Informática
Año 2013/2014
Facultad de CC. Matemáticas

Hoja de ejercicios 3

Bucles

4 de diciembre de 2013

▷ 1. Número de cifras

Escribe un programa que determine cuántas cifras tiene un entero dado.

▷ 2. Número de cifras en una determinada base

Escribe un programa que determine cuántas cifras tiene una cantidad C si la expresamos en una determinada base b.

▷ 3. Varianza

La varianza de n números $x_1, \ldots, x_n$ es

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

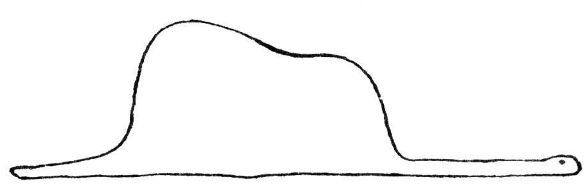
donde $\bar{x}$ es la media.

Se necesita un programa que lea una secuencia de números y calcule su varianza. Los números se introducirán usando el teclado y se acabarán con un 0, que obviamente no será tenido en cuenta para el cálculo de la varianza. En cualquier caso los números no podrán ser almacedados en una lista.

Pista: La fórmula de la varianza parece indicar que necesitamos hacer dos pasadas sobre los datos: una para calcular primero la media y otra para aplicar esa fórmula. Porque no es razonable pedir a quien use nuestro programa que escriba dos veces los mismo datos, parece que necesitamos almacenarlos internamente. Afortunadamente, un poco de esfuerzo mental y un poco de aritmética básica te permitirán reescribir la fórmula de la varianza, de forma que se pueda calcular de una sola pasada y puedas evitar todas las complejidades que produce el almacenamiento de unos datos arbitrariamente largos.

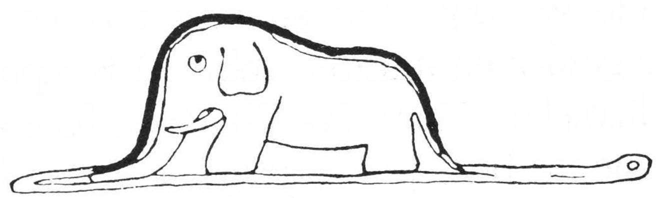
▷ 4. El principito

Mi dibujo número uno. Era así:



Mostré mi obra maestra a las personas mayores y les pregunté si mi dibujo les daba miedo. Me contestaron: “¿Por qué nos habría de asustar un sombrero?”

Pero mi dibujo no representaba un sombrero, sino una serpiente boa que digería un elefante. Dibujé entonces el interior de la serpiente boa, a fin de que las personas adultas pudiesen comprender, pues los adultos siempre necesitan explicaciones. Mi dibujo número dos era así:



Las personas mayores me aconsejaron abandonar los dibujos de serpientes boas abiertas o cerradas y que pusiera más interés en la geografía, la historia, el cálculo y la gramática. Y así fue como a la temprana edad de seis años, abandoné una magnífica carrera de pintor, desalentado por el fracaso de mis dibujos números uno y dos. Las personas mayores nunca comprenden por sí solas las cosas, y resulta muy fastidioso para los niños tener que darles continuamente explicaciones.

El principito, Antoine de Saint-Exupéry

Al principito le gustan mucho los números y prefiere las fracciones así:

$$\frac{5687171}{18686419}$$

ya que puede ver y disfrutar de muchas cifras. Sin embargo los mayores prefieren ver cosas más simples y explicadas:

$$\frac{5687171}{18686419} = \frac{7 \cdot 812453}{23 \cdot 812453} = \frac{7}{23}$$

Pista: Se trata de simplificar al máximo una fracción $\frac{n}{d}$. Para ello, tenemos que calcular el máximo común divisor del numerador y del denominador, $\mathrm{mcd}(n, d)$, que es el mayor número por el que podemos dividir tanto n como d.

▷ 5. Suma marciana

Se ha encontrado en Marte la siguiente operación de sumar, resuelta en una roca:

$$\begin{array}{r} \clubsuit\ \diamondsuit\ \spadesuit \\ \clubsuit\ \heartsuit \\ \hline \diamondsuit\ \spadesuit\ \clubsuit \end{array}$$

Se desea descifrar el significado (o sea, el valor) de esos símbolos, suponiendo que se ha empleado el sistema de numeración decimal.

▷ 6. Aproximaciones al número π

Desde que el ser humano se ha preocupado por conocer el entorno y explicar el porqué de las cosas que lo rodean, ha habido personas que han intentado calcular la relación existente entre la longitud de la circunferencia y el radio (o diámetro) que la define.

Largo ha sido el periplo de los matemáticos en torno a este número. En este ejercicio te proponemos utilizar las siguientes fórmulas matemáticas para construir programas que permitan calcular aproximaciones al número π.

- François Viète (1540–1603) en 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

- John Wallis (1616–1703) en 1656:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) en 1673:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

- Borwein en 1987:

$$x_0 = \sqrt{2} \qquad y_1 = 2^{\frac{1}{4}} \qquad \pi_0 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right) \qquad y_{n+1} = \frac{y_n\sqrt{x_n} + \frac{1}{\sqrt{x_n}}}{y_n + 1} \qquad \pi_n = \pi_{n-1}\frac{x_n + 1}{y_n + 1}$$

  Tiene una convergencia muy rápida: $\pi_n - \pi < 10^{-2^{n+1}}$.

Notas bibliográficas π es sin duda el más famoso de los números, y por eso la bibliografía sobre él es extensísima. Dos libros llenos de curiosidades sobre π son [AH01] y [Bec82]. En [Cha99] se dedica un capítulo a los diversos métodos usados a lo largo de la historia para calcular π. Tan distinguido número no podía faltar tampoco en Internet:

```
http://www.joyofpi.com/pilinks.html
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html
```

En las dos primeras direcciones hay cientos de referencias diversas dedicadas a π; en la tercera puedes encontrar muchas, pero que muchas, cifras decimales de π.

Un poco de historia El primero que utilizó el símbolo π fue William Jones (1675–1749) en 1706. A Euler le gustó este símbolo, lo adoptó y difundió su uso. La fórmula de Leibniz es una particularización de la serie que define el arcotangente de un ángulo; James Gregory (1638–1675) la había descrito con anterioridad, pero no hay ninguna información de que la usase para aproximar el número π.

He aquí una tabla con la cronología del número de cifras decimales de π calculadas:

Número de decimales	Año	Autores	Sistema informático
2 037	1949	G.W. Reitwiesner, ...	ENIAC
10 000	1958	F. Genuys	IBM 704
100 265	1961	D. Shanks y J. Wrench	IBM 7090
1 001 250	1974	J. Guilloud y M. Bouyer	CDC 7600
16 777 206	1983	Y. Kanada, S. Yoshino y Y. Tamura	HITAC M-280H
134 214 700	1987	Y. Kanada, Y. Tamura, Y. Kubo, ...	NEC SX-2
6 442 450 000	1995	D. Takahashi y Y. Kanada	HITAC S-3800/480 (2 procesadores)
51 539 600 000	1997	D. Takahashi y Y. Kanada	HITACHI SR2201 (1024 procesadores)
206 158 430 000	1999	D. Takahashi y Y. Kanada	HITACHI SR8000 (128 procesadores)

▷ 7. Calculando sobre tablas

Especifica y diseñar algoritmos para:

- Llenar una tabla con datos aleatorios.
- Mostrar los valores de una tabla por pantalla.
- Calcular la media y la desviación típica de los elementos de la tabla.
- Calcular la cantidad de números pares.
- Calcular la cantidad de cuadrados perfectos.
- Calcular la cantidad de los números cuyo logaritmo en base 2 sea menor que otro número dado `log` > 0.
- Determinar si la tabla está ordenada de menor a mayor.
- Contar el número de *picos* que contiene. Un número es un pico si es estrictamente mayor que los dos que tiene a su lado.
- Calcular la cantidad de números que sean potencia de dos.
- Decidir si la tabla es *palíndroma*, es decir, puede leerse igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.
- Calcular la cantidad de números primos que contiene.
- Si el nombre de la tabla es `t`, un algoritmo que calcule en otra tabla `s` las sumas parciales de los elementos de la primera:

$$s[1] = t[1],\ s[2] = t[1] + t[2],\ s[3] = t[1] + t[2] + t[3],\ \cdots \quad s[i] = \sum_{k=1}^{i} t[k]$$

▷ 8. Generación de primos

- Realiza una función que entero n, calcule el menor primo mayor o igual que n.

- Calcular los n primeros números primos, siendo n un número elegido por el usuario.

▷ **9. Duelos de Ordenación**

En este ejercicio te proponemos implementar un juego clásico del mundo de los microordenadores, tan simple como viejo. Una secuencia concreta de caracteres se mostraba por pantalla, típicamente "RANARAMA". Entonces, durante unos segundos las letras eran rápidamente reordenadas al azar mediante una serie de transposiciones de letras contiguas. A continuación, el jugador se enfrentaba a la tarea de ordenarlas de nuevo y formar la cadena original, mediante el siguiente mecanismo. Siempre había dos letras contiguas claramente marcadas, que formaban lo que llamaremos la *zona seleccionada*. El usuario disponía de tres teclas de control: una de ellas para intercambiar la posición de los dos caracteres de la zona seleccionada, las otras dos para desplazar la zona seleccionada a izquierda y derecha a lo largo de la cadena.

Para clarificarlo, supongamos que representamos las cadenas con un espacio entre cada par de caracteres, y delimitamos la zona seleccionada con barras verticales. Al principio la zona seleccionada es arbitraria, de modo que el estado inicial tras el proceso de desordenación podría ser:

```
A R A|N M|A A R
```

Al pulsar la tecla que mueve a la izquierda, tendríamos:

```
A R|A N|M A A R
```

Ahora, al pulsar la tecla de intercambio, se tendría:

```
A R|N A|M A A R
```

Por supuesto, sólo se disponía de escasos segundos para completar la reordenación, mientras se escuchaba un angustioso pitido cada vez más agudo que subrayaba el paso del tiempo en la cuenta atrás.

Versión para un jugador Prescindiendo del desazonador pitido, implementa una versión del juego descrito. La cadena a reordenar debe ser pedida al usuario de modo que pueda ser cambiada libremente. La pulsación de la tecla correspondiente irá seguida de la pulsación de la tecla *intro*. Cuando el jugador consiga el orden correcto el juego finaliza mostrando el tiempo invertido en la resolución.

Un poco de historia El duelo de ordenación es sólo un evento más en el desarrollo del clásico *Ranarama* (Figura 1), de *Hewson Consultants*, que salió en 1986 para los microordenadores más populares de la época: ZX-Spectrum, Amstrad y Commodore. Se trata de uno de esos programas notablemente complejos, y los desarrolladores se las tenían que ingeniar para meter gráficos, efectos sonoros, mapas y heurísticas en las 48KB de RAM una máquina con un procesador extremadamente simple. En tan solo dos décadas muchos juegos son más de 100.000 veces más pesados, llegando prácticamente a duplicar su tamaño cada año. Están disponibles en Internet de forma gratuita emuladores para PC de aquellas máquinas, así como decenas de miles de los juegos originales. Una de las URLs más completas es `http://www.worldofspectrum.org`.

Figura 1: Carátula para el ZX-Spectrum.

Referencias

[AH01] Jörg Ardnt and Chistoph Haenel. *Pi Unleashed*. Springer, 2001.

[Bec82] Petr Beckmann. *{A history of}* π. Golem Press, 1982.

[Cha99] Jean-Luc Chabert, editor. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. Springer, 1999.