Tarea: Tipos de aplicaciones

1. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación $f(x) = 2x$ en los casos siguientes:

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

   (b) $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, donde $2\mathbb{Z}$ indica el conjunto de los números enteros pares.

   (c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

2. Sea $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación $h(x) = |x|$, en los casos siguientes:

   (a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

3. Determina el carácter (inyectiva, exhaustiva, biyectiva) de la aplicación

$$f(x) = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{si } x \geq 3, \\ |3x|, & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

4. Sea $p \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_p(n)$ indica el resto resultante al dividir n entre p: $n = pq + r$. Demuestra que la aplicación

$$g_p : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \dots p - 1\}$$

   es exhaustiva. ¿Es inyectiva?.

5. Sean a, b dos números reales, con $a < b$. Demuestra que la aplicación h de $[0, 1]$ en $[a, b]$ definida por $h(x) = a + t(b - a)$ es una biyección. Calcula la aplicación inversa h^{-1}.

6. Sean a, b, c, d números reales tales que $a < b$ y $c < d$. Demuestra que existe una aplicación biyectiva entre los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$. Determina explícitamente una biyección entre ellos. (Indicación: Usa el ejercicio 5).

7. Demuestra que la aplicación $h : (0, 1) \to (0, +\infty)$ definida por

$$h(x) = \frac{1}{1-x}$$

es biyectiva. (Recuerda que $(0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).

8. Sea A el conjunto de los números racionales del intervalo unidad, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y sea B, el conjunto de los números irracionales de este mismo intervalo, $B = [0, 1] \setminus A$.

   (a) Si $A' = A \setminus \{0, 1\}$, demuestra que A y A' tienen el mismo cardinal. (Indicación: el conjunto de números racionales es numerable).

   (b) Sea $g : A' \to A$ una biyección. Demuestra que la aplicación h de $(0, 1)$ en $[0, 1]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in A', \\ x, & \text{si } x \notin A' \end{cases}$$

   es una biyección y, por lo tanto, los intervalos $(0, 1)$ y $[1, 0]$ tienen el mismo cardinal.

9. Demuestra que los intervalos $(0, 1]$ y $[0, 1)$ tienen el mismo cardinal.