Transformada Discreta de Fourier

William Romero[*] **y Camilo Parra**[**]
Universidad Industrial de Santander
Cra 27 #9, Barrio La Universidad

09/08/2023

Índice

Resumen

La presente asignacion se realizo con el fin de aprender acerca de la transformada de Fourier y sus aplicaciones en señales con ruido. El codigo utilizado puede ser encontrado en: `https://github.com/jcamiloparra7/signal_processing_math_assignment/blob/main/signal_processing_notebook.ipynb`.

1. Punto 1: Señal Pura

Teniendo la señal pura de la ecuación 1 relizar el siguiente conjunto de ejercicios.

$$s(t) = \frac{1}{1 - 0{,}9 \sin t} \tag{1}$$

Aunque solo hay una función seno en el denominador de la función, hay un número infinito de conjuntos para la espación de la ecuación 2

$$s(t) \simeq 1 + 0{,}9 \sin t + (0{,}9 \sin t)^2 + (0{,}9 \sin t)^3 + ... \tag{2}$$

a) Calcule el DFT S(w). Asegúrese de muestrear solo un período, pero para cubrir todo el período. Asegúrese de muestrear en suficientes momentos (escala fina) para obtener una buena sensibilidad a los componentes de alta frecuencia.

[*] e-mail: `william.romero3@correo.uis.edu.co`
[**] e-mail:

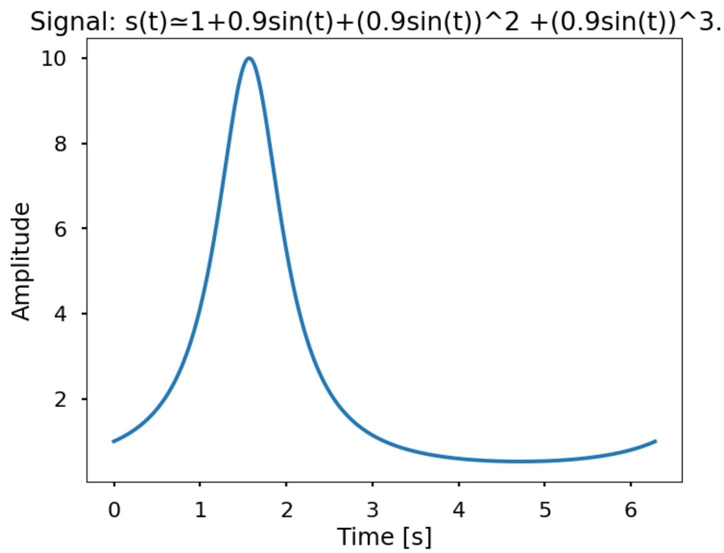

Figura 1: Función: $s(t) \simeq 1 + 0{,}9 \sin t + (0{,}9 \sin t)^2 + (0{,}9 \sin t)^3 + ...$ durante un periodo con una tasa de muestreo de 100 puntos por cada segundo

La señal graphica en la figura previa contiene 100 sobretonos, y alcanza su pico alrededor de los 1.5 segundos . Su transformada discreta de Fourier es:

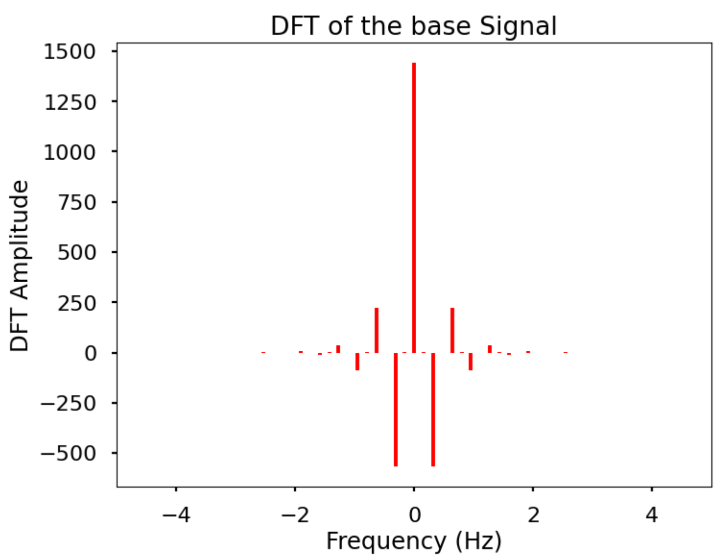

Figura 2: DFT para la Función: 2

Los picos que se observan para los valores especificos de frecuencia corresponden a las frecuencias correspondientes de la componente senosoidal de la señal original. La coordenada y o amplitud representa la fuerza de la correspondiente frecuencia en la señal.

b) Crear gráfica semilogarítmica del espectro de poder $|S(\omega)|^2$

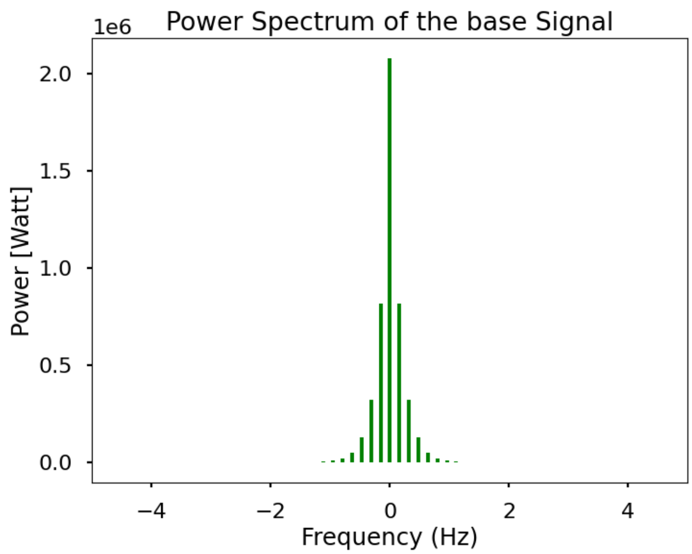

Figura 3: Espectro de poder para la señal original

Similarmente al DFT de nuestra funcion original, nuestros picos del espectro de poder, ahora con valores positivos representan la distribucion de poder o energia de la señal a traves de las diferentes frecuencias.

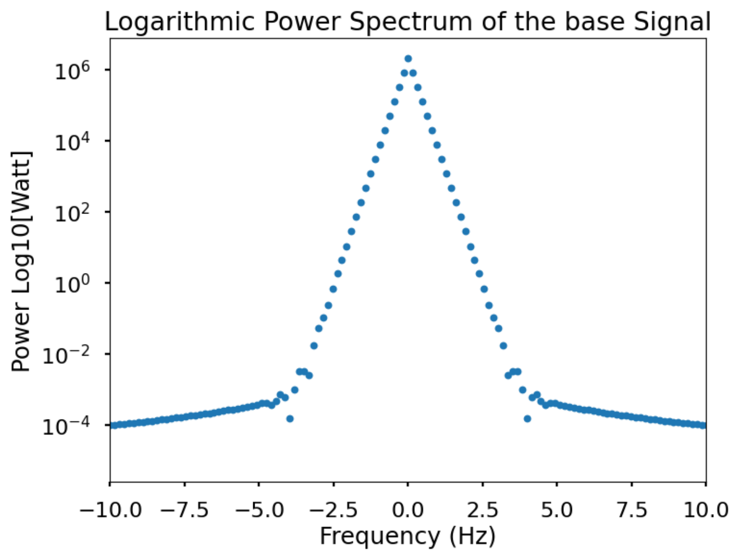

Figura 4: Espectro de poder en gráfica semilogarítmica para la señal original

Al igual que en la grafica no logaritmica del espectro de poder, podemos observar la distribucion de poder, ahora representada como una linea recta, en esté caso hablamos de decibeles que permiten visualizar mas facilmente el espectro de poder.

c) Tomar la señal $s(t)$ y calcular la función de autocorrelación $A(\tau)$ para un rango completo de valores de τ.

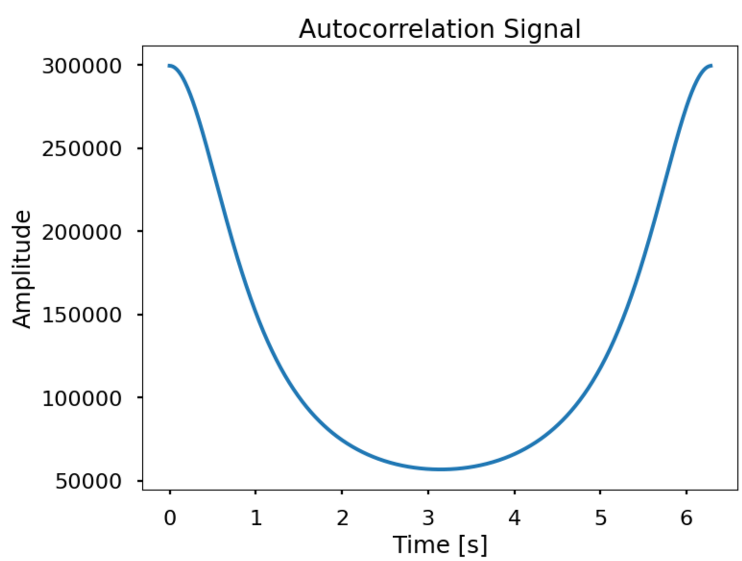

Figura 5: Función autocorrelación A(t)

La señal de autocorrelacion permite identificar tendencias que se repiten, en nuestro caso, como escogimos unicamente un periodo de la señal, se observa practicamente la misma señal, multiplada por cierto factor y con una fase de aproximadamente $\pi/2$.

d) Calcular el espectro de poder indirectamente calculando un DFT a la función de autocorrelación. Comparar los resultados al implementar el espectro directamente.

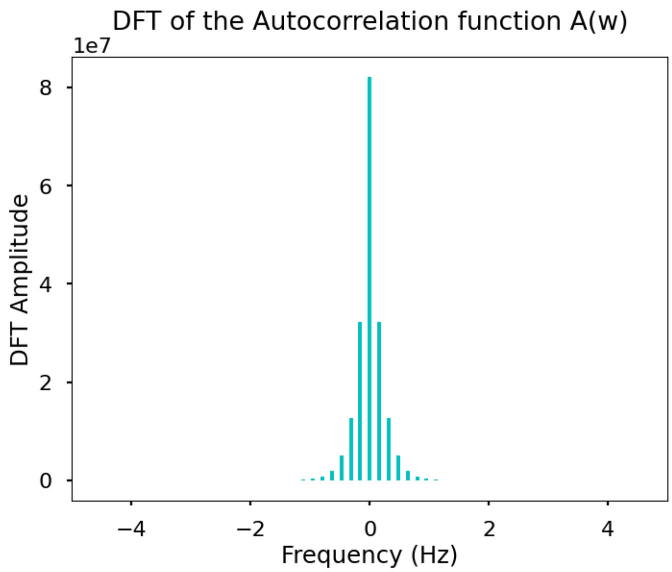

Figura 6: DFT para la función autocorrelación

El DFT de la función de autocorrelación es identico al espectro de poder de la funcion base multiplicado por el factor $\frac{1}{N*\sqrt{2*\pi}}$.

Cuando movemos en $\pi/2$ la señal de autocorrelacion obtenida de aplicar la transformada discreta inversa de Fourier sobre nuestra funcion de autocorrelacion transformada obtenemos:

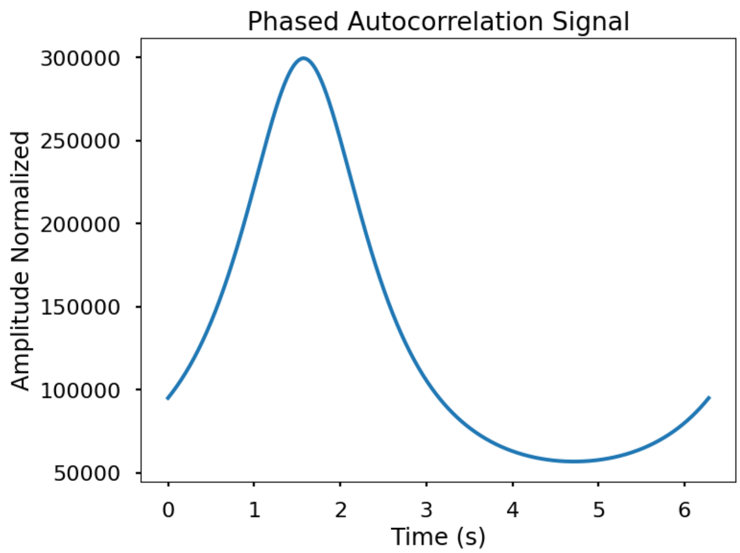

Figura 7: Función de autocorrelación A(t+π/2)

d) Calcular el espectro de poder indirectamente calculando un DFT a la función de autocorrelación. Comparar los resultados al implementar el espectro directamente.

Y al multiplicar esta función por un factor de $\frac{1}{N*\sqrt{2*\pi}}$ nos acercamos practicamente a nuestra señal original, como se puede apreciar en la siguiente figura:

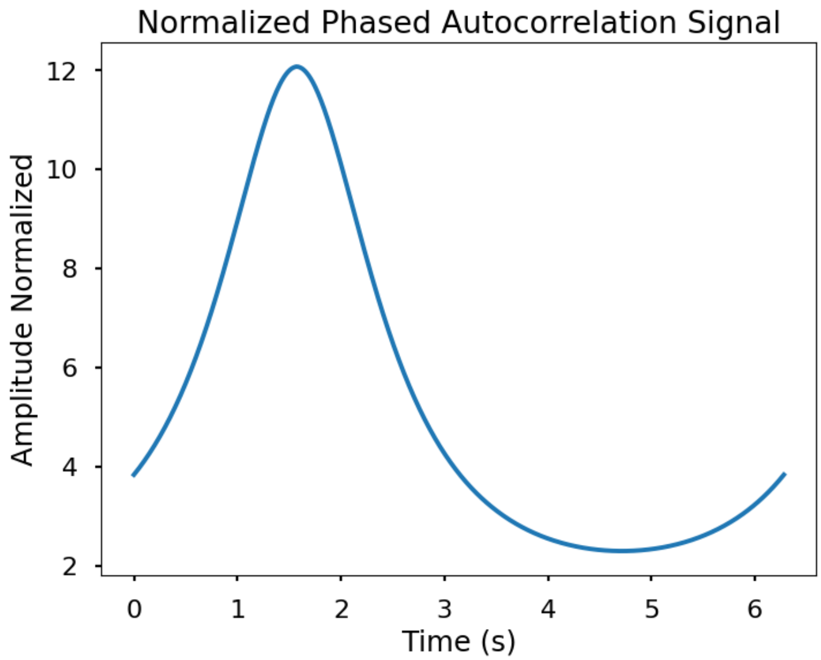

Figura 8: Función de autocorrelación normalizada y con fase

2. Punto 2: Señal con Ruido

Añada un poco de ruido aleatorio a la señal original usando un generador de números aleatorios como se puede observar en la ecuación 3

$$y(t_i) = s(t_i) + \alpha(2r_i - 1), \qquad 0 \leq r_i \leq 1. \tag{3}$$

Donde a es un parámetro ajustable. Pruebe varios valores de a, desde valores pequeños que solo agregan algo de fuzz a la señal hasta valores grandes que casi ocultan la señal.

a) Trazar sus datos ruidosos, su transformada de Fourier y su espectro de potencia obtenido directamente de la transformada con ruido..

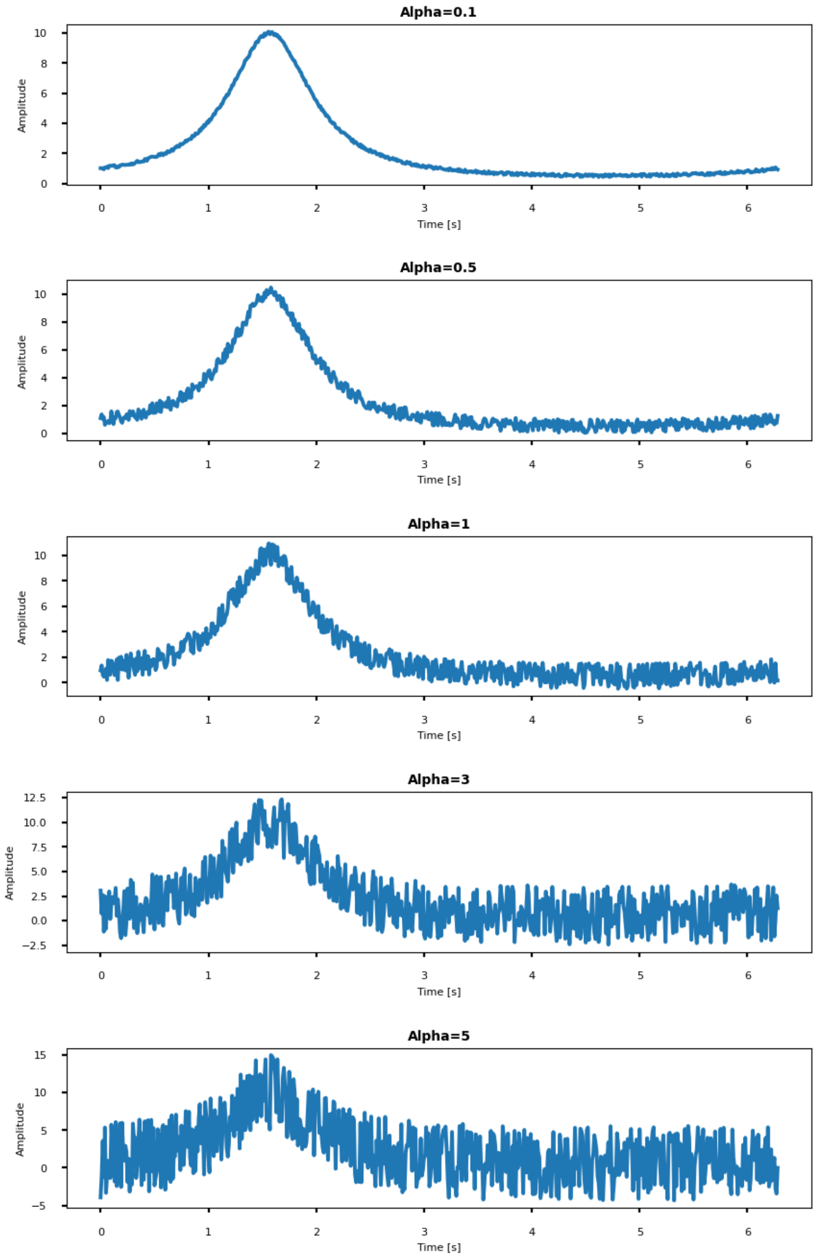

Figura 9: Evolución de la señal con ruido para diferentes alfas.

Resultado de la señal con ruido aleatorio añadido con diferentes alfas, desde 0.1 hasta 5, observamos como para los valores mayores de alfa, la señal se hace casi irreconocible.

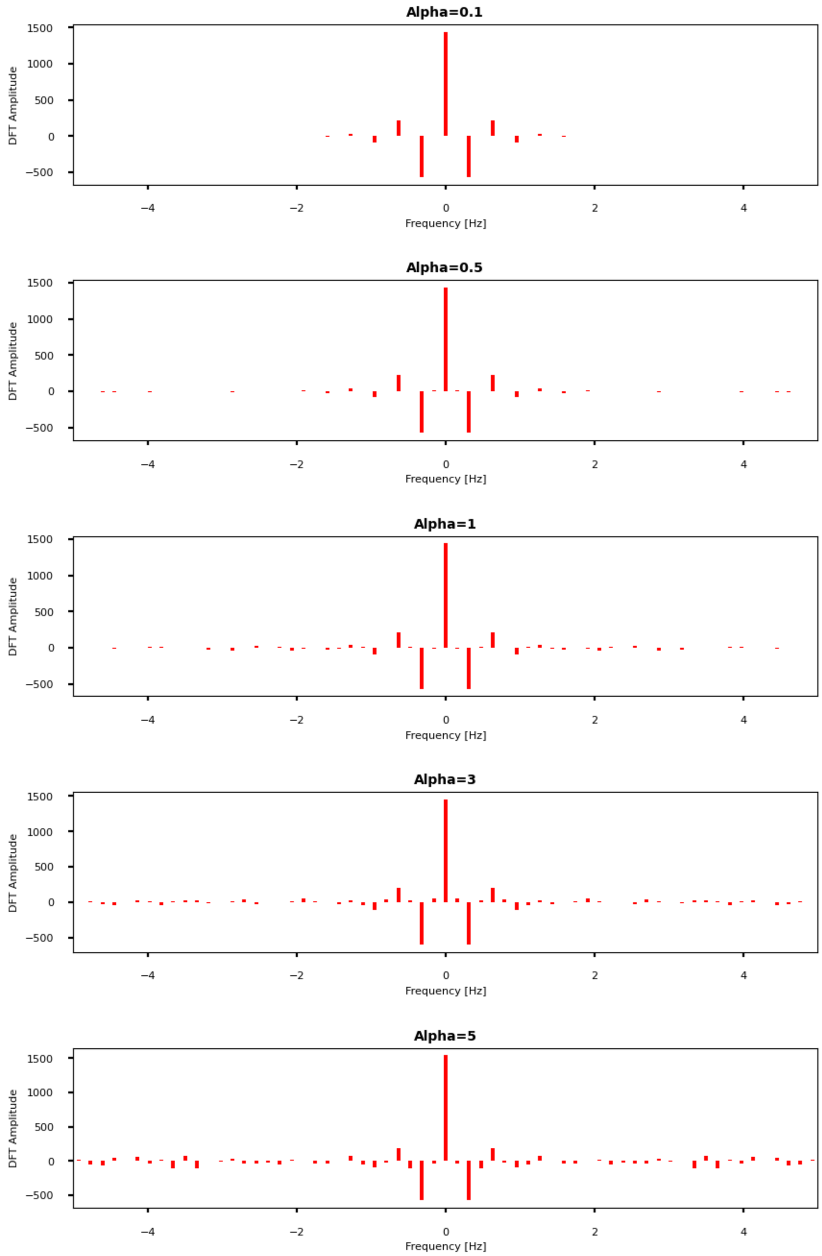

Figura 10: DFT de la señal con ruido para diferentes alfas

Observamos las frecuencias de la señal original comunes para todas las alfas, con la adicion de las frecuencias causadas por los ruidos, a mayor nivel de ruido, mayor es la amplitud de las frecuencias esparcidas en el espacio de medicion.

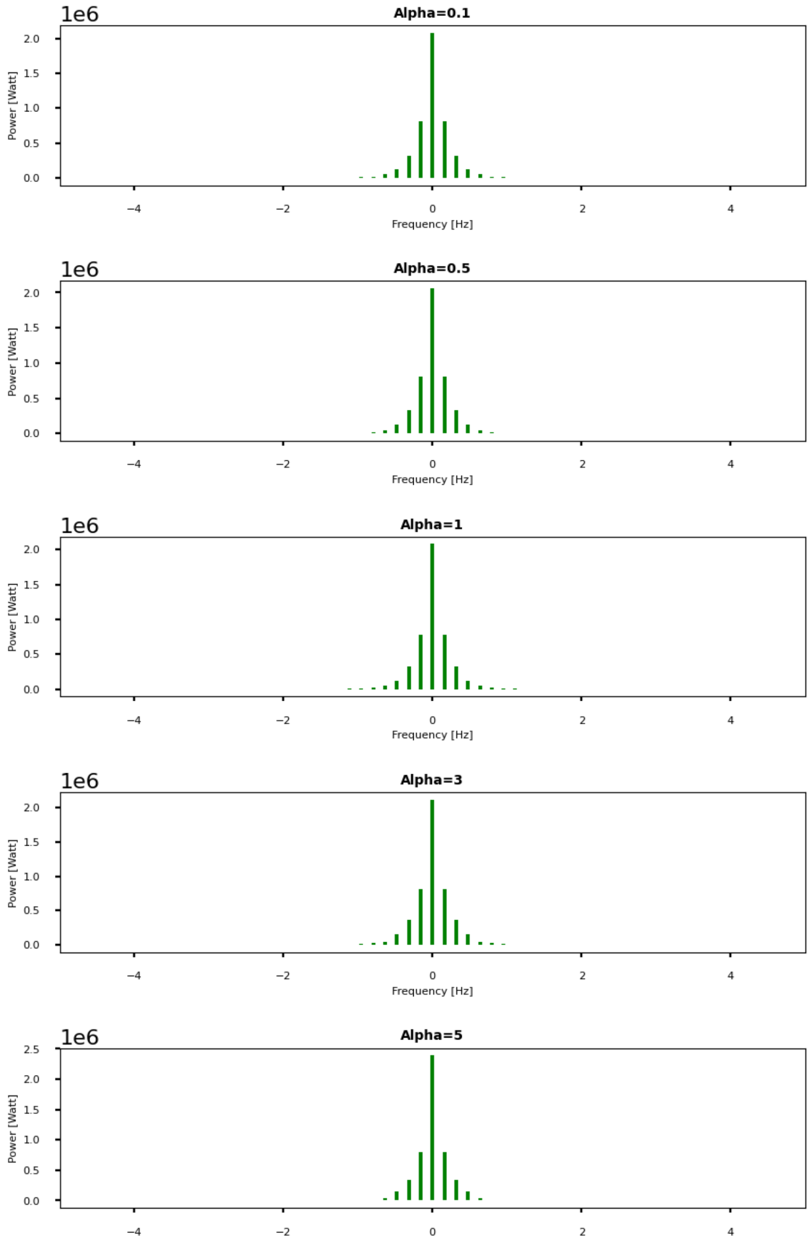

Figura 11: Espectro de poder de las señal para diferentes valores de alfa

Ya en el espectro de potencia podemos observar como las frecuencias de la componente senosoidal de la señal base trivializan el ruido aleatorio generado.

b) Calcula la función de autocorrelación $A(\tau)$ y su transformada de fourier $A(\omega)$

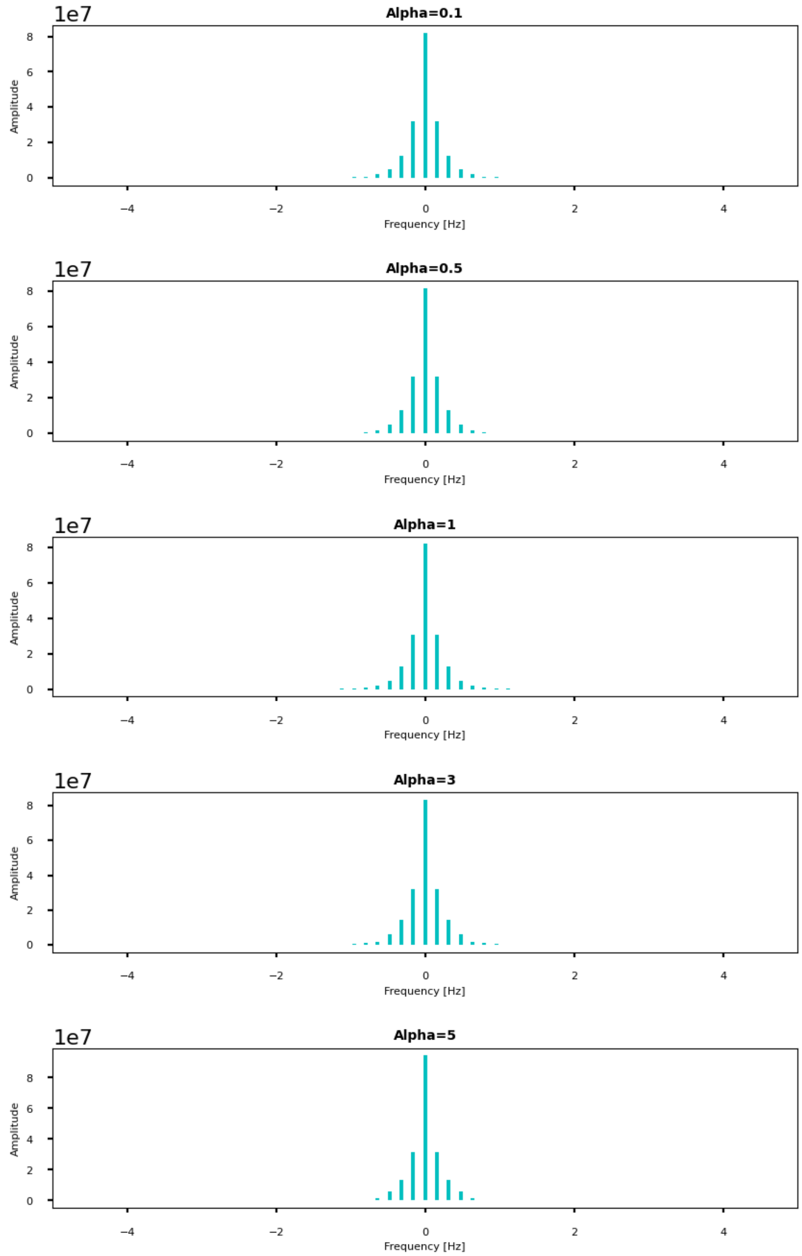

Figura 12: DFT de la funcion de autocorrelacion para multiples alfas

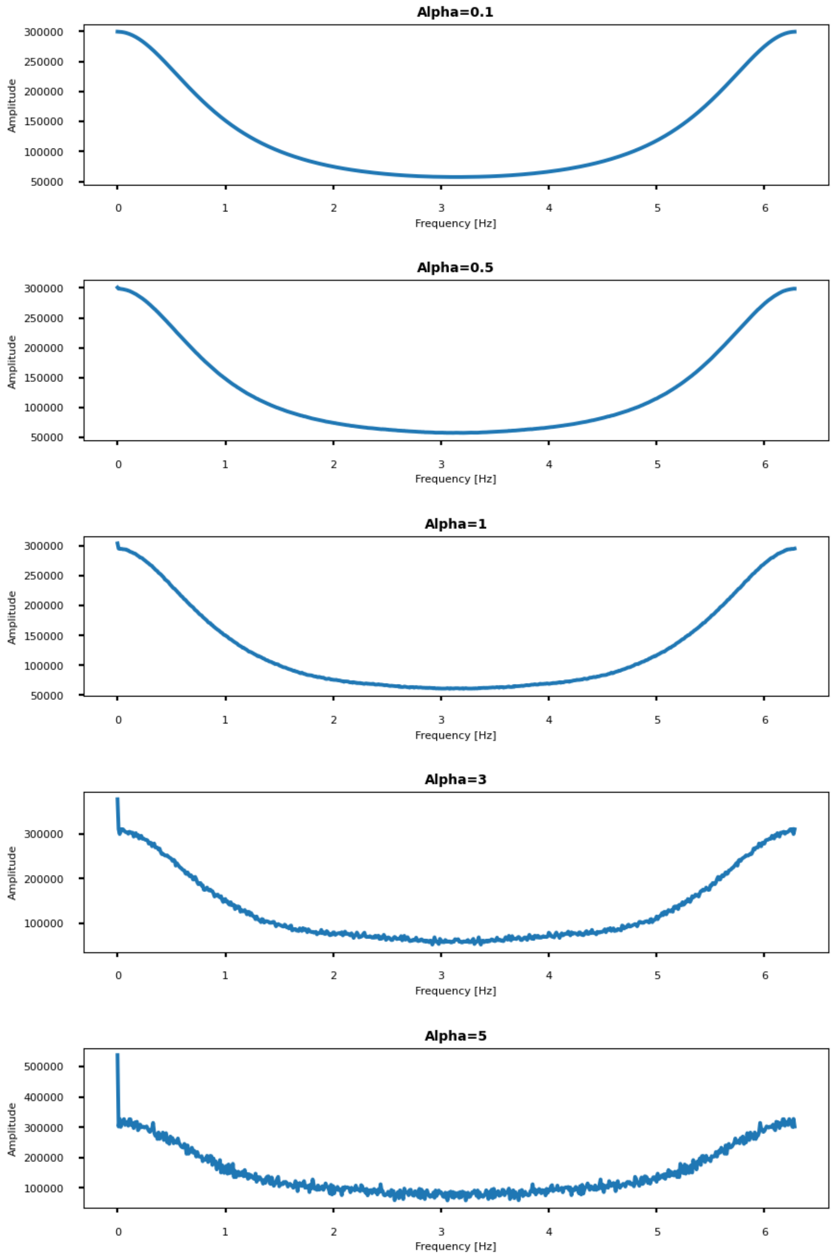

Figura 13: Funcion de autocorrelacion para multiples alfas

De igual manera como observamos para la funcion original, la funcion de autocorrelacion tiene la misma forma que la funcion original, pero desfasada por $\pi/2$.

Notamos que al inicio de cada funcion se forma un pico en la amplitud, que se desploma, esta caida es mas drastica para mayores valores de alfa.

c) Compare la DFT de $A(\tau)$ con el espectro de poder y comenta en qué tan efectivo es usar la función de autocorrelación para reducir ruido.

La DFT de la funcion de autocorrelacion es identica al espectro de poder, su diferencia es una multiplicacion por el factor $\sqrt{2 * \pi}$.

d) ¿Para qué valores de α se pierde toda la información de entrada?

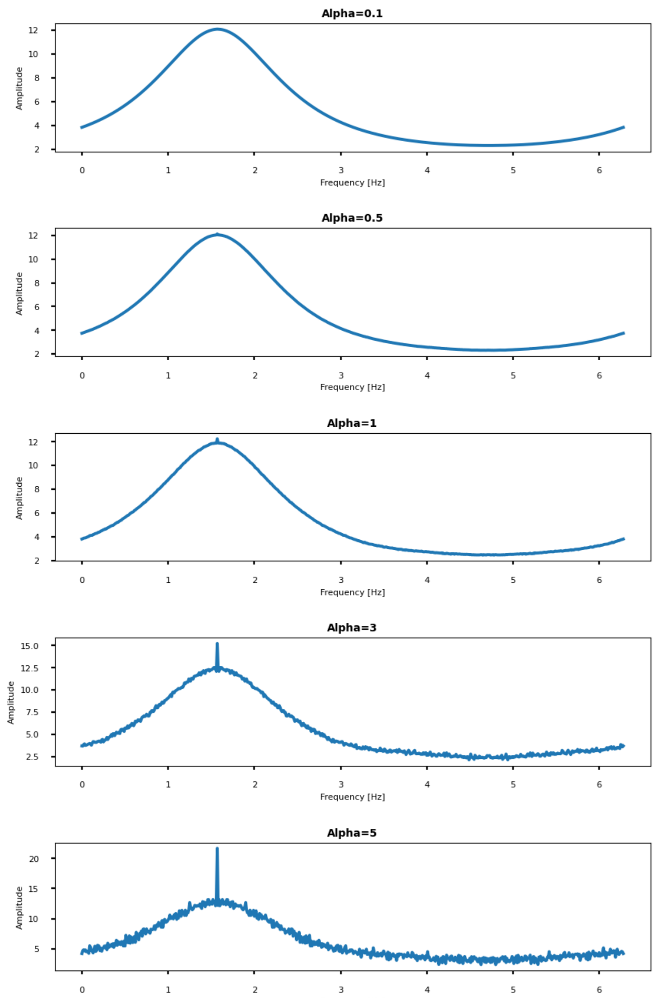

Figura 14: Funcion de autocorrelacion normalizada y enfasada para diferentes alfas

Se podria decir que a partir de un alpha de 3 comenzamos a ver señales que no son similares a la original, para hasta un alfa igual a 1, observamos que la autocorrelacion es capaz de restaurar la señal original exitosamente.