参考答案：

23(1)

$$\begin{vmatrix}1&0&1&-4\\-1&-3&-4&-2\\2&-1&4&4\\2&3&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&5&0\\1&0&-7&0\\2&-1&4&4\\2&3&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&26&0\\1&0&0&0\\2&-1&18&4\\2&3&11&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\1&0&0&0\\2&-1&-8&4\\2&3&89&2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&-1\\1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-8&4\\89&2\end{vmatrix}=1(-8*2-4*89)=-372$$

问题：有的同学未按要求，不经初等变换即直接展开求解。

(2)

$$\begin{vmatrix}1&4&-1&-1\\1&-2&-1&1\\-3&3&-4&-2\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&0&0\\1&-2&0&2\\-3&3&-7&-5\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-6&0&2\\-3&15&-7&-5\\0&1&-1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6&0&2\\15&-7&-5\\1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=-6\begin{vmatrix}-7&-5\\-1&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}15&-7\\1&-1\end{vmatrix}=-28$$

24.证明：

$$\because \text{A 是奇数阶反对称复方阵}\ \therefore A^T=-A\text{，记}A\text{阶数为 }2n+1\text{，}n\in \mathrm{N}$$

$$\det(A^T)=\det(-A)=(-1)^{2n+1}\det(A)=-\det(A)$$

$$\det(A^T)=\det(A)$$

$$\therefore \det(A)=0$$

作业 1：

$$\begin{bmatrix}0&\cdots&0&a_{11}&\cdots&a_{1k}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&a_{k1}&\dots&a_{kk}\\b_{11}&\cdots&b_{1n}&c_{11}&\cdots&c_{1k}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{n1}&\cdots&b_{nn}&c_{n1}&\cdots&c_{nk}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}O&A\\B&C\end{vmatrix}=?$$

证明：记原矩阵为D。

$$\det(\mathrm{D})=\sum_{(j_1,j_2,j_3,\dots,j_{n+k})\in S_{n+k}}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,\dots,j_{n+k})}d_{1,j_1}\,d_{2,j_2}d_{3,j_3}\dots d_{n+k,j_{n+k}}$$

若$a_{1,j_1}a_{2,j_2}a_{3,j_3}\dots a_{n+k,j_{n+k}}\neq 0$，则必然有$(j_1,j_2,j_3,\dots,j_k)$是$(n+1,n+2,n+3,\dots,n+k)$的一个排列，$(j_{k+1},j_{k+2},j_{k+3},\dots,j_{k+n})$是$(1,2,3,\dots,n)$的一个排列。

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,\dots,j_{n+k})}=(-1)^{\tau(j_{k+1},j_{k+2},j_{k+3},\dots,j_{k+n},j_1,j_2,j_3,\dots,j_k)+nk}$$

$$=(-1)^{nk}(-1)^{\tau(j_{k+1},j_{k+2},j_{k+3},\dots,j_{k+n})}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,\dots,j_k)}$$

故

$$\det(\mathrm{D})$$
$$=(-1)^{nk}\sum_{(j_1,j_2,j_3,\dots,j_{n+k})\in S_{n+k}}(-1)^{\tau(j_{k+1},j_{k+2},j_{k+3},\dots,j_{k+n})}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3,\dots,j_k)}d_{1,j_1}\,d_{2,j_2}d_{3,j_3}\dots d_{n+k,j_{n+k}}$$
$$=(-1)^{nk}\det(A)\det(B)$$

问题：部分同学弄混了-1 的次方，初等变换时需要耐心分析变换过程。少数同学直接得到-AB，建议加强分块矩阵的行列式练习。

23(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & ⋰ & 0 & 0 \\ A_k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

记原矩阵行列式为 C， $B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_2 \\ 0 & ⋰ & 0 \\ A_k & 0 & 0 \end{vmatrix}$，由上题结论，$C = \begin{vmatrix} 0 & A_1 \\ B_1 & 0 \end{vmatrix} =$

$(-1)^{1*\sum_{i=2}^{k} i}|A_1||B_1|$

$$B_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_3 \\ 0 & ⋰ & 0 \\ A_k & 0 & 0 \end{vmatrix}，B_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_2 \\ B_2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2*\sum_{i=3}^{k} i}|A_2||B_2|$$

依次递推，有$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & ⋰ & 0 & 0 \\ A_k & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\sum_{i=1}^{k-1} i \sum_{j=i+1}^{k} j}|A_1||A_2|\cdots|A_k|$

建议：先证明作业一，再求解 23（4），或反之。未经证明即在 23（4）中引用结论求解不够严谨。此题与作业 1 为配套题目，建议结合两道题目反复推敲琢磨。

23(6) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

记原矩阵行列式为D_n。

①若$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

②若$a_1a_2\cdots a_n = 0$

i)只有$a_j = 0$，第 i 行减去第 j 行(i ≠ j)，$D_n = a_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n$

ii) 若存在$a_i = a_j = 0$，则方阵中存在两行相同，$D_n = 0$

问题：绝大部分同学未对 a 的值进行分类讨论，遇上未知量在分母的情况应格外小心！
本次未扣分，下次会着重扣分。

23(7) $\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 0 & 0 & a_n & b_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_n & d_n & 0 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_1 \end{vmatrix}$

记原矩阵行列式为D_{2n}，

$$D_{2n} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & b_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & c_n & d_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} c_1 \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & b_n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & c_n & d_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & d_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 d_1 - c_1 b_1) D_{2(n-1)}$$

又$D_2 = a_n d_n - c_n b_n$，故$D_{2n} = \prod_{i=1}^{n}(a_i d_i - c_i b_i)$

问题：1、部分同学直接利用分块矩阵，得 D_{2n}=det(AD)-det(BC)。

2、部分同学在递归时未写出D_2，直接写结果，不够严谨。

3、个别同学抄错了题目。

23(8) $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$

记原矩阵行列式为D_n，

$n = 1$ 时，$D_1 = a_1 - b_1$

$n = 2$ 时，$D_2 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$

$n \geq 3$ 时，从第 n 列开始，第 i 列依次减去第 $i - 1$ 列($i \geq 2$)，

得$D_n = (b_1 - b_2)(b_2 - b_3)\cdots(b_{n-1} - b_n) \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 - b_1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$

综上，$D_n = \begin{cases} a_1 - b_1, & n = 1 \\ (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$

问题：部分同学未对 n 进行分类讨论。

例 4.3.10 见书上解析