

WEEK 1

Notes:

分数竖着写看着太丑了，我喜欢横着写。

习题三

1.

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

化简之后为 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$,可以选择的自由变量只有 $x3, x4$.

当选择 $x3$ 自由变量的时候 答案为 $\begin{bmatrix} -8 \\ \frac{t}{2} \\ t \\ \frac{t}{2} - 3 \end{bmatrix}$

当选择 $x4$ 自由变量的时候 答案为 $\begin{bmatrix} -8 \\ 2t + 3 \\ 2t + 6 \\ t \end{bmatrix}$

(4)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

化简之后为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -14 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,可以选择的自由变量只有 $x3, x4$.

$$\text{当选择 } x_3 \text{ 自由变量的时候 答案为 } \begin{bmatrix} -5t/12 + 7/12 \\ -25t/12 + 1/12 \\ t \\ -3t/2 + 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{当选择 } x_4 \text{ 自由变量的时候 答案为 } \begin{bmatrix} 5t/18 + 4/9 \\ -15t/18 + 7/9 \\ -2t/3 + 1/3 \\ t \end{bmatrix}$$

(6)

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{化简之后为 } \begin{bmatrix} -1 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 可以选择的自由变量只有 } x_3, x_4.$$

$$\text{当选择 } x_3 \text{ 自由变量的时候 答案为 } \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \\ -3t \end{bmatrix}$$

2.

(1)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ a & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{化简之后为 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3a+24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 11 \\ 4a+52 \end{bmatrix}, \text{ 可以知道当 } a = -8 \text{ 时第三个方程是没有解的。}$$

$$\text{当 } a \text{ 不等于 } -8 \text{ 的时候, 方程有唯一解。} \begin{bmatrix} \frac{4}{a+8} \\ \frac{a-20}{3a+24} \\ \frac{4a+52}{3a+24} \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 11 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$$

化简之后为 $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ a+1 \end{bmatrix}$, 可以知道当 $a = -1$ 时第三个方程是没有解的。

当 a 不等于 -1 的时候, 当选 x_3 为自由变量, 则答案为 $\begin{bmatrix} 1/7 - 18t/7 \\ 2/7 - t/7 \\ t \end{bmatrix}$

当选 x_3 为自由变量, 则答案为 $\begin{bmatrix} 18t - 5 \\ t \\ -7t + 2 \end{bmatrix}$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

化简之后为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (-a-1) \\ 0 & 0 & (-3a-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}$, 可以知道当 $a = -2/3$ 时第三个方程是没有解的。

可以知道, 当 a 不等于 $-2/3$ 时, 方程有唯一解。