Tarea

Espacios Vectoriales

Curso Álgebra Lineal

Pregunta 1

Dada la base

$$\{(1,2,0,0),(-1,0,1,1),(0,0,-2,1),(-1,0,-1,0)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ y dado $u=(-3,2,1,-2)$ en dicha base,

- Obtened las coordenadas del vector u en la base canónica.
- Obtened las coordenadas del vector u en la base

$$B_1=\{(1,0,1,0),(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,1,-1,1)\}$$

Pregunta 2

Sea $B_V=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y sean los vectores

$$\begin{cases} u_1 = 3v_1 + 2v_2 - v_3 \\ u_2 = 4v_1 + v_2 + v_3 \\ u_3 = 2v_1 - v_2 + v_3 \end{cases}$$

- Probad que $B_U=\{u_1,u_2,u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$
- Encontrad las coordenadas de los vectores v_1,v_2,v_3 en la base B_U
- El vector $x\in\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas $(1,2,3)$ en la base B_V. Calculad sus coordenadas en la base B_U

Pregunta 3

Expresad el vector $(3,1,4)$ en la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $(1,-2,-1),(1,-1,0),(0,0,2)$

Pregunta 4

Sea la base

$$B_1=\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1),(0,1,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^4$.

Obtened las componentes en esta base del vector $u=(-3,2,1,-2)_{B_2}$, donde

$$B_2=\{(1,2,0,0),(-1,0,1,1),(0,0,-2,1),(-1,0,-1,0)\}$$

Pregunta 5

Encontrad una base del subespacio vectorial E generado por $v_1=(1,-2,0,3), v_2=(2,-5,-3,6), v_3=(0,1,3,0), v_4=(2,-1,4,-7), v_5=(5,-8,1,2)$

Pregunta 6

Encontra una base del subespacio vectorial

$$F = \langle (1, 2, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 0) \rangle$$

Pregunta 7

Probad que

$$\langle (1, -1, -1, 1), (1, -2, -2, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle = \langle (1, 0, 0, 1), (0, -1, -1, 0) \rangle$$

Dad una base de este subespacio vectorial

Pregunta 8

Sea E el espacio vectorial generado por los vectores

$$v_1 = (2, 1, 0, 3) v_2 = (3, -1, 5, 2) v_3 = (-1, 0, 2, 1)$$

Determinad la dimensión de E y decid si los vectores $(1, 1, 1, 1), (2, 3, -7, 3)$ pertenecen a E o no.

Pregunta 9

Para cada uno de los siguientes conjuntos de vectores, decid si son o no linealmente idependientes. Determinad la dimensión del subespacio vectorial generado por cada uno de los conjuntos

- $A = \{(1, 3, 2), (0, 3, 0), (2, 4, 5)\}$
- $B = \{(0, 3, 1), (1, -3, 0), (-1, -4, 5)\}$
- $C = \{(1, 3, -2), (-2, 0, 0), (-1, 0, 5)\}$
- $D = \{(0, 3, 1, -1), (1, -3, 0, -2), (-1, -3, -4, 5), (-1, 0, 0, 0)\}$
- $E = \{(1, 3, 0, 0), (0, -3, 0, -1), (1, 0, -3, 0), (1, 1, -1, 0)\}$

Pregunta 10

Consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

- $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y + z = 0\}$
- $H_2 = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4) \rangle$
- $H_3 = \{(\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \gamma + \delta, \alpha + \delta) \ : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$

¿Pertenece el vector $u = (1, 0, 1, 2)$ a estos subespacios?

En los casos afirmativos, encontrad una base del subespacio correspondiente y las coordenadas de u en esta base.

Pregunta 11

Dentro de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ determinad si son o no linealmente independientes los siguientes conjuntos de vectores

- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Pregunta 12

En $\mathbb{R}^4$ consideramos los vectores

$$(1+\alpha, 1, 1, 1), (1, 1+\alpha, 1, 1), (1, 1, 1+\alpha, 1), (1, 1, 1, 1+\alpha)$$

Determinad, en función del parámetro α, la dimensión y una base del subespacio que generan.

Pregunta 13

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Encontrad para qué valores de n existen matrices cuadradas B tales que $AB = 0$
- Demostrad que para cada uno de estos valores, el conjunto F de todas las matrices B tales que $AB = 0$ es un espacio vectorial. Encontrad la dimensión y una base.

Pregunta 14

Decid si son linealmente independientes o no los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{C}^2$, primero como $\mathbb{C}-$e.v. y luego como $\mathbb{R}-$e.v.

- $\{(1, i), (i, -1)\}$
- $\{(1, 1+i), (0, -i), (2, 2+i)\}$

Pregunta 15

Dentro de $\mathbb{R}_2[x]$, consideremos $p(x)$ un polinomio fijo de grado 2 y B la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. Demostrad que $p(x), p'(x), p''(x)$ forman una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculad las matrices del cambio de base de la base canónica B_C, a la nueva base $B = \{p(x), p'(x), p''(x)\}$