

§ 1 - Preliminares

1.1. Contexto histórico

- Problemas da "velha física" (até meados de 1900)
- Hipótese de quantização de Planck e Einstein (1900 e 1905)
 - Explicação do Efeito foto-elétrico por Einstein recebe Nobel
- Mecânica Quântica Matricial (MQM) de Heisenberg-Born-Jordan (1925)
 - Dualidade onda-partícula de De Broglie (1924)
- Mecânica Quântica Ondulatória (MQO) de Schrödinger (1926)
- "Idéia" de equivalência entre MQM e MQO (1927)
 - Quem "suspeitou": Pauli, Schrödinger, Eckart e Dirac
- Primeira formulação "organizada" do formalismo por Dirac (1930)
 - Principles of Quantum Mechanics (livro de Dirac)
 - Notação bra-ket: $|\psi\rangle, |\phi\rangle, \dots$
 - Reconhecimento da Álgebra Linear e Análise Funcional
- Tratado sobre Operadores em Espaços de Hilbert por Stone (1930)
 - Nessa época, o teorema Stone-von Neumann é provado
- Prova da equivalência entre MQM e MQO por von Neumann (1932)
 - Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (livro de von Neumann)
 - Consolidação dos espaços de Hilbert como uma abordagem
 - Prévia da Álgebra de Operadores
- Discussão sobre Lógica Quântica por Birkhoff e von Neumann (1936)
- O Teorema de Representação de Álgebras de Poisson por Stone (1936)
 - Promove uma revolução na matemática moderna
- Álgebras de von Neumann por Murray e von Neumann (1930-1943)
- Surgimento da Teoria de Categorias por Mac Lane e Eilenberg (1945)
 - "O que os matemáticos buscam são adjunções!" - Mac Lane
 - Dualidade de Stone como uma das grandes motivações
 - Operador adjunto (devido a Stone) motiva o nome!

- Álgebras C^* por Gelfond e Naimark (1943)
 - Dualidade de Gelfond-Naimark é inspirada pelo de Stone
 - Álgebras de von Neumann são exemplos de álgebras C^*
- Construção GNS por Gelfond, Naimark e Segal (1943/47)
- Formalismo algébrico da Mecânica (Clássica/Quântica) não-relativística (hoje)
 - C^* -álgebras comutativas \cong espaços de mec. clássica
 - C^* -álgebras não-comutativas \cong espaços da mec. quântica
- Surgimento da Geometria Não-comutativa por Connes ()
 - "Imitação" de Geometria Diferencial usando C^* -álgebras
 - Connes ganha Fields em 1982
 - Está relacionado com ambições sobre gravitação quântica
- Geometria / Álgebra (então)

1.2. Ferramentas matemáticas (pré-história)

O plano:

- Teoria de Categorias
- Álgebra (sem topologia)
- Álgebra (com topologia) \cong Análise Funcional
- Probabilidade (através da Teoria de Medida)
- Análise Funcional (com medida) \cong Álgebras de Operadores / von Neumann

Pressupostos:

- Metodologia "Prova": universos de Grothendieck, NBG, etc..
- Sabemos Lógica e conjuntos numéricos
- Sabemos cálculo em \mathbb{R} (?)
- "Conhecemos" Álgebra Linear em \mathbb{R} -espaços vetoriais (?)
- Sabemos Física básica (?)

1.2.1. Teoria das Categorias (uma introdução)

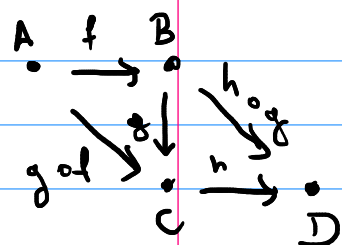
com objetivo de fazer teoria

Motivação: "toda investigação matemática 'teórica' tem sempre dois ingredientes básicos:

- i) uma classe de objetos (conjuntos, espaços vetoriais, etc.)
- ii) uma classe de setas (funções, transformações lineares, etc.)

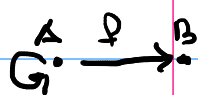
Princípio Metodológico: "Numa investigação, se conhecemos todos os setas que chegam e saem de um objeto, sabemos qual é este objeto." (Lema de Yoneda)

Def: Uma categoria \mathcal{C} é constituída de uma classe de objetos, denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$, e uma classe de setas para cada dois objetos $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, com uma noção de composição de setas, \circ , satisfazendo:

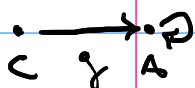


i) associatividade: $\forall f \in \text{Hom}(A, B), g \in \text{Hom}(B, C), h \in \text{Hom}(C, D)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



ii) existência de identidade: $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \exists ! \text{id}_A: A \rightarrow A$ tq $\forall f \in \text{Hom}(A, B), g \in \text{Hom}(C, A),$



$$f \circ \text{id}_A = f \quad \text{e} \quad \text{id}_B \circ g = g.$$

Nomenclatura: Setas também são chamados de morfismos. Em categorias "algebricas", recebem um nome "regional": homomorfismos. Em algumas categorias, setas recebem nomes "regionais" mais "históricos" (aritmética: coprimos, pão, etc.) Vamos usar morfismo a partir de agora.