

week7

12.

(1)错误

假设 $e_1, 2e_1, e_2$ 线性相关，但是第三个向量不可以用其他向量线性表示出来

(2)错误

$e_1, e_2, e_1 + e_2$ 线性相关，但任何不是他本身的子向量组线性无关（总共7个自行验证）

(3)正确

(4)正确

(5)错误

$$\text{观察 } (\alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_s + \alpha_1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

注意到这个矩阵当他是奇数阶的时候满秩，偶数阶的时候不满秩（此时线性相关）

(6)正确

同上可以直接说明

(7)正确

!!! 注意这里从定义出发 $\sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_i = 0$ (1) 只有非零解，设加长之后的向量是 β_i , 那么 $\sum_{i=1}^s \lambda_i \beta_i = 0$ (2)

也只有非零解（线性无关）

(8)错误

注意到上一小问中两个方程组的对比，就可知道(1)的非零解不一定是(2)的解可以得知。

15.

必要性：由定义

充分性：

假设线性相关， $\sum_{i=1}^s \lambda_i \alpha_i = 0$ 存在一组非零解，取下标最大的非零系数的下标为 m ，那么可以 α_m 可以用前面的向量表示出来

16.

由定义 $\sum_{j=1}^s \mu_j \alpha_j = 0$ 只有零解, 假设 $\sum_{j=1}^{i-1} \nu_j \alpha_j + \nu_i \beta + \sum_{j=i+1}^s \nu_j \alpha_j = 0$ 代入 $\beta = \sum_{j=1}^s \lambda_j \alpha_j$ 容易推出 $\nu_i = 0$, 从而可以推出 $\nu_j = 0$ 对任意的 $j=1, 2, \dots, s$ 成立

17.

有 $r = \text{rank}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}) \leq \text{rank}(\{\beta_1, \dots, \beta_r\}) = r$, 从而得证, 其中不等式用到了 $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(AB)$

23.

由定义

29。

由定义

30.

注意!!

b可以等于0.所以不一定是方程有非零解。

此题有四个方向需要证明。