Ejemplo 3

Simétrica $\Rightarrow A = A^T$

Definida positiva $\Rightarrow$ Cada subdeterminante > 0

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Recuerde:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}$$

Encuentre la descomposición de Cholesky y resuelva $Ax = b$.

Solución:

$\underline{K=1}$: $L_1 = \sqrt{\overset{(a_{11})}{16}} = 4 = l_{11}$

$\underline{K=2}$: $L_1 = 4$, $a_2 = 4$, $a_{22} = 10 \Rightarrow$ Resolver sistema 1×1:

$L_1 l_{21} = a_{21} \rightarrow 4 l_{21} = 4 \Rightarrow l_{21} = 1$

$$l_{22} = \underbrace{\sqrt{10-1}}_{(a_{22} - l_{21}^T l_{21})} = 3, \text{ Por tanto } L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ l_{21}^T & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{K=3}$: $L_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_{33} = 6 \Rightarrow$ Resolver sistema 2×2:

$$\underbrace{L_2 l_{31} = a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} l_{31} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Así } l_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$l_{33} = \sqrt{6 - (1 \ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 2, \text{ por tanto } L_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$K=4$: $L_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_{44} = 4 \Rightarrow$ Resolver sistema 3×3

$$\underbrace{L_3 l_3 = a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} l_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\text{Así } l_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ Vector fila

$$l_{44} = \sqrt{4 - (-1 \ \ 1 \ \ -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1, \text{ por tanto } L = L_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver $Ax = b$, que es lo mismo que $LL^T x = b$, hacemos $Lc = b$ y así $L^T x = c$

$$Lc = b \longrightarrow c = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y \quad L^T x = c \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} // \quad \Big\{ \text{Tarea}$$