REVIEW

宿志すべき事：

- 線形写像Tの定義、像 $(\mathrm{Im}(T))$、核 $(\mathrm{Ker}(T))$
- ベクトル空間の基の選び方による線形写像の表現行列の計算と関係
- 固有多項式を用いた固有値の計算
- 固有空間の計算（固有ベクトルを固有空間から直ぐに計算できるようにすること）
- 行列の対角化
- 内積の定義と定理６.１.１の内積の性質
- 正規直交基の計算と直交変換/直交行列の定義

練習問題

1. ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^3$とする. 線形写像 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$が
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1&-3&-6\\-1&1&-2\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$
を満足するとする.
(1) Tの像と核を求めよ.
(2) $\mathbb{R}^3$ の標準基を使ってTの表現行列Aを求めよ.
(3) Aを使って Tの固有多項式 $g_T(t)$ を計算し、Tの固有値 λ を求めよ.
(4) Tの各固有値 λ の固有空間を求めよ.
(5) Tの像、核、固有空間の間の関係を調べよ.
(6) Aを対角化する行列を求めよ. (対角化はしなくていい.)

2. ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^2$とする. 任意の$x={}^t(x_1,x_2), y={}^t(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$に対し、$\langle\ ,\ \rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$を
$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$$
とする.
(1) $\langle\ ,\ \rangle$ が内積になる事を示す.
(2) $x={}^t\!\left(1,\sqrt{3}\right)$の時、ベクトル組$\{cx,y\}$が $\mathbb{R}^2$の正規直交基になるような実数 $c\in\mathbb{R}$ とベクトル $y\in\mathbb{R}^2$を求めよ.
(3) 線形写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$が
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$
の時、Tが直交変換になる事を示す.