Υλοποίηση ανταλλαγής κλειδιού DH και ψηφιακών υπογραφών βασισμένη σε ελλειπτικές καμπύλες

Νίκος Γιανναράκης
Ζωή Παρασκευοπούλου

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

28 Ιανουαρίου 2013

Κρυπτογραφία με ελλειπτικές καμπύλες

Why elliptic curve cryptography?

- Αυξημένη ασφάλεια με μικρότερα μήκη κλειδιών
- Μειωμένο υπολογιστικό κόστος και bandwitdh
- Ιδανικές για φορητές συσκευές λόγω ενεργειακών απαιτήσεων (κινητά κλπ.)
- ECC σε secure web servers, επιτάχυνση εως και 280% [6]

Σύγκριση μήκους κλειδιού

ECC	RSA	Αναλογία	AES
160	1024	1:6	
256	3072	1:12	128
384	7680	1:20	192
512	15360	1:30	256

Σχήμα : Σύγκριση μήκους κλειδιού σε bits

	ECC-160	RSA-1024	ECC-224	RSA-2048
Time(ms)	3.69	8.75	5.12	56.18
Ops/Sec	271.3	114.3	195.5	17.8
Perf ratio	2.4 : 1.0		11.0 : 1.0	
Key ratio	1.0 : 6.4		1.0 : 9.1	

Σχήμα : Σύγκριση απόδοσης ανάλογα με το μήκος κλειδιού [6]

Ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathcal{R}$

Ορισμός

Μία ελλειπτική καμπύλη στο $\mathcal{R}$ μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των σημείων (x,y) που ικανοποιούν μία εξίσωση ελλειπτικής καμπύλης της μορφής:

$$y^2 = x^3 + a \cdot x + b \; , \; x, y, a, b \in \mathcal{R}$$

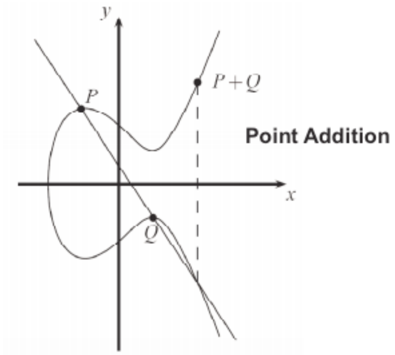
μαζί με ένα σημείο $\mathcal{O}$, το οποίο ονομάζουμε σημείο στο άπειρο.

Ορισμός πράξεων

- Πρόσθεση δύο σημείων P, Q
- Διπλασιασμός ενός σημείου P

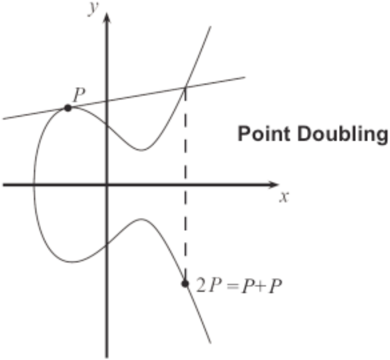
Πρόσθεση δύο σημείων πάνω σε ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathcal{R}$

Η πρόσθεση δύο σημείων P, Q μπορεί να οριστεί γεωμετρικά



Διπλασιασμός σημείου πάνω σε ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathcal{R}$

Ο διπλασιασμός ενός σημείου πάνω σε μία ελλειπτική καμπύλη ορίζεται γεωμετρικά σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα



Προβλήματα

- Αργές πράξεις σε πραγματικούς αριθμούς
- Έλλειψη ακρίβειας

Ελλειπτικές καμπύλες πάνω από το $\mathbb{F}_p$ και το $\mathbb{F}_{2^m}$

Ορισμός

Διαλέγοντας $a, b \in \mathbb{F}_p$ και υπολογίζοντας τα σημεία (x, y) της καμπύλης *modulo* p ορίζουμε μία ελλειπτική καμπύλη στο $\mathbb{F}_p$.

Πρόσθεση δύο σημείων πάνω σε ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathbb{F}_p$

Η πρόσθεση δύο σημείων $R = P + Q$ σε μία ελλειπτική καμπύλη στο $\mathbb{F}_p$ ορίζεται αλγεβρικά:

$$s = \frac{(y_P - y_Q)}{(x_P - x_Q)} \pmod p$$
$$x_R = s^2 - x_P - x_Q \pmod p$$
$$y_R = -y_P + s \cdot (x_P - x_R) \pmod p$$

Το $\mathcal{O}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης : $P + \mathcal{O} = P$.

Διπλασιασμός σημείου πάνω σε ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathbb{F}_p$

Ο διπλασιασμός σημείου $R = 2P$ σε μία ελλειπτική καμπύλη στο $\mathbb{F}_p$ ορίζεται αλγεβρικά:

$$s = \frac{(3 \cdot x_P^2 + a)}{2 \cdot y_P} \pmod p$$

$$x_R = s^2 - 2 \cdot x_P \pmod p$$

$$y_R = -y_p + s \cdot (x_P - x_R) \pmod p$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός πάνω σε ελλειπτικές καμπύλες στο $\mathbb{F}_p$

Με χρήση των παραπάνω πράξεων μπορούμε να ορίσουμε την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $R = k \cdot P$ όπου $l \in \mathbb{Z}$ και P ένα σημείο ελλειπτικής καμπύλης. $P = \mathcal{O} \rightarrow k \cdot P = \mathcal{O}$

- Naive $P + P \ldots + P$
- Double-and-add (το ανάλογο του επαναλαμβανόμενου τετραγωνισμού)
- Windowed, Sliding-window, wNAF, Montogomery ladder ... [3]

Double-and-add

```
Input: Elliptic curve E, elliptic curve point P, scalar d:
       (d_0 d_1 ... d_{t-1})
Output: T = d · P
T ← P
for i ← t − 1 downto 0 do
    T ← T + T (mod n)
    if d_i = 1 then
        T ← T + P (mod n)
    end
end
return T
```

Algorithm 1: Μέθοδος double-and-add

Το πρόβλημα του διακριτού λογαρίθμου σε ελλειπτικές καμπύλες (ECDLP)

Ορισμός

'Εστω ελλειπτική καμπύλη στο $\mathbb{F}_p$ και έστω δύο σημεία αυτής P, Q. Αν η τάξη του P είναι n τότε το πρόβλημα διακριτού λογαρίθμου ορίζεται ως η εύρεση ενός ακεραίου $0 \leq l \leq n-1$ τέτοιου ώστε $Q = l \cdot P$.

Ανταλλαγή κλειδιού με τη μέθοδο Diffie-Hellman για ελλειπτικές καμπύλες (ECDH)

- Ο χρήστης Α και ο χρήστης Β επιλέγουν δημόσια τις παραμέτρους $D = (q, a, b, G, n, h)$
- Ο χρήστης Α επιλέγει έναν τυχαίο αριθμό $1 \leq a \leq n - 1$ ως ιδιωτικό κλειδί και υπολογίζει και στέλνει στον Β το δημόσιο κλειδί του $a \cdot G$.
- Ο χρήστης Β επιλέγει έναν τυχαίο αριθμό $1 \leq b \leq n - 1$ ως ιδιωτικό κλειδί και υπολογίζει και στέλνει στον Α το δημόσιο κλειδί $b \cdot G$ και το στέλνει στον Α.
- Ο Α υπολογίζει το $a \cdot b \cdot G$
- Ο Β υπολογίζει το $b \cdot a \cdot G$
- Το κοινό κλειδί τους είναι το $a \cdot b \cdot G = b \cdot a \cdot G$

Ψηφιακές υπογραφές με τον αλγόριθμο DSA για ελλειπτικές καμπύλες (ECDSA)

Παραγωγή υπογραφής

Για να υπογράψει ένα μήνυμα m, ο χρήστης A με παραμέτρους $D = (q, a, b, G, n, h)$ και ένα ζεύγος ιδιωτικού-δημόσιου κλειδιού (d, Q) ακολουθεί τα παρακάτω βήματα

Ψηφιακές υπογραφές με τον αλγόριθμο DSA για ελλειπτικές καμπύλες (ECDSA)

Παραγωγή υπογραφής

1. Επιλέγει έναν τυχαίο αριθμό k τέτοιο ώστε $1 \leq k \leq n-1$.
2. Υπολογίζει το σημείο $k \cdot G = (x_1, y_1)$.
3. Υπολογίζει το $r = x_1 \pmod{n}$. Αν $r = 0$ επιστρέφει στο βήμα 1.
4. Υπολογίζει το $k^{-1} \pmod{n}$.
5. Υπολογίζει το $SHA-1(m)$ και μετατρέπει το αποτέλεσμα του bit-string σε έναν ακέραιο e.
6. Υπολογίζει το $s = k^{-1} \cdot (e + d \cdot r) \pmod{n}$. Αν $s = 0$ επιστρέφει στο βήμα 1.
7. Η υπογραφή του A για το μήνυμα m είναι (r, s).

Ψηφιακές υπογραφές με τον αλγόριθμο DSA για ελλειπτικές καμπύλες (ECDSA)

Επαλήθευση υπογραφής

Για να επαληθεύσει μία υπογραφή (r, s) σε ένα μήνυμα m, ο χρήστης B παίρνει τις παραμέτρους $D = (q, FR, a, b, G, n, h)$ και το δημόσιο κλειδί Q του A και ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:

Προσοχή! O B θα πρέπει να ελέγξει ότι τα στοιχεία του A δεν έχουν αλλοιωθεί, π.χ. αν το σημείο Q ανήκει στην καμπύλη που ορίζεται απο το D

Ψηφιακές υπογραφές με τον αλγόριθμο DSA για ελλειπτικές καμπύλες (ECDSA)

Επαλήθευση υπογραφής

1. Επιβεβαιώνει ότι τα r, s είναι ακέραιοι στο διάστημα $[1, n-1]$.
2. Υπολογίζει το $SHA-1(m)$ και μετατρέπει το αποτέλεσμα του bit-string σε έναν ακέραιο e.
3. Υπολογίζει το $w = s^{-1} \pmod n$.
4. Υπολογίζει το $u_1 = e \cdot w \pmod n$ και το $u_2 = r \cdot w \pmod n$.
5. Υπολογίζει το $X = u_1 \cdot G + u_2 \cdot G$
6. Εάν $X = \mathcal{O}$ τότε απορρίπτει την υπογραφή. Αλλιώς υπολογίζει το $u = x_1 \pmod n$ όπου x_1 η συντεταγμένη x του X.
7. Δέχεται την υπογραφή αν και μόνο αν $u = r$.

Υλοποίηση

Επιλογή παραμέτρων

Παράμετρος	Περιγραφή
p	Η χαρακτηριστική του πεπερασμένου σώματος $\mathbb{F}_p$
a	Ο συντελεστής a της ελλειπτικής καμπύλης
b	Ο συντελεστής b της ελλειπτικής καμπύλης
G	Ένα σημείο $G = (x_G, y_G)$
n	Η τάξη του στοιχείου G
h	$\sharp E(\mathbb{F}_p)/n$

Σχήμα : Domain Parameters

Απαιτείται πολύ προσεκτική επιλογή των παραμέτρων [1] [2] [4]

Υλοποίηση

Επίπεδα υλοποίησης

- Αριθμητική modulo με υποστήριξη για μεγάλους αριθμούς
- Υλοποίηση των πράξεων που ορίζονται στην ομάδα (πρόσθεση, διπλασιασμός)
- Υλοποίηση του βαθμωτού πολλαπλασιασμού
- Υλοποίηση ενός κρυπτοσυστήματος π.χ. ECDH

Υλοποίηση στη γλώσσα OCaml

Why OCaml?

- **Μείωση σφαλμάτων.** Έλεγχος τύπων κατά τη μεταγλώττιση.
- **Βιβλιοθήκες.** Αρκετές έτοιμες συναρτήσεις (για big numbers κ.α.)
- **Ταχύτητα.** Απόδοση αρκετά κοντά σε low-level γλώσσες όπως C.
- **Garbage collected.** Η διαχείριση μνήμης γίνεται αυτόματα, ένα πράγμα λιγότερο για να ανησυχούμε.

caml.inria.fr/

Υλοποίηση στη γλώσσα OCaml

Βασικοί τύποι

```
type point = Infinity | Point of Z.t * Z.t
```

An elliptic curve point. It is either infinity or a point (x,y).

```
type elliptic_curve = {
p : Z.t ;
a : Z.t ;
b : Z.t ;
g : point ;
n : Z.t ;
h : Z.t ;
}
```

The type of domain parameters

Υλοποίηση στη γλώσσα OCaml

Modulo αριθμητική

Χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη μεγάλων αριθμών Zarith, χρησιμοποιεί το GMP (C/C++). Διάφορες ετοιμες συναρτήσεις για βασικές πράξεις όπως εύρεση αντιστρόφου ενός αριθμού *modulo n*.

Υλοποίηση στη γλώσσα OCaml

Υλοποίηση πράξεων ομάδας

```
val add_point : point -> point ->
elliptic_curve -> point
```

Given two points P and Q, both on the same elliptic curve, and the elliptic curve returns P+Q on that curve.

```
val double_point : point -> elliptic_curve ->
point
```

Given a point P on an elliptic curve and the elliptic curve retuns the point 2P on that curve.

Υλοποίηση στη γλώσσα OCaml

Υλοποίηση βαθμωτού πολλαπλασιασμού

```
val multiply_point : point -> Z.t ->
elliptic_curve -> point
```

Given a point P on an elliptic curve, an integer k and the elliptic curve returns the scalar multiplication kP on that curve.

Βελτιστοποίησεις

Βελτιστοποίηση αριθμητικής modulo

Το πιο χρονοβόρο κομμάτι είναι οι πράξεις με μεγάλους αριθμούς και η αριθμητική modulo. Η χρήση της βιβλιοθήκης Zarith μας λύνει το πρόβλημα βελτιστοποίησεις αυτού του κομματιού καθώς χρησιμοποιεί το GMP που έχει γρήγορες υλοποιήσεις πράξεων στη γλώσσα C.

Βελτιστοποίηση πράξεων

Οι συναρτήσεις add_point και double_point δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερα περιθώρια βελτιστοποίησης. Μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε τη συνάρτηση multiply_point χρησιμοποιώντας έναν καλύτερο αλγόριθμο από αυτούς που έχουν αναφερθεί (η υλοποίηση μας χρησιμοποιεί τη μέθοδο double-and-add)

Επιθέσεις

- Επίλυση ECDLP (πρακτικά ανέφικτο με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων)
- Επίθεση στη συνάρτηση κατακερματισμού (hash function) εαν χρησιμοποιείται.
- Καλή διαχείριση κλειδιών (private key, αριθμός k στο ECDSA) κλπ.

Επίλυση του ECDLP

Certicom ECC Challenge

- Στόχος είναι να βρεθούν τα ιδιωτικά κλειδιά απο μία δοθείσα λίστα με δημόσια κλειδιά και τις αντίστοιχες παραμέτρους.
- Επίπεδο 1 : 109-bit, 131-bit
- Επίπεδο 2 : 163-bit, 191-bit, 239-bit, 359-bit
- Το 2004 λύθηκε το πρόβλημα για τα 109-bit από 10000 υπολογιστές σε 549 μέρες χρησιμοποιώντας τη μέθοδο rho. Για τα 131-bit όμως θα χρειαστούν σημαντικά περισσότεροι πόροι.
- Τα προβλήματα στο επίπεδο 2 θεωρούνται υπολογιστικά ανέφτικα.

Επίθεση στο ECDSA

Sony Playstation 3

Το playstation 3 χρησιμοποιεί το σχήμα ψηφιακής υπογραφής ECDSA για ψηφιακές υπογραφές στα παιχνίδια και στις αναβαθμίσεις του firmware του έτσι ώστε να μην επιτρέπεται σε unsigned κώδικα να εκτελεστεί στην κονσόλα.

Επίθεση στο ECDSA

Επιλογή τυχαίου αριθμού k

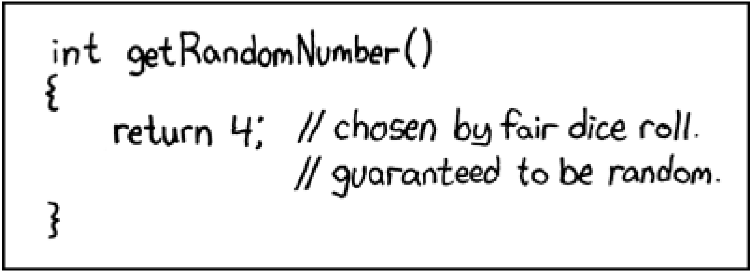
- Ο τυχαίος αριθμός k έχει τις ίδιες απαιτήσεις ασφάλειας με το ιδιωτικό κλειδί d.
- Αυτό συνεπάγεται απο το γεγονός οτι αν ο κακόβουλος χρήστης Ε ανακτήσει ένα k που χρησιμοποιεί ο Α για να υπογράψει ένα μήνυμα m τότε μπορεί να ανακτήσει το ιδιωτικό κλειδί του Α αφού $d = r^{-1} \cdot (k \cdot s - e) \pmod{n}$.
- Συνεπώς το k θα πρέπει να παράγεται με ασφαλή τρόπο και να αποθηκεύεται με ασφαλή τρόπο.

Επίθεση στο ECDSA

Sony Playstation 3 τρόπος επιλογής **τυχαίου** k

- Η Sony δε παρήγαγε ποτέ τυχαίο k αλλά χρησιμοποιούσε μία σταθερά για k
- Με τον τρόπο που δείξαμε παραπάνω υπολογίστηκε το private key της Sony και δόθηκε η δυνατότητα να κάνουμε sign ότι κώδικα θέλουμε. [7]

Παραγωγή τυχαίων αριθμών!



References

[1] Don Johnson, Alfred Menezes, Scott Vanstone,
The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA)
Certicom Research

[2] Certicom Research
SEC 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameters
Certicom Research

[3] Daniel J. Bernstein, Tanja Lange
Analysis and optimization of elliptic-curve single-scalar multiplication

[4] Brainpool
ECC Brainpool Standard Curves and Curve Generation v1.0
Brainpool

References

[5] Chrisoft Paar, Jan pelzl,
Understanding Cryptography: A textbook for Students and Practitioners

Springer

[6] Vipul Gupta, Douglas Stebila, Stephen Fung, Sheueling Chang, Nils Gura, Hans Eberle
Speeding up secure web transactions using elliptic curve cryptography
Sun Microsystems Labs

[7] bushing, marcan, sgher, sven
PS3 Epic Fail
fail0verflow

Fork here!

https://github.com/zoep/ECC-OCaml

The end