Hoja de ejercicios 4

Repaso

13 de febrero de 2014

▷ 1. Todas la funciones booleanas de dos argumentos

Una función booleana de dos argumentos (por ejemplo la conjunción lógica, `and`) transforma un par de valores booleanos en un valor booleano. Comprueba que hay 16 funciones distintas de este tipo. Escribe en Python la expresión que define a cada una de ellas.

Pista: Una manera muy conveniente de representar las funciones booleanas es mediante *tablas de verdad*. En la primera columna aparecen los posibles valores del primero de los argumentos. En la primera fila aparecen los posibles valores del segundo de los argumentos. El punto donde se unen una fila y una columna indica el valor de la función que se está definiendo si se aplica a argumentos que tienen como valor el primero de la fila y de la columna, respectivamente.

La siguiente figura muestra la tabla de verdad para el operador lógico de conjunción:

conjunción	verdadero	falso
verdadero	verdadero	falso
falso	falso	falso

Esta tabla aglutina todos los resultados posibles para la función booleana de conjunción cuando se le aplica a dos valores booleanos. Por ejemplo, la conjunción de verdadero y falso da como resultado falso. Para describir fácilmente todos los operadores booleanos utiliza la propiedad de que cada operador tiene una tabla de verdad diferente.

▷ 2. Expresiones relacionadas con una formación rectangular de números

Considera la siguiente formación de números

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Para formaciones de este estilo con N columnas, escribe expresiones para los siguientes cálculos y situaciones:

Cálculo del número El número que aparece en la fila i y columna j ($i \geq 1$ y $1 \leq j \leq N$).

Fila de un número La fila que ocupa un número $p \geq 1$.

Columna de un número La columna que ocupa un número $p \geq 1$.

¿Están en la misma fila? Cuándo dos números p y q ($p, q \geq 1$) están en la misma fila.

¿Están en la misma columna? Cuándo dos números p y q ($p, q \geq 1$) están en la misma columna.

¿Están en la misma diagonal? Cuándo dos números p y q ($p, q \geq 1$) están en la misma diagonal.

▷ **3. Expresiones relacionadas con una formación triangular de números**

Considera la siguiente formación de números:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 5 & & 6 & & \\
 & 7 & & 8 & & 9 & & 10 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Número en posición Calcula el número que aparece en la posición j de la fila i ($i \geq 1$ y ¿qué condición debe cumplir j?).

Fila de un número Calcula la fila que ocupa un número p.

¿Están en la misma fila? Indica si dos números p y q están en la misma fila.

¿Están en la misma diagonal? Indica si dos números p y q están en la misma diagonal.

▷ **4. Congruencia de Zeller**

Calcular el día de la semana al que pertenece una determinada fecha no es tarea fácil. Afortunadamente, Christian Zeller (1824–1899) propuso en 1882 una expresión que permite calcularlo fácilmente.

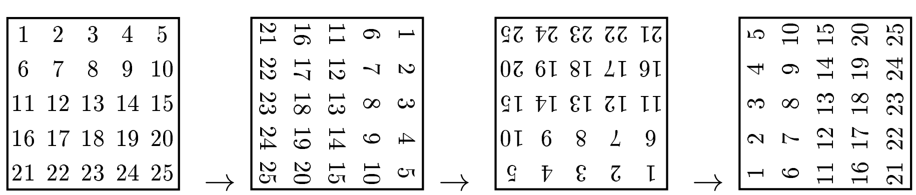
Un poco de historia El calendario que actualmente utilizamos se conoce como Calendario Gregoriano y fue introducido en el año 1582 por el Papa Gregorio XIII (1572–1585). De esta forma se sustituía el calendario Juliano y se perfeccionaba así el ajuste entre el calendario y el año solar.

El Calendario Gregoriano establece 97 años bisiestos cada 400 años y, para ajustar el desfase desde el año 45 a.C. y el año de su aplicación, se adelantaron 10 días: el 5 de octubre de 1582 se contó como el 15 de octubre.

El calendario se adoptó inmediatamente en España, Italia, Polonia y Portugal, otros países fueron adoptándolo más tarde. Por ejemplo, este calendario no se utilizó en Gran Bretaña hasta 1752, en Rusia hasta 1918 y en Turquía hasta 1927.

▷ **5. ¿Pueden las matrices dar volteretas?**

(*) Pues parece que sí:



Voltereta Suponiendo que la matriz es cuadrada, de tamaño N, y numerada como en la figura, se pide una función que transforme un número en el que lo desplazará cuando la matriz dé una voltereta.

Ejemplo Consideremos una matriz de tamaño 5, y el número 12, que ocupa la casilla $(3, 2)$. El número que desplaza al 12 cuando se da un giro es el 18; el número que desplaza al 18 es el 14; y el que desplaza al 14 es el 8.

$$12 \to 18 \to 14 \to 8$$

Por tanto, la función que buscamos deberá convertir el 12 en 18, el 18 en 14, etc.

Vuelta completa Comprueba que, aplicando la función cuatro veces sobre cualquier elemento de la matriz, dicho elemento no varía.

▷ 6. Resolución de un sistema de ecuaciones

Desarrolla un programa que estudie la naturaleza de las soluciones del sistema de ecuaciones siguiente,

$$\begin{array}{ccccc} a_1 x & + & b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & = & c_2 \end{array}$$

determinando si es un sistema incompatible, compatible indeterminado o compatible determinado, presentando las soluciones correspondiente en este último caso.

Pista: Observa que el problema planteado requiere averiguar el rango de las matrices de coeficientes (M) y ampliada (A)

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Además, para el cálculo de esos rangos puede ser útil tener presentes algunas de las siguientes observaciones:

- El rango de una matriz es cero si y sólo si tiene todos sus coeficientes nulos.
- El rango de una matriz cuadrada $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es n si y sólo si su determinante es no nulo.
- Para las matrices M y A descritas, $rg(M) \leq rg(A) \leq rg(M) + 1$.
- Si en la matriz A descrita, los coeficientes de la primera fila son proporcionales a los de la segunda, se tiene que $rg(A) \leq 1$.

En resumen, las posibilidades son las siguientes:

$$rg(M) = \begin{cases} 0 \;\Rightarrow\; \text{si } rg(A) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \; \textit{Sist. Compatible Indeterminado} \quad (\infty \text{ soluciones}) \\ 1 & \Rightarrow \; \textit{Sist. Incompatible} \quad (\nexists \text{ solución}) \end{cases} \\ 1 \;\Rightarrow\; \text{si } rg(A) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow \; \textit{Sist. Compatible Indeterminado} \quad (\infty \text{ soluciones}) \\ 2 & \Rightarrow \; \textit{Sist. Incompatible} \quad (\nexists \text{ solución}) \end{cases} \\ 2 \;\Rightarrow \textit{Sistema Compatible Determinado} \quad (\exists! \text{ solución}) \end{cases}$$

Un poco de historia La regla de Cramer se llama así en honor al matemático suizo Gabriel Cramer (1704–1752). A los 18 años ya era doctor y a los 20 profesor de universidad. Cramer introdujo una gran innovación: utilizó el francés, en lugar del latín, para dar sus clases, en contra de lo que era habitual en aquella época.

▷ 7. Fechas correctas

Se desean escribir programas que permitan determinar la correción de números que describen fechas.

Día y mes Si consideramos únicamente dos números, correspondientes a un día y un mes, deseamos hacer un programa que indique si dichos números se refieren a una fecha válida. Podemos suponer que febrero tiene siempre 28 días.

Ejemplo Los números 31 4 no corresponden a una fecha válida pues el mes de abril sólo tiene 30 días.

Día, mes y año Si consideramos tres números enteros, para día, mes y año, escribe un programa que indique si dichos números se refieren a una fecha correcta.

Ejemplo Los datos `31 12 1970` corresponden a una fecha correcta. Sin embargo, `29 2 1999` no forman una fecha correcta pues el año 1999 no es bisiesto.

Pista: Define una expresión para decidir cuando un año es o no bisiesto. Recuerda que se considera bisiesto un año cuyo número es divisible por cuatro excepto los años que son múltiplos de cien a no ser que lo sean de 400.

▷ 8. Operaciones aritméticas

Escribe un programa que nos permita introducir dos números naturales y una operación (suma, resta, multiplicación o división), y calcule el resultado de dicha operación, presentándolo en pantalla en el siguiente formato:

```
     1234
*      25
   -------
    30850
```

▷ 9. Dibujos con asteriscos

Volcán Escribe un programa que dibuje en la pantalla la siguiente figura, compuesta por líneas de 2, 4, 8, 16, 32 y 64 asteriscos respectivamente:

```
                               **
                              ****
                            ********
                        ****************
                ********************************
****************************************************************
```

Mosaico Escribe un programa que dibuje en la pantalla la figura siguiente,

```
 * * * *
* * * * 
 * * * *
* * * * 
 * * * *
* * * * 
 * * * *
* * * * 
```

compuesta por una matriz de 8×8 caracteres, blancos o negros, como en un tablero de ajedrez.

Círculo Este dibujo es un simple círculo, del tamaño que elija el usuario, y con su borde adaptado a la rejilla discreta que nos proporciona el monitor:

```
    *
  *****
 *******
 *******
*********
 *******
 *******
  *****
    *
```

▷ 10. Juego de adivinación

Consideremos el siguiente juego entre los jugadores A (adivino) y P (pensador): P piensa un número comprendido entre 1 y N (digamos 1000, por ejemplo), y A trata de adivinarlo, mediante tanteos sucesivos, hasta dar con él. Por cada tanteo de A, P da una respuesta orientativa de entre las siguientes:

```
Fallaste. El número pensado es menor que el tuyo.
Fallaste. Mi número es mayor.
Acertaste al fin.
```

Naturalmente, caben diferentes estrategias para el adivino:

- Una posibilidad, si el adivino no tiene prisa en acabar, consiste en tantear números sucesivamente: primero el 1, después el 2, etc. hasta acertar.
- Otra estrategia, sin duda la más astuta, consiste en tantear el número central de los posibles de modo que, al fallar, se limiten las posibilidades a la mitad (por eso se llama *bipartición* a este modo de tantear).
- También es posible jugar caprichosamente, tanteando un número al azar entre los posibles. Al igual que la anterior, esta estrategia también reduce el intervalo de posibilidades sensiblemente.

Se plantea desarrollar tres programas independientes: uno deberá desempeñar el papel del pensador; otro el del adivino (usando la estrategia de bipartición), y un tercero deberá efectuar la simulación del juego, asumiendo ambos papeles (y donde el adivino efectúa los tanteos a capricho).

▷ 11. Ecuación diofántica

Se llama ecuación *diofántica* a cualquier ecuación algebraica, generalmente de varias variables, planteada sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ o los números naturales $\mathbb{N}$.

- Escribe un programa que calcule las maneras diferentes en que un número natural n se puede escribir como suma de otros dos números naturales. Es decir, que calcule las soluciones de la ecuación diofántica $x + y = n$.
- Escribe un programa que calcule las maneras diferentes en que un número natural n se puede escribir como producto de dos números naturales. Es decir, que calcule las soluciones de la ecuación diofántica $xy = n$.
- Escribe un programa que, dado un número natural n, calcule la cantidad de soluciones de la ecuación diofántica: $x^2 - y^2 = n$

Pista: Ten en cuenta que toda solución de la anterior ecuación nos produce una factorización del entero n:

$$n = (x + y)(x - y)$$

Ya sólo nos queda dilucidar cuáles de esas factorizaciones producen una solución de la ecuación.
Un poco de historia La palabra *diofántica* hace referencia al matemático griego del siglo III de nuestra era Diofanto de Alejandría.
(http://es.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alejandr%C3%ADa)

▷ 12. Un bonito triángulo

Anidando bucles y con los dígitos $\{0, \ldots, 9\}$ se pueden escribir triángulos tan interesantes como el siguiente:

```
        1
       232
      34543
     4567654
    567898765
   67890109876
  7890123210987
 890123454321098
90123456765432109
0123456789876543210
```

¿Te atreves?

▷ 13. Espectro natural

(*) El *espectro natural* de una circunferencia de radio r es el conjunto de puntos con coordenadas naturales (n, m) tales que $n^2 + m^2 = r^2$. El método obvio para calcular el espectro necesitaría dos bucles anidados en donde se irían explorando las abcisas y ordenadas de los puntos desde 0 a r. Afortunadamente existe un método más eficiente, que además aprovecha la simetría del problema: si (n, m) está en el espectro también está (m, n). Definimos

$$B(x, y) = \{(n, m) \mid n^2 + m^2 = r^2 \wedge x \leq n \leq m \leq y\}$$

Obviamente el espectro es $B(0, r) \cup \{(m, n) \mid (n, m) \in B(0, r)\}$ que a su vez se puede calcular usando las siguientes reglas:

$$B(x, y) = \begin{cases} B(x+1, y), & \text{si } x^2 + y^2 < r^2 \\ \{(x, y)\} \cup B(x+1, y-1), & \text{si } x^2 + y^2 = r^2 \\ B(x, y-1), & \text{si } x^2 + y^2 > r^2 \end{cases}$$

Escribe un programa iterativo que calcule el espectro natural de una circunferencia de radio r utilizando exclusivamente las reglas dadas en el párrafo anterior. El programa pedirá el número entero r y a continuación pasará a escribir los puntos del espectro en la pantalla.

Indica el número de pasos que lleva calcular el espectro en relación al radio r.

▷ 14. Los cubos de Nicómaco

(*) Considera la siguiente propiedad descubierta por Nicómaco de Gerasa:

> *Sumando el primer impar, se obtiene el primer cubo;*
> *sumando los dos siguientes impares, se obtiene el segundo cubo;*
> *sumando los tres siguientes, se obtiene el tercer cubo, etc.*

Comprobémoslo:

$$\begin{array}{lcl l r} 1^3 & = & 1 & = & 1 \\ 2^3 & = & 3 + 5 & = & 8 \\ 3^3 & = & 7 + 9 + 11 & = & 27 \\ 4^3 & = & 13 + 15 + 17 + 19 & = & 64 \end{array}$$

Desarrolla un programa que escriba los n primeros cubos utilizando esta propiedad. El valor de n puede ser un valor que se pide por el teclado o lo puedes declarar en tu programa como una constante.

Un poco de historia Nicómaco de Gerasa vivió en Palestina entre los siglos I y II de nuestra era. Escribió *Arithmetike eisagoge* (Introducción a la aritmética) que fue el primer tratado en el que la aritmética se consideraba de forma independiente de la geometría. Este libro se utilizó durante más de mil años como texto básico de aritmética, a pesar de que Nicómaco no demostraba sus teoremas, sino que únicamente los ilustraba con ejemplos numéricos.

▷ 15. Criba de Eratóstenes

Un método para encontrar todos los números primos entre 1 y n es la *criba de Eratóstenes*. Considera una lista de números entre 2 y n. El número 2 es el primer primo, pero todos los múltiplos de 2 (4, 6, 8, ...) no lo son, y por tanto pueden ser tachados de la lista. El primer número después de 2 que no está tachado es 3, el siguiente primo. Tachamos entonces de la lista los siguientes múltiplos de 3, por supuesto, a partir de 3×3 ya que los anteriores están ya tachados (9, 12, ...). El siguiente número no tachado es 5, el siguiente primo, y entonces tachamos los siguientes múltiplos de 5 (25, 30, 35, ...). Repetimos este proceso hasta que alcanzamos el primer número en la lista que no está tachado y cuyo cuadrado es mayor que n. Todos los números que quedan en la lista sin tachar son los primos entre 2 y n.

Escribe un programa que utilice este algoritmo de criba para encontrar todos los números primos entre 2 y n.

▷ 16. Descomposición en factores primos

Seguro que has realizado alguna vez la tediosa tarea de descomponer un número en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

¿Podríamos hacer un programa que fuése capaz de hacer estas descomposiciones? Seguro que sí. Escribe un programa que reciba como entrada un número entero positivo y calcule la descomposición del mismo en factores primos.

Ejemplo Un ejemplo de ejecución podría ser el siguiente:

```
Numero a descomponer? -1
El número ha de ser positivo
Numero a descomponer? 12
Factores primos: 2 2 3
Otro número (s/n)? s

Numero a descomponer? 85
Factores primos: 5 17
Otro número (s/n)? s

Numero a descomponer? 56
Factores primos: 2 2 2 7
Otro número (s/n)? s

Numero a descomponer? 110
Factores primos: 2 5 11
Otro número (s/n)? n
```

▷ 17. Evaluación de polinomios

Deseamos desarrollar un programa que evalúe polinomios de una variable real, dados en dos líneas de la entrada estándar: en la primera, se dará el valor de la variable; en la segunda, la lista de coeficientes, no vacía. Se pide escribir dos versiones de este programa ateniéndose a lo que se describe seguidamente.

Órdenes crecientes En esta primera versión, se asume que los coeficientes del polinomio tienen pesos *crecientes*:

$$a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

(El grado n del polinomio no se conoce *a priori*.)

Órdenes decrecientes En esta segunda versión, se asume que los coeficientes del polinomio tienen pesos *decrecientes*:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Pista: Tenemos que evaluar los datos que recibimos en una sola pasada, ya que sólo podemos leer una vez la entrada estándar. Por tanto, en principio no podemos usar la potencia x^n, puesto que no conocemos aún dicha n. La regla de Horner, debida al matemático inglés Willian George Horner (1786–1837), permite calcular un polinomio de grado n de forma acumulativa:

$$((\ldots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \ldots)x + a_{n-1})x + a_n.$$

Teniendo en cuenta que en particular n podría ser 0.

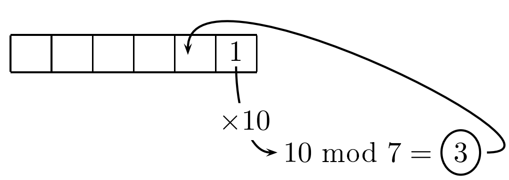
Pista: Para facilitar la lectura en todos los casos de los coeficientes, se puede suponer que la secuencia de coeficienes finaliza con un coeficiente especial.

```
ULT=....;
```

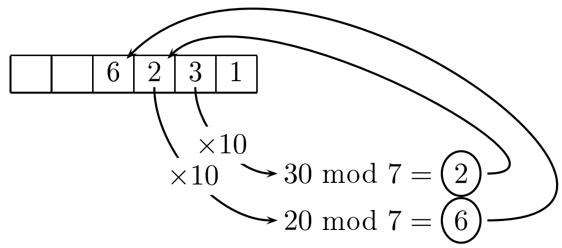
▷ 18. Criterios de divisibilidad

Tablas de módulos Dado un número k de una cifra, se denomina *tabla de módulos* a la tabla construida de la siguiente forma: en el extremo de la tabla ponemos un 1, el mecanismo general consiste en tomar la última entrada multiplicarla por diez y calcular el módulo de la división por el número k; este resultado pasa a ser una nueva entrada.

Supongamos que queremos calcular la tabla de módulos del número 7, comenzamos poniendo 1 en el extremo. Para calcular el siguiente número multiplicamos el 1 por 10 y ponemos el resto del producto dividido entre 7 en la segunda posición de la tabla:



Repetimos el mismo proceso comenzando con el último número de la tabla, es decir, lo multiplicamos por diez y calculamos el resto de dividir por 7; este número ocupa la siguiente casilla:



Repitiendo el proceso obtenemos la tabla siguiente:

5	4	6	2	3	1

Se termina de calcular la tabla de módulos cuando se obtiene el primer factor repetido, que no se incluye en la tabla. En el caso de la tabla del 7, si realizamos el cálculo de la siguiente entrada para el 5, obtenemos que $50 \bmod 7 = 1$ que es la primera entrada de la tabla.

Escribe un programa que, dado un número entre 2 y 9, genere y guarde en un array (suficientemente grande) la tabla de módulos de dicho número. Sólo tienen que calcularse las entradas de la tabla necesarias.

Divisibilidad La tabla de módulos del 7 puede utilizarse para saber si un número es múltiplo de 7 con sólo inspeccionar repetidamente sus cifras.

Si queremos saber si un número (pongamos 21756) es múltiplo de 7, y tenemos calculada la tabla de módulos correspondiente, basta con que vayamos calculando ascendentemente las cifras del número haciendo al mismo tiempo la siguiente operación:

5	4	6	2	3	1
	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
	2	1	7	5	6
	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
	8	6	14	15	6

El número 21756 es múltiplo de 7 si y sólo si el resultado obtenido en $8+6+14+15+6 = 49$ lo es. Averigüémoslo: para saber si 49 es múltiplo de 7 repetimos el proceso,

5	4	6	2	3	1
				$\times$	$\times$
				4	9
				$\parallel$	$\parallel$
				12	9

y resulta que ahora necesitamos saber si 21 lo es: damos un último paso y obtenemos,

5	4	6	2	3	1
				$\times$	$\times$
				2	1
				$\parallel$	$\parallel$
				6	1

cuya suma es 7, lo que confirma que 21756 es múltiplo de 7. Si, por el contrario, al final del proceso hubiésemos obtenido un número de una sola cifra diferente de 7, sabríamos que el número inicial no era múltiplo de 7.

Escribe un programa que, dado un número n presumiblemente grande, calcule si dicho n es múltiplo de 7 utilizando la tabla de módulos del 7.

Pista: Aunque el número tenga más cifras que elementos tiene la tabla de módulos, el algoritmo puede aplicarse igualmente. Si tenemos un número que tiene más cifras que entradas en la tabla, entonces tenemos que *"extender"* la tabla tantas veces como sea necesario. Si consideramos la tabla de módulos del 7,

5	4	6	2	3	1

y el número 2398765541172 que tiene 13 cifras, entonces necesitamos *"pegar"* tres tablas para poder abarcar todas sus cifras:

5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1
					2	3	9	8	7	6	5	5	4	1	1	7	2

Aunque realmente no hace falta tener 3 copias físicas; ten en cuenta que la posición séptima en ese array extendido se corresponde con la primera posición en el array original.

Notas bibliográficas El libro en el que Pascal publicó estos resultados es [Pas65]. El libro [Cha99] es mucho más fácil de conseguir y en él se puede encontrar el extracto de la obra anterior de Pascal en la que se describe el mecanismo que presenta el ejercicio.

Un poco de historia Etienne Pascal, padre de Blaise Pascal, fue matemático. Etienne mantuvo a Blaise apartado de los libros de matemáticas, ya que prefería que su hijo se dedicase a otras cosas. A pesar de eso, el talento de Blaise para la geometría era tal que hizo recapacitar a su padre y, cuando sólo tenía doce años de edad, lo inició en las matemáticas con los *Elementos* de Euclides [Euc91, Euc94, Euc96]. A los 17 años de edad Blaise escribió y publicó *Essay pour le coniques*.

El cálculo algorítmico siempre interesó a Blaise Pascal. A los 18 años diseñó y construyó una de las primeras calculadoras mecánicas, *La Pascalina*, que sumaba y restaba.

Referencias

[Cha99] Jean-Luc Chabert, editor. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip.* Springer, 1999.

[Euc91] Euclides. *Elementos. Libros I-IV.* Gredos, 1991.

[Euc94] Euclides. *Elementos. Libros V-IX.* Gredos, 1994.

[Euc96] Euclides. *Elementos. Libros X-XIII.* Gredos, 1996.

[Pas65] Blaise Pascal. Des caractères de divisibilité des nombres de déduits de la somme de leurs chiffres, oeuvres complètes, 1665.