34、解：设$\vec{\beta}=\lambda_1+\lambda_2\overrightarrow{\alpha_2}+\lambda_3\overrightarrow{\alpha_3}$，即$\begin{cases}3\lambda_1+6\lambda_2+\lambda_3=2\\ \lambda_1+3\lambda_2+3\lambda_3=-1\\ 2\lambda_2+5\lambda_3=2\end{cases}$

对应增广矩阵为$\begin{pmatrix}3&6&1&2\\1&3&3&-1\\0&2&5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-76\\0&1&0&41\\0&0&1&-16\end{pmatrix}$

则有$\lambda_1=-76$，$\lambda_2=41$，$\lambda_3=-16$，即坐标为（-76，41，-16）

37、解：在 A 下方添加一行 0，得到$B_{n*n}=(\mathrm{b}_{ij})_{n*n}=\begin{pmatrix}A\\ \theta\end{pmatrix}$，且$\operatorname{rank}(B)=\mathrm{n}-1$，$\det(B)=0$

∴*BX=0* 的维数为 1，且存在（不是任意！）B 的一个代数余子式$\mathrm{B}_{nj}\neq 0$

而$\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\,\mathrm{B}_{nj}=\begin{cases}\det(B) & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$

$\therefore\vec{\alpha}=(\mathrm{B}_{n1},\mathrm{B}_{n2},\cdots,\mathrm{B}_{nn})^T$为非零向量，是齐次方程组 AX=0 的基础解系

建议：此题出错的同学仔细体会例 5.5.1

问题：许多同学没有指出或解释$\vec{\alpha}$为非零向量。

40、（1）解：$\begin{pmatrix}1&-3&1&-2\\-5&1&-2&3\\-1&-11&2&-5\\3&5&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&-14&3&-7\\0&14&-3&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&1&-2\\0&-14&3&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\dim\mathrm{V}=2$，原方程组等价为$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4=0\\-14x_2+3x_3-7x_4=0\end{cases}$，令$x_3$、$x_4$为自由未知量

取$x_3=1$，$x_4=0$，有$x_1=\frac{-5}{14}$，$x_2=\frac{3}{14}$

取$x_3=0$，$x_4=1$，有$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{-1}{2}$

即基础解系为$\alpha_1=\left(\frac{-5}{14},\ \frac{3}{14},\ 1,\ 0\right)^T$和$\alpha_2=\left(\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 0,\ 1\right)^T$

原方程组通解为$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$（t_1、t_2为自由参数）

（2）解：$\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\1&-2&3&-4&2\\-1&3&-5&7&-4\\1&2&-1&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-4\\0&1&-1&2&-2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore\dim\mathrm{V}=2$，原方程组等价为$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4-4x_5=0\\ x_2-x_3+2x_4-2x_5=0\\ x_3-x_4=0\end{cases}$，令$x_3$、$x_4$为自由未知量

取$x_3=0$，$x_4=0$，有$x_1=2$，$x_2=2$，$x_5=1$

取$x_3=1$，$x_4=1$，有$x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_5=0$

即基础解系为$\alpha_1=(2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1)^T$和$\alpha_2=(-1,\ -1,\ 1,\ 1\ \ 0)^T$

原方程组通解为$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$（t_1、t_2为自由参数）

41、法一

设该方程组系数矩阵为 A，rank(A)=5-2=3

$\because\eta_1$、η_2为 AX=0 基础解系 $\therefore\mathrm{A}\eta_1=0$，$\mathrm{A}\eta_2=0$，$(\eta_1,\ \ \eta_2)^TA^T=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

原方程组等价为$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$，令$x_3$、$x_4$、$x_5$为自由未知量

取$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，$x_5 = 1$，有$x_1 = 1$，$x_2 = -1$

取$x_3 = 0$，$x_4 = 1$，$x_5 = 0$，有$x_1 = -4$，$x_2 = 1$

取$x_3 = 1$，$x_4 = 0$，$x_5 = 0$，有$x_1 = -5$，$x_2 = 1$

即基础解系为$\alpha_1 = (1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1)^T$、$\alpha_2 = (-4,\ 1,\ 0,\ 1\ \ 0)^T$和$\alpha_3 = (-5,\ 1,\ 1,\ 0\ \ 0)^T$

$$\therefore \mathrm{A} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

法二

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1 - c_2\\ 2c_1 - 3c_2\\ 3c_1 - 2c_2\\ 2c_1 - c_2\\ c_1 - 2c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 5x_1 - x_2\\ 4x_1 - x_2\\ -x_1 + x_2\end{pmatrix}$$

则有$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$ 其基础解系为所给基础解系。