Curso de cálculo.
Ejercicios de inducción

Llorenç Valverde

25 de maig de 2020

Valor absoluto

Definimos *valor absoluto* de un número real de la forma siguiente:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Demuestra que el valor absoluto satisface la desigualdad triangular:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Valor absoluto

Demuestra que el valor absoluto verifica las propiedades siguientes:

- $-x \leq |x|$ y $x \leq |x|$.
- $|x| \leq y$ si, y sólo sí, $-x \leq y$ i $x \leq y$, sí, y sólo sí, $-y \leq x \leq y$.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Si $y \neq 0$, entonces $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- $|x| = \sqrt{x^2}$

Valor absoluto

- Define la función $\max(x, y)$, de la forma siguiente:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

  Demuestra que, efectivamente, esta función da el máximo de los dos números.

- Crea una definición para la función $\min(x, y)$, y demuestra que, efectivamente, da el mínimo de los dos números.

Inducción

Principio d'inducción (PIN). Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

- $1 \in S$
- Si para todo $k > 1$, si $k \in S$, entonces $k + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$

Usamos este principio per a demostrar la validez para todo $\mathbb{N}$ de enunciados que dependen de un número natural n:

Inducción: Ejercicios

Demuestra que

$$n^2 \leq 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N},\ \texttt{tal que}\ n \geq 7$$

Para $n = 7$, tenemos $n^2 = 7^2 = 49 < 64 = 2^6 = 2^{n-1}$ Ahora, si $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 7$, tendremos que

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&\leq k^2 + 2k + k, && \texttt{ya que}\ k \geq 7 \\
&= k^2 + 3k \\
&\leq k^2 + k \cdot k, && \texttt{ya que}\ k \geq 7 \\
&= 2k^2 \\
&\leq 2 \cdot 2^{k-1}, && \texttt{hipótesis d'inducción} \\
&= 2^k \\
&= 2^{(k+1)-1}
\end{aligned}$$

Inducción: Ejercicios (II)

Demuestra las siguientes fórmulas:

1. $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. $2^n \leq (k+1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Si $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Inducción: Ejercicios(III)

Demuestra las siguientes igualdades:

4. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
6. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
8. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k!) = (n+1)! - 1$
9. $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = 2 - \dfrac{n}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

Desigualdad de Bernoulli

Sea $a > 0$, demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Esta es la llamada desigualdad de Bernoulli.
La demostraremos por inducción:
Está claro que para $n = 1$ es $1 + a \geq 1 + a$.
Supongamos que se verifica hasta $n - 1$, veamos que también es cierta para n:

$$\begin{array}{rcll} (1+a)^n & = & (1+a)(1+a)^{n-1} & \\ & \geq & (1+a)(1+(n-1)a) & \texttt{hip. de inducción} \\ & = & 1+(n-1)a+a+(n-1)a^2 & \\ & \geq & 1+na, & \texttt{ya que } (n-1)a^2 \geq 0 \end{array}$$

Inducción

Sean $x_1 = 3$ **i** $x_2 = 5$**. Para** $n \geq 3$**, sea**

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$$

Demuestra que $x_n = 2^n + 1$**, para todo** $n \in \mathbb{N}$

- Para $n = 1$ es $2^n + 1 = 2^1 + 1 = 3 = x_1$ y para $n = 2$, es $2^2 + 1 = 5 = x_2$
- Hipótesis de inducción: supongamos que el enunciado es cierto par x_{k-1} y x_k, para algún $k \geq 2$, es decir, que

$$x_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \quad x_k = 2^k + 1$$

Inducción

- Consideremos ahora $k+1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_{(k+1)-1} - 2x_{(k+1)-2}, && \texttt{por definición} \\ &= 3x_k - 2x_{k-1} \\ &= 3(2^k+1) - 2(2^{k-1}+1), && \texttt{hipótesis d'inducción} \\ &= 3\cdot 2^k - 2^k + 1 \\ &= 2\cdot 2^k + 1 \\ &= 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

La fórmula del binomio de Newton

Demuestra por inducción la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

donde $\binom{n}{k}$ indica el número combinatorio definido de la forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

La fórmula del binomio de Newton

Para la demostración de la fórmula del binomio es conveniente recordar la siguientes propiedades de los números combinatorios:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

La demostración de estas propiedades tan sólo requiere manipulaciones algebraicas elementales.

La fórmula del binomio de Newton

La igualdad se cumple para $n = 1$, puesto que, en este caso, ambos miembros son iguales a $a + b$.
Supongamos ahora que la igualdad es cierta hasta $n - 1$, es decir que

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k$$

$$= \binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b + \binom{n-2}{2} a^{n-3} b^2 + \cdots$$

$$+ \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k + \cdots + \binom{n-1}{n-2} a b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1} b^{n-1},$$

veamos que también es cierta para n

La fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^{n-1} = a(a+b)^{n-1} + b(a+b)^{n-1}$$

Ahora utilizamos la hipótesis de inducción para calcular $a(a+b)^{n-1}$:

$$a(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0}a^n + \binom{n-1}{1}a^{n-1}b + \binom{n-2}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$+\binom{n-1}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n-1}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n-1}{n-1}ab^{n-1},$$

Binomio de Newton

Hacemos lo mismo con $b(a+b)^{n-1}$:

$$b(a+b)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^{n-1} b + \binom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 + \binom{n-2}{2} a^{n-3} b^3 + \cdots$$

$$+ \binom{n-1}{k-1} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n-1}{n-2} ab^{n-1} + \binom{n-1}{n-1} b^n,$$

La fórmula del binomio de Newton

Al sumar miembro a miembro las dos igualdades anteriores, agrupando los términos en $a^{n-k}b^k$ y teniendo en cuenta las propiedades de los números combinatorios, resulta, por una parte, que

$$\binom{n-1}{0}a^n = \binom{n}{0}a_n \quad \text{y} \quad \binom{n-1}{n-1}b^n = \binom{n}{n}b^n$$

Por otra parte, dado que

$$\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) a^{n-k}b^k = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Por lo tanto, queda demostrada la fórmula del binomio de Newton.