

# TP - entrega 4

[7114] Modelos y Optimización I Turno Lunes Segundo cuatrimestre de 2022

Alumno:	Cassi, Julián Ezequiel
Número de padrón:	96978
Email:	jcassi@fi.uba.ar

## $\mathbf{\acute{I}ndice}$

1.	Introducción	2
	Modelo	2
	2.1. Paso 1	2
	2.2. Paso 2	2
	2.3. Paso 3	
	2.4. Paso 4	7
	2.5. Paso 5	9
	2.6. Paso 6	
	2.7. Paso 7	13
3	Conclusión	13

#### 1. Introducción

En la presente entrega del trabajo práctico se intenta resolver el problema de los lavados mediante un modelo de programación lineal entera utilizando el software CPLEX. Se compara con la heurística usada en entregas anteriores, y se van realizando modificaciones en las restricciones del modelo para analizar cómo varía el resultado. Algunas de estas modificaciones se originan en el resultado obtenido con otras heurísticas, y otras son producto de un análisis del problema.

#### 2. Modelo

#### 2.1. Paso 1

Se tomaron los datos de esta nueva instancia del problema de los lavados y se corrió la heurística de la segunda entrega sobre estos datos. Esta heurística consiste en un algoritmo greedy Welsh-Powell, en el cual se ordenan en sentido decreciente los nodos del grafo según su grado y se colorean con el mismo color todos los nodos compatibles. El resultado fue de 171, siendo necesarios 12 lavados.

#### 2.2. Paso 2

Se corrió el código provisto por la cátedra sin hacerle modificaciones, excepto limitar el tiempo de ejecución a 10 minutos. A continuación se encuentra el gráfico de estadísticas tomado a los 85s de ejecución y la salida de "Engine log"

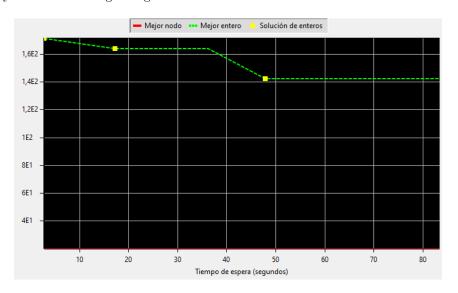


Figura 1: Gráfico de estadísticas paso 2

```
Version identifier: 22.1.0.0 | 2022-03-09 | 1a383f8ce
CPXPARAM TimeLimit 600
Legacy callback pi
Tried aggregator 1 time.
MIP Presolve eliminated 120467 rows and 0 columns.
MIP Presolve modified 12013 coefficients.
Reduced MIP has 34783 rows, 19182 columns, and 121915 nonzeros.
Reduced MIP has 19044 binaries, 138 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,34 sec. (253,66 ticks)
Found incumbent of value 2760,000000 after 0,47 sec. (403,01 ticks)
Probing time = 0,16 sec. (13,80 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Detecting symmetries...
Reduced MIP has 34783 rows, 19182 columns, and 121915 nonzeros.
Reduced MIP has 19044 binaries, 138 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,50 sec. (391,75 ticks)
Probing time = 0,17 sec. (13,12 ticks)
Clique table members: 15739.
MIP emphasis: balance optimality and feasibility.
MIP search method: dynamic search.
Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads.
Root relaxation solution time = 0,75 sec. (488,70 ticks)
```

N. 1				G /		
Nodes Node Left	Objective	IInf	Best Integer	Cuts/ Best Bound	ItCnt	$_{ m Gap}$
	-			0.0000		
* 0+ 0 * 0+ 0			$2760,0000 \\ 1467,0000$	0,0000		100,00% $100,00%$
* 0+ 0			171,0000	0,0000		100,00 %
* 0+ 0	20,0000	4740	171,0000 164,0000	20,0000 20,0000	11	$88,30\% \\ 87,80\%$
0 0	20,0000	1852	164,0000	Cuts: 131	9640	87,80 %
0 0	20,0000	2161 2068	$164,0000 \\ 164,0000$	Cuts: 1676 Cuts: 147	17368 29708	87,80 %
* 0+ 0	20,0000	2008	154,0000	20,0000	29708	87,80% $87,01%$
* 0+ 0			152,0000	20,0000		86,84 %
* 0+ 0 * 0+ 0			$147,0000 \\ 144,0000$	20,0000 20,0000		86,39% $86,11%$
* 0+ 0			142,0000	20,0000		85,92%
0 0	$-1,00000\mathrm{e}\!+\!75$ $20,0000\mathrm{e}$	0 1919	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000 Cuts: 1709	29708 36509	$85,92\% \\ 85,92\%$
0 0	20,0000	1618	142,0000	Cuts: 156	42826	85,92 %
0 0	20,0000	2048	142,0000	Cuts: 1546	50451	85,92%
Heuristic stil	l looking. 20,0000	940	142,0000	20,0000	50451	85,92 %
Elapsed time =	82,20 sec. (		8 ticks, tree =	= 0,02 MB, so		9)
1 3 2 3	37,0000 20,0000	$1017 \\ 1726$	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000 20,0000	56376 56094	$85,92\% \\ 85,92\%$
3 4	37,0000	1275	142,0000	20,0000	59665	85,92%
4 5 5 6	37,0000 37,0000	1299 1130	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000	69897 69799	$85,92\% \\ 85,92\%$
6 7	37,0000	1791	142,0000	20,0000	76012	85,92%
7 4 8 8	46,2868 37,0000	1233 813	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000 20,0000	74423 80993	$85,92\% \\ 85,92\%$
9 11	37,0000	686	142,0000	20,0000	105859	85,92 %
13 14	56,0000	896	142,0000	20,0000	125575	85,92 %
Elapsed time = 15 17	122,61 sec. 37,0000	(96023, 729	142,0000	= 0,03 MB, se	olutions = $141432$	= 9) 85,92 %
22 17	56,0000	798	142,0000	20,0000	141873	85,92%
$\begin{array}{ccc} 33 & 9 \\ 45 & 26 \end{array}$	46,2868 50,0000	1312 869	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000 20,0000	94279 197609	$85,92\% \\ 85,92\%$
57 29	56,0000	1011	142,0000	20,0000	246803	85,92%
75 5	20,0000 59,0000	2161	$142,0000 \\ 142,0000$	20,0000 20,0000	70292	85,92% $85,92%$
95 76 113 82	59,0000	938 759	142,0000	20,0000	$416416 \\ 450823$	85,92 %
137 93	69,0000	981	142,0000	20,0000	480492	85,92 %
165 124 Elapsed time =	66,1439 207,83 sec.	703 (106256	142,0000 3,61 ticks, tree	21,3260 $= 2,87  MB, = 2,83  MB$	592441 solutions	84,98 % = 9)
203 155	110,0000	352	142,0000	21,9753	652623	84,52 %
250   140 $*   256+   175$	95,0769	479	$142,0000 \\ 140,0000$	21,9753 $21,9753$	645769	$84,52\% \\ 84,30\%$
313 256	101,0000	473	140,0000	21,9753	868607	84,30 %
* $374+ 282$ 377 261	101,0000	410	136,0000 $136,0000$	21,9753 21,9753	877427	83,84% $83,84%$
* 465+ 350	101,0000	410	135,0000	21,9753	811421	83,72 %
* 472+ 319	400 0000		124,0000	21,9753		82,28 %
504 382 601 377	120,0000 121,0000	$145 \\ 141$	124,0000 $124,0000$	21,9753 21,9753	$925974 \\ 1055267$	82,28 % 82,28 %
* 617 396	integral	0	123,0000	21,9753	1097552	82,13 %
* 652 400 658 379	integral 46,2868	904	122,0000 122,0000	21,9753 21,9753	1106265 1061607	81,99 % 81,99 %
679 392	46,2868	896	122,0000	21,9753	1168565	81,99 %
702 395 736 417	88,8299	786 901	122,0000 122,0000	21,9753 21,9753	$\begin{array}{c} 1161078 \\ 1253466 \end{array}$	81,99 % 81,99 %
	56,0000 280,84 sec.	(116015			solutions	= 16)
759 426	82,6004	925	122 , $0000$	21,9753	1287965	81,99 %
787 457 809 505	78,0000 97,0000	589 439	122,0000 122,0000	21,9753 21,9753	$1359855 \\ 1513274$	81,99 % 81,99 %
840 488	109,0000	263	122,0000	21,9753	1445407	81,99 %
878 515 934 501	106,0000 42,3984	$\frac{352}{895}$	$122,0000 \\ 122,0000$	21,9753 21,9753	$\begin{array}{c} 1529794 \\ 1517078 \end{array}$	81,99 % 81,99 %
* 951 594	integral	0	121,0000	21,9753	1735291	81,84 %
975 581 998 615	cutoff 70,0000	722	$121,0000 \\ 121,0000$	21,9753 21,9753	1703768 1835706	81,84 % 81,84 %
1025 634	52,0000	1001	121,0000	21,9753	1854074	81,84 %
* 1058+ 660	71 7204	779	120,0000	21,9753	1054840	81,69 %
1074 674 Elapsed time =	71,7204 : 357,30 sec.	773 (125822	120,0000 2,71 ticks, tree	21,9753 $= 7,08  MB, = 100$	1954840 solutions	81,69 % = 18)
1095 676	73,0221	1009	120,0000	21,9753	1958451	81,69 %
1123 736 1147 696	90,0491 59,0000	480 694	120,0000 $120,0000$	21,9753 21,9753	2131096 2018663	81,69% 81,69%
1175 753	82,2400	784	120,0000	21,9753	2200722	81,69 %
1226 815 1328 795	118,0000 102,0000	$\frac{117}{634}$	120,0000 120,0000	21,9753 21,9753	2350470 2317970	81,69% 81,69%
1355 803	cutoff		120,0000	21,9753	2339812	81,69 %
1404 861 * 1423 810	93,7641	618 0	120,0000	21,9753	2474997	81,69 %
1439 861	integral 78,0000	832	119,0000 119,0000	21,9753 $21,9753$	2331143 2460396	$81,53\% \\ 81,53\%$
1458 874	24,3333	941	119,0000	24,3333	2553600	79,55 %
Elapsed time = 1484 890	437,28 sec. 51,0000	(135561 764	1,29 ticks, tree 119,0000	$e = 9,43 \text{ MB}, \\ 24,3333$	solutions 2576455	= 19) $79,55%$
1507 875	24,4833	1277	119,0000	24,3333	2562314	79,55 %
1532 931 1562 1012	79,2925 103,0000	394 570	119,0000 119,0000	24,3333 $24,4833$	2669145 2907174	$79,55\% \\ 79,43\%$
1603 1017	64,9095	797	119,0000	24,4833	2928676	79,43%
1634 985 1663 1073	59,0000 117,0000	922 203	119,0000 119,0000	28,0000 28,0000	2841470 3049739	$76,47\% \\ 76,47\%$
1687 1083	37,0000	1003	119,0000	28,0000	3098275	76,47 %
1710 1088 1735 1151	64,0000	945	119,0000	28,0000	3117595	76,47 %
	57,0000 524,28 sec.	731 (145496	119,0000 3,62 ticks, tree	28,0000 $= 12,93$ MB,	3288949 solutions	76,47% $= 19)$
1758 1111	104,3636	591	119,0000	28,0000	3161484	76,47%
1791 1118 1827 1195	111,0000 84,0000	213 591	119,0000 119,0000	28,0000 28,0000	3170009 3410712	76,47 % 76,47 %
Starting limit	ed solution p	olishin	g .			
$\begin{array}{ccc} 1846 & 1227 \\ 1872 & 1157 \end{array}$	101,0000 46,2868	$\frac{461}{1191}$	$119,0000 \\ 119,0000$	28,0000 28,0000	3507627 $3293404$	$76,47\% \\ 76,47\%$
1895 1238	88,6839	606	119,0000	28,0000	3542320	76,47%
1912 1235	46,2868	1143	119,0000	28,0000	3531022	76,47%

```
1940 1260 56,0000 1230 119,0000 28,0000 3614006 76,479
1965 1347 83,0000 753 119,0000 28,0000 3849002 76,479
1986 1325 97,0000 398 119,0000 28,0000 3763305 76,479
Elapsed time = 600,13 sec. (155402,32 ticks, tree = 14,50 MB, solutions = 19)

Implied bound cuts applied: 6527
Zero-half cuts applied: 300
Gomory fractional cuts applied: 4

Root node processing (before b&c):
Real time = 81,91 sec. (85899,86 ticks)
Parallel b&c, 12 threads:
Real time = 518,31 sec. (72069,57 ticks)
Sync time (average) = 102,92 sec.
Wait time (average) = 0,00 sec.

Total (root+branch&cut) = 600,22 sec. (157969,43 ticks)
```

El resultado obtenido fue de 119 unidades de tiempo para poder realizar todos los lavados y se llegó a esa solución entre los 357s y 437s, más de dos minutos y medio antes del límite establecido de 600s. Se observa que el resultado encontrado por el modelo mejora rápidamente al principio, pero lo hace más lentamente a medida que el resultado se acerca más al óptimo. También se destaca que el resultado con el modelo de PLE básico es mucho mejor al obtenido en el paso 1.

#### 2.3. Paso 3

En este paso se realizaron cambios en el código para que la máxima cantidad de colores posible fuese 15, debido a que con una heurística se econtró que no eran necesarios más lavados. A continuación se encuentra el resultado de la ejecución del modelo:

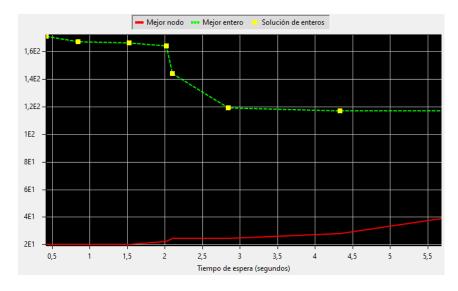


Figura 2: Gráfico de estadísticas paso 3

```
Version identifier: 22.1.0.0 | 2022-03-09 | 1a383f8ce

CPXPARAM TimeLimit 600

Legacy callback pi

Tried aggregator 1 time.

MIP Presolve eliminated 13053 rows and 0 columns.

MIP Presolve modified 1347 coefficients.

Reduced MIP has 3945 rows, 2085 columns, and 13532 nonzeros.

Reduced MIP has 2070 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.

Presolve time = 0,03 sec. (23,27 ticks)

Found incumbent of value 300,000000 after 0,05 sec. (37,25 ticks)

Probing time = 0,02 sec. (4,04 ticks)

Tried aggregator 1 time.

Detecting symmetries...

Reduced MIP has 3945 rows, 2085 columns, and 13532 nonzeros.

Reduced MIP has 2070 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.

Presolve time = 0,02 sec. (12,94 ticks)

Probing time = 0,02 sec. (4,04 ticks)

Clique table members: 1875.

MIP emphasis: balance optimality and feasibility.

MIP search method: dynamic search.

Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads.

Root relaxation solution time = 0,13 sec. (148,88 ticks)

Nodes

Nodes

Nodes

Cuts/

Best Bound ItCnt Gap
```

```
\begin{smallmatrix}0&,0000\\0&,0000\\20&,0000\\20&,0000\end{smallmatrix}
                                                                                                                               300,0000 \\ 171,0000 \\ 171,0000 \\ 167,0000
                                                                                                                                                                                                                                       100,00 %
100,00 %
88,30 %
                                                                  20,0000 1121
                                                                                                                                                                                                                   1890
                                                                                                                                                                                                                                           88,02 %
                                                                                               1075
                                                                                                                                                                       Cuts
                                                                                                                                                                                                                   3376
                                                                  20,0000
                                                                                                                               167,0000
                       o
                                                                                                                                                                                          466
                                                                                                                                                                                                                                          88,02 %
                                                                                                                                                                              20.0000
                                                                                                                                166,0000
                                                                                                                                                                                                                                           87.95 %
                                                                                                                               166,0000
166,0000
164,0000
164,0000
162,0000
146,0000
                                                                                                                                                                       20,0000
Cuts: 1046
22,3129
Cuts: 867
24,4000
24,4000
                                                                                                                                                                     Cuts
                                                                  22,3129
                                                                                               1075
                                                                                                                                                                                                                   7555
                                                                  24,4000
                                                                                                                                                                              24,4000
24,4000
                                                                                                                               144,0000
                                                                                                                                                                                                                                          83,06 %
                                                   -1.00000e + 75
                                                                                                      0
                                                                                                                                                                                                                10779
                       0
                                                                                                                                                                                                                                          83.06 %
                                                                                                                               119,0000
119,0000
119,0000
119,0000
119,0000
119,0000
119,0000
                                                                                                                                                                              24,4000
                                                                                                                                                                                                                                          79.50 %
                                                                  24,4190
24,8376
25,1408
25,4164
25,6319
25,7120
25,7848
                                                                                                                                                                       24,4000
Cuts: 685
Cuts: 668
Cuts: 705
Cuts: 582
Cuts: 570
Cuts: 488
                                                                                                  857
                                                                                                                                                                                                                 15477
                                                                                                                                                                                                                                          79 28 %
                                                                                                                                                                                                                 17933
19017
20016
                                         0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
                                                                                                                                                                                                                                          78,20 %
                                                                                                                                                                                                                 21211
                                                                                                  922
                                                                                                                                                                                                                 21877
                                                                                                                                                                                                                                          78,13%
                       0
                                                                                                  945
                                                                                                                               119,0000
                                                                                                                                                                        Cuts:
                                                                                                                                                                                          466
                                                                                                                                                                                                                 22531
                                                                                                                                                                                                                                          78.03%
                                                                   25.8287
                                                                                                1029
                                                                                                                               119,0000
                                                                                                                                                                        Cuts:
                                                                                                                                                                                          425
                                                                                                                                                                                                                                          77.96 %
                                                                                                                               119,0000
119,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                       Cuts: 425
Cuts: 490
26,2563
Cuts: 518
Cuts: 502
Cuts: 363
                                                                                                                                                                                                                                         77,96 %
77,94 %
77,56 %
76,15 %
66,67 %
                                                                  25,8736
                                                                                                1044
                                                                                                                                                                                                                 24423
                                                                  25,9381
26,0113
26,0693
                                                                                                                                                                                                                26842
27469
                                                                                                  954
                                         0
2
                                                                   26.0946
                                                                                                  959
                                                                                                                               117,0000 \\ 117,0000
                                                                                                                                                                        Cuts:
                                                                                                                                                                                          584
                                                                                                                                                                                                                 28238
                                                                                                                                                                                                                                         ^{66,67\,\%}_{66,67\,\%}
                            time = 3 5
                                                                   26,0946
                                                                                                                             117,0000

1, tree = 117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                                                                                                                                                                                 28238
                                                                                   (6438,90
62 814
00 785
88 661
    Elapsed
                                                   5,52
                                                                                                                ticks
                                                                                                                                                          0,02 MB.
                                                                                                                                                                                        soluti
                                                                                                                                                                                                                             10)
                                                                  sec. (6
39,0062
39,0000
53,0788
77,0000
66,6943
                                                                                                                                                                              39,0000
39,0000
39,0000
39,0000
                                                                                                                                                                                                                 30567
                                                                                                                                                                                                                                         66.67 %
                                                                                                                                                                                                                 33164
36586
43701
                                                                                                  \begin{array}{c}4\,1\,7\\5\,1\,5\end{array}
                                   110
                 128
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                                                                                                                                                                                 77317
97840
                 198
                                   \frac{171}{285}
                                                                   97,5696
                                                                                                  308
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                                                                                                                                                                                                          66,67 %
66,67 %
                 401
                                                                116,0000
                                                                                                  \frac{54}{477}
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                                                                                                                                                                              119305
                                                                                                                                                                             39,0000
39,0000
39,0000
MB, solu
39,0000
                                                                   65,0000
88,0000
77,4023
                                   303
                                                                                                                                                                                                              127138
                                                                                                               ticks , tree = 117,0000
                                                                                                                                                           19,09
                                                                   \begin{array}{lll} {\rm sec} \; . & (\,9\,6\,1\,2\,, 9\,8 \\ 6\,5\,, 9\,9\,5\,1 & 5\,2\,4 \end{array}
                                                                                                                                                                                                             \begin{array}{r} {
m o\,n\,s} = \\ 265998 \end{array}
              1544
                                 1200
                                                                101,0000
                                                                                                  262
                                                                                                                               117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                                                                                                                                                                             354521 \\ 445173
                                                                                                                                                                                                                                          66,67 %
              1817
                                 1439
                                                                 108,0000
                                                                                                   219
                                                                                                                                                                              39,0000
                                                               108,0000
104,0000
96,0000
58,5645
58,0000
96,0000
110,3227
                                                                                                                              117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                             39,0000
39,0000
39,0000
39,0000
39,0000
42,4738
                                                                                                                                                                                                             445173
492894
568302
668009
733974
833317
902185
                               1604
1883
2185
2433
2796
                                                                                                  272
330
522
628
398
202
              2109
             2109
2394
2693
3135
3491
3985
                                                                                                                                                                                                                                         66,67 %
66,67 %
66,67 %
66,67 %
63,70 %
                               3220
Repeating presolve.

Tried aggregator 1 time.
MIP Presolve eliminated 124 rows and 60 columns.
Reduced MIP has 3821 rows, 2025 columns, and 13232 nonzeros.
Reduced MIP has 2010 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,03 sec. (15,58 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Reduced MIP has 3821 rows, 2025 columns, and 13232 nonzeros.
Reduced MIP has 3821 rows, 2025 columns, and 13232 nonzeros.
Reduced MIP has 2010 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,02 sec. (12,70 ticks)
Represolve time = 0,13 sec. (51,62 ticks)
4071 0 39,5345 798 117,0000 Cuts: 460 97144
4071 0 39,8751 767 117,0000 Cuts: 752 97247
4071 0 40,5657 760 117,0000 Cuts: 752 97247
4071 0 40,9261 741 117,0000 Cuts: 686 97560
41,1446 706 117,0000 Cuts: 678 97632
40,711 0 40,9261 741 117,0000 Cuts: 679 97650
41,1446 706 117,0000 Cuts: 707 97715
Cuts: 326 97771
    Performing restart 1
                                                                                                                             ks)
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                             \frac{972478}{974220}
                                                                                                                                                                                                                                         63,09\% \\ 63,09\%
                                                                                                                                                                                                              975608
                                                                                                                                                                                                                                          63.09 %
                                                                  40,9261
41,1446
41,2539
41,3371
41,4488
41,9487
42,1170
42,2478
                                                                                                                                                                                         686
678
707
326
710
307
718
606
                                                                                                                                                                                                              976329
                                                                                                                                                                                                                                          63.09 %
                                                                                                                                                                       Cuts:
Cuts:
Cuts:
Cuts:
              4071
                                                                                                                                                                                                             979395
                                                                                                                                                                                                                                          63,09 %
                                                                                                  689
              4071
                                                                                                                               117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                        Cuts:
                                                                                                                                                                                                             980450
                                                                                                                                                                                                                                         63,09 %
              4071
                                                                                                   636
                                                                                                                                                                        Cuts:
                                                                                                                                                                                                              981242
                                                                                                                                                                                                                                          63,09 %
                                                                                                                                                          Cuts: 606 981242

Cuts: 592 981711

Cuts: 289 982270

Cuts: 609 982625

43,1847 982625

= 0,02 MB, solutions =

43,2390 983693

43,5019 988554

43,6731 906510
                                                                                                                               117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
              4071
                                                                   42.2889
                                                                                                   638
                                                                                                                                                                                                                                          63.09 %
                                                                   42,2889
42,3819
42,3927
42,3927
              4071
              4071
4071
4071
                                                                                                                                                                                                                                          63,09\%
63,09\%
                                                                                                                    117,0000
ticks, tree
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                             time = 27,97
    Elapsed
4074
                                                                  42,3927
sec. (
42,8797
53,8117
64,3542
67,4816
59,0096
                                                                                     (25891,82
7 589
7 557
                                                                                                                                                                                                                                   10)
63,04 %
              4083
                                                                                                                                                                                                                                         62,82\% \\ 62,67\%
                                                                                                                                                                             43,5019

43,6731

44,1324

45,8211

45,8211

45,8211

45,9526

45,9526
              4102
                                                                                                   424
                                                                                                                                                                                                              996519
                                                                                                   459
483
                                                                                                                                                                                                           1020918
1040980
             4202
4270
4474
4841
                                                                   80,3230
64,0000
88,9032
66,7537
                                                                                                  483
426
485
359
                                                                                                                                                                                                           1040980
1058518
1029562
1161631
              5389
                                                                                                   480
                                                                                                                                                                                                           1198600
              6014
                                 1392
                                                                   77.9911
                                                                                                   411
                                                                                                                               117,0000
                                                                                                                                                                                                           1292241
                                                                                                                                                                                                                                          60.72 %
    6014
Elapsed
6631
7095
7869
8341
9243
                                                                117,0000
ticks, tree
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                         45,9526 129224

34,74 MB, solutions of the solutions 48,0558 135589

49,3712 144564

49,3712 156043

49,3712 161546

54,7537 169754

54,7537 178599
                             time
                                                   40.74
                                                                                                                                                                                                                                         58,93 %
57,80 %
57,80 %
57,80 %
                                 1768
                                                                                                                                                                                                           1355895
                               2365
3169
3577
4312
                                                                                                                                                                                                          1355895
1445644
1560438
1615461
                                                                                                                                                                                                           1697546
                                                                                                                                                                                                                                          53,20 %
                                                                                                                                                                                                                                          53,20 %
              9966
                                5182
                                                                102,5971
                                                                                                  336
                                                                                                                                                                                                           1785997
           10801
                                 5701
                                                                113,6500
                                                                                                   233
                                                                                                                               117,0000
                                                                                                                                                                              55,8132
58,6226
                                                                                                                                                                                                           1846083
                                                                                                                                                                                                                                          52,30 %
49,90 %
            11577
                                 6546
                                                                   75 3423
                                                                                                   455
                                                                                                                                117 0000
                                                                                                                                                                                                           1927427
                                 7205
                                                                                                                                                                              59,1081
                                                                                                                                                                                                           2010684
           12288
13080
apsed
14130
15229
                                                                  91,5923
                                                                                                                                                                             59,8669
,59 MB, s
60,9152
61,0533
                                                                                                  416 \\ 12,04
                            time = 8599
9366
                                                   91,5923
54,55 sec. (4
109,7500
106,0000
                                                                                                                                                                                                          2051276
clutions
2155631
2212525
                                                                                                                     ticks, tree
117,0000
117,0000
                                                                                                  \frac{255}{299}
           16289 10180
17058 11565
                                                                101,0000
                                                                                                                               117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                              61,5115
                                                                                                                                                                                                          2280194 \\ 2400952
                                                                                                                                                                                                                                          47,43%
```

96,5923

62,9143

46,23 %

```
105,1053
101,9761
97,2536
97,5332
109,0000
                                                                                                                                                                       117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                                                   63,3267
63,8791
64,0000
64,0000
                  17946 11991
18922 12775
19837 13516
20560 14415
                                                                                                                                                                                                                                                                        2446355
2526722
2595439
2670451
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 45,87\%
45,40\%
45,30\%
45,30\%
                                                                                                                                   330
359
421
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  45,30 %
                   21261
                                           15388
                                                                                                                                    323
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  45,30 %
                    22069
                                           16086
                                                                                       101,0000
                                                                                                                                    289
                                                                                                                                                                                                                                     64,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                         2856512
                                                                                                                                                                                                                  64,0000

456,19 MB,

64,0000

64,2963

64,3972

64,5127

64,7933

64,9927
                                                                                                                                                                       117,0000
ks, tree
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
           Elapsed
22817
                                           time :
                                                                       68.95
                                                                                                                     (54856.73
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  10)
                                                                                                                                   338
225
296
373
309
                                                                                           93.5153
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  45.30 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 45,30\%
45,30\%
45,05\%
44,96\%
44,86\%
44,62\%
                    27593
28347
                                         21147
                                                                                       116,0000
                                                                                                                                    198
                                                                                                                                                                                                                                                                         3362021
                                           22093
                                                                                          73.3221
                                                                                                                                    432
                                                                                                                                                                                                                                                                         3462744
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  44.45 %
                                                                                                                                                           117,0000
117,0000
117,0000
ticks, tree
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                                                   65,0000 3502384
65,0000 3561187
65,0000 3643389
,34 MB, solutions
65,0000 3737888
65,0000 3836374
65,1964 3937652
                   29164 22477
                                                                                       101,0000
                                                                                                                                   336
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 44,44%
           29164 22477
29815 22987
30395 23647
Elapsed time
31157 24388
32114 25314
                                                                                        111 0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  44 44 %
                                                                                                                           283
34409 ,:
345
324
                                                                                        101,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  44,44 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 10)
44,44 %
44,44 %
44,28 %
                                                                                 ,89 sec. (
103,3118
                                                                                                                                                                                                                   624
                                                                                       109,4219
81,7049
97,6768
                    33021 26268
                                                                                                                                    430
                                                                                                                                                                                                                                   65,1964
65,2647
65,3040
65,4425
65,5679
65,6490
65,8577
65,8834
                                                                                                                                                                       117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                    33954 26944
                                                                                                                                   371
                                                                                                                                                                                                                                                                         4000950
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 44.22 %
                                                                                       97,6768
93,1548
96,7419
79,6863
98,7273
109,0000
                    34613 27472
                                                                                                                                    406
                                                                                                                                                                                                                                                                         4056932
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 44.18 %
                  34613 27472
35335 28201
36209 28544
37043 29487
37770 30335
38680 31126
                                                                                                                                                                                                                                                                       4056932
4146974
4192859
4312894
4401602
4482163
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                44,18 %
44,07 %
43,96 %
43,89 %
43,71 %
43,69 %
                                                                                                                                   389
381
296
                                                                                          97,5625
                                                                                                                                                                         117,0000
                                                                                                                                    332
                                                                       102,72 sec.
91,3684
93,1548
           Elapsed
39381
                                         time = 31712
                                                                                                                        (73967.38
                                                                                                                                                                ticks, tree
117,0000
                                                                                                                                                                                                                        893,82 MB, solutions
65,9791 4554824
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  10)
43,61%
                                                                                                                                    414
                                                                                                                                                                      117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000
                                                                                                                                                                                                                                   65,9791
66,1214
66,1214
66,2417
66,4753
66,5982
66,5982
66,7537
66,7961
                    40381
                                           32990
                                                                                                                                   393
                                                                                                                                                                                                                                                                         4708558
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 43.49 %
                                                                                       93,1548
108,2677
107,4217
112,0000
97,5625
91,7347
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 43,49 %
43,49 %
43,38 %
43,18 %
43,08 %
43,08 %
                    41059
                                         32889
                                                                                                                                     332
                                                                                                                                                                                                                                                                         4698372
                   42041
42870
43385
43954
                                        34024
34523
35865
                                                                                                                                                                                                                                                                         4826306
4865502
4983585
                                                                                                                                    293
                                         36229
                                                                                                                                    421
                                                                                                                                                                                                                                                                         5032607
                    44920 36426
                                                                                            93,1548
                                                                                                                                   356
                                                                                                                                                                                                                                                                         5054900
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  42,95%
                    45791
                                         37348 \\ 37776
                                                                                       111,0000
                                                                                                                                    281
                                                                                                                                                                                                                                                                         5146181
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  42.91%
                                                                       111,0000
96,6429
126,45 sec.
116,0000
85,7991
93,1548
                                                                                                                                                                                                                       66,7961
66,8848
1124,25 MB,
67,0455
67,2072
67,4964
67,4976
67,6354
67,7837
67,9716
68,0795
68,2874
68,3511
1343,72 MB,
68,5955
68,6756
68,8825
69,2866
69,4579
69,5163
69,8149
70,0910
70,4877
           45791
46776
Elapsed
47688
48440
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 42,83 %
                                          time:
39016
39532
40511
                                                                                                                                                               ticks, tree
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 42,83\%
= 10)
42,70\%
42,56\%
42,31\%
                                                                                                                                                                                                                                                                         5453893
                                                                                                                                                                       117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

cks. tree
                                                                                       106,0000
93,7738
87,2785
                   50469
                                           41284 \\ 42096
                                                                                                                                   298
                                                                                                                                                                                                                                                                         5543458
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  42,31\%
42,19\%
                    51319
                                                                                                                                   348
                                                                                                                                                                                                                                                                         5625851
           51319 42096

52272 42675

53430 44387

54280 44438

55459 46128

56423 47368

Elapsed time =

57444 47512
                                                                                                                                                                                                                                                                        5625851
5670264
5831881
5829463
5981163
6086784
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 42,19 %
42,07 %
41,90 %
41,81 %
41,63 %
41,58 %
                                                                                                                                    432
                                                                                       87,2785
104,6444
94,5813
107,2337
111,9519
                                                                       153,95 sec.
104,3027
                                                                                                                                                                                                                                                                        solutions
6106187
                                                                                                                        (93073,05
                                                                                                                                                                ticks, tree
117,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                =10) \\ 41,37\%
                                                                                                                                   262
                   58279 48286
                                                                                          91.7347
                                                                                                                                   402
                                                                                                                                                                        117,0000 \\ 117,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                         6172850
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 41.30 %
                    59415 49454
                                                                                       101,0043
                                                                                                                                    337
                                                                                                                                                                                                                                                                         6283519
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 41,13%
                    60481
61712
62925
63995
                                                                                                                                                                        117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                           50303
                                                                                                                                                                                                                                                                         6362483
                                                                                                                                   327
210
341
372
                                                                                       101,0000
112,0000
101,7663
91,6863
96,5923
                    64922
                                           54998
                                                                                                                                   \frac{355}{347}
                                                                                                                                                                         117,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                         6740115
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  40,09%
                    65754
                                           55456
                                                                                           97.6569
                                                                                                                                                                        117,0000
                                                                                                                                                                                                                                     70.4877
                                                                                                                                                                                                                                                                         6784570
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 39.75 %
                    69284
                                           58836
                                                                                            78,8731
                                                                                                                                    408
                                                                                                                                                                        117,0000
                                                                                                                                                                                                                                     70,7600
                                                                                                                                                                                                                                                                         7123609
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 39,52 %
           Elapsed time = 72773 61430 76147 65349 79385 68586
                                                                                      70 sec.
116,0000
107,0000
106,3750
                                                                                                                                                                  ticks, tre
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                        (105482,09
                                                             = 218.70
                                                                                                                                                                                                                            1718,18 MB,
                                                                                                                                                                                                                                    70,9221
70,9221
71,0545
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 = 10)
39,38\%
39,38\%
39,27\%
Performing restart 2

Repeating presolve.
Tried aggregator 1 time.
MIP Presolve eliminated 130 rows and 0 columns.
Reduced MIP has 3691 rows, 2025 columns, and 19179 nonzeros.
Reduced MIP has 2010 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,11 sec. (19,74 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Reduced MIP has 3691 rows, 2025 columns, and 19179 nonzeros.
Reduced MIP has 3691 rows, 2025 columns, and 19179 nonzeros.
Reduced MIP has 3691 rows, 2025 columns, and 19179 nonzeros.
Reduced MIP has 2010 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,03 sec. (17,13 ticks)
Represolve time = 38,16 sec. (88,80 ticks)

80576 0 104,0000 375 117,0000 Cuts: 289 828402(
80576 0 104,0000 434 117,0000 Cuts: 480 828486(
80576 0 104,0000 274 117,0000 Cuts: 57 828518:
80576 0 104,0000 327 117,0000 Cuts: 447 828550:
80576 0 104,0000 327 117,0000 Cuts: 486 828530.
80576 0 104,0000 327 117,0000 Cuts: 486 828639.
80576 0 104,0000 322 117,0000 Cuts: 486 828639.
80576 0 104,0000 358 117,0000 Cuts: 487 828718.
80576 0 104,0000 358 117,0000 Cuts: 427 828711.
80576 0 104,0000 345 117,0000 Cuts: 487 828718.
80576 0 104,0000 345 117,0000 Cuts: 427 82871.
80576 0 104,0000 322 117,0000 Cuts: 427 82871.
80576 0 104,0000 321 117,0000 Cuts: 427 82871.
80576 0 104,0000 321 117,0000 Cuts: 427 82871.
80576 0 104,0000 329 117,0000 104,0000 829578.
81319 401 116,0000 139 117,0000 104,0000 829578.
81319 401 116,0000 139 117,0000 104,0000 829578.
81319 401 116,0000 139 117,0000 104,0000 829578.
81319 401 116,0000 269 117,0000 104,0000 829578.
81319 401 116,0000 269 117,0000 104,0000 833856.
84913 3295 108,5455 299 117,0000 104,0000 833856.
84913 3295 108,5455 299 117,0000 104,0000 87098.
89388 7171 112,0000 269 117,0000 104,0000 87098.
89388 7171 112,0000 269 117,0000 104,0000 87098.
89388 7171 112,0000 269 117,0000 104,0000 87098.
89388 7171 112,0000 269 117,0000 104,0000 87098.
89388 7171 112,0000 269 117,0000 105,0000 97352.
           Performing restart 2
                                                                                                                                                                                                                          Cuts.
104,0000 828510.
104,0000 8295783
104,0000 8338560
104,0000 8570982
104,8207 8893738
105,0000 982572
105,0000 9478987
300,91 MB, solutions
105,0000 935214
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 11,11 %
11,11 %
10,41 %
10,26 %
10,26 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         10)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  = 10)
10,26\%
                                                                                      107,0000
113,0000
112,0000
114,0000
116,0000
114,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  10 26 %
                                                                                                                                   347
284
253
228
326
314
                                                                                                                                                                       117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                                                \begin{array}{ccccc} 105,0000 & 10057500 \\ 105,0500 & 10310753 \\ 105,1468 & 10612992 \\ 105,3685 & 10869705 \\ 105,4653 & 11133068 \\ 105,6435 & 11515906 \\ 105,7073 & 11767840 \\ 105,8329 & 12080603 \end{array}
                102579 18677
105493 20570
108696 23460
112096 26111
                115211 28500
118770 32225
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     ^{9,86\,\%}_{9,71\,\%}
                122185
                                         34560
                                                                                       116,0000
                                                                                                                                   286
                                                                                                                                                                        117,0000
117,0000
               125433 37689
                                                                                       109,3846
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     9,54 %
```

```
128713 40493
Elapsed time =
131153 42397
134230 44765
                                    114,0000
                                                                          117,0000
                                                                                                     105,9303 12349429
                                                                                                                                             9,46 %
                                                                                                   105,9503 12549429
1054,91 MB, solutions
105,9794 12573972
106,0000 12811725
                                                   (184427
310
                                                                          icks, tree
117,0000
                                                                          117,0000
117,0000
                                                                                                                                             9,40 %
               47261
                                                         343
                                                                                                     106,0000
                                                                                                                      13033657
                                                                                                                                             9,40 %
  139701
               49220
                                     110,8235
                                                                           117,0000
                                                                                                     106,0000
                                                                                                                     13253888
                                                                                                                                             9,40 %
                                    110,8235
109,1250
108,3478
110,8889
113,0000
113,0000
                                                                          117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
   141881
               51289
                                                         340
                                                                                                     106,0000
                                                                                                                     13465693
                                                                                                                                             9.40 %
                                                                                                     106,0000
106,0000
106,0000
106,0000
106,0000
  143700
               55245
56666
58238
59539
                                                         340
446
338
 Elapsed time : 
153810 61203
                                   ,47 sec.
114,7832
                                                   (222594,03
                                                                                                            ,82 MB,
                                                                          117,0000
                                                                                                     106,0000 14780078
                                                                                                                                             9,40 %
                                    lution polishing
108,0000 352
Starting limi
155438 63394
                 limited
                                                                          117,0000
                                                                                                     106 0000 15051814
                                                                                                                                             9 40 %
Clique cuts applied:
Implied bound cuts a
Clique cuts applied: 34
Implied bound cuts applied: 391
Flow cuts applied: 304
Mixed integer rounding cuts applied:
Zero-half cuts applied: 44
Gomory fractional cuts applied: 60
Root node processing (before b&c):
= 5,52 \text{ sec. } (6430,39 \text{ ticks})
Parallel b&c, 12 threads:
                                                   597,11 sec. (234724,23 ticks)
    Real time
                                                      36,83 sec
0,10 sec
   Sync time (average)
Wait time (average)
                                                  136,83
Total (root+branch&cut) = 602,63 sec. (241154,61 ticks)
```

Como se puede observar en el gráfico de estadísticas, el modelo es mucho más rápido, en sólo 3 segundos ya logra un resultado mejor que en los 10 minutos de la corrida anterior. La razón de esto es que al cambiar la cantidad posible de colores se reduce mucho el tamaño del problema (de los 139 posibles a explorar en la corrida anterior se lo limita a 15, el 11%). Esto hace que el modelo sea más eficiente, ya que por cada prenda se eliminan 124 variables bivalentes (que indican si a esa prenda se le asigna ese color), lo que da un total de 17236 bivalentes eliminadas junto con las restricciones en las que aparecen, es de gran importancia que las variables enteras sean las menos posibles, ya que son costosas computacionalmente. Este paso demuestra que, si bien con el modelo de PLE básico ya se encontraba un resultado mejor que con una heurística, la información que esta nos provee puede ayudar a mejorar el resultado y acercarse al óptimo.

#### 2.4. Paso 4

Para este paso añadió la condición "simetría", la cual obliga a que los tiempos de lavado estén ordenados de mayor a menor en el vector pesoColores. La restricción establece que el tiempo del i-1-ésimo lavado siempre sea mayor o igual al del i-ésimo, por lo que el orden en que se van llenando los lavados sea siempre desde el primero posible al último, y no por ejemplo empezar con uno cualquiera. Lo que cambia al hacer esto es que no sean analizadas soluciones semejantes, producto de, por ejemplo, que las prendas del primer lavado en una solución intercambien lugar con las del segundo, pero sin modificar la composición de ninguno de estos grupos. A continuación se encuentran los resultados obtenidos:

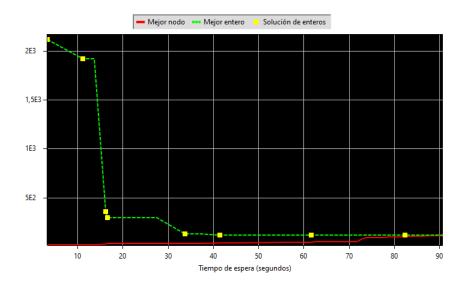


Figura 3: Flujo caso upload desde el punto de vista de la aplicación

```
CPXPARAM TimeLimit

Legacy callback

Tried aggregator 1 time.

MIP Presolve eliminated 120489 rows and 0 columns.

MIP Presolve eliminated 11991 coefficients.

Reduced MIP has 34898 rows, 19182 columns, and 122062 nonzeros.

Reduced MIP has 19044 binaries, 138 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.

Presolve time = 0,34 sec. (253,34 ticks)

Found incumbent of value 2760,000000 after 0,53 sec. (465,00 ticks)

Probing time = 0,16 sec. (13,81 ticks)

Tried aggregator 1 time.

Detecting symmetries...

Reduced MIP has 34898 rows, 19182 columns, and 122062 nonzeros.

Reduced MIP has 34898 rows, 19182 columns, and 122062 nonzeros.

Presolve time = 0,14 sec. (144,06 ticks)

Probing time = 0,19 sec. (13,14 ticks)

Clique table members: 15717.

MIP emphasis: balance optimality and feasibility.

MIP search method: dynamic search.

Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads.

Root relaxation solution time = 1,58 sec. (1059,19 ticks)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    \begin{array}{c} {\rm Cuts}\,/\\ {\rm Best\ Bound} \end{array}
                    Nodes
Node Left
                                                                                                               Objective IInf Best Integer
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       ItCnt
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   _{
m Gap}
                                                                                                                                                                                                                                       2760,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            0,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   100,00%
                                                                                                                                                                                                                                      2631,0000
2442,0000
2298,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            0,0000
0,0000
0,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  100,00 %
100,00 %
100,00 %
100,00 %
                                      0+
                                                                                                                                                                                                                                      2298 0000
2201 0000
2116,0000
2116,0000
2116,0000
2008,0000
1917,0000
1917,0000
356,0000
356,0000
299,0000
299,0000
178,0000
144,0000
                                      0+
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             0.0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     0,0000
0,0000
0,0000
20,0000
20,0000
20,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   100,00 %
100,00 %
100,00 %
99,05 %
99,00 %
                                                                                                                          20,0000 10405
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         98,96 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    Cuts: 1915
Cuts: 1470
                                       0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         98.89 %
                                                                                                                          28,3807
                                                                                                                                                                                8748
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             8403
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         98,52 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         Cuts: 1470
28,3807
Cuts: 774
30,2198
30,2198
30,2198
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        98,52 %
92,03 %
91,51 %
89,89 %
89,89 %
83,02 %
                                     0+
0
0+
0+
0+
0+
0+
0+
0+
0+
0+
                                                                                                                          30,2198
                                                                                                                                                                                8195
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        15372
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        15372
                                                                                                 -1.00000e + 75
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       30,2198
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       30,2198
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          79,01%
                                                                                                                                                                                                                                             144,0000\\142,0000\\140,0000\\138,0000\\136,0000\\134,0000\\134,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        79,01 %
78,72 %
78,41 %
78,10 %
77,78 %
77,45 %
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       30.2198
Repeating presolve.

Tried aggregator 1 time.

MIP Presolve eliminated 11157 rows and 6359 columns.

MIP Presolve modified 1943 coefficients.

MIP Presolve modified 1943 coefficients.

Reduced MIP has 23741 rows, 12823 columns, and 82137 nonzeros.

Reduced MIP has 12685 binaries, 138 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.

Presolve time = 0,09 sec. (95,74 ticks)

Tried aggregator 1 time.

Detecting symmetries...

Reduced MIP has 23741 rows, 12823 columns, and 82137 nonzeros.

Reduced MIP has 23741 rows, 12823 columns, and 82137 nonzeros.

Reduced MIP has 12685 binaries, 138 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.

Presolve time = 0,09 sec. (90,72 ticks)

Represolve time = 0,55 sec. (422,29 ticks)

Probing time = 0,22 sec. (22,14 ticks)

Clique table members: 10922.

MIP emphasis: balance optimality and feasibility.
```

```
MIP search method: dynamic search. Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads. Root relaxation solution time = 1.17 sec. (667.64 ticks)
                                                                                                                         \begin{array}{c} {\rm Cuts}\,/\\ {\rm Best\ Bound} \end{array}
                                                                                                                                                         ItCnt
       Node
                                           Objective IInf Best Integer
                                                                                                                                                                                 Gap
                                                                                                                           30,2198
34,4425
34,4425
Cuts: 254
Cuts: 334
Cuts: 201
43,1738
                                                                                            134,000
134,000
121,000
121,000
121,000
                                                                                                                                                                             77,45\%
74,30\%
71,54\%
70,03\%
                                               34,4425
                                                                                                                                                          35587
                                               36,2694 \\ 41,8592 \\ 42,1122
                                                                                             121,0000
                                                                                                                                                          73207
                                                                       678
                                                                                                                                                                             64,32 %
                                                                                             119,0000
                                                                                                                                                                             63.72 %
                                                                                            119,0000
118,0000
118,0000
118,0000
118,0000
                                                                                                                                43,1738
                                                                                                                                                                             63,41 %
                                                                                                                           43,1738
43,1738
Cuts: 268
Cuts: 63
Cuts: 179
                                                                                                                                                                             63,41 %

63,41 %

57,48 %

57,48 %

57,48 %
                                    -1.00000e + 75
                                                                                                                                                          73207
                                               42,4155
42,4666
42,5111
                                                                       706
607
624
                                                                                                                                                          74294
74515
74935
Detecting symmetries 0 2
                                                \begin{array}{c} . \; . \; . \\ 42 \; , 5586 \end{array}
                                                                        491
                                                                                             118,0000
                                                                                                                                50,1699
                                                                                                                                                                             57,48 %
                                                                                                                                                          74992
                                                                                                                     50,1699
0,02 MB, solu
50,1699
50,1699
50,1699
50,1699
50,1699
50,1699
50,1699
80,0732
                                  63,89 sec. (
74,5338
Elapsed
                  time =
                                                                                     ticks, tree
118,0000
                                                                                                                                                        ions = 77265
                                                                                                                                                                       22)
57,48%
                                                                       346
                                            74,5338
116,0000
110,5308
115,1023
111,5455
114,0000
                                                                                                                                                           84139
          905
                        434
                                                                                             118,0000
                                                                                                                                                        132868
                                                                                                                                                                             57,48 %
        1056
                        \begin{smallmatrix}620\\652\end{smallmatrix}
                                             92,5496
115,0000
                                                                       244
                                                                                             118,0000
                                                                                                                                                        143310
                                                                                                                                                                             57,48\% 
57,48\%
                                                                                             118,0000
                                                                                                                                                        150956
                                                                                                                             80,1699
80,0732
96,9647
19 MB, soli
103,9624
103,9624
108,6405
113,1297
                                                                       290
                                                                                             118.0000
                                                                                                                                                         162189
                                                                                            118,0000
118,0000
ks, tree
118,0000
117,0000
2737
Elapsed
3996
* 4003
                   1365
time :
1942
1935
                                    103,6331
113,4318
76,92 sec. (
117,0000
integral
                                                                                                                                                        102189
202292
ions =
236801
                                                                       18,28
99
0
                                                                                                                                                        243270
        7204
                       843
                                             115,0000
                                                                       108
                                                                                            117,0000
                                                                                                                                                       336454
                                                                                                                                                                               3,31 %
Clique cuts applied: 10
Implied bound cuts applied: 1436
Mixed integer rounding cuts applied:
Zero-half cuts applied: 35
Gomory fractional cuts applied: 24
     Real time = arallel b&c, 12 threads:
Root node processing (before b&c):
                                                                   63,65 sec. (54096,14 ticks)
     Real time
Sync time (average)
Wait time (average)
                                                                  27,66 sec.
7,75 sec.
0,00 sec.
                                                                                            (6593,63 ticks)
Total (root+branch&cut) =
                                                                  91,31 sec. (60689,78 ticks)
```

El mayor cambio con respecto a las corridas anteriores es que no fue necesario detener la ejecución a los 10 minutos, sino que el modelo mismo se detuvo por sí solo a los 90 segundos, lo cual indica que este cambio fue el más significativo de los hechos hasta el momento. Este tiempo de ejecución tan inferior a los demás es debido a lo explicado anteriormente, la cantidad de posibles soluciones equivalentes que no son tenidas en cuenta.

#### 2.5. Paso 5

En este paso se combinan los dos anteriores (máximo 15 lavados y simetría) y se obtuvieron los siguientes resultados:

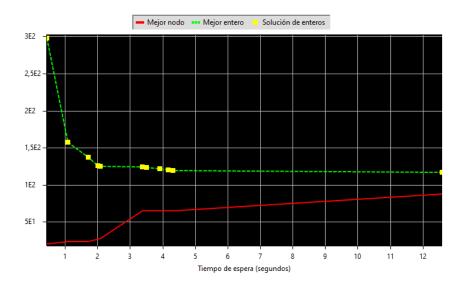


Figura 4: Flujo caso upload desde el punto de vista de la aplicación

```
Version identifier: 22.1.0.0 | 2022-03-09 | 1a383f8ce CPXPARAM TimeLimit 600 | Legacy callback pi Tried aggregator 1 time. MIP Presolve eliminated 13050 rows and 0 columns. MIP Presolve eliminated 1350 coefficients. Reduced MIP has 3962 rows, 2085 columns, and 13578 nonzeros. Reduced MIP has 2070 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators. Presolve time = 0,03 sec. (23,33 ticks) Found incumbent of value 300,000000 after 0,06 sec. (53,08 ticks) Probing time = 0,03 sec. (4,05 ticks) Tried aggregator 1 time. Detecting symmetries... Reduced MIP has 3962 rows, 2085 columns, and 13578 nonzeros. Reduced MIP has 2070 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators. Presolve time = 0,02 sec. (12,66 ticks) Probing time = 0,02 sec. (4,28 ticks) Clique table members: 1878. MIP emphasis: balance optimality and feasibility. MIP search method: dynamic search. Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads. Root relaxation solution time = 0,09 sec. (136,45 ticks)
                             {\tt identifier:} \quad 2\,2.\,1.\,0.\,0 \quad | \quad 2022 - 03 - 09 \quad | \quad 1\,a\,3\,8\,3\,f\,8\,c\,e
                                                                                                                                                                                            Cuts/
            Node
                                                                Objective IInf Best Integer
                                                                                                                                                                                  Best Bound
                                                                                                                                                                                                                                  ItCnt
                                                                                                                                                                                                                                                                    Gap
                                                                                                                                       300,0000
298,0000
298,0000
157,0000
157,0000
137,0000
126,0000
126,0000
125,0000
125,0000
                                                                                                                                                                                            \begin{smallmatrix}0&,0000\\0&,0000\\20&,0000\\20&,0000\end{smallmatrix}
                                                                                                                                                                                                                                                           100,00\%
100,00\%
93,29\%
87,26\%
                                                                      20,0000 1178
                                                                                                                                                                                                                                    1809
                                                                                                                                                                                 Cuts: 1090
23,0769
Cuts: 705
                                                                      22,1429 1150
                                                                                                                                                                                                                                    5659
                       0
                                                                                                                                                                                                                                                               85,30 %
                                                                                                                                                                                                                                                               83.16 %
                                                                                                                                                                                    23,0769
Cuts: 705
26,5726
Cuts: 604
27,6682
27,6682
                                                                                                                                                                                                                                  10322
                                                                      26,5726
                                                                                                       918
                                                                      27,6682
                                                                                                                                                                                                                                  1\,2\,6\,7\,1
                                                      -1,00000e+75
                                                                                                                                                                                                                                   12671
                                                                       28,0912 \\ 28,4556
                                                                                                          \frac{906}{815}
                                                                                                                                         125,0000 \\ 125,0000
                                                                                                                                                                                      Cuts: 567
Cuts: 306
                                                                                                                                                                                                                                    13906
                                                                                                                                                                                                                                                               54,93\% \\ 48,00\%
                                                                                                                                                                                                                                   14492
                                                                                                                                       125,0000

125,0000

125,0000

1, tree = 124,0000

123,0000

123,0000

122,0000

121,0000

120,0000

119,0000

119,0000

119,0000

119,0000
                      0
                                           0
                                                                       28,9110
                                                                                                         874
                                                                                                                                                                                     Cuts:
                                                                                                                                                                                                          565
                                                                                                                                                                                                                                   15764
                                                                                                                                                                                                                                                               48,00%
                                                                                                                                                                      29,9981
                                                                                                         619
                                                                                                                                                                                                                                                              48,00%
  Elapsed
* 22-
* 25-
                            time
                                               = 2,91 \text{ sec. } (3166,91)
                                                                                                                                                                                                                                                              47,58 %
47,15 %
47,15 %
47,15 %
                                                                  84,8364
110,3879
                    30
                                                                                                         232
                                     192
                                                                                                                                                                                            65,0000
65,0000
65,0000
65,0000
65,0000
                764 +
                                    263
                                                                                                                                                                                                                                                              46,72\%
46,28\%
                                                                   integral
                                                                                                               0
                                                                                                                                                                                                                                  52895
            1125
                                    392
                                                                  integral
integral
integral
cutoff
92,7725
113,5385
                                                                                                                                                                                                                                  57972
58246
62284
76494
                                                                                                                                                                                                                                                              45,83 %
45,38 %
45,38 %
45,38 %
                                    361
                                    329
235
17
125
                                                                                                                                                                                             65,0000
65,0000
             2214
                                                                                                         139
                                                                                                                                         119,0000
                                                                                                                                                                                                                                  90055
                                                                                                                                                                                                                                                               45,38 %
             2716
                                    477
                                                                      62,9690
                                                                                                          426
                                                                                                                                         119,0000
                                                                                                                                                                                                                                111747
                                                                                                                                                                                                                                                              45,38\% \\ 45,38\%
                                                                                                                                         119,0000
119,0000
119,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                            65,0000
65,0000
70,5764
75,1879
             3319
                                    758
                                                                    110,2064
115.0000
                                                                                                         224
                                                                                                                                                                                                                                131798
                                1406 \\ 1954
                                                                                                          246
                                                                                                                                                                                                                                                               45 38 %
  Performing restart 1
 Repeating presolve. Tried aggregator 1 time. MIP Presolve eliminated 1093 rows and 592 columns. MIP Presolve modified 122 coefficients. Reduced MIP has 2869 rows, 1493 columns, and 9535 nonzeros. Reduced MIP has 1478 binaries, 15 generals, 0 SOSs, and 0 indicators. Presolve time = 0,02 sec. (12,47 ticks)
```

```
Tried aggregator 1 time.

MIP Presolve eliminated 127 rows and 0 columns.

MIP Presolve modified 14 coefficients.

Reduced MIP has 2742 rows, 1493 columns, and 92

Reduced MIP has 1478 binaries, 15 generals, 0 8

Presolve time = 0,00 sec. (8,67 ticks)

Represolve time = 0,14 sec. (68,77 ticks)

6011 0 83,3611 384 117,0000

6011 0 83,7192 386 117,0000

6011 0 84,1301 380 117,0000

6011 0 85,4408 368 117,0000

6011 0 85,8902 371 117,0000

6011 0 86,0056 385 117,0000

6011 0 86,0056 385 117,0000

6011 0 86,0056 385 117,0000
                                                                                                                          and 9281 nonzeros
s, 0 SOSs, and 0
                                                                                                                                                          and 0 indicators.
                                                                                                                     s)
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                                          28,75\%
28,45\%
28,09\%
26,97\%
26,59\%
                                                                                                                                                                             226
339
297
277
265
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                             \frac{215}{217}
                                                                                                                                                                                                219309
                                                                                                                                                                                                                           26,49 %
          6011
                                                             86.1345
                                                                                          387
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                                                219574
                                                                                                                                                                                                                           26.38 %
                                                                                                                     117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000
          6011
                                    86,2274
                                                                                          382
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                             224
                                                                                                                                                                                               219829
                                                                                                                                                                                                                           26,30 %
                                                            86,2274
86,3203
86,4033
86,5503
86,6590
86,7251
86,7960
                                                                                          385
                                                                                                                                                                             230
                                                                                                                                                                                                220132
                                                                                                                                                                                                                           26 22 %
                                                                                          385
393
394
408
415
411
                                                                                                                                                           Cuts:
Cuts:
Cuts:
Cuts:
                                                                                                                                                                                               220132
220377
220691
221000
          6011
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                                                221375
                                                                                                                                                                                                                           25,82 %
          6011
                                                             86.9215
                                                                                          431
                                                                                                                     117,0000
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                                                221663
                                                                                                                                                                                                                           25.71 %
                                                                                                                     117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
117,0000
          6011
                                                             87,0714
                                                                                          438
                                                                                                                                                                                                221929
                                                                                                                                                                                                                           25.58 %
                                                                                                                                                            Cuts:
Cuts:
Cuts:
Cuts:
                                                                                                                                                                                                222369
222246
222376
222546
                                                                                          415
                                                             87,3032
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                                                222709
                                                                                                                                                                                                                           25,38 %
                                                             87,3783
87,3970
                                                                                          422
                                                                                                                     117,0000 \\ 117,0000
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                             \begin{smallmatrix}1\,5\,5\\1\,4\,1\end{smallmatrix}
                                                                                                                                                                                                \begin{smallmatrix} 2 \, 2 \, 2 \, 9 \, 5 \, 1 \\ 2 \, 2 \, 3 \, 0 \, 7 \, 9 \end{smallmatrix}
                                                                                                                                                                                                                           25.32 %
                                                                                          425
                                                                                                                    117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000

117,0000
                                                                                                                                                                                                                           25,30 %
                                                            87,3970
87,4549
87,5229
87,5467
87,6425
87,7290
87,7677
87,77722
87,7984
87,7984
87,8034
87,8172
87,8279
                                                                                          419
406
410
411
414
400
                                                                                                                                                                             141
146
139
144
152
201
177
172
                                                                                                                                                                                                223215
                                                                                                                                                                                                                           25.25 %
                                                                                                                                                           Cuts:
Cuts:
Cuts:
Cuts:
Cuts:
                                                                                                                                                                                                223213
223389
223567
223753
223941
          6011
                                                                                                                                                                                                224109
                                                                                                                                                                                                                           24,98%
          6011
                                                                                                                                                            Cuts:
                                                                                                                                                                                                224252
                                                                                                                                                                                                                           24,98%
          6011
                                                                                          386
                                                                                                                                                               Cuts:
                                                                                                                                                                                                224383
                                                                                                                                                                                                                           24.96 %
                                                                                                                                                                            220
: 89
192
200
                                                                                                                                                                                                224518
224617
224795
224910
                                                                                          399
                                                                                                                      117,0000
117,0000
                                                                                                                                                                                                224914
                                                                                                                                                                                                                           24,93 %
          6011
                                                                    ,8279
                                                                                          391
                        \operatorname{time}_{7} =
                                                                                                                                                                MB, solu
88,2773
89,1219
 Elapsed
                                             12,42
                                                             sec. (97
                                                                                          7,65
                                                                                                                     s, tree:
                                                                                                                                                   0,02
                                                                                                                                                                                                \frac{230887}{230887}
                                                                                                                                                                                                                           24,55%
          6031
                                                                                          333
                                                         114,0000
                                                                                                                     117,0000
 Clique cuts applied:
Implied bound cuts a
Clique cuts applied: 7
Implied bound cuts applied: 6
Flow cuts applied: 59
Mixed integer rounding cuts applied:
Zero-half cuts applied: 41
Lift and project cuts applied: 1
Gomory fractional cuts applied: 21
Root node processing (before b&c):
= 2,84 sec. (3100,18 ticks)
 Real time = Parallel b&c, 12 threads:
       Real time
                                                                                    13.30 sec. (9804.24 ticks)
      Sync time (average)
Wait time (average)
                                                                                      2,33 sec
0,01 sec
 Total (root+branch&cut) =
                                                                                    16,14 sec. (12904,41 ticks)
```

Se observa en el gráfico de estadísticas que, tal como en el paso 3, rápidamente se llega al resultado óptimo de 117. Al igual que en el paso 4, no es necesario limitar a 10 minutos la ejecución, ya que se detiene por sí solo a los 16 segundos, lo cual representa una mejora con respecto a los 90 segundos obtenidos previamente. Esta combinación de los dos pasos anteriores es mejor que ambas por separado.

#### 2.6. Paso 6

La diferencia entre el paso 3 y el paso 5 es la adición de la restricción de simetría. Si bien en ambos el resultado de 117 es el mismo, en el paso 3 fue necesario limitar el tiempo de ejecución a 10 minutos ya que el modelo seguía corriendo, mientras que en el paso 5 se pudo llegar al óptimo en 16 segundos.

Se volvió a correr el modelo, pero ahora reduciendo la cantidad posible de lavados de 15 a 11 y se obtuvieron los siguientes resultados:

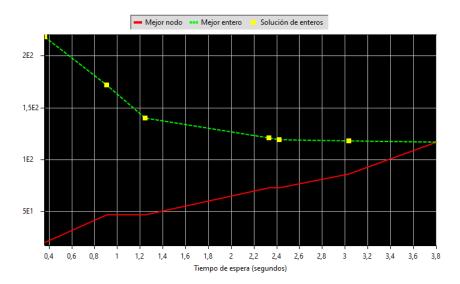


Figura 5: Flujo caso upload desde el punto de vista de la aplicación

```
Version identifier: 22.1.0.0 | 2022-03-09 | 1a383f8ce
CPXPARAM_TimeLimit 600
Legacy cafiback pi
Tried aggregator 1 time.
MIP Presolve eliminated 9577 rows and 0 columns.
MIP Presolve modified 983 coefficients.
Reduced MIP has 2935 rows, 1529 columns, and 9909 nonzeros.
Reduced MIP has 1518 binaries, 11 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,02 sec. (16,79 ticks)
Found incumbent of value 220,000000 after 0,06 sec. (50,34 ticks)
Probing time = 0,00 sec. (3,02 ticks)
Tried aggregator 1 time.
Detecting symmetries...
Reduced MIP has 2935 rows, 1529 columns, and 9909 nonzeros.
Reduced MIP has 2935 rows, 1529 columns, and 9909 nonzeros.
Reduced MIP has 1518 binaries, 11 generals, 0 SOSs, and 0 indicators.
Presolve time = 0,02 sec. (9,08 ticks)
Probing time = 0,02 sec. (3,06 ticks)
Clique table members: 1407.
MIP emphasis: balance optimality and feasibility.
MIP search method: dynamic search.
Parallel mode: deterministic, using up to 12 threads.
Root relaxation solution time = 0,06 sec. (98,28 ticks)

Nodes
             Nodes
Node Left
                                                                          Objective IInf Best Integer
                                                                                                                                                                                                                                                                    ItCnt
                                                                                                                                                                                                             Best Bound
                                                                                                                                                                                                                                                                                                           Gap
                                                                                                                                                           220,0000
218,0000
218,0000
172,0000
172,0000
140,0000
121,0000
121,0000
119,0000
118,0000
118,0000
117,0000
117,0000
1, tree =
                                                                                                                                                                                                               0,0000
0,0000
20,0000
20,0000
Cuts: 833
46,2868
Cuts: 564
46,2868
                                                                                                                                                                                                                                                                                                 100.00%
                                                                                 20,0000
                                                                                                                                                                                                                                                                       1394
                                                                                 29,5206
                                                                                                                        794
                                                                                 37,0000
                                                                                                                        727
                                                                                                                                                                                                                                                                       4408
                                                                                                                                                                                                                46,2868
Cuts: 833
72,3584
72,3584
72,3584
Cuts: 833
85,9632
117,0000
                                                                                 41.7808
                                                                                                                        657
                                                                                                                                                                                                                                                                       8851
                                                             -1,00000e+75
                                                                                                                      0
                                                                                                                                                                                                                                                                        8851
                                                                                     cutoff
                                                                                                                                                                                                                                                                    15356
                                                 0
                                                                                                                                                                                                                                                                                                        0,00%
  Elapsed time = 3,63 sec. (2556,18 ticks, tree = 0,01 MB, solutions = 8)
 Clique cuts applied: 9
Implied bound cuts applied: 380
Mixed integer rounding cuts applied:
Zero-half cuts applied: 288
Multi commodity flow cuts applied: 2
Gomory fractional cuts applied: 1
 Root node processing (before b&c):
Real time = 3,63 sec. (2556,36 ticks)
Parallel b&c, 12 threads:
Real time = 0,00 sec. (0,00 ticks)
Sync time (average) = 0,00 sec.
          Sync time (average)
Wait time (average)
                                                                                                                                         sec
sec
                                                                                                                     0,00
  Total (root+branch&cut) =
                                                                                                                     3,63 sec. (2556,36 ticks)
```

Se puede observar que esta fue la mejor corrida, se encontró el óptimo en tan solo 3,8 segundos. En base a lo analizado previamente, era esperable que esta corrida fuese la mejor, ya que se combinaba la restricción de simetría con la de máxima cantidad de lavados, pero ahora reduciendo esta cantidad en un 27 %.

#### 2.7. Paso 7

El tiempo total de lavados obtenido con el algoritmo greedy utilizado en entregas anteriores fue de 171. Se realizaron corridas utilizando programación lineal entera y se logró encontrar un resultado considerablemente mejor, de valor 117. Esta diferencia se debe a que el algoritmo greedy toma decisiones basado en información local en cada paso, y no puede volver atrás, por lo que, para este problema, significa una solución no óptima, aunque tiene la ventaja de obtenerla en un tiempo muy corto.

La solución obtenida por PLE con las restricciones adicionales que se fueron añadiendo fue superior en cuanto al resultado, logrando alcanzar el óptimo de 117, y en un tiempo razonable, mucho menor al tiempo de ejecución que se obtenía simplemente de plantear el problema de coloración de grafos sin las restricciones extra.

### 3. Conclusión

En la primera entrega se logró resolver el problema en un tiempo acotado con un algoritmo greedy para coloración de grafos, pero con un resultado muy lejano al óptimo a medida que el tamaño del problema aumentaba, por lo que fue necesario en la segunda entrega buscar alternativas para intentar mejorarlo. Esto se logró parcialmente, ya que mejoró el resultado, pero aún se estaba lejos del óptimo, como podía observarse en el sitio de la materia al comparar con otros alumnos. En la tercera entrega se planteó un modelo de programación lineal pero nunca se lo corrió.

En la presente entrega se pudo comparar la solución al problema obtenida mediante el algoritmo greedy con la obtenida mediante programación lineal entera. En todos los casos la solución con PLE fue mejor que la greedy, aunque algunas necesitaron un tiempo mucho mayor de ejecución para que el resultado fuera mejor con una gran diferencia y no sólo levemente.

Se logró mejorar el resultado y reducir su tiempo de ejecución con dos cambios en las restricciones. En primer lugar, limitar la cantidad de lavados mediante el resultado obtenido con alguna heurística. Esto permitió reducir la cantidad de variables del modelo, ya que no fueron necesarias todas las bivalentes para indicar si esa prenda correspondía a ese lavado. Con esto se redujo considerablemente el tiempo en el que el modelo se acercaba al óptimo, pero de todas formas fue necesario cortar la ejecución a los 10 minutos. Esto muestra que el dato obtenido con la heurística es de utilidad para el modelo.

Lo que permitió finalmente encontrar la solución en un tiempo acotado fue la restricción adicional de simetría, eliminando soluciones equivalentes. Combinándola con la anterior, se logró dar con un modelo que encuentra el óptimo en menos de 4 segundos.