Factorización LU

Tenemos una matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$

queremos obtener una descomposición de $A = LU$, donde $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$ y

$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$

La multiplicación de LU debería ser entonces:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}}_{LU} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}}_{A}$$

Ahora podemos encontrar los elementos de L y U. Esto no es tan complejo como parece

Comenzamos:

① Fila superior (1) $\rightarrow \boxed{U_{11} = 1}$; $\boxed{U_{12} = 2}$; $\boxed{U_{13} = 4}$

② Fila (2) $\rightarrow L_{21}U_{11} = 3$; $L_{21} \cdot 1 = 3 \rightarrow \boxed{L_{21} = 3}$

$\rightarrow L_{21}U_{12} + U_{22} = 8$; $3 \cdot 2 + U_{22} = 8 \rightarrow \boxed{U_{22} = 2}$

$\rightarrow L_{21}U_{13} + U_{23} = 14$; $3 \cdot 4 + U_{23} = 14 \rightarrow \boxed{U_{23} = 2}$

③ Fila (3) $\rightarrow L_{31}U_{11} = 2$; $L_{31} \cdot 1 = 2 \rightarrow \boxed{L_{31} = 2}$

$\rightarrow L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$; $2 \cdot 2 + L_{32} \cdot 2 = 6 \rightarrow \boxed{L_{32} = 1}$

$\rightarrow L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33}$; $2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + U_{33} = 13 \rightarrow \boxed{U_{33} = 3}$

así:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Encontrar la descomposición LU de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$

<u>Solución</u> $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + U_{22} \end{bmatrix}$$

Fila(1) $\rightarrow \boxed{U_{11} = 3}$; $\boxed{U_{12} = 1}$

Fila(2) $\rightarrow L_{21}U_{11} = -6$; $L_{21} \cdot 3 = -6 \rightarrow \boxed{L_{21} = -2}$

$\rightarrow L_{21}U_{12} + U_{22} = -4$; $-2 \cdot 1 + U_{22} = -4 \rightarrow \boxed{U_{22} = -2}$

así

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \underbrace{\overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{U}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}}_{LU}$$