Polinomiales fundamentales de Lagrange

Para cada $i = 0, 1, \dots n$ existe un único polinomial l_i tal que $l_i(x_K) = \delta_{iK}$, donde δ_{iK} denota el delta del Kroneker ($\delta_{iK} = 0$ si $i \neq K$, $\delta_{iK} = 1$ si $i = K$). El polinomial está dado por

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

los polinomiales $l_0, l_1, \dots l_n$ son llamados polinomiales fundamentales de Lagrange de grado n

- Polinomial de Lagrange (interpolante) en $x_0, x_1, \dots, x_n$ relativos a $w_0, w_1, \dots$ un está dado por:

$$P_n(x) = w_0 l_0(x) + w_1 l_1(x) + \dots + w_n l_n(x)$$

Ejemplo (1) Considere, para $i = 0, 1, 2$ los nodos $x_i = i$ y los valores $w_i = f(x_i)$, con $f(x_i) = 1/(x+1)$. Entonces:

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 1}{-1} \cdot \frac{x - 2}{-2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

así, obtenemos $\Rightarrow l_1(x) = -x(x-2)$, $l_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$

Por tanto:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}x(x-2) + \frac{1}{6}x(x-1)$$

② Determine el polinomio de interpolación de Lagrange que pasa por los puntos $(2,4)$ y $(5,1)$

Solución:

X	Y
2	4
5	1

$$l_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5) \quad y \quad l_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2)$$

Así; $P(x) = \underbrace{-\frac{1}{3}(x-5)\cdot 4}_{\text{Valor } y_1} + \underbrace{\frac{1}{3}(x-2)\cdot 1}_{\text{Valor } y_2} \Rightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -x+6$ //

③ Si $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}75$ y $x_2 = 4$, encuentre el polinomio de Lagrange para $f(x) = 1/x$ y utilice este polinomio para aproximar $f(3) = 1/3$

Solución: $l_0(x) = \frac{(x-2{,}75)(x-4)}{(2-2{,}75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2{,}75)(x-4)$

$$l_1(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(2{,}75-2)(2{,}75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-2)(x-2{,}75)}{(4-2)(4-2{,}75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2{,}75)$$

Además: $[f(x_0) = f(2) \Rightarrow 1/2]$; $[f(x_1) = f(2{,}75) \Rightarrow 4/11]$; $[f(x_2) = f(4) \Rightarrow 1/4]$

por lo que $P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k)\, l_k(x)$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{(1/2\cdot 2/3)}(x-2{,}75)(x-4) - \underbrace{\frac{64}{165}}_{(4/11\cdot -16/15)}(x-2)(x-4) + \underbrace{\frac{1}{10}}_{(1/4\cdot 2/5)}(x-2)(x-2{,}75) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$$

• Una aproximación para $f(3) = 1/3$ (Solo debemos evaluar 3 en la ecuación obtenida anterior :))

$$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} \approx 0{,}32955$$

Ejemplo (4)

Considere el siguiente conjunto de datos (ver ejemplo en R)

x	y
0	7
2	11
3	28
4	63

Entonces

1) Encontramos $l_1(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(0-2)(0-3)(0-4)} = -\dfrac{1}{24}(x-2)(x-3)(x-4)$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(2-0)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{4}x(x-3)(x-4)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(3-0)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{3}x(x-2)(x-4)$$

$$l_4(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{8}x(x-2)(x-3)$$

Así, estos polinomios son multiplicados por los valores de y

$$7\left(-\frac{1}{24}(x-2)(x-3)(x-4)\right) + 11\left(\frac{1}{4}x(x-3)(x-4)\right) - 28\left(\frac{1}{3}x(x-2)(x-4)\right) + 63\left(\frac{1}{8}x(x-2)(x-3)\right)$$

Lo que da $x^3 - 2x + 7$ //