# T1. Tempo de Execução de Algoritmos Iterativos

## Contabilização de operações primitivas

Iremos:

1. identificar as operações primitivas que executam em *tempo constante*, i.e. tempo que não depende do tamanho do input
2. atribuir *custos (tempos) abstractos* c1, c2, ... a estas operações primitivas, de forma independente de qualquer mecanismo de execução concreto
3. calcular o custo abstracto total do algoritmo em função do *tamanho do input* – T(N)

**Exemplo: contagem de ocorrências num *array***

```
int conta (int k, int v[], int N) {
    int i = 0, r = 0;                     c1       1
    while (i<N) {                         c2      N+1
      if (v[i] == k) r++;                 c3       N
      i++;                                c4       N
    }
    return r;                             c5       1
}
```

Note-se que

- c1 corresponde ao custo das duas operações de inicialização;
- a condição do ciclo é uma operação primitiva, avaliada N+1 vezes (falso na última vez), com custo c2

Temos: $T(N) = c_1 + c_2(N+1) + c_3N + c_4N + c_5$ ou simplificando:

> $T(N) = (c_2 + c_3 + c_4)N + c_1 + c_2 + c_5$
> *Polinómio de primeiro grau em N: crescimento linear*

### Exemplo: identificação de duplicados num *array*

```
void dup (int *v, int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a ; i<=b ; i++)                      c1          N+1
      for (j=a ; j<=b ; j++)                    c2          N*(N+1)
        if (i!=j && v[i]==v[j])                 c3          N*N
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

- A função procura elementos repetidos entre os índices a e b. Sendo assim, o tamanho do input será dado por $N = b - a + 1$.
- c1 é o custo agregado da condição i<b (testada N+1 vezes) e do incremento i++ (feito N vezes)
- O ciclo exterior executa N iterações, e *em cada iteração, o ciclo interior executa N iterações.* Sendo assim:

> *O condicional (custo c3) é executado no total $N^2$vezes*

Logo:

$T(N) = c_1(N+1) + c_2N(N+1) + c_3N^2$ ou simplificando:

> $T(N) = (c_2 + c_3)N^2 + (c_1 + c_2)N + c_1$
> *Polinómio de segundo grau em N: crescimento quadrático*

### Exemplo: identificação de duplicados num *array*

A versão anterior imprime cada par duas vezes! Pode ser optimizada:

```
void dup2 (int v[], int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a ; i<b ; i++)                      c1          N
      for (j=i+1 ; j<=b ; j++)                 c2          Soma S1
```

```
        if (v[i]==v[j])                       c3        Soma S2
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

Sendo mais eficiente, esta versão é mais difícil de analisar, uma vez que, *para cada valor de i fixado pelo ciclo exterior, o ciclo interior executará um número diferente de vezes!*

A tabela seguinte detalha os valores tomados por j e o número de iterações do ciclo interior, para cada valor de i:

| | | |
|---|---|---|
| i=a | j = a+1 ... b | b-a iterações |
| i=a+1 | j= a+2 ... b | b-a-1 iterações |
| ... | ... | ... |
| i (arbitrário) | j = i+1 ... b | b - (i+1) +1 = b-i |
| ... | ... | ... |
| i=b-1 | j = b | 1 iteração |

Somando todas estas iterações, obtemos $S_2 = \sum_{i=a}^{b-1} b - i$ e também $S_1 = \sum_{i=a}^{b-1} b - i + 1$.

Admitamos sem perda de generalidade que $a = 1$ e $b = N$. Então

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N-1}(N - i) = (N-1)N - \frac{(N-1)N}{2} = \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1}(N - i + 1) = S_2 + N - 1$$

logo:

$$T(N) = c_1 N + c_2 S_1 + c_3 S_2$$

> $T(N) = k_2 N^2 + k_1 N + k_0$
> *Polinómio de segundo grau em N: crescimento quadrático*
> *(veremos que não é muito importante calcular os coeficientes $k_0$ a $k_2$)*

## Análise Assimptótica

Numa função polinomial como $T(N) = k_2 N^2 + k_1 N + k_0$,

para *inputs de tamanho elevado* o efeito dos termos de menor grau é anulado face ao crescimento do termo de maior grau.

E de facto, o interesse da constante multiplicativa $k_2$ é também pequeno: na *análise assimptótica* interessamo-nos apenas pela *ordem de crescimento* do tempo de execução dos algoritmos.

Escreveremos:

> $T(N) = \Theta(N^2)$

Se o algoritmo A1 é *assimptoticamente melhor* do que A2, será melhor escolha do que A2 *excepto para inputs muito pequenos*.

## Notação $\mathcal{O}$ ("big oh")

Para uma função $g$ não-negativa de domínio $\mathbf{N}$,
define-se $\mathcal{O}(g)$ como o seguinte *conjunto de funções*:

$$\mathcal{O}(g) = \{f \mid \text{ existem } c, n_0 > 0 \text{ tais que } \forall n \geq n_0 .\, 0 \leq f(n) \leq c g(n)\}$$

> *Para $n \geq n_0$, $g$ é um limite superior de $f$ a menos de um factor constante*

**Exemplos:**

- $3n^2 + 7n \in \mathcal{O}(n^2)$
- $4n - 5 \in \mathcal{O}(n^2)$
- $7n^3 - 2n \notin \mathcal{O}(n^2)$

## Notação $\Omega$ (Omega)

Para uma função $g$ não-negativa de domínio $\mathbf{N}$, define-se $\Omega(g)$ como o seguinte *conjunto de funções*:

$$\Omega(g) = \{f \mid \text{ existem } c, n_0 > 0 \text{ tais que } \forall n \geq n_0.\ 0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

> *Para $n \geq n_0$, g é um limite inferior de $f$ a menos de um factor constante*

**Exemplos:**
- $3n^2 + 7n \in \Omega(n^2)$
- $4n - 5 \notin \Omega(n^2)$
- $7n^3 - 2n \in \Omega(n^2)$

## Notação $\Theta$ (Theta)

Para uma função $g$ não-negativa de domínio $\mathbf{N}$,
$\Theta(g) = \mathcal{O}(g)\ \cap\ \Omega(g)$

> *Se $f \in \Theta(g)$, então para $n \geq n_0$ f tem um comportamento "igual" ao de g, a menos de factores constantes*

**Exemplos:**
- $3n^2 + 7n \in \Theta(n^2)$
- $4n - 5 \notin \Theta(n^2)$
- $7n^3 - 2n \notin \Theta(n^2)$

Para os exemplos acima podemos escrever:
- Contagem de ocorrências num *array:* $T(N) = \Theta(N)$
- Identificação de duplicados num *array:* $T(N) = \Theta(N^2)$

## Funções Úteis em Análise de Algoritmos

As funções tipicamente utilizadas são as *logarítmicas*, *polinomiais*, e *exponenciais*.
Alguns factos envolvendo estas funções:

A base das funções logarítmicas é irrelevante assimptoticamente (desde que > 1)
:

$$\log_b n = \mathcal{O}(\log_a n) \quad \text{se } a, b > 1$$

Já no caso das funções polinomiais, qualquer polinómio é limitado superiormente por qualquer outro polinómio de maior grau:

$$n^b = \mathcal{O}(n^a) \quad \text{se } b \leq a$$

O mesmo acontece com as funções exponenciais relativamente à base:

$$b^n = \mathcal{O}(a^n) \quad \text{se } b \leq a$$

Por outro lado, uma função logarítmica é limitada superiormente por qualquer função polinomial:

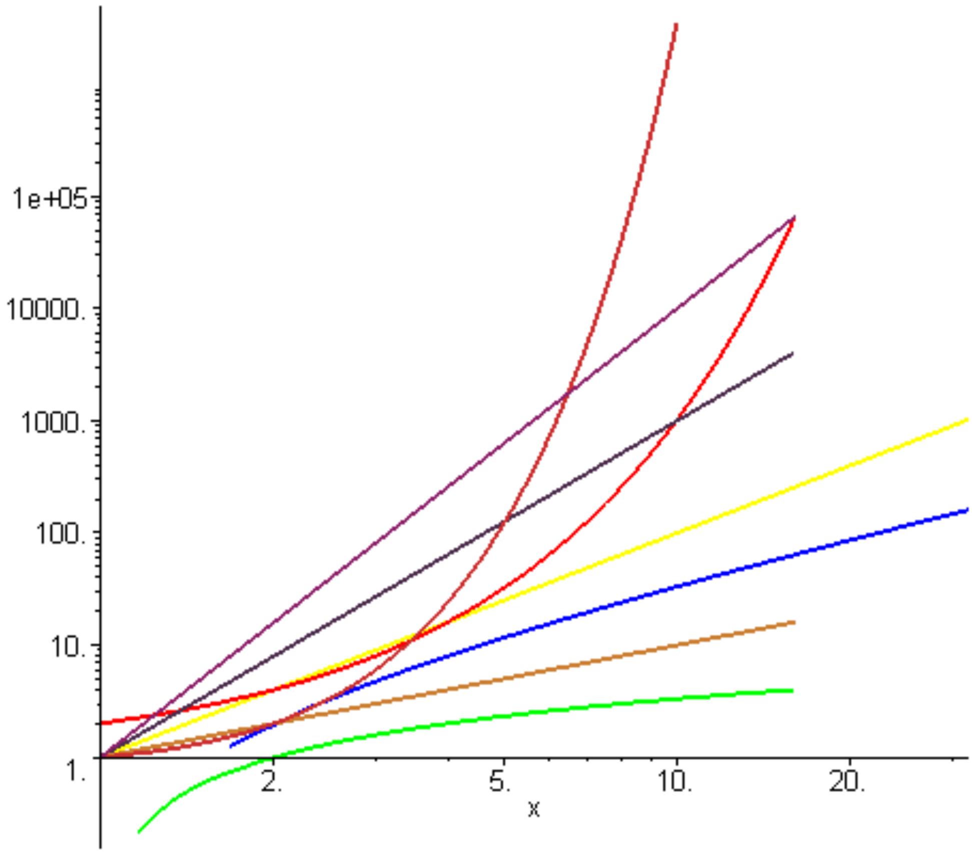
$$\log_b n = \mathcal{O}(n^a)$$

e uma função polinomial é limitada superiormente por qualquer função exponencial de base >1:

$$n^b = \mathcal{O}(a^n) \quad \text{se } a > 1$$

## Crescimento de Algumas Funções Típicas

| Tempo ($\mu s$) | | $33n$ | $46n \lg n$ | $13n^2$ | $3.4n^3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tempo assimp. | | $n$ | $n \lg n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ |
| Tempo de | n=10 | $.00033s$ | $.0015s$ | $.0013s$ | $.0034s$ | $.001s$ |
| execução por | n=100 | $.003s$ | $.03s$ | $.13s$ | $3.4s$ | $4.10^{14}s$ |
| tamanho do | n=1000 | $.033s$ | $.45s$ | $13s$ | $.94h$ | séculos |
| input | n=10000 | $.33s$ | $6.1s$ | $22m$ | 39 dias | $\cdots$ |
| | n=100000 | $3.3s$ | $1.3m$ | 1.5 dias | 108 anos | $\cdots$ |
| Tamanho máx. | $1s$ | $3.10^4$ | 2000 | 280 | 67 | 20 |
| do input para | $1m$ | $18.10^5$ | 82000 | 2200 | 260 | 26 |




$\log x$, funções polinomiais de diversos graus (rectas, incluindo $n \lg n$), $2^x$, e $x!$

## Identificação de Operações Relevantes

- Na prática, para analisar assimptoticamente um algoritmo não é necessário considerar custos abstractos associados às operações primitivas: basta contar o número de vezes que as operações são executadas.

- De facto não é sequer necessário contar *todas* as operações primitivas. Basta identificar as que são relevantes para a análise assimptótica.

> *Dadas duas operações op1 e op2 de um programa, se o número de execuções de op1 não for assimptoticamente superior ao número de execuções de op2, então op1 pode ser descartada para efeitos de análise (assimptótica) de tempo de execução*

Exemplo:

```c
void dup2 (int v[], int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a ; i<b ; i++)
      for (j=i+1 ; j<=b ; j++)                    Soma S1
        if (v[i]==v[j])                           Soma S2
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

Neste programa basta considerar o condicional (corpo do ciclo interior) como única instrução assimptoticamente relevante. O tempo de execução pode ser analisado calculando simplesmente: $S_2 = \sum_{i=a}^{b-1} b - i = \Theta(N^2)$.

Apesar de a condição j<=b ser avaliada mais vezes ($S_1 = S_2 + N - 1$) do que o condicional (S2), assimptoticamente é equivalente considerar qualquer uma das duas para efeitos de análise.

> *Na prática contamos o **número de operações de comparação** efectuadas (entre elementos do array), o que é bastante intuitivo.*

**EXERCÍCIO**: Calcule o tempo de execução da seguinte versão alternativa desta função:

```c
void dup3 (int v[], int a, int b) {
    int i, j;
    for (i=a+1 ; i<=b ; i++)
      for (j=a ; j<i ; j++)
        if (v[i]==v[j])
          printf("%d igual a %d\n", i, j);
}
```

$T_{==}(n) = \sum_{i=a+1}^{b} i - 1 - a + 1 = \sum_{i=a+1}^{b} i - a = \sum_{i=a+1}^{b} \sum_{j=a}^{i-1} 1$

$T_{j<i}(n) = \sum_{i=a+1}^{b} \sum_{j=a}^{i} 1$

Sem perda de generalidade, consideramos $a = 0$ e $b = n - 1$

$T_{==}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)*n}{2} = \theta(n^2)$

$T_{j<i}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \frac{(n-1)*n}{2} + n - 1 = \theta(n^2)$

$T(n) = \theta(n^2)$

## Tamanho e Representação

A noção apropriada de tamanho de um número corresponde ao número de caracteres necessários para o escrever: o tamanho de 3500 é 4 em notação decimal.

Um inteiro $n$ em notação decimal ocupa aproximadamente $\log_{10} n$ dígitos; em notação binária (representação em máquina) ocupa $\log_2 n$ dígitos.

**EXEMPLO**:
*Problema*: Dado um inteiro positivo $n$, haverá dois inteiros $j, k > 1$ tais que $x = jk$?
(i.e, será $x$ um número primo ou não?)

Considere-se o seguinte algoritmo de “força bruta”:

```
found = 0;
j = 2;
```

```
while ((!found) && j < x) {
  if (x mod j == 0) found = 1;
  else j++;
}
```

Este algoritmo executa em tempo $\mathcal{O}(x)$, no entanto trata-se de um problema famoso pela sua dificuldade (e é por isso relevante em muitos algoritmos criptográficos).

Observe-se:

- se o algoritmo executa em tempo linear $\mathcal{O}(x)$,
- e a representação de $x$ utiliza $N = \log_k x$ dígitos (ou bits),
- então $x = k^N$,
- e o algoritmo executa por isso em tempo $T(N) = \mathcal{O}(k^N)$.

Ou seja: *um algoritmo de tempo aparentemente linear é de facto de tempo exponencial no tamanho da representação do número!*

É importante identificar correctamente a noção adequada de tamanho do input de um problema, uma vez que disso depende a sua classificação como fácil ou difícil!

## Exercício

Um dos algoritmos de *ordenação* mais simples é conhecido por *selection sort*. A ideia é, em cada iteração j do ciclo exterior (ciclo for), colocar na posição de índice j do array o
j-ésimo menor elemento. O ciclo interior (while) determina o índice do menor elemento ainda não colocado na sua posição final, e a função swap é usada para trocar este elemento com o que se encontra na posição j.

```
void swap(int t[],int i,int j) {
    int tmp = t[i];
    t[i] = t[j];
    t[j] = tmp;
}
```

```c

void selectionSort(int A[], int n) {
    int i, j, min, k;

    for (j=0; j < n-1; j++) {
        min = j;
        i = j+1;
        while (i < n) {
            if (A[min] > A[i]) min = i;
            i++;
        }
        if (j != min) swap (A, j, min);
    }
}
```

Note que a função swap executa em *tempo constante*, i.e. o seu tempo de execução não depende do tamanho do array. Escreveremos $T_{\mathsf{swap}}(N) = \Theta(1)$. Tendo isto em conta, identifique uma ou mais operações relevantes e analise assimptoticamente o tempo de execução da função.