Autobahn tarea

Juan Esteban Carranza - jcarranza@unal.edu.co

February 2023

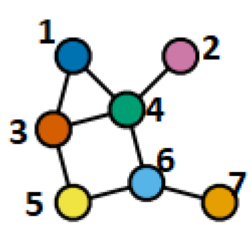
1 ¿Qué es una Autobahn y para qué sirve?

Autobahn son redes neuronales basadas en automorfismo de grafos (Automorphism-based graph neural networks), es decir por medio de la red neuronal se descompone un grafo en trayectorias y ciclos preservando la equivarianza de permutaciones después de hacer convolución de funciones.

2 ¿Por qué los autores proponen utilizar los automorfismos de grafos para reflejar las simetrías internas de un grafo?

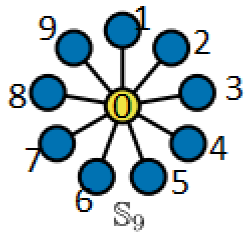
Porque por medio del grupo de metamorfismos de un grafo puedo encontrar todas las simetrías del grafo, es decir todas las permutaciones de vértices que me permiten preservar las estructura y las relaciones del grafo, esto me permite agrupar vértices del grafo dado que estos vértices en cuestión de relaciones cumplen la misma función, puedo reducir la complejidad computacional de redes neuronales basadas en grafos, en otras palabras me permite simplificar el grafo conservando lo esencial para que sea más fácil procesarlo computacionalmente.

3 Pruebe los isomorfismos sugeridos por la Figura 2.1 panel a

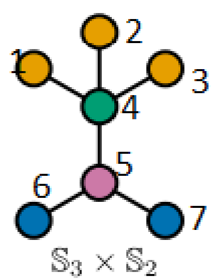


$\mathbb{Z}_1$

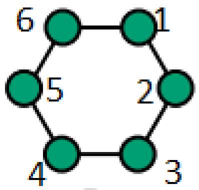
Este grafo representa el grupo cíclico de orden 1 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) dado que igual que en el grupo z1(que es la clase de equivalencia de 0 mod 1 donde el único elemento es 0) solo hay un elemento, no hay posibles permutaciones que conserven la simetría interna del grafo. Por está misma razón como lo dice la lectura "los grafos con la misma orbita tienen el mismo color", en este caso vemos que todos los vértices tienen color diferente lo cual nos indica que no hay vértices que sean equivalentes entre sí bajo la acción de algún grupo de simetría.



El grupo S_9 el el grupo simétrico de 9 elementos, consiste en el grupo de todas las posibles permutaciones de 9 elementos, es decir 9!=362880 permutaciones, de la misma forma en el grafo representado, los vértices 1-9 pertenecen a la misma orbita por lo cual se pueden permutar de 9! formas diferentes.



El grupo S_3xS_2 es el producto de los grupos simétricos de dos y tres elementos, el grupo S_2 consta de 2! permutaciones que son la identidad y la única transposición posible. Mientras el grupo S_3 consta de 3!=6 permutaciones posibles, por lo cual el producto de este grupo consta de 12 posibles permutaciones. Si miramos por otra parte el grupo de simetrías del grafo, nos plante a el mismo panorama, por un lado tenemos los elementos 1,2,3 que pertenecen a la misma orbita y se pueden permutar sin perder la simetría interna del grafo, sucede lo mismo con los vértices 6,7 que se pueden permutar sin problema, estas posibles permutaciones son las mismas permutaciones que tendríamos con S_3xS_2.



$\mathbb{D}_6$

En el caso del grupo D_6 Dideral 6 se tiene 12 elementos que son las posibles rotaciones y reflexiones de los elementos, en este caso no hay permutaciones individuales de elementos dado que se perdería la simetría del sistema, por esta razón y para mayor facilidad de entendimiento el grupo D_6 normalmente se representa con los ejes de simetría de un hexágono donde se tienen las mismas características, se pueden rotar los elementos en cualquier sentido y también se pueden reflejar los elementos respecto a cualquier eje de simetría de reflexión del hexágono y no se va a perder la simetría ni las relaciones iniciales.

4 Explique en que consiste la Figura 2.1 panel b. ¿Cuál es su relación con el grupo de automorfismos de D_6?

La figura consiste en la aplicación del algoritmo 1 para crear una neurona basada en el los automorfismos del grafo que en este caso es un grafo cíclico dirigido. En la grafica se ve que se toma como entrada la activación relacionada al grafo, despues se toma la matriz plantilla y se opera con la matriz de los pesos y se suma la constante b, teniendo como salida la matriz de entrada simplificada, que en este caso por la geometria de el Diedral de 6 elementos, no se puede simplificar más.