UNIDAD 5: PRUEBA O CONTRASTE DE HIPÓTESIS

# INTRODUCCIÓN

Iniciamos el estudio de la inferencia estadística con el desarrollo del concepto de ***distribución muestral****.* Después, se utilizó una estadística obtenida de una muestra aleatoria (como la media de la muestra, la varianza de la muestra o la proporción de la muestra) para ***estimar*** su parámetro de población correspondiente.

En el proceso de estimación se trató de asignar al parámetro de una distribución, un único valor (estimación puntual) o un conjunto de valores (estimación por intervalos).

En la presente sección, pondremos nuestra atención en otra fase de la inferencia estadística que también se basa en la información de la muestra: ***la prueba de hipótesis.*** En particular, desarrollaremos una metodología que nos permitirá hacer inferencias con respecto al valor específico de un parámetro de población mediante el *análisis de diferencias* entre los resultados que en realidad observamos (es decir, nuestra estadística de muestra) y los resultados que esperaríamos obtener si alguna hipótesis subyacente fuera realmente verdadera. Además del desarrollo de la **metodología de prueba de hipótesis** como una técnica para analizar diferencias y tomar decisiones, también evaluaremos los riesgos implicados al tomar tales decisiones basándonos únicamente en la información de la muestra. Pondremos énfasis en las bases conceptuales y fundamentales de la metodología de prueba de hipótesis.

# METODOLOGÍA DE LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

Con el propósito de desarrollar la metodología de la prueba de hipótesis, analizaremos el ejemplo siguiente. En una compañía, que se dedica al empaque de cajas de cereal, las máquinas han sido ajustadas para vaciar un contenido promedio de 368 gramos de cereal en cada caja. El gerente de producción está preocupado por evaluar si el proceso sigue funcionando o no de una manera que asegure que, en promedio, la cantidad adecuada de cereal (es decir, 368 gramos) está siendo depositada en cada caja. Decide seleccionar una muestra aleatoria de 25 cajas del proceso de empaque y examinar su peso para determinar qué tanto se acerca cada una de tales cajas a la especificación de la compañía de 368 gramos en promedio en cada caja. El gerente de producción espera encontrar que el proceso está funcionando apropiadamente. Sin embargo, podría encontrar que las cajas muestreadas pesan mucho menos o, quizás, mucho más y tener la sensación de que debería detener la producción hasta que el personal de mantenimiento pueda examinar las máquinas y, si fuera necesario, reparar o sustituir una parte de máquina. Por consiguiente, al analizar las diferencias entre los pesos obtenidos de la muestra y los 368 gramos esperados, obtenidos de la especificación de la compañía, se tomará una decisión basada en la información de la muestra y se llegará a una de las siguientes dos conclusiones:

1. El contenido promedio en el proceso completo de empaque de cajas de cereal es de 368 gramos. No es necesario realizar acciones correctivas.
2. El contenido promedio no es de 368 gramos; es menor a esta cantidad o es mayor. Se necesitan acciones correctivas.

**Hipótesis nula y alternativa**

La prueba de hipótesis empieza con una afirmación o aserción con respecto a un parámetro particular de una población. Para fines de análisis estadístico, el gerente de producción escoge como hipótesis inicial que el proceso está bajo control; esto es, el contenido promedio es de 368 gramos y no es necesario efectuar acciones correctivas. La hipótesis de que el parámetro de la población es igual a la especificación de la compañía se conoce como la **hipótesis nula.** Por lo general se la identifica con el símbolo **H0**. En nuestro ejemplo se puede establecer como:



Obsérvese que la hipótesis nula se escribe en términos del parámetro de la población. Esto es así debido a que el gerente está interesado en el proceso de empaque completo, es decir, la población de todas las cajas de cereal que se están llenando. Las estadísticas muestrales se utilizarán para hacer inferencias acerca de la condición del proceso completo de llenado. La base teórica de la prueba de hipótesis requiere que la hipótesis nula sea considerada verdadera hasta que las evidencias, que son los resultados de la muestra, indiquen que ésta es falsa. Si la hipótesis nula se considera falsa, alguna otra debe ser verdadera.

Siempre que especifiquemos una hipótesis nula, también debemos especificar una **hipótesis alternativa**, **H1**,que indique lo opuesto a la hipótesis nula. Para el ejemplo, la hipótesis alternativa se puede establecer como:



La hipótesis alternativa representa la conclusión a la que se llegaría si hubiera suficiente evidencia de la información de la muestra para decidir que es improbable que la hipótesis nula sea verdadera y, por tanto, rechazarla. En el ejemplo, si los pesos de las cajas muestreadas estuvieran lo suficientemente alejados de 368 gramos especificados por la compañía, el gerente de producción rechazaría la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa; por consiguiente, detendría la producción y llevaría a efecto cualquier acción necesaria para corregir el problema.

# Valor crítico de la estadística de prueba

La decisión de rechazar o no la hipótesis nula, en base a la evidencia empírica, se basa en la creencia de que los elementos de la muestra aleatoria representan fielmente las características de los elementos de la población de donde ha sido tomada. El hecho de no rechazar la hipótesis nula no es una prueba de que ésta sea verdadera, lo único que podemos decir es que la evidencia fue insuficiente para garantizar su rechazo. Para tomar cualquier decisión, se requiere usar la distribución muestral de la estadística de interés (en nuestro ejemplo, de la media muestral) y luego calcular **el valor** de la estadística de prueba particular, basándonos en el resultado de la muestra. Como la distribución muestral de la ***estadística de prueba***, a menudo, sigue una distribución normal o t , podemos utilizar estas distribuciones para determinar la probabilidad de que una hipótesis nula sea verdadera (la estadística de prueba es la función pivote ya conocida). El valor de la estadística de prueba se llama **valor crítico.**

# Regiones de rechazo y de no rechazo

La distribución muestral de la estadística de prueba se divide en dos regiones, una **región de rechazo** (conocida también como **región crítica**) y una **región de no rechazo.** Si el valor de la estadística de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza la hipótesis nula (porque el valor sería improbable si H0 fuese verdadera). En el ejemplo, el gerente de producción llegaría a la conclusión de que la media de la población no es 368.Si el valor de la estadística de prueba cae dentro de la región de no rechazo, no se puede rechazar la hipótesis nula. En nuestro ejemplo, el gerente de producción llegaría a la conclusión de que la cantidad promedio de contenido no ha cambiado.

Con el fin de tomar una decisión respecto de H0, primero debemos determinar el **valor crítico** de la estadística de prueba, el cual separa las regiones de no rechazo y de rechazo.

# Riesgos en la toma de decisiones al utilizar la metodología de la prueba de hipótesis

Cuando se usa una estadística muestral para tomar decisiones acerca de un parámetro poblacional, existe el riesgo de llegar a una conclusión incorrecta. Dos tipos diferentes de error se pueden presentar cuando se aplica la metodología de prueba de hipótesis:

* Un **error de tipo I** se presenta si la hipótesis nula, H0, es rechazada cuando, de hecho, es verdadera y debía ser aceptada**.**

Un **error de tipo II** se presenta si la hipótesis nula, H0, es aceptada cuando, de hecho, es falsa y debía ser rechazada.

* **Nivel de significación:**  es la probabilidad de cometer un error del tipo I. Se especifica antes de que se lleve a cabo la prueba de hipótesis. Se le denota como  y una vez que se ha especificado su valor se conoce el tamaño de la región crítica y se puede determinar el valor crítico. Su complemento, , es el **coeficiente de confianza** y representa la probabilidad de que la hipótesis nula, H0, no sea rechazada cuando de hecho es verdadera.

Ahora, a manera de resumen, presentaremos los conceptos necesarios de una prueba de hipótesis.

## REVISIÓN DE CONCEPTOS PARA LA METODOLOGÍA DE LA PRUEBA DE HIPÓTESIS

**Hipótesis estadística:** Supuesto o conjetura acerca de un parámetro poblacional o acerca de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

**Contraste de Hipótesis:** Una prueba de una hipótesis estadística es una regla de decisión que permite rechazar o no la hipótesis nula planteada, en base a la información proporcionada por la muestra aleatoria.

**Hipótesis nula y alternativa:** La hipótesis nula es la que establece que el parámetro estudiado tiene un valor específico.

La hipótesis alternativa, sobre la cual se enfoca la atención, generalmente representa la suposición que el investigador quiere probar. Se establece como lo opuesto a la hipótesis nula y representa la conclusión a la que se llegaría si la hipótesis nula fuera rechazada.

El rechazo de la hipótesis nula implicará la aceptación de la hipótesis alternativa.

Para formular las hipótesis podemos seguir los pasos siguientes:

Formular las hipótesis, estableciendo como alternativa aquella que se desea probar.

1. En la hipótesis nula se plantea que el parámetro es igual a un valor específico.
2. Considerar el nivel de significación α como medida de la confiabilidad de la decisión de rechazar la hipótesis nula. Este valor de α debe ser pequeño.
3. Si no existe suficiente información en la muestra como para rechazar la hipótesis nula, es preferible indicar que la hipótesis nula no puede ser rechazada en lugar de aceptarla.

**Error tipo I y Error tipo II:** La decisión de rechazar o no la hipótesis nula, en base a la información contenida en una muestra, está sujeta a dos tipos de errores; estos errores se deben a fluctuaciones aleatorias en el muestreo. Se comete un error tipo I cuando se rechaza una hipótesis nula verdadera. Se comete un error de tipo II cuando se decide a favor de una hipótesis nula que en realidad es falsa. Para controlar estos errores se le asigna una probabilidad pequeña.

ESTADO REAL

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| DECISIÓN | H0 es verdadera | H0 es falsa |
| Rechazar H0 | Error tipo I |  |
| Aceptar H0 |  | Error tipo II |

**Nivel de Significación:** Es la probabilidad de cometer el error tipo I. Se le denota como α.

α = P[Rechazar H0 / H0 es verdadera]

La probabilidad de equivocarse al rechazar la hipótesis nula, siendo ésta verdadera, es a lo más α.

**Estadística de prueba:** Variable aleatoria utilizada para tomar la decisión “no se rechaza Ho” ó “se rechaza Ho”.

Generalmente, la estadística de prueba es la función pivote que se usa en la estimación por intervalos.

**Región crítica:** Conjunto de valores de la estadística de prueba que causan el rechazo de la hipótesis nula.

**Punto crítico:** “Primer” valor (o valor “frontera”) en la región crítica.

**Regla de decisión:** Si el valor calculado de la estadística de prueba queda localizado dentro de la región crítica, se rechaza Ho; caso contrario no se podrá rechazar Ho.

**Regla para la conclusión:** Si la decisión es “rechazar Ho”, entonces la conclusión será “existe evidencia suficiente al nivel de significación α para indicar que ... (el significado de la hipótesis alternativa)”. Si la decisión es “no se rechaza Ho”, entonces la conclusión debe ser “no existe suficiente evidencia al nivel de significación α que indique que ... (el significado de la hipótesis alternativa)”.

Notar que: (1) **la decisión** se refiere a Ho, y (2) **la conclusión** es una aseveración que sostiene o no lo afirmado en H1.

**PROCEDIMIENTO PARA REALIZAR UNA PRUEBA O CONTRASTE DE HIPÓTESIS**

Dado el nivel de significación α, para hallar la región de rechazo RR, que proporcione una regla de decisión para aceptar o no la hipótesis nula  frente a una hipótesis alternativa, se procede del modo siguiente:

1. Formular las hipótesis H0 y H1.
2. Fijar el nivel de significación α y usar este valor para determinar la región crítica.
3. Elegir la estadística de prueba adecuada, dependiendo del parámetro que interese probar, y calcular su valor en base a la información proporcionada por la muestra.
4. Tomar la decisión: “se rechaza H0” o “no se rechaza H0”.
5. Conclusión: interpretación de la decisión.

A continuación, haremos las pruebas de hipótesis para los parámetros  y  de una población normal, y para el parámetro**** de una población de Bernoulli.

### PRUEBAS DE HIPOTESIS USUALES

**PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA *MEDIA* CUANDO SE MUESTREA UNA POBLACIÓN NORMAL**

Sean *X*1, *X*2, ..., *X*n una muestra aleatoria de una distribución normal con media *μ* desconocida. Interesa probar **uno** de los siguientes conjuntos de hipótesis con respecto a *μ*.

A) H0 : *μ* = *μ0* B) H0 : *μ* = *μ0* C) H0 : *μ* = *μ0*

H1 : *μ* < *μ0* H1 : *μ* > *μ0* H1 : *μ* ≠ *μ0*

**CASO 1.-** Supongamos que la varianza poblacional *σ2* es conocida. En este caso, la estadística de prueba es

*Z* = 

la cual tiene distribución normal estándar.

La región crítica de tamaño α correspondiente a cada conjunto de hipótesis es:

A) RR = { Z: Z ≤ -Zα } C) RR = { Z: Z ≤ -Zα/2 } ∪ { Z: Z ≥ Zα/2 }

B) RR = { Z: Z ≥ Zα }

**Ejemplo:**

Ante un reclamo de la gerencia, sobre el tiempo de realización de una tarea, los empleados de una compañía sostienen que ellos completan la tarea en a lo más 13 minutos. ¿Qué conclusión obtiene la gerencia si para una muestra de 400 tareas se obtiene un promedio de tiempo de terminación de 14 minutos? Se sabe por información de trabajos similares, que los tiempos de ejecución de la tarea tiene una distribución normal con desviación estándar de 10 minutos. Usar el nivel de significación 

**Solución:**

El problema se plantea de la siguiente manera:

H0 :  = 13 versus H1: >13

con un nivel de significación .

En este caso la hipótesis alternativa se toma mayor que 13 pues el gerente justificaría el reclamo de la compañía si la media poblacional es superior a 13 minutos.

El valor de la estadística de prueba es *Z* =  = 

La región de rechazo correspondiente al nivel de significación  está dada por .

Como el valor de la estadística de prueba cae en la región de rechazo, el gerente puede rechazar la hipótesis nula H0. El riesgo de que el gerente se equivoque al rechazar la hipótesis nula, sobre la base del resultado encontrado en la muestra, es menor o igual que 0.05. 

**CASO 2.-** Supongamos que la varianza poblacional *σ2* es desconocida. En este caso se utiliza como estadística de prueba

*T* = 

la cual tiene distribución *t* de Student con *n-1* grados de libertad.

La región crítica de tamaño *α* correspondiente a cada conjunto de hipótesis es:

A) RR = { *t*: *t* ≤ -*t*α } B) RR = { *t*: *t* ≥ *t*α }

1. RR = { *t*: *t* ≤ -*t*α/2  ó *t*: *t* ≥ *t*α/2 }

**Ejemplo:** En 10 mediciones sobre la resistencia de un alambre, se obtuvieron los siguientes resultados: = 10.48 y = 1.36.

Suponiendo que la variable aleatoria X que representa a las mediciones sigue una distribución normal con media  y varianza desconocida, probar la hipótesis nula H0: =10 versus H1: > 10, al nivel de significación  = 0.01

**Solución:**

Siendo la varianza poblacional desconocida y la muestra pequeña, la estadística de prueba es *T* =  la cual tiene distribucion t con 9 g.l.

El valor calculado de esta estadística de prueba es 1.1160.

La región crítica al nivel de significación  = 0.01 es [.

Como el valor de la estadística de prueba no cae en la región crítica, no se rechaza H0.

La muestra aleatoria no es significativa.

**PRUEBA DE HIPÓTESIS CON RESPECTO A LA *VARIANZA* CUANDO SE MUESTREA UNA POBLACIÓN NORMAL**

Sean *X*1, *X*2, ..., *X*n una muestra aleatoria de una distribución normal con media *μ* desconocida y varianza *σ2* desconocida. Sea la hipótesis nula

H0 : *σ2* = *σ*

frente a una de las siguientes alternativas:

H1 : *σ2* < *σ*H1 : *σ2* > *σ*H1 : *σ2* ≠ *σ*

La estadística de prueba es:



la cual tiene distribución Ji cuadrado con *n*–1 grados de libertad.

Se rechazará H0 si el valor de la estadística de prueba se encuentra dentro de la región de rechazo de tamaño α, correspondiente a cada hipótesis:

RR = { *χ2* ≤ *χ2*α } RR = { *χ2* ≥ *χ2*α } RR = { *χ2* ≤ *χ2*α/2  ó *χ2* ≥ *χ2*α/2 }

**Ejemplo:**

Un fabricante de máquinas de llenado de leche en bolsas asegura que cada una de estas máquinas llena bolsas con un contenido promedio de un litro y una varianza igual a 0.01. La varianza de una muestra de 10 bolsas fue  = 0.02.

Suponiendo que la cantidad vertida tiene distribución normal probar la hipótesis H0: =0.01 frente a H1: >0.01, al nivel de significación 

**Solución:**

El valor de la estadística de prueba es

= 

Para el valor crítico de la distribución chi cuadrado con 9 g.l. es 16.92 de

modo que la región crítica para esta prueba es .

Como el valor calculado de la estadística de prueba cae en la región crítica, se rechaza H0.

Las máquinas del fabricante no son muy precisas.

PRUEBA DE HIPÓTESIS PARA LA *PROPORCIÓN* DE UNA POBLACIÓN DE BERNOULLI.

Sea *X1, X2, ..., Xn* una muestra aleatoria de una población de Bernoulli con media  (la proporción poblacional de elementos que poseen cierta característica de interés) y con varianza . Se sabe que, cuando la muestra es grande, la proporción muestral  de elementos que poseen la característica de interés, tiene distribución normal, aproximadamente, con media  y varianza /n. Esto es, *p* ~ o lo que es lo mismo,

Z = ~ *N*(0,1).

Supóngase que se desea probar la hipótesis nula

H0:  = 0

contra una de las siguientes alternativas:

H1:  < 0 H1:  > 0  H1:  ≠ 0

En este caso, la estadística de prueba es:

Z = 

la cual tiene distribución normal estándar.

La región crítica de tamaño α, correspondiente a cada una de las hipótesis es:

RR = { z ≤ -zα} RR = { z ≥ zα} RR = { z ≤ -zα/2 ó z ≥ zα/2 }

**Ejemplo:**

Un ministro de trabajo afirma que en su país existe el 40% de desocupados. Con el fin de evaluar esta afirmación se tomó una muestra aleatoria de 500 personas resultando que 300 eran desocupadas. En base a la información obtenida ¿Qué se puede decir acerca de la afirmación del ministro?.

**Solución:**

Considerando que la v.a. X definida en la población y descrita por

X = 1, si individuo es desocupado

= 0, si no es desocupado

sigue una distribució de Bernoulli con parámetro , se trata de probar

Ho: =0.40 frente a H1: >0.40, con .

En la muestra de tamaño 500, la proporción de desocupados es *p* = 300/500 = 0.6

El valor de la estadística de prueba, si H0 es verdadera, es

Z =  =

Este valor es mayor que el cuantil  y por tanto podemos afirmar, con un riesgo de 5%, que los resultados muestrales son significativos y el porcentaje de desocupados es mayor que 40%.

**PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA DOS POBLACIONES NORMALES**

#### PRUEBA DE HIPÓTESIS REFERENTE A LA IGUALDAD DE MEDIAS

En muchas investigaciones es necesario comparar dos procedimientos diferentes; así, se comparan dos procedimientos para fabricar componentes electrónicos, se comparan dos métodos de enseñanza, etc. Usualmente el problema se traduce en comparar las medias de dos variables aleatorias.

La metodología se presenta a continuación.

Sean *X*1, *X*2, ..., *X*n1 y *Y*1, *Y*2, ..., *Y*n2 muestras aleatorias provenientes de dos distribuciones normales independientes con medias *μ1* y *μ2* y varianzas  y , respectivamente. Supóngase que se quiera probar la hipótesis nula

H0 : *μ1* – *μ2* = 0

contra una de las siguientes alternativas:

H1 : *μ1* – *μ2* < 0H1 : *μ1* – *μ2* > 0H1 : *μ1* – *μ2* ≠ 0

**CASO 1.- Las varianzas poblacionales  y  son conocidas.**

En este caso, la estadística de prueba es:

*Z* = 

la cual tiene distribución normal estándar.

La región crítica de tamaño α correspondiente a cada una de las hipótesis es:

RR = { Z: Z ≤ -zα } RR = { Z: Z ≥ zα } RR = { Z: Z ≤ -zα/2 } ∪ { Z: Z ≥ zα/2 }

**CASO 2.- Las varianzas poblacionales son desconocidas pero son iguales.**

En este caso, la estadística de prueba es:

*T* = 

la cual tiene distribución *t* de Student con *n1* + *n2* – 2 grados de libertad, y donde ** es el estimador combinado de la varianza *σ2*.

Las regiones críticas correspondientes a las hipótesis mencionadas son:

RR = { T: T≤ -*t*α } RR = { T: T≥ *t*α } RR = {T: T ≤ -*t*α/2 } ∪ {T: T ≥ *t*α/2 }

**CASO 3.- Las varianzas poblacionales no se conocen y son diferentes.**

La estadística de prueba que se utiliza en este caso es:

*T* = 

cuya distribución es *t* de Student con *g* grados de libertad, donde *g* es el mínimo entre (*n1* – 1) y (*n2* – 2).

**PRUEBAS DE HIPÓTESIS REFERENTES A LA IGUALDAD DE LAS VARIANZAS DE DOS POBLACIONES NORMALES INDEPENDIENTES**

Sean *X*1, *X*2, ..., *X*n1 y *Y*1, *Y*2, ..., *Y*n2 muestras aleatorias provenientes de dos distribuciones normales independientes con medias desconocidas *μ1* y *μ2* y varianzas desconocidas y, respectivamente. Se desea probar la hipótesis nula

H0 : *σ* = *σ*

frente a una de las siguientes alternativas:

H1 : *σ* < *σ*H1 : *σ* > *σ*H1 : *σ* ≠ *σ*

La estadística de prueba que se utiliza es:

*F* = 

la cual tiene distribución *F* con *n1* – 1 y *n2* – 1 grados de libertad.

Pero, bajo la hipótesis nula, *σ* = *σ*, entonces la estadística se reduce a:

*F* = 

La región crítica asociada a cada una de las hipótesis alternativas es:

RR = { *f* ≤ 1/ *f*1-α,  n-1, n-1 } RR = { *f* ≥ *f*1-α,  n-1, n-1 }

RR = { *f* ≤  ó *f* ≥ }

**PRUEBA DE HIPÓTESIS REFERENTE A LA IGUALDAD DE PROPORCIONES DE DOS POBLACIONES INDEPENDIENTES DE BERNOULLI**

Sean *X*1, *X*2, ..., *X*n1  y *Y*1, *Y*2, ..., *Y*n2 muestras aleatorias de sendas poblaciones de Bernoulli independientes, con medias *p1*  y *p2* y varianzas *p*1(1–*p*1) y *p*2(1–*p*2), respectivamente. En las muestras de tamaño *n1* y *n2* sean X e Y el número observado de elementos que poseen la característica de interés. Luego, las proporciones muestrales  y  tienen distribuciones muestrales que se comportan aproximadamente como una distribución normal, cuando *n1* y *n2* son grandes.

Entonces, la estadística  tiene distribución normal con media  y con varianza  + , de modo que la variable aleatoria

 ~ *N*(0,1)

Usaremos esta distribución muestral para hacer inferencias con respecto a

*p*1 – *p*2.

Si se desea probar la hipótesis nula

H0: *p*1 – *p*2 = 0

frente a una de las siguientes alternativas:

H1: *p*1 – *p*2 < 0 H1: *p*1 – *p*2 > 0 H1: *p*1 – *p*2 ≠ 0

seguiremos el procedimiento ya conocido. Dado que bajo H0 se supone que las dos proporciones son iguales, sea *p* = *p*1 = *p*2 la proporción común.

Si H0 es verdadera, la estadística  tiene distribución normal con media 0 y varianza  + = 

Como no se conoce el valor de *p***,** se combina la información de las dos muestras para obtener el estimador combinado

.

Así, . En este caso, usaremos como estadística de prueba



la cual tiene distribución normal estándar, para valores grandes de n1 y n2.

Las regiones de rechazo para cada uno de los conjuntos de hipótesis son, respectivamente,

RR = { Z: Z ≤ -zα} RR = { Z: Z ≥ zα} RR = {Z: Z ≤ -zα/2 ó Z ≥ zα/2 }.