Dinâmica de Instrumentos Medidores

Samir A. M. Martins[1]

[1]Universidade Federal de São João del-Rei
Departamento de Engenharia Elétrica
São João del-Rei, MG – Brasil

Graduação em Engenharia Elétrica

O que nos espera?

Introdução ao assunto

Resposta Dinâmica de Instrumentos Medidores

- Sensores e instrumentos são sistemas dinâmicos.

  $\rightarrow$ o valor "definitivo"da leitura não é apresentado imediatamente após uma variação na entrada (mensurando)

- Em problemas de **controle** e **monitoramento** a dinâmica não pode ser desprezada.

- Se a saída *demorar* a chegar em um valor "definitivo"(dinâmica lenta), prejudica-se o desempenho do processo de medição/controle.

Representação de Sistemas Dinâmicos Lineares

- Instrumentos com dinâmica rápida:

  $\rightarrow$ dinâmica pode ser desprezada

- Instrumentos com dinâmica lenta:

  $\rightarrow$ modelados por equações diferenciais de ordem *n*, como descrito a seguir:

Equações Diferenciais e Instrumentos Medidores

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{1}$$

sendo x o mensurando, y a saída (indicação), $n \geq m$ e $[a_i, b_j],\ \forall i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ coeficientes constantes.

No domínio S

- Aplicando a transformada de Laplace e considerando condições iniciais nulas:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{2}$$

$\rightarrow$ Dinâmica de instrumentos medidores: tipicamente descritas por sistemas de baixa ordem (zero, um e dois).

Dinâmica de ordem zero

Instrumentos de ordem zero

- Instrumentos/sensores muito rápidos

  $\rightarrow$ Considera-seque respondem instantaneamente às variações do mensurando (sinal de entrada)

- Caracterização efita por equação algébrica (dinâmica nula) $\rightarrow$ EDO de ordem zero.

$$\begin{aligned} a_0 y(t) &= b_0 x(t) \\ y(t) &= \frac{b_0}{a_0} x(t) = k x(t) \end{aligned} \tag{3}$$

sendo k a sensibilidade estática do instrumento medidor.

Exemplo gráfico - Dinâmica Nula

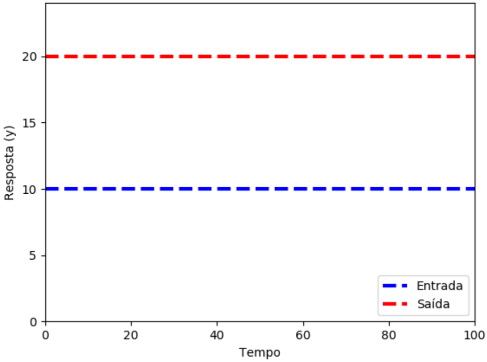

Figura 1: Exemplo de instrumento medidor com dinâmica nula e sensibilidade $k = 2\frac{[y]}{[x]}$.

Dinâmica de primeira ordem

Função de Transferência de Primeira Ordem

Instrumentos cujas dinâmicas podem ser descritas por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}, \tag{4}$$

sendo:

$\rightarrow$ k a sensibilidade estática (em regime permanente, determinado por $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$);

$\rightarrow$ τ o tempo necessário para que a saída atinja $63,2\%$ do valor final.

Exemplo gráfico - Dinâmica de Primeira Ordem

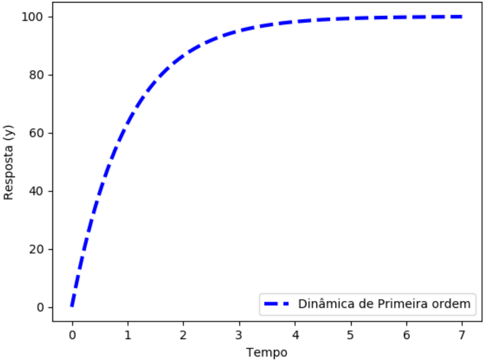

Figura 2: Exemplo de instrumento medidor com dinâmica de primeira ordem. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.

Dinâmica de segunda ordem

Função de Transferência de Segunda Ordem

Instrumentos cujo comportamento dinâmico pode ser descrito por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{5}$$

sendo:

$\rightarrow$ k a sensibilidade estática ($k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$).

$\rightarrow$ ξ o coeficiente de amortecimento.

$\rightarrow$ ω_n a frequência natural do sistema.

Tipos de Comportamento

Fator de amortecimento (ξ)	Característica do Sistema	Característica dos Pólos
$\xi > 1$	Sobreamortecido	Reais e $\neq$
$\xi = 1$	Crit. amortecido	Reais e $=$
$0 < \xi < 1$	Subamortecido	Complexos e conj.

Tabela 1: Possíveis comportamentos em um instrumento medidor de segunda ordem.

Dinâmica de Segunda Ordem Sobreamortecida

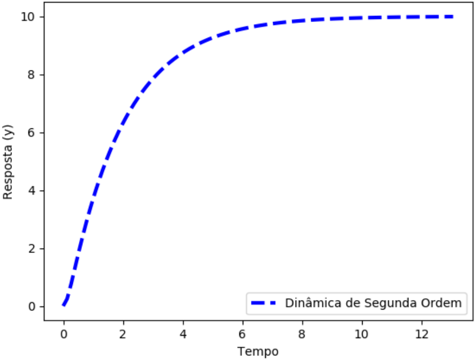

Figura 3: Exemplo de instrumento medidor com dinâmica de segunda ordem sobreamortecida. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.

Dinâmica de Segunda Ordem Criticamente amortecida

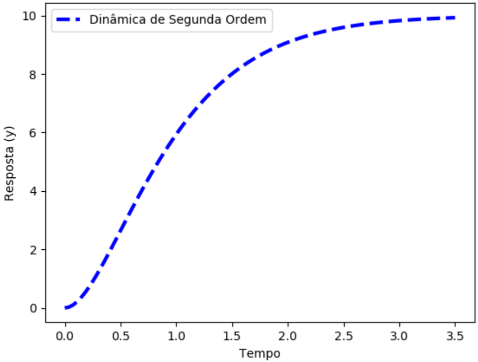

Figura 4: Exemplo de instrumento medidor com dinâmica de segunda ordem criticamente amortecida. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.

Dinâmica de Segunda Ordem Subamortecida

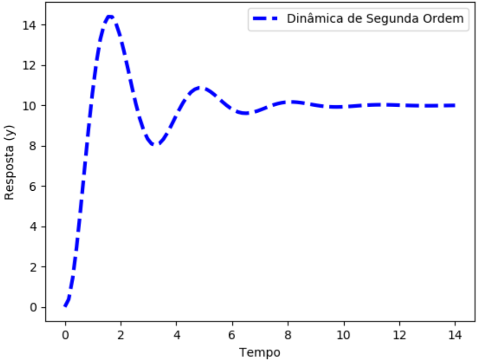

Figura 5: Exemplo de instrumento medidor com dinâmica de segunda ordem subamortecida. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.

Atraso puro de tempo

Atraso Puro de Tempo (APT) - Definição

- Atraso puro de tempo, tempo morto ou atraso de transporte são um intervalo de tempo durante o qual a saída de um sistema de medição não responde a qualquer variação do sinal de entrada.
- Em um contexto de instrumentação, tal fenômeno é utilizado principalmente para modelar atraso de transporte ou aproximar dinâmica de ordem elevada por ordem inferior + APT

Atraso Puro de tempo

Matematicamente:

$$H(s) = e^{-t_d s} \tag{6}$$

$\rightarrow$ sendo t_d o atraso puro de tempo.

- Pode-se associar uma dinâmica de outra ordem com o atraso puro de tempo.
- Neste caso, o modelo matemático resultante (domnínio s) é o produto das funções de transferência (APT e dinâmica considerada).

Exemplo de APT + Primeira Ordem

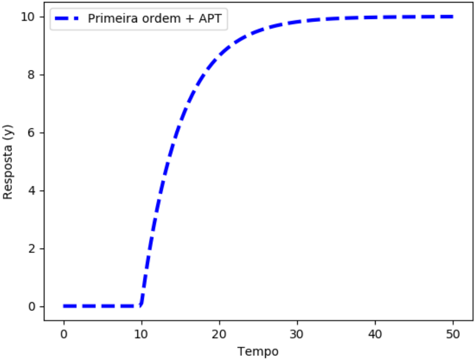

Figura 6: Exemplo de instrumento medidor de primeira ordem com atraso puro de tempo de 10s. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.

Exemplo de APT para Aproximar Dinâmicas.

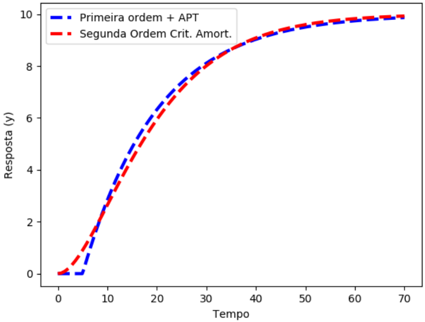

Figura 7: Utilização de atraso puro de tempo para aproximar comportamento dinâmico de ordem superior (segunda ordem) por ordem inferior (primeira ordem) mais APT. Assuma degrau unitário aplicado ao instrumento medidor.