REVIEW - ANSWER

練習問題

1. ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^3$とする. 線形写像 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$が

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&-3&-6\\-1&1&-2\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

を満足するとする.

(1) Tの像と核を求めよ.

- $T(x)=Ax$ とする. 核の定義から

$$\mathrm{Ker}(T)=\{v\in\mathbb{R}^3\mid Ax=T(x)=0\}$$

がわかるので、$Ax=0$を解かなければならない。つまり、$Ax=0$の解空間を計算する。 その為に、Aを簡略化して

$$B=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

を貰う。

$$0=Bx=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

から

$$\begin{aligned}x_1+3x_3&=0\\x_2+x_3&=0\end{aligned}$$

という関係式がもらえる。ここで、$x_3=c$ とおいたら $x_2=-c, x_1=-3c$ になる。

$$Ax=0\Leftrightarrow Bx=0$$

なので

$$\mathrm{Ker}(T)=Ax=0\text{の解空間}=\left\{c\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

- 像の定義から

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(T)&=\{T(v)\mid v\in\mathbb{R}^3\}\\&=\{T(ae_1+be_2+ce_3)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}\\&=\{aT(e_1)+bT(e_2)+cT(e_3)\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}\\&=\left\{a\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-6\\-2\\4\end{bmatrix}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

になる。Tの像の基を計算する為にAを簡略化したBを用いて、

$$T(e_3)=3T(e_1)+1T(e_2)$$

という関係式が分かる。なので、

$$\mathrm{Im}(T)=\left\{a\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

(2) $\mathbb{R}^3$ の標準基を使ってTの表現行列Aを求めよ.

- $\mathbb{R}^3$ の標準基: $\{e_1, e_2, e_3\}$を使って

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

になるので表現行列Aは

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

になる。

(3) Aを使って Tの固有多項式 $g_T(t)$ を計算し、Tの固有値 λ を求めよ.

- 固有多項式の定義から

$$g_T(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t+1 & 3 & 6 \\ 1 & t-1 & 2 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t-2)^2$$

になる。“λが固有値になる事”と“$g_T(\lambda) = 0$になるの”は同値なので

$$\lambda = 0, 2$$

になる。

(4) Tの各固有値 λ の固有空間を求めよ.

- 先ずは $\lambda = 2$ に対する固有空間 $W(2;T)$ を計算する。つまり、

$$2E - A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

の時 $(2E - A)x = 0$ に対する解空間を計算すれば良いので $2E - A$を簡略化して

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が貰う。これから

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

が分かるので $x_3 = a, x_2 = b$ にしたら $x_1 = -b - 2a$ になるので

$$W(2;T) = \left\{ a \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

固有値$\lambda = 0$ に対する固有空間 $W(0;T)$ を計算する為に

$$0E - A = -A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

の解空間を計算したら

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が貰える。これから

$$W(0;T) = \left\{ c \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(5) Tの像、核、固有空間の間の関係を調べよ.

- $\mathrm{Ker}(T) = W(0;T)$ に見える.

(6) Aを対角化する行列を求めよ. (対角化はしなくていい.)

- (4)の答えから固定ベクトルは $\{{}^t(-2,0,1),{}^t(-1,1,0),{}^t(-3,-1,1)\}$ なので Aを対角化する行列 Pは
$$P=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
になる。

2. ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$とする. 任意の$x={}^t(x_1,x_2), y={}^t(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$に対し、$\langle\ \ ,\ \ \rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$を
$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$$
とする.

(1) $\langle\ \ ,\ \ \rangle$ が内積になる事を示す.

- 内積に成る 4 つの条件を確認すれば良いので $c\in\mathbb{R}$, $u={}^t(u_1,u_2), v={}^t(v_1,v_2), w={}^t(w_1,w_2)\in\mathbb{R}^2$にする。

(i)
$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle&=\langle{}^t(u_1+v_1,u_2+v_2),{}^t(w_1,w_2)\rangle\\&=(u_1+v_1)w_1+(u_2+v_2)w_2\\&=u_1w_1+v_1w_1+u_2w_2+v_2w_2\\&=u_1w_1+u_2w_2+v_1w_1+v_2w_2\\&=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\langle cu,w\rangle&=\langle{}^t(cu_1,cu_2),{}^t(w_1,w_2)\rangle\\&=cu_1w_1+cu_2w_2\\&=c(u_1w_1+u_2w_2)\\&=c\langle u,w\rangle\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\langle u,w\rangle&=\langle{}^t(u_1,u_2),{}^t(w_1,w_2)\rangle\\&=u_1w_1+u_2w_2\\&=w_1u_1+w_2u_2\\&=\langle w,u\rangle\end{aligned}$$

(iv) $u\neq 0$の時、
$$\begin{aligned}\langle u,u\rangle&=\langle{}^t(u_1,u_2),{}^t(u_1,u_2)\rangle\\&=u_1^2+u_2^2\gneq 0\end{aligned}$$

(2) $x={}^t\big(1,\sqrt{3}\big)$の時、ベクトル組$\{cx,y\}$が $\mathbb{R}^2$の正規直交基になるような実数 $c\in\mathbb{R}$ とベクトル $y\in\mathbb{R}^2$を求めよ.

- 先ずは cxをノルム 1 にする為に xの長さを計算したいので
$$|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=\pm 2.$$
なので $c=\pm 1/2$. $\{cx,y\}$ が正規直交基になる為には
$$x\perp y,\quad |y|=1$$
になるような $y={}^t(y_1,y_2)$ を探せば良い. $\tilde{y}={}^t(-\sqrt{3},1)$ にすれば $\langle x,\tilde{y}\rangle=0$. ので、$y=\pm 1/2\tilde{y}$.

(3) 線形写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$が
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$
の時、Tが直交変換になる事を示す.

- $T(x) = Ax$ にすると Tの表現行列は Aになる。Tが直交変換になる事とAが直交行列になる事は同値なので ${}^tAA = E_2$ を示せば良い。

$$\begin{aligned}
{}^t\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

なので Tは直交変換。