



**Instituto Superior de Engenharia
de Lisboa**

**Mestrado em Matemática
Aplicada para a Indústria**

MAS

(Modelação Avançada e Simulação)

Relatório Trabalhos Práticos

A51113 - José Casimiro

A21013 - Rui Nobre

Docentes:

Prof. Doutor Gonçalo Moraes Prof. Doutor Ricardo Enguiça

Maio 2023

1 Introdução

O presente relatório pretende, com o objetivo de consolidar os conhecimentos adquiridos, descrever a teoria e código desenvolvido, usados na realização dos trabalhos práticos solicitados ao longo da unidade curricular

2 Prática 1

Construir uma tabela em Excel, que simule um empréstimo para crédito habitação nas seguintes condições:

- Dívida: 100000€
- Euribor:3
- Spread:2
- Número de Anos: 30

Campos usados para a simulação:

- Ano
- Dívida - d
- Tx Juro (Euribor+Spread) - r
- Prestação Anual - c
o cálculo da Prestação anual, recorre à expressão de uma progressão geométrica de razão r .

$$d = \frac{c}{1+r} + \dots + \frac{c}{(1+r)^{30}} \Leftrightarrow c = d \left(\frac{1 - \frac{1}{1+r}}{\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^{30}}} \right) \quad (1)$$

- Juro Capital em dívida - $Vj = d \times r$
- Amortização - $Va = d - Vj$
- Dívida Final - $df = d - Va$

O resultado da simulação da Prática 1, encontra-se no excel: "Pratica1-Simulação EB Tx Fixa.xlsx"

3 Prática 2

Simular em Phyton um empréstimo para crédito habitação, com perturbações na taxa de Juro Anual, nas seguintes condições:

- Divida: 100000€
- Euribor: Taxa de juro Anual variável com média de 3% e desvio padrão de 1%
- Spread:2
- Numero de Anos: 30

Para a geração da taxa de juro, foi usado o método Box Muller para obter 30 valores de taxas, recorrendo a um LCM-linear congruent method para a geração de números aleatórios entre 0 e 1. A geração foi feita recorrendo à programação Python

No LCM os valores entre 0 e 1 são gerados recorrendo à seguinte expressão.

$$LCM \rightarrow \begin{cases} X_0 = \text{valor inteiro do relógio interno do PC} \\ X_n = (aa \times X_{n-1} + cc) \times \text{mod}(2^N) \end{cases} \quad (2)$$

Xn segue uma distribuição normal

onde :

$$aa = 110351525$$

$$cc = 12345$$

$$N = 31$$

Neste caso gerámos 30 valores de Xn para serem usados no cálculo das Gaussianas do método Box Muller:

A expressão para calcular as Gaussianas são:

$$G1 = \sqrt{-2 \times \log X_{n_{0a14}} \times \cos(2\pi \times X_{n_{15a30}})} \quad (3)$$

$$G2 = \sqrt{-2 \times \log X_{n_{0a14}} \times \sin(2\pi \times X_{n_{15a30}})} \quad (4)$$

São Gerados 15 valores para G1 e 15 valores para G2, onde G é conjunto do 30 valores

Como se pretende uma taxa média de 3% com desvio padrão de 1%, basta fazer:

$TX = AVG + G \times DP$, onde:

$$AVG = 3\%$$

$$DP = 1\%$$

- Prestação Anual - c

Como a Taxa de Juro Varia anualmente com os valores calculados no ponto anterior, o Valor da Prestação anual é calculado tendo em conta o valor da respetiva taxa do ano correspondente:

- exemplo para a prestação do Ano 1:

$$c = d \left(\frac{1 - \frac{1}{1+r_{Ano1}}}{\frac{1}{1+r_{Ano1}} - \frac{1}{(1+r_{Ano1})^{30}}} \right) \quad (5)$$

- exemplo para a prestação do Ano 2:

$$c = d \left(\frac{1 - \frac{1}{1+r_{Ano2}}}{\frac{1}{1+r_{Ano2}} - \frac{1}{(1+r_{Ano2})^{29}}} \right) \quad (6)$$

- exemplo para a prestação do ultimo Ano:

$$c = d \left(\frac{1 - \frac{1}{1+r_{Ano30}}}{\frac{1}{1+r_{Ano30}} - \frac{1}{(1+r_{Ano30})^1}} \right) \quad (7)$$

A simulação solicitada na Prática 2, encontra-se no ficheiro python "Simulador Emprestimo Bancario LCM e Box Muller.py", e retorna uma tabela com a simulação do emprestimo ao longo dos 30 anos de contrato

4 Prática 3

Simular em Phyton um empréstimo para crédito habitação, com perturbações na taxa de Juro Anual, balizadas por um ficheiro que contempla os valores da inflação registadas entre 1/01/1960 a 1/01/2021.

A geração das taxas de juro anuais, ao longo dos 30 anos, foi feita recorrendo, a um Nucleo Parabólico para definir a densidade da distribuição da inflação, onde depois são seleccionadas 30 taxas, recorrendo ao método de aceitação rejeição. Para tal serão gerados 1000 valores para cada uma das 30 taxas, sendo apenas aceite 1 para cada taxa, ou seja 30 no total.

Abaixo podemos ver as curva de densidade para os valores da Inflação com Largura de banda 5 e 10

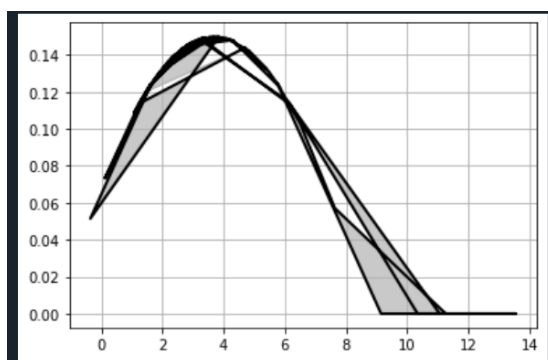


Figure 1: Densidade com BW =5

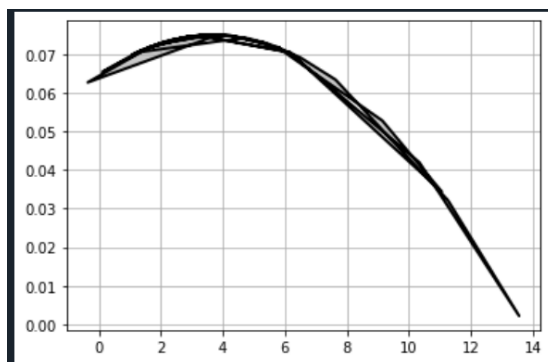


Figure 2: Densidade com BW =10

Para o Método de Aceitação rejeição vamos usar BW=10

a equação usada pelo núcleo é:

$$\frac{0.75}{h} \times \left(1 - \left(\frac{x - x_0}{h + 0.0} \right)^2 \right) \quad (8)$$

onde: h=10

x0 = valor médio da inflação

x = respectivo valor de inflação

Abaixo apresento a densidade das 1000 taxas de Juro geradas para calcular a Taxa para o 1º Ano

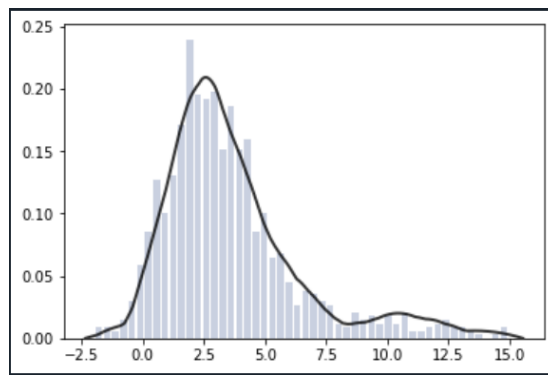


Figure 3: Aceitação Rejeição 1º Ano

A título de exemplo, para o gráfico acima o valor médio calculado foi de 3.7964

A simulação descrita, encontra-se no ficheiro python "pratica3.py". O Output mostra uma tabela com a simulação ao longo dos 30 Anos do empréstimo

5 Prática 4

Esta Simulação é a mesma que a realizada na Prática 3, mas com a adição do cálculo da probabilidade dos valores das taxas ocorrerem em diferentes intervalos.

O que foi feito, foi o de dividir em 4 intervalos os valores de Inflação existentes no ficheiro da Inflação. Como mencionado na prática 3, por Ano é eleita uma taxa, calculada com base no valor médio das 1000 taxas geradas. Essas 1000 taxas ocorrem de forma aleatória e é registado em qual dos 4 intervalos pertencem. Conhecendo esse valor é calculada a probabilidade para cada intervalo. No fim é disponibilizado um excel com a simulação do empréstimo onde aparecem os 4 intervalos e os respectivos valores de probabilidade.

Exemplo da tabela disponibilizada no Excel:

1	Juro Simulado	Dívida	Juro Total	Prestação Anual	Juro Capital em Dívida	Amortização	(1) [-2.36,2.12]	(2) [2.12,6.6]	(3) [6.6,11.07]	(4) [11.07,15.55]
2	0,0374	100000,0000	0,0574	7066,4599	5743,2816	1323,1783	0,296	0,576	0,1	0,028
3	0,0375	98676,8217	0,0575	7067,9404	5669,2306	1398,7099	0,283	0,596	0,085	0,036
4	0,0364	97278,1118	0,0564	6991,6175	5487,6123	1504,0052	0,308	0,574	0,079	0,039
5	0,0376	95774,1066	0,0576	7074,9238	5514,2413	1560,6825	0,305	0,554	0,105	0,036
6	0,0360	94213,4241	0,0560	6962,8491	5272,9150	1689,9341	0,301	0,586	0,078	0,035
7	0,0372	92523,4899	0,0572	7049,2379	5296,2442	1752,9937	0,306	0,566	0,093	0,035
8	0,0371	90770,4962	0,0571	7042,3272	5186,4025	1855,9247	0,276	0,606	0,08	0,038
9	0,0371	88914,5715	0,0571	7037,1973	5073,2405	1963,9568	0,299	0,575	0,089	0,037
10	0,0368	86950,6147	0,0568	7021,0007	4938,4731	2082,5277	0,304	0,577	0,096	0,023
11	0,0368	84868,0870	0,0568	7020,5601	4819,5691	2200,9910	0,317	0,568	0,08	0,035
12	0,0362	82667,0960	0,0562	6986,4177	4645,6857	2340,7319	0,316	0,575	0,07	0,039
13	0,0367	80326,3640	0,0567	7013,5579	4553,3953	2460,1626	0,298	0,584	0,088	0,03
14	0,0369	77866,2014	0,0569	7025,3277	4431,1056	2594,2221	0,296	0,582	0,096	0,026
15	0,0365	75271,9794	0,0565	7006,8613	4256,2700	2750,5912	0,295	0,589	0,082	0,034
16	0,0372	72521,3882	0,0572	7038,0814	4147,1615	2890,9199	0,3	0,583	0,078	0,039
17	0,0379	69630,4683	0,0579	7069,4510	4028,8397	3040,6114	0,308	0,551	0,1	0,041
18	0,0367	66589,8569	0,0567	7017,6278	3774,4728	3243,1550	0,298	0,583	0,083	0,036
19	0,0368	63346,7019	0,0568	7022,9377	3598,7652	3424,1726	0,278	0,61	0,079	0,033
20	0,0364	59922,5294	0,0564	7005,1185	3376,7352	3628,3833	0,302	0,577	0,088	0,033
21	0,0372	56294,1461	0,0572	7034,9191	3218,5961	3816,3229	0,302	0,576	0,083	0,039
22	0,0357	52477,8232	0,0557	6985,7601	2923,4058	4062,3543	0,309	0,573	0,08	0,038
23	0,0383	48415,4689	0,0583	7065,9742	2823,2438	4242,7304	0,295	0,567	0,101	0,037
24	0,0362	44172,7385	0,0562	7007,6039	2483,7885	4523,8155	0,323	0,553	0,093	0,031
25	0,0367	39648,9230	0,0567	7019,9224	2248,8775	4771,0449	0,292	0,581	0,094	0,033
26	0,0378	34877,8781	0,0578	7044,5327	2016,9277	5027,6050	0,303	0,577	0,082	0,038
27	0,0369	29850,2731	0,0569	7026,7933	1698,6398	5328,1534	0,307	0,572	0,08	0,041
28	0,0375	24522,1196	0,0575	7036,6477	1410,3877	5626,2600	0,303	0,564	0,096	0,037
29	0,0377	18895,8596	0,0577	7039,2873	1090,6126	5948,6746	0,302	0,564	0,098	0,036
30	0,0378	12947,1850	0,0578	7040,2983	748,5966	6291,7018	0,298	0,573	0,088	0,041
31	0,0391	6655,4833	0,0591	7048,7909	393,3077	6655,4833	0,276	0,582	0,095	0,047

Figure 4: Simulação do Empréstimo

A simulação descrita, encontra-se no ficheiro python "pratica4.py".