Tarea: Supremos e ínfimos

1. Calcula el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{r \in \mathbb{Q} : 2r^3 - 1 < 15\}$.

   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 + x \leq 12\}$.

2. Calcula el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

   (a) $C = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

   (b) $D = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

3. Determina el supremo, ínfimo, máximo y mínimos, si existen de cada uno de los conjuntos siguientes:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$.

   (b) $C = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, donde $a < b < c < d$

4. Determina el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, del conjunto:
$$B = \{x \in \mathbb{R} : 5|x| - |x^2| - 6 > 0\}.$$

5. Sean S y T dos conjuntos acotados tales que $T \subset S$. Demuestra que:
$$\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$$

6. (a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente, sean $\mu = \sup A$ y $\epsilon > 0$. Demuestra que existe un $x_0 \in A$ tal que $\mu - \epsilon < x_0 < \mu$.

   (b) Sea $B \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente, sean $\lambda = \inf B$ y $\epsilon > 0$. Demuestra que existe un $y_0 \in B$ tal que $\lambda < y_0 < \lambda + \epsilon$.

7. Sean $S \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado y $a \in \mathbb{R}$. Definimos

$$a + S = \{a + x : x \in S\} \quad \text{y} \quad a \cdot S = \{a \cdot x : x \in S\}$$

   (a) Demuestra que $\sup(a+S) = a + \sup S$ y que $\inf(a+S) = a + \inf S$

   (b) Demuestra que, si $a > 0$, entonces $\sup(a \cdot S) = a \cdot \sup S$ y que $\inf(a \cdot S) = a \cdot \inf S$. Qué ocurre si $a < 0$?.

8. Dados dos conjuntos $S, T \subset \mathbb{R}$, definimos los conjuntos:

$$S + T = \{x + y : x \in S, y \in T\} \quad \text{y} \quad S \cdot T = \{x \cdot y : x \in S, y \in T\}$$

   Supongamos ahora que S y T son conjuntos acotados:

   (a) Demuestra que $\sup(T + S) = \sup T + \sup S$ y que $\inf(T + S) = \inf T + \inf S$

   (b) Demuestra que si $T, S \subset \mathbb{R}^+$, entonces $\sup(T \cdot S) = \sup T \cdot \sup S$ y $\inf(T \cdot S) = \inf T \cdot \inf S$

9. Sean A yB subconjuntos no vacíos de números reales y consideremos el conjunto $C = \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Probar que C está acotado superiormente si, y sólo si, A está acotado superiormente y B está acotado inferiormente, en cuyo caso se tiene: $\sup C = \sup A - \inf B$.

10. Demuestra las siguientes igualdades:

   (a) $\sup \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1,$

   (b) $\inf \left\{ \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$