Tensores y autovalores

En general los momentos de una función $f(x)$ de variable, x, real continua –con , x, definida alrededor de un valor promedio de la variable $\bar{x}$– se define como:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)\,(x-\bar{x})^n \quad \Rightarrow \mu_n = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(|x_i\rangle)\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)^n \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(|x_i\rangle)\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)\underbrace{\otimes\cdots\otimes}_{n-1}\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)$$

Nótese que en la segunda relación hemos particularizado para el caso discreto, pero $|x\rangle_i$ es un vector que puede tener m componentes, y los momentos μ_n de una variable, $v_i = \mathcal{F}(|x_i\rangle)$, representan promedios pesados por potencias de las desviaciones de las componentes aleatorias de un vector $|x\rangle_i$ respecto a su media $|\bar{x}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x\rangle_i$ como:

- $\mu_0(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i$ momento de orden cero representa el "valor total" de la variable del sistema;
- $\mu_1(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)$ momento de orden uno corresponde al promedio pesado de la variable;
- $\mu_2(v) = \sum_{i=1}^{N} v_i\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)^2$ momento de orden dos es la matriz de covariancia de la variable que generaliza la noción de varianza a dimensiones múltiples. En general la base en la cual están expresados los vectores $|x\rangle_i$ y $|\bar{x}\rangle$ no son ortogonales y la norma está asociada a una matriz densa:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i\left(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i (x_1-\bar{x}_1,\cdots x_k-\bar{x}_k,\cdots x_m-\bar{x}_m)_i \begin{pmatrix} x^1-\bar{x}^1 \\ \vdots \\ x^l-\bar{x}^l \\ \vdots \\ x^m-\bar{x}^m \end{pmatrix}_i$$

El segundo momento quedará definido como $\mu_2(v) =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^1-\bar{x}^1\right)_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^1-\bar{x}^1\right)_i(x_k-\bar{x}_k)_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^1-\bar{x}^1\right)_i(x_m-\bar{x}_m)_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^k-\bar{x}^k\right)_i(x_1-\bar{x}_1)_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^k-\bar{x}^k\right)_i^2 & & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^k-\bar{x}^k\right)_i(x_m-\bar{x}^m)_i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^m-\bar{x}^m\right)_i(x_1-\bar{x}_1)_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^m-\bar{x}^m\right)_i(x_k-\bar{x}_k)_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} v_i\left(x^m-\bar{x}^m\right)_i^2 \end{pmatrix}$$

que no es otra cosa que la matriz de covariancia para un vector de m componentes con un peso en cada variable, cada de las componentes representa una variable aleatoria. Supongamos que organizamos un vector con m componetes, cada una de las cuales representa una variable aleatoria a la que le hacemos n mediciones. Entonces, la matriz de covariancia –también llamada matriz de dispersión o de variancia generalizada– para eventos igualmente probables (peso =1) puede ser representada como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)^2 & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)(x_{k\,i}-\bar{x}_k) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^1-\bar{x}^1\right)(x_{m\,i}-\bar{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)(x_{1\,i}-\bar{x}_1) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)_i^2 & & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^k-\bar{x}^k\right)(x_{m\,i}-\bar{x}^m) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)(x_{1\,i}-\bar{x}_1) & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)(x_{k\,i}-\bar{x}_k) & \cdots & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^m-\bar{x}^m\right)_i^2 \end{pmatrix}$$

Donde

- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^j - \bar{x}^j\right)^2$ representa la variancia de la j-esima componente del vector de variables aleatorias
- $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^j - \bar{x}^j\right)(x_{k\,i} - \bar{x}_k)$ representa la covariancia entre la variable j-esima y la variable k-esima componentes del vector de variables aleatorias. Es decir, como los cambios en una dimensión están (linealmente) asociados a cambios en otra dimensión del vector de variables aleatorias.
- en ambos casos $\bar{x}^j \equiv \bar{x}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^j \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{i\,j}$ representa la media de la variable j-esima

1. Consideremos un sistema conformado por n partículas de masas distintas masas dispersas en un volumen, tal y como muestra el archivo se datos
https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/DatosTensores/datosmasas.csv

   a) Primero, consideremos el caso 2D –la distribución se realiza en el plano xy– y encuentre los tres primeros momentos para esta distribución de masas.

      1) Momento de orden cero, la masa total del sistema
      2) Momento de orden uno el centro de masa del sistema
      3) Momento de orden dos, el tensor momento de inercia del sistema

      - ¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?
      - Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma mas simple.
      - Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.

   b) Suponga el caso 3D y repita la operación

2. El Banco Mundial https://data.worldbank.org mantiene una estadística de los datos económicos de casi todos los países. En particular estamos interesados en calcular la matriz de covariancia del % del producto interno bruto (GDP) que se ha empleado en el país en los últimos 15 años en

   - Defensa
   - Salud
   - Educación
   - Ciencia y Tecnología[1]

   a) Calcule la matriz de covariancia y la matriz de correlación entre estos parámetros

   b) Para la matriz de covariancia, en este espacio de parámetros, queremos encontrar sus autovalores y autovectores. Discuta el significado de los autovalores y autovectores de esta matríz

   c) Encuentre la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

[1] Por ejemplo https://data.worldbank.org/topic/science-and-technology?locations=CO