

## DISCUSIÓN No 7

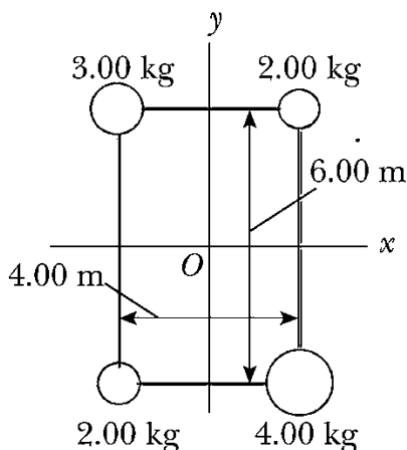
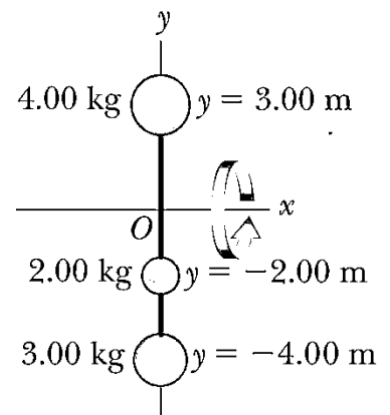
### UNIDAD V: CINEMATICA Y DINÁMICA DE ROTACIÓN

#### • Cinemática de Rotación

- La posición angular de una puerta giratoria se describe por medio de  $\theta = 8.0 + 5.0 t + 2.0 t^2$  donde  $\theta$  está en radianes y  $t$  en segundos. Determine la posición, la rapidez y aceleración angulares de la puerta en a) a  $t = 0$  y b) a  $t = 3.00$  s
- Un motor eléctrico que hace girar una rueda de molino a 100 rev/min se apaga. Después la rueda se mueve con aceleración angular negativa constante de  $2.00 \text{ rad/s}^2$  de magnitud. a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la rueda llega al reposo? b) ¿Cuántos radianes gira mientras va frenando?
- Un automóvil que va a 78.3 km/h tiene llantas de 77.0 cm de diámetro. a) ¿Cuál es la rapidez angular de las llantas alrededor del eje? b) Si se hace que se detenga uniformemente en 28.6 vueltas de las llantas (sin que derrape), ¿cuál será la aceleración angular de ellas? c) ¿Cuánto avanza durante el periodo de frenado?
- La tina de una lavadora entra en su ciclo de giro, partiendo del reposo y adquiriendo rapidez angular de manera constante durante 8.00 s cuando está girando a 5.00 rev/s. En este punto la persona que está lavando abre la puerta y un interruptor de seguridad apaga la lavadora. La tina se detiene suavemente hasta el reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones la tina gira mientras está en movimiento?

#### • Momento de Inercia de Partículas y Energía Cinética Rotacional

- Barras rígidas de masa despreciable que yacen a lo largo del eje  $y$  y conectan tres partículas como se muestra en la figura. El sistema da vueltas en torno al eje  $x$  con rapidez angular de  $2.00 \text{ rad/s}$ . Encuentre a) el momento de inercia en torno al eje  $x$  y la energía cinética rotacional total evaluada a partir de  $\frac{1}{2} I \omega^2$  y b) la rapidez tangencial de cada partícula y la energía cinética total evaluada a partir de  $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ .



- Las cuatro partículas de la figura, están conectadas mediante barras rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. El sistema da vueltas en el plano  $xy$  en torno al eje  $z$  con una rapidez angular de  $6.00 \text{ rad/s}$ . Calcule a) el momento de inercia del sistema en torno al eje  $z$  b) la energía cinética rotacional del sistema. c) Vuelva a calcular el momento de inercia del sistema, pero está vez girando en torno al eje  $X$ .

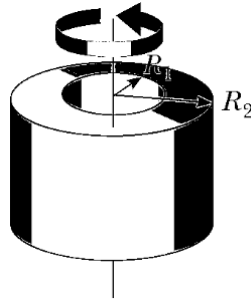
7. El volante de un motor entrega 400 J de energía, cuando gira a 660 rpm. ¿Qué momento de inercia tiene el volante?

• **Momentos de inercia de objetos extendidos**

8. Determine la expresión del momento de inercia de una barra delgada de longitud  $L$  y masa  $M$ , que gira alrededor de un eje de rotación que pasa perpendicular:

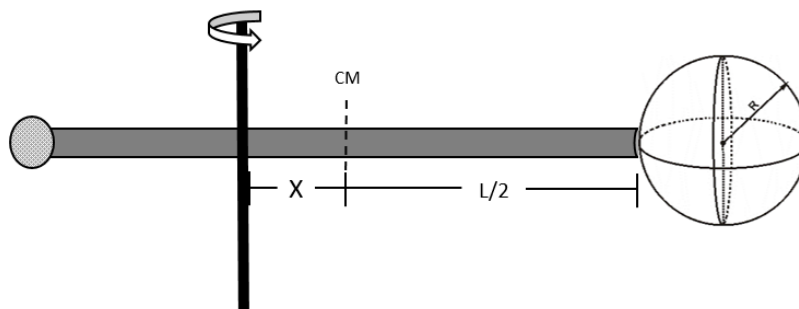
- Por su centro de masa
- En un extremo

9. Compruebe que el momento de inercia de un cilindro hueco de radio interno  $R_1$  y radio externo  $R_2$  y masa  $M$ , cuando su eje de rotación pasa sobre el centro de masa verticalmente como se muestra en la figura, es  $I_{CM} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

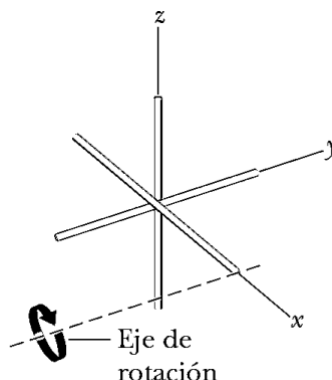


• **Teorema de ejes paralelos**

10. La estructura mostrada en la figura está formada por una varilla delgada uniforme de masa 3.0 kg y longitud 2.0 m, en la cual se ha colocado una partícula de masa 0.60 kg en un extremo, y en el otro se coloca una esfera sólida de 1.5 kg con un radio de 15 cm. Dicho sistema rota en torno a un eje que pasa perpendicular a la varilla a una distancia  $x = 30$  cm del centro, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia del sistema alrededor del eje de giro

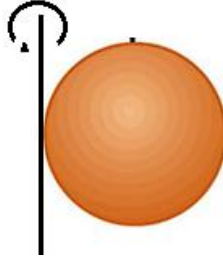


11. Tres delgadas barras idénticas, cada una de longitud  $L$  y masa  $m$ , se sueldan mutuamente perpendiculares, como se muestra en la figura. El ensamble da vueltas en torno a un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a la otra. Determine el momento de inercia de esta estructura.



12. Determine el momento de inercia de una puerta de 19 kg de 2.5 m de altura y 1.0 m de ancho que está articulada a lo largo de un lado. Ignore el espesor de la puerta.

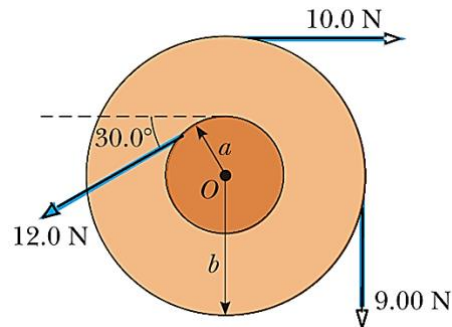
13. ¿Cuál es el momento de inercia de una esfera sólida de masa 5 kg y radio 10 cm si gira en torno a un eje que es tangente a su superficie como se muestra en la figura?



### • Momento de torsión

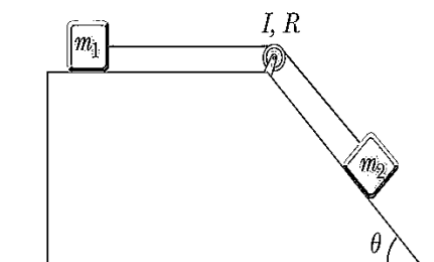
14. Una fuerza  $\mathbf{F} = 2.00\mathbf{i} + 3.00\mathbf{j}$  N se aplica a un objeto que esta articulado alrededor de un eje fijo alineado a lo largo del eje de coordenadas Z. Si la fuerza se aplica en el punto  $\mathbf{r} = (4.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j} + 0\mathbf{k})$  m, encuentre el vector momento de torsión  $\tau$ .

15. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura en torno al eje a través de O, Considerando  $a = 10.0$  cm y  $b = 25.0$  cm y que todas las fuerzas se aplican tangencialmente.

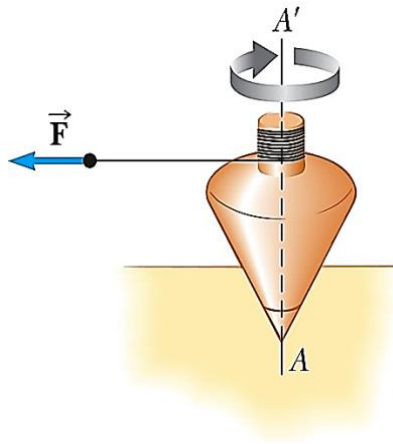


16. Una rueda de molino tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Parte del reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de 0.600 N.m. que el motor ejerce sobre la rueda. a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez operativa final de 1200 rev/min? b) ¿Cuántas revoluciones da mientras acelera?

17. Un bloque de masa  $m_1 = 2.00$  kg y un bloque de masa  $m_2 = 6.00$  kg están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en forma de disco sólido que tiene radio  $R = 0.250$  m y masa  $M = 10.0$  kg. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo  $\theta = 30.0^\circ$ , como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine a) la aceleración de los dos bloques y b) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.



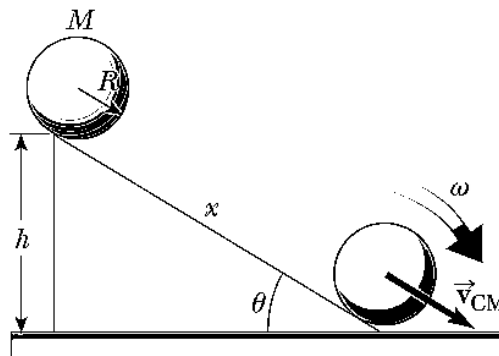
18. El trompo de la figura tiene un momento de inercia igual a  $4.00 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e inicialmente está en reposo. Es libre de dar vueltas en torno al eje estable  $AA'$ . Una cuerda, enrollada alrededor de una espiga a lo largo del eje del trompo, se jala en tal forma que mantiene una tensión constante de 5.57 N. Si la cuerda no se desliza mientras se desenrolla de la espiga, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de jalar 80.0 cm de cuerda de la espiga?



• **Rodamiento**

19. Un cilindro de 10.0 kg de masa rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. En cierto instante su centro de masa tiene una rapidez de 10.0 m/s. Determine a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía cinética rotacional de su centro de masa y c) su energía total.

20. Determine la aceleración del centro de masa de una esfera sólida uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, como se muestra en la figura.



21. Se pone a competir dos objetos, una esfera hueca (cascarón esférico) con masa  $M_1$  y radio  $R_1$  y un aro  $M_2$  y radio  $R_2$ , colocándolos sobre un plano inclinado de altura  $h$  como se muestra en la figura del ejercicio anterior. Si ambos se sueltan del reposo al mismo tiempo, calcule una expresión para la velocidad al llegar a nivel del suelo y en base a eso responda, ¿Quién llegará primero? ¿Depende de la relación entre las masas y radios?

22. Una lata metálica que contiene sopa de hongos condensada, tiene 215 g de masa, 10.8 cm de alto y 6.38 cm de diámetro. Se coloca en reposo sobre su lado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a  $25.0^\circ$  con la horizontal y luego se libera para rodar recto hacia abajo. Llega a la parte baja del plano después de 1.50 s. Si supone conservación de energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata.

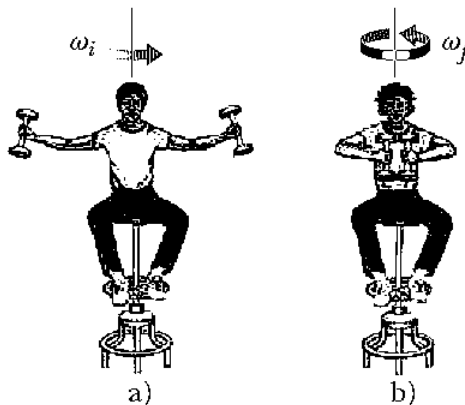
- **Cantidad de Movimiento Angular**

**23.** Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano xy con una velocidad de  $\mathbf{v} = (4.20\mathbf{i} - 3.60\mathbf{j})$  m/s. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula en torno al origen cuando su vector de posición es  $\mathbf{r} = (1.50\mathbf{i} + 2.20\mathbf{j})$  m.

**24.** Una esfera sólida uniforme con radio 0.500 m y masa de 15.0 kg gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno a un eje vertical a través de su centro. Encuentre su vector *momentum angular* cuando su rapidez angular es de 3.00 rad/s

**25.** Una partícula con 0.400 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla métrica de 0.100 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción a una rapidez angular de 4.00 rad/s. Calcule el *momentum angular* o *cantidad de movimiento angular* del sistema cuando la regla se articula en torno a un eje, a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50.0 cm, y b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.

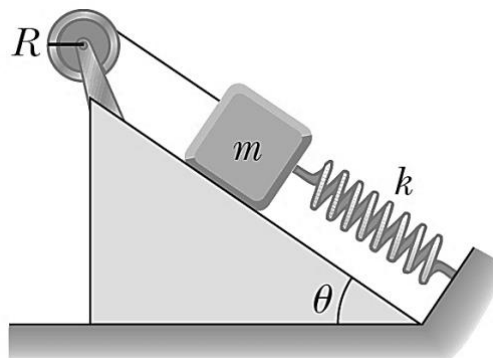
**26.** Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio libremente sosteniendo dos mancuernas, cada una de 3.00 kg de masa (ver fig. a). Cuando el estudiante extiende los brazos horizontalmente, las mancuernas están a 1.00 m de eje de rotación y el estudiante da vueltas con una rapidez angular de 0.750 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banco es 3.00 kg·m<sup>2</sup> y se supone constante. El estudiante jala las mancuernas horizontalmente hacia adentro a una posición 0.300 m del eje de rotación (Ver fig. b). a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. b) Encuentre la energía cinética del sistema rotatorio antes y después de jalar las mancuernas hacia adentro.



- **MISCELÁNEA**

**M1.** Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión. a) Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo. b) Encuentre la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel. c) Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

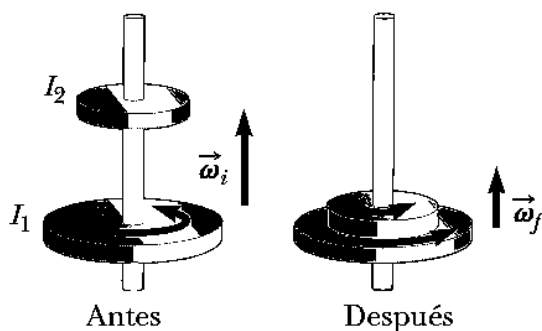
**M2.** El carrete que se muestra en la figura tiene radio  $R = 0.300$  m y momento de inercia  $I = 1.00 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Un extremo del bloque de masa  $m = 0.500$  kg se conecta a un resorte con constante de fuerza  $k = 50.0 \text{ N/m}$ , y el otro extremo se amarra a una cuerda enrollada alrededor del carrete. El eje del carrete y el plano inclinado no tienen fricción. El plano forma un ángulo de  $37.0^\circ$  con la horizontal. El carrete se enrolla contra las manecillas del reloj de modo que el resorte se estira una distancia  $d = 0.200$  m desde su posición no estirada y luego el carrete se libera desde el reposo. Encuentre la rapidez angular del carrete cuando el resorte nuevamente está en su posición normal (no estirada)



**M3.** Un anillo de  $140 \text{ kg}$  rueda a lo largo de un piso horizontal, de modo que su centro de masa tiene una velocidad de  $0.150 \text{ m/s}$ . ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre el anillo para detenerlo? (Inercia de un anillo alrededor del eje central  $I = MR^2$ )

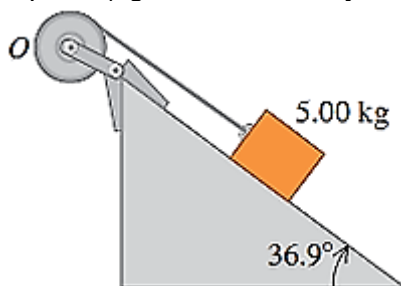
**M4.** Un lanzador de disco acelera un disco desde el reposo a una rapidez de  $25.0 \text{ m/s}$  al girarlo  $1.25$  rev antes de lanzarlo. Suponga que el disco se mueve en el arco de un círculo de  $1.00 \text{ m}$  de radio. a) Calcule la rapidez angular final del disco. b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, si supone que es constante. c) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que el disco acelere desde el reposo a  $25.0 \text{ m/s}$

**M5.** Un cilindro con momento de Inercia  $I_1$  da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular  $\omega_i$ . Un segundo cilindro con momento de inercia  $I_2$  y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro, como se muestra en la figura. Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular  $\omega_f$ . a) Calcule  $\omega_f$  b) Demuestre que la energía cinética del sistema disminuye en esta interacción y calcule la proporción de la energía rotacional final a la inicial.



**M6.** Considere un plano inclinado de  $16 \text{ m}$  de altura. Cuatro objetos de diferentes materiales tienen la misma masa de  $3.0 \text{ kg}$ : un aro circular, un disco, una esfera y una caja. Suponga que la fricción es insignificante para la caja, pero hay suficiente fricción para que los objetos rodantes rueden sin deslizarse. Al calcular las velocidades finales en cada caso, determine el orden en el cual llegan al punto más bajo del plano.

**M7.** Un bloque con masa  $m = 5.00 \text{ kg}$  baja deslizándose por una superficie inclinada  $36.9^\circ$  con respecto a la horizontal como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción cinética es  $0.25$ . Un cordón atado al bloque está enrollado en un volante con masa de  $25.0 \text{ kg}$  y con su eje fijo en  $O$ , y momento de inercia con respecto al eje de  $0.500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . El cordón tira sin resbalar a una distancia perpendicular de  $0.200 \text{ m}$  con respecto a ese eje. a) ¿Qué aceleración tiene el bloque? b) ¿Qué tensión hay en el cordón?



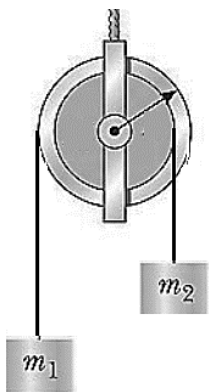
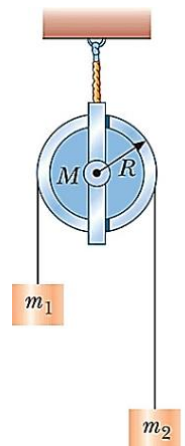
**M8.** Un peso de 50.0 N se une al extremo libre de una cuerda ligera enrollada alrededor de una polea de 0.250 m de radio y 3.00 kg de masa. La polea es un disco sólido, puede girar libremente en un plano vertical en torno del eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera 6.00 m sobre el piso. a) Determine la tensión en la cuerda, la aceleración de la masa y la rapidez a la cual el peso es golpea el piso. b) Determine la rapidez calculada en el inciso a) empleando el principio de conservación de la energía.

**M9.** ¿Alrededor de qué eje tendrá una esfera uniforme de madera, el mismo momento de inercia que tiene una esfera hueca de plomo con los mismos valores de masa y radio alrededor de un eje que pasa por su diámetro?

**M10.** Una rueda parte del reposo y da vueltas con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda. b) el ángulo en radianes que da vuelta en este intervalo de tiempo.

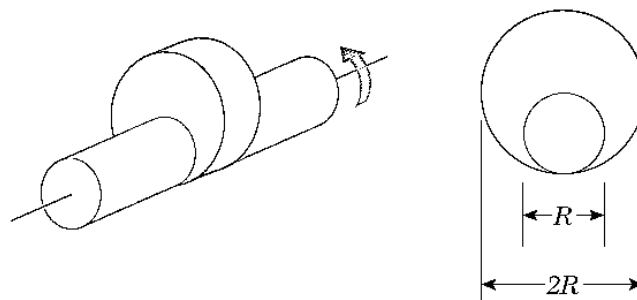
**M11.** Una rueda de 2.00 m de diámetro se encuentra en un plano vertical y da vueltas con una aceleración angular constante de 4.00 rad/s<sup>2</sup>. La rueda parte del reposo en  $t=0$  y el vector radio de cierto punto P sobre el borde forma un ángulo de 57.3° con la horizontal en este tiempo. En  $t=2.00$  s, encuentre a) la rapidez angular de la rueda, b) la rapidez tangencial y la aceleración total del punto P y c) La posición angular del punto P.

**M12.** Considere el sistema que se muestra en la figura con  $m_1=20.0$  kg,  $m_2=12.5$  kg,  $R=0.200$  m y la masa de la polea uniforme  $M= 5.00$  kg. El objeto  $m_2$  descansa sobre el suelo y el objeto  $m_1$  está 4.00 m sobre el suelo cuando se libera del reposo. El eje de la polea no tiene fricción. La cuerda es ligera, no se estira y no se desliza sobre la polea. Calcule el intervalo de tiempo requerido para que  $m_1$  golpee el suelo. ¿Cómo cambiaría su respuesta si no se tomara en cuenta la masa de la polea?



**M13.** Se colocan dos masas en una polea como muestra la figura. La masa  $m_1 = 2.0$  kg conectada al radio  $r_1 = 50$  cm de la polea y  $m_2 = 1.80$  kg conectada al radio  $r_2 = 20$  cm, la polea tiene un momento de inercia  $I = 1.70$  kg.m<sup>2</sup>. Encuentre a) La aceleración angular de la polea b) Las tensiones en ambas cuerdas

**M14.** La siguiente estructura se ha formado a partir de un cilindro sólido uniforme de radio  $R$  y masa  $M$  en el cuál se taladró un agujero fuera del centro, de radio  $R/2$ , paralelo al eje del cilindro y con centro en un punto a una distancia  $R/2$  desde el centro del cilindro. Después, se coloca otro cilindro sólido más largo, de igual masa  $M$  y se coloca justamente en el agujero realizado. Calcule el momento de inercia de la estructura, si el eje de rotación pasa justo en medio del cilindro largo como se muestra en la figura.



### **RESPUESTAS DISCUSIÓN 7**

- 1) a) 8.0 rad, 5.0 rad/s, 4.0 rad/s<sup>2</sup> b) 41.0 rad, 17.0 rad/s, 4.0 rad/s<sup>2</sup>
- 2) a) 5.24 s b) 27.4 rad
- 3) a) 56.3 rad/s b) -8.82 rad/s<sup>2</sup> c) 69.3 m
- 4) 50 rev
- 5) a) 92.0 kg.m<sup>2</sup>, 184 J b) 6.0 m/s, 4.0 m/s, 8.0 m/s, 184 J
- 6) a) 143 kg.m<sup>2</sup> b) 2570 J c) 99 kg.m<sup>2</sup>
- 7) 0.167 kg.m<sup>2</sup>
- 8) a) (1/12) ML<sup>2</sup> b) (1/3) ML<sup>2</sup>
- 10) 4.73 kg.m<sup>2</sup>
- 11) (11/12)ML<sup>2</sup>
- 12) 6.33 kg.m<sup>2</sup>
- 13) 0.07 kg.m<sup>2</sup>
- 14) 2.00 k
- 15) -3.55 N.m
- 16) a) 1.03 s b) 10.3 rev
- 17) a) 0.309 m/s<sup>2</sup> b) 7.67 N y 9.22 N
- 18) 149 rad/s
- 19) a) 500 J b) 250 J c) 750 J
- 20) (5/7) g sen  $\theta$
- 21) Esfera hueca:  $V_{CM} = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$  Aro:  $V_{CM} = \sqrt{gh}$ . La esfera llega primero.
- 22)  $1.21 \times 10^{-4}$  kg.m<sup>2</sup>
- 23) - 22 k kg.m<sup>2</sup>/s
- 24) 4.5 k kg.m<sup>2</sup>/s
- 25) a) 0.433 kg.m<sup>2</sup>/s b) 1.73 kg.m<sup>2</sup>/s
- 26) a) 1.91 rad/s b)  $K_o = 2.53$  J  $K_f = 6.46$  J

### **MISCELÁNEA**

- M1. 24.0 Nm b) 0.0356 rad/s<sup>2</sup> c) 1.07 m/s<sup>2</sup>
- M2. 1.74 rad/s
- M3. - 3.15 J
- M4. a) 25.0 rad/s b) 39.8 rad/s<sup>2</sup> c) 0.63 s
- M5. b)  $I_1 / (I_1 + I_2)$
- M6.  $V_c = 17.7$  m/s,  $V_e = 15.0$  m/s,  $V_d = 14.5$  m/s,  $V_a = 12.5$  m/s
- M7. a) 1.12 m/s<sup>2</sup> b) 14.0 N
- M8. a) T=11.4 N, a) 7.57 m/s<sup>2</sup>, V=9.5 m/s
- M9. Eje paralelo al diámetro y a 0.516R desde el centro.
- M10. a) 4.00 rad/s<sup>2</sup> b) 18.0 rad
- M11. a) 8.0 rad/s b) 8.0 m/s, 64.1 m/s<sup>2</sup> c) 9.0 rad
- M12. 1.95 s
- M13. a) 2.76 rad/s<sup>2</sup> b) 16.8 N y 18.6 N
- M14. (27/32)MR<sup>2</sup>