

# Lógica Difusa e Sistemas de Inferência Fuzzy

Profa. Dra. Gina M. B. de Oliveira

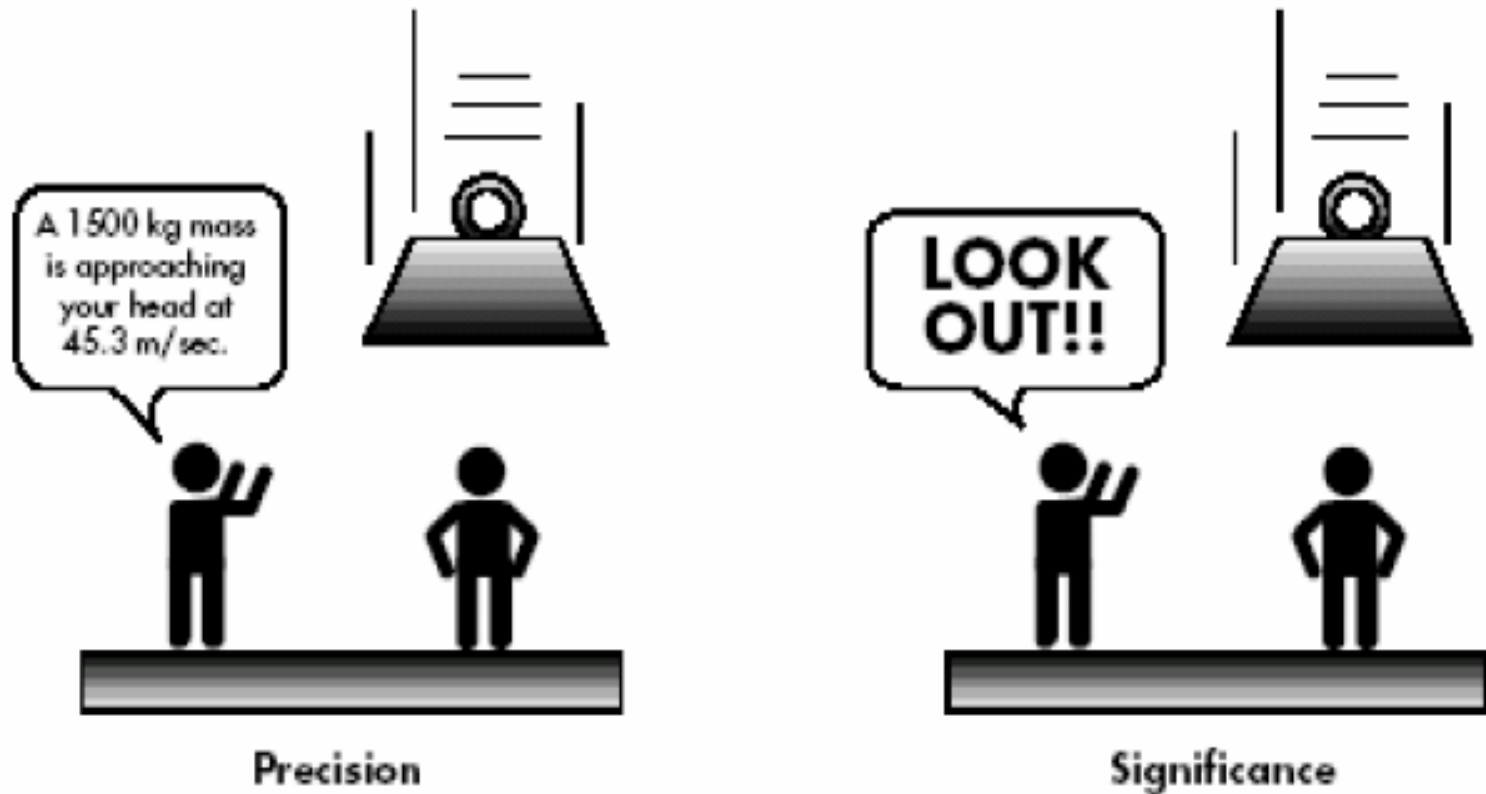
Universidade Federal de Uberlândia

# Os copos estão cheios ou estão vazios?



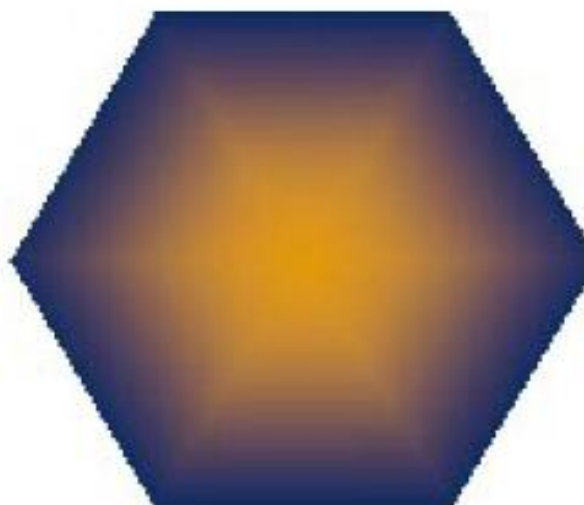
A maioria das informações que lidamos no dia-a-dia são imprecisas ou vagas ...

## Precision and Significance in the Real World



Em situações reais, nem sempre a precisão é importante para se decidir a ação ...

- O hexágono é parcialmente azul, ou o hexágono é parcialmente amarelo.
- O hexágono é quase azul, ou quase amarelo.
- O hexágono é 55% azul, ou o hexágono é 45% amarelo.



# Lógica Fuzzy ou Lógica Difusa

"A lógica difusa tem por objetivo modelar modos de raciocínio aproximados ao invés de precisos."

Desenvolvida por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60

Na lógica binária (clássica) as proposições são unicamente "Verdadeiras" ou "Falsas".

Na lógica difusa as proposições podem ter valores intermediários entre "Verdadeiro" e "Falso". A veracidade destas é uma função que pode assumir qualquer valor entre 0 (absolutamente falso) e 1 (absolutamente verdadeiro).

# Lógica Fuzzy ou Lógica Difusa

A lógica difusa então visa modelar modos de raciocínio imprecisos, tendo os casos precisos como situações limite.

Idéia: todas as coisas admitem graus (temperatura, altura, velocidade, distância, etc...)

As sentenças passam a ter um grau de pertinência.

# Lógica Fuzzy - História

A lógica *fuzzy* foi introduzida no contexto científico em 1965 pelo professor Lotfi Zadeh, através da publicação do artigo *Fuzzy Sets* no *journal Information and Control*.

- 1965 Prof. Lotfi Zadeh, U.C Berkeley. Apresenta os conceitos fundamentais da lógica *Fuzzy*.
- 1970 Primeira aplicação da lógica *Fuzzy* na engenharia de controle.
- 1975 Introdução da logica *Fuzzy* no Japão.
- 1985 Ampla utilização no Japão.
- 1990 Ampla utilização na Europa.
- 1995 Ampla utilização no EUA.
- 1996 1100 aplicações com Lógica Fuzzy publicadas.
  - Aplicações embarcadas - 28%
  - Automação industrial - 62%
  - Controle de processos - 10%

# Lógica Fuzzy

## Aplicações da Lógica Fuzzy

---

- Sistemas especialistas
- Robótica
- Raciocínio sobre incerteza
- Jogos
- Sistemas de apoio à tomada de decisão
- Controle de sistemas e processos industriais



# Lógica Fuzzy

## Aplicações da Lógica Fuzzy

---

- Fuzzy no dia-a-dia...
  - Ar-condicionado
  - Câmeras fotográficas
  - Freios ABS
  - Injeção eletrônica em veículos
  - Máquinas de lavar
  - Etc...

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

Conjuntos convencionais têm apenas os critérios de pertinência “pertence” ou “não pertence”, e “está contido” ou “não está contido”, ou seja, um elemento não pode pertencer parcialmente a um conjunto, da mesma forma que um conjunto não pode estar parcialmente contido em outro.

Conjuntos fuzzy: conjuntos com limites imprecisos .

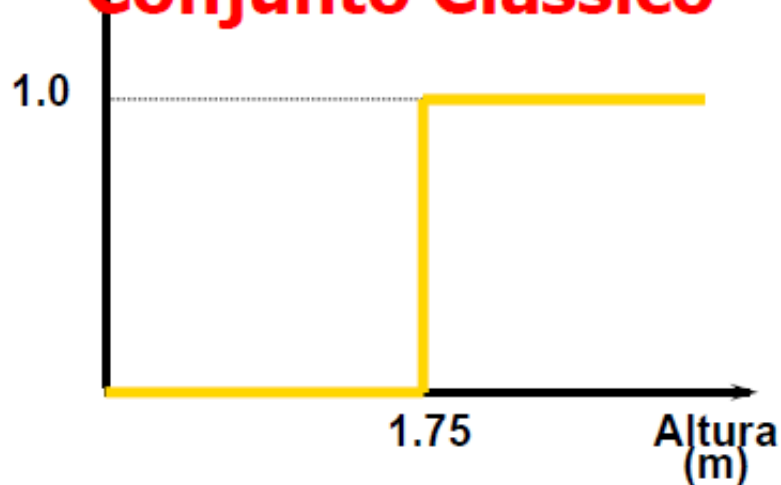
Exemplo: Conjunto de pessoas altas.

Uma pessoa com 1,90 m pertence a esse conjunto e uma com 1,40 m não pertence. Mas o que dizer de pessoas com 1,60 m; 1,70 m; 1,80 m?

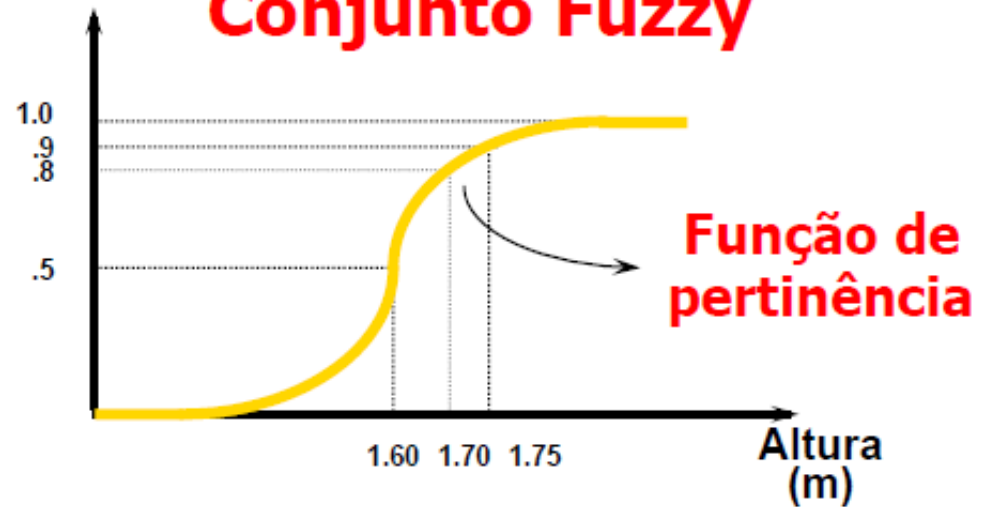
# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

A = Conjunto de pessoas altas

## Conjunto Clássico



## Conjunto Fuzzy



# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

- Grau de pertinência:

Cada elemento do conjunto difuso tem um grau de pertinência no intervalo  $[0, 1]$ , dessa forma permitindo uma transição gradual da falsidade para a verdade.

- Não existe uma base formal para determinar o grau de pertinência. Este é escolhido experimentalmente / empiricamente.

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto fuzzy  $A$  definido no universo de discurso  $X$  é caracterizado por uma **função de pertinência**  $\mu_A$ , a qual mapeia os elementos de  $X$  para o intervalo  $[0,1]$ .

$$\mu_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento  $x$  pertencente a  $X$  um número real  $\mu_{A(x)}$  no intervalo  $[0,1]$ , que representa o **grau de pertinência** do elemento  $x$  ao conjunto  $A$ , isto é, o quanto é possível para o elemento  $x$  pertencer ao conjunto  $A$ .
- Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa
- $\mu_{A(x)} : x \rightarrow [0,1], \mu_{A(x)} = 0$   
 $0 < \mu_{A(x)} < 1$   
 $\mu_{A(x)} = 1$

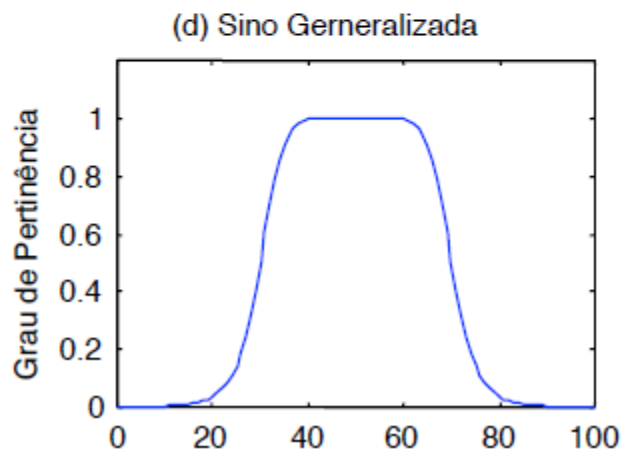
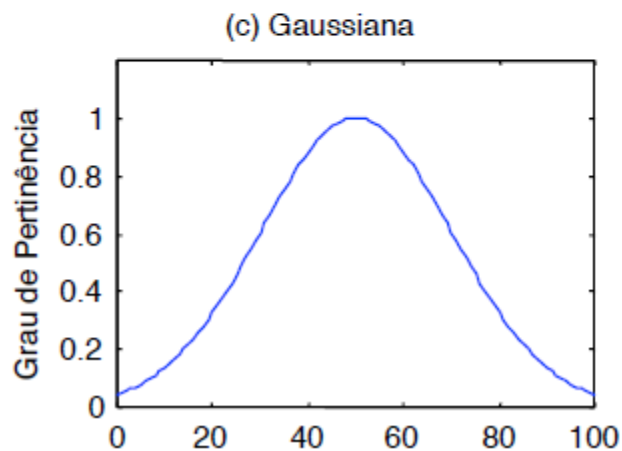
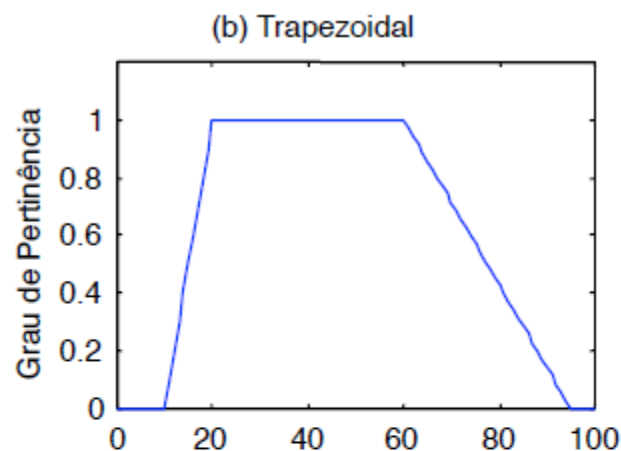
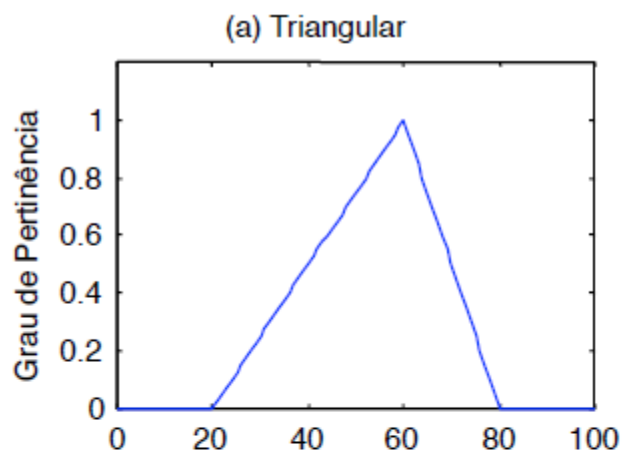
# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Funções de Pertinência

- Reflete o conhecimento que se tem em relação a intensidade com que o objeto pertence ao conjunto fuzzy.
- Técnicas para se adquirir esse conhecimento do especialista.
- Várias formas diferentes.
- Representadas uma função de mapeamento: valor numérico da variável  $X$  grau de pertinência ao conjunto fuzzy.
- Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Funções de Pertinência



# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Funções de Pertinência

Função Triangular  $\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$

Função Trapezoidal  $\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$

Função Gaussiana  $\text{gaussmf}(x; \sigma, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$

Função Sino Generalizada  $\text{gbellmf}(x; b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$



# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Definição formal

- Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de pertinência (MF)}}) \mid x \in X\}$$

Diagram illustrating the components of the fuzzy set definition:

- Conjunto fuzzy**: Points to the set  $A$ .
- Função de pertinência (MF)**: Points to the membership function  $\mu_A(x)$ .
- Universo ou Universo de discurso**: Points to the universe  $X$ .

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

Exemplo 1: um conjunto fuzzy representando o conceito “céu ensolarado”, de acordo com a cobertura de nuvens (universo de discurso):

- Pertinencia 1,0 a uma cobertura de nuvens de 0%
- Pertinencia 0,8 a uma cobertura de nuvens de 20%
- Pertinencia 0,4 a uma cobertura de 30%
- Pertinencia 0,0 a uma cobertura de 75% ou mais

Conjunto :

$$\{ (0 , 1.0), (20 , 0.8), (30 , 0.4), (75 , 0.0) \}$$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

Exemplo 2: Cidade desejável para se viver

$X = \{\text{São Francisco, Boston, Los Angeles}\}$  (discreto e não-ordenado)

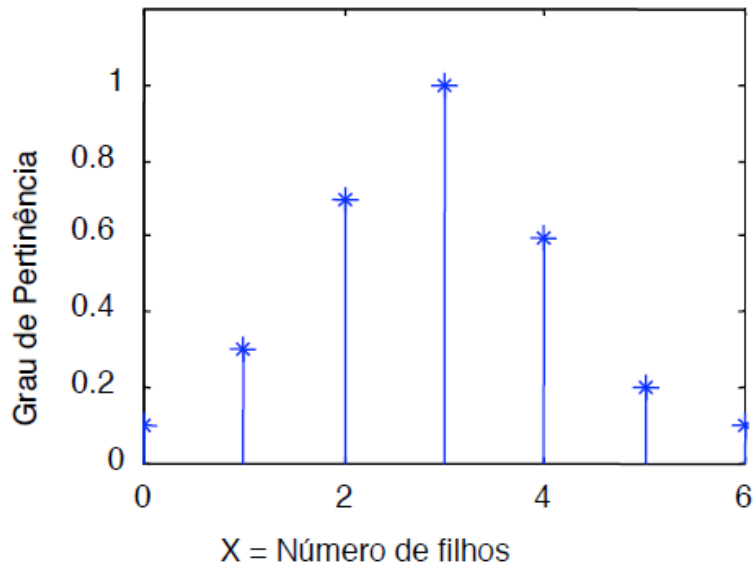
$$C = \{(\text{SF}, 0.9), (\text{Boston}, 0.8), (\text{LA}, 0.6)\}$$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Exemplo 3: Número de filhos usual

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (discreto e ordenado)

$$C = \{(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)\}$$

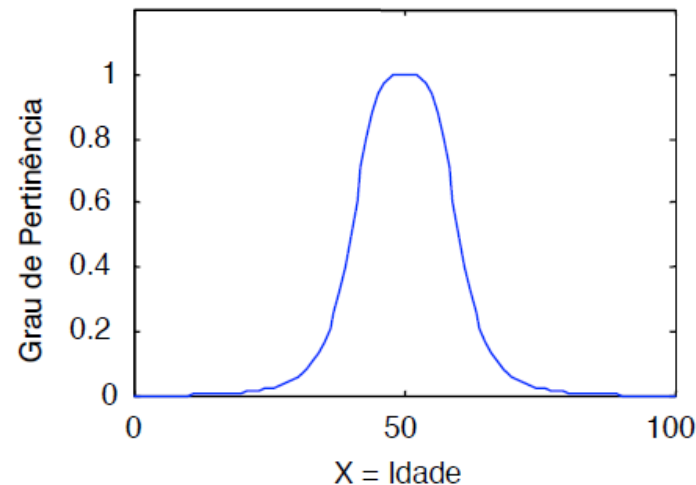


# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

Exemplo 4: Pessoas com idade em torno de 50 anos

$X$  = Conjunto de números reais positivos (contínuo)

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \text{ em } X\} \quad \mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

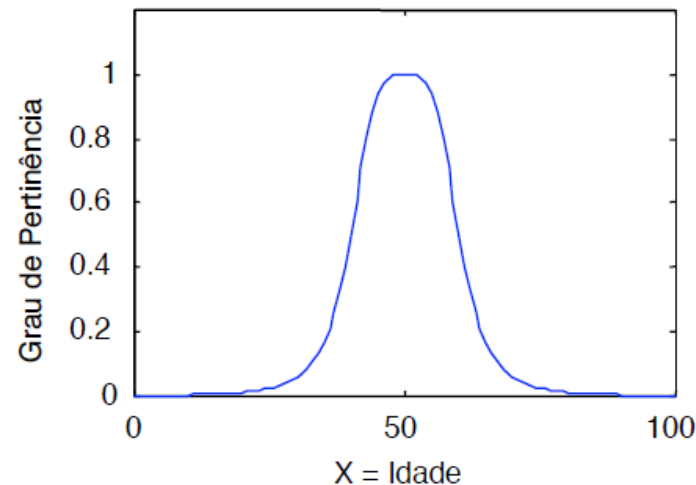


# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

Exemplo 4: Pessoas com idade em torno de 50 anos

$X$  = Conjunto de números reais positivos (contínuo)

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \text{ em } X\} \quad \mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$



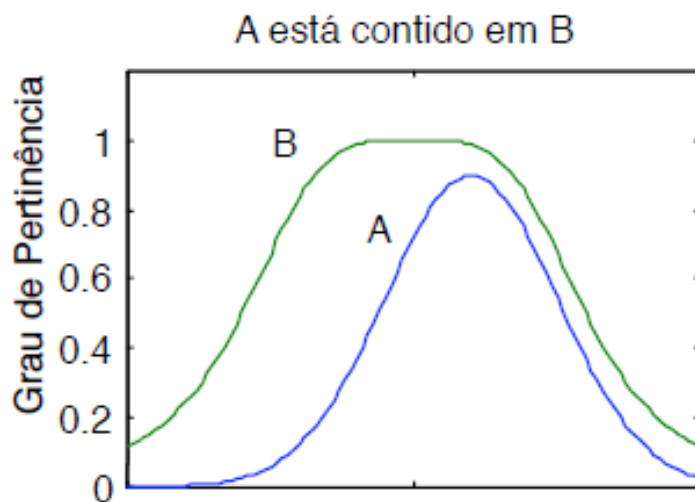
# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

- Subconjunto →  $A \subset B$ , se  $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$  para cada  $x \in X$
- Igualdade →  $A = B$ , se  $\mu_{A(x)} = \mu_{B(x)}$  para cada  $x \in X$
- Complemento →  $\neg A = X - A \rightarrow \mu_{\neg A(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$
- União →  $C = A \cup B \rightarrow \mu_{C(x)} = \max(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$   
→  $C = \mu_{A(x)} \vee \mu_{B(x)}$
- Interseção →  $C = A \wedge B \rightarrow \mu_{C(x)} = \min(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$   
→  $C = \mu_{A(x)} \wedge \mu_{B(x)}$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

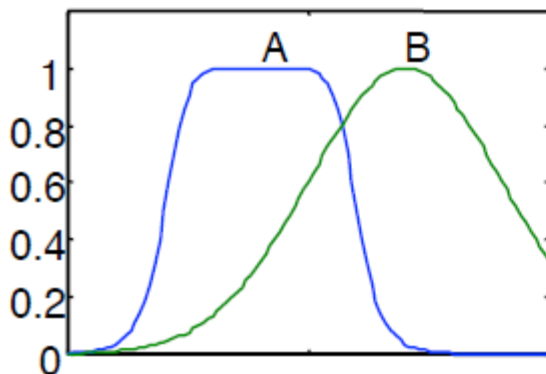




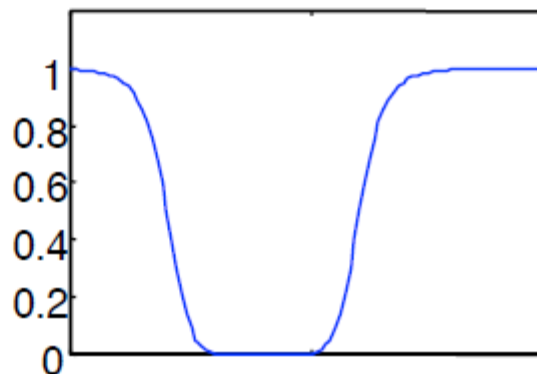
# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

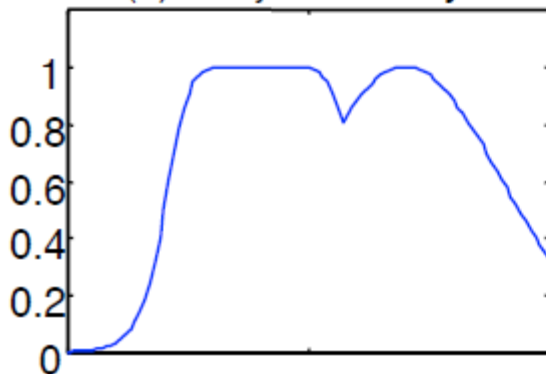
(a) Conjuntos Fuzzy A e B



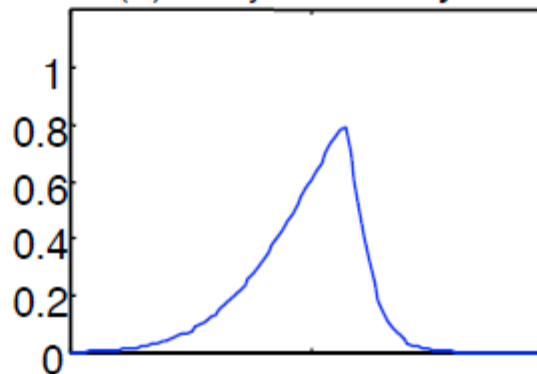
(b) Conjunto Fuzzy não "A"



(c) Conjunto Fuzzy "A ou B"



(d) Conjunto Fuzzy "A e B"



# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Propriedades

- Comutatividade
  - $A \vee B = B \vee A$      $A \wedge B = B \wedge A$
- Idempotência
  - $A \vee A = A$      $A \wedge A = A$
- Associatividade
  - $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$      $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$
- Distributividade
  - $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$      $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

## Exceção

$$\begin{array}{l} \neg A \wedge A \neq \phi \\ \neg A \vee A \neq X \end{array}$$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

- $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$

- $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$

- União

- $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$

- Interseção

- $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

- Exemplo (comprando uma casa)
  - Uma família com quatro integrantes deseja comprar uma casa.
  - Uma indicação de conforto se refere ao número de dormitórios.
  - Eles também desejam comprar uma casa grande.
  - Seja  $u = (1, 2, \dots, 10)$  o conjunto de casas descritas pelo número de quartos de dormir (ou seja, a casa  $i$  tem possui  $i$  dormitórios).

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

- o O conjunto fuzzy  $c$  que caracteriza conforto pode ser descrito como:

$$c = [0.2 \ 0.5 \ 0.8 \ 1 \ 0.7 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

- o Seja  $i$  o conjunto fuzzy caracterizando a noção de grande. O conjunto pode ser caracterizado por:

$$i = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Operações Elementares

- A interseção entre confortável e grande é dado por:  
$$c \cap i = [0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$
- Interpretando o conjunto fuzzy  $c \cap i$ , concluimos que uma casa com 5 dormitórios é a mais satisfatória, com grau 0,6. A segunda melhor solução é a casa com 4 dormitórios.
- A união de confortável e grande nos dá:  
$$c \cup i = [0.2 \ 0.5 \ 0.8 \ 1 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Modificadores

- Definição:  
Um modificador linguístico é um termo que modifica o significado de um conjunto fuzzy, ou seja, é uma operação sobre este conjunto que retrata a imprecisão presente na lógica fuzzy.
- Exemplos:
  - “pouco”, “mais ou menos”, “possivelmente”, “com certeza” são exemplos de modificadores.
  - “pouco quente”, “mais ou menos cheio”, “extremamente chato” são exemplos de conjuntos fuzzy aplicados de um modificador.

# Lógica Fuzzy – Conjuntos Fuzzy

## Modificadores

Muito:  $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^2$       Um pouco:  $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^{1,3}$

Extremamente:  $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^3$       Mais ou menos:  $\mu_A^M(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$

Exemplo: Dado o conjunto: jovem = [10, 20, 30, 40, 50]  
com graus de pertinência [1 , 0.6 , 0.1 , 0 , 0],  
respectivamente:

- Podemos derivar a função de pertinência para o conjunto “muito jovem” elevando todos os termos ao quadrado, o que produz:

$$\text{muito jovem} = \text{jovem}^2 = [1 \ 0.36 \ 0.01 \ 0 \ 0]$$



# Inferência Fuzzy

- Variáveis lingüísticas
  - Expressas em linguagem natural, porém tratadas de forma numérica
  - Natureza ambígua
  - Ex: temperatura, pressão, altura
- Termos lingüísticos
  - Caracterizam a variável lingüística
  - Ex: alto, baixo, médio
  - São definidos por conjuntos fuzzy

# Inferência Fuzzy

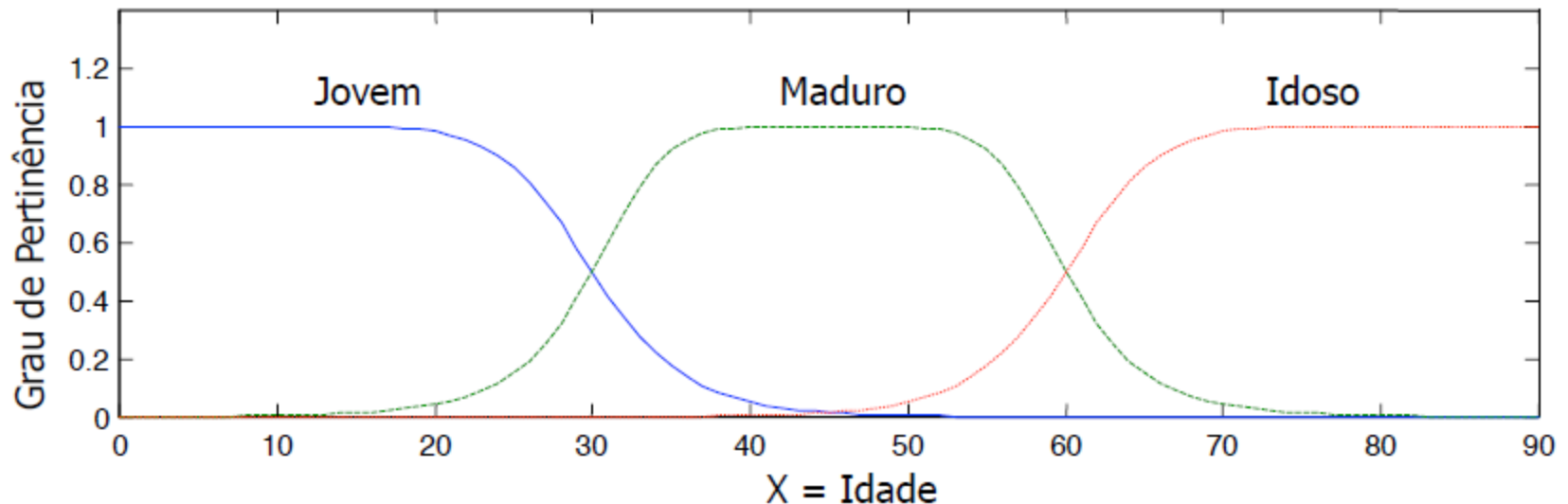
Exemplo:

**Variável Linguística:** Faixa etária

**Variável Base** (universo de discurso 0 a 90): Idade

**Termos linguísticos:** Jovem, Maduro, Idoso

**Conjuntos Fuzzy:** um para cada termo linguístico de acordo com as funções de pertencimento:



# Inferência Fuzzy

## Regras Fuzzy

- Regras no formato:

IF <antecedente> THEN <conseqüente>

- Variáveis linguísticas são utilizadas no antecedente e no conseqüente.

- Uso de conectivos AND, OR e NOT

- Exemplo

SE idade < 25  
ENTÃO taxa de contágio = 80%

Regra “CRISP”

SE faixa etária é Jovem  
ENTÃO chance de contágio é Alta

Regra “FUZZY”

# Inferência Fuzzy

## Regras Fuzzy

- Inferência (todas as variáveis linguísticas e as funções de pertinência devem estar definidas a priori):

1. Obter valor corrente da variável base associada ao antecedente.
2. Avaliar o antecedente: a partir do valor real da variável base obter grau de pertinência da variável linguística no antecedente.
3. Aplicar o resultado no consequente: verificar o valor da variável base do consequente, para o grau de pertinência encontrado no antecedente

# Inferência Fuzzy

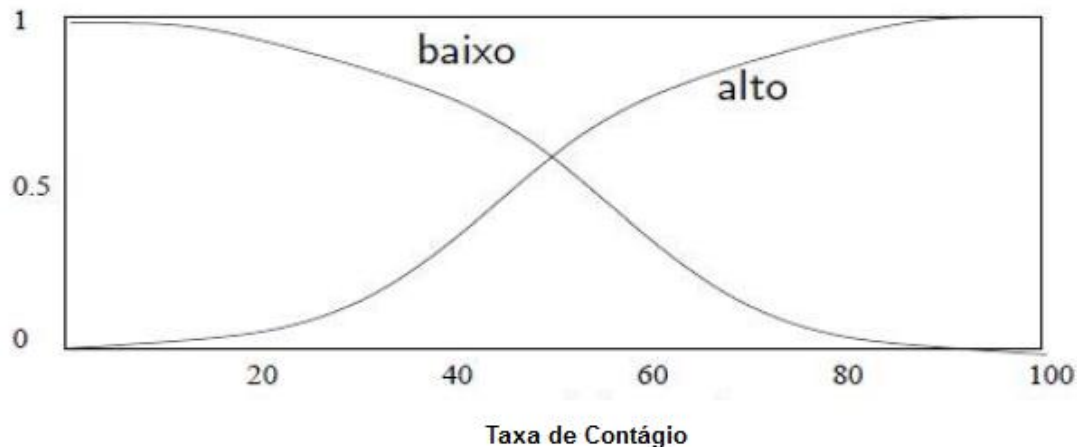
## Regras Fuzzy

-No exemplo:

-Suponha Idade = 27

- Variável linguística **Faixa etária**: Função de Pertinência dos termos **Jovem**, **Maduro** e **Idoso** definidas anteriormente.

- Variável linguística Contágio: termos linguísticos **baixo** e **alto**.



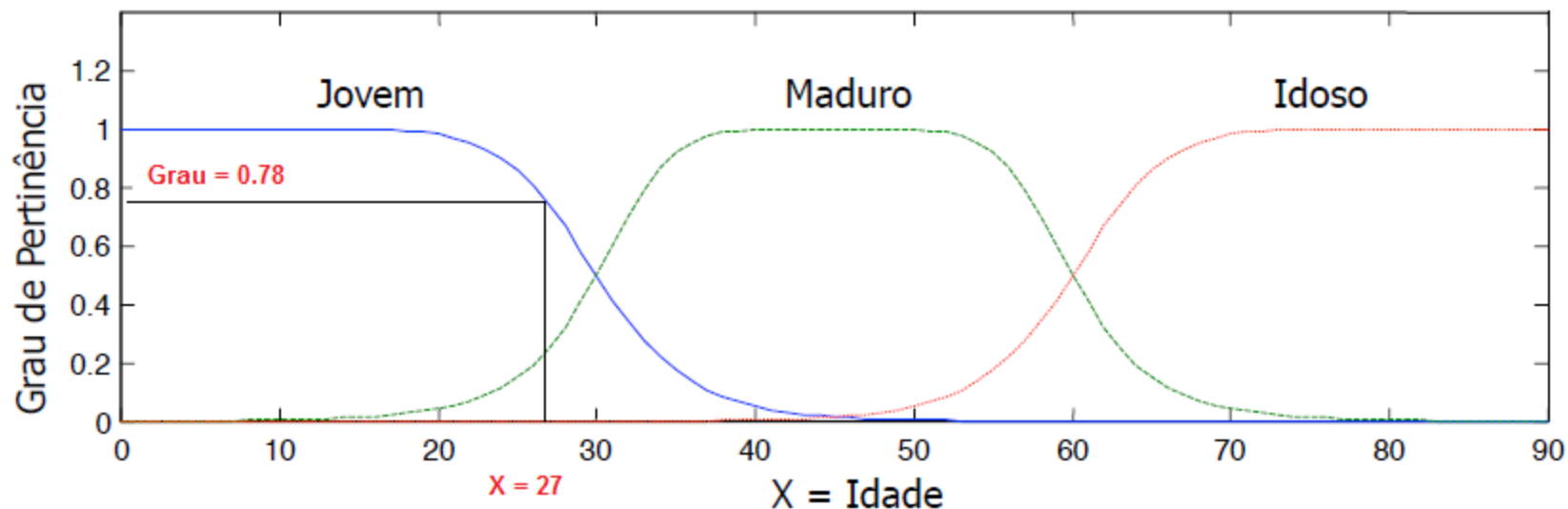
# Inferência Fuzzy

## Regras Fuzzy

Regra “FUZZY”

SE faixa etária é Jovem  
ENTÃO chance de contágio é Alta

Avaliando o antecedente:



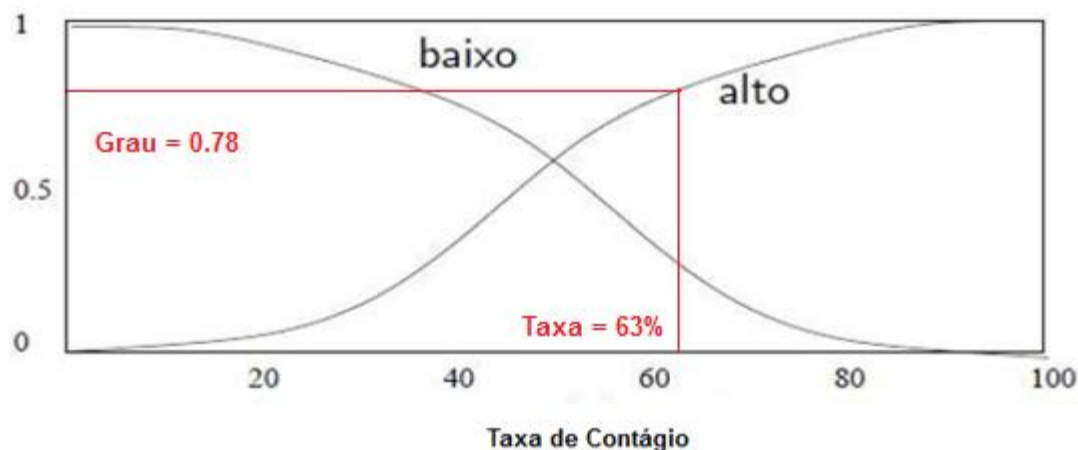
# Inferência Fuzzy

## Regras Fuzzy

Regra “FUZZY”

SE faixa etária é Jovem  
ENTÃO chance de contágio é Alta

Aplicando o resultado no consequente:



Portanto, considerando-se a aplicação dessa única regra, o resultado da inferência diz que para uma idade de 27 anos, a taxa de contágio é de 63%

# Inferência Fuzzy

## Regras Fuzzy

Observe que a regra “crisp ” não poderia ser aplicada nesse Exemplo, pois a idade é acima de 25 anos:

SE idade < 25  
ENTÃO taxa de contágio = 80%

E no caso de existirem vários antecedentes?

E no caso de existirem vários conseqüentes?

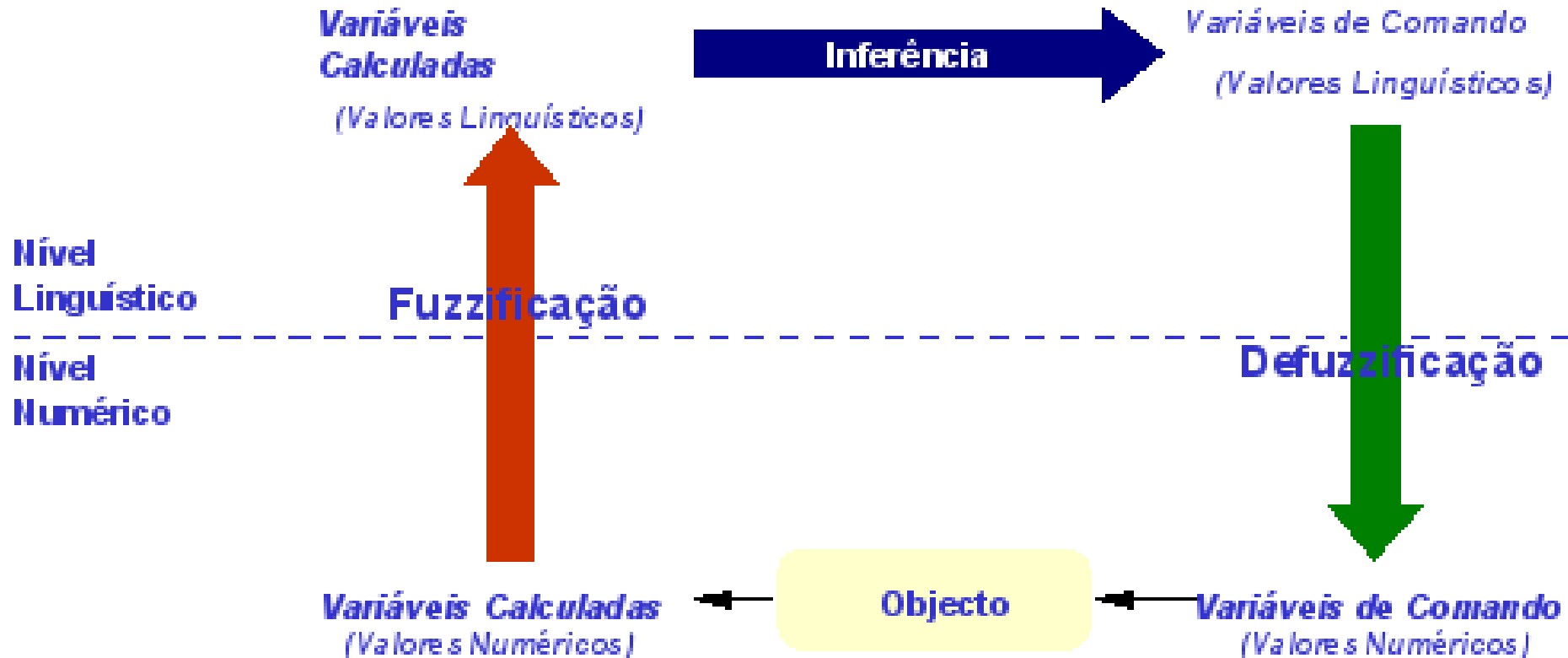
E no caso de existir uma base completa de regras disparadas em camadas?



# Sistemas Fuzzy

- Sistema de produção baseado em regras Fuzzy.
- Modelos de sistemas fuzzy mais investigados:
  - **Modelo Mandani**
    - Consequentes das regras com variáveis linguísticas;
    - Conjunto fuzzy na saída;
    - Modelo mais empregado.
  - **Modelo Takagi-Sugeno-Kang (TSK)**
    - Consequentes das regras com valores numéricos (uso de funções);
    - Constante ou função linear na saída
    - Bastante utilizado na área de controle de processos
- Nosso estudo será baseado no Modelo Mandani.

# Sistemas Fuzzy



# Sistemas Fuzzy

## Fuzzificação

- Etapa na qual as variáveis lingüísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência).
- Engloba:
  - Análise do Problema
  - Definição das Variáveis Linguísticas
  - Definição das Funções de pertinência
  - Criação das Regiões

# Sistemas Fuzzy

## Inferência

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente, para a obtenção das regiões fuzzy.
- Na elaboração das regras:

### **AGREGAÇÃO**

- Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente (bloco IF)

### **COMPOSIÇÃO**

- Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída (bloco THEN)

# Sistemas Fuzzy

## Inferência

### Operadores fuzzy

- $A \text{ and } B = \min(a, b)$
- $A \text{ or } B = \max(a, b)$
- $\text{not } A = 1 - A$

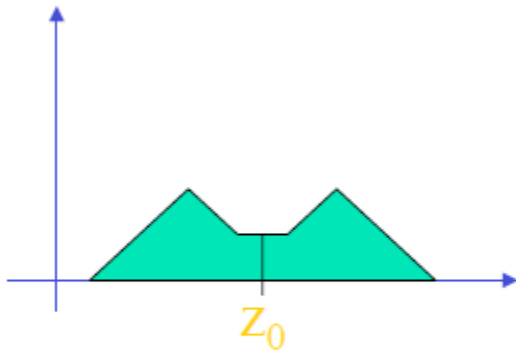
# Sistemas Fuzzy

## Defuzzificação

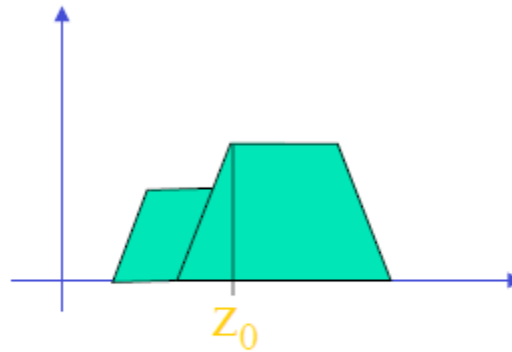
- Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema.
- Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões Fuzzy e o valor esperado.
- Nesta etapa diversas técnicas de defuzzificação podem ser usadas, entre elas:
  - Centróide
  - First-of-Máxima
  - Middle-of-Máxima
  - Critério Máximo

# Sistemas Fuzzy

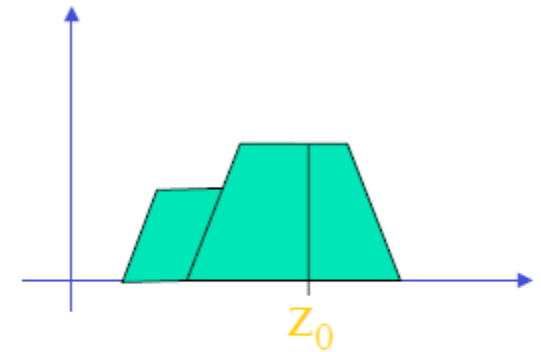
## Defuzzificação



Centróide



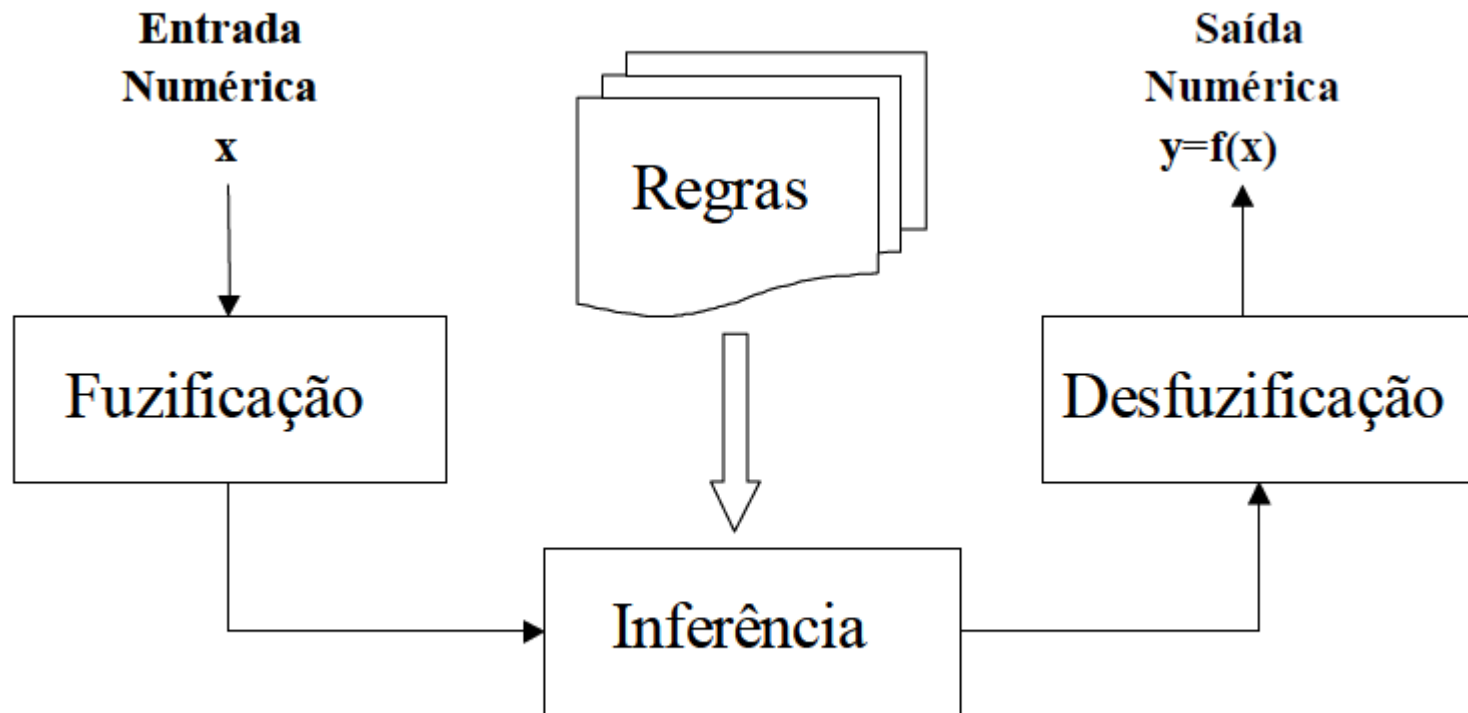
First-of-Maxima



Critério Máximo

# Sistemas Fuzzy

## Aplicação do sistema





# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

Sistema Fuzzy para definição do risco no desenvolvimento de um projeto.

# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

### Variáveis Base:

- Quantidade de pessoas (percentual)
- Montante de dinheiro (percentual)
- Percentual de Risco (saída)

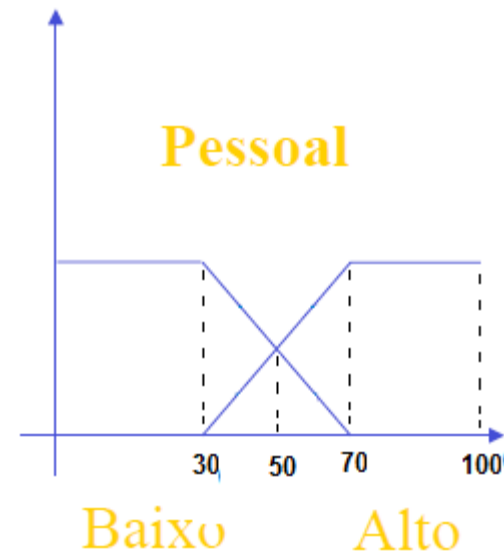
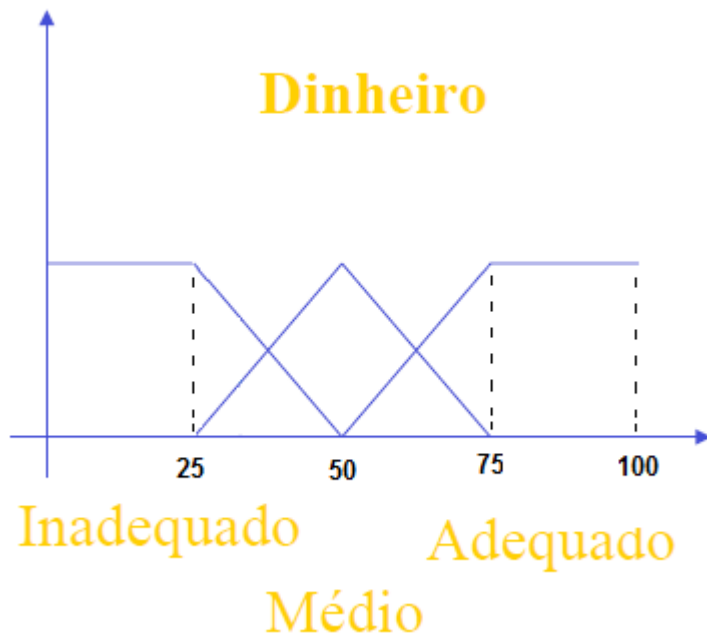
### Variáveis Linguísticas:

- Pessoal: Alto/Baixo
- Dinheiro: Inadequado/Médio/Adequado
- Risco: Pequeno/Normal/Alto

# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

### Passo 1: Fuzzyficação



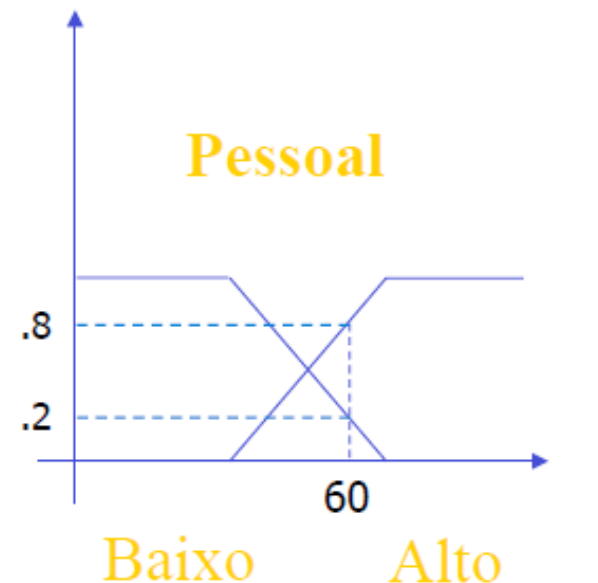
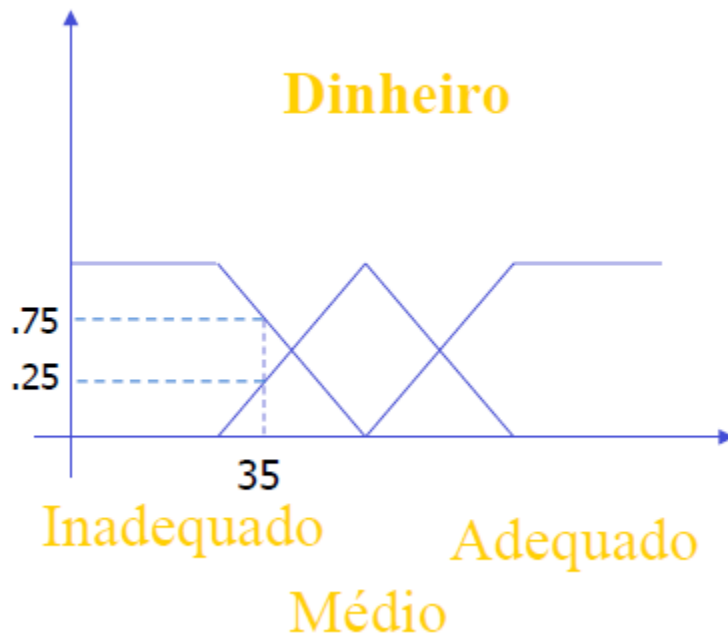
Problema: dinheiro = 35% e pessoal = 60%

# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

### Passo 1: Fuzzyficação

Problema: dinheiro = 35% e pessoal = 60%



# Sistemas Fuzzy

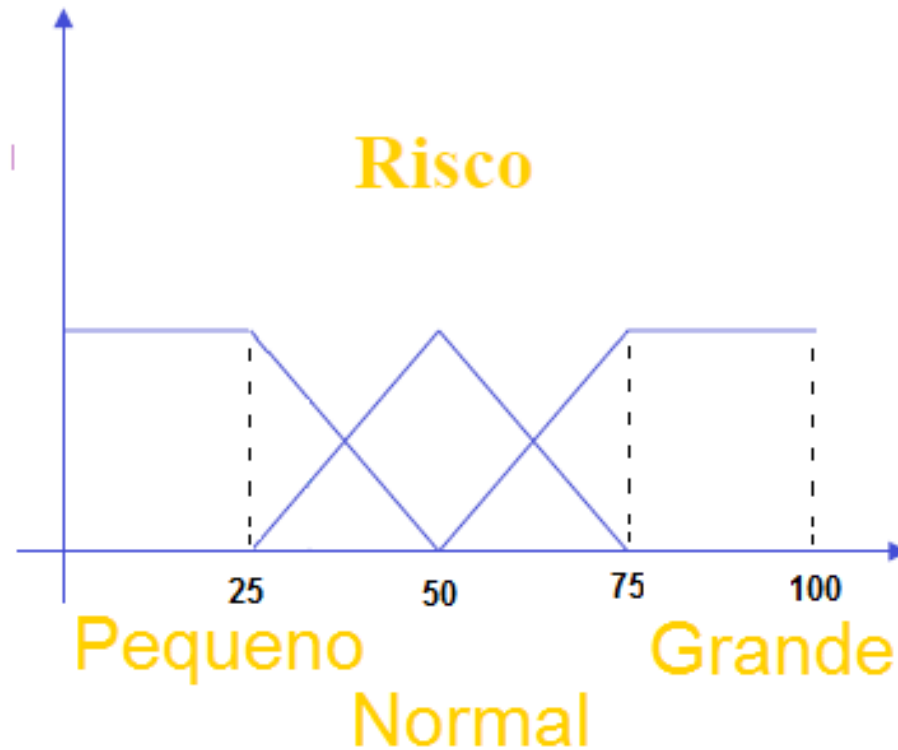
## Exemplo 1: Risco do Projeto

### Passo 2: Inferência

- Base de conhecimento
  1. Se dinheiro é adequado ou pessoal é baixo  
então risco é pequeno
  2. Se dinheiro é médio e pessoal é alto,  
então risco é normal
  3. Se dinheiro é inadequado,  
então risco é grande

# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto



# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

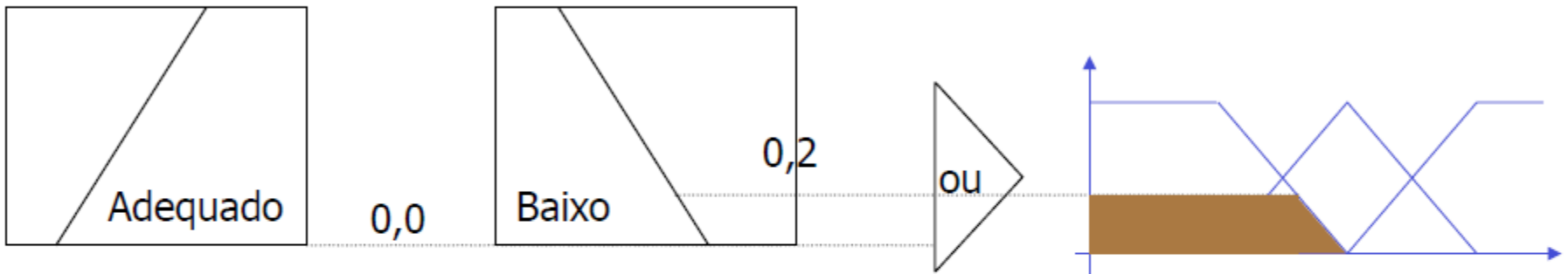
### Passo 2: Inferência

#### Avaliação das regras

Regra 1:

■ Ou  $\rightarrow$  máximo e  $\rightarrow$  mínimo

Risco



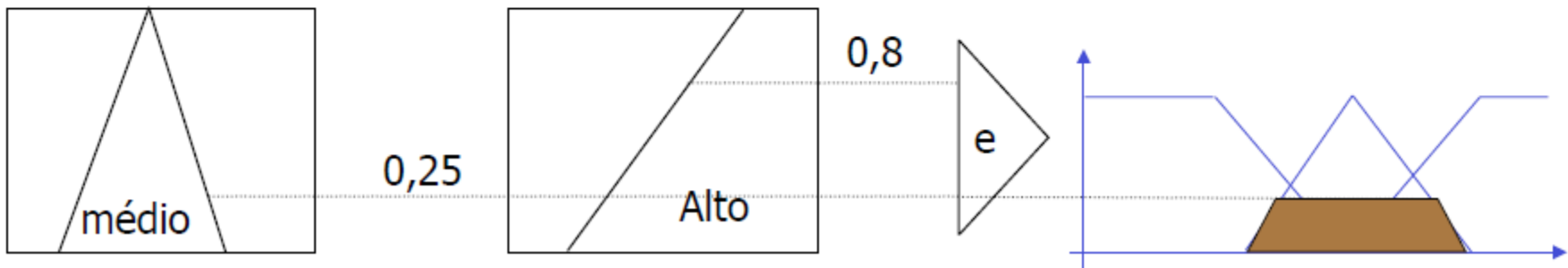
Regra 2:

0,25

0,8

e

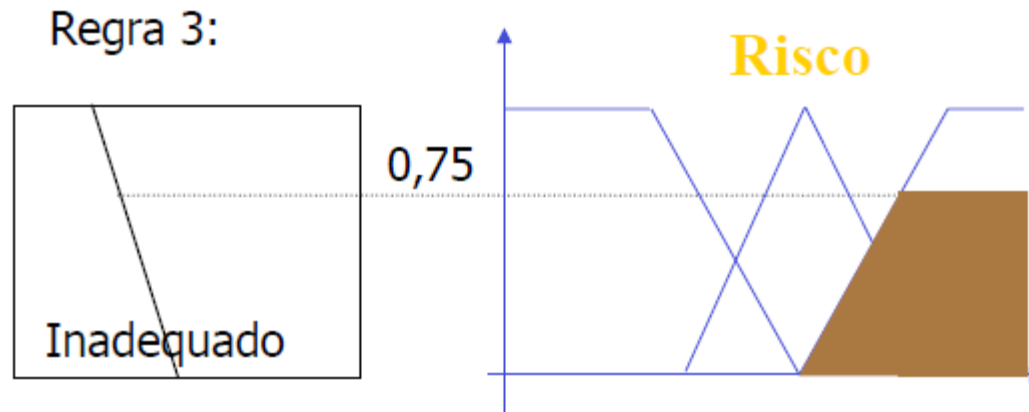
Risco



# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

### Passo 2: Inferência

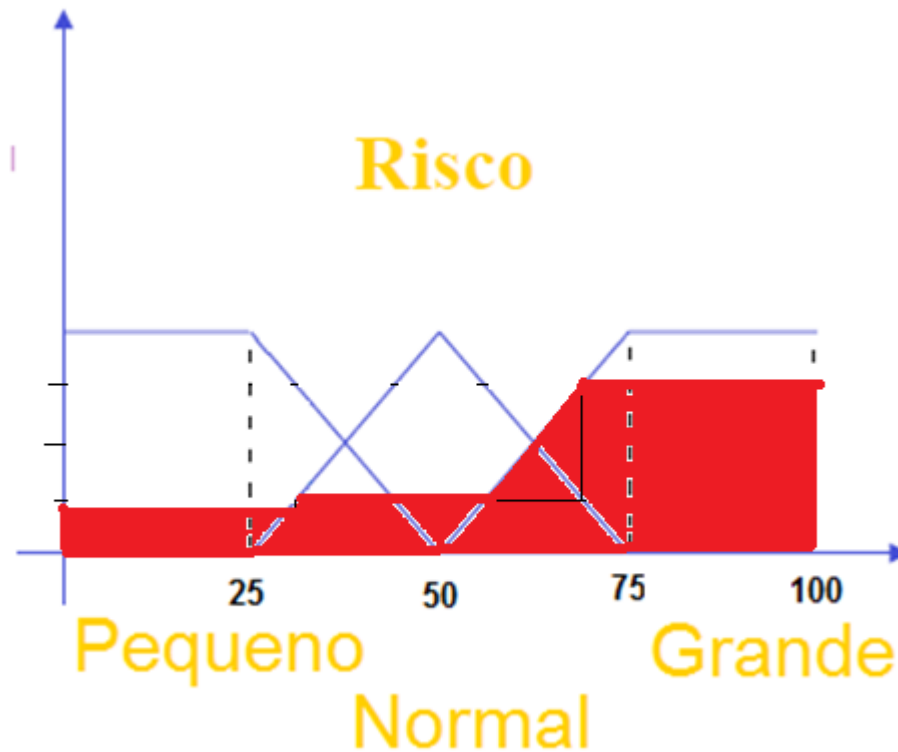




# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

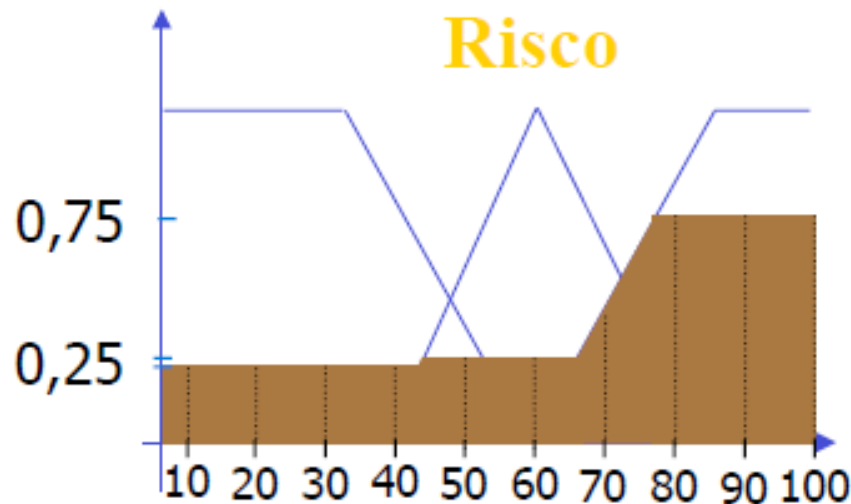
### Passo 2: Inferência



# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 1: Risco do Projeto

Passo 2: Defuzzificar



Método: centróide

$$C = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) * 0,2 + (50 + 60 + 70) * 0,25 + (80 + 90 + 100) * 0,75}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$

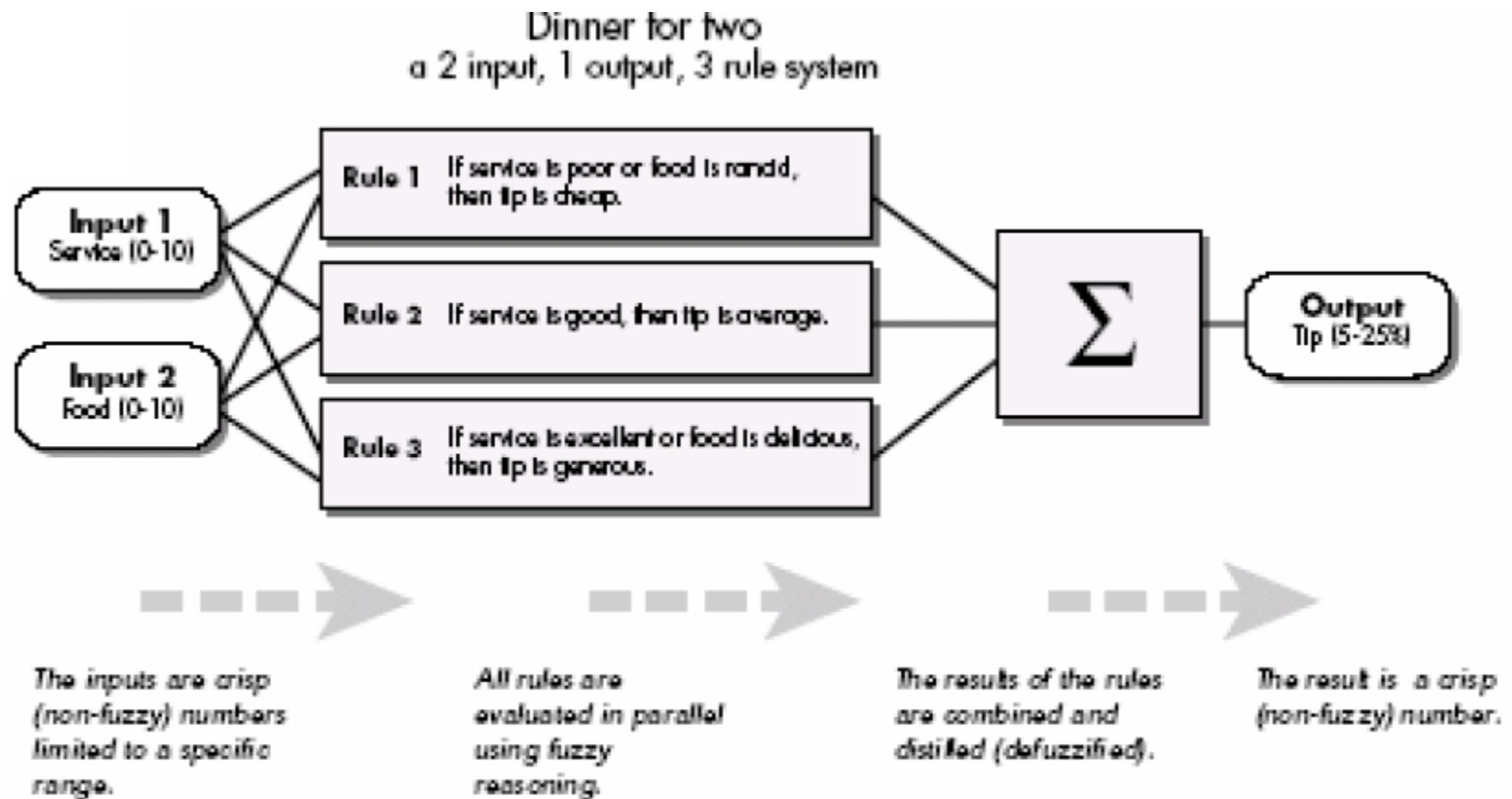
# Sistemas Fuzzy

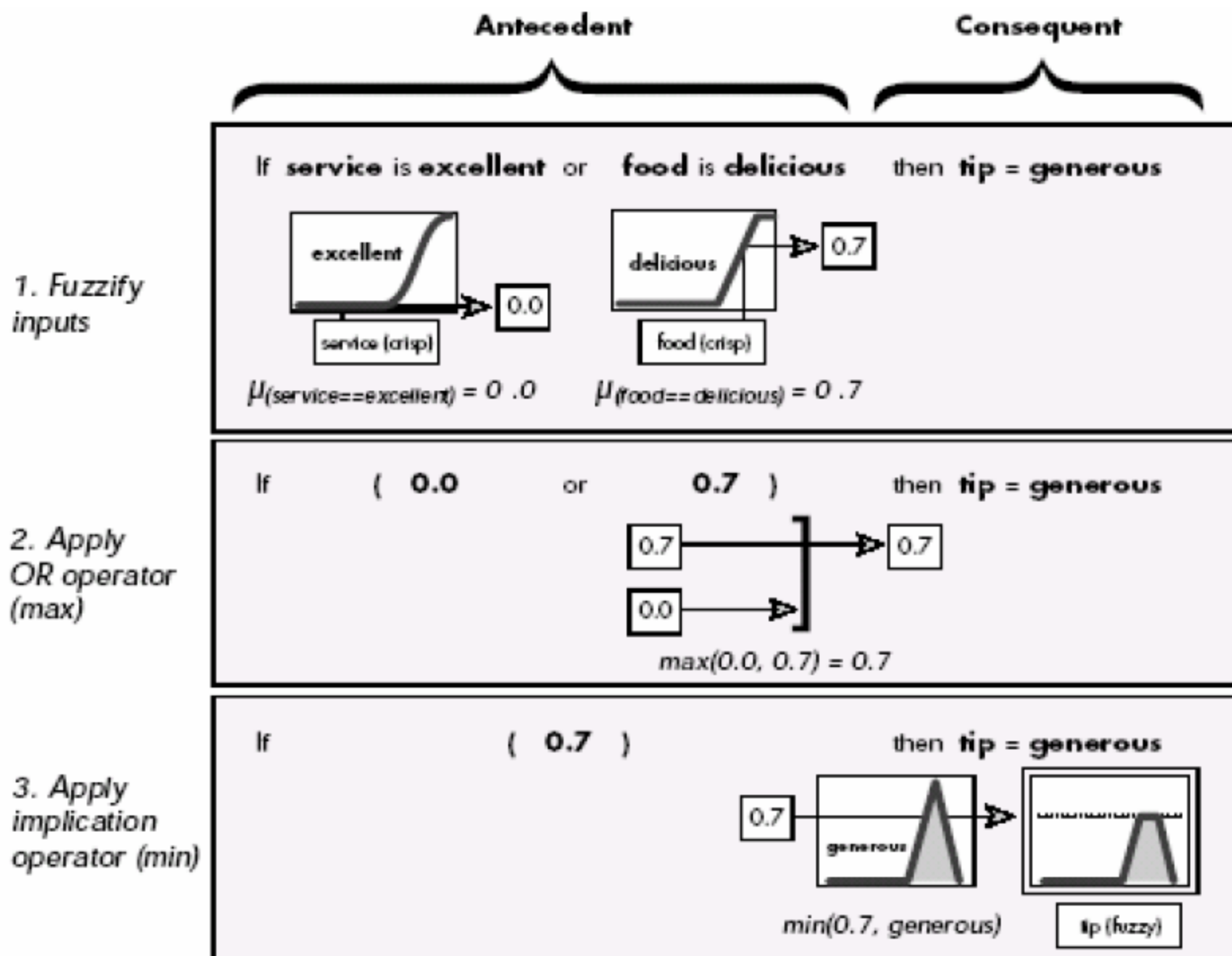
## Exemplo 2: Jantar para Dois

Sistema Fuzzy para definição da gorgeta adequada em um jantar.

# Sistemas Fuzzy

## Exemplo 2: Jantar para Dois



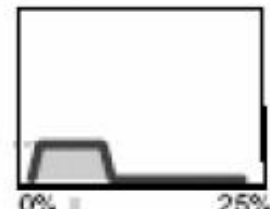
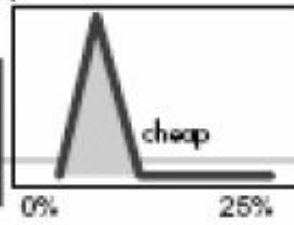
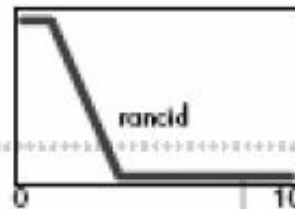


1. Fuzzify Inputs.

2. Apply fuzzy operation (OR = max).

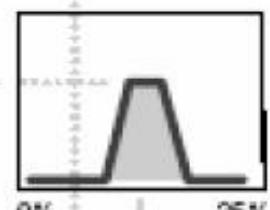
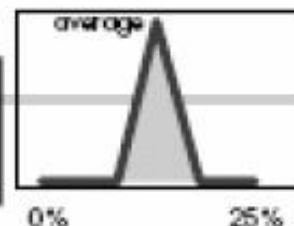
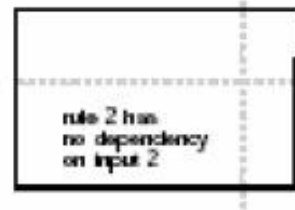
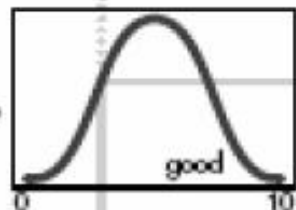
3. Apply implication method (min).

1.



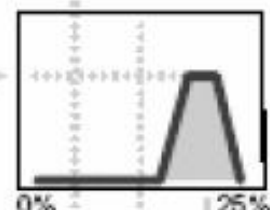
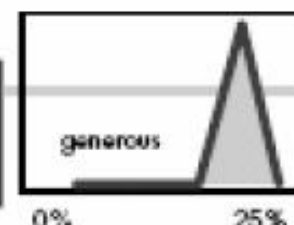
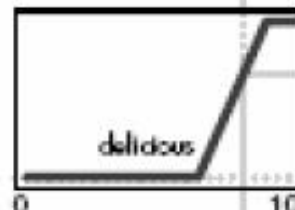
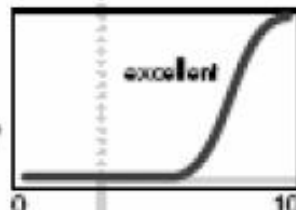
If service is poor or food is rancid then tip = cheap

2.



If service is good then tip = average

3.



If service is excellent or food is delicious then tip = generous

service = 3

input 1

food = 8

input 2

tip = 16.7%

output

4. Apply aggregation method (max).

5. Defuzzify (centroid).

## Softwares para Fuzzy

---

- Fuzzy Logic Toolbox® for Matlab®
- SciFLT for Scilab (*free*)
- UnFuzzy (*free*)
- FuzzyTech®
- XFuzzy (*free*, feito em Java)
- FuzzyClips (*free*, API para Java)

# Materiais didáticos utilizados na preparação desses slides:

Mario Benevides - UFRJ

Luis Carlos Dill Junges – UFSC

Ricardo Luis de Lima - UFBA

Aula de Sistemas Fuzzy – UFABC