TAREA COMPUTACIONAL 2 1s21
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES - ILN250

Profesores	:	Pablo Escalona R. – Rodrigo Mena B. - Rafael Favereau U. - Francisco Yuraszeck E.
Ayudantes	:	Katherine Álvarez - Martín Barra - Gabriel Gallardo - Macarena Jara - Paula Miranda Lucas Sanhueza
Fecha	:	Jueves 08 de Julio 2021
Entrega	:	Martes 03 de Agosto 2021 - 09:00 am

Instrucciones

- La tarea debe ser desarrollada en parejas, permitiéndose combinaciones entre los cinco paralelos indicados en el programa del curso.
- El informe de entrega deberá incluir Resumen, Introducción, Formulación del Modelo, Enfoques de Solución (incluido pseudocodigos), y Conclusiones. Solo si es necesario se pueden incluir Anexos. La extensión máxima del informe es 10 páginas.
- Los supuestos utilizados para el desarrollo deben ser especificados.
- Se deberá entregar un archivo .rar con el nombre "*Tarea2OR_Apellido1_Apellido2.rar*", que contenga tanto el informe en PDF como los archivos de los programas utilizados.
- **No se aceptarán tareas fuera de plazo.**

Enunciado

Considere un distribuidor que suministre un solo tipo de artículo a varios clientes con demanda independiente. Suponemos que la demanda por unidad de tiempo sigue una distribución normal de media μ y varianza σ^2.

El distribuidor utiliza una política de revisión continua (Q, r) con full-backorders y lead time determinístico, donde se coloca una cantidad de pedido de tamaño constante, Q, siempre que la posición de inventario (es decir, inventario disponible más la demanda menos pedidos pendientes) cae por debajo de un punto de pedido fijo, r, que llega $L > 0$ unidades de tiempo más tarde. Esta política de inventario es ilustrada en la Figura 1.

La figura 1 muestra que en el tiempo t_1 la posición del inventario alcanza r, y se pide una cantidad Q, que llega en $t_1 + L$. Lo mismo ocurre en los tiempos t_2, t_3 y t_4. Hay que tener en cuenta que la posición del inventario y el inventario disponible son iguales en el intervalo $[t_0, t_1]$, $[t_2 + L, t_3]$, y $[t_3 + L, t_4]$

Para completar la política de inventarios, el distribuidor asume un nivel de servicio α_L definido como la probabilidad de que no ocurra un quiebre de stock en el ciclo de re-abastecimiento.

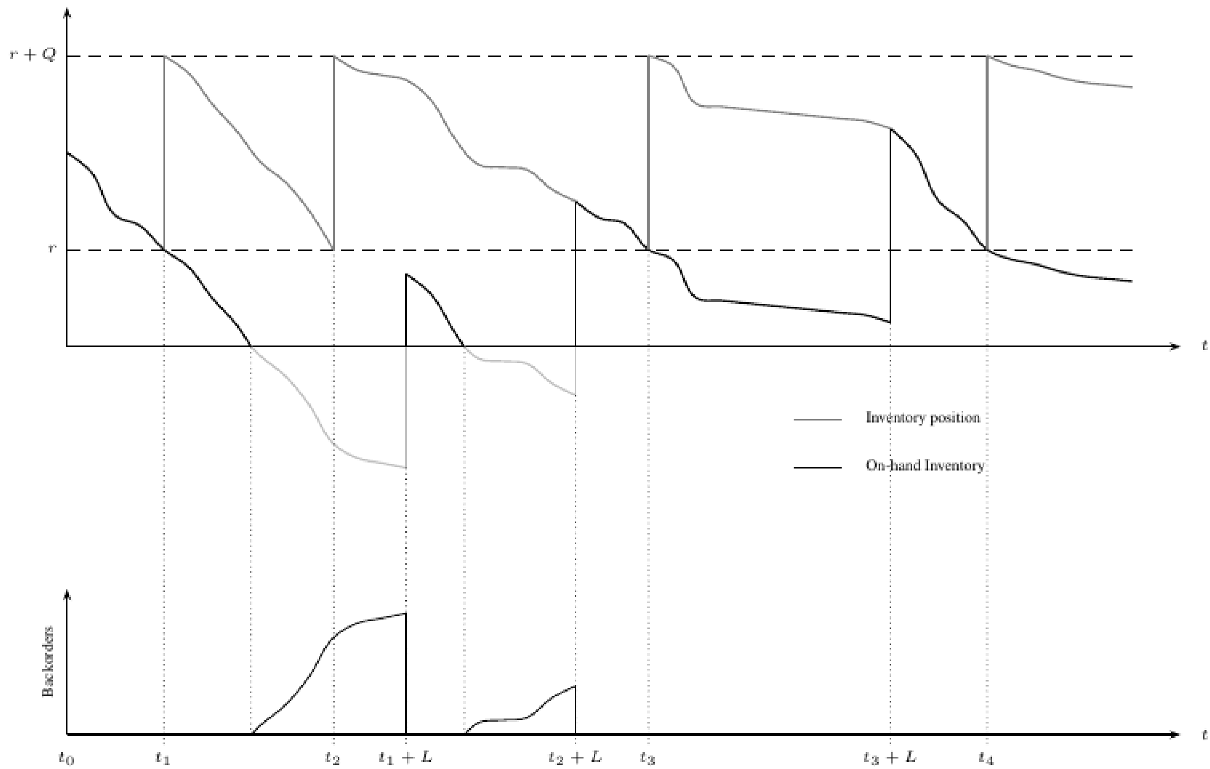

Figura 1: Política de revisión continua (Q, r) con full-backorder y lead time deterministico

El objetivo del distribuidor es determinar los parámetros óptimos (Q, r), que minimizan la suma de los costos de pedido y almacenamiento por unidad de tiempo, y aseguran un nivel de servicio pre-establecido $\bar{\alpha}_L \in (0{,}5, 1)$.

El *modelo verdadero* para determinar los parámetros óptimos de una política de revisión continua (Q, r) con full-backorder, lead time determinístico y que aseguren un nivel de servicio $\bar{\alpha}_L$ bajo demanda normal, es el siguiente:

$$\alpha_L\text{-SLC}: \quad \min_{Q,r} \quad S\frac{\mu}{Q} + h\left(\frac{Q}{2} + r - \mu L + B(Q,r)\right) \tag{1}$$

$$\text{s.t:} \quad r \geq \mu L + z_{\bar{\alpha}_L}\sqrt{\sigma^2 L} \tag{2}$$

$$Q \geq Q_{EOQ}, \tag{3}$$

donde S es el costo unitario de emisión, h es el costo de almacenamiento por unidad y unidad de tiempo, $B(Q, r)$ son los backorders, y $Q_{EOQ} = \sqrt{\frac{2\mu S}{h}}$ es cantidad de pedido de lote económico. Note que $\{S, h, L, \mu, \sigma^2\}$ son parámetros y (Q, r) son las variables de α_L-SLC.

Bajo demanda normal sabemos que:

$$B(Q,r) = \frac{\sigma^2 L}{Q}\left(H\left(\frac{r-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - H\left(\frac{r-\mu L+Q}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right),$$

donde $H(x) = \frac{1}{2}\left((x^2+1)(1-\Phi(x)) - x\varphi(x)\right)$ con $\Phi(x)$ y $\varphi(x)$ son la *función de distribución* y la *fun-*

ción de densidad de una normal de media 0 y varianza 1 (Axsäter [2015]). Note que $B(Q,r)$ es convexo en Q y r (Zipkin [1986]). En consecuencia, es fácil demostrar que la función objetivo en (1) es función convexa porque es suma de funciones convexas. Además, de acuerdo con (Zipkin [1986]), la función objetivo en (1) es estrictamente creciente en r.

En (1) el primer término es el costo de emisión por unidad de tiempo y el segundo término es el costo de almacenamiento por unidad de tiempo. La restricción (2) corresponde a la linealización de $F_{D(L)}(r) = \mathbb{P}(D(L) \leq r) \geq \bar{\alpha}_L$, donde $D(L) \sim N(\mu L, \sigma^2 L)$ es la demanda durante el lead time. Así, $z_{\bar{\alpha}_L} = \Phi^{-1}(\bar{\alpha}_L)$ es *función de distribución inversa* de una normal de media 0 y varianza 1 evaluada en $\bar{\alpha}_L$. La restricción (3) evita escribir $Q \geq 0$, lo que produciría una inconsistencia con (1).

El modelo α_L-SLC es un problema de optimización convexo porque estamos minimizando una función convexa sobre un conjunto convexo, en este caso, un poliedro. Consecuentemente, α_L-SLC puede ser resuelto mediante condiciones KKT o usando un solver no-lineal convexo como MINOS.

En esta tarea queremos resolver α_L-SLC, mediante condiciones KKT y también usando el solver no-lineal convexo MINOS, para un conjunto de prueba. El conjunto de prueba se indica en la Tabla 1.

Se solicita:

1. Programar α_L-SLC en lenguaje de programación matemática AMPL y determinar Q^*, r^* y Z^*_α, donde Z^*_α es función objetivo óptima de α_L-SLC, para cada experimento del conjunto de prueba.

2. Determine las condiciones KKT de α_L-SLC.

3. Determinar Q^*, r^* y Z^*_α usando las condiciones KKT para cada experimento del conjunto de prueba. El sistema de ecuaciones, que se deriva de las condiciones KKT, es fácilmente reducible a una ecuación y una incógnita para los casos posibles en que se activan o desactivan las restricciones. Esta ecuación debe ser resuelta usando Pyton.

Hint

- En AMPL usar librería **amplgsl.dll** para las funciones $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ y $\Phi^{-1}(\bar{\alpha}_L)$. Estas funciones son gsl_cdf_ugaussian_P, gsl_ran_ugaussian_pdf y gsl_cdf_ugaussian_Pinv, respectivamente. Puede encontrar mas información de estas funciones en el sitio web: *http://ampl.github.io/amplgsl/ran-gaussian.html*.

- Para determinar las condiciones KKT considere que: $H'(x) = -G(x)$, donde $G(x) = \varphi(x) - x(1 - \Phi(x))$.

- Note que la función objetivo en (1) es estrictamente creciente en r por lo tanto, la solución optima jamás estará en el interior de la región factible del problema α_L-SLC. Puede dibujar la región factible de α_L-SLC, para comprender como se activan o desactivan las restricciones en los diferentes casos asociadas a las condiciones KKT.

$\bar{\alpha}_L$	h	S	μ	σ^2	L
0.99	1.25	250	200	6400	2
0.99	1.25	250	150	3600	2
0.99	1	250	200	6400	2
0.99	1	250	150	3600	2
0.95	1.25	250	200	6400	2
0.95	1.25	250	150	3600	2
0.95	1	250	200	6400	2
0.95	1	250	150	3600	2
0.99	0.6	250	200	6400	2
0.99	0.6	250	150	3600	2
0.99	0.1	250	200	6400	2
0.99	0.1	250	150	3600	2
0.95	0.6	250	200	6400	2
0.95	0.6	250	150	3600	2
0.95	0.1	250	200	6400	2
0.95	0.1	250	150	3600	2
0.99	1.25	250	50	400	2
0.99	1.25	250	10	16	2
0.99	1	250	50	400	2
0.99	1	250	10	16	2
0.95	1.25	250	50	400	2
0.95	1.25	250	10	16	2
0.95	1	250	50	400	2
0.95	1	250	10	16	2
0.99	0.6	250	50	400	2
0.99	0.6	250	10	16	2
0.99	0.1	250	50	400	2
0.99	0.1	250	10	16	2
0.95	0.6	250	50	400	2
0.95	0.6	250	10	16	2
0.95	0.1	250	50	400	2
0.95	0.1	250	10	16	2

Cuadro 1: Conjunto de prueba