Week 5

第一份答案是简写版、给师姐改作业用的。这是标准答案供大家参考

题目解法有很多种，不一一列举。

25.设A是m*n矩阵，B是n*m矩阵，证明：

$$det(I_n - BA) = det\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = det(I_m - AB)$$

证明：

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I-BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I-AB & O \\ B & I \end{pmatrix}$$

对上面两个矩阵求行列式，得证。

26.设A,B是n阶行列式，λ是数，证明：

$$(1)(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*;\quad (2)(AB)^* = B^*A^*;\quad (3)det(A^*) = (det(A))^{n-1}$$

证明：

(1)

记号说明

$A*$的第(i,j)个元素是a^*_{ij}

证明

$B = \lambda A$

B^*的第(i,j)个元素是b^*_{ij}

$a^*_{ij} = A_{ji}$，因此$b^*_{ij} = B_{ji} = \lambda^{n-1}A_{ji}$

(2)

方法一：Binet Cauchy公式

设$D = AB$

$d^*_{ij} = D_{ji} = \sum\limits_k B_{ki}A_{jk}$

$(B^*A^*)_{ij} = \sum_k b^*_{ik} a^*_{kj} = \sum_k B_{ki} A_{jk}$

因此 $(AB)^* = B^*A^*$

方法二：微元扰动法

取$A_\lambda = A + \lambda I$使得非奇异，

因此$(A_\lambda)^* = det(A) * A_\lambda^{-1}$

同理定义B_λ。

$(A_\lambda B_\lambda)^* = det(A)det(B)B^{-1}A^{-1} = B_\lambda^* A_\lambda^*$

令$\lambda \to 0$可以得到结果。

我后来想了下，尽管有理数域是不完备的，但是，我们是可以取出来$\lambda \to 0$这样的λ数列来辅助证明的。因此上次的$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$在有理数域上的当A、C矩阵可交换的时候依然成立

方法三

暴力计算

(3)

方法一

$det(A^*) = (det(A))^{n-1}$

当A可逆的时候

$det(A)det(A^*) = det(A * A^*) = det(A)^n * det(I)$

两边同时除以det(A)，可以得到结果。

当A不可逆的时候，

任意取A的非零的一行，不妨设为$x = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$，

(显然如果没有，那么A=O，此时直接得证)

那么$x * A^* = 0$，可以得到，A^*的行秩<n。因此$det(A^*) = 0 = (det(A))^{n-1}$.

方法二

A_λ法

注：很多同学在作业中错误地使用A_λ的方法。因此，整理方法的具体细节如下：

如果A是n阶方阵。

令$A_\lambda = A - \lambda I$，取$\lambda$记号的原因是令$A_\lambda$奇异的$\lambda$的取值是A的特征值，可以与同学们后面学习的内容相兼容,帮助各位同学理解课程的整体内容。

从一个角度来看，令A_λ奇异的λ的取值就是A_λ行列式对应的λ多项式的根。

从另一个角度来看这个问题，令A_λ奇异的λ的取值也是A的特征值。（不知道没关系）

λ多项式的根只有n个，同理A的特征值也只有n个。

因此可以取到$\lambda_0 = min\{\lambda|det(A_\lambda) = 0, \lambda \neq 0\}$

因此取$0 < \lambda < \lambda_0$，

有以下性质：

（1）A_λ可逆，

（2）令$\lambda \to 0,$ 则 $A_\lambda \to A.$

！！！！注意！没有按照上述过程说明清楚的，考试不得分，因为没有解决问题。

27.设方阵A的逆矩阵$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$**，求**$A^*$

因为$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$,所以$A^* = det(A)A^{-1}$,

另一方面$det(A) = \frac{1}{det(A^{-1})} = \frac{1}{2}$

因此$A^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

注：显然$det(A^*) = det(A)^{n-1}$**，**$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} A^*$**，知道这两点，所有这类题目都可以解决了。**

28.设方阵A的伴随矩阵$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**，求A**

方法1

$A \cdot A^* = det(A)I$

另一方面$det(A)det(A^*) = det(A)^4$,

可以计算出$det(A) = -2$,

因此可以得到$A = (\frac{1}{det(A)} A^*)^{-1}$

计算可以得到A=

$$\begin{pmatrix} & & & -1/2 \\ & & 2 & \\ & -1 & & \\ -2 & & & \end{pmatrix}$$

方法2

detA=-2,

根据$A.A^*=-2I$，可以假设A的元素列方程组求解，较为简单。

（本质上也是求A*的逆，因为本题中A*的逆非常好求）

29.设n阶方阵A的每行每列元素之和都是0，证明A*的所有元素都相等。

方法1

显然rank(A)<n,

当rank(A)=n-2的时候由定义易得A^*=0.

当ranK(A)=n-1的时候，$y^tA=Ax=0$,x和y只有通解$t*(1,1,...,1)^T$,其中$t\in F$

因此可以由$A^*A=O$知道A^*的每一行元素都相等.

由$A^*A=O$知道A^*的每一列元素都相等。

因此A^*的所有元素都相等。

方法2

直接求A*的元素。

方法3

参见习题课老师上课内容。

31.用Cramer法则求解下列线性方程组:

（1）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+4x_3=5 \\ x_1+3x_2+9x_3=7 \end{cases}$

$|A|=12\neq 0$方程有唯一解，$|A_1|=36,|A_2|=4,|A_3|=4$

所以方程组的解$(x_1,x_2,x_3)=(3,1/3,1/3)$

(2)$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x1-3x_2 \qquad +6x_4=9 \\ \qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$

$|A|=27\neq 0$方程有唯一解，$|A_1|=81,|A_2|=-108,|A_3|=-27$，$|A_4|=27$

所以方程组的解$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(3,-4,-1,1)$

35.计算下列矩阵的逆矩阵:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

矩阵的逆为：

$$\begin{pmatrix} \frac{49}{186} & \frac{25}{186} & \frac{7}{31} & \frac{13}{62} \\ -\frac{2}{93} & -\frac{20}{93} & -\frac{5}{31} & \frac{2}{31} \\ \frac{7}{186} & -\frac{23}{186} & \frac{1}{31} & -\frac{7}{62} \\ -\frac{65}{372} & \frac{1}{372} & \frac{2}{31} & \frac{3}{124} \end{pmatrix}$$

（2）

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

矩阵的逆为：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{5}{14} & \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

（3）

矩阵的逆为：

$$\left(\begin{matrix}0&0&...&0&-1&1\\
0&0&...&-1&1&0\\0&0&...&1&0&0\\&&...\\-1&1&...&0&0&0\\1&0&...&0&0&0\\\end{matrix}\right)$$

（4）

矩阵的逆为

$$\begin{pmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & A_{k-1}^{-1} & \\ & \dots & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 & & 1 & & \\ . & . & & . & & & . & \\ . & . & & . & & & & . \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n & & & & 1 \end{pmatrix}$$

当a_i中有两个元素为0的时候，矩阵不可逆，当有一个元素为0的时候，用初等变换法极易得到答案。请自行完成

方法1

$$(从第k行减去第一行,k=2,3,..n) \rightarrow \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & & & \\ -a_1 & a_2 & & & & -1 & 1 & & \\ -a_1 & & . & & & . & & . & \\ -a_1 & & & . & & . & & & . \\ -a_1 & & & & a_n & -1 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$这里我们不妨令 t=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

$$(从第一行减去\frac{1}{a_k}的第k行,k=2,..,n) \rightarrow \begin{pmatrix} a_1(1+t) & & & & 1+t-\frac{1}{a_1} & -\frac{1}{a_2} & . & . & -\frac{1}{a_n} \\ -a_1 & a_2 & & & -1 & 1 & & & \\ -a_1 & & . & & . & & . & & \\ -a_1 & & & . & . & & & . & \\ -a_1 & & & a_n & -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$在第k行上加上\frac{1}{1+t}倍的第一行 \rightarrow \begin{pmatrix} a_1(1+t) & & & & 1+t-\frac{1}{a_1} & -\frac{1}{a_2} & \dots & -\frac{1}{a_n} \\ & a_2 & & & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_1} & 1-\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_2} & \dots & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_n} \\ & & . & & . & . & \dots & . \\ & & & . & . & . & \dots & . \\ & & & a_n & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_1} & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_2} & \dots & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$最后将左边的矩阵化为I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & \frac{1}{a_1}-\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_1^2} & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_1} & \dots & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_n}\frac{1}{a_1} \\ & 1 & & & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2}-\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_2^2} & \dots & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_n}\frac{1}{a_2} \\ & & . & & . & . & \dots & . \\ & & & . & . & . & \dots & . \\ & & & 1 & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_n} & -\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_n} & \dots & \frac{1}{a_n}-\frac{1}{1+t}\frac{1}{a_n^2} \end{pmatrix}$$

得到矩阵的逆。

方法2

直接求矩阵的伴随矩阵，再求矩阵的逆。

请务必说明伴随矩阵的元素是怎么得到的。否则考试不得分！！！

36.计算下列矩阵的秩：

方法：行变换、列变换、求最小非零子式的阶数。

请化简到最简单的形式，参考书上108面，否则考试不得分！！！！

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

参考：

rank=3

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & -5 \\ -7 & 9 & -3 & 1 \\ 1 & -7 & -11 & 7 \\ -5 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

参考：

rank=2

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{pmatrix}$

参考：

rank=3