2018 FALL LINEAR ALGEBRA MID TERM

by Ga、Chan

if any question, please email us before 11:59 pm 12.1.2018

I、 (5 points each blank)

$(1)C = P_1AP_2$ $(2)2$ (3) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \frac{1}{e} \\ \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & 2\mathbf{B}^* \\ 3\mathbf{A}^* & \mathbf{O} \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (6)6

II、 (5 points each blank)

（1）**(2 ’)** 错误

(3 ’) 理由:$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C的行向量不能由A的行向量线性表示。

【A、C列向量等价】

（2）**(5 ’)**错误

理由：当方程个数大于变量个数，无法直接使用cramer法则。

（3）**(2 ’)**错误

(3 ’)理由:$\{\alpha_i = e_1 | i = 1,2,3\}$与$\{\beta_j = e_1 | j = 1,2\}$等价，s>t.（言之有理即可得分）

（4）**(2 ’)** 错误

(3’) REASON: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{singular} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{singular} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{nonsingular}$

【V对矩阵加法不封闭：两个奇异矩阵的和可以非奇异】

III、 12 points

(4 points each) 计算过程

(2 points each)$\det(\mathbf{A}) = -1, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

IV、12 points

（1）**(2 ’)**$\mathbf{A}\xi_2 = \xi_1$特解

(3 ')$\mathbf{A}\xi_2 = 0$ 基础解系

$\mathbf{A}\xi_2 = \xi_1$通解$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

（2）**(2 ')**$\mathbf{A^2}\xi_3 = \xi_1$特解

(3 ')$\mathbf{A^2}\xi_3 = 0$ 基础解系

$\mathbf{A^2}\xi_3 = \xi_1$通解$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

（3）**(4')** $det\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right) = -\frac{1}{2} \neq 0$,线性无关

V、12 points

(2')如果$\mathbf{A} = O$,则由非齐次性易得无解，

(2')因此$\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$,故$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \geq 1$

(4') $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_2$线性无关

(2')$\mathbf{A}x = \mathbf{O}$至少有两个线性无关的解，于是解空间V的维数不小于2，因此

$\dim(V) = 3 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) \geq 2$,得到$\operatorname{rank}(A) = 1$

(2')$x = t_1\left(\eta_2 - \eta_1\right) + t_3\left(\eta_2 - \eta_3\right) + \eta_1$, 其中$t_1, t_2 \in R$

VI、12 points

（1）**(4')**八条

或：**(2')**矩阵空间是R上线性空间

(2')满足加法和数乘的封闭性。

$\forall \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$，满足$\begin{cases} \mathrm{AB}_1 = \mathrm{B}_1\mathrm{A} \\ \mathrm{AB}_2 = \mathrm{B}_2\mathrm{A} \end{cases}$

$\mathbf{A}\left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\right) = \left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\right)\mathbf{A}$。因此 $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \in V$

$\mathbf{A}\left(\lambda\mathbf{B}_1\right) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{B}_1 = \left(\lambda\mathbf{B}_1\right)\mathbf{A}$。因此 $\lambda\mathbf{B}_1 \in V$

（2）**(1')** 令$B = P^{-1}CP$

得：$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\mathbf{C} = \mathbf{C}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$其中$\lambda_i$互不相等

(2')当且仅当C为对角阵

(1')因此V的维数n，基{$\alpha_i = \mathbf{P}\,\mathrm{E}_{ii}\,\mathbf{P}^{-1}$ | i=1,2,3,..n}