

## DOS APROXIMACIONES EQUIVALENTES A LA NOCIÓN DE HAZ

JUAN CAMILO LOZANO SUÁREZ <sup>1</sup>

---

RESUMEN. Introducimos la noción de haz de dos maneras en principio independientes; primero como un funtor contravariante con buenas propiedades de pegado y luego como espacio fibrado o étalé. Posteriormente probaremos que las categorías que cada una produce son equivalentes.

PALABRAS CLAVE. Haz; espacio étalé; homeomorfismo local; manojos; hacificación; equivalencia de categorías; local vs global.

### 1 Haz como funtor

#### 1.1 Un ejemplo como motivación

Una constante en el quehacer matemático es el tránsito entre aspectos locales y aspectos globales. Consideremos un ejemplo enmarcado en el área de la topología. Sean  $X$  un espacio topológico y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , al cual dotamos con un cubrimiento  $\{U_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos abiertos de  $U$ . Una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  se presenta como una herramienta para entender globalmente el conjunto  $U$ , y fácilmente nos permite pasar al conocimiento local de  $U$  en el siguiente sentido:

(P1) Si  $V \stackrel{ab}{\subseteq} U$  entonces  $f|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$  es también una función continua.

De forma recíproca, gracias al lema de pegado (Teorema 2.0.1),  $f$  nos permite pasar de un apropiado conocimiento local de  $U$  a un conocimiento global, en la siguiente forma:

---

<sup>1</sup>Estudiante de pregrado en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.  
Email: jclozanos@unal.edu.co

**(P2)** Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$ . Si  $f|_{U_i}^U : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  (la restricción de  $f$  a  $U_i$ ) es continua para todo  $i \in I$ , entonces  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

Las propiedades **(P1)** y **(P2)** pueden ser capturadas en lenguaje categórico. Para esto, consideremos la categoría  $\mathcal{O}(X)$  que tiene como objetos los subconjuntos abiertos de  $X$ , y en la cual, dados  $U, V \in \mathcal{O}(X)$ , hay una flecha de  $V$  en  $U$  si y solo si  $V \subseteq U$ ; dicha flecha en  $\mathcal{O}(X)$  (que será la única de  $V$  en  $U$ ) la representamos igualmente mediante “ $V \subseteq U$ ”. Ahora, para cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  definimos el conjunto  $CU$  de todas las funciones reales continuas sobre  $U$ :

$$CU := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\},$$

y para cualquier flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$ , definimos la función de conjuntos

$$\begin{aligned} C(V \subseteq U) : \quad CU &\rightarrow CV \\ f &\mapsto f|_V^U \end{aligned}$$

que a cada función continua de  $U$  en  $\mathbb{R}$  le asigna su respectiva función restricción al subconjunto  $V$ , que a su vez es una función continua de  $V$  en  $\mathbb{R}$ . Tendremos entonces la siguiente propiedad:

**Proposición 1.1.1.** *La regla  $C$  que a cada  $U \in \mathcal{O}(X)$  le asigna el conjunto  $CU$  y a cada flecha  $V \subseteq U$  en  $\mathcal{O}(X)$  le asigna la función restricción de  $V$  en  $U$ ,  $C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CV$ , es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

**Prueba.** • Trivialmente se tiene que  $C$  respeta identidades, pues para cualquier  $U \in \mathcal{O}(X)$  tenemos

$$\begin{aligned} C(1_U) : \quad CU &\longrightarrow CU \\ f &\mapsto f|_U^U = f \end{aligned}$$

es decir,  $C(1_U) = 1_{CU}$ .

- Supongamos que en  $\mathcal{O}(X)$  tenemos  $W \subseteq V \subseteq U$ . Entonces  $W \subseteq U$  y en **Set** tenemos la función restricción de  $U$  en  $W$ ,  $C(W \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Tenemos además en **Set** la composición  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) : CU \rightarrow CW$ . Para cada  $f \in CU$  se tiene

$$\begin{aligned} (C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U))(f) &= C(W \subseteq V)(C(V \subseteq U)(f)) \\ &= C(W \subseteq V)(f|_V^U) \\ &= (f|_V^U)|_W^V \\ &= f|_W^U \\ &= C(W \subseteq U)(f), \end{aligned}$$

con lo cual  $C(W \subseteq V) \circ C(V \subseteq U) = C(W \subseteq U)$  y  $C$  respeta composiciones.

□

Con lo anterior, podemos decir que  $C$  es un **prehaz** (de conjuntos):

**Definición 1.1.2** (Prehaz). *Un prehaz (de conjuntos) sobre un espacio topológico  $X$  es un funtor contravariante de  $\mathcal{O}(X)$  en **Set**.*

La Proposición 1.1.1 permite capturar de manera categórica la propiedad **(P1)**. Para lograr hacer lo mismo con la propiedad **(P2)** introducimos el concepto de *igualadores*.

## 1.2 Igualadores

**Definición 1.2.1.** *En una categoría arbitraria  $C$ , sean  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas. Un igualador de  $f$  y  $g$  es una pareja  $\langle E, e \rangle$ , con  $E \in C$  y  $e : E \rightarrow A$  en  $C$ , tal que  $f \circ e = g \circ e$ , y que es universal con esta propiedad, en el sentido de que si hay otra pareja  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in C$  y  $u : U \rightarrow A$  en  $C$ , tal que  $f \circ u = g \circ u$ , entonces existe una única flecha  $v : U \rightarrow E$  en  $C$  tal que  $e \circ v = u$ .*

El siguiente diagrama conmutativo, que denominamos como “diagrama igualador”, se resume la anterior definición:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & A & \xrightleftharpoons[g]{f} & B \\ \uparrow v & \nearrow u & & & \\ U & & & & \end{array}$$

Los ejemplos de igualadores que más estaremos trabajando son aquellos que aparecen en la categoría **Set**:

**Ejemplo 1.2.2.** *Sean  $A$  y  $B$  conjuntos y  $f, g$  funciones de  $A$  en  $B$ . Verifiquemos que un igualador de  $f$  y  $g$  está dado por  $\langle E, e \rangle$ , donde  $E = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$  y  $e$  es la función inclusión de  $E$  en  $A$ :*

- Dado  $x \in E$  se tiene  $(f \circ e)(x) = f(e(x)) = f(x) = g(x) = g(e(x)) = (g \circ e)(x)$ , es decir,  $f \circ e = g \circ e$ .
- Supongamos que existe  $\langle U, u \rangle$  con  $U \in \mathbf{Set}$  y  $u : U \rightarrow A$  en **Set**, tal que  $f \circ u = g \circ u$ . Podemos definir  $v : U \rightarrow E$  vía  $v(x) = u(x)$  para todo  $x \in U$ , e inmediatamente se tendrá  $e \circ v = u$ ; igualmente, si  $v'$  es una flecha de  $U \rightarrow E$  en **Set** tal que  $e \circ v' = u$  entonces para cada  $x \in U$  se tiene  $v'(x) = e(v'(x)) = u(x) = e(v(x)) = v(x)$ , de modo que  $v = v'$ .

◇

En la práctica, si no hay lugar a confusiones, nos referimos indistintamente por “igualador” tanto al par  $\langle E, e \rangle$  como simplemente a la flecha  $e$ . Directamente de la definición de igualadores, podemos derivar algunas propiedades que serán útiles más adelante:

**Proposición 1.2.3.** *En cualquier categoría, todo igualador es un monomorfismo.*

**Prueba.** Sean  $\mathbf{C}$  una categoría,  $f, g : A \rightarrow B$  flechas paralelas en  $\mathbf{C}$  y  $\langle E, e \rangle$  un igualador de  $f$  y  $g$ . Supongamos que existen flechas  $i, j : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tales que  $e \circ i = e \circ j$ . Tenemos  $(f \circ e) \circ j = (g \circ e) \circ j$ , es decir,  $f \circ (e \circ j) = g \circ (e \circ j)$ . Como  $e$  es un igualador de  $f$  y  $g$ , existe una única flecha  $k : F \rightarrow E$  en  $\mathbf{C}$  tal que  $e \circ k = e \circ j$ ; trivialmente  $j$  cumple esta propiedad, pero también lo hace  $i$ , pues por hipótesis  $e \circ i = e \circ j$ . Se sigue que  $i = j$  y por tanto  $e$  es un monomorfismo en  $\mathbf{C}$ .  $\square$

Como en **Set**, para una flecha es lo mismo ser monomorfismo que ser una función inyectiva, como corolario de lo anterior obtenemos que cualquier igualador en **Set** es una función inyectiva.

**Proposición 1.2.4.** *Supongamos que en **Set** el siguiente es un diagrama igualador:*

$$E \xrightarrow{e} A \xrightleftharpoons[g]{f} B$$

Entonces, para todo  $a \in A$  tal que  $f(a) = g(a)$ , existe  $\alpha \in E$  tal que  $e(\alpha) = a$ .

**Prueba.** Definimos  $F := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} (\subseteq A)$ . Por la Proposición 1.2.3, sabemos que  $\langle F, in_{F,A} \rangle$  (donde  $in_{F,A}$  es la función inclusión de  $F$  en  $A$ ), es un igualador de  $f$  y  $g$ , con lo cual, existe una única flecha  $v : F \rightarrow E$  tal que  $e \circ v = in_{F,A}$ . Como  $a \in F$ , tenemos  $\alpha := v(a) \in E$  y  $e(\alpha) = e(v(a)) = in_{F,A}(a) = a$ .  $\square$

### 1.3 Un ejemplo como motivación (continuación)

Continuando con nuestro “ejemplo como motivación” (Sección 1.1), resaltamos la importancia, para la validez de la propiedad **(P2)**, de la existencia de una buena “condición de pegado”, en el sentido de que las funciones  $f|_{U_i}^U$  ( $i \in I$ ) se respetan dondequiera que se solapen: para cualesquiera  $i, j \in I$  y cualquier  $x \in U_i \cap U_j$ , se tiene  $f|_{U_i}^U(x) = f(x) = f|_{U_j}^U(x)$ ; es este buen comportamiento local en subconjuntos de  $U$  lo que nos permite el paso a un conocimiento global de  $U$  mediante la función continua  $f$  que se reconstruye al pegar los elementos de la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ . Notemos que  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$  es un elemento del producto cartesiano  $\prod_{i \in I} CU_i$ . Como, para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f|_{U_i}^U \in CU_i$  y  $f|_{U_j}^U \in CU_j$ , y como  $U_i \cap U_j \subseteq U_i$  y  $U_i \cap U_j \subseteq U_j$ , obtenemos, fruto de restringir adecuadamente a intersecciones, las funciones  $(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}, (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \in C(U_i \cap U_j)$ , con las cuales formamos las familias  $\left\{ (f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$  y  $\left\{ (f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ , que a su vez son elementos del producto cartesiano  $\prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$ . Estas construcciones nos sugieren la definición de las siguientes funciones:

- $e : CU \rightarrow \prod_{i \in I} CU_i$  que a cada  $f \in CU$  le asigna la familia  $\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}$ .
- $\pi_1 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{ f_i|_{U_i \cap U_j}^{U_i} \right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

- $\pi_2 : \prod_{i \in I} CU_i \rightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$  que a cada  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} CU_i$  le asigna la familia  $\left\{f_j|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\right\}_{(i,j) \in I \times I}$ .

**Proposición 1.3.1.** En **Set** el siguiente es un diagrama igualador

$$CU \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} CU_i \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} \prod_{(i,j) \in I \times I} C(U_i \cap U_j)$$

**Prueba.** • Dado  $f \in CU$  tenemos

$$\begin{aligned} (\pi_1 \circ e)(f) &= \pi_1(e(f)) \\ &= \pi_1\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\ &= \{(f|_{U_i}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_i}\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \{f|_{U_i \cap U_j}^U\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \{(f|_{U_j}^U)|_{U_i \cap U_j}^{U_j}\}_{(i,j) \in I \times I} \\ &= \pi_2\left(\{f|_{U_i}^U\}_{i \in I}\right) \\ &= \pi_2(e(f)) \\ &= (\pi_2 \circ e)(f), \end{aligned}$$

y por tanto  $\pi_1 \circ e = \pi_2 \circ e$ .

- Veamos que la pareja  $\langle CU, e \rangle$  es universal con la anterior propiedad.

□

## 2 Anexos

**Teorema 2.0.1** (Lema de pegado). Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Sean  $U \stackrel{ab}{\subseteq} X$ ,  $\{U_i\}_{i \in I}$  un cubrimiento abierto de  $U$  y  $\{f_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones, de modo que para cada  $i \in I$ ,  $f_i : U_i \rightarrow Y$  es una función continua. Además suponemos la siguiente “condición de pegado”: para cualesquiera  $i, j \in I$  se tiene  $f_i(x) = f_j(x)$  para todo  $x \in U_i \cap U_j$ . Entonces,  $f := \bigcup_{i \in I} f_i$  es una función continua de  $U$  en  $Y$ .

**Prueba.** • Veamos que  $f$  es en efecto una función de  $U$  en  $Y$ . Sea  $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $\langle x, f_j(x) \rangle \in f_j \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i = f$ . Como  $f_j(x) \in Y$ , obtenemos que  $f$  relaciona a  $x$  con un elemento de  $Y$ . Supongamos que para  $y, y' \in Y$  se tiene  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f = \bigcup_{i \in I} f_i$ . Existen  $j, k \in I$  tales que  $\langle x, y \rangle \in f_j$  y  $\langle x, y' \rangle \in f_k$ , es decir  $x \in U_j$  y  $y = f_j(x)$ , y,  $x \in U_k$  y  $y' = f_k(x)$ ; entonces  $x \in U_j \cap U_k$  y por la condición de pegado se tiene  $y = f_j(x) = f_k(x) = y'$ , con lo cual  $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$ . Lo anterior nos muestra que  $f$  relaciona cada elemento de  $U$  con un único elemento de  $Y$ , es decir,  $f$  es una función de  $U$  en  $Y$ .

- Probemos que  $f : U \rightarrow Y$  es continua mostrando que devuelve abiertos de  $Y$  en abiertos de  $U$  por la imagen recíproca. Sea  $V \stackrel{ab}{\subseteq} Y$ . Notemos que  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ :

$\subseteq$ : Sea  $x \in f^{-1}(V) \subseteq U$ , es decir,  $f(x) \in V$ . Existe  $j \in I$  tal que  $x \in U_j$ , luego  $f_j(x) = f(x) \in V$ , y  $x \in f_j^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ .

$\supseteq$ : Sea  $x \in \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$ , es decir  $x \in f_j^{-1}(V)$  para algún  $j \in I$ . Entonces  $f(x) = f_j(x) \in V$  y  $x \in f^{-1}(V)$ .

Ahora bien, para cada  $i \in I$  tenemos  $f_i^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} U_i$ , luego  $f_i^{-1}(V) = W_i \cap U_i$  con  $W_i \stackrel{ab}{\subseteq} U$ . Como  $U_i \stackrel{ab}{\subseteq} U$  entonces  $f_i^{-1}(V) \stackrel{ab}{\subseteq} U$ , de modo que

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \stackrel{ab}{\subseteq} U.$$

Con esto, concluimos que  $f = \bigcup_{i \in I} f_i : U \rightarrow Y$  es continua.

□