que $\Gamma_{1_p} U$ es una función de $\Gamma_p U$ en $\Gamma_p U$ y $\Gamma_{1_p} U(s) = 1_p \circ s = s$; por tanto $\Gamma_{1_p} U = 1_{\Gamma_p U} = 1_{\Gamma_p} U$. Como lo anterior se tiene para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue que $\Gamma_{1_p} = 1_{\Gamma_p}$.

- Veamos que Γ respeta composiciones. Supongamos que tenemos en $\mathbf{Top}/X$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g\circ f"'] & \\
& p' \arrow[dl, "g"] \\
p'' &
\end{tikzcd}$$

  y veamos que en $\mathrm{PreSh}(X)$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p \arrow[dr, "\Gamma_f"] \arrow[dd, "\Gamma_{g\circ f}"'] & \\
& \Gamma_{p'} \arrow[dl, "\Gamma_g"] \\
\Gamma_{p''} &
\end{tikzcd}$$

Sean $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in \Gamma_p U$. Tenemos

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{g\circ f} U)(s) &= (g \circ f) \circ s \\
&= g \circ (f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(f \circ s) \\
&= (\Gamma_g U)(\Gamma_f U(s)) \\
&= (\Gamma_g U \circ \Gamma_f U)(s).
\end{aligned}$$

Por tanto $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g U \circ \Gamma_f U$; como esto vale para $U \in \mathcal{O}(X)$ arbitrario, se sigue $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g \circ \Gamma_f$. Lo anterior prueba que Γ es un funtor de $\mathbf{Top}/X$ en $\mathrm{PreSh}(X)$. $\square$

4 De prehaces a manojos

En esta sección construimos y estudiamos un funtor Λ de la categoría $\mathrm{PreSh}(X)$ de prehaces sobre X en la categoría $\mathbf{Top}/X$ de manojos sobre X.

Iniciamos definiendo el "suelo" de un elemento de X respecto a un prehaz sobre X:

Definición 4.0.1 (P-suelo de x)**.** *Dados $x \in X$ y $P \in \mathrm{PreSh}(X)$, definimos el "P-suelo de x" (denotado como* P-Su(x)*) como el conjunto* $\{(U, s) \mid x \in U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$

Buscamos definir una relación de equivalencia sobre el suelo de cada elemento de X:

Definición 4.0.2. *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Definimos en* P-Su(x) *la relación $\sim_{P,x}$ de la siguiente manera:*

Dados $(U, s), (V, t) \in$ P-Su(x), $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, si y sólo si, existe $W \in \mathcal{O}(X)$ tal que
$$x \in W \subseteq U \cap V \text{ y } s|^U_W = t|^V_W.$$

Si $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$, decimos que (U, s) y (V, t) tienen el mismo P-germen en x.

La igualdad $s|^U_W = t|^V_W$ con $W \subseteq U \cap V$ nos recuerda la idea de "coincidir localmente" que se mostró en las motivaciones dadas en la primera sección.

Notemos que la condición $W \subseteq U \cap V$ se tiene si y sólo si $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$, y que en este caso $s|^U_W$ y $t|^V_W$ son elementos de $P(W)$, siempre que $s \in PU$ y $t \in PV$. De esta forma, podemos representar $(U, s) \sim_{P,x} (V, t)$ con el cumplimiento simultaneo de los dos siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
U & & \\
& W \arrow[ul] \arrow[dl] & x \arrow[l, "\in"'] \\
V & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
PU \arrow[dr] & s \arrow[l, "\in"] & \\
& PW & s|^U_W = t|^V_W \arrow[l, "\in"] \\
PV \arrow[ur] & t \arrow[l, "\in"] &
\end{tikzcd}$$

Donde el diagrama de la izquierda está en $\mathcal{O}(X)$, el de la derecha en Set y las flechas azules denotan pertenencia conjuntista.

En las dos anteriores definiciones, si es claro el prehaz P con el que se está trabajando, solemos denotar $\mathrm{Su}(x)$ y $\sim_x$ en lugar de P-Su(x) y $\sim_{P,x}$, respectivamente.

Proposición 4.0.3. *Para cualesquiera $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$, la relación $\sim_x$ es de equivalencia sobre* $\mathrm{Su}(x)$.

Prueba. La reflexividad y simetría de $\sim_x$ se siguen directamente de la definición. Veamos que $\sim_x$ es transitiva. Sean $(T,r),(U,s),(V,t) \in \mathrm{Su}(x)$ tales que $(T,r) \sim_x (U,s)$ y $(U,s) \sim_x (V,t)$. Existen $W_1, W_2 \in \mathcal{O}(X)$ tales que $x \in W_1 \subseteq T \cap U$ y $x \in W_2 \subseteq U \cap V$. Además $r|^T_{W_1} = s|^U_{W_1}$ y $s|^U_{W_1} = t|^V_{W_2}$. Tenemos $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{O}(X)$ y $x \in W_1 \cap W_2 \subseteq T \cap V$; se forma en $\mathcal{O}(X)$ el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T & & & \\
& W_1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
U & & W_1 \cap W_2 \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[uull, bend right] \arrow[ddll, bend left] & x \arrow[l, "\in"'] \\
& W_2 \arrow[ul] \arrow[dl] & & \\
V & & &
\end{tikzcd}$$

Como P es un funtor contravariante de $\mathcal{O}(X)$ en **Set**, obtenemos en **Set** el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
PT \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] & & \\
& PW_1 \arrow[dr] & \\
PU \arrow[ur] \arrow[dr] & & P(W_1 \cap W_2) \\
& PW_2 \arrow[ur] & \\
PV \arrow[ur] \arrow[uurr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Siguiéndolo tenemos que

$$\begin{aligned} r|^{T}_{W_1\cap W_2} &= (r|^{T}_{W_1})|^{W_1}_{W_1\cap W_2} \\ &= (s|^{U}_{W_1})|^{W_1}_{W_1\cap W_2} \\ &= s|^{U}_{W_1\cap W_2} \\ &= (s|^{U}_{W_2})|^{W_2}_{W_1\cap W_2} \\ &= (t|^{V}_{W_2})|^{W_2}_{W_1\cap W_2} \\ &= t|^{V}_{W_1\cap W_2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $(T, r) \sim_x (V, t)$ y $\sim_x$ es transitiva. Obtenemos que $\sim_x$ es una relación de equivalencia en $\mathrm{Su}(x)$. $\square$

Ahora consideramos las clases de equivalencia generadas por la relación de tener el mismo germen en un punto:

Definición 4.0.4 (Germen en un punto)**.** *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Para cada $(U, s) \in \mathrm{Su}(x)$, la clase de equivalencia de (U, s) respecto a $\sim_{P,x}$ se denota por* $\text{P-germ}_x s_U$*, y la llamamos el germen de (U, s) en x.*

Nuevamente, si por el contexto es claro con qué prehaz estamos trabajando, puede omitirse el "$P-$" en la anterior definición.

El siguiente lema, que será utilizado más adelante, nos muestra que el germen de un elemento se conserva bajo restricciones; propiedad que en efecto concuerda con la intuición desarrollada hasta el momento.

Lema 4.0.5. *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $U, V \in \mathcal{O}(X)$ con $V \subseteq U$ y $s \in PU$. Si $x \in V$ entonces* $\mathrm{germ}_x s_U = \mathrm{germ}_x (s|^{U}_{V})_V$.

Prueba. Supongamos que $x \in V$; en particular $x \in V \subseteq U \cap V$. Tenemos los diagramas (izquierda en $\mathcal{O}(X)$ y derecha en **Set**):

$$\begin{tikzcd} U & \\ & V \arrow[ul, "U\subseteq V"'] \arrow[dl, "V\subseteq V"] \\ V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} PU \arrow[dr, "P(U\subseteq V)"] & \\ & PV \\ PV \arrow[ur, "P(V\subseteq V)"'] & \end{tikzcd}$$

Como $V \subseteq V$ es la flecha identidad de V, y P es en particular un funtor, entonces $P(V \subseteq V)$ es la flecha identidad de PV; como $s \in PU$ entonces $P(U \subseteq V)(s) = s|^{U}_{V} \in PV$, luego

$$s|^{U}_{V} = P(V \subseteq V)(s|^{U}_{V}) = (s|^{U}_{V})|^{V}_{V}.$$

Luego $(s, U) \sim_x (s|^{U}_{V}, V)$, de modo que las respectivas clases de equivalencia son iguales, es decir, $\mathrm{germ}_x s_U = \mathrm{germ}_x (s|^{U}_{V})_V$. $\square$

Al pasar al cociente por la relación de equivalencia de "tener el mismo germen", obtenemos el tallo (stalk en inglés) de un prehaz en un punto dado:

Definición 4.0.6 (Tallo en un punto). *Sean $P \in \mathrm{PreSh}(X)$ y $x \in X$. Al conjunto cociente*

$$P_x := \text{P-Su}(x)/\sim_x = \{\text{P-germ}_x s_U \mid (U, s) \in \text{P-Su}(x)\}$$

lo llamamos el tallo de P en x.

Los tallos de un prehaz no son necesariamente disyuntos; ello lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.0.7. *Tomemos $X = \{a, b\}$ (con $a \neq b$) dotado con la topología trivial $\tau = \{\phi, X\}$, C el haz de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ la función constante en 0 ($f(a) = f(b) = 0$). Las únicas funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ son las constantes, es decir $CX = \{g : X \to \mathbb{R} \mid g(a) = f(a)\}$. Notemos que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Su}(a) &= \left\{(U, g) \mid a \in U \overset{ab}{\subseteq} X; g \in CU\right\} \\ &= \{(X, g) \mid g : X \to \mathbb{R} \textit{ es continua}\} \\ &= \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}\,; \end{aligned}$$

del mismo modo se llega a $\mathrm{Su}(b) = \{(X, g) \mid g(a) = g(b)\}$, y por tanto $\mathrm{Su}(a) = \mathrm{Su}(b)$. Sea $(X, g) \in \mathrm{germ}_a f_X$. Entonces $(X, g) \in \mathrm{Su}(a) = \mathrm{Su}(b)$ y $(X, g) \sim_a (X, f)$ y por tanto existe $W \overset{ab}{\subseteq} X$ tal que $a \in W \overset{ab}{\subseteq} X$ y $g|_W^X = f|_W^X$; pero como el único abierto no vacío de X es X, tenemos $W = X$ y $f = f|_X^X = g|_X^X = g$. De este modo $\mathrm{germ}_a f_X = \{(X, f)\}$. Análogamente se llega a $\mathrm{germ}_b f_X = \{(X, f)\}$. Con lo anterior, $\mathrm{germ}_a f_X \in C_a \cap C_b$, esto es, C_a y C_b no son disyuntos para $a \neq b$. Por lo tanto los tallos del haz C no son disyuntos.

Nos interesa forzar a los tallos de un prehaz a que tengan intersección vacía; para esto tomamos su unión disyunta (que resulta ser el coproducto de los tallos en la categoría **Set**):

Definición 4.0.8. *Sea $P \in \mathrm{PreSh}(X)$. Denotamos por Λ_P a la unión disyunta de los tallos de P en los elementos de X:*

$$\begin{aligned} \Lambda_P &:= \coprod_{x \in X} P_x \\ &= \bigcup_{x \in X} (P_x \times \{x\}) \\ &= \{(\text{P-germ}_x s_U, x) \mid x \in X; (U, s) \in \text{P-Su}(x)\}\,. \end{aligned}$$

Queremos obtener por cada prehaz sobre X un manojo sobre X; el conjunto Λ_P es el primer paso para esto; ahora definimos una función de dicho conjunto en X:

Definición 4.0.9. *Sea $P \in \mathrm{PreSh}(X)$. Definimos la función $\mathfrak{p} : \Lambda_P \to X$ mediante $\mathfrak{p}(\text{P-germ}_x s_U, x) = x$ para cada $(\text{P-germ}_x s_U, x) \in \Lambda_P$, y la llamamos la función canónica de Λ_P en X.*

Para que $\mathfrak{p}$ represente un manojo sobre X, debemos dotar a Λ_P de una topología; con este fin introducimos una nueva familia de funciones:

Definición 4.0.10. *Para cualesquiera $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$, definimos la función $\dot{s} : U \to \Lambda_P$ mediante $\dot{s}(x) = (\text{P-germ}_x s_U, x)$ para cada $x \in U$.*

Para cada función $\dot{s}$, el siguiente diagrama en **Set** es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \Lambda_P \arrow[d, "\mathfrak{p}"] \\ U \arrow[ur, "\dot{s}"] \arrow[r, hook, "\iota_{U,X}"'] & X \end{tikzcd}$$

Este diagrama nos recuerda las secciones transversales sobre un manojo. Deseamos que la topología que asignemos a Λ_P haga de cada función $\dot{s}$ una sección transversal sobre $\mathfrak{p}$.

Proposición 4.0.11. *Sea $P \in \text{PreSh}(X)$. El conjunto*

$$\mathcal{B}_{\Lambda_P} := \{\dot{s}(U) \mid U \in \mathcal{O}(X); s \in PU\}$$

es base para una topología sobre Λ_P.

Prueba. Hacemos uso de la caracterización dada en la Proposición 6.0.4.

- Veamos que $\bigcup \mathcal{B}_{\Lambda_P} = \Lambda_P$, es decir,

$$\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O}(X) \\ s \in PU}} \dot{s}(U) = \Lambda_P.$$

  La contenencia $\subseteq$ es inmediata, pues $\dot{s}(U) \subseteq \Lambda_P$ para cada $U \in \mathcal{O}(X)$ y $s \in PU$. Ahora, sea $z \in \Lambda_P$. Existen $y \in X$ y $(V, t) \in \text{Su}(y)$ tales que $z = (\text{germ}_y t_V, y)$. Tenemos $y \in V \in \mathcal{O}(X)$ y $t \in PV$; como $\dot{t}_V(y) = (\text{germ}_y t_V, y) = z$, tenemos $z \in \dot{t}(V) \subseteq \bigcup \dot{s}(U)$; esto nos da la contenencia $\supseteq$. Obtenemos que Λ_P es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$.

- Ahora, sean $A, B \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$ y probemos que $A \cap B$ es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Existen $T, V \in \mathcal{O}(X), t \in PT$ y $r \in PV$ tales que $A = \dot{t}(T)$ y $B = \dot{r}(V)$. Si $A \cap B = \phi$, entonces $A \cap B$ es la unión vacía de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Supongamos que $A \cap B \neq \phi$. Dado

$$z \in A \cap B = \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = \{(\text{germ}_x t_T, x) \mid x \in T\} \cap \{(\text{germ}_x r_V, x) \mid x \in V\},$$

  existe $x \in T \cap V \in \mathcal{O}(X)$ tal que $z = (germ_x t_T, x) = (germ_x r_V, x)$; luego $germ_x t_T = germ_x r_V$ y $(T, t) \sim_x (V, r)$. Así, existe $W_z \in \mathcal{O}(X)$ tal que $x \in W_z \subseteq T \cap V$ y $t|^T_{W_z} = r|^V_{W_z} \in PW_z$. Probemos que

$$A \cap B = \bigcup_{z \in A \cap B} (\dot{t|^T_{W_z}})(W_z).$$

  ($\subseteq$) Sea $\omega \in A \cap B$. Existe $x \in W_\omega$ tal que $\omega = (\text{germ}_x t_T, x)$. Como, por el Lema 4.0.5 se tiene $\text{germ}_x t_T = \text{germ}_x (t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}$, entonces

$$\begin{aligned} \omega &= (\text{germ}_x t_T, x) \\ &= (\text{germ}_x (t|^T_{W_\omega})_{W_\omega}, x) \\ &= (\dot{t|^T_{W_\omega}})_{W_\omega}(x) \end{aligned}$$

con $x \in W_\omega$; así,

$$\omega \in (t|^{\dot{T}}_{W_\omega})(W_\omega)$$

con $\omega \in A \cap B$, luego

$$\omega \in \bigcup_{z \in A \cap B} (t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z),$$

y con esto,

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{z \in A \cap B} (t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z).$$

($\supseteq$) Sea $y \in \bigcup_{z \in A \cap B} (t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z)$. Existe $\omega \in A \cap B$ tal que $y \in (t|^{\dot{T}}_{W_\omega})(W_\omega)$, de modo que existe $x \in W_\omega$ tal que $y = (t|^{\dot{T}}_{W_\omega})(x) = (\text{germ}_x(t|^{T}_{W_\omega}), x)$ con $W_\omega \subseteq T \cap V$ y $t|^{T}_{W_\omega} = r|^{V}_{W_\omega}$, con lo cual $(T, t) \sim_x (V, r)$ y $\text{germ}_x t_T = \text{germ}_x r_V$. Como $\text{germ}_x t_T = germ_x(t|^{T}_{W_\omega})_{W_\omega}$, tenemos

$$\begin{aligned} y &= (\text{germ}_x(t|^{T}_{W_\omega})_{W_\omega}, x) \\ &= (\text{germ}_x t_T, x) \\ &= (\text{germ}_x r_V, x), \end{aligned}$$

es decir $y = \dot{t}(x) = \dot{r}(x)$ con $x \in W_\omega \subseteq T \cap V$, de modo que $y \in \dot{t}(T) \cap \dot{r}(V) = A \cap B$. Obtenemos $\bigcup_{z \in A \cap B} (t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z) \subseteq A \cap B$.

Así, $A \cap B = \bigcup_{z \in A \cap B} (t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z)$, y para cada $z \in A \cap B$, $(t|^{\dot{T}}_{W_z})(W_z) \in \mathcal{B}_{\Lambda_P}$; es decir, la intersección de dos elementos de Λ_P es unión de elementos de $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$. Concluimos que $\mathcal{B}_{\Lambda_P}$ es base para una topología sobre Λ_P.

$\square$

5 Diálogo entre funtores

6 Apéndice

Teorema 6.0.1 (Lema de pegado)**.** *Sean X y Y espacios topológicos. Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$, $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de U y $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones, de modo que para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to Y$ es una función continua. Además suponemos la siguiente "condición de pegado": para cualesquiera $i, j \in I$ se tiene $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Entonces, $f := \bigcup_{i\in I} f_i$ es una función continua de U en Y.*

Prueba.

- Veamos que f es en efecto una función de U en Y. Sea $x \in U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $\langle x, f_j(x)\rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i = f$. Como $f_j(x) \in Y$, obtenemos que f relaciona a x con un elemento de Y. Supongamos que para $y, y' \in Y$ se tiene $\langle x, y\rangle, \langle x, y'\rangle \in f = \bigcup_{i\in I} f_i$. Existen $j, k \in I$ tales que $\langle x, y\rangle \in f_j$ y $\langle x, y'\rangle \in f_k$, es decir $x \in I_j$ y $y = f_j(x)$, y, $x \in U_k$ y $y' \in f_k(x)$; entonces $x \in U_j \cap U_k$ y por la condición de pegado se tiene $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$, con lo cual $\langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Lo anterior nos muestra que f relaciona cada elemento de U con un único elemento de Y, es decir, f es una función de U en Y.

- Probemos que $f : U \to Y$ es continua mostrando que devuelve abiertos de Y en abiertos de U por la imagen recíproca . Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$. Notemos que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$:

  $\subseteq$: Sea $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$, es decir, $f(x) \in V$. Existe $j \in I$ tal que $x \in U_j$, luego $f_j(x) = f(x) \in V$, y $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$.

  $\supseteq$: Sea $x \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V)$, es decir $x \in f_j^{-1}(V)$ para algún $j \in I$. Entonces $f(x) = f_j(x) \in V$ y $x \in f^{-1}(V)$.

  Ahora bien, para cada $i \in I$ tenemos $f_i^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq} U_i$, luego $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$ con $W_i \overset{ab}{\subseteq} U$. Como $U_i \overset{ab}{\subseteq} U$ entonces $f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U$, de modo que

  $$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(V) \overset{ab}{\subseteq} U.$$

  Con esto, concluimos que $f = \bigcup_{i\in I} f_i : U \to Y$ es continua.

$\square$

Proposición 6.0.2. *Si $p : Y \to X$ es un homeomorfismo local, entonces p es una función continua y abierta. Además, la colección de todos los conjuntos abiertos de Y que satisfacen (i) y (ii) de la Definición 2.2.1 forman una base para la topología de Y.*

Prueba.

- Probamos la continuidad de p puntualmente. Sean $y \in Y$ y $U \overset{ab}{\subseteq} X$ con $p(y) \in U$. Tenemos que $y \in V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $p(y) \in p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Tomando $W = p(V_y) \cap U$ se tiene $p(y) \in W \overset{ab}{\subseteq} X$. Además $W \subseteq p(V_y)$ y $W \subseteq U$. Como $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, entonces $p^{-1}(W) = (p|_{V_y}^{Y})^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$, así que $y \in p^{-1}(W) \overset{ab}{\subseteq} Y$; igualmente, $p(p^{-1}(W)) \subseteq W \subseteq U$, lo cual prueba que p es continua en y. Como y es arbitraria en Y, obtenemos que $p : Y \to X$ es continua.

- Sea $V \overset{ab}{\subseteq} Y$; probemos que $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Para cada $y \in V$ definimos $W_y = V_y \cap V \overset{ab}{\subseteq} V_y$. Como $p|_{V_y}^{V} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo, en particular es una función abierta, luego $p(W_y) = (p|_{V_y}^{V})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$; como $p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ entonces $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ para cada $y \in V$, luego $\bigcup_{y\in V} p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$. Ya que
$$\begin{aligned}\bigcup_{y\in V} p(W_y) &= \bigcup_{y\in V} p(V \cap V_y)\\ &= p\left(\bigcup_{y\in V} (V \cap V_y)\right)\\ &= p\left(V \cap \bigcup_{y\in V} V_y\right)\\ &= p(V),\end{aligned}$$
pues $V \subseteq \bigcup_{y\in V} V_y$, entonces $p(V) \overset{ab}{\subseteq} X$. Obtenemos así que $p : Y \to X$ es una función abierta.

- Llamemos $\mathcal{B} = \left\{W \overset{ab}{\subseteq} Y \mid p(W) \overset{ab}{\subseteq} X,\ p|_{W}^{Y} : W \to p(W) \text{ es homeomorfismo}\right\}$ y probemos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y. Sean $V \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $y \in V$. Llamemos $W_y = V_y \cap V$, de modo que $y \in W_y \subseteq V$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $W_y \overset{ab}{\subseteq} Y$. Tenemos que $p|_{V_y}^{Y} : V_y \to p(V_y)$ es un homeomorfismo; como $W_y \overset{ab}{\subseteq} V_y$ y todo homeomorfismo es en particular una función abierta, obtenemos $p(W_y) = (p|_{V_y}^{Y})(W_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$, de modo que $p(W_y) \overset{ab}{\subseteq} X$; además, ya que la restricción de homeomorfismos es un homeomorfismo, entonces $(p|_{V_y}^{Y})|_{W_y}^{V_y} = p|_{W_y}^{Y} : W_y \to p(W_y)$ es un homeomorfismo. Así, $W_y \in \mathcal{B}$, y $\mathcal{B}$ es base para la topología de Y.

$\square$

Proposición 6.0.3. *Sean $U \overset{ab}{\subseteq} X$ y s una sección transversal, de un espacio étalé $\langle p, Y\rangle$, sobre U. Entonces:*

(i) $p|_{s(U)}^{Y} = s^{-1}$.

(ii) $s : U \to s(U)$ *es un homeomorfismo.*

(iii) $s(U)$ *es un subconjunto abierto de* Y.

Prueba. (i) Dado $x \in U$ tenemos
$$\begin{aligned}(p|_{s(U)}^{Y} \circ s)(x) &= p|_{s(U)}^{Y}(s(x))\\ &= p(s(x))\\ &= in_{U,X}(x)\\ &= x\\ &= 1_U(x),\end{aligned}$$

luego $p|^Y_{s(U)} \circ s = 1_U(x)$. Dado $y \in s(U)$, existe $z \in U$ tal que $y = s(z)$, y:

$$\begin{aligned}(s \circ p|^Y_{s(U)})(y) &= s(p|^Y_{s(U)}(y)) \\ &= s(p(y)) \\ &= s(p(s(z))) \\ &= s(z) \\ &= y,\end{aligned}$$

de modo que $s \circ p|^Y_{s(U)} = 1_{s(U)}$. Esto prueba *(i)*.

(ii) Sabemos que s es una función continua, y su inversa $p|^Y_{s(U)}$ es continua por ser la restricción de una función continua; por tanto, $s : U \to s(U)$ es un homeomorfismo.

(iii) Ahora veamos que $s(U) \overset{ab}{\subseteq} Y$. Sea $y \in s(U)$. Dado $x \in s^{-1}(V_y)$, tenemos $s(x) \in V_y$ y $x = p(s(x)) \in p(V_y)$; por tanto $s^{-1}(V_y) \subseteq p(V_y)$. Como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ y $s : U \to Y$ es continua, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} U$; como $U \overset{ab}{\subseteq} X$, entonces $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} X$ y $s^{-1}(V_y) \overset{ab}{\subseteq} p(V_y)$. Como $p|^Y_{V_y}$ es en particular continua, se tiene $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq} V_y$; como $V_y \overset{ab}{\subseteq} Y$ entonces $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \overset{ab}{\subseteq} Y$. Además, como $y \in s(U)$, se sigue que $s(p|^Y_{V_y}(y)) = s(p|^Y_{s(U)}(y)) = s(s^{-1}(y)) = y \in V_y$ y por tanto $y \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, nos falta probar que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$; para esto basta ver que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) = V_y \cap s(U)$:

$\subseteq$: Por definición sabemos que $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y$. Sea $t \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Tenemos que $s(p|^Y_{V_y}(t)) \in V_y$ y $p|^Y_{V_y}(t) \in s^{-1}(V_y) \subseteq U$. Además,

$$p|^Y_{V_y}(s(p|^Y_{V_y}(t))) = p(s(p|^Y_{V_y}(t))) = p|^Y_{V_y}(t).$$

Como $p|^Y_{V_y}$ es en particular inyectiva, obtenemos $t = s(p|^Y_{V_y}(t))$; ya que $p|^Y_{V_y}(t) \in U$, se sigue $t \in s(U)$. Con lo anterior se tiene $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq s(U)$ y por lo tanto $(p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y)) \subseteq V_y \cap s(U)$.

$\supseteq$: Sea $t \in V_y \cap s(U)$. Tenemos $p|^Y_{V_y}(t) = p(t) = p|^Y_{s(U)}(t)$, luego

$$s(p|^Y_{V_y}(t)) = s(p|^Y_{s(U)}(t)) = s(s^{-1}(t)) = t \in V_y,$$

de modo que $t \in (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$. Así, $V_y \cap s(U) \subseteq (p|^Y_{V_y})^{-1}(s^{-1}(V_y))$.

□

Proposición 6.0.4. *Sea Σ una familia de subconjuntos de X. Se tiene que Σ es base para una topología sobre X, si y solo si, tanto X como la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ, es unión de elementos de Σ.*

Prueba. ($\Rightarrow$) Supongamos que Σ es base para una topología sobre X. Como X es abierto, es unión de elementos de Σ. Como los elementos de Σ son en particular abiertos, la intersección de dos elementos de Σ es abierta y por tanto es unión de elementos de Σ.

($\Leftarrow$) Supongamos que X es unión de elementos de Σ y que la intersección de cualesquiera dos elementos de Σ es unión de elementos de Σ. Sea τ_Σ el conjunto de uniones arbitrarias de elementos de Σ. Veamos que τ_Σ es una topología sobre X:

- Como los elementos de Σ son subconjuntos de X, entonces la unión de elementos de Σ es subconjunto de X, de modo que τ_Σ es una familia de subconjuntos de X.
- X es unión de elementos de Σ, así que $X \in \tau_\Sigma$. El conjunto ϕ es la unión vacía de elementos de Σ, así que $\phi \in \tau_\Sigma$.
- Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de elementos de τ_Σ. Para cada $i \in I$ existe una familia $\left\{V_j^i\right\}_{j\in J}$ de elementos de Σ tal que $U_i = \bigcup_{j\in J} V_j^i$. Por tanto

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I} U_i &= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} V_j^i\right)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} V_i^j,\end{aligned}$$

  luego $\bigcup_{i\in I} U_i$ es unión de elementos de Σ y por tanto pertenece a τ_Σ.
- Sean $U, V \in \tau_\Sigma$. Existen $\{U_i\}_{i\in I}$, $\{V_j\}_{j\in J}$, familias de elementos de Σ tales que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y $V = \bigcup_{j\in J} V_j$. Entonces

$$\begin{aligned}U\cap V &= U\cap \bigcup_{j\in J} V_j\\ &= \bigcup_{j\in J}(U\cap V_j)\\ &= \bigcup_{j\in J}\left(\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)\cap V_j\right)\\ &= \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(U_i\cap V_j)\right)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(U_i\cap V_j),\end{aligned}$$

  y $U_i \cap V_j \in \Sigma$ para cualesquiera $i \in I, j \in J$, así que $U \cap V$ es unión de elementos de Σ, es decir $U \cap V \in \tau_\Sigma$.

Lo anterior prueba que τ_Σ es una topología sobre X. El hecho de que Σ es base para τ_Σ es trivial, pues cada elemento de τ_Σ es unión de elementos de Σ.

$\square$

Referencias

[Caicedo, 1997] Caicedo, X. (1997). Lógica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 21(81):521–534.

[Mac Lane, 1998] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.

[Mac Lane and Moerdijk, 1992] Mac Lane, S. and Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag.

[Wedhorn, 2016] Wedhorn, T. (2016). *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer Spektrum.

[Zalamea, 2021] Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Editorial Universidad Nacional de Colombia.