37、解：原矩阵记为 ***A***，对 ***A*** 进行初等变换，

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&a\\3&b&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&a-6\\0&b-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&a-6\\0&b-6&0\end{pmatrix}$$

则①$a\neq 6$ 且 $b\neq 6$ 时，rank(***A***)=3

①$a=6$ 且 $b\neq 6$ 或 $a\neq 6$ 且 $b=6$ 时，rank(***A***)=2

①$a=6$ 且 $b=6$ 时，rank(***A***)=1

38、解：

$$\begin{pmatrix}I+A&0\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A&I-A\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I&I-A\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I&0\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}$$

∴方阵 diag(***I+A***,***I-A***)的相抵标准形为$\begin{pmatrix}I_n&0\\0&0\end{pmatrix}$ （这句话要记得写！）

39、证明：

（1）当$\mathrm{r}(A)=\mathrm{n}$，$|A|\neq 0$，$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，$\therefore \mathrm{r}(A^*)=\mathrm{n}$

（2）方法一：

当$\mathrm{r}(A)=\mathrm{n}-1$，此时$|A|=0$

$\because AA^*=|A|I=O \therefore r(A)+\mathrm{r}(A^*)\leq n$ 即 $\mathrm{r}(A^*)\leq 1$

又 *A* 中至少有一个 n-1 阶子式不为零，所以$A^*\neq 0$，$\mathrm{r}(A^*)\geq 1$

综上有$\mathrm{r}(A^*)=1$

方法二：将 A 化为相抵标准形 B，利用$\mathrm{r}(A^*)=\mathrm{r}(B^*)$证明

（3）当$\mathrm{r}(A)\leq\ \mathrm{n}-2$，*A* 的所有 n-1 阶子式全为零，所以$A^*=0$，$(A^*)=0$

问题：极少数同学认为 rank（*A*）=n-1 时，*A**中只有一个 Aij≠0，显然不一定成立。

42、证明：

$$\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m&0\\B&I_n-BA\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m&0\\0&I_n-BA\end{pmatrix}$$

因为初等变换不改变矩阵的秩，$rank\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}=m+rank(I_n-BA)$

$$\text{又}\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m-AB&A\\0&I_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I_m-AB&0\\0&I_n\end{pmatrix}$$

因为初等变换不改变矩阵的秩，$rank\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}=n+rank(I_m-AB)$

综上，$rank\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}=m+rank(I_n-BA)=n+rank(I_m-AB)$，得证。

43、证明：

$$\begin{pmatrix}I+A&0\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I+A&I-A\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I&I-A\\0&I-A\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2I&0\\0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}$$

因为初等变换不改变矩阵的秩，所以$rank(I+A)+rank(I-A)=rank\begin{pmatrix}I_n&0\\0&0\end{pmatrix}=n$

或：直接引用 38 题结论，但是记得要先证明 38 题。

问题：还有极少数同学认为$A=\mp I$，这一点在习题课上已经着重强调过是错误结论了，还是

要认真听习题课哦！幂等矩阵的相似标准型为 I，而自身不一定为∓I。

3（1）解：

方法一：解方程组

设$b = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$

则有方程组$\begin{cases} -1k_1 + 2k_2 - 4k_3 = 8 \\ 3k_1 + k_3 = 3 \\ 7k_2 - 2k_3 = -1 \\ -5k_1 - 3k_2 + 6k_3 = -25 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = -3 \end{cases}$

则向量 b 能写成a_1、a_2、a_3的线性组合，$b = 2a_1 - 1a_2 - 3a_3$

方法二：初等变换法

$$\bar{A} = (A \quad b) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -11 & 27 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & 26 & -65 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & -28 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & -39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore rank(A \quad b) = 3$，向量$b$能写成$a_1$、$a_2$、$a_3$的线性组合，$b = 2a_1 - 1a_2 - 3a_3$

问题：部分同学直接写最终结果，没有过程；或是求解行列式时没有进行任何处理即直接得到 0。

4、证明：

方法一：

记$e_1 = (1,0,0,0)$，$e_2 = (0,1,0,0)$，$e_3 = (0,0,1,0)$，$e_4 = (0,0,0,1)$

因为F^4中任何向量都可由e_1、e_2、e_3、e_4线性表出，则a_1、a_2、a_3、a_4可由e_1、e_2、e_3、e_4线性表出。

又因为$e_1 = a_1, e_2 = a_2 - a_1, e_3 = a_3 - a_2, e_4 = a_4 - a_3$，所以$e_1$、$e_2$、$e_3$、$e_4$和$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$等价，等价必等秩。

因为e_1、e_2、e_3、e_4线性无关，则a_1、a_2、a_3、a_4线性无关。

记F^4中任一向量为b。

a_1、a_2、a_3、a_4、b必线性相关，则F^4中任何向量都可由a_1、a_2、a_3、a_4线性表出，且表示唯一。

方法二：

a_1、a_2、a_3、a_4线性无关可用初等变换法证明，证明其余部分相同。

问题：部分同学直接写出线性表示，但是系数出错，求解方程组时要细心。

7、证明：

由题，$b_i = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} a_j$，$i = 1,2,3,\dots,s$

则$\sum_{i=1}^{s} \gamma_i b_i = \sum_{i=1}^{s} \gamma_i \sum_{j=1}^{r} \lambda_{ij} a_j = \sum_{i=1}^{s} \cdot \sum_{j=1}^{r} \gamma_i \lambda_{ij} a_j$

即$b_1, \dots, b_s$的任何线性组合是$a_1, \dots, a_r$的线性组合，证毕。

10（2）、解：

方法一：解方程组

设$0 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3$

则有方程组$\begin{cases} 3k_1 + 1k_2 - 1k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + 5k_2 = 0 \\ -4k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$ 解得$\begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$

所以方程组仅有零解，a_1、a_2、a_3线性无关。

方法二：初等变换法

15、证明：

①必要性：

因为非零向量组α_1、$\alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关，非零向量组$\alpha_1$、$\alpha_2, \dots, \alpha_i (1 < i \le s)$是非零向量组$\alpha_1$、$\alpha_2, \dots, \alpha_s$的一个子集，所以非零向量组$\alpha_1$、$\alpha_2, \dots, \alpha_i (1 < i \le s)$线性无关。

则$\sum_{j=1}^{i} k_j \alpha_j = 0$当且仅当$k_1 = k_2 = \cdots = k_i = 0$，每个$\alpha_i (1 < i \le s)$都不能用它前面的向量线性表示。

②充分性：

因为每个$\alpha_i (1 < i \le s)$都不能用它前面的向量线性表示，

所以当 i=2，不存在k_1使$\alpha_2 = k_1 \alpha_1$，α_1、α_2线性无关；

当 i=3 时，α_1、α_2、α_3线性无关；

如此递推，可知α_1、α_2、α_3、…、α_s线性无关，证毕。

问题：

（1）定义不清：

线性相关↔至少有一个α_i可由α_j（j≠i）线性表示，不代表任意α_i都可由α_j（j≠i）线性表示。

线性无关↔任意α_i都不可由α_j（j≠i）线性表示。

（2）部分同学在证明充分性时，思路与上述参考答案相似，但没有强调出递推，不严谨。

（3）用词不严谨，请避免“线性不关”的表述。