

**UNIWERSYTET GDAŃSKI**  
**Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki**

**Jakub Ciechowski**

nr albumu: 186471

# **Problem galerii sztuki dla odcinków na płaszczyźnie**

Praca magisterska na kierunku:

**INFORMATYKA**

Promotor:

**dr hab. Paweł Żyliński**

Gdańsk 2014.9.27

## Streszczenie

W pierwszej części przedstawiam klasyczny problem galerii sztuki wraz z dowodem na oszacowanie liczby strażników potrzebnych do strzeżenia wielokąta prostego o  $n$  wierzchołkach oraz wielokąta o  $h$  dziurach. W kolejnym rozdziale prezentuję dowód na ograniczenie górne oraz dolne dla strzeżenia oraz oświetlenia  $n$  odcinków prostych na płaszczyźnie. Następnie przedstawiam problem zbioru ukrytego w zbiorze rozłącznych odcinków. Kolejnym omówionym zagadnieniem są  $k$ -nadajniki, dla których mając liczbę naturalną  $k > 0$  oraz dany obszar przedstawiam dowód dla wystarczającej oraz koniecznej liczby 1-nadajników. W dalszej części rozdziału omawiam problem podziału gilotynowego wielokąta wraz z ograniczeniem górnym. Następnym zagadnieniem są siatki w dwóch oraz trzech wymiarach wraz z dowodem na minimalną liczbę strażników w siatkach 2D oraz że problem rozmieszczenia strażników w siatkach 3D należy do klasy problemów NP-zupełnych. Na koniec zajmuję się zagadnieniem problemu pościgu i ucieczki w kracie  $n \times n$ , w szczególności omawiam algorytm Dawesa.

## Słowa kluczowe

problem galerii sztuki, strzeżenie odcinków, problem iluminacji,  $k$ -nadajniki, strażnicy w siatkach, pościg i ucieczka w grafie

# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	5
<b>1. Podstawowe pojęcia</b>	7
<b>2. Klasyczny problem galerii sztuki</b>	11
2.1. Twierdzenie Chvátala	11
2.2. Wielokąty z dziurami	13
<b>3. Strzeżenie zbioru odcinków</b>	16
3.1. Strzeżenie zbioru odcinków prostych	16
3.1.1. Ograniczenie górne	17
3.1.2. Ograniczenie dolne	19
3.2. Oświetlanie odcinków	19
3.2.1. Ograniczenie dolne	21
3.3. Ukrywanie się za ścianami	22
<b>4. <math>K</math>-nadajniki</b>	24
4.1. Pokrycie płaszczyzny z przeszkodami	24
4.1.1. Odcinki prostopadłe	24
4.2. Podział gilotynowy	27
<b>5. Strażnicy na siatkach</b>	30
5.1. Siatki 2D	30
5.2. Siatki 3D	32
<b>6. Problem pościgu i ucieczki w grafie</b>	36
6.1. Gra w złodzieja i policjanta	36
6.1.1. Wariant Sugiharu i Suzuki	37
<b>Zakończenie</b>	43

<b>A. Triangulacja wielokąta</b> . . . . .	45
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	48
<b>Oświadczenie</b> . . . . .	50

# Wprowadzenie

Problem galerii sztuki wprowadził Victor Klee w 1973, odpowiadając na prośbę Vaska Chvátala o interesujący problem geometryczny. Zagadnieniem, które zaproponował Klee, było znalezienie minimalnej ilości strażników wystarczających, aby strzec wnętrze pomieszczenia galerii sztuki w kształcie  $n$ -kąta. Niedługo potem Chvátal zaproponował rozwiązanie tego problemu, które szybko zostało nazwane „Teorią galerii sztuki Chvátala”. Od tamtego dnia problem doczekał się wielu różnych wariacji oraz przekształceń. W pracy zajmę się rodziną problemów dotyczących odcinków na płaszczyźnie.

Jednym z takich zagadnień jest strzeżenie zbioru odcinków, które wymaga, aby strzeżony odcinek był widziany przez strażnika przynajmniej w jednym punkcie. Można to zobrazować przez stacjonarnych strażników, którzy rozmieszczeni w odpowiednich punktach zawsze widzą na przykład obraz, przez co uniemożliwiają zdjęcie go ze ściany. Innym ciekawym podejściem do sprawy strzeżenia odcinków jest ich oświetlanie, które rozumiemy przez takie umieszczenie źródła światła, aby każdy punkt należący do odcinka był widoczny z takiego źródła. Rozwiązaniem problemu jest zbiór źródeł światła, które w całości oświetlają każdy odcinek należący do zbioru.

Najbardziej nawiązującym do współczesności wariantem wywodzącym się z klasycznego problemu galerii sztuki jest problem  $k$ -nadaajników. Traktuje on strażnika jako nadajnik o nieskończonym zasięgu oraz określonej mocy. Mając dany zbiór przeszkód oraz znając moc nadajników (tzn. liczbę przeszkód, przez którą nadajnik jest w stanie nadawać) celem jest oszacowanie liczby nadajników pozwalających pokryć obszar zawierający wszystkie przeszkody.

Kolejne zagadnienie wywodzące się z problemu galerii sztuki bazuje na zdegenerowanych wielokątach, a dokładnie na siatkach zarówno dwu jak i trójwymiarowych. Siatką nazywamy spójny zbiór poziomych oraz pionowych odcinków prostych. Problem ten wymaga, aby strażnik znajdował się w każdym z korytarzy siatki. Szacowanie liczby strażników dla siatek dwuwymia-

rowych ściśle wiąże się ze skojarzeniami w grafie, natomiast dla siatek trójwymiarowych decyzyjny problem należy do klasy problemów NP-zupełnych.

Ostatni rozdział łączy w sobie klasyczny problem galerii sztuki oraz elementy teorii grafów. Opisuję w nim wariant gry w policjanta i złodzieja, który wymaga, aby policjant przemieszczający się z ograniczoną prędkością po krawędziach kraty zauważył złodzieja. Krata zdefiniowania jest podobnie jak siatka we wcześniejszym problemie. Zakładamy, że policjant widzi przez całą długość korytarza.

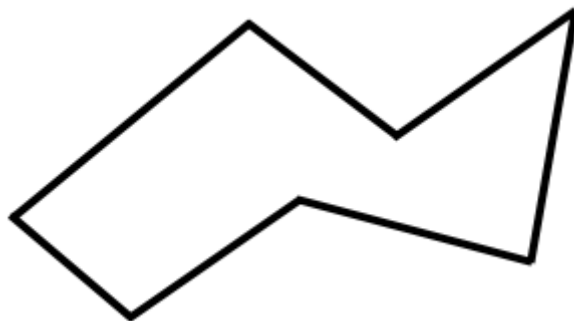
## ROZDZIAŁ 1

# Podstawowe pojęcia

W tym rozdziale znajdują się definicje podstawowych pojęć wymaganych w dalszej części pracy.

### Definicja 1. Wielokąt prosty

Płaska figura składająca się z  $n$  wierzchołków  $v_1, v_2, \dots, v_n$  oraz  $n$  krawędzi  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$  takich, że żadna para krawędzi nie przecina się, za wyjątkiem kolejnych krawędzi, które współdzielą wierzchołek.



Rysunek 1.1: Wielokąt prosty.

### Definicja 2. Graf prosty

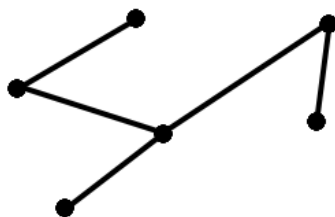
Para  $G = (V, E)$ , gdzie  $V$  jest niepustym skończonym zbiorem wierzchołków, a  $E$  jest skończonym zbiorem krawędzi, tj. różnych 2-elementowych podzbiorów  $V$ .

### Definicja 3. Graf spójny

Graf, którego nie można przedstawić jako sumy dwóch grafów.

### Definicja 4. Suma grafów

Sumą grafów  $G_1 = (V_1, E_1)$  oraz  $G_2 = (V_2, E_2)$ , nazywamy graf  $G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ , którego zbiór wierzchołków i krawędzi tworzą wszystkie wierzchołki i krawędzie tych grafów.



Rysunek 1.2: Spójny graf prosty.

**Definicja 5.** Graf dwudzielny

Graf, którego zbiór wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne zbiory w taki sposób, że żadne dwa wierzchołki z tego samego zbioru nie są połączone krawędzią.

**Definicja 6.** Skojarzenie

*Skojarzeniem* w grafie  $G = (V, E)$  nazywamy zbiór krawędzi  $M \subseteq E$  takich, że każdy wierzchołek z  $G$  jest incydentny co najwyżej z jedną krawędzią z  $M$ . *Najliczniejszym* skojarzeniem nazywamy takie skojarzenie, które ma maksymalną moc.



Rysunek 1.3: Graf dwudzielny o maksymalnym skojarzeniu. Skojarzenie oznaczone jest linią czerwoną.

**Definicja 7.** Spójność grafu

Graf  $G = (V, E)$  jest *niespójny* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją niepuste i rozłączne podzbiory  $V_1, V_2 \subseteq V$  takie, że  $V = V_1 \cup V_2$  i każda z krawędzi grafu  $G$  łączy wierzchołki należące równocześnie do  $V_1$  lub równocześnie do  $V_2$ . Graf  $G = (V, E)$  jest *spójny* wtedy i tylko wtedy, jeśli nie jest niespójny.

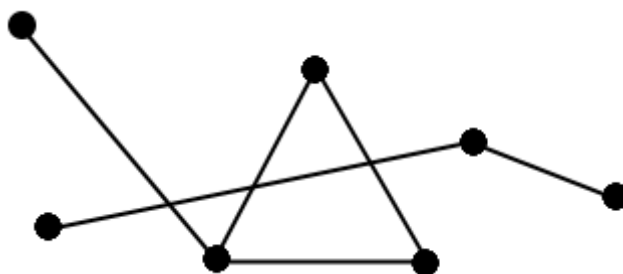


**Definicja 8.** Składowa spójności

Spójny podgraf grafu  $G = (V, E)$  jest jego *składową* spójności wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego nadgraf właściwy będący podgrafem  $G$  jest grafem niespójnym.

**Definicja 9.** Nadgraf

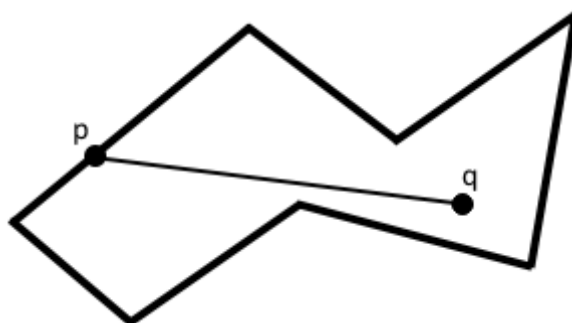
Graf  $H = (V(H), E(H))$  jest *nadgrafem* grafu  $G = (V(G), E(G))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $V(G) \subseteq V(H)$  i  $E(G) \subseteq E(H)$ . Nadgraf  $H$  jest nadgrafem *właściwym*, jeśli  $H \neq G$ .



Rysunek 1.4: Niespójny graf o dwóch składowych spójności.

**Definicja 10.** Strażnik w wielokącie

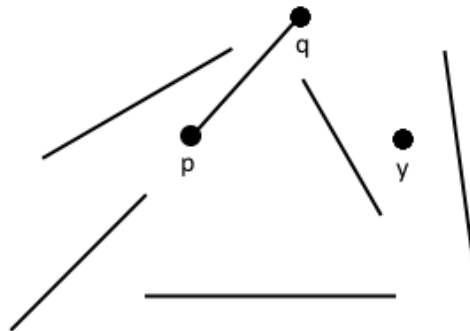
Punkt  $p \in P$  *strzeże* punktu  $q \in P$  wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek  $\overline{pq}$  należy do wielokąta  $P$ .



Rysunek 1.5: Strażnik w wielokącie.

**Definicja 11.** Strażnik na płaszczyźnie

Punkt  $p$  na płaszczyźnie *strzeże* punktu  $q$  wtedy i tylko wtedy, gdy oba punkty można połączyć odcinkiem, który nie przecina wnętrza żadnej z przeszkód.



Rysunek 1.6: Strażnik  $p$  strzeże punktu  $q$ , ale nie strzeże punktu  $y$ .

## ROZDZIAŁ 2

# Klasyczny problem galerii sztuki

## 2.1. Twierdzenie Chvátala

Zgodnie z twierdzeniem Chvátala [8] minimalna liczba strażników potrzebnych do strzeżenia wielokąta prostego o  $n$  wierzchołkach wynosi co najwyżej  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  strażników. Z drugiej strony istnieją  $n$ -kąty, które wymagają dokładnie  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  strażników.

Przedstawię dowód Fiska [15] powyższego twierdzenia, który jest znacznie prostszy od indukcyjnego dowodu Chvátala [8], a bazuje na 3-kolorowaniu odpowiedniego grafu triangulacji.

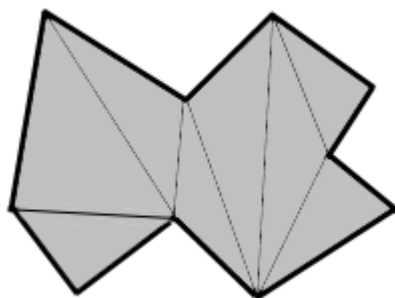
Pierwszym krokiem jest triangulacja wielokąta  $P$  przez dodanie wewnętrznych, nieprzecinających się przekątnych między wierzchołkami, do momentu gdy nie będzie można już dodać więcej przekątnych. Dowód na to, że każdy wielokąt prosty można podzielić na trójkąty, znajduje się w dodatku A. Za wierzchołki i krawędzie grafu triangulacji  $G = (V, E)$  przyjmujemy odpowiednio wierzchołki, krawędzie wielokąta oraz przekątne triangulacji. Jako że graf powstały po triangulacji jest planarny, zgodnie z twierdzeniem o czterech barwach jest 4-kolorowalny [2].

**Definicja 12.**  $K$ -kolorowanie grafu  $G = (V, E)$  to przyporządkowanie takiej dodatniej liczby naturalnej każdemu wierzchołkowi grafu  $G$ , że żadnym dwóm sąsiednim wierzchołkom nie została przypisana taka sama liczba oraz wszystkie liczby są mniejsze bądź równe  $K$ .

**Lemat 1.** [15] *Graf triangulacji wielokąta prostego jest 3-kolorowalny.*

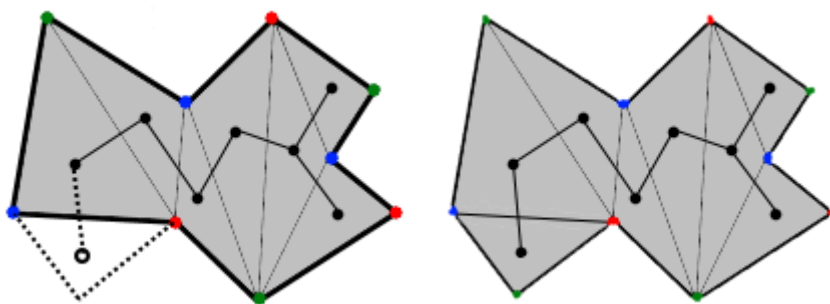
*Dowód.* Dowód polega na indukcji po ilości trójkątów wielokąta po triangulacji. Trójkąt (graf  $K_3$ ) jest przypadkiem bazowym – zawsze można go pokolorować trzema kolorami. Następnym krokiem jest stworzenie grafu du-

alnego dla grafu triangulacji danego wielokąta, który to jest drzewem. Grafem *dualnym*  $G'$  triangulacji  $G = (V, E)$  nazywamy graf, który dla każdej wewnętrznej ściany z grafu  $G$  posiada odpowiadający jej wierzchołek połączony krawędzią z innym wierzchołkiem grafu  $G'$  wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ściany grafu  $G$  są sąsiednie, tzn. współdzielą przekątną triangulacji – patrz rysunek 2.1 i 2.2. Z grafu dualnego usuwamy dowolny



Rysunek 2.1: Wielokąt podzielony na trójkąty.

liść wraz z odpowiadającym mu „trójkątem”, kolorujemy wierzchołki grafu triangulacji (z założenia indukcyjnego jest to możliwe), a następnie dodajemy trójkąt z powrotem nadając usuniętemu wierzchołkowi kolor inny niż używają jego dwaj sąsiedzi, patrz rysunek 2.2.  $\square$

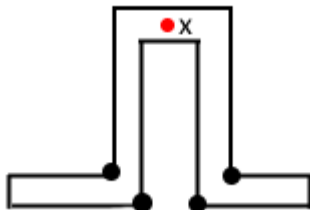


Rysunek 2.2: Pokolorowany graf triangulacji wraz z grafem dualnym.

Strażników rozmieszczamy w tych wierzchołkach, których kolor jest najrzadziej używanym. Zauważmy, że kolor ten występuje co najwyżej  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  razy.

Każdy trójkąt posiada wierzchołek w tym kolorze, a więc każdy z trójkątów jest strzeżony, tym samym i cała galeria.

Ograniczenie „co najwyżej  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ” nie oznacza, że wystarczy rozmieścić strażnika w co trzecim wierzchołku – patrzy rysunek niżej.



Rysunek 2.3: Punkt  $x$  jest niestrzeżony, przy rozmieszczeniu strażników w co trzecim wierzchołku.

## 2.2. Wielokąty z dziurami

Ciekawym rozwinięciem klasycznego problemu galerii sztuki jest wprowadzenie dziur do wnętrza wielokąta.

**Definicja 13.** *Wielokątem z dziurami* nazywamy wielokąt  $P$ , który mieści w sobie wiele innych wielokątów  $H_1, \dots, H_n$  nazywanych *dziurami*. Żaden wielokąt nie może przecinać zarówno krawędzi wielokąta  $P$ , jak i innych wielokątów wewnętrznych  $H_i$ .

Podobnie jak w przypadku wielokątów prostych, również dla wariantu z dziurami, aby obliczyć potrzebną ilość strażników, wykorzystamy triangulację.

**Lemat 2.** [22] *Każdy wielokąt z dziurami można podzielić na trójkąty.*

**Lemat 3.** [22] *Każdy wielokąt  $P$  o  $h$  dziurach oraz  $n$  krawędziach poddany triangulacji dzieli się na  $t = n + 2h - 2$  trójkątów.*

W dowodzie powyższego lematu skorzystam z twierdzenia Eulera.

**Twierdzenie 1.** [9] *Niech  $G$  będzie spójnym grafem płaskim o  $N$  wierzchołkach,  $M$  krawędziach oraz  $F$  ścianach. Wówczas  $N - M + F = 2$ .*

*Dowód lematu.* Korzystając z twierdzenia Eulera mamy  $N$  wierzchołków,  $F = t + h + 1$  ścian (po jednej na każdy trójkąt oraz dziurę i ścianę zewnętrzną) oraz  $E = \frac{3t+n}{2}$  krawędzi (trzy krawędzie na każdy trójkąt plus krawędzie zewnętrzne liczone podwójnie). Wówczas  $V - E + F = 2$ , a więc  $n - \frac{3t+n}{2} + t + h + 1 = 2$ , z czego wynika, że  $t = n + 2h - 2$ .  $\square$

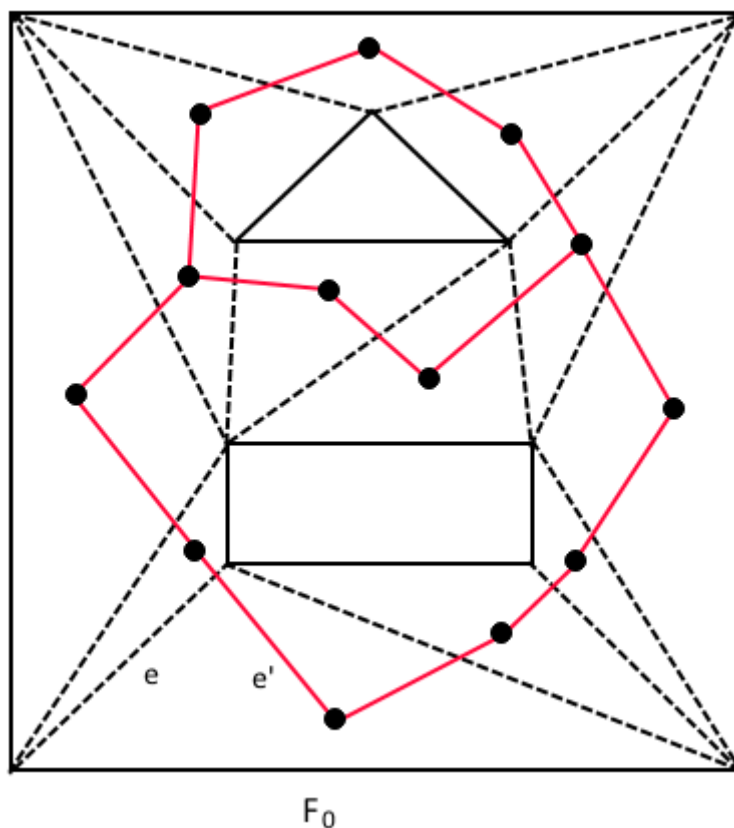
Wiedząc, na ile trójkątów został podzielony wielokąt  $P$ , możemy przejść do twierdzenia oszacowującego wymaganą liczbę strażników.

**Twierdzenie 2.** [22] *Dla wielokąta o  $n$  wierzchołkach oraz  $h$  dziurach  $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$  strażników kombinatorycznych jest wystarczających, aby dominować każdą triangulację wielokąta.*

Przez *dominację triangulacji* rozumiemy zbiór strażników  $C = g_1, \dots, g_k$  taki, że przynajmniej w jednym wierzchołku każdego trójkąta grafu triangulacji znajduje się strażnik  $g_i \in C$  [22].

Główną ideą dowodu jest kolejne usuwanie dziur wielokąta wzdłuż przekątnych dodanych podczas triangulacji, poprzez łączenie ich ze ścianą zewnętrzną. Każda z dziur posiada krawędź w grafie triangulacji  $T$ , która łączy ją z inną dziurą lub z zewnętrzną krawędzią wielokąta  $P$ . „Przecięcie” wzdłuż takiej krawędzi połączy dziurę ze ścianą zewnętrzną lub scali dwie dziury w jedną. W każdym z tych przypadków całkowita ilość dziur zmniejszy się o jeden. Trudność polega jedynie na wyborze krawędzi z  $T$ , które pozwolą uzyskać taki podział, że otrzymany wielokąt jest spójny.

Niech  $T'$  będzie grafem dualnym triangulacji (rysunek 2.4).  $T'$  jest grafem planarnym, stopnia co najwyżej trzy, posiadającym  $h$  graniczących ze sobą skończonych ścian  $F_1, \dots, F_h$ , po jednej na każdą dziurę wielokąta  $P$ . Niech  $F_0$  będzie ścianą zewnętrzną. Wybieramy dowolną ścianę  $F_i$ , która posiada przynajmniej jedną wspólną krawędź  $e$  ze ścianą  $F_0$ . Taka krawędź istnieje, ponieważ w grafie  $T$  musi istnieć przekątna łącząca wierzchołek wielokąta  $P$  z jakąś dziurą – w grafie  $T'$  jest to krawędź  $e$ . Usunięcie krawędzi  $e$  z  $T'$  scala  $F_i$  z  $F_0$ , bez rozspójniania grafu.



Rysunek 2.4: Wielokąt z dziurami wraz z grafem dualnym. Krawędź  $e$  odpowiada krawędzi  $e'$  w grafie dualnym.

Niech  $P'$  będzie grafem triangulacji uzyskanym według powyższej procedury. W takim wypadku  $P'$  posiada  $n + 2h$  wierzchołków oraz  $t$  trójkątów, ponieważ każde cięcie daje nam dwa dodatkowe wierzchołki, ale nie dodaje nowych trójkątów. Zgodnie z twierdzeniem 2,  $P'$  potrzebuje co najwyżej  $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$  strażników.

## ROZDZIAŁ 3

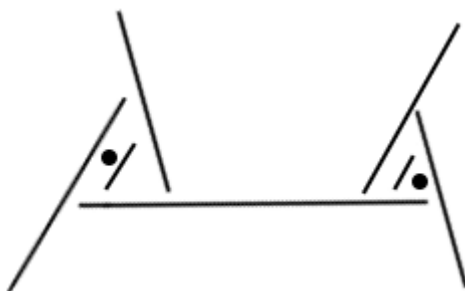
# Strzeżenie zbioru odcinków

### 3.1. Strzeżenie zbioru odcinków prostych

Ten wariant zagadnienia galerii sztuki wymaga, aby strzeżony odcinek był widoczny przez strażnika przynajmniej w jednym jego punkcie.

**Definicja 14.** Niech  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  będzie zbiorem  $n$  odcinków prostych na płaszczyźnie. Zbiór punktów  $Q = \{p_1, \dots, p_k\}$  strzeże  $F$ , jeżeli każdy element  $S_i$  ze zbioru  $F$  zawiera punkt, który jest widziany przez przynajmniej jeden punkt  $p_j$  należący do  $Q$ .

Tak zdefiniowany problem możemy zobrazować przez strażników, którzy strzegą obrazu, jeżeli widzą tylko jego fragment. W takim przypadku nie można zdjąć obrazu ze ściany bez zaalarmowania strażnika.



Rysunek 3.1: Zbiór rozłącznych odcinków wymagający dwóch strażników.

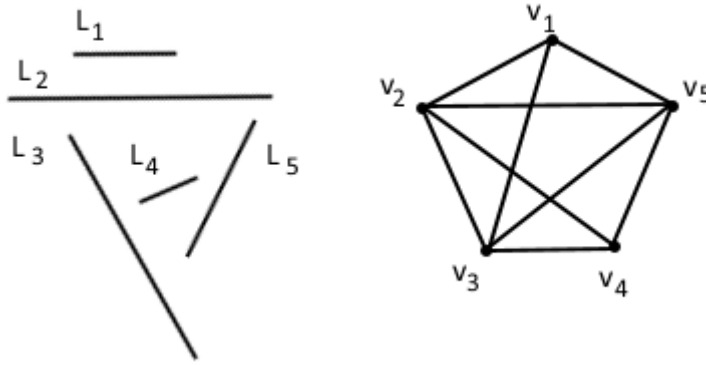
**Twierdzenie 3.** [26] Aby strzec dowolny zbiór  $n$  rozłącznych odcinków prostych czasami potrzeba  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$ , a zawsze wystarcza  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  strażników.



### 3.1.1. Ograniczenie górne

Rozpatrzmy zbiór  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  rozłącznych odcinków prostych na płaszczyźnie oraz graf  $G(F)$  zawierający  $n$  wierzchołków  $v_1, \dots, v_n$  takich, że  $v_i$  jest sąsiedni z  $v_j$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt  $x$  na płaszczyźnie, który widzi przynajmniej jeden punkt na każdym z odcinków  $S_i$  i  $S_j$ , tzn.  $x$  strzeże oba odcinki  $S_i$  oraz  $S_j$  (rysunek 3.2).

Aby udowodnić twierdzenie 3, na początku wykażemy, że dla każdego zbioru  $F$  rozłącznych odcinków prostych, których jest parzysta liczba  $n$ , odpowiednio zdefiniowany graf  $G(F)$  ma *skojarzenie doskonałe*, tzn. takie skojarzenie  $M$ , że każdy z wierzchołków grafu jest incydentny do jakiejś krawędzi z  $M$ .

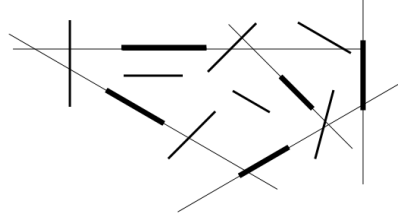


Rysunek 3.2: Zbiór  $F$  rozłącznych odcinków oraz odpowiadający mu graf  $G(F)$ .

Mamy następujący lemat.

**Lemat 4.** [26] *Niech  $Q$  będzie dowolnym wielokątem prostym, a  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  zbiorem  $n$  rozłącznych odcinków. Niech  $H$  będzie podzbiorem elementów  $F$  takich, które przecinają wielokąt  $Q$ . Wówczas podgraf grafu  $G(F)$  indukowany przez wierzchołki  $G(F)$  reprezentujące elementy ze zbioru  $H$  jest spójny.*

Niech  $F = \{S_1, \dots, S_n\}$  będzie zbiorem  $n$  rozłącznych odcinków, a  $G(F)$  odpowiadającym mu grafem. Zakładamy, że  $n$  jest parzyste, w przeciwnym



Rysunek 3.3: Podział zbioru  $F$ . Pogrubione elementy należą do zbioru  $H$ .

wypadku należy dodać jeden odcinek do zbioru  $F$ . Pokażemy teraz, że  $G(F)$  spełnia twierdzenie Tutte'a [25], a więc posiada skojarzenie doskonałe.

**Definicja 15.** Symbolem  $o(G)$  oznaczamy liczbę składowych spójności grafu  $G$ , które posiadają nieparzystą liczbę wierzchołków.

**Twierdzenie 4.** [25] *Spójny graf prosty  $G = (V, E)$  o parzystej liczbie wierzchołków posiada skojarzenie doskonałe wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $S \subseteq V$  zachodzi  $o(G \setminus S) \leq |S|$ .*

Rozważmy dowolny podzbiór  $H$  zbioru  $F$  oraz niech  $S$  będzie zbiorem wierzchołków grafu  $G(F)$  reprezentujących elementy  $H$ . Pokażemy, że liczba składowych spójności grafu  $G(F) \setminus S$  wynosi co najwyżej  $|S| = |H|$ .

Najpierw usuwamy z płaszczyzny wszystkie odcinki, które nie należą do  $H$ . Następnie, jeden po drugim, przedłużamy elementy  $H$  dopóki nie przetną innego elementu  $H$ , wcześniej przedłużonego odcinka lub nie staną się prostymi bądź półprostymi. Niech  $\pi$  oznacza podział płaszczyzny indukowany przez przedłużone elementy zbioru  $H$ . Zauważmy, że  $\pi$  zawiera dokładnie  $|H| + 1$  ścian.

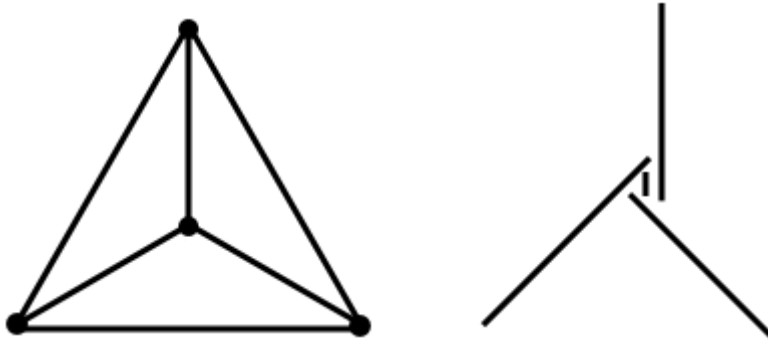
Zgodnie z lematem 4, liczba składowych spójności grafu  $G(F) \setminus S$  jest co najwyżej równa liczbie ścian podziału  $\pi$ , czyli  $|H| + 1$ . Można ponadto wykazać, że występują przynajmniej dwie sąsiednie ściany z  $\pi$  takie, że odcinki, które je przecinają, należą do tej samej składowej spójności w grafie  $G(F) \setminus S$ . Stąd wniosek, że  $o(G(F) \setminus S)$  wynosi co najwyżej  $|H| = |S|$ , co implikuje, że  $G(F)$  ma skojarzenie doskonałe  $M$ . Na tej podstawie możemy stwierdzić, że wystarczy co najwyżej  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  punktów, aby strzec  $F$  – po jednym na każdą krawędź skojarzenia  $M$ .

### 3.1.2. Ograniczenie dolne

Aby uzyskać ograniczenie dolne, należy wskazać  $n$ -elementowy zbiór  $F$ , który wymaga  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  strażników.

Niech  $H$  będzie kubicznym grafem płaskim z trójkątną ścianą zewnętrzną, w której wszystkie wierzchołki, poza zewnętrznymi, spełniają założenie, że wektory wychodzące z wierzchołków wzdłuż krawędzi są liniowo niezależne [24]. Graf  $H$  posiada  $k$  wierzchołków i  $\frac{3k}{2}$  krawędzi.

Zamieńmy krawędzie zbioru  $H$  na odcinki oraz rozłączmy każdy wierzchołek w jego bliskim sąsiedztwie tak, że na każdy z  $k - 3$  wewnętrznych wierzchołków przypada trójkątny obszar, w którym umieszczamy mały odcinek tak, aby utworzyć zbiór  $n = \frac{3k}{2} - 3 + k - 3$  odcinków (rysunek 3.4). Żadne dwa z  $k - 3$  małych odcinków nie są widoczne z jednego punktu, więc  $k - 3$  punktów jest potrzebnych, aby strzec taki zbiór. Możemy łatwo sprawdzić, że  $k - 3$  punktów jest również wystarczające. Równość  $k - 3 = \lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  kończy dowód twierdzenia 3.



Rysunek 3.4: Przekształcenie grafu  $H$ .

## 3.2. Oświetlanie odcinków

Kolejną wariacją strzeżenia odcinków jest ich oświetlanie. Tym razem, aby strzec odcinek, wymagane jest jego całkowite oświetlenie.

**Definicja 16.** Zbiór  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  źródeł światła *oświetla* zbiór odcinków prostych

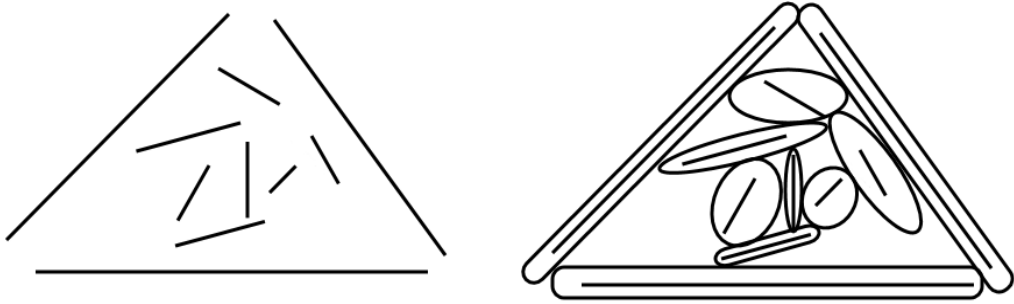
$F$  wtedy i tylko wtedy, jeżeli każdy punkt leżący na odcinku ze zbioru  $F$  jest widzialny z co najmniej jednego punktu z  $S$ .

Należy zwrócić uwagę na fakt, że punkt na odcinku może zostać oświetlony przez promień padający na niego z dowolnej strony odcinka.

**Twierdzenie 5.** [26] *Dowolny zbiór  $F$  składający się z  $n$  rozłącznych odcinków możemy oświetlić przy użyciu co najwyżej  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 3$  źródeł światła.*

*Dowód.* Niech  $F = \{L_1, \dots, L_n\}$  będzie zbiorem  $n$  rozłącznych odcinków. Niech  $T$  będzie trójkątem, który zawiera wewnątrz wszystkie elementy ze zbioru  $F$  oraz niech  $F'$  będzie zbiorem zawierającym elementy  $F$  oraz trzy odcinki  $L_{n+1}$ ,  $L_{n+2}$ ,  $L_{n+3}$  uzyskane przez skrócenie boków trójkąta  $T$  o niewielkie  $\epsilon > 0$ . Następnie, niech  $H = \{S_1, \dots, S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}\}$  będzie rodziną zbiorów złożoną z  $n+3$  ściśle wypukłych oraz wzajemnie wewnętrznie rozłącznych zbiorów (zbiory mogą się stykać tylko w jednym punkcie – na ich granicach) spełniającą następujące założenia (rysunek 3.5).

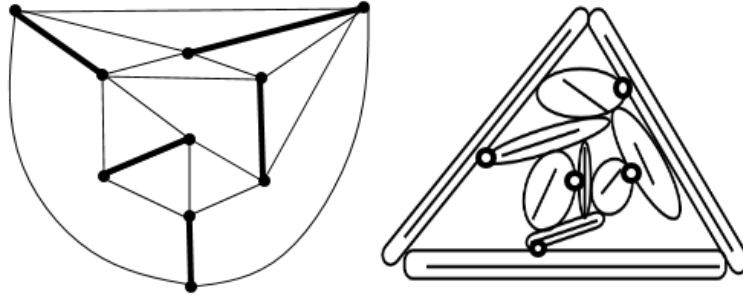
1.  $L_i$  zawiera się w  $S_i$ , gdzie  $i = 1, \dots, n+3$ .
2. Liczba punktów, w których para elementów rodziny  $H$  styka się, jest maksymalna.



Rysunek 3.5: Zbiór  $F'$  i rodzina  $H$  zbiorów.

Zauważmy, że elementy rodziny  $H$  są styczne z przynajmniej trzema innymi elementami z tego zbioru.

Kolejnym krokiem jest stworzenie grafu  $G = (V, E)$  poprzez zamianę każdego elementu zbioru  $H$  na wierzchołek, przy założeniu, że dwa wierzchołki



Rysunek 3.6: Graf G oraz źródła światła

są sąsiednie, jeżeli odpowiadające im zbiory są styczne. Tak stworzony graf jest planarny oraz 2-spójny. Jako że każdy zbiór rodziny  $H$  jest styczny z co najmniej trzema innymi zbiorami, stopień każdego wierzchołka grafu  $G$  wynosi co najmniej trzy. Zgodnie z twierdzeniem Nishizeki [19] dla grafu  $G$  istnieje skojarzenie  $M$  o mocy co najmniej  $\lceil \frac{(n+3)+4}{3} \rceil = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$ . Dla każdej pary elementów  $S_i$  i  $S_j$  skojarzonych w  $M$  przez krawędź  $G$  należy teraz umieścić źródło światła w punkcie ich styczności. W tak wyznaczonym punkcie światło będzie oświetlać odcinki  $L_i$  oraz  $L_j$  zawierające się, odpowiednio, w  $S_i$  oraz  $S_j$ . Jako że skojarzenie  $M$  ma przynajmniej  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$  elementów,  $2(\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2)$  elementy ze zbioru  $F$  pokryte zostaną przez  $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2$  światła. W każdym z pozostałych elementów, które nie miały skojarzenia, musimy dodatkowo rozmieścić po jednym źródle. W rezultacie uzyskujemy:  $(\lceil \frac{n+1}{3} \rceil + 2) + ((n+3) - 2\lceil \frac{n+1}{3} \rceil) = n+5 - \lceil \frac{n+1}{3} \rceil \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil - 3$ .  $\square$

### 3.2.1. Ograniczenie dolne

Znana granica dolna nie jest ścisła. Przykładem zbioru, dla którego potrzeba  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  źródeł światła, jest np. ten z rysunku 3.4 ze źródłem światła umieszczonym na wewnętrznym odcinku. Z racji dużej różnicy pomiędzy ograniczeniem górnym a dolnym, znalezienie dokładnego wyniku wciąż jest interesującym problemem otwartym. Do tej pory nie udało się znaleźć dowodu chociażby na ograniczenie  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + c$ , gdzie  $c$  jest stałą.

### 3.3. Ukrywanie się za ścianami

Po raz pierwszy problem ten przedstawili Hurtado, Serra oraz Urrutia [17]. Zdefiniowali oni problem w następujący sposób.

**Definicja 17.** Zbiór  $P$  punktów nazywamy *ukrytym* w stosunku do zbioru  $F$  rozłącznych odcinków, jeżeli żadne dwa punkty ze zbioru  $P$  nie widzą się nawzajem w sensie definicji 11, ze zbiorem przeszkód  $F$ .

Dla tak zdefiniowanego problemu, korzystając z twierdzenia Erdősa i Szekeresa [12], uzyskali oni oszacowanie dolne przez  $\sqrt{n}$ .

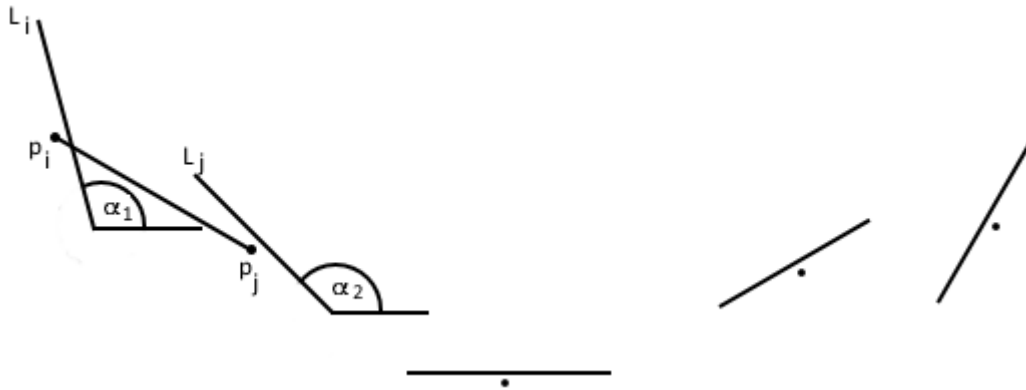
**Twierdzenie 6.** [26] *Dowolna rodzina  $n$  rozłącznych odcinków posiada zbiór punktów ukrytych o mocy co najmniej  $\sqrt{n}$ .*

Rozpatrzmy zbiór  $F = \{L_1, \dots, L_n\}$  odcinków takich, że ich rzut na oś OX tworzy rozłączny zbiór. Przez  $\alpha_i$  oznaczmy nachylenie odcinka  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , w stosunku do osi OX.

**Lemat 5.** [26] *Jeżeli  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ , to  $F$  posiada ukryty zbiór rozmiaru  $n$ .*

*Dowód.* Dla każdego odcinka  $L_i$  niech punkt  $p_i$  będzie jego środkiem. Wybierzmy punkt  $q_i$  poniżej  $p_i$ , w niewielkiej odległości  $\epsilon$  od  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Rozpatrzmy dwie liczby całkowite  $i < j$  oraz odcinek  $L_{ij}$  łączący  $p_i$  z  $p_j$ . Jeżeli  $\alpha_i$  jest mniejsze niż nachylenie  $\alpha_{ij}$  odcinka  $L_{ij}$ , wtedy wybierając  $\epsilon$  wystarczająco małe gwarantujemy, że odcinek łączący  $q_i$  z  $q_j$  przecina  $L_i$ . Jeżeli  $\alpha_i$  jest większe lub równe  $\alpha_{ij}$ , to odcinek łączący  $q_i$  z  $q_j$  przetnie  $L_j$ . Obrazuje to rysunek 3.7. A zatem, jeżeli  $\epsilon$  jest dostatecznie małe, to  $q_1, \dots, q_n$  tworzy zbiór ukryty.  $\square$

Przejdźmy teraz do właściwego dowodu twierdzenia 6. Rozpatrzmy rodzinę  $n$  rozłącznych odcinków. Wybierzmy punkt  $p_i$  na każdym z odcinków  $L_i$  w taki sposób, aby odcięte  $x_1, \dots, x_n$  punktów dla  $p_1, \dots, p_n$  były różne. Możemy założyć bez straty ogólności, że  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Następnie dla każdego  $L_i$  wybierzmy odcinek  $L'_i$  zawierający się w nim, ze środkiem w punkcie  $p_i$ , w taki sposób, że rzuty  $L'_1, \dots, L'_n$  na oś OX, tworzą zbiór rozłączny. Rozważmy



Rysunek 3.7: Zbiór pięciu odcinków o rosnącym nachyleniu, który posiada zbiór ukryty o rozmiarze równym 5.

teraz ciąg nachyleń  $L'_1, \dots, L'_n$ . Taki ciąg zawiera podciąg rosnący lub malejący o rozmiarze co najmniej  $\sqrt{n}$  [26], co biorąc pod uwagę lemat 5, kończy dowód twierdzenia 6.

## ROZDZIAŁ 4

# $K$ -nadajniki

### 4.1. Pokrycie płaszczyzny z przeszkodami

Ilość sieci Wi-Fi cały czas rośnie, zarówno w naszych domach jak i w miejscach ogólnodostępnych. Fabila-Monroy oraz Aichholzer [14] zainspirowani postępującą technologią przedstawili nowy problem, ściśle związany z oryginalnym problemem galerii sztuki. Opracowany przez nich wariant, nazywany „oświetleniem modemowym”, definiuje strażnika jako bezprzewodowy *nadajnik* o nieskończonym zasięgu oraz możliwości przebicia  $k$  „ścian”. Ściany są zazwyczaj reprezentowane przez odcinki na płaszczyźnie. Problem zdefiniowali następująco: *Mając dany zbiór przeszkód na płaszczyźnie, liczbę naturalną  $k > 0$  oraz dany obszar, jak wiele nadajników jest czasami potrzebnych, a zawsze wystarczających, aby pokryć cały obszar?*

Warto zauważyć, że zagadnienie dla 0-nadajników to klasyczny problem galerii sztuki (strażnicy, którzy nie widzą przez ściany).

W wypadku, gdy wymagamy strzeżenia całej płaszczyzny, zakładamy, że nadajnik możemy umieścić wewnątrz ściany, co pozwala nadawać po jej obu stronach.

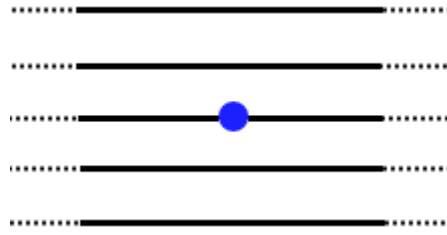
#### 4.1.1. Odcinki prostopadłe

W tym podrozdziale omówię wariant, w którym przeszkodami będzie zbiór  $n$  rozłącznych odcinków prostopadłych, a celem będzie pokrycie całej płaszczyzny. Czyzowicz i inni [10] dowiedli, że  $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$  0-nadajników zawsze wystarcza, a czasami jest koniecznych, aby pokryć całą płaszczyznę, na której znajduje się  $n$  rozłącznych prostopadłych odcinków. Ballinger i inni [5] rozszerzyli to ograniczenie dla  $k$ -nadajników.



**Twierdzenie 7.** [5]  $\lceil \frac{5n+6}{12} \rceil$  1-nadajników jest zawsze wystarczających, a  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$  czasami koniecznych, aby pokryć całą płaszczyznę z  $n$  rozłącznymi odcinkami prostymi.

W oparciu o rysunek 4.1 łatwo wykazać dolną granicę, ponieważ pojedynczy 1-nadajnik może pokryć co najwyżej cztery z  $n+1$  obszarów, z czego wynika, że potrzebujemy  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$  1-nadajników dla  $n$  prostych równoległych.



Rysunek 4.1: 1-nadajnik strzegący czterech obszarów z sześciu.

Ograniczenie górne uzyskamy korzystając z następującego algorytmu:

- ze zbioru  $S$  wszystkich odcinków usuń odcinki „niezależne”;
- rozmieść 0-nadajniki;
- zwiększ zasięg nadajników o jeden.

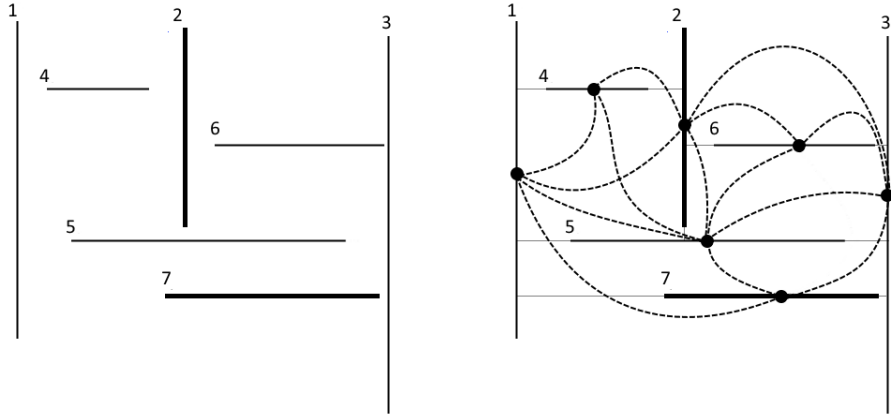
W pierwszym kroku przedłużamy wszystkie odcinki sekwencyjnie, dopóki się nie przetną lub nie staną się półprostymi, jednocześnie dzieląc płaszczyznę na  $n+1$  ścian. Następnie tworzymy graf widzialności  $G(S)$ , w którym każdy odcinek ze zbioru  $S$  jest wierzchołkiem grafu. Krawędzie między wierzchołkami  $s$  i  $t$  tworzymy, jeżeli dwa odcinki  $s$  i  $t$  są słabo widzialne, tzn. istnieją punkty  $p$  należący do odcinka  $s$  oraz  $q$  należący do odcinka  $t$  takie, że odcinek  $\overline{pq}$  nie przecina żadnego innego odcinka ze zbioru  $S$ .

**Lemat 6.** [5] Jeżeli  $I$  jest zbiorem niezależnym w grafie  $G(S)$ , a  $T$  jest zbiorem 0-nadajników, które pokrywają całą płaszczyznę ze zbiorem przeszkód  $S \setminus I$ , to  $T$  jest również zbiorem 1-nadajników, które pokrywają całą płaszczyznę ze zbiorem przeszkód  $S$ .

*Dowód.* Załóżmy, że 0-nadaajnik w punkcie  $p$  pokrywa punkt  $q$  na płaszczyźnie ze zbiorem przeszkód  $S \setminus I$ . Odcinek  $\overline{pq}$  nie może przecinać dwóch lub więcej odcinków ze zbioru  $I$ , ponieważ wtedy takie odcinki nie byłyby niezależne. Jednocześnie, odcinek  $\overline{pq}$  nie przecina żadnego odcinka ze zbioru  $S \setminus I$ , a więc 1-nadaajnik w punkcie  $p$  pokrywa  $q$  na płaszczyźnie ze zbiorem przeszkód  $S$ .  $\square$

Aby uzyskać możliwie liczny zbiór niezależny w  $G(S)$ , kolorujemy wierzchołki grafu  $G(S)$ , a następnie wybieramy najliczniejszą klasę kolorów. Zauważmy, że ściany powstałe przez przedłużenie odcinków w zbiorze  $S$  są prostokątne (gdyby były trójkątne, to graf  $G(S)$  byłby planarny, a więc 4-kolorowalny). Tak powstały graf jest 1-planarny oraz 6-kolorowalny [7].

**Definicja 18.** Grafem *1-planarnym* nazywamy graf, którego każda z krawędzi może przeciąć inną krawędź co najwyżej raz.

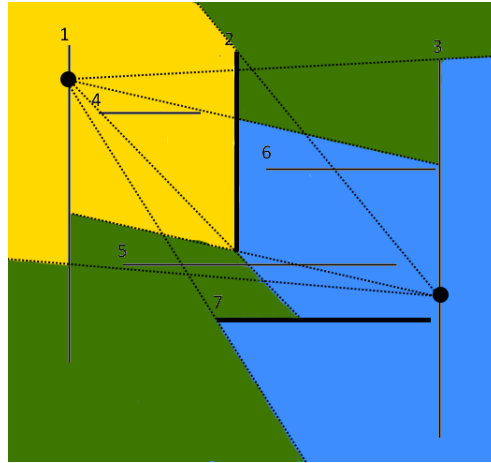


Rysunek 4.2: Zbiór  $S$  odcinków oraz graf  $G(S)$ . Zbiór niezależny został pogrubiony.

**Lemat 7.** [5] *Jeżeli  $S$  jest zbiorem przedłużonych odcinków prostopadłych, to  $G(S)$  jest 1-planarny.*

Aby uzyskać ograniczenie górne, kolorujemy graf  $G(S)$  sześcioma kolorami. Najliczniejsza klasa kolorów ma więc nie mniej niż  $\frac{n}{6}$  elementów oraz

tworzy zbiór niezależny  $I$ . Pozostały zbiór  $S \setminus I$  posiada  $\frac{5n}{6}$  odcinków, a więc zgodnie z rezultatem Czyżowicza wystarczy co najwyżej  $\lceil \frac{\frac{5n}{6}+1}{2} \rceil = \lceil \frac{5n+6}{12} \rceil$  0-nadajników, rozmieszczonych na odcinkach zbioru  $S \setminus I$ . Następnie, zgodnie z lematem 6, zwiększamy moc rozmieszczonych nadajników o jeden, co pozwala strzec całą płaszczyznę ze zbiorem przeszkód  $S$ .



Rysunek 4.3: Pokrycie płaszczyzny dwoma 1-nadajnikami.

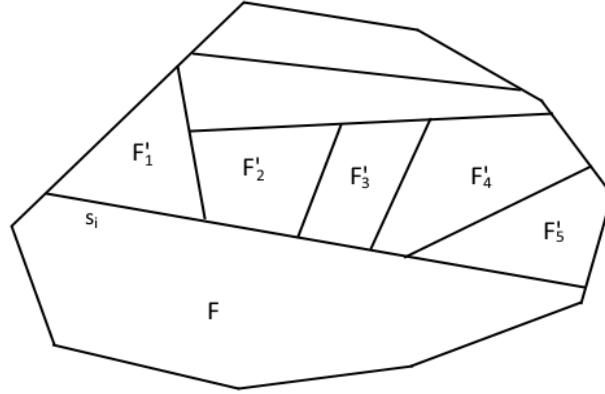
## 4.2. Podział gilotynowy

Podział gilotynowy  $S$  płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  otrzymujemy przez dodanie kolejno  $s_1, \dots, s_n$  odcinków prostych w taki sposób, że każdy dodany odcinek  $s_i$  dzieli dowolną ścianę podzbioru  $S_{i-1}$  na dwie nowe ściany tworząc nowy podział  $S_i$ . Za ścianę  $S_0$  przyjmujemy całą płaszczyznę. Zauważmy, że ściany podziału gilotynowego są wypukłe.

**Lemat 8.** [5] *Niech  $F$  będzie ścianą podziału gilotynowego  $S$ . Jeżeli każda inna ściana, która współdzieli krawędź ze ścianą  $F$ , posiada wewnątrz 1-nadajnik, to taki zbiór nadajników pokrywa całą ścianę  $F$ .*

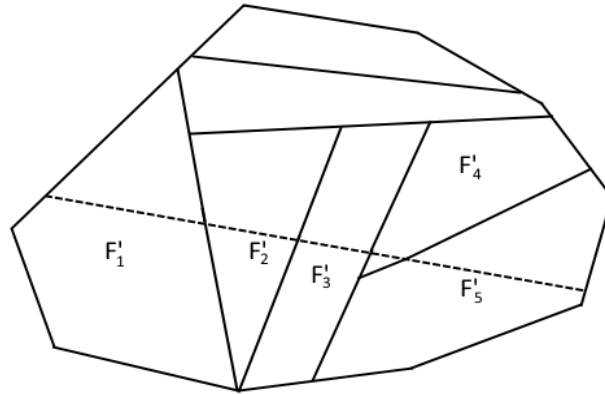
*Dowód.* Rozpatrzmy odcinek  $s_i$ , którego dodanie tworzy ścianę  $F$ . Przed dodaniem odcinka  $s_i$  podział  $S_{i-1}$  zawierał jedną ścianę, która została podzielona na dwie części  $F$  oraz  $F'$  przez  $s_i$ .

W dalszym procesie ściana  $F$  nie będzie już dzielona, ale możemy podzielić ścianę  $F'$  uzyskując kolejne ściany  $F'_1, \dots, F'_k$ , takie, że  $F'_j \subseteq F'$  oraz  $F'_j$  dzieli część odcinka  $s_i$  ze ścianą  $F$  dla każdego  $j \in \{1, \dots, k\}$  (rysunek 4.4).



Rysunek 4.4: Kolejne podziały ściany  $F'$ .

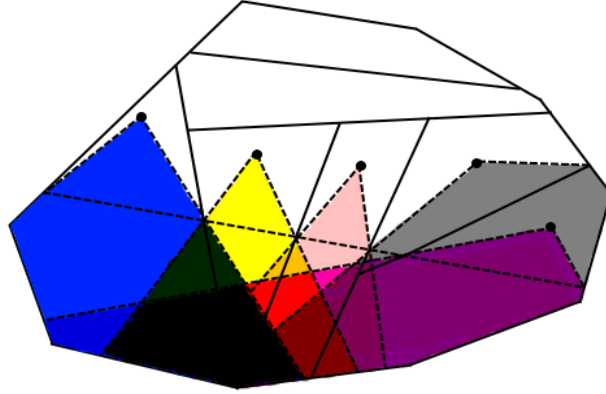
Tymczasowo usuńmy odcinek  $s_i$ . W ten sposób uzyskaliśmy podział  $S'$ , przedłużając odcinki, którymi wcześniej dokonaliśmy podziału ściany  $F'$  (rysunek 4.5).



Rysunek 4.5: Podział płaszczyzny po usunięciu odcinka  $s_i$ .

Po tej operacji każda ze ścian  $F'_j$  w  $F$  powiększa się w  $S'$ , a dodatkowe części ścian sumują się do  $F$ . Widzimy, że każdy z 1-nadajników rozmiesz-

czonych wewnątrz ścian  $F_j$  pokrywa przynajmniej obszar ściany  $F'_j$ , a więc razem nadajniki w  $F_1, \dots, F_k$  pokryją ścianę  $F$  (rysunek 4.6).  $\square$



Rysunek 4.6: Nadajniki każdej ze ścian strzegące całą ścianę  $F$ .

**Twierdzenie 8.** [5] *Dowolny podział gilotynowy możemy strzec przez co najwyżej  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  1-nadajników.*

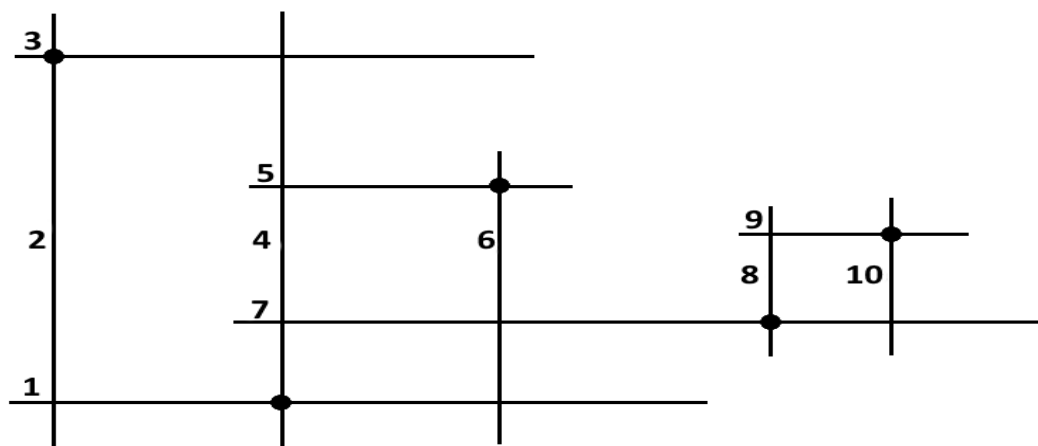
*poprawić z kartkami*

*Dowód.* Rozpatrzmy graf dualny  $T$  podziału.  $T$  jest triangulacją o  $n + 1$  wierzchołkach. Niech  $M$  będzie maksymalnym skojarzeniem w grafie  $T$ . Każdy nieskojarzony wierzchołek jest sąsiedni tylko do wierzchołków skojarzonych (w przeciwnym wypadku skojarzenie nie byłoby maksymalne). Niech  $G$  będzie zbiorem 1-nadajników uzyskanych przez rozmieszczenie ich na krawędziach podziału odpowiadającym krawędziom z  $M$ . W takim wypadku  $|G| = |M| \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Dla każdej ściany  $F$  z  $S$ ,  $F$  albo zawiera 1-nadajnik w  $G$  albo wszystkie sąsiednie ściany, które dzielą krawędź z  $F$ , zawierają 1-nadajnik w  $G$ . W pierwszym przypadku  $F$  jest oczywiście strzeżona. Natomiast w drugim przypadku, zgodnie z lematem 8, ściana  $F$  również jest strzeżona. Dlatego  $G$  jest zbiorem 1-nadajników, które strzegą wszystkie ściany i  $|G| \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .  $\square$

## Strażnicy na siatkach

### 5.1. Siatki 2D

W 1986 roku Simeon Ntafos przedstawił koncept strażników strzegących specjalnej klasy wielokątów – siatek [20]. Przez *siatkę* rozumiemy spójny zbiór punktów należących do poziomych oraz pionowych odcinków prostych (rysunek 5.1). Możemy na nią spojrzeć jak na wielokąt prostokątny z dziurami, który składa się z bardzo cienkich korytarzy. Strażnik będący w punkcie  $x$  siatki  $P$  *widzi* punkt  $y$  siatki  $P$ , jeżeli odcinek  $xy$  należy do siatki  $P$  (czyli zawiera się w korytarzu siatki).

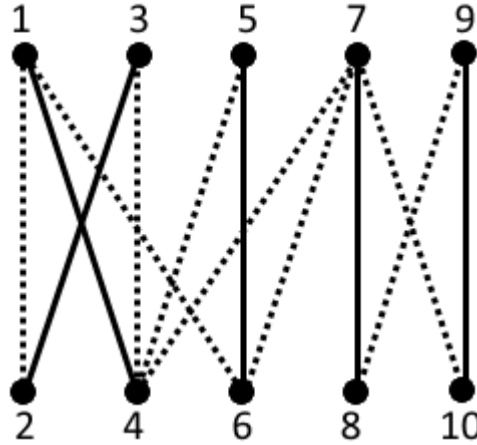


Rysunek 5.1: Siatka strzeżona przez pięciu strażników.

**Twierdzenie 9.** [20] *Minimalna liczba strażników potrzebna, aby strzec siatkę o  $n$  odcinkach wynosi  $n - m$ , gdzie  $m$  to moc najliczniejszego skojarzenia w grafie przecięć siatki, które można znaleźć w czasie  $\theta(n^{2.5})$ .*

Ntafos zaproponował elegancki algorytm, aby znaleźć minimalną liczbę strażników potrzebną do strzeżenia siatki.

*Dowód.* Aby strzec całej siatki, przynajmniej jeden strażnik musi znajdować się w każdym korytarzu. Niech  $G(P)$  będzie grafem przecięć siatki  $P$ , w którym każdy wierzchołek z grafu  $G$  odpowiada maksymalnemu odcinkowi z  $P$ , a dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im odcinki przecinają się.



Rysunek 5.2: Graf przecięć siatki. Skojarzenie oznaczono linią ciągłą.

Najliczniejsze skojarzenie dla dowolnego grafu  $G = (V, E)$  można znaleźć w czasie  $O(|V|^{2.5})$  [13]. Jako że graf  $G(P)$  jest dwudzielny, ponieważ przecięcia występują tylko pomiędzy korytarzami pionowymi i poziomymi, problem znalezienia najliczniejszego skojarzenia sprowadza się do problemu kojarzenia małżeństw, który da się rozwiązać w czasie  $O(|V|^{1/2}|E|)$ , gdzie  $V$  to zbiór wierzchołków, a  $E$  to zbiór krawędzi w grafie dwudzielnym [13]. Dla siatki o  $n$  odcinkach mamy  $|V| = n$ , a maksymalna ilość krawędzi to  $|E| = O(n^2)$ , więc w najgorszym przypadku najliczniejsze skojarzenie znajdziemy w czasie  $O(n^{2.5})$ .

Aby strzec siatkę w całości, każdy odcinek wymaga strażnika, a więc rozmieszczenie ich na przecięciach korytarzy pozwala strzec co najwyżej dwa odcinki. Stąd uzyskujemy minimalną liczbę strażników wynoszącą  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  dla siatki o  $n$  odcinkach. Jeżeli graf posiada skojarzenie doskonałe o rozmiarze  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ , wtedy taka sama ilość strażników jest wystarczająca. Należy ich rozmieścić w każdym przecięciu korytarzy odpowiadającemu skojarzeniu w grafie.

Jeżeli najliczniejsze skojarzenie ma moc  $m$ , wtedy rozmieszczenie w odpowiadających im przecięciach strzeże  $2m$  odcinków. W każdym z pozostałych  $n - 2m$  odcinków musi zostać umieszczony jeden strażnik, co w sumie daje nam  $m + n - 2m = n - m$  strażników. Jest to jednocześnie dolne ograniczenie: jeżeli mniej niż  $n - m$  strażników wystarcza, wtedy więcej niż  $m$  strażników musi kryć po dwa odcinki każdy, a to daje nam skojarzenie o rozmiarze większym niż  $m$ , co nie jest możliwe.  $\square$

## 5.2. Siatki 3D

Ntafos przedstawił również zagadnienie strzeżenia siatki w trzech wymiarach, które należy do klasy problemów NP-zupełnych [20]. Dowód opiera się na redukcji do problemu pokrycia wierzchołkowego grafu stopnia co najwyżej trzy, który to problem należy do klasy problemów NP-zupełnych [16].

**Definicja 19.** *Pokryciem wierzchołkowym* grafu  $G = (V, E)$  nazywamy podzbiór  $V_0 \subseteq V$  takich wierzchołków grafu, że każda krawędź z  $G$  jest incydentna z przynajmniej jednym wierzchołkiem z  $V_0$ .

Naszym celem jest stworzenie trójwymiarowej siatki  $P$ , którą możemy pokryć co najwyżej  $g(K)$  strażnikami wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pokrycie wierzchołkowe  $G$  o mocy co najwyżej  $K$ . W tym celu etykietujemy wszystkie wierzchołki grafu  $G = (V, E)$  kolejnymi liczbami  $1, 2, \dots, n = |V|$ . Następnie przypisujemy wierzchołki punktom siatki wzdłuż prostej poprowadzonej przez punkty  $(0, 0, 0)$  i  $(1, 1, 1)$  tak, aby każdy wierzchołek  $i$  otrzymał punkt siatki  $v_i = (3i, 3i, 3i)$ . Krawędzie  $G$  reprezentowane są przez odcinki łączące węzły siatki. Jako że każdy wierzchołek grafu  $G$  jest stopnia co najwyżej trzy, każdej incydentnej krawędzi możemy przypisać jeden z kierunków  $(x, y, z)$ .

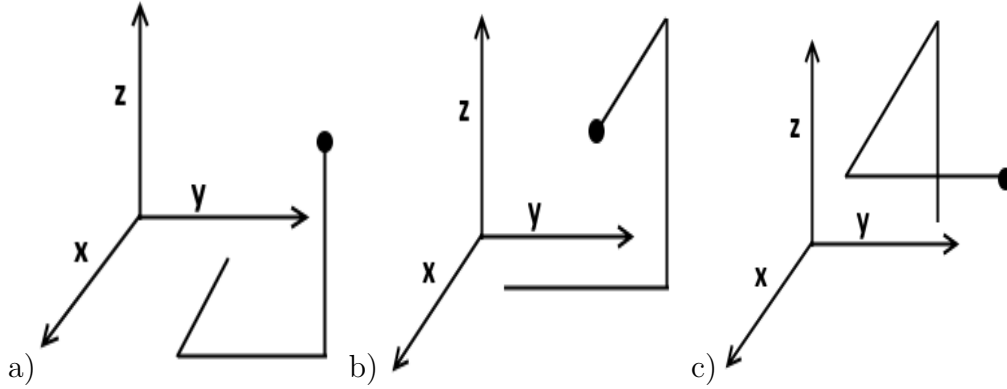
Założmy teraz, że wszystkie krawędzie incydentne z wierzchołkami  $1, \dots, i - 1$  grafu  $G$  zostały przypisane do ścieżek siatki  $P$  oraz rozpatrzmy krawędź  $\{i, j\}, i < j$ . Przyjmujemy, że ścieżka z  $v_i$  do  $v_j$ , dla  $i < j$ , wychodzi z  $v_i$  dodatnią osią  $+x, +y$  lub  $+z$ , a wchodzi do  $v_j$  ujemną osią  $-x, -y$  lub  $-z$ . Skoro stopień wierzchołka  $i$  wynosi co najwyżej trzy, jedna z trzech osi  $+x, +y$  lub  $+z$  rozpoczynająca się w  $(3i, 3i, 3i)$  nie zawiera ścieżki



dotychczas skonstruowanej siatki  $P$ . Załóżmy, że oś  $+x$  jest wolna. W takim wypadku łączymy  $v_i = (3i, 3i, 3i)$  z  $v_j = (3j, 3j, 3j)$  trzema odcinkami:

- $(3i, 3i, 3i) \rightarrow (3j, 3i, 3i)$ ;
- $(3j, 3i, 3i) \rightarrow (3j, 3j, 3i)$ ;
- $(3j, 3j, 3i) \rightarrow (3j, 3j, 3j)$ .

Oczywiście powyższe odcinki nie mogą przecinać się z żadnymi już istniejącymi ścieżkami. Przykład takiego połączenia widać na rysunku 5.3 w przypadku, gdy wolna jest oś  $+x$ ,  $+y$  lub  $+z$ .

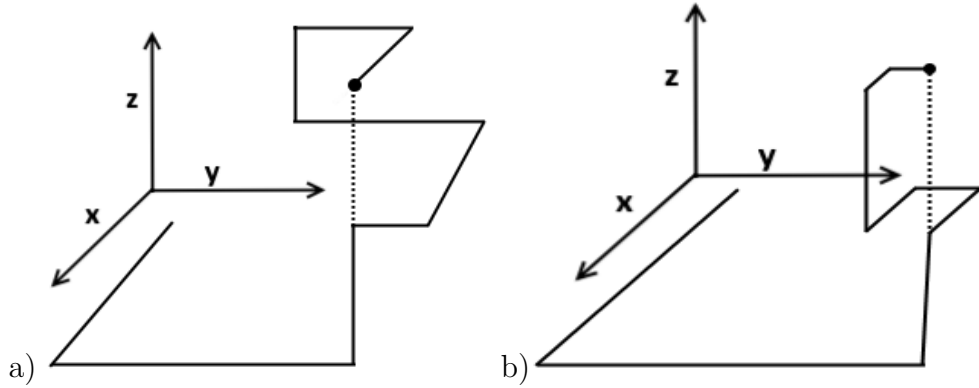


Rysunek 5.3: Nowo powstałe ścieżki w przypadku wolnych osi  $+x$ ,  $+y$  lub  $+z$ .

Zajmiemy się teraz przypadkiem, w którym fragment ścieżki pomiędzy węzłami  $v_i$  i  $v_j$  nakłada się ze ścieżką łączącą  $v_k$  z  $v_j$  wzdłuż osi  $-z$ , dla  $k < i < j$ . W takiej sytuacji przynajmniej jedna z osi  $-x$  lub  $-y$  musi być wolna. Jeżeli jest to oś  $-x$ , zmieniamy ścieżkę zgodnie z rysunkiem 5.4(a), jeżeli  $-y$ , to wtedy musimy poprawić ścieżkę zgodnie z rysunkiem 5.4(b). Analogicznych operacji dokonamy, jeżeli zajęta będzie oś  $-x$  i  $-y$ .

Tak powstała krawędź składa się z dziewięciu odcinków. W przypadku, gdy znajdzie potrzeba ominięcia jeszcze jednej krawędzi, uzyskamy ścieżkę składającą się z 15 odcinków [22].

Po stworzeniu siatki wg powyższego opisu uzyskamy w sumie  $e = e_3 + e_9 + e_{15}$  krawędzi grafu  $G$ , gdzie, odpowiednio,  $e_3$  jest liczbą krawędzi, którym



Rysunek 5.4: Omijanie zajętej ścieżki w przypadku wolnej osi  $-x$  oraz  $-y$

odpowiadają ścieżki złożone z 3 odcinków,  $e_9$  – z 9 odcinków oraz  $e_{15}$  – z 15 odcinków.

**Lemat 9.** [22] *Pokrycie wierzchołkowe grafu  $G$  o rozmiarze  $K$  istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pokrycie siatki  $P$  powstałej wg powyższej konstrukcji przez  $g = K + e_3 + 4e_9 + 7e_{15}$  strażników.*

*Dowód.*

poprawić z kartkami

Założmy, że istnieje pokrycie wierzchołkowe  $C$  grafu  $G$  o rozmiarze  $K$ . Rozmieścimy strażnika w każdym przecięciu siatki  $P$ , które odpowiada wierzchołkowi w  $C$ . Niech  $p_3$  będzie ścieżką złożoną z trzech odcinków w  $P$  pomiędzy  $v_i$  a  $v_j$ . Ponieważ  $C$  jest pokryciem wierzchołkowym, przynajmniej w jednym z węzłów  $v_i$  lub  $v_j$  znajduje się strażnik, a więc potrzebujemy jeszcze jednego strażnika, aby strzec całą  $p_3$ . Podobna sytuacja występuje dla 9-elementowej ścieżki  $p_9$  pomiędzy  $v_i$  oraz  $v_j$ . Jeden z węzłów  $v_i$  lub  $v_j$  jest już strzeżony, więc dodatkowo potrzebujemy czterech strażników. Dla 15-elementowej ścieżki  $p_{15}$  potrzebujemy siedmiu dodatkowych strażników, co w rezultacie daje nam  $K + e_3 + 4e_9 + 7e_{15}$  strażników.

Założmy teraz, że aby strzec siatkę  $P$  wystarczy  $K + e_3 + 4e_9 + 7e_{15}$  strażników. Każda z 3-elementowych ścieżek wymaga jednego strażnika w wewnętrznym rogu. Ścieżka złożona z dziewięciu odcinków wymaga czterech strażników rozmieszczonych w wewnętrznych rogach, a 15-odcinkowa – siedmiu. Stąd uzyskujemy sumę  $e_3 + 4e_9 + 7e_{15}$  strażników rozmieszczonych w

miejscach innych niż punkty siatki, którym odpowiadają wierzchołki grafu  $G$ . Pozostało nam jeszcze  $K$  strażników, których możemy umieścić tylko w punktach siatki odpowiadających wierzchołkom grafu  $G$ . Załóżmy więc, że strażnicy rozmieszczeni w tych punktach nie tworzą pokrycia wierzchołkowego grafu  $G$ . W takim wypadku krawędź  $\{i, j\}$  z  $G$  nie jest incydentna z żadnym wierzchołkiem należącym do pokrycia wierzchołkowego, a więc odpowiadająca jej ścieżka w siatce  $P$  nie posiada strażników zarówno w  $v_i$  ani w  $v_j$ . Wiemy jednak, że aby pokryć np. ścieżkę 3-elementową, jeden strażnik w wewnętrznym „rogu” jest w stanie strzec tylko dwa z trzech odcinków. Analogiczna sytuacja występuje dla ścieżek złożonych z dziewięciu oraz piętnastu odcinków, w których, odpowiednio, czterech i siedmiu strażników jest w stanie strzec co najwyżej osiem i czternaście z dziewięciu oraz piętnastu odcinków. Stąd wnioskujemy, że jeżeli owych pozostałych  $K$  strażników nie stanowi pokrycia wierzchołkowego, to nie możemy pokryć siatki  $P$  przez  $K + e_3 + 4e_9 + 7e_{15}$  strażników.  $\square$

**Twierdzenie 10.** [20] *Problem stwierdzenia, czy  $k$  strażników wystarczy, aby strzec trójwymiarową siatkę należy do klasy problemów NP-zupełnych.*

*Dowód.* Ponieważ strażnicy mogą być rozmieszczeni tylko na skrzyżowaniach siatki lub w jej rogach, których jest skończona (wielomianowa) liczba, rozwiązanie możemy zgadnąć oraz sprawdzić w czasie wielomianowym. W konsekwencji, jako że problem pokrycia wierzchołkowego należy do klasy problemów NP-zupełnych, na mocy lematu 9 rozważany przez nas problem także należy do klasy problemów NP-zupełnych.  $\square$

## Problem pościgu i ucieczki w grafie

### 6.1. Gra w złodzieja i policjanta

Mając dany graf  $G = (V, E)$ , zbiór reguł  $S$ , całkowitą liczbę dodatnią  $k$ , oraz dwa warunki  $T_1$  i  $T_2$ , gra zaczyna się od rozmieszczenia przez gracza pierwszego (policjanta, oznaczenie  $A$ ) nie więcej niż  $k$  żetonów na wierzchołkach grafu  $G$ . Gracz numer dwa (złodziej, oznaczenie  $Z$ ) rozmieszcza jeden żeton na dowolnym wierzchołku  $G$ . Następnie gracze przesuwają swoje żetony zgodnie z regułami ze zbioru  $S$ , dopóki nie zajdzie jeden z warunków  $T_i$ . Jeżeli końcowa konfiguracja spełnia warunek  $T_1$  – wygrywa gracz  $A$  (policjant), w przeciwnym wypadku wygrywa gracz  $Z$  (złodziej). W klasycznej wersji gry [1] obaj gracze znają rozmieszczenie wszystkich żetonów, a jedynym warunkiem końcowym jest, aby żeton gracza  $A$  oraz  $Z$  znajdował się na tym samym wierzchołku grafu  $G$ . Reguły  $S$  wyglądają następująco.

1. Gracze wykonują ruchy na przemian.
2. Gracz  $A$  w swojej kolejce może odmówić ruchu lub przesunąć wzdłuż krawędzi jeden ze swoich żetonów na wierzchołek sąsiedni z aktualnie zajmowanym.
3. Gracz  $Z$  w swojej kolejce może odmówić ruchu lub przesunąć wzdłuż krawędzi swój żeton na wolny wierzchołek sąsiedni z wierzchołkiem aktualnie zajmowanym.

Problem ma praktyczne zastosowanie na przykład w planowaniu ruchu robotów, kiedy ważnym jest, aby nie następowały kolizje lub poważniejsze zderzenia.

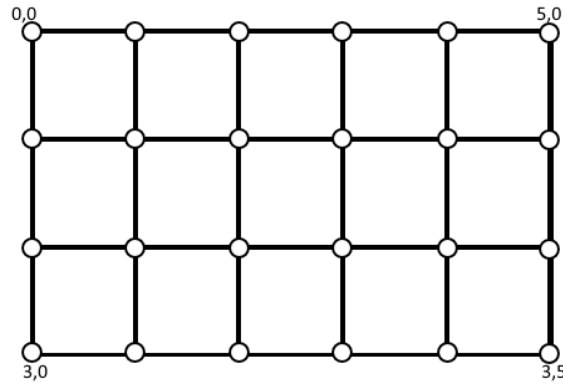
Zagadnienie pościgu i ucieczki w kracie (definicja w podrozdziale 6.1.1) opiera się na przeszukiwaniu jej w taki sposób, aby po wykonaniu  $n$  kro-

ków policjant zauważył złodzieja (tzn. znajdował się w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie) lub, w trudniejszym wariancie, znajdował się w tym samym wierzchołku, co złodziej. Taką sytuację uznajemy za zwycięstwo goniącego, w przeciwnym wypadku zwycięża złodziej. Obaj uczestnicy poruszają się tylko po wierszach i kolumnach siatki z ograniczoną prędkością.

Najprostszym przykładem gry w postaci ogólnej, w której zawsze zwycięża policjant, jest drzewo oraz współczynnik  $k = 1$ . W takim przypadku policjant w każdym kolejnym ruchu zbliża się do drugiego gracza, który w żadnym momencie nie jest w stanie go minąć, co zawsze prowadzi do zwycięstwa goniącego.

### 6.1.1. Wariant Sugiharu i Suzuki

W tym rozdziale zajmę się wariantem gry przedstawionym przez Sugiharu i Suzuki [23], w którym warunkiem zwycięstwa policjanta jest zauważenie złodzieja, a gra odbywa się na grafie przypominającym prostokątną kratę. Przez kratę rozumiemy graf  $G_{n,m}$ , gdzie  $n$  to liczba wierszy,  $m$  liczba kolumn, a każda krawędź pomiędzy wierzchołkami ma długość jeden. Zakładamy również, że graf jest rozpięty na płaszczyźnie z punktem początkowym  $v_{0,0}$  w lewym górnym wierzchołku.



Rysunek 6.1: Krata  $G_{3,5}$ .

**Definicja 20.** Gracz  $A$  jest widoczny dla gracza  $Z$  (i vice versa) wtedy i tylko wtedy, gdy żeton gracza  $A$  znajduje się w tej samej kolumnie lub w

tym samym wierszu kraty, co żeton gracza Z, niezależnie od odległości, która ich dzieli.

Gracze przesuwają swoje żetony tylko po krawędziach grafu, a szybkość ruchu jest określona przed rozpoczęciem gry. W tym wariantcie gry gracze nie mają całkowitej wiedzy o pozycjach, które zajmują. Tylko złodziej posiada wszystkie informacje o miejscach, które zajmuje policjant. Ścigający za to nie wie nic o pozycji uciekającego, dopóki nie zostanie on zauważony. Dodatkowo ruchy gracza A są z góry określone, zanim gra w ogóle się rozpocznie. Zasady S wyglądają następująco.

1. Gracze poruszają się w czasie rzeczywistym.
2. Prędkość ścigającego jest stała i wynosi  $S_n$ .
3. Uciekający porusza się z prędkością co najwyżej  $S_c$ .

Warunki kończące grę są następujące.

1. Złodziej został zauważony przez policjanta.
2. Uciekający zawsze jest w stanie zapobiec zwycięstwu policjanta.

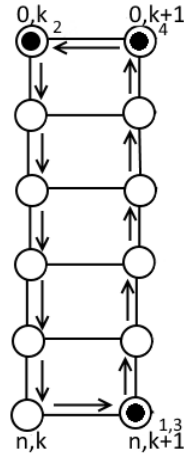
Podobnie jak zwykły problem gonitwy i ucieczki, również ta odmiana jest całkowicie deterministyczna i zależy od parametrów początkowych gry. Naszym celem jest określenie warunków, w których zawsze zwycięża gracz pierwszy.

**Twierdzenie 11.** [11] *Jeżeli  $S_c \leq 1$ , policjant zawsze wygrywa dla stałej  $S_n = n + 1$ .*

*Dowód.* Aby dowieść powyższe twierdzenie, skorzystamy z następującego algorytmu.

1. Gracz pierwszy porusza się w dół kolumną  $k$ , startując w wierzchołku  $(0, k)$ , przechodząc przez wierzchołek  $(n, k)$ , a kończąc ruch w  $(n, k+1)$ . Pokonanie takiej trasy zajmuje jedną jednostkę czasu.

2. Następnie przesuwa się w górę kolumną  $k + 1$ , kończąc ruch w wierzchołku  $(0, k)$ . Pokonanie takiej ścieżki również zajmuje jedną jednostkę czasu.
3. Powtarzamy ruch nr 1.
4. Wykonuje ruch w górę kolumną  $k + 1$ , kończąc go w wierzchołku  $(0, k + 1)$ , tracąc  $\frac{n}{n+1}$  jednostki czasu.

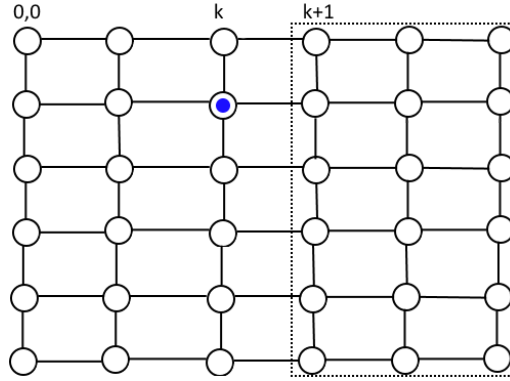


Rysunek 6.2: Trasa pokonana przez gracza pierwszego w wyniku algorytmu.

Czas  $t_{k+1}$ , którego potrzebował gracz pierwszy, aby wykonać powyższy schemat, wynosi  $t_{k+1} = t_k + 3 + \frac{n}{n+1}$ . Załóżmy, że po wykonaniu powyższych ruchów gracz  $Z$  albo został już zauważony, co kończy grę, lub znajduje się w części siatki ograniczonej przez wierzchołki  $[(0, k + 1), (n, n)]$ .

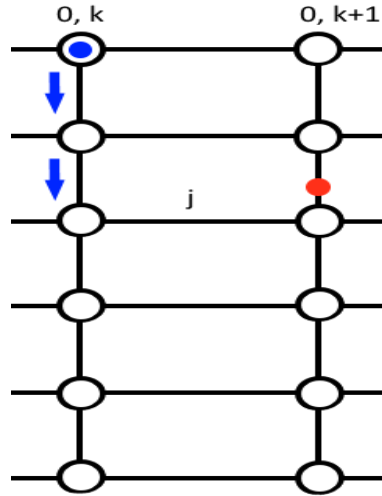
Jako że gra toczy się dalej, gracz  $Z$  nie może znajdować się w pierwszym wierszu ani  $k$ -tej kolumnie, ponieważ wtedy byłby widoczny dla policjanta. W czasie  $t_k$  gracz  $Z$  znajduje się w części kraty ograniczonej przez wierzchołki  $[(0, k + 1), (n, n)]$  i próbuje się przedostać do części  $[(0, 0), (n, k + 1)]$  (rysunek 6.3).

W czasie, kiedy policjant przemieszcza się kolumną  $k$ , złodziej może zbliżyć się do niej wierszem  $j$ . Policjant dotrze do wierzchołka  $(j, k)$  po czasie  $\frac{j}{n+1}$ , a więc do tego momentu złodziej musi znajdować się powyżej (lub poniżej) wiersza  $j$ . Wynika z tego, że w momencie, kiedy gracz  $A$  kończy pierw-



Rysunek 6.3: Złodziej znajduje się w części kraty zaznaczonej linią przerywaną.

szy ruch, gracz  $Z$  znajduje się w odległości  $\frac{1-j}{n+1} - \epsilon$  pomiędzy wierzchołkiem  $(j, k+1)$  a wierzchołkiem  $(j, k)$ . Obrazuje to rysunek 6.4.



Rysunek 6.4: Pierwszy etap pościgu.

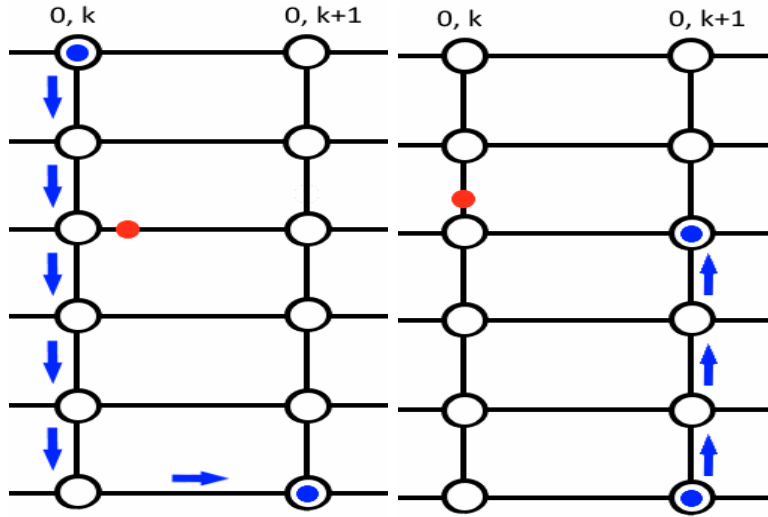
Gracz  $A$  ponownie przekroczy wiersz  $j$  w drugim kroku algorytmu po upływie  $\frac{n-1}{n+1}$  czasu. Do tego momentu gracz  $Z$  musi przejść cały wiersz i znaleźć się w kolumnie  $k$ . Żeby tego dokonać, musi przemieścić się o  $\frac{j}{n+1} + \delta$  w ciągu  $\frac{n-1}{n+1}$  jednostek czasu. Daje nam to ograniczenie  $j < \frac{n}{2}$ .

Pomiędzy momentem, kiedy policjant przekracza wiersz  $j$  w kroku dru-



gim, a przejściem do wierzchołka  $(0, k)$ , mija  $\frac{j}{n+1}$  jednostki czasu. W sumie mijają dwie jednostki czasu od momentu  $t_k$ . Złodziej startując w kolumnie  $j + 1$  i poruszając się wzdłuż wiersza  $j$  nie ma wystarczająco dużo czasu, aby przesunąć się do wiersza  $j - 1$  lub  $j + 1$ , ponieważ nie może rozpocząć ruchu dopóki pierwszy gracz nie przekroczy wiersza  $j$ . Więc w momencie, kiedy ścigający kończy ruch nr 2, gracz  $Z$  musi znajdować się w odległości nie większej niż  $\frac{j}{n+1} - \gamma$  od  $(k, j)$ .

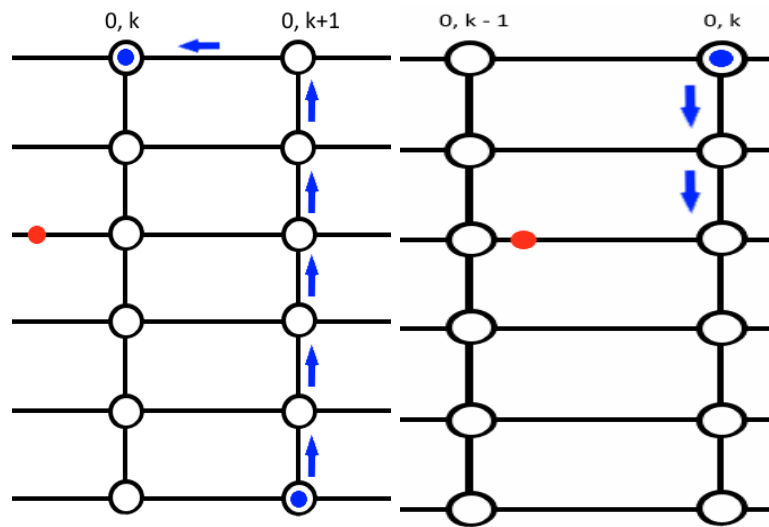
Widać to na poniższym rysunku.



Rysunek 6.5: Drugi etap pościgu.

Gracz  $A$  osiąga  $(j, k)$  w kroku trzecim po upływie kolejnych  $\frac{j}{n+1}$  jednostek. W tym samym czasie gracz  $Z$  nie jest w stanie osiągnąć kolumny  $k - 1$  ani wrócić do  $k + 1$ , a więc zostaje zauważony.

Ponieważ policjant widzi przez całą długość wiersza/kolumny, takie samo rozumowanie będzie miało zastosowanie, jeżeli złodziej będzie rozpoczynał swój ruch z każdej kolumny  $k > j + 1$ . W ten sposób, jeżeli gracz  $A$  rozpocznie grę w punkcie  $(0, 0)$  oraz wszystkie założenia początkowe będą spełnione, to zawsze zakończy on grę sukcesem w czasie nie większym niż  $t_n < 4n$ .  $\square$



Rysunek 6.6: Ostatni etap pościgu.

# Zakończenie

Avis i Toussaint [3] korzystając z metody przedstawionej przez Fiska [15], którą opisałem w rozdziale 2.1, uzyskali algorytm, który w czasie  $O(n \log n)$  znajduje zbiór strażników o mocy co najwyżej  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  w dowolnym wielokącie prostym. Opisany w dalszej części rozdziału problem dla wielokątów z dziurami wymaga co najwyżej  $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor = \lceil \frac{t}{3} \rceil$  strażników.

W rozdziale 3.1 opisałem zagadnienie strzeżenia zbioru odcinków rozłącznych. Aby strzec dowolny zbiór  $n$  rozłącznych odcinków prostych, zawsze wystarcza  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  a czasami potrzeba  $\lfloor \frac{2n-3}{5} \rfloor$  strażników. W dalszej części rozdziału omówiłem inny wariant strzeżenia zbioru – oświetlanie. Aby oświetlić dowolny zbiór odcinków potrzebujemy nie więcej niż  $\lceil \frac{2n}{3} \rceil - 3$  źródeł światła. Ograniczenie dolne jest wciąż problemem otwartym. Na koniec zająłem się problemem znajdowania zbioru ukrytego, który dla dowolnej rodziny  $n$  rozłącznych odcinków posiada moc co najmniej  $\sqrt{n}$ .

W kolejnym rozdziale opisałem  $K$ -nadaajniki, a dokładnie pokrycie płaszczyzny z przeszkodami oraz podział gilotynowy. Aby pokryć płaszczyznę z  $n$  rozłącznymi odcinkami prostopadłymi zawsze wystarcza  $\lceil \frac{5n+6}{12} \rceil$  1-nadaajników, a  $\lceil \frac{n+1}{4} \rceil$  jest czasami koniecznych. Natomiast dowolny podział gilotynowy można strzec przez co najwyżej  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  1-nadaajników.

Następnie omówiłem zagadnienie strażników na siatkach. Aby strzec siatkę w dwóch wymiarach potrzebnych jest dokładnie  $n - m$  strażników, gdzie  $m$  to moc najliczniejszego skojarzenia grafu przecięć siatki. Znalezienie minimalnej liczby strażników koniecznej, aby strzec siatki w trzech wymiarach, jest zagadnieniem należącym do klasy problemów NP-trudnych.

W ostatnim rozdziale zająłem się problemem pościgu i ucieczki w grafie. Przedstawiłem wariant klasyczny oraz zaproponowany przez Sugiharu i Suzuki. Postępując zgodnie z przedstawionym algorytmem policjant, poruszający się z prędkością  $S_n = n + 1$ , zawsze jest w stanie dostrzec złodzieja, którego prędkość nie przekracza  $S_c \leq 1$ .

W pracy nie omówiłem wszystkich zagadnień związanych z problemem galerii sztuki dla odcinków, m.in.:

- strażnicy mobilni [4]
- strażnicy peryskopowi [21]
- problem pościgu i ucieczki w grafach losowych [6]

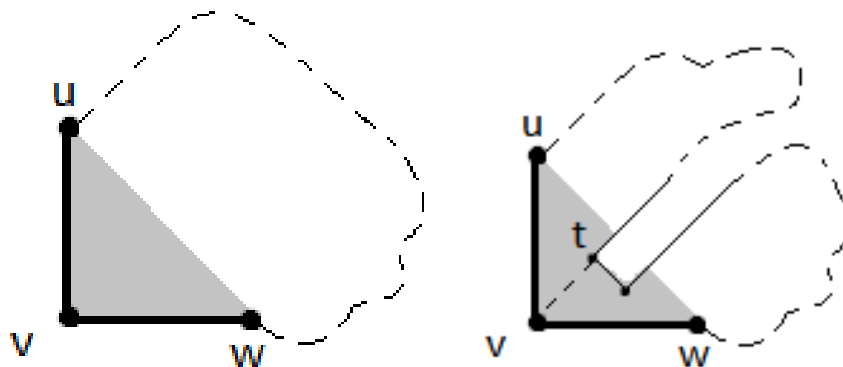
## DODATEK A

# Triangulacja wielokąta

**Lemat 10.** *Dowolny  $n$ -kąt prosty można zawsze podzielić na  $n - 2$  trójkątów.*

*Dowód.* Dowód przez indukcję po  $n$ .

Jeżeli  $n = 3$ , to wielokąt jest już podzielony  $3 - 2 = 1$  trójkąt. Załóżmy, że  $n \geq 3$  i rozpatrzmy skrajny lewy wierzchołek  $v$  oraz jego sąsiadów  $u$  i  $w$ . W pierwszym przypadku odcinek  $\overline{uw}$  jest wewnętrzną przekątną, a w drugim część krawędzi wielokąta  $P$  leży wewnątrz trójkąta  $uvw$ .



Rysunek A.1: Oba przypadki podziału części wielokąta.

W pierwszym przypadku przekątna  $\overline{uw}$  dzieli wielokąt na trójkąt oraz wielokąt prosty o  $n - 1$  wierzchołkach, na którym wykonujemy krok indukcyjny, otrzymując  $1 + (n - 1) - 2 = n - 2$  trójkątów.

W przypadku drugim znajdujemy punkt  $t$  w trójkącie  $uvw$ , który znajduje się najdalej od prostej przechodzącej przez odcinek  $\overline{uw}$ , a następnie łączymy go z punktem  $v$ . Odcinek  $\overline{vt}$  jest wewnętrzną przekątną, tzn.  $\overline{vt} \subset P$ , która dzieli wielokąt na dwa proste wielokąty o  $m$  oraz  $n - m + 2$  wierzchołkach, gdzie  $3 \leq m \leq n - 1$ , na których wykonujemy krok indukcyjny: z założenia indukcyjnego podział wielokąta składa się z  $(m - 2) + ((n - m + 2) - 2) = n - 2$  trójkątów.  $\square$

# Bibliografia

- [1] M. Aigner i M. Fromme. A game of cops and robbers. *Discrete Applied Mathematics* 8, str. 1-12 (1984).
- [2] K. Appel i W. Haken. Every planar map is four colorable. *Illinois Journal of Mathematics* 21(3), str. 429-490 (1977).
- [3] D. Avis i G. Toussaint. An efficient algorithm for decomposing a polygon into star-shaped polygons. *Pattern Recognition* 13(6), str. 395-398 (1981).
- [4] D. Avis i G. Toussaint. An optimal algorithm for determining the visibility of a polygon from an edge. *IEEE Transactions on Computers* 30, str. 910-914 (1981).
- [5] B. Ballinger, N. Benbernou, P. Bose, M. Damian, E. Demaine, V. Dujmović, R. Flatland, F. Hurtado, J. Iacono, A. Lubiw, P. Morin, V. Sacristán, D. Souvaine i R. Uehara. Coverage with  $k$ -transmitters in the presence of obstacles. *Journal of Combinatorial Optimization* 25(2), str. 208-233 (2013)
- [6] B. Bollobás, G. Kun i I. Leader Cops and robbers in a random graph. *Journal of Combinatorial Theory* 103(2), str. 226-236 (2013)
- [7] O. V. Borodin. Solution of Ringel's problems on vertex-face coloring of plane graphs and coloring of 1-planar graphs. *Metody Diskretnogo Analiza* 41, str. 12-26 (1984).
- [8] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory* 18, str. 39-41 (1975).
- [9] R. Courant i H. Robbins. What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods. Oxford University Press, str. 239-240 (1978).
- [10] J. Czyzowicz, E. Rivera-Campo N. Santoro, J. Urrutia i J. Zaks. Guarding rectangular art galleries. *Discrete Applied Mathematics* 50(2), str. 149-157 (1994).
- [11] R. Dawes. Some pursuit–evasion problems on grid. *Information Processing Letters* 58(1), str. 5-9 (1996).
- [12] P. Erdős i G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica* 2, str. 463-470 (1935)
- [13] S. Even. Graph Algorithms. Computer Science Press, Potomac, MD (1979).
- [14] R. Fabila-Monroy, A. R. Vargas i J. Urrutia. On modern illumination problems. XIII Encuentros de Geometria Computacional (2009).
- [15] S. Fisk. A short proof of Chvátal's watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory* 24, str. 374 (1977).

- [16] M. Garey i D. Johnson. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman (1979).
- [17] F. Hurtado, O. Serra i J. Urrutia. Hiding points in arrangements of segments. *Discrete Mathematics* 162, str. 187-197 (1996).
- [18] A. Laurentini. Guarding the walls of an art gallery. *The Visual Computer* 15(6), str. 265-278 (1999).
- [19] T. Nishizeki. Precise proofs of some lemmas in the paper “Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs”. Carnegie-Mellon Technical Report (1977).
- [20] S. Ntafos. On gallery watchmen in grids. *Information Processing Letters* 23(3), str. 99-102 (1986).
- [21] S. Ntafos i L. Gewali. Covering grids and orthogonal polygons with periscope guards. *Computational geometry* 2(6), str. 309-334 (1993).
- [22] J. O’Rourke. Art Gallery Theorems and Algorithms. Oxford University Press (1987).
- [23] K. Sugihara i I. Suzuki. On a pursuit-evasion problem related to motion coordination of mobile robots. Proceedings of the Twenty-First Annual Hawaii International Conference On System Sciences, str. 218-226 (1988).
- [24] J. Topp. Algebra Liniowa. Politechnika Gdańska (2005).
- [25] W. Tutte. The factorization of linear graphs. *Journal of the London Mathematical Society* 22, str. 107-111 (1947).
- [26] J. Urrutia. Art gallery and illumination problems. Handbook of computational geometry. Elsevier Science, str. 973-1027 (2000).

# Spis rysunków

1.1. Wielokąt prosty. . . . .	7
1.2. Spójny graf prosty. . . . .	8
1.3. Graf dwudzielny o maksymalnym skojarzeniu. Skojarzenie oznaczone jest linią czerwoną. . . . .	8
1.4. Niespójny graf o dwóch składowych spójności. . . . .	9
1.5. Strażnik w wielokącie. . . . .	9
1.6. Strażnik $p$ strzeże punktu $q$ , ale nie strzeże punktu $y$ . . . . .	10
2.1. Wielokąt podzielony na trójkąty. . . . .	12
2.2. Pokolorowany graf triangulacji wraz z grafem dualnym. . . . .	12
2.3. Punkt $x$ jest niestrzeżony, przy rozmieszczeniu strażników w co trzecim wierzchołku. . . . .	13
2.4. Wielokąt z dziurami wraz z grafem dualnym. Krawędź $e$ od- powiada krawędzi $e'$ w grafie dualnym. . . . .	15
3.1. Zbiór rozłącznych odcinków wymagający dwóch strażników. . . . .	16
3.2. Zbiór $F$ rozłącznych odcinków oraz odpowiadający mu graf $G(F)$ . . . . .	17
3.3. Podział zbioru $F$ . Pogrubione elementy należą do zbioru $H$ . . . . .	18
3.4. Przekształcenie grafu $H$ . . . . .	19
3.5. Zbiór $F'$ i rodzina $H$ zbiorów. . . . .	20
3.6. Graf $G$ oraz źródła światła . . . . .	21
3.7. Zbiór pięciu odcinków o rosnącym nachyleniu, który posiada zbiór ukryty o rozmiarze równym 5. . . . .	23
4.1. 1-nadajnik strzegący czterech obszarów z sześciu. . . . .	25
4.2. Zbiór $S$ odcinków oraz graf $G(S)$ . Zbiór niezależny został pogrubiony. . . . .	26
4.3. Pokrycie płaszczyzny dwoma 1-nadajnikami. . . . .	27
4.4. Kolejne podziały ściany $F'$ . . . . .	28



4.5. Podział płaszczyzny po usunięciu odcinka $s_i$ . . . . .	28
4.6. Nadajniki każdej ze ścian strzegące całą ścianę $F$ . . . . .	29
5.1. Siatka strzeżona przez pięciu strażników. . . . .	30
5.2. Graf przecięć siatki. Skojarzenie oznaczono linią ciągłą. . . . .	31
5.3. Nowo powstałe ścieżki w przypadku wolnych osi $+x$ , $+y$ lub $+z$ . . . . .	33
5.4. Omijanie zajętej ścieżki w przypadku wolnej osi $-x$ oraz $-y$ .	34
6.1. Krata $G_{3,5}$ . . . . .	37
6.2. Trasa pokonana przez gracza pierwszego w wyniku algorytmu.	39
6.3. Złodziej znajduje się w części kraty zaznaczonej linią przery- waną. . . . .	40
6.4. Pierwszy etap pościgu. . . . .	40
6.5. Drugi etap pościgu. . . . .	41
6.6. Ostatni etap pościgu. . . . .	42
A.1. Oba przypadki podziału części wielokąta. . . . .	45

# Oświadczenie

Ja, niżej podpisany(a) oświadczam, iż przedłożona praca dyplomowa została wykonana przeze mnie samodzielnie, nie narusza praw autorskich, interesów prawnych i materialnych innych osób.

.....

data

.....

podpis