8/7/22

Preliminares

§ Contexto histórico

- Problemas da "velha física" (até meados de 1900)
- Hipótese de quantização de Planck e Einstein (1900 e 1905)
  - Explicação do Efeito foto-elétrico por Einstein rende Nobel
- Mecânica Quântica Matricial (MQM) de Heisenberg-Born-Jordan (1925)
  - Dualidade onda-partícula de De Broglie (1924)
- Mecânica Quântica Ondulatória (MQO) de Schrödinger (1926)
- "Ideia" de equivalência entre MQM e MQO (1927)
  - Quem "suspeitou": Pauli, Schrödinger, Eckart e Dirac
- Primeira formulação "organizada" do formalismo por Dirac (1930)
  - Principles of Quantum Mechanics (livro de Dirac)
  - Notação bra-ket: $|\psi\rangle, |\varphi\rangle, \ldots$
  - Reconhecimento da Álgebra Linear e Análise Funcional
- Tratado sobre Operadores em Espaços de Hilbert por Stone (1930)
  - Nessa época, o teorema Stone-von Neumann é provado
- Prova da equivalência entre MQM e MQO por von Neumann (1932)
  - Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (livro de von Neumann)
  - Consolidação dos espaços de Hilbert como uma abordagem
  - Prévia da Álgebra de Operadores
- Discussão sobre Lógica Quântica por Birkhoff e von Neumann (1936)
- O Teorema de Representação de Álgebras de Boole por Stone (1936)
  - Promove uma revolução na matemática moderna
- Álgebras de von Neumann por Murray e von Neumann (1930-1949)
- Surgimento da Teoria de Categorias por Mac Lane e Eilenberg (1945)
  - "O que os matemáticos buscam são adjunções!" - Mac Lane
  - Dualidade de Stone como uma das grandes motivações
  - Operador adjunto (devido a Stone) motiva o nome!

- Álgebras C^* por Gelfand e Naimark (1943)
  - Dualidade de Gelfand-Naimark é inspirada pela de Stone
  - Álgebras de von Neumann são exemplos de álgebras C^*
- Construção GNS por Gelfand, Naimark e Segal (1943/47)
- Formalismo algébrico da Mecânica (Clássica/Quântica) não-relativística (hoje)
  - C^*-álgebras comutativas $\cong$ espaços de mec. clássica
  - C^*-álgebras não-comutativas $\cong$ espaços da mec. quântica
- Surgimento da Geometria Não-comutativa por Connes (   )
  - "Imitação" da Geometria Diferencial usando C^*-álgebras
  - Connes ganha Fields em 1982
  - Está relacionado com ambições sobre gravitação quântica
- Geometria / Álgebra (sintetização)

§ Ferramentas matemáticas (prelúdio)

Livro-texto: Foundations of Quantum Theory - Landsman

Elementos que trarei durante o estudo:

- Teoria de Categorias
- Álgebra ("sem" topologia)
- Álgebra (com topologia) $\cong$ Análise Funcional
- Probabilidade (através da Teoria de Medida)
- Análise Funcional (com medida) $\cong$ Álgebras de Operadores / von Neumann

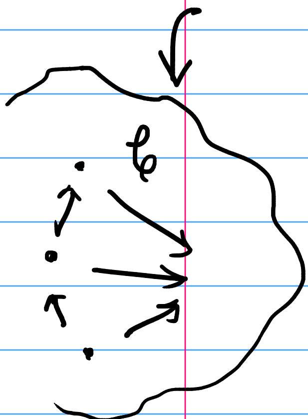
Pressupostos:

- Metateoria "frouxa": universos de Grothendieck, NBG, etc..
- Sabemos Lógica e Conjuntos numéricos
- Sabemos Cálculo em $\mathbb{R}$
- "Conhecemos" Álgebra Linear em $\mathbb{R}$-espaços vetoriais
- Sabemos Física básica

§ Teoria de Categorias (uma introdução)

com objetivo de fazer teoria

Motivação: "toda investigação matemática "teórica" tem sempre dois ingredientes básicos:



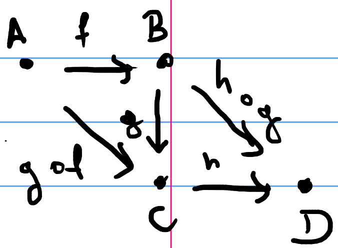
i) uma classe de objetos (conjuntos, espaços vetoriais, etc.)

ii) uma classe de setas (funções, transformações lineares, etc.)

Princípio metodológico: "Numa investigação, se conhecermos todas as setas que chegam e saem de um objeto, sabemos qual é este objeto." (Lema de Yoneda)

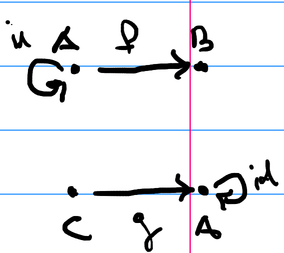
Def: Uma categoria $\mathcal{C}$ é constituída de uma classe de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$, e uma classe de setas para cada dois objetos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, com uma noção de composição de setas, $\circ$, satisfazendo:

$f: A \to B$



i) associatividade: $\forall f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(B,C)$, $h \in Hom(C,D)$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



ii) existência de identidade: $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$, $\exists!\, id_A : A \to A$ tq $\forall f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(C,A)$,

$$f \circ id_A = f \quad e \quad id_A \circ g = g.$$

Nomenclatura: Setas também são chamadas de morfismos. Em categorias "algébricas", recebem um nome "regional": homomorfismos. Em algumas categorias, setas recebem nomes "regionais" mais "históricos" (analogia: capitais, pão, etc.) Vamos usar morfismo a partir de agora.

Exemplo: A categoria dos conjuntos e funções, $\underline{SET}$.

- $obj(\underline{SET}) := \{conjuntos\}$
- $\forall A, B \in obj(\underline{SET})$, $Hom(A,B) := \{f : A \to B \mid f \text{ é função}\}$
- A composição é dado como usualmente: dados $f \in Hom(A,B)$

e $g \in Hom(B,C)$, definimos

$$g \circ f : A \to C$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

veja que:

i) é associativo: considerando f e g de antes e $h \in Hom(C,D)$, temos, $\forall x \in A$,

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x))$$
$$= h(g(f(x)))$$
$$= h((g \circ f)(x))$$
$$= [h \circ (g \circ f)](x),$$

e, portanto,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$ (igualdade de funções!)

ii) $\forall A \in obj(\underline{SET})$, definimos

$$id_A : A \to A$$
$$x \mapsto id_A(x) := x.$$

Esta seta funciona como identidade de A (exercício).

Logo, $\underline{SET}$ é uma categoria.

Outros Exemplos:

- **Top**: categoria dos espaços topológicos + funções contínuas
- **Vect$_{\mathbb{R}}$**: categoria dos $\mathbb{R}$-espaços vetoriais + $\mathbb{R}$-transformações lineares

Def: Dada uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ é um <u>isomorfismo</u> sse existe um morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ tq.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left] \arrow[r, bend right] & B \arrow[loop right] \arrow[l, bend right, "f"']
\end{tikzcd}
$$

$$f \circ g = id_B \quad \text{e} \quad g \circ f = id_A. \quad (*)$$

Quando existe pelo menos um isomorfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, dizemos que A e B são isomorfos e denotamos por $A \cong_{\mathcal{C}} B$.

Obs: i) A rigor, podemos falar de isomorfismo para qualquer categoria!

ii) Em <u>SET</u>, as funções bijetivas são os isomorfismos:

- f é um morfismo em <u>SET</u> sse f é uma função
- Da teoria de conjuntos sabemos que $f: A \to B$ é inversível sse existe uma função $g: B \to A$ tq $(*)$ vale, por definição.
- Também da teoria de conjuntos, sabemos que

  f é inversível sse f é bijetiva (injetiva e sobrejetiva)
- Portanto, f é isomorfismo em <u>SET</u> sse é bijetora.

iii) Na definição acima, g é única e denotada por f^{-1}.

Exemplo: $\forall\ X \in obj(\underline{SET})$, $\mathcal{P}(X) \cong_{\underline{SET}} \underline{2}^X$, em que

$$\mathcal{P}(X) := \{ A \mid A \subseteq X \}$$

e

$$\underline{2}^X := \{ f: X \to \underline{2} \mid f \text{ é função} \}.$$

Aqui, $\underline{2} = \{0,1\}$.

Dem: Seja $X \in Obj(\underline{SET})$, q.m.q. $\mathcal{P}(X) \cong_{\underline{SET}} \underline{2}^X$.

Para isto, vamos mostrar que existe uma função bijetora de $\mathcal{P}(X)$ para $\underline{2}^X$. A forma de fazer isto será exibindo a função e sua inversa. Considere

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \underline{2}^X \\ \qquad A \longmapsto \Phi(A) := \chi_A \end{cases}$$

em que $\chi_A : X \to \underline{2}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$.

Ainda, considere

$$\begin{cases} \Psi : \underline{2}^X \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \qquad f \longmapsto \Psi(f) := f^{-1}(1). \end{cases}$$

Observe que $\Phi \in Hom(\mathcal{P}(X), \underline{2}^X)$ e $\Psi \in Hom(\underline{2}^X, \mathcal{P}(X))$.

Vamos mostrar que

$$\Phi \circ \Psi = id_{\underline{2}^X} \quad e \quad \Psi \circ \Phi = id_{\mathcal{P}(X)}.$$

- $\Phi \circ \Psi = id_{\underline{2}^X}$: Seja $f \in \underline{2}^X$. Daí

$$(\Phi \circ \Psi)(f) = \Phi(\Psi(f)) = \Phi(f^{-1}(1)) = \chi_{f^{-1}(1)} \overset{(*)}{=} f = id_{\underline{2}^X}(f).$$

Com efeito, (*) pois

$$\chi_{f^{-1}(1)} = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in f^{-1}(1) \\ 0, & \text{se } x \notin f^{-1}(1) \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } f(x) = 1 \\ 0, & \text{se } \underbrace{f(x) \neq 1}_{f(x)=0} \end{cases} = f.$$

- $\Psi \circ \Phi = id_{\mathcal{P}(X)}$: Seja $A \in \mathcal{P}(X)$. Daí,

$$(\Psi \circ \Phi)(A) = \Psi(\Phi(A)) = \Psi(\chi_A) = \chi_A^{-1}(1) = A = id_{\mathcal{P}(X)}(A).$$

- Concluímos que $\mathcal{P}(X) \cong_{SET} \underline{2}^X$
-

$\{1, \dots, N\} = \underline{N}$

$$\underbrace{X \times \dots \times X}_{N\text{-vezes}} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$$

$$\cong$$

$$X^{\underline{N}} := \{f : \underline{N} \to X \mid f(i) \in X\}$$

§ Álgebra ("sem" topologia)

- Corpos
- Grupos abelianos
- Anéis
- Espaço vetorial
- Álgebra (análise funcional): Uma álgebra é uma estrutura $\mathcal{A} = (A, +, \circ, \cdot, \mathbb{K}, 0_A)$ tq

  - $(A, +, \cdot, \mathbb{K}, 0_A)$ é um espaço vetorial
  - $(A, +, \circ)$ é anel

satisfazendo $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a, b \in A$

Comp) $\alpha \cdot (a \circ b) = a \circ (\alpha \cdot b) = (\alpha \cdot a) \circ b$

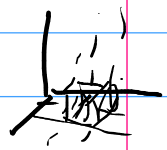
$$\alpha AB = A(\alpha B) = (\alpha A) B$$

Quando $(A, +, \circ)$ tem unidade ou é comutativo dizemos que $\mathcal{A}$ é unital ou comutativa, resp.

Mecânica Clássica num Espaço de Fase Finito

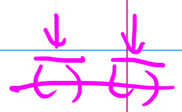
§ Medida e Probabilidade

Dado X, queremos "medir" subconjuntos $A \subseteq X$. Isto é, para cada $A \subseteq X$ queremos associar um único valor $\mu(A)$. Ou seja μ é uma função. Queremos que μ seja tal que



→ (M1) $\forall A \subseteq X,\ \mu(A) \in [0,\infty] \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$;

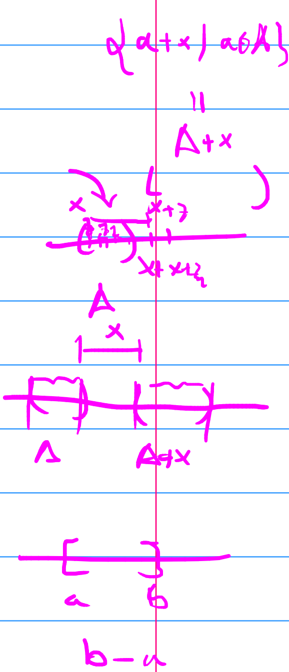
→ (M2) $\forall A, B \subseteq X$, se $A \subseteq B$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$;



→ (M3) $\forall A, B \subseteq X$, se $A \cap B \neq \emptyset$ então $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

→ (M4) Dada $(A_j)_{j \geq 1}$ com $A_j \subseteq X$ e $A_j \subseteq A_{j+1}$ $\forall j$, gostaríamos que

$$\mu\Big(\bigcup A_j\Big) = \mu\big(\lim_j A_j\big) = \lim_j \mu(A_j);$$



Além disso, suponha que $X = \mathbb{R}$ por um instante. Neste caso especial gostaríamos que

→ (M5) $\forall A \subseteq \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mu(A) = \mu(A + x)$;

→ (M6) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b,\ \mu([a,b]) = b - a$.

Infelizmente, tal μ não pode existir devido ao Axioma da Escolha. Vitali mostrou, em 1905, isto. Contudo, observe que que estávamos considerando TODOS os $A \subseteq X$, ou seja todos os $A \in 2^X$, ou seja $\mathrm{dom}(\mu)$ seria 2^X. Será que as condições são atendidos se encontrarmos uma classe $\mathcal{A}$ "menor" do que $\underline{2}^X$? De fato, sim.

Def: Seja X um conjunto. Dizemos que $\mathcal{A} \subseteq \underline{2}^X$ é uma <u>sigma-álgebra</u> em X sse

(i) $\forall A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$,
(ii) $\forall (A_j)_{j\geq 1}$, $A_j \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{A}$,

ou seja, $\mathcal{A}$ é fechada por complementares e uniões enumeráveis.

Ex: $\{\phi, X\}$ e $\underline{2}^X$ são sigma-álgebras em X.

Def: Dizemos que $(X, \mathcal{A})$ é um <u>espaço mensurável</u> sse X é um conjunto e $\mathcal{A}$ é uma sigma-álgebra em X.

Def: Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $Y \subseteq X$. Dizemos que $(Y, \mathcal{A}_Y)$ é um subespaço mensurável de $(X, \mathcal{A})$ sse

$$\mathcal{A}_Y = \{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{A} \}.$$

Teo: Sejam $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$ sigma-álgebras em X. Então

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}_j$$

é uma sigma-álgebra em X.

Dem: (i) Seja $A \in \mathcal{A}$. Então $A \in \mathcal{A}_j$ para todo $j \in J$. Como $\mathcal{A}_j$ é sigma-álgebra para todo $j \in J$, $A^c \in \mathcal{A}_j$ para todo $j \in J$. Portanto, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Seja $(A_i)_{i\geq 1}$ em $\mathcal{A}$. Seja $i \geq 1$. Daí, $A_i \in \mathcal{A}$ já que $(A_i)_{i\geq 1}$ é uma seq. em $\mathcal{A}$. Logo, $A_i \in \mathcal{A}_j$ para todo $j \in J$. Como i era arbitrário, $A_i \in \mathcal{A}_j$, para todo $j \in J$, para cada i. Como $\mathcal{A}_j$ é uma sigma-álgebra para cada $j \in J$, temos que $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}_j$ para cada $j \in J$. Ou seja, $\bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}$. $\blacksquare$

Def: Seja $\mathcal{C} \subseteq 2^X$. Definimos "a menor sigma-álgebra que contém $\mathcal{C}$ (em X)" como

$$s(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ é sigma-álgebra em } X \text{ e } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Dizemos que $s(\mathcal{C})$ é a sigma-álgebra gerada por $\mathcal{C}$.

Obs: Veja que a unicidade é garantida por propriedades de interseção e de fato $s(\mathcal{C})$ é uma sigma-álgebra pelo teorema anterior. Além disso, trivialmente $\mathcal{C} \subseteq s(\mathcal{C})$.

Ex: Seja $A \subseteq X$. Então $s(A) := s(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.

Def: Seja (X, τ) um espaço topológico. A sigma-álgebra gerada pela topologia, denotada por

$$\mathcal{B}(X) := s(\tau)$$

é chamada de sigma-álgebra de Borel sobre X. Neste caso, o espaço mensurável $(X, \mathcal{B}(X))$ é dito ser um espaço de Borel.

Obs: Cada $B \in \mathcal{B}(X)$ é dito conjunto de Borel sobre X ou boreliano sobre X.

Ex: Considere $X = \mathbb{R}$. Então

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = s(\{ U \mid U \text{ é aberto em } \mathbb{R} \}).$$

Pode-se mostrar que, além disso, também ocorre que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = s(\{ (a,b) \mid a<b,\ a,b \in \mathbb{R}\}).$$

Mais do que isso: pode-se trocar (a,b) por intervalos da forma $(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,b)$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$.

Def: Dizemos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um <u>espaço de medida</u> ssu X é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma sigma-álgebra em X e $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ é uma função chamada <u>medida</u> (positiva) satisfazendo

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) Se $(A_j)_{j\geq 1}$ é uma seq. 2-2 disjunta em $\mathcal{A}$,

$$\mu\left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j). \qquad \text{(sigma-aditividade)}$$

Obs: Claramente, a sigma-aditividade implica na aditividade,

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Ex: Seja X um conjunto infinito, $\mathcal{A} = 2^X$ e

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \in 2^X \text{ é finito.} \\ \infty, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Neste caso, μ é aditiva, mas não é sigma-aditiva. Logo, $(X, 2^X, \mu)$ não é espaço de medida. Com efeito, como X é infinito, podemos construir uma sequência $(A_j)_{j\geq 1}$ em 2^X

tal que $A_j = \{x_j\}$, $j \geq 1$, de modo que $x_i \neq x_j$ $\forall i \neq j$.
Assim,

$$\mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j\geq 1} A_j}_{\text{infinito}}\Big) = \infty \quad e \quad \sum_{j\geq 1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_j)}_{\text{finito}} = 0 .$$

Teo: Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Então

(i) Se $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A) < \infty$, então para todo $B \in \mathcal{A}$

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B).$$

(iii) Se $\mu(A) < \infty$ para todo $A \in \mathcal{A}$, então

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c) .$$

Dem: Omitida. $\blacksquare$

Def: Dizemos que $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade sse $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um espaço de medida e $\mathbb{P}(X) = 1$.

Obs: Note que pelo teorema anterior, dado qualquer $A \in \mathcal{A}$, como $\emptyset \subseteq A \subseteq X$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ e $\mathbb{P}(X) = 1$, num espaço de probabilidade necessariamente temos

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 .$$

Além disso, $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(X) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Obs: Em espaços de probabilidade $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X é chamado de espaço amostral e cada $A \in \mathcal{A}$ é chamado de evento, e $\mathbb{P}$ é dito ser uma medida de probabilidade.

Obs: Quando X for enumerável, $\mathcal{A} = 2^X$ a menos que se diga o contrário.

§ Funções Mensuráveis

Def: Dados $(X, \mathcal{A}_X)$ e $(Y, \mathcal{A}_Y)$ dois espaços mensuráveis, dizemos que $f: X \to Y$ é uma função $(\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y)$-mensurável (ou, simplesmente, mensurável) sse

$$\forall A \in \mathcal{A}_Y, \ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X.$$

Def: Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Dizemos que $f: X \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória real sse f é uma função $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável, i.e.,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ f^{-1}(A) \in \mathcal{A}.$$

§ Espaços de Probabilidade: Caso Discreto

Def: Seja $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade com X no máximo enumerável. Neste caso dizemos que $(X, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ é um <u>espaço de probabilidade discreto</u>. Além disso, $\mathcal{A} = 2^X$ e para todo $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in X} p(x) \chi_A(x)$$

em que $p: X \to [0,1]$ é uma <u>distribuição de probabilidade</u> tal que

$$\sum_{x \in X} p(x) = 1.$$

Obs: Seja $(X, 2^X, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade discreto com X finito. Então toda função $f: X \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória real. Com efeito, dado $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, certamente $f^{-1}(A) \subseteq X$, i.e., $f^{-1}(A) \in 2^X$.

Lema: Sejam X um conjunto e $A, B \subseteq X$. Então
(i) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$;
(ii) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$;
(iii) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Teo: Seja X um conjunto finito e $p: X \to [0,1]$ tq $\sum_{x\in X} p(x) = 1$. Então p torna X um espaço de probabilidade $(X, 2^X, \mathbb{P})$ tq

$$\forall x \in X, \quad \mathbb{P}(\{x\}) = p(x).$$

Dem: Defina $\mathbb{P}: 2^X \to [0,\infty]$ tal que para todo $A \in 2^X$,

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{x\in X} p(x)\chi_A(x).$$

Note que $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)\chi_{\{x\}}(x) = p(x)$. Vamos mostrar que $\mathbb{P}$ é uma medida de probabilidade:

(i) $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{x\in X} p(x)\chi_\emptyset(x) = 0$

(ii) Tome $A, B \in 2^X$ com $A \cap B = \emptyset$. Assim

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \sum_{x\in X} p(x)\chi_{A\cup B}(x)$$

$A\cap B = \emptyset$

$$= \sum_{x\in X} p(x)\left(\chi_A(x) + \chi_B(x) - \cancel{\chi_{A\cap B}(x)}\right)$$

$$= \sum_{x\in X} p(x)\left(\chi_A(x) + \chi_B(x)\right)$$

$$= \sum_{x\in X} p(x)\chi_A(x) + \sum_{x\in X} p(x)\chi_B(x)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Hip.

(iii) $\mathbb{P}(X) = \sum_{x\in X} p(x)\chi_X(x) = \sum_{x\in X} p(x) = 1$. ∎

Cor: Seja X um conjunto finito e $y \in X$. Então

Delta de Kronecker!

$$p_y : X \to [0,1]$$
$$x \mapsto p_y(x) = \delta_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

define uma função de probabilidade de modo que $(X, \underline{2}^X, \mathbb{P}_y)$ é um espaço de probabilidade discreto com $\mathbb{P}_y$ induzido por p_y.
Mais ainda: para cada $A \in \underline{2}^X$, neste caso, $\mathbb{P}_y(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in A \\ 0, & \text{se } y \notin A \end{cases}$.