Tensores y Autovalores

Juan Camilo Parra Moreno[*]
William David Romero Serrano[**]
Universidad Industrial de Santander
Cra. 27 Calle 9 Ciudad Universitaria, Bucaramanga, Santander, Colombia

09 de Mayo del 2023

Índice

Resumen

El resumen debe ser suficiente para que uno no se lea el documento y tenga la idea completa de qué se hizo y cuáles fueron los resultados. Tiene que ser un "articulito" que indique en frases telegráficas: la importancia de problema a estudiar (*Introducción*), cómo se estudió (*Metodología*), cuáles fueron los resultados (*Resultados*) y cuál es la importancia de esos resultados (*Conclusiones*). Toda la información importante y trascendente del documento debe estar aquí.

Escribir un buen resumen es clave porque uno anuncia lo que viene. Cuando postulamos una presentación a un congreso enviamos un resumen y allí quizá nos ganamos una charla o nos conformamos con un poster.

El resumen es lo último que se redacta y contiene frases y oraciones que luego el lector se encontrará en el artículo. La intención es que esas frases, esas ideas la re-encuentre el lector en texto

[*] e-mail: `juancparra7.0@gmail.com`
[**] e-mail: `william.romero3@correo.uis.edu.co`

Típicamente debe tener una extensión entre 150 a 250 palabras. No tiene que ser un párrafo monolítico, porque se contabilizan las palabras. Entonces uno puede jugar los los párrafos para fijar las ideas.

En estos enlaces pueden consultar algunos buenos consejos para la redacción de resúmenes:

- https://breathe.ersjournals.com/content/10/3/265,
- http://amj.amegroups.com/article/view/4965/html,
- https://chemistrycommunity.nature.com/posts/43071-how-to-write-an-abstract
- https://mitcommlab.mit.edu/broad/commkit/journal-article-abstract/

1. Introducción

El álgebra lineal es un campo de investigación muy activo. Muchos de sus problemas son desafiantes en sí mismos y, además, gran parte de la computación científica depende críticamente de una forma u otra de los algoritmos numéricos de álgebra lineal. Los modelos computacionales científicos clásicos para problemas físicos o de ingeniería no solo dependen de los núcleos de álgebra lineal, sino que muchas aplicaciones modernas, como la recuperación de información y la restauración de imágenes, se benefician de los resultados numéricos del álgebra lineal. Estos factores han motivado la su investigación a lo largo el siglo XX y XXI.

De los innumerables temas que abarca en el algebra lineal, el particular interes de esté articulo es aplicar los conceptos y propiedades de los tensores y los autovalores ya que son fundamentales en las matemáticas y la física moderna con una amplia gama de aplicaciones en muchos campos, como la ingeniería, la física, la informática y el aprendizaje automático.

Los tensores son objetos matemáticos que generalizan vectores y matrices a dimensiones más altas, mientras que los valores propios son un conjunto de valores escalares que están asociados con una matriz dada o un operador lineal.

En los últimos años, ha habido un interés creciente en el estudio de tensores y valores propios debido a su utilidad en diversas aplicaciones, como el procesamiento de imágenes y señales , la compresión de datos y el aprendizaje automático.

Para esté caso de estudio exploraremos hasta el momento de orden dos de dos diferentes casos, discutiremos el significado de sus autovalores y autovectores y por ultimo, encontraremos las matrices de transformacíon que llevan de las bases originales a las bases de autovectores.

En la Sección 2 discutiremos la metodología empleada, mientras que en la Sección 3 se presentan los resultados. Finalizaremos el artículo con las conclusiones en la Sección 4,

2. Metodología

Los problemas a resolver están planteados en el siguiente enlace: https://github.com/jcamiloparra7/matematicas_avanzadas_1/blob/main/TallerTensoresAutovalores.pdf.

Para la resolucion de los ejercicios se uso la siguiente formula para el calculo de los momentos de orden k:

$$\mu_k(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^k$$

Donde:

- v es la variable del sistema,
- n es el número de elementos,
- X es un vector con m componentes
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es el vector medio en las m componentes

Usando los siguientes datos que se encuentran en:

- Masas: https://github.com/jcamiloparra7/matematicas_avanzadas_1/tree/main/mass_dataset
- Gasto de GDP: https://github.com/jcamiloparra7/matematicas_avanzadas_1/tree/main/gdp_expenditure_dataset

Para el caso del calculo de la matriz de correlacion de Pearson se uso la siguiente formula:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

Donde:

- n es el número de elementos,
- x_i, y_i son los puntos individuales de las muestras respectivos para x y y,
- $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ es la media de las muestras, analogo para $\bar{y}$

3. Discusion de Resultados

3.1. Distribucion de Masas

3.1.1. Caso 2D

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^0 = 4627{,}0$$

La masa total del sistema es de 4627 y corresponde al momento de orden cero.

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^1 = \begin{bmatrix} 3{,}84 \\ 1{,}05 \end{bmatrix}$$

El centro de masa del sistema con respecto a los valores promedio coordenados para las masas es de 3.84 en la componente X y 1.05 en la componente en Y, y corresponde al momento de orden 1.

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^2 = \begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 \end{bmatrix}$$

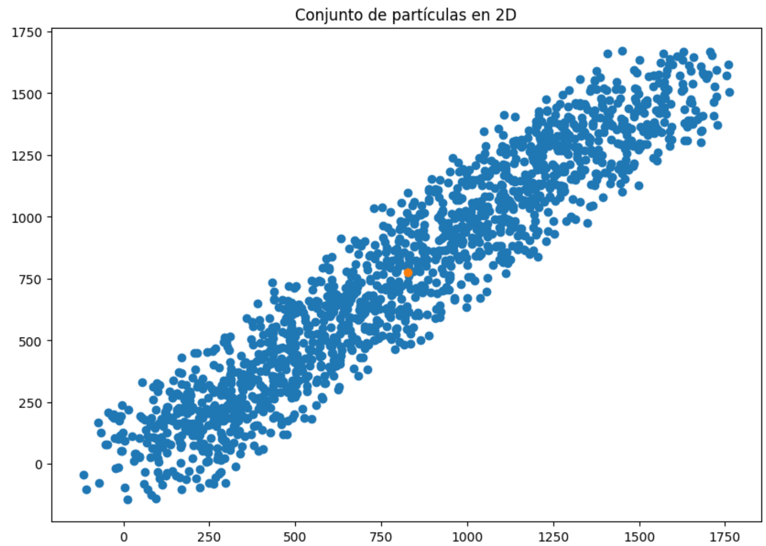

Figura 1: Distribucion de la masa de las particulas junto con su centro de masa sobre el plano XY.

El momento de orden dos del sistema, que representa la covarianza ponderada de las variables X y Y.

Las covarianzas obtenidas en XX y YY tienen valores similares, lo cual puede ser observado en la figura 1, donde la distribucion de X y Y es alrededor de la linea con pendiente 1, y para los dos ejes va aproximadamente desde el valor 0 hasta el valor 1750.

Para el caso de los autovalores con sus respectivos autovectores del tensor momento de inercia tenemos:

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}706 \\ 0{,}708 \end{bmatrix} = 404777{,}31 * \begin{bmatrix} 0{,}706 \\ 0{,}708 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}708 \\ -0{,}706 \end{bmatrix} = 10668,79 * \begin{bmatrix} 0{,}708 \\ -0{,}706 \end{bmatrix}$$

Los vectores base del sistema cartesiano claramente no son autovectores de la transformacion lineal representada por el tensor momento de inercia.

Sin embargo si forman base del espacio resultante por la transformacion lineal representada por el momento de inercia ya que:

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 207176{,}11 \\ 197053{,}50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 197053{,}50 \\ 208269{,}99 \end{bmatrix}$$

Era de esperarse que la transformacion de cada uno de los vectores representara una columna de la matriz transformacion ya que estamos transformando la base caracteristica del sistema cartesiano.

Verificamos que estos vectores sean linealmente independientes hallando el valor de la determinante de la matriz formada por sus valores:

$$\det(\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 \\ 197053{,}50 & 207176{,}11 \end{bmatrix}) = 4318484172{,}41$$

Ya que tenemos dos vectores linealmente independientes en un espacio de dos dimensiones podemos decir que estos son generadores de este espacio. Es decir, estos vectores forman base para el espacio generado por la transformacion representada por el tensor momento de inercia.

Los ejes principales de inercia seran los vectores linealmente abarcados por cada uno de los autovectores:

$$a * \begin{bmatrix} 0{,}706 \\ 0{,}708 \end{bmatrix}, b * \begin{bmatrix} 0{,}708 \\ -0{,}706 \end{bmatrix}$$

Donde a y b son escalares.

La matriz de transformacion desde la base cartesiana a la base de autovectores estara dada por la matriz de transicion desde la base estandar es decir, por una matriz conformada por los autovectores como columnas:

$$\begin{bmatrix} 0{,}706 & 0{,}708 \\ 0{,}708 & -0{,}706 \end{bmatrix}$$

3.1.2. Caso 3D

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^0 = 4627{,}0$$

La masa total del sistema es de 4627 y corresponde al momento de orden cero.

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^1 = \begin{bmatrix} 3{,}84 \\ 1{,}05 \\ 0{,}44 \end{bmatrix}$$

El centro de masa del sistema con respecto a los valores promedio coordenados para las masas es de 3.84 en la componente X, 1.05 en la componente en Y y 0.44 en Z, y corresponde al momento de orden 1.

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(X_i - \bar{X})^2 = \begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix}$$

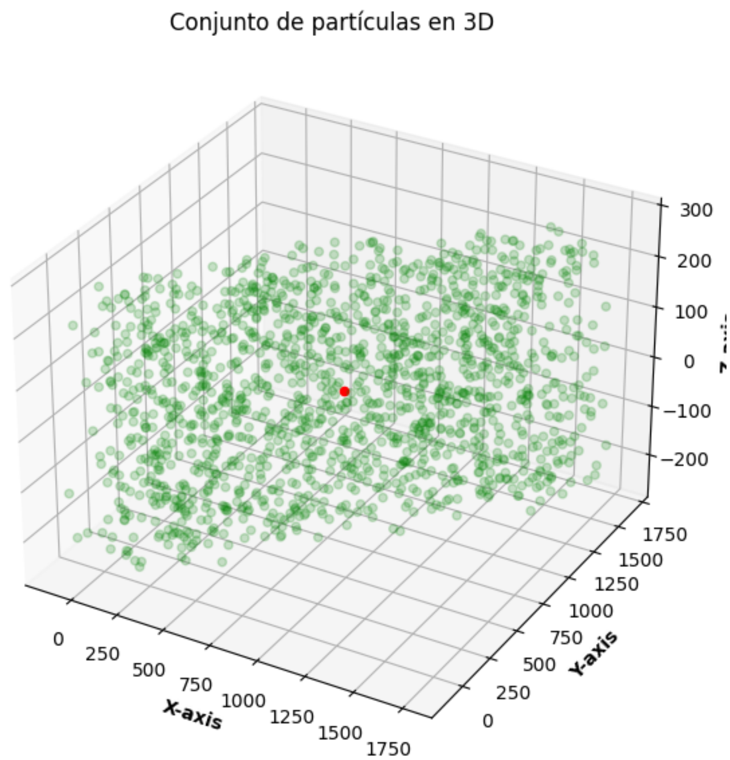

Figura 2: Distribucion de la masa de las particulas junto con su centro de masa sobre el espacio XYZ.

El momento de orden dos del sistema, que representa la covarianza ponderada de las variables X, Y y Z.

Las covarianza obtenida en ZZ es relativamente pequeña en comparacion con XX y YY, lo cual puede ser observado en la figura 2, donde la distribucion Z va desde -200 hasta 300 en comparacion con X y Y que varian desde 0 hasta 1750.

Para el caso de los autovalores con sus respectivos autovectores del tensor momento de inercia tenemos:

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0{,}706 \\ -0{,}708 \\ 0{,}004 \end{bmatrix} = 404782{,}31 * \begin{bmatrix} -0{,}706 \\ -0{,}708 \\ 0{,}004 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0{,}047 \\ 0{,}052 \\ 0{,}998 \end{bmatrix} = 22061,69 * \begin{bmatrix} -0{,}047 \\ 0{,}052 \\ 0{,}998 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}704 \\ -0{,}069 \end{bmatrix} = 10612{,}94 * \begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}704 \\ -0{,}069 \end{bmatrix}$$

Los vectores base del sistema cartesiano claramente no son autovectores de la transformacion lineal representada por el tensor momento de inercia.

Sin embargo si forman base del espacio resultante por la transformacion lineal representada por el momento de inercia ya que:

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 207176{,}11 \\ 197053{,}50 \\ -968{,}05 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 197053{,}50 \\ 208269{,}99 \\ -340{,}63 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -968{,}05 \\ -340{,}63 \\ 22371{,}30 \end{bmatrix}$$

Era de esperarse que la transformacion de cada uno de los vectores representara una columna de la matriz transformacion ya que estamos transformando la base caracteristica del sistema cartesiano.

Verificamos que estos vectores sean linealmente independientes hallando el valor de la determinante de la matriz formada por sus valores:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 207176{,}11 & 197053{,}50 & -968{,}05 \\ 197053{,}50 & 208269{,}99 & -340{,}63 \\ -968{,}05 & -340{,}63 & 22371{,}30 \end{bmatrix}\right) = 96323073298050{,}5$$

Los ejes principales de inercia seran los vectores linealmente abarcados por cada uno de los autovectores:

$$\begin{bmatrix} 0{,}706 \\ 0{,}708 \\ 0{,}004 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}704 \\ -0{,}069 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0{,}047 \\ 0{,}052 \\ 0{,}998 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformacion desde la base cartesiana a la base de autovectores estara dada por la matriz de transicion desde la base estandar es decir, por una matriz conformada por los autovectores como columnas:

$$\begin{bmatrix} 0{,}706 & 0{,}708 & 0{,}004 \\ -0{,}707 & 0{,}704 & -0{,}069 \\ -0{,}047 & 0{,}052 & 0{,}998 \end{bmatrix}$$

3.2. Datos Economicos

La matriz de covarianza para los datos economicos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0{,}070 & 0{,}011 & -0{,}313 & -0{,}034 \\ 0{,}011 & 0{,}099 & 0{,}301 & 0{,}099 \\ -0{,}313 & 0{,}301 & 5{,}285 & 0{,}791 \\ -0{,}034 & 0{,}099 & 0{,}791 & 0{,}264 \end{bmatrix}$$

De esta matriz y su mapa de calor podemos concluir que:

a) El gasto suministrado a la ciencia es el que tiene mayor variación, es decir es el que mas depende de las condiciones economicas y del gobierno del pais.

b) El gasto suministrado a la defensa es el que tiene menor variación, es decir es el mas independendiente de las condiciones del pais.

Aunque no se disponga de pruebas, una hipotesis que respalde estos resultados podria ser la naturaleza de como se hace el gasto en estos dos rubros, el sector de defensa se caracteriza por trabajadores a termino fijo y altos costos iniciales de capital. El sector de la investigacion se caracteriza por la ejecucion de proyectos y uso de trabajadores temporales.

La matriz de correlacion para los datos economicos es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}129 & -0{,}515 & -0{,}249 \\ 0{,}129 & 1 & 0{,}416 & 0{,}615 \\ -0{,}515 & 0{,}416 & 1 & 0{,}669 \\ -0{,}249 & 0{,}615 & 0{,}669 & 1 \end{bmatrix}$$

De esta matriz y su mapa de calor podemos concluir que:

a) El gasto en Educacion, Ciencia y Salud están ampliamente relacionados, y la correlacion más fuerte es Ciencia-Salud.

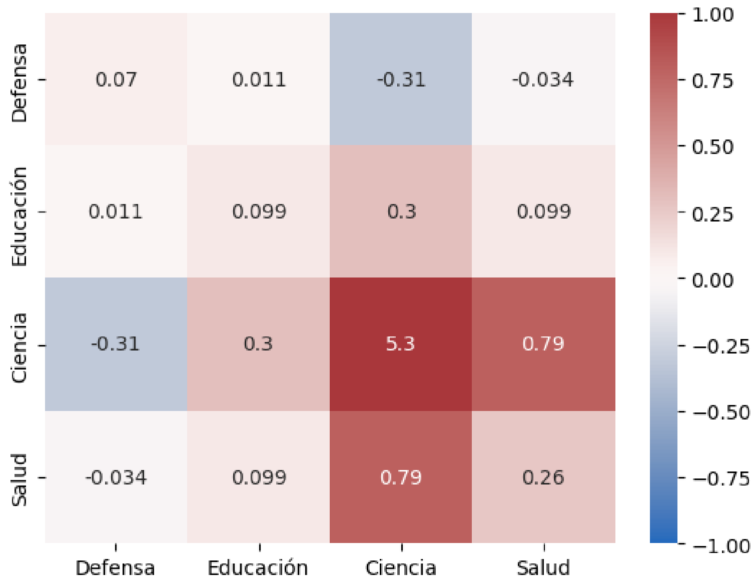

Figura 3: Mapa de calor para la matriz de covarianza para cada uno uno de los rubros de gasto.

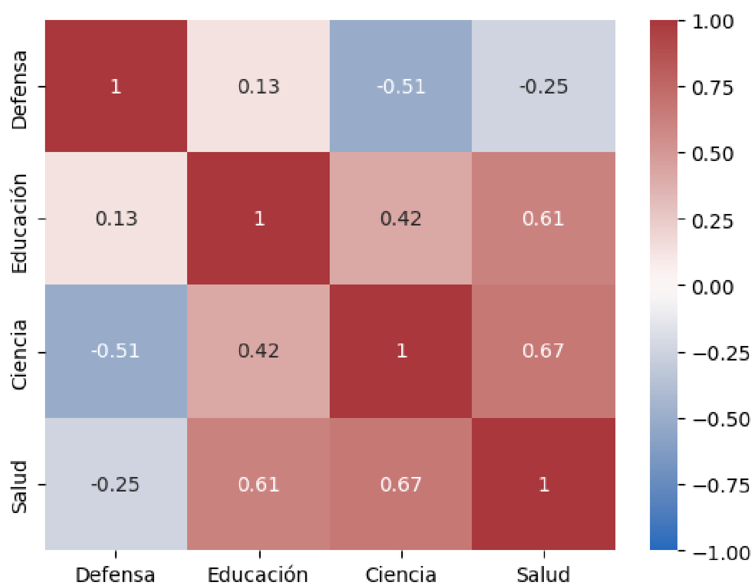

Figura 4: Mapa de calor para la matriz de correlación para cada uno de los rubros de gasto.

b) El gasto en Defensa está negativamente relacionado con el gasto en Ciencia y Salud.

Aunque no se disponga de pruebas, una hipotesis que respalde estos resultados podria ser, y como lo vimos con la covarianza, que el gasto en defensa generalmente se mantenga constante a lo largo de los años y los demas 3 rubros se ajustan dependiendo de los ingresos del gobierno para ese año, es decir durante las bonanzas y las crisis los tres rubros que se ven alterados son Educacion, Ciencia y Salud.

Los autovalores y autovectores de esta matriz de covarianza son los siguientes:

$$\begin{bmatrix} 0{,}070 & 0{,}011 & -0{,}313 & -0{,}034 \\ 0{,}011 & 0{,}099 & 0{,}301 & 0{,}099 \\ -0{,}313 & 0{,}301 & 5{,}285 & 0{,}791 \\ -0{,}034 & 0{,}099 & 0{,}791 & 0{,}264 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}058 \\ -0{,}058 \\ -0{,}945 \\ -0{,}152 \end{bmatrix} = 5{,}443 * \begin{bmatrix} 0{,}058 \\ -0{,}058 \\ -0{,}945 \\ -0{,}152 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}070 & 0{,}011 & -0{,}313 & -0{,}034 \\ 0{,}011 & 0{,}099 & 0{,}301 & 0{,}099 \\ -0{,}313 & 0{,}301 & 5{,}285 & 0{,}791 \\ -0{,}034 & 0{,}099 & 0{,}791 & 0{,}264 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0{,}212 \\ -0{,}509 \\ 0{,}144 \\ -0{,}821 \end{bmatrix} = 0{,}178 * \begin{bmatrix} -0{,}212 \\ -0{,}509 \\ 0{,}144 \\ -0{,}821 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}070 & 0{,}011 & -0{,}313 & -0{,}034 \\ 0{,}011 & 0{,}099 & 0{,}301 & 0{,}099 \\ -0{,}313 & 0{,}301 & 5{,}285 & 0{,}791 \\ -0{,}034 & 0{,}099 & 0{,}791 & 0{,}264 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}642 \\ 0{,}571 \\ 0{,}082 \\ -0{,}506 \end{bmatrix} = 0{,}066 * \begin{bmatrix} 0{,}642 \\ 0{,}571 \\ 0{,}082 \\ -0{,}506 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}070 & 0{,}011 & -0{,}313 & -0{,}034 \\ 0{,}011 & 0{,}099 & 0{,}301 & 0{,}099 \\ -0{,}313 & 0{,}301 & 5{,}285 & 0{,}791 \\ -0{,}034 & 0{,}099 & 0{,}791 & 0{,}264 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0{,}735 \\ -0{,}641 \\ 0{,}048 \\ 0{,}217 \end{bmatrix} = 0{,}030 * \begin{bmatrix} 0{,}735 \\ -0{,}641 \\ 0{,}048 \\ 0{,}217 \end{bmatrix}$$

Como era de esperarse y antes fue mencionado, al autovector con la mayor magnitud le corresponde el autovector con la componente de gasto de Defensa positiva y los demas gastos negativos, es decir en este eje vemos esa competencia entre gasto militar vs gasto social.

La matriz transformacion que nos lleva de la matriz en base original a la representacion en la base de autovectores es:

$$\begin{bmatrix} 5{,}443 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}178 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}066 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}030 \end{bmatrix}$$

4. Conclusiones

1) Los autovectores y los autovalores son herramientas poderosas para comprender las transformaciones lineales. Al encontrar los vectores propios de una matriz, podemos identificar las direcciones

en las que la transformación estira o comprime el espacio, mientras que los valores propios correspondientes nos dicen cuánto estiramiento o compresión ocurre. Esta información se puede utilizar para analizar una amplia gama de fenómenos del mundo real, desde el comportamiento de los sistemas mecánicos hasta la propagación de enfermedades.

2) Las matrices de transformación proporcionan una forma de representar transformaciones lineales en una forma compacta y eficiente. Al expresar una transformación como una matriz, podemos aplicarla fácilmente a vectores y otros objetos, y combinar múltiples transformaciones multiplicando sus matrices juntas. Esto permite realizar operaciones complejas con relativa facilidad y explorar las propiedades de diferentes tipos de transformaciones de manera sistemática.

3) Los autovectores y los autovalores se pueden utilizar para analizar una amplia gama de fenómenos, desde el movimiento de objetos alrededor de su centro de masa hasta patrones en el gasto público a lo largo del tiempo. Al representar los cambios en las prioridades de gasto como transformaciones lineales, podemos usar técnicas como la composición de autovalores, para identificar las tendencias y patrones subyacentes en los datos. Del mismo modo, al encontrar los vectores propios de la matriz de momento de inercia para un objeto, podemos identificar los principales ejes de rotación alrededor de los cuales tenderá a girar. Los valores propios correspondientes nos indican con qué facilidad girará el objeto alrededor de cada eje, en función de su distribución de masa.