

Concours Blanc 2021 – PSI

Durée 3h

Calculatrice collègue autorisée

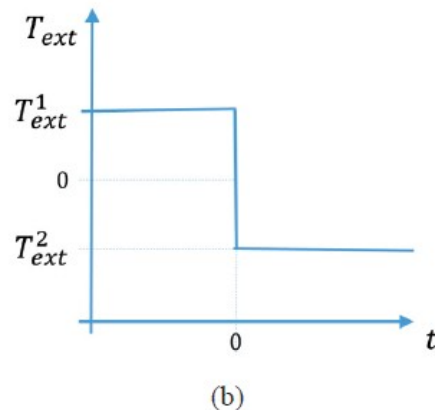
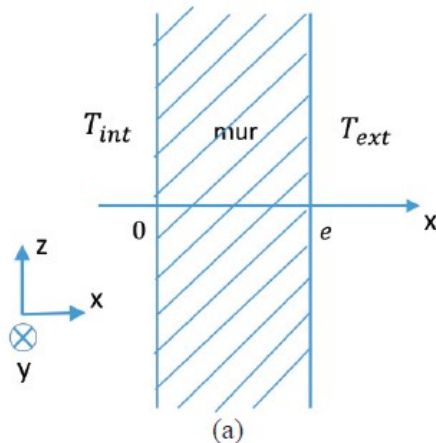
Le sujet comporte deux problèmes indépendants que vous pouvez réaliser dans l'ordre de votre choix.

Le sujet est (trop) long pour 3h mais le barème en tiendra bien évidemment compte.

I. Simulation numérique du transfert thermique dans un mur en régime transitoire.

SIMULATION NUMERIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE DANS UN MUR EN REGIME TRANSITOIRE

On étudie les transferts thermiques dans le mur d'une maison, figure 1(a). La température à l'intérieur de la maison est constante dans le temps et égale à $T_{int} = 20\text{ °C}$. Aux temps négatifs ($t < 0$), la température extérieure est égale à $T_{ext1} = 10\text{ °C}$. A $t = 0$, elle chute brusquement à $T_{ext2} = -10\text{ °C}$ et elle reste égale à cette valeur aux temps positifs ($t > 0$), figure 1(b). On souhaite étudier l'évolution du profil de température dans le mur au cours du temps.



Figures 1 (a) - Schéma du mur étudié. (b) - Evolution de la température extérieure au cours du temps.

Le mur a une épaisseur $e = 40\text{ cm}$. Les propriétés physiques du mur sont constantes : conductivité thermique $\lambda = 1,65\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, capacité thermique massique $c_p = 1\,000\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, masse volumique $\rho = 2\,150\text{ kg.m}^{-3}$.

PARTIE II : RESOLUTION NUMERIQUE

II.A. Equation à résoudre

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

où α est une constante. A l'équation (1) sont associées les conditions :

$$\begin{aligned} T(0, t) &= T_{int} && \text{pour tout } t > 0 \\ T(e, t) &= T_{ext2} && \text{pour tout } t > 0 \\ T(x, 0) &= ax + b && \text{pour tout } x \in [0, e] \end{aligned}$$

II.A.1. Quelle est l'expression de α en fonction des paramètres physiques du mur ?

II.A.2. Exprimer a et b en fonction de T_{int} , T_{ext1} et e .

Pour effectuer la résolution de l'équation (1), nous utiliserons la méthode des différences finies présentée dans la partie II.B.

II.B. Méthode des différences finies

II.B.1. Discrétisation dans l'espace et dans le temps

On divise l'intervalle $[0, e]$, représentant l'épaisseur du mur, en $N + 2$ points, numérotés de 0 à $N + 1$, régulièrement espacés de Δx (figure 2, page suivante). Cette division est appelée « discrétisation ». La distance Δx est appelée le « pas d'espace ». A l'intérieur du mur (frontières intérieure et extérieure exclues) se trouvent donc N points. On cherche à obtenir la température en ces points particuliers à chaque instant.

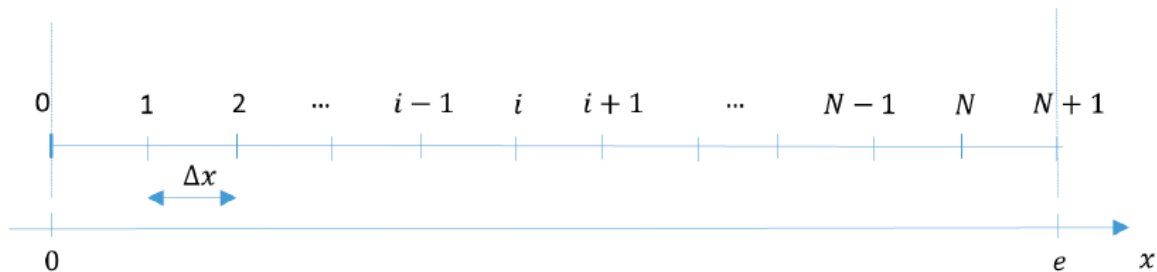


Figure 2 - Discrétisation spatiale dans la direction x .

II.B.1.a. Donner l'expression de Δx en fonction de N et de l'épaisseur du mur e .

II.B.1.b. Donner l'abscisse x_i du i^e point en fonction de i et Δx , sachant que $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = e$.

Le temps est discrétisé en $ItMax$ intervalles de durée Δt et on ne s'intéresse au profil de température qu'aux instants particuliers $t_k = k \cdot \Delta t$. L'intervalle élémentaire de temps Δt est appelé le « pas de temps ».

Pour résoudre l'équation (1), deux méthodes sont proposées :

- méthode utilisant un schéma explicite,
- méthode utilisant un schéma implicite.

II.B.2. Méthode utilisant un schéma explicite

II.B.2.a. A l'aide d'un développement limité de la fonction $x \mapsto T(x, t)$, donner une expression de $T(x + \Delta x, t)$ à l'ordre 3 ($o(\Delta x^3)$) en fonction de T et de ses dérivées partielles par rapport à x évaluées en (x, t) . De même, donner une expression de $T(x - \Delta x, t)$ à l'ordre 3.

II.B.2.b. En déduire une expression approchée à l'ordre 1 ($o(\Delta x)$) de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x,t}$ (dérivée partielle spatiale seconde de T évaluée au point x à l'instant t) en fonction de $T(x + \Delta x, t)$, $T(x - \Delta x, t)$ et $T(x, t)$ et Δx .

On note T_i^k la température $T(x_i, t_k)$, évaluée au point d'abscisse x_i à l'instant t_k . De même, on note $T_{i+1}^k = T(x_i + \Delta x, t_k)$ et $T_{i-1}^k = T(x_i - \Delta x, t_k)$.

II.B.2.c. Déduire de la question précédente une expression approchée de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x_i, t_k}$ (dérivée partielle spatiale seconde de T évaluée en x_i à l'instant t_k) en fonction de T_i^k , T_{i+1}^k et T_{i-1}^k et Δx .

La dérivée partielle temporelle de l'équation (1) est maintenant approchée grâce à un développement limité.

II.B.2.d. A l'aide d'un développement limité de la fonction $t \mapsto T(x, t)$, donner une expression de $T(x, t + \Delta t)$ à l'ordre 1 ($o(\Delta t)$) en fonction de T et de sa dérivée partielle par rapport à t évaluées en (x, t) .

II.B.2.e. En déduire une valeur approchée de $\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x,t}$ (dérivée partielle par rapport au temps de T évaluée au point x à l'instant t) à l'ordre 0 ($o(1)$) en fonction de $T(x, t + \Delta t)$, $T(x, t)$ et Δt .

II.B.2.f. Donner une expression de $\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x_i, t_k}$ (dérivée partielle par rapport au temps de T évaluée en x_i à l'instant t_k) en fonction de Δt , T_i^k et T_i^{k+1} , avec $T_i^{k+1} = T(x_i, t_k + \Delta t)$.

L'équation (1) est valable en chaque point d'abscisse x_i et à chaque instant t_k .

II.B.2.g. Ecrire la forme approchée de cette équation au point i et à l'instant k en approchant $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x,t}$ avec la formule obtenue à la question II.B.2.c. et en approchant $\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x,t}$ avec la formule obtenue à la question II.B.2.f.

II.B.2.h. Montrer que l'équation obtenue à la question II.B.2.g peut s'écrire sous la forme :

$$T_i^{k+1} = rT_{i-1}^k + (1 - 2r)T_i^k + rT_{i+1}^k \quad (2)$$

en précisant la valeur du paramètre r en fonction de Δx , Δt et α .

L'équation (2) est appelée schéma numérique explicite. Si on connaît la température en tous les points $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N$ à l'instant t_k , on peut calculer grâce à elle la température en tous les points à l'instant ultérieur t_{k+1} .

II.B.2.i. L'équation (2) est-elle valable dans tout le domaine, c'est-à-dire pour toute valeur de i , $0 \leq i \leq N + 1$? Que valent T_0^k et T_{N+1}^k ?

II.B.2.j. Dans cette question, on élabore une fonction `schema_explicite` permettant de calculer la température en chaque point au cours du temps selon la formule (2). Parmi les variables d'entrée se trouvera un vecteur T_0 de dimension N , défini en dehors de la fonction, contenant les valeurs de la température aux points de discrétisation à l'instant initial. Au sein de la fonction, un algorithme calculera itérativement la température avec un nombre maximal d'itérations $ItMax$. En sortie de la fonction, on récupérera le nombre d'itérations réellement effectuées, $nbIter$ et une matrice T_tous_k , de dimensions $N \times ItMax$. Chaque colonne de cette matrice contient le vecteur T^k dont les éléments sont les valeurs de la température aux N points x_1, \dots, x_N (points à l'intérieur du mur) à l'instant k :

$$T^k = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ \dots \\ T_{N-1}^k \\ T_N^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_tous_k = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_1^2 & \dots & T_1^k & \dots & T_1^{k-1} & T_1^k \\ T_2^1 & T_2^2 & \dots & T_2^k & \dots & T_2^{k-1} & T_2^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{N-1}^1 & T_{N-1}^2 & \dots & T_{N-1}^k & \dots & T_{N-1}^{k-1} & T_{N-1}^k \\ T_N^1 & T_N^2 & \dots & T_N^k & \dots & T_N^{k-1} & T_N^k \end{pmatrix}.$$

On souhaite arrêter le calcul lorsque la température ne varie presque plus dans le temps. Dans ce but, on évaluera la norme 2 de $T^k - T^{k-1}$ à chaque itération. La définition de la norme 2 est rappelée à la question II.B.2.j.(vi).

II.B.2.j.(i) Ecrire l'en-tête de la fonction en précisant bien les paramètres d'entrée et de sortie.

II.B.2.j.(ii) Le schéma numérique (2) permet d'approcher avec succès la solution à la condition $r < 1/2$. Programmer un test qui avertit l'utilisateur si cette condition n'est pas respectée.

II.B.2.j.(iii) Affecter la valeur 2 000 à $ItMax$. Créer la matrice T_tous_k de dimensions $N \times ItMax$ en la remplissant de zéros.

II.B.2.j.(iv) Remplacer la première colonne de T_tous_k par le vecteur des valeurs initiales T_0 .

II.B.2.j.(v) Calculer le profil de température à l'instant $k = 1$ ($t = \Delta t$), en distinguant le cas $i = 1$, le cas $2 \leq i \leq N - 1$ et le cas $i = N$. Affecter ces valeurs à la deuxième colonne de T_tous_k .

II.B.2.j.(vi) Ecrire une fonction `calc_norme` qui calcule la norme 2 d'un vecteur. On rappelle que la norme 2 d'un vecteur V s'écrit :

$$\|V\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N V_i^2} \quad \text{avec} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix}.$$

II.B.2.j.(vii) Elaborer une boucle permettant de calculer itérativement le profil de température aux instants $t_k = k \cdot \Delta t$ avec $k \geq 2$. Cette boucle sera interrompue lorsque la norme 2 du vecteur $T^k - T^{k-1}$ deviendra inférieure à 10^{-2} ou lorsque le nombre d'itérations atteindra la valeur $ItMax$ (prévoir les deux cas). Utiliser, pour cela, la fonction `calc_norme` définie à la question II.B.2.j.(vi).

II.B.2.j.(viii) Ecrire la fin de la fonction afin de renvoyer tous les arguments de sortie définis au début de la question II.B.2.j.

II. Dynamique gravitationnelle

II Étude de schémas numériques

Soient y une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et t_{\min} et t_{\max} deux réels tels que $t_{\min} < t_{\max}$. On note I l'intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. On s'intéresse à une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\forall t \in I \quad y''(t) = f(y(t)) \quad (\text{II.1})$$

où f est une fonction donnée, continue sur \mathbb{R} . De nombreux systèmes physiques peuvent être décrits par une équation de ce type.

On suppose connues les valeurs $y_0 = y(t_{\min})$ et $z_0 = y'(t_{\min})$. On suppose également que le système physique étudié est conservatif. Ce qui entraîne l'existence d'une quantité indépendante du temps (énergie, quantité de mouvement, ...), notée E , qui vérifie l'équation (II.2) où $g' = -f$.

$$\forall t \in I \quad \frac{1}{2}y'(t)^2 + g(y(t)) = E \quad (\text{II.2})$$

II.A – Mise en forme du problème

Pour résoudre numériquement l'équation différentielle (II.1), on introduit la fonction $z : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I, z(t) = y'(t)$.

II.A.1) Montrer que l'équation (II.1) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel du premier ordre en $z(t)$ et $y(t)$, noté (S).

II.A.2) Soit n un entier strictement supérieur à 1 et $J_n = [0, n-1]$. On pose $h = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{n-1}$ et $\forall i \in J_n$, $t_i = t_{\min} + ih$. Montrer que, pour tout entier $i \in [0, n-2]$,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t) dt \quad \text{et} \quad z(t_{i+1}) = z(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(y(t)) dt \quad (\text{II.3})$$

La suite du problème exploite les notations introduites dans cette partie et présente deux méthodes numériques dans lesquelles les intégrales précédentes sont remplacées par une valeur approchée.

II.B – Schéma d'Euler explicite

Dans le schéma d'Euler explicite, chaque terme sous le signe intégrale est remplacé par sa valeur prise en la borne inférieure.

II.B.1) Dans ce schéma, montrer que les équations (II.3) permettent de définir deux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$, où y_i et z_i sont des valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$. Donner les relations de récurrence permettant de déterminer les valeurs de y_i et z_i connaissant y_0 et z_0 .

II.B.2) Écrire une fonction `euler` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$. Vous justifierez le choix des paramètres transmis à la fonction.

II.B.3) Pour illustrer cette méthode, on considère l'équation différentielle $\forall t \in I, y''(t) = -\omega^2 y(t)$ dans laquelle ω est un nombre réel.

- Montrer qu'on peut définir une quantité E , indépendante du temps, vérifiant une équation de la forme (II.2).
- On note E_i la valeur approchée de E à l'instant t_i , $i \in J_n$, calculée en utilisant les valeurs approchées de $y(t_i)$ et $z(t_i)$ obtenues à la question II.B.1. Montrer que $E_{i+1} - E_i = h^2 \omega^2 E_i$.
- Qu'aurait donné un schéma numérique qui satisfait à la conservation de E ?
- En portant les valeurs de y_i et z_i sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement, quelle serait l'allure du graphe qui respecte la conservation de E ?
- La mise en œuvre de la méthode d'Euler explicite génère le résultat graphique donné figure 1 à gauche. Dans un système d'unités adapté, les calculs ont été menés en prenant $y_0 = 3$, $z_0 = 0$, $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 3$, $\omega = 2\pi$ et $n = 100$.

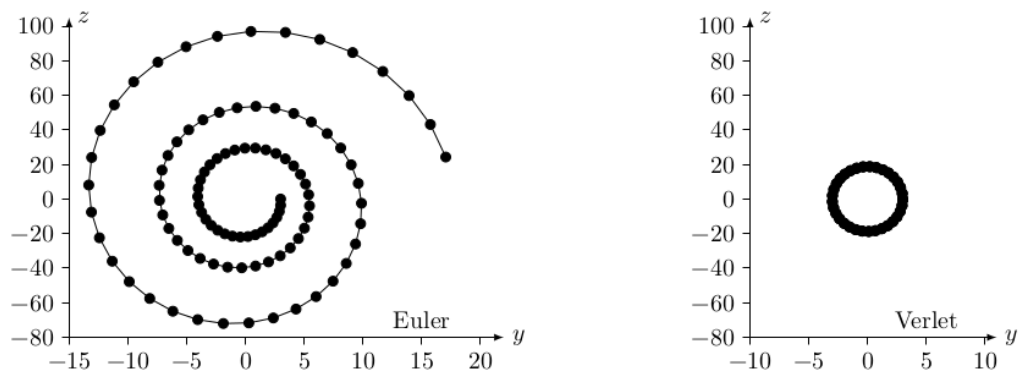


Figure 1

En quoi ce graphe confirme-t-il que le schéma numérique ne conserve pas E ? Pouvez-vous justifier son allure ?

II.C – Schéma de Verlet

Le physicien français Loup Verlet a proposé en 1967 un schéma numérique d'intégration d'une équation de la forme (II.1) dans lequel, en notant $f_i = f(y_i)$ et $f_{i+1} = f(y_{i+1})$, les relations de récurrence s'écrivent

$$y_{i+1} = y_i + h z_i + \frac{h^2}{2} f_i \quad \text{et} \quad z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

II.C.1) Écrire une fonction `verlet` qui reçoit en argument les paramètres qui vous semblent pertinents et qui renvoie deux listes de nombres correspondant aux valeurs associées aux suites $(y_i)_{i \in J_n}$ et $(z_i)_{i \in J_n}$.

II.C.2) On reprend l'exemple de l'oscillateur harmonique (question II.B.3) et on compare les résultats obtenus à l'aide des schémas d'Euler et de Verlet.

a) Montrer que dans le schéma de Verlet, on a $E_{i+1} - E_i = O(h^3)$.

b) La mise en œuvre du schéma de Verlet avec les mêmes paramètres que ceux utilisés au II.B.3e donne le résultat de la figure 1 à droite. Interpréter l'allure de ce graphe.

c) Que peut-on conclure sur le schéma de Verlet ?

III Problème à N corps

On s'intéresse à présent à la dynamique d'un système de N corps massifs en interaction gravitationnelle. Dans la suite, les corps considérés sont assimilés à des points matériels P_j de masses m_j où $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $N \geq 2$ étant un entier positif donné. Le mouvement de ces points est étudié dans un référentiel galiléen muni d'une base orthonormée. L'interaction entre deux corps j et k est modélisée par la force gravitationnelle. L'action exercée par le corps k sur le corps j est décrite par la force $\vec{F}_{k/j} = G \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} \vec{P}_j \vec{P}_k$ où r_{jk} est la distance séparant les

corps j et k ($r_{jk} = \|\vec{P}_j \vec{P}_k\|$) et $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation universelle.

À tout instant t_i avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, chaque corps de masse m_j est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) et les composantes de son vecteur vitesse $(v_{xij}, v_{yij}, v_{zij})$ dans le référentiel de référence.

Trois listes sont utilisées pour représenter ce système en python

- `masse` conserve les masses de chaque corps : `masse[j] = m_j` ;
- `position` contient les positions successives de chaque corps : `position[i][j] = [x_ij, y_ij, z_ij]` ;
- `vitesse` mémorise les vitesses successives de chaque corps : `vitesse[i][j] = [v_xij, v_yij, v_zij]`.

L'objet de la suite du problème est de construire ces listes en mettant en œuvre l'algorithme de Verlet.

III.A – Position du problème

III.A.1) Exprimer la force \vec{F}_j exercée sur le corps P_j par l'ensemble des autres corps P_k , avec $k \neq j$.

III.A.2) Écrire une fonction python `force2(m1, p1, m2, p2)` qui prend en paramètre les masses (`m1` et `m2` en kilogrammes) et les positions (`p1` et `p2`, sous forme de listes de trois coordonnées cartésiennes en mètres) de deux corps 1 et 2 et qui renvoie la valeur de la force exercée par le corps 2 sur le corps 1, sous la forme d'une liste à trois éléments représentant les composantes de la force dans la base de référence, en newtons.

III.A.3) Écrire une fonction `forceN(j, m, pos)` qui prend en paramètre l'indice j d'un corps, la liste des masses des N corps du système étudié ainsi que la liste de leurs positions et qui renvoie \vec{F}_j , la force exercée par tous les autres corps sur le corps j , sous la forme d'une liste de ses trois composantes cartésiennes.

III.B – Approche numérique

III.B.1) Expliciter la structure et la signification de `position[i]` et `vitesse[i]`.

III.B.2) Écrire une fonction `pos_suiv(m, pos, vit, h)` qui prend en paramètres la liste des masses des N corps du système étudié (en kilogrammes), la liste de leurs positions (en mètres) à l'instant t_i , la liste de leurs vitesses (en mètres par seconde) au même instant et le pas d'intégration h (en secondes) et qui renvoie la liste des positions des N corps à l'instant t_{i+1} calculées en utilisant le schéma de Verlet.

III.B.3) Écrire une fonction `etat_suiv(m, pos, vit, h)` qui prend les mêmes paramètres que la fonction `pos_suiv` et qui renvoie la liste des positions (en mètres) et la liste des vitesses (en m/s) des N corps à l'instant t_{i+1} calculées en utilisant le schéma de Verlet.

III.B.4) En notant τ_N la durée des calculs pour un nombre N de corps, la mise en œuvre de la fonction `etat_suiv` a donné le résultat graphique de la [figure 2](#) où on a porté $\ln(N)$ en abscisse et $\ln(\tau_N)$ en ordonnée.

a) Quelle relation simple peut-on établir entre $\ln(\tau_N)$ et $\ln(N)$ à partir de la [figure 2](#) ?

b) Quelle hypothèse peut-on émettre quant à la complexité de l'algorithme étudié ?

III.B.5)

a) Estimer la complexité temporelle de la fonction `etat_suiv` sous la forme $O(N^\alpha)$.

b) Comparer avec le résultat obtenu à la [question III.B.4](#).

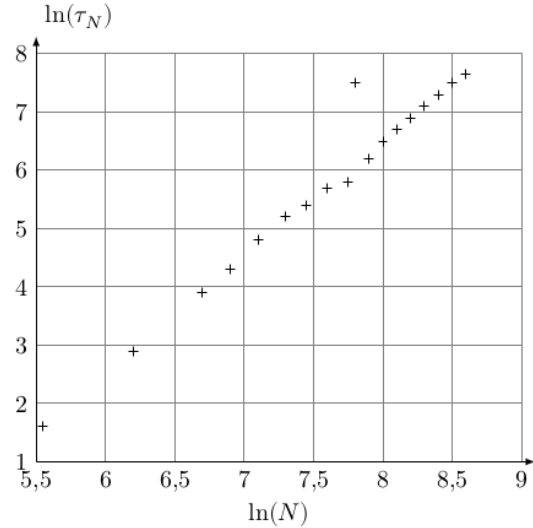


Figure 2