WEEK 3

习题四

18.求所有满足$A^2=0,B^2=I,\bar{C}^TC=I$的二阶复方阵A,B,C

评分标准：第三种只写出方程式不得分。

解答：(1)设A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中a、b、c、d∈C。

那么可以得到方程$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=0 \end{cases}$

分析方程应该从最好讨论的第二个和第三个式子入手进行分析（因为可以因式分解）。

$\begin{cases} a^2+bc=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=0 \end{cases}$从这里分成两类来讨论这个问题。

Case 1: a+d=0(想想看为什么这么分类)

上述剩下的两个式子里可以得到$bc=-a^2$，*i.e*，$a=\sqrt{-bc}$

因此最后的结果是A=$\begin{pmatrix} \sqrt{-bc} & b \\ c & \sqrt{-bc} \end{pmatrix}$

Case 2:$a+d\neq 0$,则可以得到b=c=0,从而a=b=0.此时a+b=0,与条件矛盾，因此不存在该情况。

(2)设B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，其中a、b、c、d∈C。

那么可以得到方程$\begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=1 \end{cases}$，同上讨论

Case 1:a+b=0,则可以得到$\begin{cases} a=\sqrt{1-bc} \\ d=-\sqrt{1-bc} \end{cases}$,或$\begin{cases} a=-\sqrt{1-bc} \\ d=\sqrt{1-bc} \end{cases}$,(注意这里有两个解的原因是和2次单位根有关，请看下面的注解）因此可以得到两种解

B=$\begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$或者$\begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$

Case 2:a+b≠0则可以得到b=c=0,得到两个解$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

这个解有很多同学漏解了说明分类讨论的思路不对，一定从比较容易讨论的开始入手，将所有情形都讨论到。在小测中的第一题也说明了这个问题，思路不清晰，解答不完整，没有涵盖所有情形

(3)设C=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,其中a、b、c、d∈C。

那么可以得到方程$\begin{cases} a\bar{a}+c\bar{c}=1 \\ a\bar{b}+c\bar{d}=0 \\ \bar{b}a+\bar{d}c=0 \\ b\bar{b}+d\bar{d}=1 \end{cases}$，首先观察可以发现第二个式子和第三个式子是一样的。

$\begin{cases} a=cos\alpha*e^{i\theta_1} \\ c=sin\alpha*e^{i\theta_2} \\ b=cos\beta*e^{i\theta_3} \\ d=sin\beta*e^{i\theta_4} \end{cases}$ 其中α、$\beta\in[0,\frac{\Pi}{2}]$代入到上面第二个式子里。

首先观察模长之间的关系，因此$cos\alpha cos\beta=sin\alpha sin\beta$且$\alpha+\beta\in[0.\Pi]$所以$\alpha+\beta=\frac{\Pi}{2}$，因此

$\begin{cases} a=cos\alpha*e^{i\theta_1} \\ c=sin\alpha*e^{i\theta_2} \\ b=sin\alpha*e^{i\theta_3} \\ d=cos\alpha*e^{i\theta_4} \end{cases}$

再来观察辐角之间的关系：

Case 1$\alpha=0$，答案是$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$

Case 2$\alpha=\frac{\Pi}{2}$，答案是$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_3} \\ e^{i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$

Case 3$e^{i(\theta_1-\theta_3)}+e^{i(\theta_2-\theta_4)}=0$那么$e^{i(\theta_1-\theta_3)}(1+e^{i(\theta_3-\theta_1+\theta_2-\theta_4)})=0$

得到：$\theta_3-\theta_1+\theta_2+\theta_4=(2k+1)\Pi$，其中k∈Z.

答案是$\begin{pmatrix} cos\alpha*e^{i\theta_1} & sin\alpha*e^{i\theta_3} \\ sin\alpha*e^{i\theta_2} & cos\alpha*e^{i\theta_4} \end{pmatrix}$其中$\alpha\in(0,\frac{Pi}{2})$,且$\theta_3-\theta_1+\theta_2+\theta_4=(2k+1)\Pi$。

补充：关于数域的补充说明。

注 1常见的数域有Q有理数域，R实数域，C复数域。

线性代数中一般只讨论域上的线性空间，关于环上的代数空间（模）详见代数学。

注 2关于复数的基础知识：

一、复数的形式：

复数z=a+bi 其中a、b∈R，i=$\sqrt{-1}$是虚数单位，a叫实部，b叫虚部。

复数z=r$e^{i\theta}$ 其中r是复数的模长，θ是复数的辐角。

二、复数的公式:

乘法 $$ r_1e^{i\theta_1}*r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

除法 $r_1e^{i\theta_1}/r_2e^{i\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

三、n次单位根

2次 ω=-1，1

3次 $\omega=e^{i\frac{2k\Pi}{3}}$，k=0,1,2

4次 $\omega=i,-1,-i,1$

注 3关于数域的关系。

实数域是复数域的子域，复数域同构于R^2的空间。

19.证明：不存在n阶方阵A,B满足AB-BA=I

tr(AB-BA)=(*线性*) tr(AB)-tr(BA)=0

tr(I)=n

故不存在。

34.证明初等方阵具有以下性质：

(1)$T_{ij}(\lambda)T_{ij}(\mu)=T_{ij}(\lambda+\mu)$

注意到$T_{ij}(\lambda)=I+\lambda E_{ij}$，且$E_{ij}*E_{ij}=0$当$i\neq j$可以证明

(2)当$i\neq q$**且**$j\neq p$**时,**$T_{ij}(\lambda)T_{pq}(\mu)=T_{pq}(\mu)T_{ij}(\lambda)$

注意到在上述条件下，$E_{ij}*E_{pq}=E_{pq}*E_{ij}=0$当$i\neq j$可以证明

(3)$D_i(-1)S_{ij}=S_{ij}D_j(-1)=T_{ji}(1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)$

注意到$D_i(-1)=I-2E_{ii}$,$S_{ij}=I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$，同上可以证明

23计算行列式

（1）答案是-372。自行验证

定理4.3.2(1)交换矩阵的两行得到B，满足det(B)=-det(A)

详见书上定理4.3.1。请仔细看书。

例4.2.9设复方阵A满足$tr(A\bar{A}^T)=0$**证明A=0**

$tr(A\bar{A}^T)=0$得到$\sum_{ij}a_{ij}^2=0$,因此$a_{ij}=0$

补充题：

1.$\begin{vmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{vmatrix}$=1

2.$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$=2abc

3.$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$=0

4.$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

=$x\begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} z & y \\ y & x \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix}$

=$x^3+y^3+z^3-3xyz$

5.$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_n$

按第一列展开

上式=$x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1}$ +$(-1)^{n+1}$y$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$

=x^n+$(-1)^{n+1}y^n$

补充：关于行列式的简单计算公式。

二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

行列式=主对角乘积减去副对角乘积

注：该公式不适用与4阶及4阶以上的行列式计算。但在实际应用中可以节省时间。故此提出。如概念混淆者慎用，此乃葵花宝典，稍有不慎，自废经脉。