Informática
Año 2013/2014
Facultad de CC. Matemáticas

Hoja de ejercicios 1

Expresiones

26 de noviembre de 2013

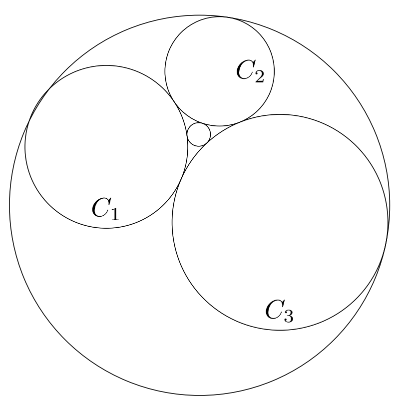
▷ 1. Términos generales

Estudia las siguientes sucesiones y escribe una expresión que calcule el término general de cada una de ellas.

1. 3, 8, 13, 18, 23...
2. 1, -1, 1, -1, 1...
3. -1, 1, -1, 1, -1...
4. 1, 1, 2, 3, 5, 8...
5. -3, -6, -12, -24...
6. 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1...
7. -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1...
8. 1, 1, 3, 7, 13, 21...

▷ 2. El beso exacto

Como puedes ver en el dibujo, dados tres círculos, C_1, C_2 y C_3, tangentes entre sí dos a dos, existen exactamente dos círculos que son tangentes a los tres anteriores:



Hay una fórmula que permite calcular el radio de estos círculos tangentes: si tenemos cuatro círculos C_1, C_2, C_3 y C_4, tangentes entre sí, con radios r_1, r_2, r_3 y r_4, respectivamente, entonces se verifica la fórmula

$$2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2) = (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)^2$$

donde $s_i = 1/r_i$. No hay magia alguna; de esta fórmula resultan dos soluciones porque es una ecuación de segundo grado. La solución positiva da el radio del círculo menor, y del valor absoluto de la negativa se obtiene el radio del mayor.

Utiliza esta propiedad para escribir un programa que, dados los radios de tres círculos tangentes entre sí, calcule el radio de los dos círculos que son tangentes a los tres anteriores.

Un poco de historia La fórmula que hemos utilizado ha sido descubierta y redescubierta varias veces a lo largo de la historia. Se cree que los griegos ya la conocían. René Descartes (1596–1650) la demostró. Actualmente se conoce como la fórmula de Soddy, en honor al químico Frederick Soddy (1877–1956) que la volvió a demostrar en 1936. Una curiosidad: Soddy obtuvo el premio Nobel de química en 1921 y fué quien acuñó el término *isótopo*.

Soddy *demostró* el teorema con un poema titulado *The Kiss Precise*. Te mostramos la segunda estrofa del poema, en la columna de la izquierda, y, a la derecha, una traducción que aparece en [Gar94].

Four circles to the kissing come.	Cuatro círculos llegaron a besarse,
The smaller are the benter.	es el menor el más curvado.
The bend is just the inverse of	La curvatura no es sino la inversa
The distance form the center.	de la distancia desde el centro.
Though their intrigue left Euclid dumb	Aunque este enigma a Euclides asombrara
There's now no need for rule of thumb.	las reglas empíricas no son necesarias.
Since zero bend's a dead straight line	Como la recta tiene curvatura nula
And concave bends have minus sign,	y las curvas cóncavas tienen signo menos,
The sum of the squares of all four bends	la suma de los cuadrados de las cuatro curvaturas
Is half the square of their sum.	es igual a la mitad del cuadrado de su suma.

Notas bibliográficas Frederick Soddy dió la demostración de esta fórmula en 1936, en forma de poema [Sod36]. El poema puede encontrarse en Internet, por ejemplo, en la dirección: `http://www.pballew.net/soddy.html`

▷ 3. Los siete mensajeros

(*) El relato de *Los siete mensajeros* de Dino Buzzati (1906–1972) contiene el siguiente fragmento:

> Partí a explorar el reino de mi padre, pero día a día me alejo más de la ciudad y las noticias que me llegan se hacen cada vez más escasas. [...]
>
> Aunque despreocupado —¡mucho más de lo que lo soy ahora!—, pensé en el modo de comunicarme con mis allegados y, de entre los caballeros de mi escolta, elegí a los siete mejores para que me hicieran de mensajeros. [...]
>
> Poco habituado a estar lejos de casa mandé al primero, Alejandro, la noche del segundo día de viaje, cuando habíamos recorrido ya unas ochenta leguas. Para asegurarme la continuidad de las comunicaciones, la noche siguiente envié al segundo, luego al tercero, luego al cuarto, y así de forma consecutiva hasta la octava noche del viaje, en que partió Gregorio. El primero aún no había vuelto.
>
> Éste nos alcanzó la décima noche, mientras nos hallábamos plantando el campamento para pernoctar en un valle deshabitado. Supe por Alejandro que su rapidez había sido inferior a la prevista; yo había pensado que, yendo solo y montando un magnífico corcel, podría recorrer en el mismo tiempo el doble de distancia que nosotros; sin embargo, sólo había podido recorrer la equivalente a una vez y media; [...] lo mismo ocurrió con los demás. Bartolomé, que partió hacia la ciudad la tercera noche de viaje, volvió a la decimoquinta. Cayo, que partió la cuarta, no regresó hasta la vigésima.

Escribe una expresión que permita calcular cuándo regresará un mensajero conociendo el día del viaje en el que se encuentra en el momento de su partida. Es decir, conocido el día de partida de un mensajero, la expresión deberá anunciar el día de su llegada.

▷ **4. La deuda.**

Como ya sabrás en nuestra economía el dinero debajo de una baldosa no *trabaja* por nosotros. Así es típico depositarlo en los bancos que nos ofrecen un interés por él.

También podemos encontrarnos en la situación contraria, no tenemos suficiente dinero para comprar algo que queremos ya pero sabemos que vamos a obtener ingresos para ir pagando cada mes una parte de la deuda más los *justos intereses* que el banco quiere obtener.

Aunque sería interesante conocer las implicaciones de estos dos hechos cotidianos y cómo se organizan, en este ejercicio nos centraremos en ser capaces de hacer los cálculos involucrados en esos dos tipos de operaciones.

Si quieres saber más quizá el video del enlace dinero como deuda te resulte interesante.

Interés compuesto Si depositamos una cantidad C en un banco a un interés del $I\,\%$ anual, al cabo de un mes el banco nos adeuda una cantidad igual a $C \cdot i/100$. Ten cuidado porque, por defecto, el banco habla del interés anual y a la hora de hacer el cálculo debemos usar el interés mensual $i = I/12$.

Escribe una expresión que dados un capital C, un interés I y un número de meses N, calcule el dinero que tendremos al cabo de N meses. Ten en cuenta que, cada mes, la cantidad adeudada en concepto de intereses queda depositada en la cuenta.

Aportaciones periódicas Supón que eres muy ahorrador y aportas cada mes una cantidad constante c a tu cuenta. Al final del primer mes tendrás $c + c \cdot i/100$, la cantidad c que aportas al princio más los intereses de ese mes. No deberías tener dificultad en saber que al final del segundo mes tendrás $(c \cdot (1 + i/100) + c) \cdot (1 + i/100)$. Escribe una expresión que calcule el dinero que tendrás al cabo de N meses.

Cuota de un préstamo Si pedimos al banco una cantidad C, éste nos cobra cada mes los correspondientes intereses. Si cada mes sólo pagáramos intereses seguiríamos debiéndole al banco la cantidad C por los siglos de los siglos. Por eso la cuota mensual c asociada a un préstamo consta de una parte de intereses y otra de *amortización*. Si el interés anual es del $I\,\%$, al cabo del primer mes deberemos $C * (1 + i/100) - c$, donde $i = I/12$.

Tu primer trabajo consiste en escribir una expresión que dados c,C,I así como el número de meses N calcule lo que le seguimos debiendo al banco al cabo de N meses.

Se trata ahora de, dados I,C y N, calcular la cuota c necesaria para que al cabo de N meses nuestra deuda con el banco haya quedado saldada.

▷ **5. Cuadrados perfectos**

Los cuadrados perfectos son los números 1, 4, 9, 16, ..., esto es, los cuadrados de los números naturales: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...

Cuadrado perfecto Encuentra una expresión, o una secuencia sencilla de instrucciones, adecuada para averiguar si un número natural m es un cuadrado perfecto, o sea, si es de la forma

$$m = n^2$$

para algún natural n.

Cuadrado perfecto previo Encuentra una expresión que, para un número m entero, averigüe el número n mayor posible pero que no supere a m, (o sea, $n \leq m$) y sea cuadrado perfecto.

Notas bibliográficas El libro *El diablo de los números, un libro para todos aquéllos que temen a las matemáticas* [Enz01] es ameno y contiene bellas ilustraciones. En él podrás encontrar curiosidades, definiciones e historias acerca de varias sucesiones de números, entre ellas los cuadrados perfectos, los números triangulares, la sucesión de Fibonacci…

▷ **6. Ser o no ser… triángulo**
Dadas tres cantidades reales positivas, se quieren dilucidar las siguientes situaciones:

¿Es un triángulo? Si los valores de dichas cantidades pueden corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo (quizá la figura 1 pueda ayudarte).

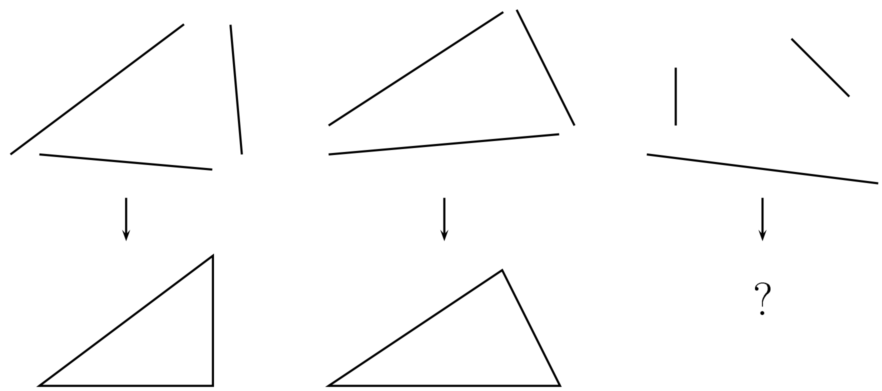


Figura 1: Construcción de triángulos a partir de sus lados

¿Es escaleno? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es escaleno.

¿Es equilátero? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es equilátero.

¿Es isósceles? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es isósceles.

▷ **7. Rectángulos**
(*) Teniendo en cuenta que un rectángulo se puede representar en un plano a partir de cuatro puntos, considera las siguientes cuestiones:

¿Es un rectángulo? Escribe una expresión que determine si dados cuatro puntos del plano, éstos pueden representar los vértices de un rectángulo.

Pista: La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) vale $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Pista: Recuerda que en un rectángulo los lados deben ser de igual longitud dos a dos y también ambas diagonales deben ser de la misma longitud.

Centro de un rectángulo Supongamos que tenemos las coordenadas de cuatro puntos que representan un rectángulo. Escribe dos expresiones que nos den las coordenadas del centro del rectángulo.

▷ **8. Rectángulos paralelos a los ejes de coordenadas**
Como puedes observar en la figura 2, en este ejercicio vamos a trabajar con rectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas.

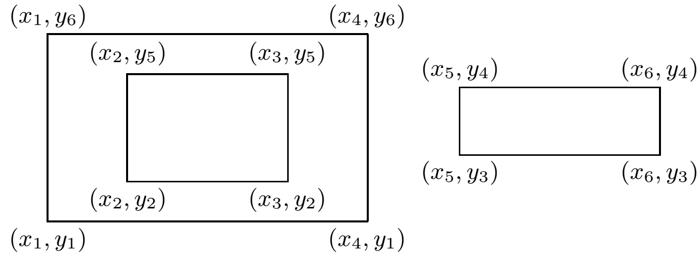


Figura 2: Representación de tres rectángulos

Inclusión de rectángulos paralelos a los ejes Escribe una expresión que, dados los vértices de dos rectángulos paralelos a los ejes, determine si el segundo está dentro del primero.

Pista: El hecho de que los rectángulos sean paralelos a los ejes nos permite calcular de forma fácil el semieje horizontal y el vertical. Con el centro del rectángulo (véase el ejercicio 7) y los semiejes saber si un punto está dentro del rectángulo es muy fácil.

▷ **9. Incierta igualdad de números reales**

Como quizá la representación de los números reales resulte algo imprecisa, la igualdad de dos reales posiblemente está sujeta a algún error. Por eso, nos tememos que la operación `==` predefinida en Python no será satisfactoria en general. A lo mejor deberíamos escribir una función que considere iguales dos números reales si son lo suficientemente próximos.

Ejemplo Ejecuta las siguientes instrucciones en el intérprete

```
from math import *
a = sqrt(2)
b = a * a
b == 2
```

Verás que el resultado final es `False`.

Pista: Dos números reales x e y serán *supuestamente iguales* si $|x-y| < \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$.

Una vez implementada esta función, nos damos cuenta de que esta solución presenta el inconveniente de conceder el mismo margen de tolerancia a cualquier par de reales, independientemente de su orden de magnitud. Por ejemplo, un margen $\varepsilon = 10^{-3}$ resulta excesivo para comparar cifras de órdenes pequeños (tales como medidas de átomos), y a la vez ese mismo margen es en cambio estrechísimo para números de órdenes grandes (como son las distancias astronómicas). Para evitar este problema, podemos *normalizar* la igualdad anterior, sustituyendo la expresión $|x - y| < \varepsilon$ por

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon.$$

Referencias

[Enz01] Hans Magnus Enzensbergen. *El diablo de los números: un libro para todos aquéllos que temen a las matemáticas.* Siruela, 2001.

[Gar94] Martin Gardner. *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Alianza, 1994.

[Sod36] Frederick Soddy. The kiss precise. *Nature*, (137), June 1936.