Tema 4 - Ejercicio 6

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 3

Calcula los valores de los siguientes determinantes de orden n

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Solución

Denotemos por

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Así

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a \\ -a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^2 - a^2 = a^4 + a^2 + 1$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & -a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)\cdot \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a \\ -a & 1+a^2 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ -a & 1+a^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+a^2)\cdot D_2 + a\cdot(-a)\cdot(1+a^2) = (1+a^2)\cdot\big(D_2 - a^2\big) \\ &= (1+a^2)\cdot(a^4+a^2+1-a^2) = (1+a^2)\cdot(a^4+1) = a^6+a^4+a^2+1. \end{aligned}$$

No es necesario pero calculamos D_4 de forma similar

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & -a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)\cdot \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & -a & 1+a^2 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a \\ 0 & -a & (1+a^2) \end{vmatrix} \\ &= (1+a^2)\cdot D_3 - a\cdot(-a)\cdot \begin{vmatrix} 1+a^2 & -a \\ -a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)\cdot D_3 - a^2\cdot D_2. \end{aligned}$$

En general podemos calcular D_{n+1} a partir de D_n y D_{n-1}, vamos a comprobarlo haciendo

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= \overbrace{\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}}^{\text{orden } n+1 \text{ desarrollamos por la primera columna}} \\
&= (1+a^2)\cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}}^{\text{orden } n \text{ es } D_n} + a\cdot \overbrace{\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & \\ -a & 1+a^2 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1+a^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 1+a^2 \end{vmatrix}}^{\text{orden } n \text{ desarrollamos por la primera fila}} \\
&= (1+a^2)\cdot D_n + a\cdot -aD_{n-1} \\
&= (1+a^2)\cdot D_n - a^2 D_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Hemos demostrado que

$$D_{n+1} = (1+a^2)\cdot D_n - a^2 \cdot D_{n-1}$$

además sabemos que $D_2 = a^4 + a^2 + 1$ y que $D_3 = a^6 + a^4 + a^2 + 1$.

Ahora utilizando el principio de inducción completa y suponiendo que $D_n = a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdot a^2 + 1$ y que $D_{n-1} = a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdot a^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
D_{n+1} &= (1+a^2)\cdot D_n - a^2\cdot D_{n-1} \\
&= (1+a^2)\cdot(a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots + a^2 + 1) - a^2\cdot(a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots + a^2 + 1) \\
&= (1+a^2)\cdot(a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots + a^2 + 1) - (a^{2(n+1)} + a^{2n} + \cdots + a^4 + a^2) \\
&= a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots + a^2 + 1 + \\
&\ a^2\cdot(a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots + a^2 + 1) - (a^{2(n+1)} + a^{2n} + \cdots + a^4 + a^2) \\
&= a^{2(n+1)} + a^{2n} + a^{2(n-1)} + a^{2(n-2)} + \cdots a^2 + 1
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra, por inducción el valor del determinante para cualquier orden n.