Método de diferencias finitas

A. García

2 de julio de 2024

1. Método de difernciass finitas

El método consiste en sustituir la Ecuación Diferencial a resolver los esquemas de derivación numérica necesarias.

La obtención de las mismas puede hacerse por varios caminos. No importa cual sea el camino, deben hacerse un par de consideraciones:

* Se requiere de una función $U(x_i, y_j)$; donde x y y son variables independientes, i es el índice de la posición para x y j es el índice para la posición de y; estos índices hacen referencia al pivoteo de los esquemas de derivación y en consecuencia el uso de un paso constante para la variable x y otro también constante para y que no necesariamente deba ser iguales entre sí '[Tov19].

* La solución de la EDP es una matriz, es decir, un arreglo de dos dimensiones.

Se pueden plantear las derivadas de la función $U(x_i, y_j)$ de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\ |_{i,j} = \frac{1}{\Delta x}[-U_{i,j} + U_{i+1,j}] + O(h) \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\ |_{i,j} = \frac{1}{\Delta y}[-U_{i,j} + U_{i,j+1}] + O(h) \tag{2}$$

Se sigue de este criterio respetando las reglas de derivación pueden obtenerse otras fórmulas adicionales:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\ |_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x}[-U_{i-1,j} + U_{i+1,j}] + O(h^2) \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\ |_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y}[-U_{i,j-1} + U_{i,j}] + O(h^2) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ |_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2}[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] + O(h^2) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\ |_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^2}[U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] + O(h^2) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\ |_{i,j} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}[U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1}] + O(h^2) \tag{7}$$

1.1. Ejemplo: Ecuación del Laplace

Una EDP que esta dada por

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x,y) = 0 \tag{8}$$

definida en intervalos $x \in [a,b]$; $y \in [c,d]$. Si $f(x,y) = 0$ se llama ecuación de Laplace, en caso contrario recibe el nombre de ecuación de Poisson.

Sustituyendo las fórmulas de las derivadas se tiene:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}[U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] + \frac{1}{(\Delta y)^2}[U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] = 0 \tag{9}$$

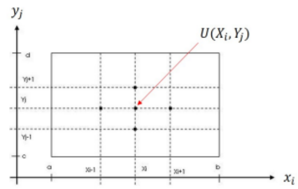

Figura 1: Puntos de red.

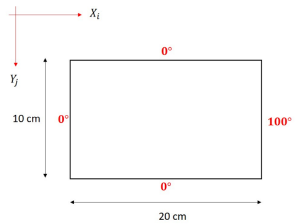

Figura 2: Dimensiones de la placa y condiciones a la frontera.

donde $i = 1, 2, 3, ...n - 1$ y $j = 1, 2, 3, ...m - 1$ con: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $\Delta y = \frac{d-c}{m}$

se parte de una red donde se secciona con n y m pedazos, los cuales se seleccionan dependiendo de la exactitud buscada, es decir, entre mayor sea el número de pedazos, mejor sera la aproximación. En las siguientes imágenes se pueden apreciar las líneas y los puntos de red se pueden ver en la Figura 1:

Utilizando la información de las condiciones a la frontera, se obtiene un sistema de $(n-1)(m-1)$ sistemas de ecuaciones lineales con $(n-1)(m-1)$ incógnitas, que si se resuelven son las aproximaciones de $U(n-1)(m-1)$ para los puntos interiores de la red.

1.2. Problema de aplicación

Se tiene una placa de acero rectangular de 10 por 20 cm. Uno de los bordes de 10 cm se mantiene a 100 °C y los otros tres bordes a 0°C. Se desea conocer la distribución de temperatura al interior de la placa de acuerdo a la Figura 2.

La resolución del ejercicio se encuentra en el archivo adjunto en python.

Referencias

[Tov19] J. Cortés M. Gonzáles V. Pinilla A. Salazar V. Tovar. Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. *UNAM*, 1(1):1–17, 2019.