8/8/22

§1 - Preliminares

1.1. Contexto histórico

- Problemas da "velha física" (até meados de 1900)
- Hipótese de quantização de Planck e Einstein (1900 e 1905)
  - Explicação do Efeito foto-elétrico por Einstein rende Nobel
- Mecânica Quântica Matricial (MQM) de Heisenberg-Born-Jordan (1925)
  - Dualidade onda-partícula de De Broglie (1924)
- Mecânica Quântica Ondulatória (MQO) de Schrödinger (1926)
- "Ideia" de equivalência entre MQM e MQO (1927)
  - Quem "suspeitou": Pauli, Schrödinger, Eckart e Dirac
- Primeira formulação "organizada" do formalismo por Dirac (1930)
  - Principles of Quantum Mechanics (livro de Dirac)
  - Notação bra-ket: $|\psi\rangle, |\varphi\rangle, \ldots$
  - Reconhecimento da Álgebra Linear e Análise Funcional
- Tratado sobre Operadores em Espaços de Hilbert por Stone (1930)
  - Nessa época, o teorema Stone-Von Neumann é provado
- Prova da equivalência entre MQM e MQO por von Neumann (1932)
  - Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (livro de von Neumann)
  - Consolidação dos espaços de Hilbert como uma abordagem
  - Prévia da Álgebra de Operadores
- Discussão sobre Lógica Quântica por Birkhoff e von Neumann (1936)
- O Teorema de Representação de Álgebras de Boole por Stone (1936)
  - Promove uma revolução na matemática moderna
- Álgebras de von Neumann por Murray e von Neumann (1930-1949)
- Surgimento da Teoria de Categorias por Mac Lane e Eilenberg (1945)
  - "O que os matemáticos buscam são adjunções!" - Mac Lane
  - Dualidade de Stone como uma das grandes motivações
  - Operador adjunto (devido a Stone) motiva o nome!

- Álgebras C^* por Gelfand e Naimark (1943)
    - Dualidade de Gelfand-Naimark é inspirada pela de Stone
    - Álgebras de von Neumann são exemplos de álgebras C^*
- Construção GNS por Gelfand, Naimark e Segal (1943/47)
- Formalismo algébrico da Mecânica (Clássica/Quântica) não-relativística (hoje)
    - C^*-álgebras comutativas $\cong$ espaços de mec. clássica
    - C^*-álgebras não-comutativas $\cong$ espaços da mec. quântica
- Surgimento da Geometria Não-comutativa por Connes (   )
    - "Imitação" de Geometria Diferencial usando C^*-álgebras
    - Connes ganha Fields em 1982
    - Está relacionado com ambições sobre gravidade quântica
- Geometria / Álgebra (sintetização)

1.2. Ferramentas matemáticas (prelúdio)

O plano:

- Teoria de Categorias
- Álgebra ("sem" topologia)
- Álgebra (com topologia) $\cong$ Análise Funcional
- Probabilidade (através da Teoria de Medida)
- Análise Funcional (com medida) $\cong$ Álgebras de Operadores / von Neumann

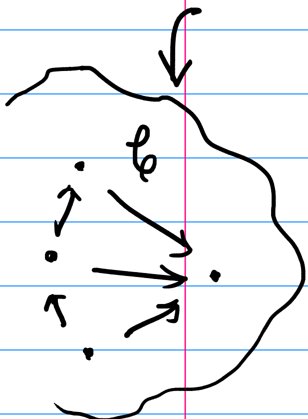
Pressupostos:

- Metateoria "frouxa": universos de Grothendieck, NBG, etc..
- Sabemos Lógica e Conjuntos numéricos
- Sabemos Cálculo em $\mathbb{R}$ (?)
- "Conhecemos" Álgebra Linear em $\mathbb{R}$-espaços vetoriais (?)
- Sabemos Física básica (?)

1.2.1. Teoria de Categorias (uma introdução)

com objetivo de fazer teoria

Motivação: "toda investigação matemática "teórica" tem sempre dois ingredientes básicos:



i) uma classe de objetos (conjuntos, espaços vetoriais, etc.)

ii) uma classe de setas (funções, transformações lineares, etc.)

Princípio Metodológico: "Numa investigação, se conhecermos todas as setas que chegam e saem de um objeto, sabemos qual é este objeto." (Lema de Yoneda)

Def: Uma categoria $\mathcal{C}$ é constituída de uma classe de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$, e uma classe de setas para cada dois objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, com uma noção de composição de setas, $\circ$, satisfazendo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

i) associatividade: $\forall f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(B,C)$, $h \in Hom(C,D)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathcal{C}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"'] & A \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

ii) existência de identidade: $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$, $\exists!\, id_A : A \to A$ tq $\forall f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(C,A)$,

$$f \circ id_A = f \quad e \quad id_A \circ g = g.$$

Nomenclatura: Setas também são chamadas de morfismos. Em categorias "algébricas", recebem um nome "regional": homomorfismos. Em algumas categorias, setas recebem nomes "regionais" mais "históricos" (analogia: capitais, pão, etc.) Vamos usar <u>morfismo</u> a partir de agora.