

## ROZDZIAŁ 1

# Klasyczny Problem galerii sztuki

## 1.1. Problem galerii sztuki dla wielokątów prostych

### 1.1.1. Wprowadzenie

Jako pierwszy problem galerii sztuki przedstawił Victor Klee w 1973, odpowiadając na prośbę Vaseka Chvátala o interesujący problem geometryczny. Zagadnieniem, które zaproponował Klee było znalezienie minimalnej ilości strażników, wystarczających aby strzec wnętrze pomieszczenia galerii sztuki o kształcie  $n$ -kąta. Niedługo potem Chvátal zaproponował teorię, która szybko została nazwana „Teorią galerii sztuki Chvátala”, która mówi, że  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  strażników jest zawsze wystarczających a czasami potrzebnych aby strzec  $n$ -kąt (Chvátal 1975). Od tamtego dnia problem doczekał się wielu różnych wariacji oraz przekształceń.

### 1.1.2. Twierdzenie Chvátala (1975)

Zgodnie z twierdzeniem Chvátala (1975), ilość strażników potrzebnych do strzeżenia wielokąta prostego wynosi  $g(n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , gdzie  $g(n)$  jest funkcją opisującą ilość strażników wystarczających aby zawsze strzec określony  $n$ -kąt. Inaczej mówiąc  $g(n)$  strażników zawsze wystarcza a czasami jest potrzebnych aby pokryć  $n$ -kąt.

Postaram się przedstawić dowód Fiska (1978), który jest znacznie prostszy od indukcyjnej wersji Chvátala a bazuje na trójkolorowaniu grafu.

**Definicja 1.**  *$K$ -kolorowanie grafu to przyporządkowanie liczby naturalnej każdemu wierzchołkowi grafu takiej, że żadnym dwóm sąsiednim wierzchoł-*

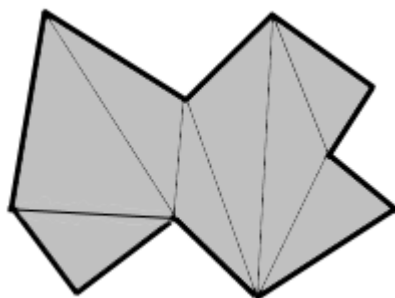
kom nie została przypisana taka sama liczba oraz wszystkie liczby są mniejsze bądź równe  $k$ .

### 1.1.3. Dowód twierdzenia Chv'atala 1.1.2

Pierwszym krokiem jest triangulacja wielokąta  $P$  przez dodanie wewnętrznych krawędzi między wierzchołkami, do momentu aż nie będzie można dodać więcej takich krawędzi. Dowód na to, że każdy wielokąt prosty można podzielić na trójkąty znajduje się w dodatku ???. Za wierzchołki i krawędzie grafu przyjmujemy odpowiednio wierzchołki i krawędzie wielokąta. Jako, że graf jest planarny zgodnie z twierdzeniem o czterech barwach (Appel i Haken, 1977) wiemy, że jest 4-kolorowalny.

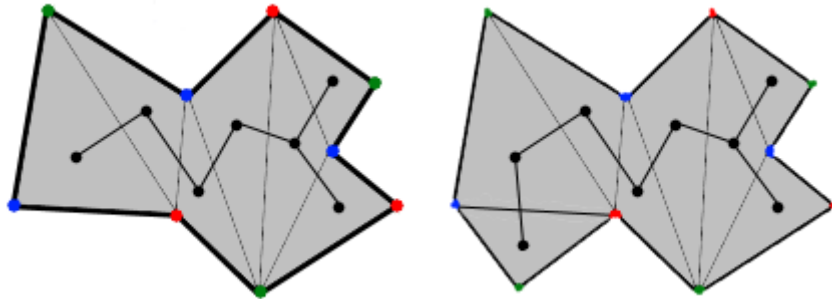
**Lemat 1.** *Wierzchołki wielokąta prostego po triangulacji zawsze są 3-kolorowalne.*

Dowód polega na indukcji po ilości trójkątów wielokąta podzielonego na trójkąty. Trójkąt jest przypadkiem bazowym - zawsze można go pokolorować trzema kolorami. Następnym krokiem jest stworzenie grafu dualnego danego wielokąta, który jest drzewem.



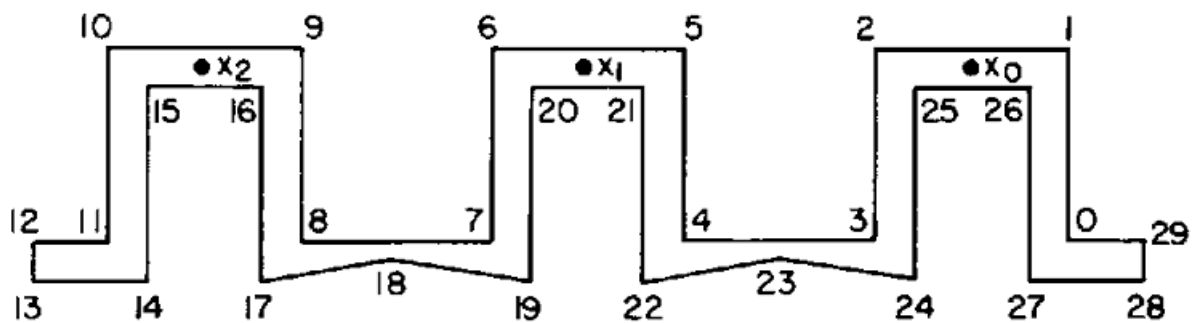
Rysunek 1.1: Wielokąt podzielony na trójkąty

Z grafu dualnego usuwamy dowolny liść wraz z odpowiadającym mu trójkątem, kolorujemy wierzchołki wielokąta a następnie dodajemy trójkąt z powrotem nadając mu kolor inny niż sąsiadom. Strażników rozmieszczamy w tych wierzchołkach, których kolor jest najrzadziej używanym.



Rysunek 1.2: Pokolorowany wielokąt wraz z grafem dualnym

Ograniczenie  $g(n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  nie oznacza, że wystarczy rozmieścić strażnika na co trzecim wierzchołku. Przykład wielokąta dla którego takie rozmieszczenie nie pozwoli strzec całego wnętrza znajduje się poniżej.



Rysunek 1.3: Strażnicy na co trzecim wierzchołku, którzy nie strzegą całego wielokąta

PRZERYSOWAĆ!

### 1.1.4. Wielokąty z dziurami

Ciekawym rozwinięciem klasycznego zagadnienia galerii sztuki jest wprowadzenie dziur we wnętrzu wielokąta.

**Definicja 2.** *Wielokątem z dziurami nazywamy wielokąt  $P$ , który mieści w sobie wiele innych wielokątów  $H_1, \dots, H_n$  - dziury.*

Dodatkowo, żaden wielokąt nie może przecinać zarówno krawędzi wielokąta  $P$  jak i innych wielokątów wewnętrznych  $H_i$ .

Podobnie jak w przypadku standardowych wielokątów, również dla wariantu z dziurami aby obliczyć potrzebną ilość strażników wykorzystamy triangulację.

**Lemat 2.** *Wielokąt z dziurami  $P$  można podzielić na trójkąty.*

Dowód chyba  
będzie w  
dodatku

**Lemat 3.** *Jeżeli wielokąt  $P$  posiada  $h$  dziur oraz  $n$  krawędzi (zarówno krawędzi dziur jak i własnych, zewnętrznych) to po triangulacji będzie miał  $t = n + 2h - 2$  trójkątów.*

rysunek bo  
niewiadomo o  
co chodzi


Niech zewnętrzna krawędź wielokąta  $P$  posiada  $n_0$  krawędzi oraz niech  $i$ -ta dziura posiada  $n_i$  krawędzi wtedy  $n = n_0 + n_1 + \dots + n_i$ . W takim wypadku suma wewnętrznych kątów zewnętrznej krawędzi wynosi  $(n_0 - 2) \cdot 180$  stopni a suma kątów zewnętrznych jest równa  $(n_i + 2) \cdot 180$ . Taki wynik można zapisać jako sumę:

$180((n_0 - 2) + (n_1 + 2) + \dots + (n_k + 2)) = 180t \implies t = n + 2i - 2$ . Mając ilość trójkątów, na które zostanie podzielony wielokąt  $P$ , możemy przejść do twierdzenia określającego wymaganą ilość strażników.

**Twierdzenie 1** (O'Rourke 1982). *Dla wielokąta o  $n$  wierzchołkach oraz  $h$  dziurach  $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$  strażników kombinatorycznych jest wystarczających aby dominować każdą triangulację wielokąta.*

Główną ideą dowodu jest kolejne usuwanie dziur wielokąta, wzdłuż przekątnych dodanych podczas triangulacji, poprzez łączenie ich ze ścianą zewnętrzną. Każda z dziur musi posiadać krawędź w grafie triangulacji  $T$ , która łączy ją z inną dziurą lub z zewnętrzną krawędzią wielokąta  $P$ . „Przecięcie” wzdłuż takiej krawędzi połączy dziurę ze ścianą zewnętrzną lub scali dwie dziury w jedną. W każdym z tych przypadków całkowita ilość dziur zmniejszy się o jeden. Trudność polega jedynie na wyborze krawędzi z  $T$ , które pozwolą uzyskać taki podział.

Niech  $T'$  będzie grafem dualny triangulacji  $T$ .  $T'$  jest grafem planarnym, co najwyżej trzeciego stopnia, posiadającym  $h$  graniczących ze sobą ścian  $F_1, \dots, F_h$ , po jednej na każdą dziurę wielokąta  $P$ . Niech  $F_0$  będzie ścianą zewnętrzną. Wybieramy dowolną ścianę  $F_i$ , która posiada przynajmniej jedną krawędź  $e$  ze ścianą  $F_0$ . Taka krawędź istnieje, ponieważ w grafie  $T$  musi istnieć przekątna łącząca krawędź zewnętrzną wielokąta  $P$  z dowolną dziurą - w grafie  $T'$  jest to krawędź  $e$ . Usunięcie  $e$  z  $T'$  scala  $F_i$  z  $F_0$ , bez rozpórniania grafu.



## ROZDZIAŁ 2

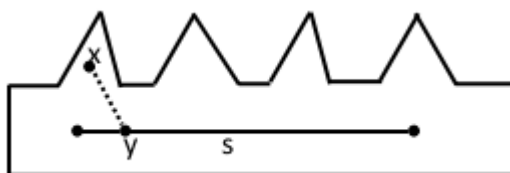
# Strażnicy mobilni

## 2.1. Strzeżenie wielokątów prostych przez strażników mobilnych

### 2.1.1. Wprowadzenie

Jednym z najciekawszych wariantów problemu galerii sztuki, zaproponowanym przez Toussainta w 1981 roku, są strażnicy mobilni. Pomysł jest prosty – zamiast rozmieszczać strażników w wierzchołkach wielokąta pozwalamy, aby dowolnie przemieszczali się w jego granicach.

**Definicja 3.** Niech  $s$  będzie odcinkiem zawartym w wielokącie  $P$ . Mówimy, że  $x$  takiego, że  $x \in P$  jest strzeżony przez  $s$ , jeżeli istnieje punkt  $y \in s$  taki, że odcinek  $xy \subseteq P$ .



Rysunek 2.1: Strażnik poruszający się po prostej  $s$  strzeże cały wielokąt

123 Zgodnie z powyższą definicją,  $x$  jest strzeżone przez strażnika jeżeli jest widzialne z co najmniej jednego punktu odcinka po którym porusza się strażnik. Jest to tak zwana „słaba widoczność”. „Silna widoczność” wymaga aby punkt  $x$  był widoczny z każdego punktu na  $s$ .

Warto również zaznaczyć, że strażnicy mobilni są „silniejsi” od strażników stacjonarnych. Średnio trzech strażników mobilnych jest w stanie pokryć taką

samą przestrzeń jak czterech strażników stacjonarnych.

W tym rozdziale omówię dowód, że  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  strażników mobilnych jest czasami potrzebnych i zawsze wystarczających, aby strzec dowolny  $n$ -kąt.

### 2.1.2. Ogólny dowód dla wielokątów

Na początku zdefiniujemy różne typy strażników geometrycznych. Na podstawie prostej, po której się poruszają dzielimy ich na 3 rodzaje:

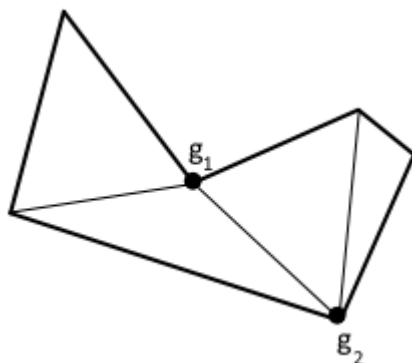
- krawędziowy, który porusza się po krawędziach wielokąta łącznie z punktami końcowymi
- przekątniowy, który może się poruszać po odcinkach łączących krawędzie wielokąta
- odcinkowy, poruszający się po dowolnym odcinku zawierającym się we wnętrzu wielokąta

Każdy z powyższych strażników strzeże przestrzeń którą jest w stanie zobaczyć, poruszając się wzdłuż określonego odcinka.

Strażników rozmieszczonych w grafie  $T$  wielokąta poddanemu triangulacji nazywamy strażnikami kombinatorycznymi. Strażnik wierzchołkowy to pojedynczy wierzchołek  $T$ , krawędziowy to para wierzchołków sąsiednich połączonych krawędzią grafu  $T$ , która ma swój odpowiednik w wielokącie  $P$  a ostatnim rodzajem jest strażnik przekątniowy, zdefiniowany przez parę dowolnych sąsiednich wierzchołków oraz krawędzie je łączące. Oczywiście, podobnie jak w przypadku strażników geometrycznych również od strażników kombinatorycznych wymagamy aby strzegli daną przestrzeń. Odpowiednikiem strzeżenia dla tak zdefiniowanych strażników oraz grafu jest dominacja.

**Definicja 4.** *Zbiór strażników  $C = \{g_1, \dots, g_k\}$  dominuje graf  $T$  jeżeli dla każdej ściany triangulacji  $T$  przynajmniej jeden z trzech wierzchołków należy do określonego  $g_i \in C$ .*

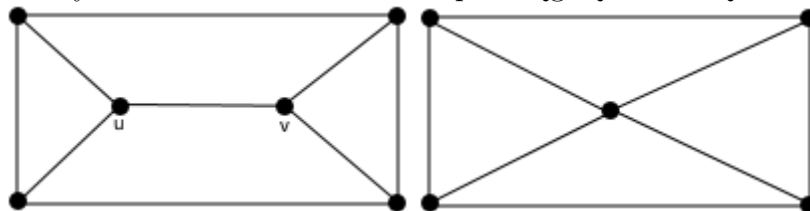
Głównym założeniem jest, że  $\frac{n}{4}$  strażników kombinatorycznych zawsze wystarcza a czasami jest wymaganych aby dominować graf triangulacji wielokąta z ilością wierzchołków  $n \geq 4$ . Z analogi strażników geometrycznych

Rysunek 2.2: Strażnicy  $g_1$  oraz  $g_2$  dominują graf  $T$ 

oraz kombinatorycznych wynika, że jeżeli graf triangulacji wielokąta jest dominowany przez  $k$  wierzchołkowych strażników kombinatorycznych to może go strzec  $k$  wierzchołkowych strażników geometrycznych. Powyższy wniosek pozwala nam stwierdzić, że dowód kombinatoryczny możemy rozszerzyć również na przypadek geometryczny.

Właściwy dowód przez indukcję przebiega podobnie jak dowód twierdzenia Chvátala. Jednak zanim przejdziemy do dowodu musimy zdefiniować jeszcze jedną operację - ściąganie krawędzi.

**Definicja 5.** W grafie  $G$  ściąganie krawędzi  $e$  łączącą wierzchołki  $u$ ,  $v$  jest zamianą wierzchołków  $u$ ,  $v$  na nowy, pojedynczy wierzchołek z którym incydentne są te krawędzie, które były incydentne z  $u$  oraz  $v$ . W rezultacie graf  $G'$  ma jedną krawędź mniej od  $G$ .

Rysunek 2.3: Graf  $G$  oraz  $G'$  po ściągnięciu krawędzi



Omówię teraz lematy, wraz z krótkimi dowodami, które zostaną wykorzystane w ostatecznym dowodzie.

**Lemat 4.** *Niech  $T$  będzie grafem triangulacji wielokąta  $P$  a  $T'$  grafem powstałym przez ściągnięcie jednej krawędzi  $T$ . Po takiej operacji  $T'$  jest grafem triangulacji jakiegoś wielokąta  $P'$ .*

Dowód polega na skonstruowaniu grafu z łukami odpowiadającego  $T'$  a następnie wyprostowaniu ich w celu uzyskania  $P'$ .

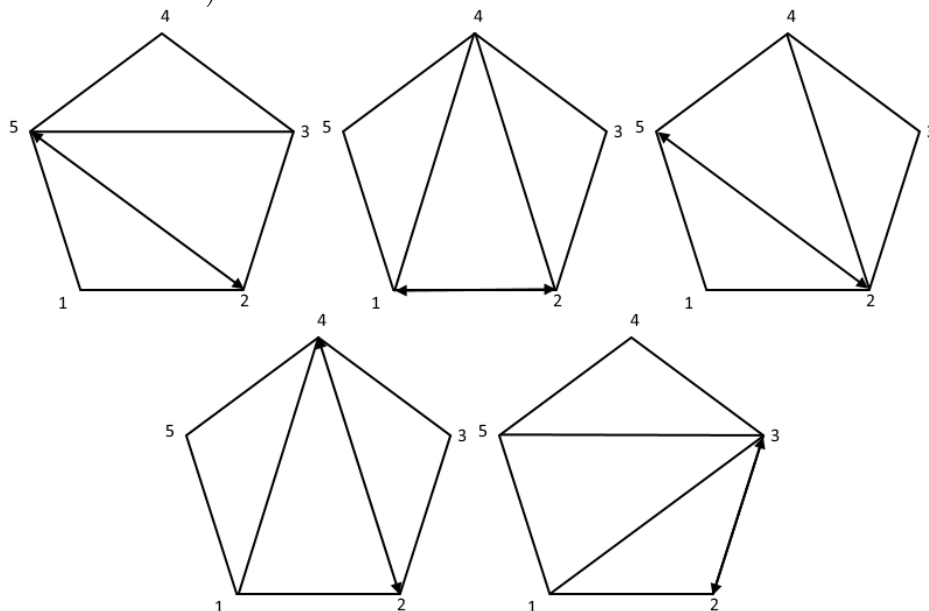
**Lemat 5.** *Założmy, że  $f(n)$  kombinatorycznych strażników zawsze wystarczy aby dominować dowolny graf triangulacji o  $n$  wierzchołkach. Wtedy, jeżeli  $T$  jest danym grafem triangulacji wielokąta  $P$  ze strażnikiem wierzchołkowym umieszczonym w jednym z  $n$  wierzchołków grafu to dodatkowych  $f(n-1)$  strażników jest wystarczających aby dominować graf  $T$ .*

Innymi słowy, jedną z krawędzi możemy usunąć z obliczeń ilości strażników jeżeli istnieje strażnik umieszczony w dowolnym wierzchołku incydentnym z usuwaną krawędzią.

**Lemat 6.** *Każdy graf triangulacji pięciokąta foremnego jest dominowany przez pojedynczego kombinatorycznego strażnika przekątniowego z końcem w wybranym wierzchołku.*

Istnieje tylko 5 różnych triangulacji pięciokąta. Dla każdego z nich wystarczy jeden strażnik mobilny.

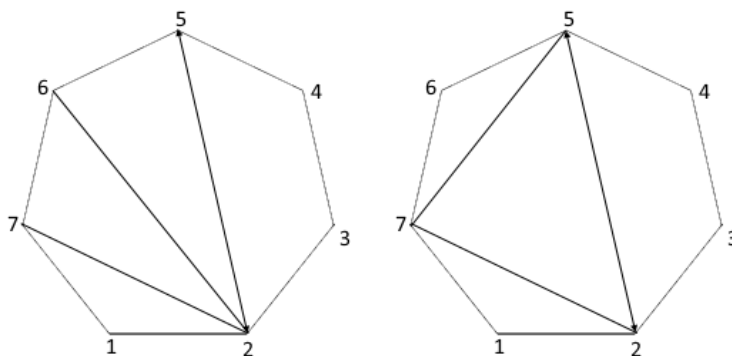
Rysunek 2.4: Pięć triangulacji pięciokąta wraz ze strażnikami (przerywana linia ze strzałkami).



**Lemat 7.** *Każdy graf triangulacji siedmiokąta foremnego jest dominowany przez pojedynczego strażnika przekątniowego.*

Niech  $T$  będzie grafem triangulacji siedmiokąta oraz niech  $d$  będzie ustaloną przekątną wewnętrzną. Przekątna dzieli wielokąt w stosunku 2 krawędzie i pięciokąt lub 3 krawędzie i trapez.

Rysunek 2.5: Triangulacja siedmiokąta przy podziale 2+5 oraz 3+4

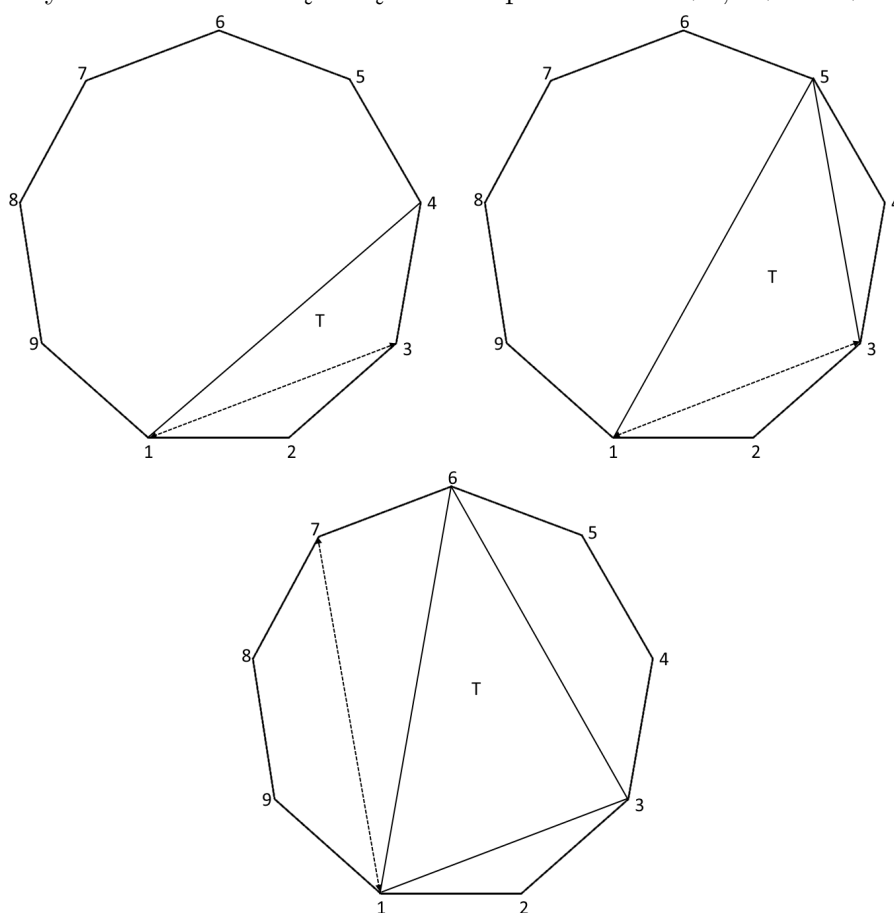


**Lemat 8.** *Każdy graf triangulacji dziewięciokąta jest dominowany przez*

*dwóch strażników przekątniowych takich, że jeden koniec przekątnej jest incydentny z wybranym wierzchołkiem.*

Niech  $T$  będzie grafem triangulacji dziewięciokąta foremnego, wybrany wierzchołek jest etykietowany numerem 1 a przekątna  $d$  będzie dowolną przekątną wewnętrzną z końcem w wierzchołku 1. Taka przekątna dzieli krawędzie  $T$  na  $2 + 7$ ,  $3 + 6$  lub  $4 + 5$ .

Rysunek 2.6: Dziewięciokąt wraz z podziałami  $2+7$ ,  $3+6$  i  $4+5$



Aby zakończyć dowód potrzebujemy jeszcze jednego podziału, który pozwoli nam wykorzystać indukcję dla  $n \geq 10$  wierzchołków. W tym celu użyjemy następującego lematu.

**Lemat 9.** *Niech  $P$  będzie wielokątem o  $n \geq 10$  wierzchołkach oraz  $T$  będzie jego grafem triangulacji. Istnieje przekątna  $d$  w grafie  $T$  która dzieli go na dwie części, z których jedna zawiera  $k = 5, 6, 7$  lub  $8$  łuków odpowiadających krawędziom  $P$ .*

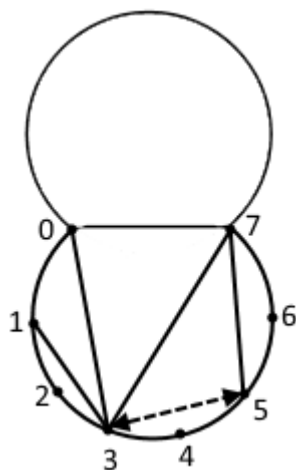
Niech  $d$  będzie przekątną grafu  $T$  dzielącą minimalną ilość krawędzi wielokąta, która wynosi co najmniej 5. Niech  $k \geq 5$  będzie minimalną ilością krawędzi, wierzchołki posiadają etykiety  $0, 1, \dots, n-1$  a przekątna  $d$  prowadzi od wierzchołka 0 do  $k$ . Przekątna  $d$  jest podstawą trójkąta  $T$ , którego szczyt znajduje się w punkcie  $t$ ,  $0 \leq t \leq k$ . Jako, że  $k$  jest najmniejsze z możliwych,  $t \leq 4$  i  $k - t \leq 4$ , suma obu nierówności daje nam  $k \leq 8$ . Biorąc pod uwagę wcześniej przedstawione lematy, dowód indukcyjny jest analizą wszystkich przypadków.

**Definicja 6** (O'Rourke, 1983). *Każdy graf triangulacji  $T$  wielokąta o przynajmniej  $n \geq 4$  wierzchołkach jest dominowany przez  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  kombinatorycznych strażników przekątniowych.*

Lemat 4, 5 oraz 6 opisują problem dla  $5 \leq n \leq 9$ . Załóżmy, że  $n \geq 10$  oraz, że dowód działa dla każdego  $n' < n$ . Lemat 7 gwarantuje, że istnieje przekątna, która dzieli  $T$  na dwa grafy  $T_1$  oraz  $T_2$ , gdzie  $T_1$  zawiera  $k$  krawędzi  $T$  dla  $4 \leq k \leq 8$ . Rozpatrzmy teraz każdą wartość  $k$ .

1. ( $k = 5$  lub  $6$ ).  $T_1$  ma  $k+1 \leq 7$  krawędzi łącznie z  $d$  oraz tworzy siedmiokąt. Zgodnie z lematem 5  $T_1$  jest dominowany przez pojedynczego strażnika.  $T_2$  ma  $n - k + 1 \leq n - 5 + 1 = n - 4$  krawędzi łącznie z  $d$  i zgodnie z założeniem indukcyjnym jest dominowany przez  $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$  strażników przekątniowych. W sumie dla  $T_1$  oraz  $T_2$  daje to  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  strażników przekątniowych.
2. ( $k = 7$ ). Jakakolwiek z przekątnych  $(0,6)$ ,  $(0,5)$ ,  $(1,7)$  lub  $(2,7)$  prowadzi do  $k < 4$ . W rezultacie trójkąt  $T$  w  $T_1$  musi być rozpięty przez  $(0,3,7)$  lub  $(0,4,7)$ . Są to przypadki analogiczne więc założymy, że  $T$  jest trójkątem o wierzchołkach  $(0,3,7)$ . Czworokąt  $(0,1,2,3)$  ma dwie różne triangulacje, które rozpatrzmy osobno.

- (a) (punkty 1,3) Pięciokąt  $(3,4,5,6,7)$  dominuje jeden strażnik z końcem w punkcie 3, zgodnie z lematem 4. Ów strażnik dominuje cały graf  $T_1$ . Skoro  $T_2$  ma  $n - 7 + 1 = n - 6$  krawędzi jest dominowany przez  $\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$  strażników przekątniowych zgodnie z tezą indukcyjną.

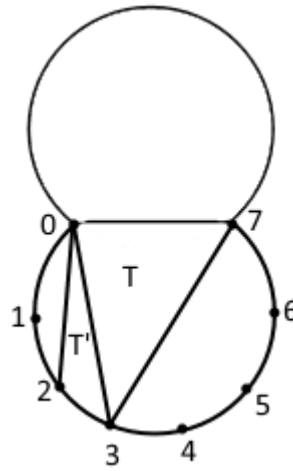


Rysunek 2.7: Graf triangulacji wraz ze strażnikiem (linia przerywana) dominującym graf

- (b) (punkty 0,2) Stwórzmy graf  $T_0$  przez połączenie dwóch trójkątów  $T = (0,3,7)$  i  $T' = (0,2,3)$ .  $T_0$  posiada  $n - 7 + 3 = n - 4$  krawędzie więc jest dominowany przez  $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$  strażników przekątniowych zgodnie z tezą indukcyjną. W takim przypadku przynajmniej jeden z wierzchołków  $T' = (0,2,3)$  musi być punktem końcowym strażnika przekątniowego. Daje nam to trzy przypadki:
- i. Jeżeli 0 jest końcem przekątnej to do  $T_0$  możemy dołączyć  $(0,1,2)$  bez potrzeby dodawania kolejnych strażników.
  - ii. Jeżeli 2 jest końcem przekątnej to możemy dołączyć  $(0,1,2)$  do  $T_0$
  - iii. Jeżeli 3 jest końcem przekątnej, wtedy mamy trzy kolejne możliwości rozmieszczenia drugiego końca. Przypadki kiedy drugi koniec jest w 0 lub 2 rozpatrzyliśmy powyżej. Jeżeli jest

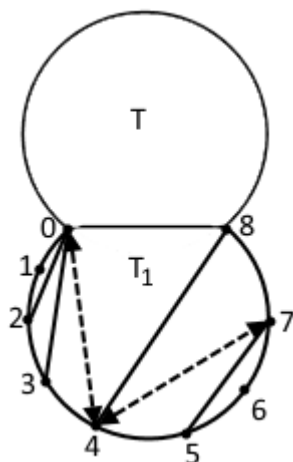
on w 7 to zamieniamy przekątną strażnika z (3,7) na (0,7). Każdy trójkąt wciąż pozostaje zdominowany a  $T_0$  ponownie możemy rozszerzyć o (0,1,2).

Po rozpatrzeniu wszystkich przypadków możemy stwierdzić, że pięciokąt (3,4,5,6,7) jest domiowany przez  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1$  strażników przekątniowych



Rysunek 2.8: Graf triangulacji wraz ze strażnikiem dominującym graf

3. ( $k = 8$ )  $T_1$  ma  $k + 1 = 9$  krawędzi a więc zgodnie z lematem 6 jest dominowany przez dwóch strażników przekątniowych. Jedna z takich przekątnych kończy się w wierzchołku 0.  $T_2$  ma  $n - k + 1 = n - 7$  krawędzi. Według lematu 3 jeden strażnik w wierzchołku 0 pozwala na dominację pozostałej części  $T_2$  przez  $f(n - 7 - 1) = f(n - 8)$  strażników przekątniowych, gdzie  $f(n')$  określa ilość strażników przekątniowych zawsze potrzebnych aby dominować graf triangulacji o  $n'$  wierzchołkach. Zgodnie z tezą indukcyjną  $f(n') = \lfloor \frac{n'}{4} \rfloor$  a więc  $\lfloor \frac{n-8}{4} \rfloor = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2$  strażników przekątniowych dominuje  $T_2$ . Wspólnie z dwoma strażnikami umieszczonymi w  $T_1$  cały graf  $T$  jest dominowany przez  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  strażników przekątniowych.



Rysunek 2.9: Graf triangulacji oraz strażnicy dominujący graf

**Twierdzenie 2.** *Każdy wielokąt  $P$  o  $n \geq 4$  krawędziach jest strzeżony przez  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  geometrycznych strażników przekątniowych lub liniowych.*

Ilość strażników przekątniowych wynika z wcześniejszego dowodu. Jako, że strażnicy przekątniowi są szczególnym przypadkiem strażników liniowych, taka sama ilość silniejszych strażników liniowych jest również wystarczająca.

## ROZDZIAŁ 3

# Strzeżenie zbioru odcinków

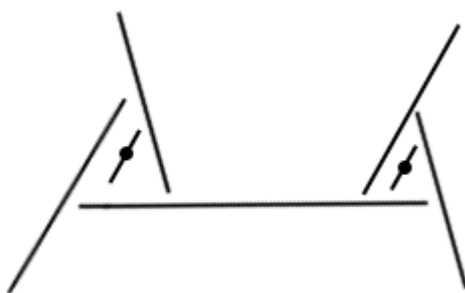
## 3.1. Strzeżenie zbioru odcinków

### 3.1.1. Wprowadzenie

Ten wariant zagadnienia galerii sztuki wymaga, aby strzeżony odcinek był widoczny przez strażnika przynajmniej w jednym punkcie.

**Definicja 7.** Niech  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  będzie zbiorem  $n$  prostych odcinków na płaszczyźnie. Zbiór punktów  $Q = \{p_1, \dots, p_k\}$  strzeże  $F$ , jeżeli każdy element  $S_i$  ze zbioru  $F$  zawiera punkt, który jest widziany przez przynajmniej jeden punkt  $p_j$  należący do  $Q$ .

Tak zdefiniowany problem możemy zobrazować przez strażników, którzy strzegą obrazu, jeżeli widzą przynajmniej jeden jego fragment. W takim przypadku nie można zdjąć obrazu ze ściany bez zaalarmowania strażnika.



Rysunek 3.1: Zbiór odcinków rozłącznych wymagający dwóch strażników

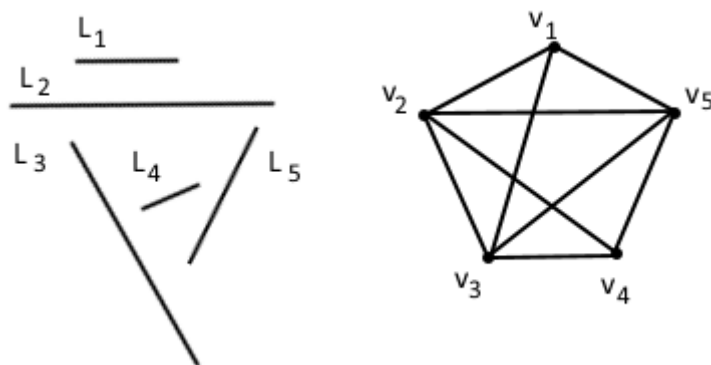
**Twierdzenie 3.** Dowolny zbiór  $n$  odcinków prostych, jest zawsze strzeżony przez  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  punktów a czasami wystarczających jest  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  strażników.



### 3.1.2. Ograniczenie górne

Aby udowodnić tw. ?? na początku wykażemy, że dla każdej rodziny odcinków  $F$ , których jest parzysta liczba  $n$ , graf  $G(F)$  ma idealne skojarzenie.

Rozpatrzmy teraz zbiór  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  rozłącznych odcinków prostych na płaszczyźnie oraz graf  $G(F)$  zawierający  $n$  odcinków  $v_1, \dots, v_n$  takich, że  $v_i$  jest sąsiedni z  $v_j$  wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje punkt  $x$  na płaszczyźnie, który widzi przynajmniej jeden punkt na odcinku  $S_j$  i  $S_i$  tzn.  $x$  strzeże oba odcinki.

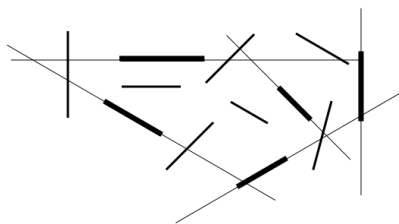


Rysunek 3.2: Zbiór odcinków rozłącznych  $F$  oraz odpowiadający mu graf  $G(F)$

**Lemat 10.** Niech  $Q$  będzie dowolnym wielokątem prostym a  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  rodziną  $n$  rozłącznych odcinków oraz niech  $H$  będzie podzbiorem elementów  $F$ , takich które przecinają wielokąt  $Q$ . Podgraf grafu  $G(F)$  indukowany przez wierzchołki  $G(F)$  reprezentujący elementy ze zbioru  $H$  jest spójny.

Niech  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  będzie zbiorem  $n$  rozłącznych odcinków a  $G(F)$  odpowiadającym mu grafem. Zakładamy, że  $n$  jest parzyste, w przeciwnym wypadku należy dodać jeden odcinek do zbioru  $F$ . Pokażemy teraz, że  $G(F)$  spełnia twierdzenie Tutte'a a więc ma idealne skojarzenie.

Rozważmy dowolny podzbiór  $H$  zbioru  $F$  oraz niech  $S$  będzie zbiorem wierzchołków grafu  $G(F)$ , reprezentującego elementy  $H$ . Pokażemy, że ilość spójnych części grafu  $G(F) - S$  wynosi, co najwyżej  $|S| = |H|$ .



Rysunek 3.3: Podział zbioru  $F$ . Pogrubione elementy należą do zbioru  $H$

Na początku należy usunąć z płaszczyzny wszystkie odcinki, które nie należą do  $H$ . Następnie, jeden po drugim przedłużamy elementy  $H$  dopóki nie przetną innego elementu  $F$ , wcześniej przedłużonego odcinka lub nie staną się prostymi bądź półprostymi. Niech  $\pi$  oznacza płaszczyznę indukowaną przez przedłużone elementy zbioru  $H$ . Łatwo zauważyć, że  $\pi$  zawiera dokładnie  $|H| + 1$  ścian. Na końcu należy usunąć elementy  $F$ , które nie należą do  $H$ .

Zgodnie z lematem ??, ilość elementów grafu  $G(F) - S$  jest co najwyżej równa ilości ścian płaszczyzny  $\pi$  czyli  $|H| + 1$ . Możemy prosto sprawdzić, że występują przynajmniej dwie sąsiednie ściany z  $\pi$  takie, że odcinki które je przecinają należą do tego samego elementu w grafie  $G(F) - S$ . Stąd wniosek, że liczba elementów zbioru  $G(F) - S$  wynosi co najwyżej  $|S|$ , co implikuje, że  $G(F)$  ma doskonałe skojarzenie  $M$ . Na tej podstawie możemy stwierdzić, że wystarczy co najwyżej  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  punktów aby strzec  $F$  – po jednym na każdy wierzchołek skojarzenia  $M$ .

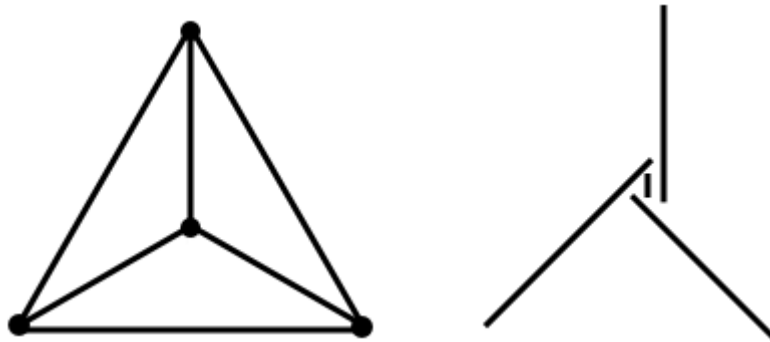
### 3.1.3. Ograniczenie dolne

Aby uzyskać ograniczenie dolne, należy znaleźć  $n$ -elementowy zbiór  $F$ , który jest strzeżony przez  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  strażników.

Niech  $H$  będzie planarnym grafem kubicznym z trójkątną ścianą zewnętrzną, w której wszystkie wierzchołki, poza zewnętrznymi, spełniają założenie, że wektory wychodzące z wierzchołków wzdłuż krawędzi rozpinają płaszczyznę.  $H$  posiada  $k$  wierzchołków, wtedy ma  $\frac{3k}{2}$  krawędzi.

Zamieniamy krawędzie zbioru  $H$  na odcinki takie, że na każde  $k - 3$  wewnętrzne wierzchołki przypadnie trójkątna ściana w której umieścimy mały

odcinek. Odrzucamy trzy krawędzie zewnętrznej ściany  $H$  a następnie rozłą-



Rysunek 3.4: Przekształcenie grafu  $H$ .

czamy każdą krawędź w jej bliskim sąsiedztwie aby utworzyć zbiór  $n = \binom{3k}{n}$  -  $3 + k - 3$  odcinków. Żadne dwa z  $k - 3$  małych odcinków nie są widoczne z jednego punktu więc  $k - 3$  punktów jest potrzebnych aby strzec taki zbiór. Możemy łatwo sprawdzić, że  $k - 3$  punktów jest również wystarczające z czego wynika, że  $k - 3 = \lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  co kończy dowód twierdzenia ??.

## 3.2. Oświetlanie odcinków

### 3.2.1. Wprowadzenie

Kolejną wariacją strzeżenia odcinków jest ich podświetlanie. Tym razem aby strzec odcinek wymagane jest jego podświetlenie. Należy zwrócić uwagę na fakt, że punkt na odcinku może zostać podświetlony również przez promień padający na niego z drugiej strony odcinka.

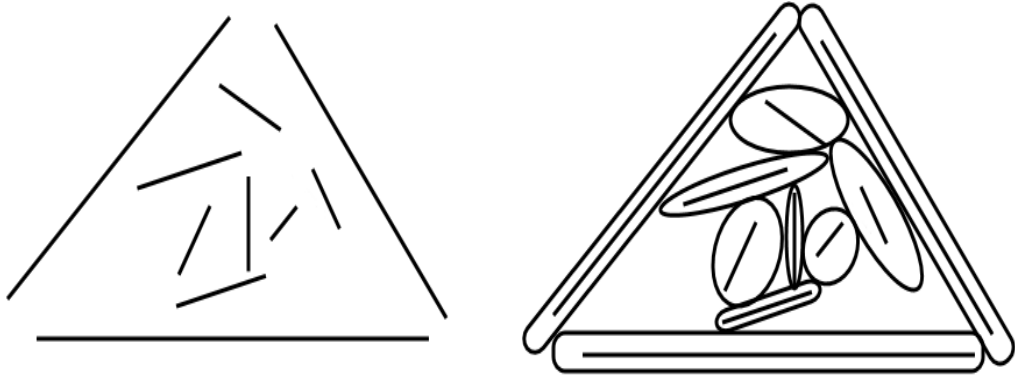
**Definicja 8.** *Każdy zbiór  $F$  składający się z  $n$  rozłącznych odcinków możemy oświetlić przy użyciu co najwyżej  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 3$  źródeł światła*

### 3.2.2. Ograniczenie górne

Niech  $F = \{L_1, \dots, L_n\}$  będzie zbiorem  $n$  rozłącznych odcinków. Znajdźmy trójkąt  $T$ , który zawiera wewnątrz wszystkie elementy ze zbioru  $F$  oraz niech

$F'$  będzie zbiorem zawierającym elementy  $F$  oraz trzy odcinki  $L_{n+1}$ ,  $L_{n+2}$ ,  $L_{n+3}$  uzyskane przez skrócenie boków trójkąta  $T$  o  $\epsilon > 0$ . Następnie należy stworzyć rodzinę zbiorów  $H = \{S_1, \dots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}\}$  złożoną z  $n+3$  ściśle wypukłych oraz wzajemnie rozłącznych zbiorów (zbiory mogą się stykać tylko w jednym punkcie – na ich granicach) spełniającą następujące założenia:

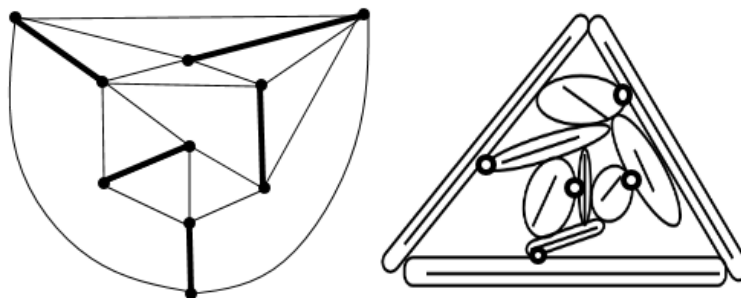
1.  $L_i$  zawiera się w  $S_i$ , gdzie  $i = 1, \dots, n+3$
2. Ilość punktów w których para elementów rodziny  $H$  styka się jest maksymalna



Rysunek 3.5: Trójkąt ze zbioru  $F'$  i rodzina zbiorów  $H$

Możemy łatwo zauważyć, że elementy rodziny  $H$  są styczne z przynajmniej trzema innymi elementami z tego zbioru.

Kolejnym krokiem jest stworzenie grafu  $G$  poprzez zamianę każdego elementu zbioru  $H$  na wierzchołek, przy założeniu, że dwa wierzchołki są sąsiednie jeżeli odpowiadające im zbiory są styczne. Tak stworzony graf jest planarny oraz 2-spójny. Jako, że każdy zbiór rodziny  $H$  jest styczny z co najmniej trzema innymi zbiorami, stopień każdego wierzchołka grafu  $G$  wynosi co najmniej trzy. Zgodnie z twierdzeniem Nishizaki (1977) dla grafu  $G$  istnieje co najmniej skojarzenie  $M = \lceil \frac{n+3+4}{3} \rceil = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$ . Dla każdej pary elementów  $S_i$ ,  $S_j$  skojarzonych w  $M$  przez krawędź  $G$ , należy umieścić źródło światła w punkcie ich przecięcia. W tak wyznaczonym punkcie światło będzie oświetlać odcinki  $L_i$  oraz  $L_j$  zawierające się, odpowiednio w  $S_i$  oraz  $S_j$ . Jako, że skojarzenie



Rysunek 3.6: Graf G oraz źródła światła

$M$  ma przynajmniej  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$  elementów,  $2(\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2)$  elementy ze zbioru  $F$  wymagają  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$  źródeł. W każdym z pozostałych elementów, które nie miały skojarzenia musimy rozmieścić po jednym źródle. W rezultacie uzyskujemy:  $(\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2) + ((n + 3) - 2(\lceil \frac{n+1}{3} \rceil)) = n + 5 - \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil + 3$

### 3.2.3. Ograniczenie dolne

Granica dolna nie jest precyzyjnie określona. Przykładem zbioru dla którego wystarczy  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  źródeł światła jest np. rysunek ?? ze źródłem światła umieszczonym na wewnętrznym odcinku.

### 3.2.4. Luka między ograniczeniem górnym a dolnym

Z racji dużej nieściśłości pomiędzy ograniczeniem górnym a dolnym, znalezienie dokładnego wyniku wciąż jest problemem otwartym. Do tej pory nie udało się znaleźć dowodu chociażby na ograniczenie  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + c$ , gdzie  $c$  jest stałą.

## 3.3. Ukrywanie się za ścianami

### 3.3.1. Wprowadzenie

Po raz pierwszy problem ten przedstawili Hurtado, Serra oraz Urrutia (1996). Zdefiniowali oni problem w następujący sposób.

**Definicja 9.** Rozpatrzmy zbiór rozłącznych odcinków  $F$ . Zbiór punktów  $P$  nazywamy ukrytym w stosunku do  $F$ , jeżeli dowolna linia łącząca dwa punkty ze zbioru  $P$  przecina element zbioru  $F$ .

**Definicja 10.** W każdym ciągu  $n$  liczb istnieje podciąg o długości co najmniej  $\sqrt{n}$ , rosnący lub malejący.

Dla tak zdefiniowanego problemu, korzystając z twierdzenia Erdosa i Szekeresa, uzyskali oni dokładne ograniczenie przez  $\sqrt{n}$ .

**Twierdzenie 4.** Dowolna rodzina  $n$  rozłącznych odcinków posiada zbiór punktów ukrytych o mocy co najmniej  $\sqrt{n}$ .

### 3.3.2. Dowód twierdzenia ??

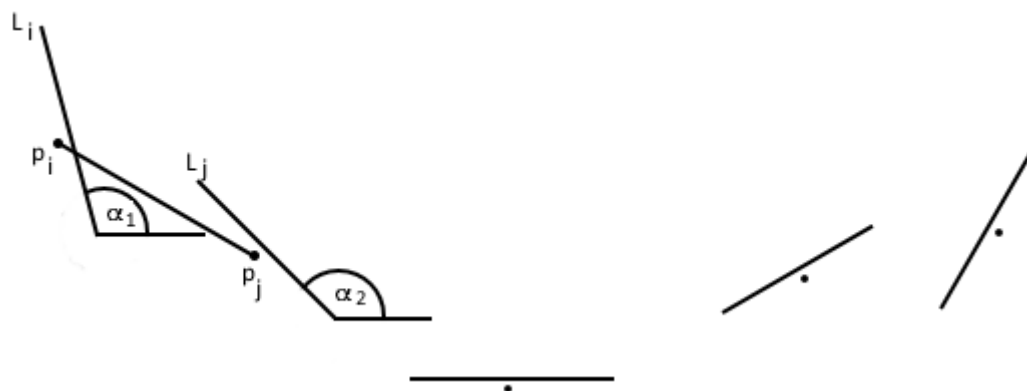
Rozpatrzmy zbiór  $F = \{L_1, \dots, L_n\}$  odcinków takich, że ich rzut na oś  $OX$  tworzy rozłączny zbiór. Przez  $\alpha_i$  oznaczamy nachylenie  $L_i$  dla  $i = 1, \dots, n$  w stosunku do osi  $OX$ .

**Lemat 11.** Jeżeli  $\alpha_1 < \alpha_2, \dots, < \alpha_n$  to  $F$  posiada ukryty zbiór rozmiaru  $n$ .

Dla każdego odcinka  $L_i$  niech punkt  $p_i$  będzie jego środkiem. Wybieramy punkt  $q_i$ , poniżej  $p_i$ , w odległości  $\epsilon$  od  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Następnie zakładamy, że jeżeli  $\epsilon$  jest dostatecznie mały to  $q_1, \dots, q_n$  tworzy zbiór ukryty. Rozpatrzmy dwie liczby całkowite  $i < j$  oraz odcinek  $L_{ij}$  łączący  $p_i$  z  $p_j$ . Jeżeli  $\alpha_i$  jest mniejsze niż nachylenie  $\alpha_{ij}$  odcinka  $L_{ij}$ , wtedy wybierając  $\epsilon$  wystarczająco mały, gwarantujemy, że odcinek łączący  $q_i$  z  $q_j$  przecina  $L_i$ . Jeżeli  $\alpha_i$  jest większe lub równe  $\alpha_{ij}$  to odcinek łączący  $q_i$  z  $q_j$  przetnie  $L_j$ . Obrazuje to rysunek ??

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu twierdzenia ??.

Rozpatrzmy rodzinę  $n$  rozłącznych odcinków. Wybieramy punkt  $p_i$  na każdym z odcinków  $L_i$ , w taki sposób aby współrzędne  $x_1, \dots, x_n$  dla  $p_1, \dots, p_n$  były różne. Możemy założyć, bez straty ogólności, że  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Następnie, dla każdego  $L_i$  wybieramy odcinek  $L'_i$  zawierający się w nim, ze środkiem w punkcie  $p_i$  w taki sposób, że rzut na oś  $OX$   $L'_1, \dots, L'_n$ , tworzy zbiór rozłączny. Rozważmy teraz ciąg nachyleń  $L'_1, \dots, L'_n$ . Zgodnie z def. ?? taki ciąg zawiera



Rysunek 3.7: Zbiór 5 odcinków o rosnącym nachyleniu, który posiada zbiór ukryty o rozmiarze równym 5

podciąg rosnący lub malejący o rozmiarze co najmniej  $\sqrt{n}$ , co biorąc pod uwagę lemat ??, kończy dowód.

## ROZDZIAŁ 4

# K-nadajniki

## 4.1. K-Nadajniki

### 4.1.1. Wprowadzenie

Ilość sieci wifi cały czas rośnie, zarówno w naszych domach jak i w miejscach ogólnodostępnych. Fabila-Monroy, Aichholzer zainspirowani postępującą technologią przedstawili nowy problem, ściśle związany z teorią galerii sztuki. Opracowany przez nich wariant, nazywany „oświetleniem modemowym”, definiuje strażnika jako bezprzewodowy nadajnik o nieskończonym zasięgu oraz możliwości przebicia  $k$  „ścian”. Ściany są zazwyczaj reprezentowane przez odcinki na płaszczyźnie. Problem zdefiniowali następująco:

*Mając dany zbiór przeszkód na płaszczyźnie, liczbę naturalną  $k > 0$  oraz dany obszar, jak wiele nadajników jest potrzebnych oraz koniecznych aby pokryć cały obszar?*

Warto zauważyć, że zagadnienie dla 0-nadajników to klasyczny problem sztuki (strażnicy, którzy nie widzą przez ściany).

W wypadku, gdy wymagamy strzeżenia całej płaszczyzny nadajnik możemy umieścić wewnątrz ściany, co pozwala nadawać po jej obu stronach.

## 4.2. Pokrycie płaszczyzny z przeszkodami

### 4.2.1. Prostopadłe odcinki

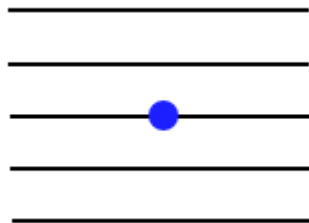
W tym podrozdziale omówię wariant, w którym przeszkodami będzie zbiór  $n$  rozłącznych odcinków prostopadłych a celem będzie pokrycie całej płaszczyzny. Czyżowicz i inni dowiedli, że  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$  0-nadajników zawsze wystarcza a czasami jest koniecznych aby pokryć całą płaszczyznę na której znajduje



się  $n$  rozłącznych prostopadłych odcinków. Ballinger i inni rozszerzyli to ograniczenie dla  $k$ -najdaników.

**Definicja 11.**  $\lceil \frac{5n+6}{12} \rceil$  1-nadajników jest zawsze wystarczających a  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$  czasami koniecznych aby pokryć całą płaszczyznę z  $n$  rozłącznymi odcinkami prostopadłymi.

Łatwo ustalić dolną granicę ponieważ pojedynczy 1-nadajnik może pokryć co najwyżej cztery z  $n + 1$  obszarów, z czego wynika, że  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$  1-nadajników potrzebujemy dla  $n$  lini równoległych.



Rysunek 4.1: 1-nadajnik strzegący 4 obszarów

Ograniczenie górne uzyskamy korzystając z następującego algorytmu:

- ze zbioru wszystkich odcinków  $S$  usunąć odcinki niezależne
- rozmieść 0-nadajniki w pozostałych odcinkach
- zwiększ zasięg przekaźników o jeden

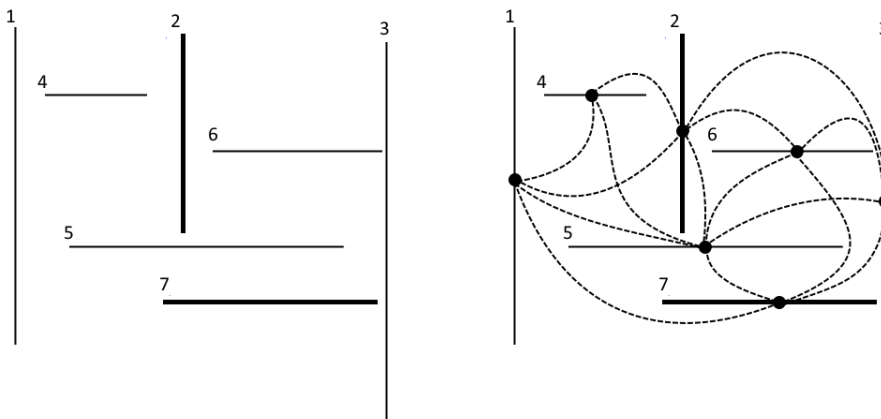
W pierwszym kroku przedłużamy wszystkie odcinki, dopóki się nie przeczną lub nie staną się półprostymi, jednocześnie dzieląc płaszczyznę na  $n + 1$  ścian. Następnie tworzymy graf widzialności  $G(S)$ , w którym każdy odcinek ze zbioru  $S$  jest wierzchołkiem grafu. Krawędzie między wierzchołkami tworzymy jeżeli dwa odcinki  $s$  i  $t$  są słabo widzialne, tzn. istnieją punkty  $p$  należący do odcinka  $s$  oraz  $q$  należący do odcinka  $t$ , które połączone odcinkiem nie przecinają żadnego innego odcinka ze zbioru  $S$ .

**Lemat 12.** *Jeżeli  $I$  jest niezależnym zbiorem w grafie  $G(S)$  a  $T$  jest zbiorem 0-nadajników, które pokrywają całą płaszczyznę  $S - I$ , to  $T$  jest również zbiorem 1-nadajników, które pokrywają całą płaszczyznę  $S$ .*

Założmy, że 0-nadajnik w punkcie  $p$  pokrywa punkt  $q$  na płaszczyźnie  $S - I$ . Odcinek  $pq$  nie może przecinać dwóch lub więcej odcinków ze zbioru  $I$  ponieważ wtedy takie odcinki nie byłyby niezależne. Jednocześnie, odcinek  $pq$  nie przecina żadnego odcinka ze zbioru  $S - I$  a więc 1-nadajnik w punkcie  $p$  pokrywa  $q$  na płaszczyźnie  $S$ .

Aby uzyskać największy możliwy zbiór niezależny w  $G(S)$ , kolorujemy graf  $G(S)$  a następnie wybierzemy najliczniejszą klasę kolorów. Zakładamy, że ściany powstałe przez przedłużenie odcinków w zbiorze  $S$  są prostokątne (w przeciwnym wypadku są trójkątne a więc 4-kolorowalne). Tak powstały graf jest 1-planarny oraz 6-kolorowalny (Ringel, 1965).

**Definicja 12.** *Grafem 1-planarnym nazywamy graf, którego każda z krawędzi może przeciąć inną krawędź co najwyżej raz.*



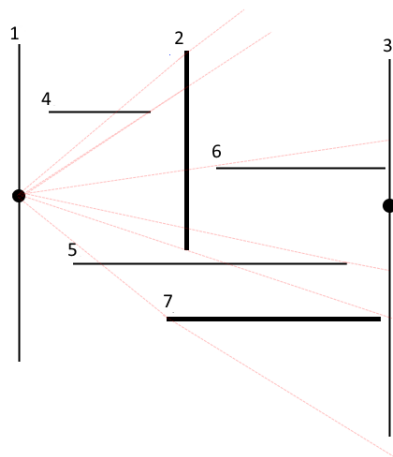
Rysunek 4.2: Zbiór odcinków  $S$  oraz graf  $G(S)$ . Zbiór niezależny został pogrubiony.

rysunek

**Lemat 13.** *Jeżeli  $S$  jest zbiorem przedłużonych odcinków prostopadłych to  $G(S)$  jest 1-planarny.*

Jeżeli przedłużymy każdy odcinek zbioru  $S$  to może on przecinać inny odcinek, co najwyżej w jednym punkcie, ponieważ odcinki są w stosunku do siebie równoległe bądź prostopadłe. Tworząc graf  $G(S)$  zamieniamy odcinki na wierzchołki, łącząc je krawędziami wtedy i tylko wtedy, gdy się przecinają lub są do siebie równoległe. Tak skonstruowany graf przedstawia rysunek ??

Aby uzyskać ograniczenie górne kolorujemy graf  $G(S)$  szczęścioma kolorami. Najliczniejsza klasa kolorów ma więc  $\frac{n}{6}$  elementów oraz tworzy zbiór niezależny  $I$ . Pozostały zbiór  $S - I$  posiada  $\frac{5n}{6}$  odcinków a więc zgodnie z rezultatem Czyżowicza potrzeba  $\lceil \frac{\frac{5n}{6} + 1}{2} \rceil = \lceil \frac{5n+6}{12} \rceil$  0-nadajników, rozmieszczonych na odcinkach zbioru  $S - I$  o tym samym kolorze. Następnie, zgodnie z lematem ?? zwiększamy moc rozmieszczonych nadajników o jeden, co pozwala strzec całą płaszczyznę.



Rysunek 4.3: Pokrycie płaszczyzny 1-nadajnikami.

Pokolorować  
dokładnie

### 4.3. Podział gilotynowy

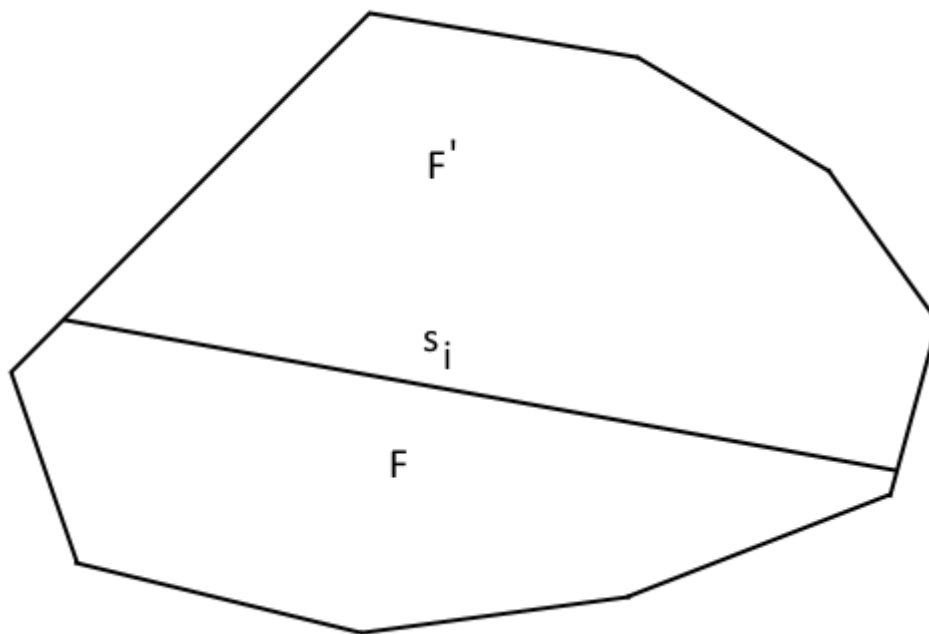
Podział gilotynowy  $S$  otrzymujemy przez dodanie kolekcji  $s_1, \dots, s_n$  odcinków prostych w taki sposób, że każdy dodany odcinek  $s_i$  dzieli dowolną ścianę podzbioru  $S_{i-1}$  na dwie nowe ściany tworząc nowy podział  $S_i$ . Ścianą  $S_0$  nazywamy całą płaszczyznę.

**Twierdzenie 5.** *Dowolny podział gilotynowy możemy pokryć  $\frac{n+1}{2}$  1-nadajnikami.*

Dowód powyższego twierdzenia zaczniemy od lematu:

**Lemat 14.** *Niech  $F$  będzie ścianą podziału gilotynowego  $S$ . Jeżeli każda inna ściana, która dzieli krawędź z  $F$ , posiada wewnątrz 1-nadaajnik to taki zbiór nadaajników pokrywa całą  $F$ .*

Rozpatrzmy odcinek  $s_i$ , którego dodanie tworzy ścianę  $F$ . Przed dodaniem odcinka  $s_i$ , podział  $S_{i-1}$  zawierał jedną ścianę, która została podzielona na dwie części  $F$  oraz  $F'$  przez  $s_i$ . W dalszym procesie ściana  $F$  nie będzie już



Rysunek 4.4: Ściana  $F$  oraz  $F'$  po dodaniu odcinka  $s_i$

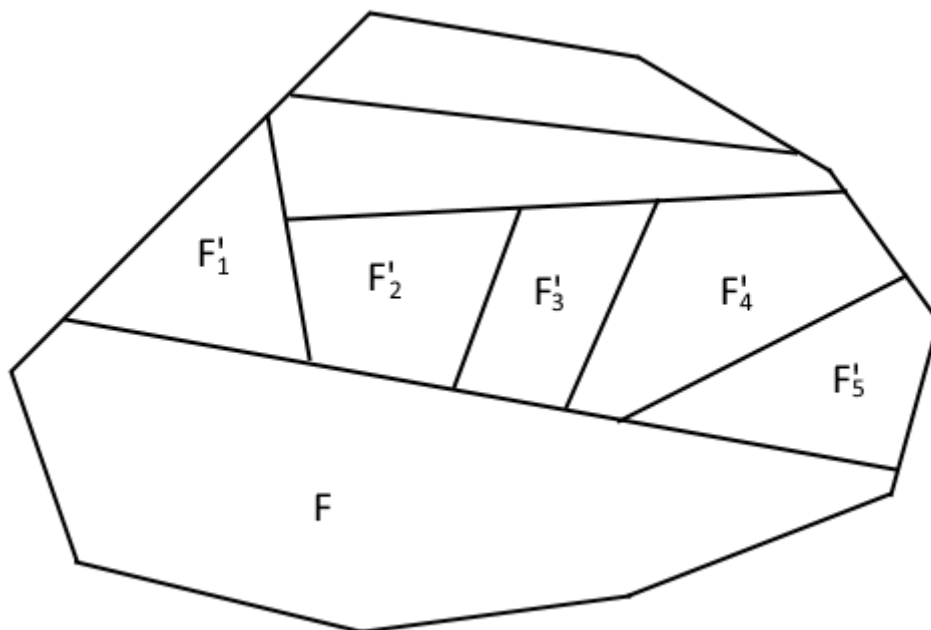
rysunek

dzieloną ale podzielimy ścianę  $F'$  uzyskując kolejne ściany  $F'_1, \dots, F'_k$ , takie, że  $F'_j \subseteq F'$  oraz  $F'_j$  dzieli część odcinka  $s_i$  ze ścianą  $F$  dla każdego  $j \in \{1, \dots, k\}$

rysunek

Zgodnie z lematem ?? 1-nadaajniki umieszczone wewnątrz ścian  $F'_1, \dots, F'_k$  strzegą wnętrza  $F$ .

Aby to udowodnić, tymczasowo usuniemy odcinek  $s_i$ . W ten sposób uzyskamy podział  $S'$ , przedłużając odcinki, którymi wcześniej dokonaliśmy podziału ściany  $F'$ .

Rysunek 4.5: Kolejne podziały ściany  $F'$ 

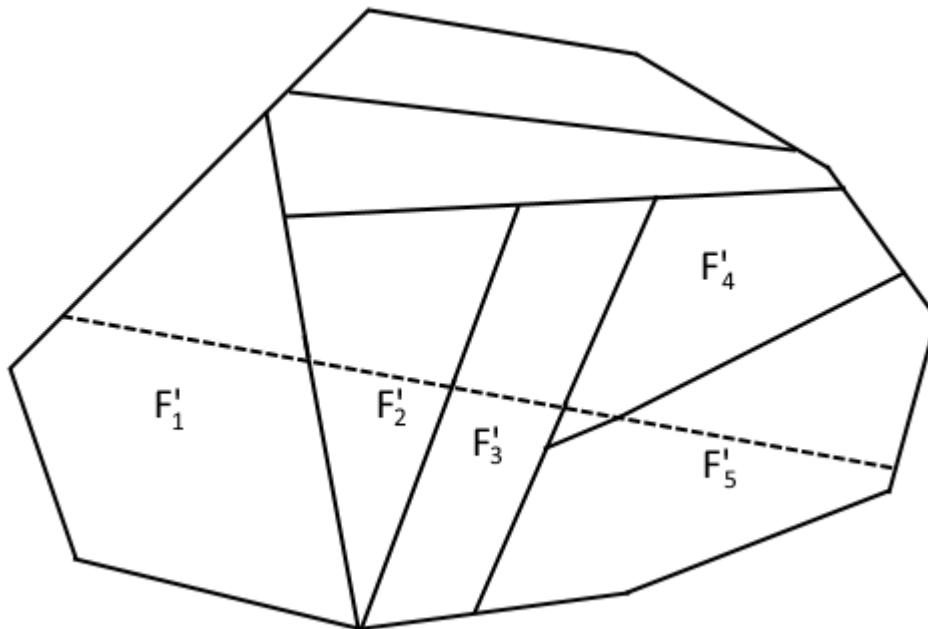
rysunek

Po tej operacji, każda ze ścian  $F'_j$  w  $S$  powiększa się w  $S'$  a dodatkowe części ścian sumują się do  $F$ . Widzimy, że każdy z 1-nadajników rozmieszczonych wewnątrz ścian  $F'_j$  pokrywa przynajmniej  $F'_j$  a więc razem nadajniki  $F'_1, \dots, F'_k$  strzegą ścian  $F$ .

rysunek

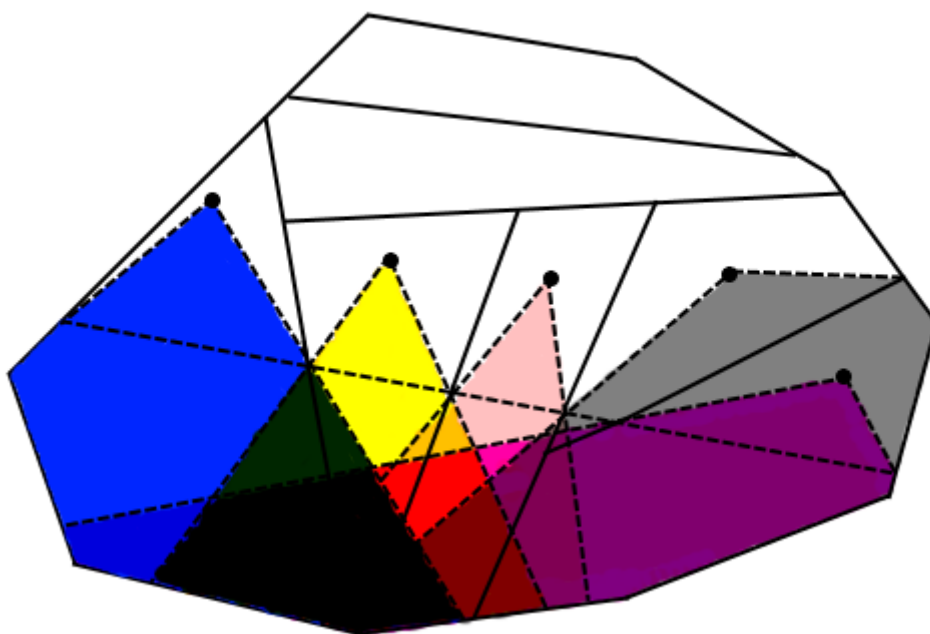
**Twierdzenie 6.** *Dowolny podział gilotynowy strzeże co najwyżej  $\frac{n+1}{2}$  1-nadajników.*

Rozpatrzmy graf dualny  $T$  podziału.  $T$  jest triangulacją o  $n + 1$  krawędziach. Niech  $M$  będzie maksymalnym skojarzeniem w grafie  $T$ . Każda nieskojarzona krawędź jest incydentna tylko z krawędziami skojarzonymi ( w przeciwnym przypadku skojarzenie nie byłoby maksymalne). Niech  $G$  będzie zbiorem 1-nadajników, uzyskanych przez rozmieszczenie ich w pierwszej skojarzonej krawędzi  $e \in M$ . W takim wypadku  $|G| = |M| \leq \frac{n+1}{2}$ . Dla każdej ściany  $F$  z  $S$ ,  $F$  albo zawiera 1-nadajnik w  $G$  albo wszystkie sąsiednie ściany,



Rysunek 4.6: Podział płaszczyzny po usunięciu odcinka  $s_i$

które dzielą krawędź z  $F$  zawierają 1-nadajnik w  $G$ . W pierwszym przypadku  $F$  jest oczywiście strzeżona. Natomiast w drugim przypadku, zgodnie z lematem ??, ściana  $F$  również jest strzeżona. Dlatego  $G$  jest zbiorem 1-nadajników, które strzegą wszystkie ściany  $F$  o mocy co najwyżej  $\frac{n+1}{2}$



Rysunek 4.7: Nadajniki każdej ze ścian strzegące całą ścianę F

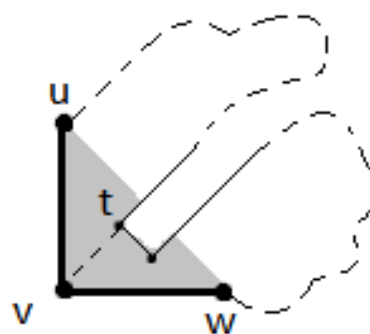
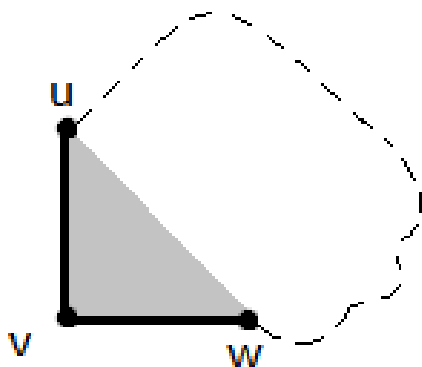
## DODATEK A

# Triangulacja wielokąta

**Lemat 15.** *N-kąt prosty można zawsze podzielić na  $n-2$  trójkątów.*

Dowód przez indukcję po  $n$ :

Jeżeli  $n = 3$  wielokąt jest już podzielony. Załóżmy, że  $n \geq 3$  i rozpatrzmy skrajny lewy wierzchołek  $v$  oraz jego sąsiadów  $u, w$ . W pierwszym przypadku odcinek  $uw$  jest przekątną a w drugim część krawędzi wielokąta  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $uvw$ .



Dla przypadku pierwszego przekątna  $\overline{uw}$  dzieli wielokąt na trójkąt oraz wielokąt prosty o  $n-1$  wierzchołkach na którym wykonujemy kolejny krok indukcji.

W przypadku drugim znajdujemy punkt  $t$ , który znajduje się najdalej od prostej  $uw$ . Odcinek  $\overline{vt}$  musi być przekątną, która dzieli wielokąt na dwa proste wielokąty o  $m$  oraz  $n - m + 2$  wierzchołkach, gdzie  $3 \leq m \leq n-1$  na którym wykonujemy kolejny krok indukcji.

Na mocy lematu tak podzielony wielokąt możemy triangulować przy użyciu  $m-2 + n-m+2-2 = n - 2$  trójkątów



# Bibliografia

Joseph O'Rourke - Art gallery theorems and algorithms

Journal of Combinatorial Theory 18, 39-41 (1975)

Aldo Laurentini - Guardin the walls of an art gallery (The Visual Computer, 1999)

. J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo, N. Santoro, J. Urrutia, and J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. Discrete Applied Math, 50:149–157, 1994.

spis tabel

# Spis tablic

spis rysunków

## Spis rysunków

# Oświadczenie

Ja, niżej podpisany(a) oświadczam, iż przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

.....

data

.....

podpis