# 1 Allgemein

## 1.1 Potenzen und Wurzeln

- – $a^1 = a$ – $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- – $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ – $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^x = e^{x \ln a}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $a^x = e^{x \ln a}$

## 1.2 Logarithmen

$y = \log_a x \iff a^x = x$

- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a a^x = x$
- – $\log_a a = 1$ – $\log_a 1 = 0$
- $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$
- $\log(\frac{u}{v}) = \log(u) - \log(v)$
- $\log(u^r) = r \log(u)$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

## 1.3 Spezielle Summen

| | | |
|---|---|---|
| $\sum_{k=1}^{n} k$ | $1 + 2 + \cdots + n$ | $\frac{n(n+1)}{2}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^2$ | $1 + 4 + \cdots + n^2$ | $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{k=1}^{n} k^3$ | $1 + 8 + \ldots n^3$ | $(\sum_{k=1}^{\infty} k)^2$ |
| $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$ | $1 + 3 + \cdots + (2n-1)$ | $n^2$ |
| $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$ | $1 + \cdots + (2n-1)^2$ | $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ |
| $\sum_{k=0}^{n-1} q^k$ | $1 + q + \cdots = \frac{q^n - 1}{q-1}$ | $\frac{1-q^n}{1-q},\ q \notin \{0, 1\}$ |

## 1.4 Trigonometrische Funktionen

**Sinussatz:** $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$
**Cosinussatz:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha$

- $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
- $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$
- $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

### 1.4.1 Komposition

| | |
|---|---|
| $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ | $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ |
| $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\tan(\arccos(x))\quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ |

### 1.4.2 Hyperbolisch

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$
- $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$

### 1.4.3 Winkel

| deg | rad | sin | cos | deg | rad | sin | cos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 90 | $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | 120 | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ |
| 135 | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | 150 | $\frac{5\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| 180 | $\pi$ | 0 | $-1$ | 210 | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| 225 | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | 240 | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ |
| 270 | $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | 0 | 300 | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 315 | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 330 | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\arcsin(0) = 0$ | $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ | $\arctan(0) = 0$ |
| $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ | $\arccos(0) = 0$ | $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ |
| $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ | $\arccos(0) = \pi$ | $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ |
| | | $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ |

- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$
- $\lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$

### 1.4.4 Reduktion

| | | |
|---|---|---|
| $\sin\frac{\pi}{2} - a = \cos a$ | $\cos\frac{\pi}{2} - a = \sin a$ | $\tan\frac{\pi}{2} - a = \frac{1}{\tan a}$ |
| $\sin\frac{\pi}{2} + a = \cos a$ | $\cos\frac{\pi}{2} + a = -\sin a$ | $\tan\frac{\pi}{2} + a = \frac{-1}{\tan a}$ |
| $\sin\pi - a = \sin a$ | $\cos\pi - a = -\cos a$ | $\tan\pi - a = -\tan a$ |
| $\sin\pi + a = -\sin a$ | $\cos\pi + a = -\cos a$ | $\tan\pi + a = \tan a$ |
| $\sin 2\pi - a = -\sin a$ | $\cos 2\pi - a = \cos a$ | $\tan 2\pi - a = -\tan a$ |
| $\sin -a = -\sin a$ | $\cos -a = \cos a$ | $\tan -a = -\tan a$ |

## 1.5 Sonstiges

- $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

### 1.5.1 Bekannte Integrale

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|
| $\sin^2(x)$ | $\frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2}$ |
| $\cos^2(x)$ | $\frac{x + \sin(x)\cos(x)}{2}$ |
| $\sin(kx)\cdot\cos(kx)$ | $-\frac{1}{4k}\cos(2kx) = \frac{-(\cos(x))^2}{2}$ |
| $\frac{x^2}{x^2+1}$ | $x - \arctan(x)$ |
| $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ | $\frac{\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)}{2}$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln\lvert u(x)\rvert$ |
| $u'(x)\cdot u(x)$ | $\frac{1}{2}(u(x)^2)$ |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $\frac{a^2 \arcsin(\frac{x}{\lvert a\rvert})}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$ |
| $\sqrt{a^2 + x^2}$ | $\frac{a^2 \ln(\lvert\sqrt{x^2+a^2}+x\rvert)}{2} + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}$ |
| $a^x \cdot \ln(a),\ a > 0$ | $a^x$ |
| $x^x(1 + \ln x)$ | $x^x,\ x > 0$ |
| $e^{\ln\lvert x\rvert}(\ln(\lvert x\rvert) + 1)$ | $\lvert x\rvert^x = e^{x\ln x}$ |
| $\frac{1}{(x+a)^2}$ | $-\frac{1}{x-1}$ |

# 2 Zahlen und Mengen

## 2.1 Körper

**Addition:** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$

A.1 **Assoziativität:** $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

A.2 **Neurales Element:** $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A.3 **Inverse Elem.:** $x + y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}$

A.4 **Kommunikativität:** $x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Werden alle Axiome erfüllt $\implies$ $\mathbb{R}$ ist abelisch.

**Multiplikation:** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$

M.1 **Assoziativität:** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

M.2 **Neurales Element:** $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M.3 **Inverses Elem.:** $x \cdot y = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}$

M.4 **Kommunikativität:** $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Werden alle Axiome erfüllt $\implies$ $R^* = \mathbb{R} \setminus 0$ ist abelisch.

**Distributivität:** Macht **Addition** und **Multiplikation** verträglich

D.1 **Distributivität:** $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

**Ordnung** ($\leq$): gibt es auf $\mathbb{R}$

O.1 **Reflexivität:** $x \le x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
O.2 **Transitivität:** $x \le y \wedge y \le z \implies x \le z$
O.3 **Antisymmetrie/Identität:** $x \le y \wedge y \le x \implies x = y$
O.4 **Total:** $x \le y \vee y \le x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

**Kompatibilität:** Ordnung ist mit Körperaxiome kompatibel
K.1 $x \le y \implies x + z \le y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
K.2 $x \cdot y \ge 0 \quad \forall x \ge 0, y \ge 0$

**Ordnungsvollständigkeit ($V$):** Existiert für $\mathbb{R}$
1. $A, B \subset \mathbb{R}, \quad A, B \neq \emptyset$
2. $a \le b \quad \forall a \in A, b \in B$

$\implies \exists c \in \mathbb{R}, \forall a \in A, b \in B, \quad a \le c \wedge c \le b$

## 2.2 Archimedisches Prinzip

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0, \exists n \in \mathbb{N} : y \le n \cdot x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n \le x < n + 1$

## 2.3 Min, Max, Abs

**Max:** $\max\{x, y\} = \max(x, y) \; \forall x, y \in \mathbb{R}$
**Min:** $\min\{x, y\} = \min(x, y) \; \forall x, y \in \mathbb{R}$
**Absolutbetrag:** $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max\{-x, x\}$
1. $|x| \ge 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \; \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x + y| \le |x| + |y| \; \forall x \in \mathbb{R}$
4. $|x + y| \ge ||x| - |y|| \; \forall x \in \mathbb{R}$

## 2.4 Yung'sche Ungleichung

$\forall x, y \in \mathbb{R} \; \forall \epsilon > 0 : \quad 2|x \cdot y| \le \epsilon \cdot x^2 + \frac{1}{\epsilon} \cdot y^2$

## 2.5 Intervall

Teilmenge von $\mathbb{R}$

1. $\forall a, b \in R, a \le b$
   (a) $[a, b] = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$
   (b) $[a, b) = [a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$
   (c) $(a, b] = ]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$
   (d) $(a, b) = ]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
2. $\forall a \in \mathbb{R}$
   (a) $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$
   (b) $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$
   (c) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$
   (d) $]-\infty, a[ = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
3. $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

## 2.6 Schranken

**Teilmenge:** $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
**Obere Schranke:** $c \in R$ von $A$ falls $\forall a \in A : a \le c$
**Nach Oben Beschränkt:** $A$ hat eine obere Schranke
**Untere Schranke:** $c \in \mathbb{R}$ von $A$ falls $\forall a \in A : a \ge c$
**Nach Unten Beschränkt:** $A$ hat eine untere Schranke
**Supremum:** $s := \sup A$ ist klein. obere Schranke von $A$

$$\underbrace{(\forall a \in A | a \ge s)}_{s \text{ ist eine obere Schranke von } A} \wedge \underbrace{(\forall \epsilon > 0 \; \exists a \in A | a > s - \epsilon)}_{s \text{ ist die klein. obere Schranke von } A}$$

**Infimum** $l := \inf A$ ist grösste untere Schranke von $A$

$$\underbrace{(\forall a \in A | a \ge l)}_{l \text{ ist eine untere Schranke von } A} \wedge \underbrace{(\forall \epsilon > 0 \; \exists a \in A | a > l + \epsilon)}_{l \text{ ist die gröss. unt. Schranke von } A}$$

- $a \le b \; \forall a \in A, b \in B \implies \sup A \le \inf B$
- $A, B \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$
  - $c \cdot A := \{c \cdot a | a \in A\}$
  - $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$
- $\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}$
- $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$
- $\sup (c \cdot A) = \begin{cases} c \cdot \sup A & \text{if } c > 0 \\ c \cdot \inf A & \text{if } c < 0 \end{cases}$

1. $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt $\implies$ Menge der oberen Schranken ist im Intervall $[\sup A, +\infty[$
2. $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt $\implies$ Menge der unteren Schranken ist im Intervall $]-\infty, \inf A]$

$A \subset B \subset \mathbb{R}$:

1. $B$ nach oben beschränkt $\implies \sup A \le \sup B$
2. $B$ nach unten beschränkt $\implies \inf A \ge \inf B$

$A \subset \mathbb{R}$:

1. $A$ nach oben unbeschränkt $\implies \sup A = +\infty$
2. $A$ nach unten unbeschränkt $\implies \inf A = -\infty$

## 2.7 Kardinalität

**Gleichmächtig:** $X, Y \subset \mathbb{R} \; \exists$ Bijektion $f : X \to Y$
**Endlich:** falls $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N} : \{1, 2, \ldots, n\}, X$ gleichmächtig
**Abzählbar:** falls $X$ endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$

## 2.8 Komplexe Zahlen

**Imaginary Number:** $i, i^2 = -1$
**Complex Number:** $z, z = x + iy, \; x, y \in \mathbb{R}$
**Real Part:** $\mathrm{Re} z = x \in \mathbb{R}$
**Imaginary Part:** $\mathrm{Im} z = y \in \mathbb{R}$
**Set:** $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}$
- $R \subset \mathbb{C} : \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z = 0\}$
- Rein-Imaginär: $0 + yi, y \in \mathbb{R}$

**Konjugate:** $\overline{z} = x - iy, \; z = x + iy$
- $z \cdot \overline{z} = \times^2 \cdot y^2 = |z|^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

**Betrag:** $|z|$ Distanz zwischen $z$ und Origin
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

**Euler:** $e^{i\gamma} = \cos\gamma + i \sin\gamma$
- $|e^{i\gamma}| = 1$

### 2.8.1 Arithmetic

Für $z_1 = a + ib = re^{i\gamma}, z_2 = b + id = re^{i\delta}$:

- $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
  - $z_1 z_2 = rse^{i(\gamma + \delta)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|}$
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{i(\gamma - \delta)}$
- $\sqrt[n]{z_1} = z_2 \implies z_1 = z_2^n = r^n e^{in\delta} \overset{!}{=} re^{i\gamma}$
  - $s = \sqrt[n]{r}$
  - $n\gamma = \gamma + 2\pi k, k = 0 \ldots n - 1$

### 2.8.2 Polar Coordinates

$z = x + iy \iff z = r(\cos\gamma + i \sin\gamma) \overset{Euler}{=} z = re^{i\gamma}$

- – $x = r \cos\gamma$ – $y = r \sin\gamma$
- $r = |z|$
- $\gamma = \arccos \frac{x}{r} = \arcsin \frac{y}{r}$
- $\arg z = |z| \in [0, 2\pi[ \implies r$ ist eindeutig bestimmt

## 3 Folgen

**Folge:** $(a_n)_{n\geq a>0}$ ist Funktion $a: \mathbb{N}^* \to \mathbb{A}, n \mapsto a_n$, $\mathbb{A}$ ist beliebiges Set.

**Konvergent:** ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls $\exists l \in R:\quad \forall\epsilon > 0$ das Set $\{n \in \mathbb{N} | a_n \notin ]l-\epsilon, l+\epsilon[\} = \{n \in N^* | |a_n - l| \geq \epsilon\}$ endlich ist

- $\forall\epsilon > 0\ \exists N \geq 1: \quad |a_n - l| < \epsilon\ \forall n \geq N$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
- Es gibt 2 Arten von divergenten Folgen

**Grenzwert:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \epsilon$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k} \forall k \in \mathbb{N}$

### 3.1 Rechenregeln

$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$

1. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$ if $b_n \neq 0\ \forall n \in N \wedge b \neq 0$
4. Falls $\exists K \geq 1, a_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies a \leq b$
5. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$

### 3.2 Monotonie

**Monoton Wachsend:** $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
**Strikt Monoton Wachsend:** $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
**Monoton Fallend:** $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
**Strikt Monoton Fallend:** $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### 3.3 Einschliessungskriterium

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \in \mathbb{R}\ \exists K \in \mathbb{N}\ \exists (c_n)_{n\in\mathbb{N}}: a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

### 3.4 Weierstrass / Monoton Konvergenz Satz

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachend und nach oben beschränkt $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}$

### 3.5 Funktionen und deren Grenzwert

| Funktion | Grenzwert | Bedingung |
|---|---|---|
| $\lim_{n\to\infty} a^n$ | 0 | $\lvert a\rvert < 1$ |
| $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ | 1 | $a > 0$ |
| $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a}$ | 1 | $a > 0$ |
| $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ | 1 | |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}$ | 0 | $a > 1$ |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$ | 0 | $a > 1$ |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ | 0 | |
| $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ | $\infty$ | |
| $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | $e$ | |
| $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ | $e^a$ | |
| $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ | $\frac{1}{e}$ | |
| $\lim_{n\to 0} \frac{\sin n}{n}$ | 1 | |
| $\lim_{n\to 1} \frac{\ln n}{n-1}$ | 1 | |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{\exp(an)}$ | 0 | $m \in \mathbb{R}, a > 0$ |
| $\lim_{n\to 0} \frac{\exp(n)-1}{n}$ | 1 | |
| $\lim_{n\to 0} \frac{\ln(1+n)}{n}$ | 1 | |
| $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ | 0 | $a > 0$ |
| $\lim_{n\to 0} \frac{a^n - 1}{n}$ | $\ln a$ | $a > 0$ |
| $\lim_{n\to 0}(n^a \ln n)$ | 0 | $a > 0$ |

### 3.6 Bernoulli Ungleichung

$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x\ \forall n \in N, x > -1$

### 3.7 Limes Superior und Limes Inferior

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann in zwei monotone Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geteilt werden.

1. $\forall n \geq 1: b_n = \inf\{a_k | k \geq n\}$ und $c_n = \sup\{a_k | k \geq n\}$
2. $b_n \leq b_{n+1}$ und $c_n \geq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend
4. $b_n$ und $c_n$ sind beschränkt $\implies$ konvergent
5. **Limes Inferior:** $\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$
6. **Limes Superior:** $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$
7. $b_n \leq c_n \implies \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

### 3.8 Cauchy Kriterium

**Cauchy-Folge:** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falls $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N\ |a_n - a_m| < \epsilon$

- Abstand zwischen Folgegliedern wird mit wachsendem Index beliebig klein

- $a_n$ Cauchy-Folge $\implies$ $a_n$ beschränkt
- $a_n$ konvergent $\iff$ $a_n$ Cauchy-Folge
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff$ $\forall\epsilon > 0\ \exists\mathbb{N} \geq 1: |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq \mathbb{N}$
- $a_n$ nicht Cauchy-Folge $\implies$ $a_n$ divergent

### 3.9 Abgeschlossener Teilintervall

Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$

1. $[a, b] \quad a \leq b, a, b \in \mathbb{R} \implies \mathrm{L}(I) = b - a$
2. $[a, +\infty[ \quad a \in \mathbb{R} \implies \mathrm{L}(I) = \infty$
3. $]-\infty, a] \quad a \in \mathbb{R} \implies \mathrm{L}(I) = \infty$
4. $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R} \implies \mathrm{L}(I) = \infty$

- $I \subset \mathbb{R}$ beschränkt $\iff$ $\mathrm{L}(I) < +\infty$
- $I \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen $\iff$ für jede konvergierende $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Elementen in $I$ muss $\lim_{n\to\infty} a_n \in I$
- $I = [a, b], J = [c, d], a \leq b, c \leq d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$, falls $c \leq a$ und $b \leq d \implies I \subset J$
  - $\mathrm{L}(I) = b - a \leq d - c = \mathrm{L}(J)$
- Monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X_n \subset \mathbb{R}$ mit $X_1 \supseteq X_2, \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \ldots$

### 3.10 Cauchy-Cantor

Für absteigende Folge geschlossener Intervalle $I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ mit $\mathrm{L}(I_1) < +\infty$ gilt $\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$. Falls $\lim_{n\to\infty} \mathrm{L}(I_n) = 0 \implies \bigcap_{n\geq 1} I_n = \{x\}\ x \in \mathbb{R}$.

### 3.11 Teilfolge

Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $b_n = a_{l(n)}$ für $l: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit der Eigenschaft $l(n) < l(n+1) \forall n \geq 1$

- Entsteht durch weglassen von Folgegliedern.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\implies (a_{l(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle Teilfolgen.

## 3.12 Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\implies$ für jede beschränkte Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$
- Es gibt je eine Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die $\liminf_{n\to\infty} a_n$ resp. $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als Limes annehmen.

## 3.13 Rezept: Konvergenz und Grenzwert

**Geschlossene Formel:** • auf Bruch erweitern • $n$ ausklammern und kürzen • $n$ in Nenner bekommen

**Rekursive Definition:** • Geschlossene Formel finden • 1. Monotonie zeigen 2. Beschränktheit zeigen 3. Monoton Konvergenzsatz 4. Induktionstrick: – $c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ – Solve $c$

# 4 Reihen

**Folge der Partialsummen:** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt $\iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k, a_k \ge 0\ \forall k \in \mathbb{N}^*$ konvergiert.
- Ist monoton steigend.

**Reihe:** Unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Für divergierende Reihen ist die Summe ein Symbol nicht konvergente Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Für konvergente Reihe ist die Summe ein Symbol für den Grenzwert der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Konvergent:** ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ falls die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
- $\lim_{k\to\infty} |a_k| \neq 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

**Grenzwert:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} S_n$.

Weglassen von Anfangsgliedern verändert die Konvergenz nicht, verändert ggf. jedoch den Grenzwert.

## 4.1 Bekannte Reihen

| Reihe | | Wert | konv. | div. |
|---|---|---|---|---|
| Geometrische Reihe | | $q\in\mathbb{C}$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ | $a+aq+$ | $\frac{a}{1-q}$ | $\lvert g\rvert<1$ | $\lvert q\rvert\ge 1$ |
| $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k$ | $1+2q+$ | $\frac{1}{(1-q)^2}$ | | |
| Harmonische Reihe | | | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ | | $\infty$ | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ | | $\frac{\pi^2}{6}$ | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ | | $\frac{\pi^4}{90}$ | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ | | | $a>1$ | $a\le 1$ |
| Alternierende Harmon. Reihe | | | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ | | $\ln 2$ | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ | | $\frac{\pi^2}{12}$ | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4}$ | | $\frac{\pi^4}{720}$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ | $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-$ | $\frac{\pi}{4}$ | | |
| Teleskopreihe | | | | |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ | | $1$ | | |
| Exponentialfunktion $z\in\mathbb{C}$, konv. abs. | | | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ | $1+z+\frac{z^2}{2!}+$ | $\exp z$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k}{k!}$ | | $\frac{1}{e^a}$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-$ | $\sin x$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-$ | $\cos x$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ | $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+$ | $\sinh x$ | | |
| $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ | $1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+$ | $\cosh x$ | | |

## 4.2 Rechenregeln

$\forall \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, $\alpha \in \mathbb{C}$

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$ konvergent.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

## 4.3 Cauchy Kriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff \forall\epsilon>0\ \exists N\ge 1: |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon\ \forall m\ge n\ge N$.

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\iff \lim_{k\to\infty} |\sum_{k=n}^{m} a_k| = 0\ m \ge n$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
- $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

## 4.4 Vergleichssatz

Für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, 0\le a_k \le b_k\ \forall k \ge K$:

**Majoranten Kriterium:** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert (konv. abs. falls $|a_k| \le b_k$)

**Minoranten Kriterium:** $\sum_{k=1}^{\infty} k_k$ divergiert $\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert.

## 4.5 Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ ist eine Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ falls es eine Bijektion $\phi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ gibt so dass $a'_n = a_{\phi(n)}$

- Eine nicht subjektive (nur injektiv) Abbildung entspricht der Reihe einer Teilfolge der Folge. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{n\in N}$ konvergent $\implies \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

## 4.6 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent.

- Falls divergent, kann sie nur gegen $+\infty$ divergieren.
- $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
  - $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.
- $a_n \ge 0 \implies$ absolute Konvergenz ist äquivalent zu konvergent.

**Bedingt Konvergent:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

### 4.6.1 Dirichlet

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolute konvergent $\implies$ jede Umordnung ist konvergent mit demselben Grenzwert.

### 4.6.2 Riemann

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent $\implies \exists$ Umordnung $\forall A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}: \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(n)} = A$.

## 4.7 Leibniz

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, $a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ konvergiert.

- $a_1 - a_2 \le S \le a_1$
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s \implies \lim_{n\to\infty} s_n = s$.

## 4.8 Quotientenkriterium

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \neq 0\ \forall n \geq 1$:

1. $\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
2. $\liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

- $\exists \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| =: L \implies$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} & \text{if } L < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} & \text{if } L > 1 \\ \text{versagt Kriterium} & \text{if } L = 1 \end{cases}$$

- Nützlich für $n!, a^n$ und Polynom.
- Versagt wenn unendlich viele Glieder $a_n$ der Reihe verschwinden.

## 4.9 Wurzelkriterium

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.
2. $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergieren.

- $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \implies$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} & \text{if } L < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{und } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} & \text{if } L > 1 \\ \text{versagt Kriterium} & \text{if } L = 1 \end{cases}$$

## 4.10 Potenzreihe

$P(z) := c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, z \in \mathbb{C}$.

- Ist absolute konvergent $\forall |z| < p$ und divergiert $\forall |z| > p$.
- $p := \begin{cases} +\infty & \text{if } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{if } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$
- Funktioniert nur wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert.
- Konvergenzbereich von Potenzreihe ist ein Kreis.

Konvention:

1. $\{\sqrt[n]{|a_k|}\}$ unbeschränkt $\implies$ wir setzen $p = 0$ ($\implies |z| < 0$).
2. $\{\sqrt[n]{|a_k|}\}$ beschränkt und $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = 0 \implies$ wir setzen $p = \infty$ ($\implies p(z)$ konvergiert $\forall c \in \mathbb{C}$).
3. $\{\sqrt[n]{|a_k|}\}$ beschränkt und $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} \neq 0 \implies$ wir setzen $p = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k}}$ ($\implies p(z)$ konvergiert $\forall |z| < p$).

## 4.11 Rezept: Konvergenzradius Berechnen

1. Berechne $|p| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ falls $a_0 \neq 0 \forall n > N$ und Limes definiert oder unendlich ist.
2. Alternativ verwende $|p| = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$
3. Überprüfe ob $p$ inklusive oder exklusiv ist.

## 4.12 Riemann Zeta Funktion

$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 0$.

- $\zeta(s), 0 < s \leq 1 \implies \zeta(s)$ konvergiert.
- $\zeta(s), s > 1 \implies \zeta(s) < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n$ divergent.

## 4.13 Doppelfolgen und -reihen

**Doppelfolge:** $(c_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}} := a_k \cdot b_l$
**Doppelreihe:** $\sum_{k,l\geq 1} c_{kl}$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}$ und $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{kl}$ können mit unterschiedlichem Grenzwert konvergieren.

**Lineare Anordnung:** von $\sum_{k,l\geq 1} a_{kl}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ falls $\exists$ Bijektion $\phi N \to N \times N$ mit $b_k = a_{\phi(k)}$.

## 4.14 Cauchy

$\exists B \geq 0 :\ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B\ \forall m \geq 0 \implies$

- Folgende Reihen konvergieren absolut:
  - $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\ \forall i \geq 0$
  - $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\ \forall j \geq 0$
  - $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$
  - $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$
- Es gilt $\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j$
- Es konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut und hat demselben Grenzwert.

## 4.15 Cauchy Produkt

Produkt von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j\right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$

- Muss nicht immer konvergiere.
- Falls $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{n-j} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_j\right)$ konvergiert.

## 4.16 Folgen Funktionen

$\forall n$ sein $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge. Wir nehmen an:

1. $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$.
2. $\exists$ Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$ so dass:
   2.1 $|f_n(j)| \leq g(j)\ \forall j, n \geq 0$.
   2.2 $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

dann folgt $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$.

- $\forall z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

## 4.17 Rezept: Konvergenz und Grenzwert

Gegeben $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)_{n\in N}$

1. Ist spezieller Typ $\implies$ betrachte Typ
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \implies$ divergent
3. Quotientenkriterium anwendbar $\implies$ fertig
4. Wurzelkriterium anwendbar $\implies$ fertig
5. $\exists$ konvergente Majoranten $\implies$ konvergent
6. $\exists$ divergierende Minoranten $\implies$ divergent
7. Umformen, ausprobieren etc...

# 5 Stetige Funktionen

## 5.1 Reellwertige Funktionen

Für beliebige Menge $D$ ist $\mathbb{R}^D = \{f : D \to \mathbb{R} | f$ eine Abbildung$\}$ die Menge alle reellwertigen Funktionen die auf $D$ definiert sind.
Addition und skalare Multiplikation bilden mit $\mathbb{R}^D$ einen Vektorraum.
Für $f, g \in \mathbb{R}^D, x \in D, \alpha \in \mathbb{R}$:

**Addition:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

**Skalare Multiplikation:** $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$
**Nullfunktion:** Entspricht dem Nullvektor in $\mathbb{R}^D$ und $\zeta(x) = 0$
**Konstante Funktion:** Entspricht dem Einheitsvektor in $\mathbb{R}^D$ und $\zeta(x) = 1$
**Produkt zweier Funktionen:** $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$
**Quotient:** $\frac{f}{g} := D' \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, $D' = \{x \in D | g(x) \neq 0\}$
**Komposition von Funktionen:** $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}, f(D) \subset E$ dann $g \circ f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x))$

## 5.2 Beschränktheit

$f : D \to \mathbb{R}$ ist:

**nach oben beschränkt:** falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.
**nach unten beschränkt:** falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist.
**beschränkt:** falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben und unten beschränkt ist.

## 5.3 Kompakt Intervall

Ist ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ falls $I = [a, b], a \leq b$.

- Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}, a \leq b$. Falls $\{x_n | n \geq 1\} \subset [a, b] \implies \lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$.

## 5.4 Monotonie

$f : D \to \mathbb{R}, D \subset R,\ \forall x, y \in D$ ist:

**monoton wachsend:** falls $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
**streng mono. wachs.:** falls $x < y \implies f(x) < f(y)$.
**monoton fallend:** falls $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$.
**streng mon. fallend:** falls $x > y \implies f(x) > f(y)$.
**monoton:** falls mono. wachsend oder mono. fallend.
**streng monoton:** falls streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

## 5.5 Stetigkeit

**$x_0$ stetig:** $f : D \to \mathbb{R}$ für $D \subset \mathbb{R}, x_o \in D$ falls $\forall x \in D,\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f_0(x)| < \epsilon$.
**stetig:** $f : D \to \mathbb{R}$ falls sie $\forall x_0 \in D$ $x_0$ stetig ist.
**gleichmässig stetig:** $f : D \to \mathbb{R}$ falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D\, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

- gleichmässig stetig $\implies$ stetig $\implies$ $x_0$ stetig
- $f$ ist in $x_0$ stetig $\iff$ $(\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$ : $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0))$.
  - $f$ ist in $x_0$ stetig $\iff$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)\ \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig im Kompakten Intervall $\implies f$ ist in $[a, b]$ gleichmässig stetig.

## 5.6 Rechenregeln

Für $x_0 \in D \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}$ und $f$ und $g$ stetig in $x_0 \implies$

1. $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$ stetig in $x_0$.
2. $\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$, $D' = \{x \in D | g(x) \neq 0\}, g(x_0) \neq 0$ ist stetig in $x_0$.

Für $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}, f : D_1 \to D_2, g : D_2 \to \mathbb{R}, x_0 \in D_1$. Falls $f$ in $x_0$ und $g$ in $f(x_0)$ stetig $\implies g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig.

- Falls $f$ auf $D_1$ und $g$ auf $D_2$ stetig $\implies g \circ f$ auf $D_1$ stetig.

## 5.7 Polynom

Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0, a_n, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$.

**Grad:** ist $n$ falls $a_n \neq 0$.

- Sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.
- $\frac{P}{Q} : R \setminus \{x_1, \ldots x_m\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ ist stetig für $P, Q$ auf $\mathbb{R}, Q \neq 0$ und Nullst. $x_1, \ldots, x_m$ von $Q$.

## 5.8 Zwischerwertsatz

Für Intervall $I \subset R$, stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und $a, b \in I \implies \forall c$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\exists z$ zwischen $a$ und $b$ mit $f(z) = c$.

- $x, y \in R, x \leq y$, $c$ liegt **zwischen** $x$ und $y$ falls $c \in [x, y]$.
- Ein Polynom $P$ mit ungeradem Grad $n$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
- Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists c \in ]a, b[ : f(c) = 0$.

## 5.9 Min, Max, Abs

Für Menge $D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$:

**Abs:** $|f|(x) := |f(x)|,\ \forall x \in D$
**Max:** $\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x)),\ \forall x \in D$
**Min:** $\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x)),\ \forall x \in D$

- Für $D \subset R, x_0 \in D, f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \implies |f|, \max(f, g), \min(f, g)$ stetig in $x_0$.

## 5.10 Min-Max Satz

Für $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf kompaktem Intervall $I \implies \exists u, v \in [a, b], f(u) \leq f(x) \leq f(v)\ \forall x \in [a, b] \iff f$ ist beschränkt.

- $f(u) = \inf\{f(x) | x \in I\}$ • $f(v) = \sup\{f(x) | x \in I\}$.

## 5.11 Umkehrabbildung

Für $I \subset \mathbb{R}, f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton $\implies J := f(I) \subset \mathbb{R}, f^{-1} : J \to I$ stetig und streng monoton.

## 5.12 Reelle Exponentialfunktion

$\exp : R \to ]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und subjektiv ($\implies$ bijektiv).

- $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \geq 1$
- $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)\ \forall x, y \in \mathbb{C}$.
- $\exp(0) = 1$.
- $\exp(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(x) > 1\ \forall x > 0$
- $\exp(x) > \exp(y)\ \forall x > y$
- $\exp(x) > 1 + x\ \exists x \in \mathbb{R}$

## 5.13 Natürliche Logarithmus

Die Umkehrabbildung von exp ist $\ln : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)\ \forall a, b \in ]0, +\infty[$

## 5.14 Allgemeine Potenzen

Für $x > 0, a \in \mathbb{R}$ $x^a := \exp(a \ln(x))$

- Für $a > 0$ ist $x \mapsto x^a$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.
- Für $a < 0$ ist $x \mapsto x^a$ stetig, streng monoton fallend und bijektiv.
- $\ln(x^a) = a\ln(x)\ \forall a \in R,\ \forall x > 0$
- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}\ \forall a, b \in R,\ \forall x > 0$
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}\ \forall a, b \in R,\ \forall x > 0$

## 5.15 Funktionenfolgen

**Funktionenfolge:** $(f_n)_{n\geq 0}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\mathbb{D}} = \{f_n : \mathbb{D} \to R\}, n \mapsto f(n) = f_n$.

- $\forall x \in \mathbb{D}\ \exists$ Folge $(f_n(x))_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$.

**Konvergiert punktweise:** gegen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in \mathbb{D} : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

- $f_n \overset{\text{p.w.}}{\to} f \not\Longrightarrow f$ ist stetig

**Konvergiert gleichmässig:** gegen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ falls $\exists \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{D}$.

- Für $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ und Funktionenfolge $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ bestehend aus in $\mathbb{D}$ stetigen Funktionen die gleichmässig gegen Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ konvergieren $\Longrightarrow$ $f$ ist in $\mathbb{D}$ stetig.
- Falls $f_n$ gleichmässig zu $f$ konvergiert $\Longrightarrow$ $\limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, x \in \mathbb{D}$.
- $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \Longrightarrow f$ ist stetig
- $f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f \not\Longrightarrow f$ ist differenzierbar

**Gleichmässig konvergent:** falls $\forall x \in \mathbb{D}\ \exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und $(f_n)_{n\geq 0}$ gleichmässig gegen $f$ konvergiert.

- $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 : \forall n, m \geq N\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.
- Falls $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen $\Longrightarrow$ $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig.
- Alle $f_n$ stetig und $f_n \to f \Longrightarrow f$ ist stetig.

### 5.15.1 Reihe von Funktionenfolgen

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

**Konvergiert gleichmässig:** in $\mathbb{D}$ falls die Funktionenfolge $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gleichmässig konvergiert.

Für $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$, Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Falls $|f_n(x)| \leq c_n\ \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig konvergent in $\mathbb{D}$ und Grenzwert $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist in $\mathbb{D}$ stetig.

### 5.15.2 Potenzreihe

- $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

**Posiviten Konvergenzradius:** $\rho$ hat Potenzreihe falls $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existiert.

- $\rho = \begin{cases} +\infty & \text{if } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{if } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$
- Für Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho \Longrightarrow$ $\forall 0 \leq r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$ und $f : ]-\rho, \rho[ \to \mathbb{R}$ ist stetig.
- Sind stetig im Innern ihres Konvergenzbereiche

## 5.16 Trigonometrische Funktionen

- $\sin(z) = z - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
  - $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
- $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.
  - $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

1. $\exp(iz) = \cos(x) + i\sin(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$
2. • $\cos(z) = \cos(-z)$ • $\sin(-z) = -\sin(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$
3. • $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ • $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. • $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ • $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
5. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1\ \forall z \in \mathbb{C}$
6. • $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ • $\cos(2z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$

## 5.17 Kreiszahl

- $\sin(0) = 0$
- sin hat auf $]0, +\infty[$ min. eine Nullstelle.
- für $\pi := \inf\{t > 0 | \sin(t) = 0\} \Longrightarrow$
  1. $\sin(\pi) = 0$ $\pi \in ]2, 4[$
  2. $\forall x \in ]0, \pi[ : \sin(x) > 0$
  3. $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$
- $x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!}\ \forall 0 \leq x \leq \sqrt{6}$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

1. • $e^{i\pi} = -1$ • $e^{2\pi i} = 1$
2. • $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ • $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
   (a) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
3. • $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ • $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
4. • $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ • $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
   (a) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
5. Nullstellen von:
   - $\sin(x) = \{k \cdot \pi | k \in \mathbb{Z}\}$ – $\sin(x) > 0,\ \forall x \in ]2k\pi, (2k+1)\pi[$ – $\sin(x) < 0,\ \forall x \in ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$
   - $\cos(x) = \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi | k \in \mathbb{Z}\}$ – $\cos(x) > 0,\ \forall x \in ]\frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{-\pi}{2} + (2k+1)\pi[$ – $\cos(x) < 0,\ \forall x \in ]\frac{-\pi}{2} + (\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{-\pi}{2} + (2k+2)\pi[$

**Tangens:** $\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, z \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

**Cotangens:** $\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, z \notin \{\pi k\}$

## 5.18 Grenzwert von Funktionen

Function $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$:

**Häufigkeitspunkt:** von $\mathbb{D}$ falls $\forall \delta > 0 (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$.

**Grenzwert:** $A \in \mathbb{R}$ von $f(x)$ für $x \to x_0$ und Häufigkeitspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ von $\mathbb{D}$. Wird mit $\lim_{n\to x_0} f(x) = A$ bezeichnet falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ so dass $\forall x \in \mathbb{D} \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \epsilon$.

- $f$ muss am Grenzwert $x_0$ nicht zwingend definiert sein.
- Für $f$ und Häufigkeitspunkt $x_0$. $\lim_{n\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{D} \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ folgt $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$.
- $f$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{D} \Longleftrightarrow \lim_{n\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Für $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ und falls $\exists \lim_{n\to\infty} f(x)$ und

$\lim_{n\to\infty} g(x) \implies$ : – $\lim_{n\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) + \lim_{n\to\infty} g(x)$ – $\lim_{n\to\infty}(f\cdot g)(x) = \lim_{n\to\infty} f(x)\cdot \lim_{n\to\infty} g(x)$

- Für $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, f \le g$ und beide Grenzwerte existieren $\implies \lim_{n\to\infty} f(x) \le \lim_{n\to\infty} g(x)$.
- Für $f, g_1, g_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, falls $g_1 \le f \le g_2$ und $\lim_{n\to\infty} g_1(x) = \lim_{n\to\infty} g_2(x) \implies \exists \lim_{n\to\infty} f(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} g_1(x)$.

### 5.18.1 Links- und rechtsseitige Grenzwerte

**Rechtsseitiger Grenzwert:** $\lim_{x\to x_0^+}$ falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{\mathbb{D}\cap[x_0,+\infty[}$ für $x \to x_0$ existiert. Wobei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufigkeitspunkt von $\mathbb{D}\cap]x_0, +\infty[$.

**Linksseitiger Grenzwert:** $\lim_{x\to x_0^-}$ falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{\mathbb{D}\cap[-\infty,x_0[}$ für $x \to x_0$ existiert. Wobei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufigkeitspunkt von $\mathbb{D}\cap]x_0, +\infty[$.

**Erweitert Rechts:** $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ falls $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[\cap\mathbb{D} : f(x) > \frac{1}{\epsilon}$.

- Alternativ: $\forall N > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in D\cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) > N$.

**Erweitert Links:** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ falls $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[\cap\mathbb{D} : f(x) < -\frac{1}{\epsilon}$.

- Alternativ: $\forall N > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in D\cap]x_0, x_0 + \delta[: f(x) < -N$.

### 5.18.2 Unendlicher Grenzwert

**Oben:** Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n, \mathbb{D}$ nach oben beschränkt, so ist $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ falls $\forall \epsilon > 0, \exists c > 0 : \forall x \in D, \; x > c \implies |f(x) - L| < \epsilon$

**Unten** Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n, \mathbb{D}$ nach unten beschränkt, so ist $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ falls $\forall \epsilon > 0, \exists c > 0 : \forall x \in D, \; x < -c \implies |f(x) - L| < \epsilon$

# 6 Differenzierbare Funktionen

## 6.1 Differenzierbarkeit

**In $\mathbf{x_0}$ differenzierbar:** Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ und Häufigkeitspunkt $x_0 \in \mathbb{D}$ falls $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ existiert.

- Lässt sich linear durch die Tangente annähern.
- $f$ differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in $x_0$.

**Auf $\mathbb{D}$ differenzierbar:** Falls $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ für alle Häufigkeitspunkte $x_0 \in \mathbb{D}$ in $x_0$ differenzierbar sind.

### 6.1.1 Weierstrass

Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x_0$ Häufigkeitspunkt von $D \implies$ folgendes ist *quivalent*:

1. $f$ ist ins $x_0$ differenzierbar.
2. $\exists c (= f'(x_0)) \in \mathbb{R}$ und $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ so dass:
   (a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   (b) $r(x_0) = 0$ und $r$ ist stetig in $x_0$.

Alternative ohne limes mit $\Phi(x) = f'(x_o) + r(x)$:

- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ differenzierbar $\iff \exists \Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ welche 1. In $x_0$ stetig ist 2. $f(x) = f(x_0) + \Phi(x)(x - x_0) \; \forall c \in D$.
  – In diesem Fall $\Phi(x_0) = f'(x_0)$
- Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{D}$ Häufigkeitspunkt von $\mathbb{D}$. $f$ in $x_0$ differenzierbar $\implies f$ ist in $x_0$ stetig.

### 6.1.2 Rechenregeln Ableitung

Für $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$, Häufigkeitspunkt $x_0 \in \mathbb{D}$ von $\mathbb{D}$ und $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar:

**$\mathbf{f + g}$:** $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

**$\mathbf{f \cdot g}$:** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

**$\mathbf{\frac{f}{g}}$:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$, $g(x_0) \ne 0$.

**$\mathbf{g \circ f}$:** Für $f : \mathbb{D} \to E, g : E \to \mathbb{R}, \mathbb{D}, E \subset \mathbb{R}$, Häufigkeitspunkt $x_0 \in D$ und $f$ differenzierbar in $x_0$ und $g$ differenzierbar in $f(x_0)$ dann $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

**$\mathbf{f^{-1}}$:** Für $f : \mathbb{D} \to E$ bijektiv, $x_0$ Häufigkeitspunkt, $f$ in $x_0$ differenzierbar, $f'(x_0) \ne 0$, $f^{-1}$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig $\implies y_0$ ist ein Häufungspunkt von $E$ und $f^{-1}$ ist in $y_0$ differenzierbar: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \implies (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

## 6.2 Erste Ableitung

### 6.2.1 Extremaltstellen

Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D$. $f$ besitzt:

**Lokales Maximum:** in $x_0$ falls $\exists \delta > 0 : f(x) \le f(x_0) \; \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathbb{D}$.

**Lokales Minimum:** in $x_0$ falls $\exists \delta > 0 : f(x) \ge f(x_0) \; \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap\mathbb{D}$.

**Lokales Extremum:** in $x_0$ falls es ein lokales Minimum oder Maximum von $f$ ist.

Für $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}, x_0 \in ]a, b[, f$ in $x_0$ differenzierbar:

1. $f'(x_0) > 0 \implies \exists \delta > 0$ : • $f(x) > f(x_0) \; \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ • $f(x) < f(x_0) \; \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$
2. $f'(x_0) < 0 \implies \exists \delta > 0$ : • $f(x) < f(x_0) \; \forall x \in ]x_0, x_0 + \delta[$ • $f(x) > f(x_0) \; \forall x \in ]x_0 - \delta, x_0[$
3. $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum $\implies f'(x_0) = 0$.

**Kritischer Punkt:** Stelle $x_0$ wo $f(x_0) = 0$ oder undefiniert ist.

### 6.2.2 Rolle - Spezialfall des Mittelwertsatz

Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Falls $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in ]a, b[, f'(\xi) = 0$.

### 6.2.3 Lagrange - Mittelwertsatz

Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar $\implies \exists \xi \in ]a, b[, \; f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

### 6.2.4 Qualitatives Verhalten $f$

Für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar:

1. $f'(\xi) = 0 \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies f$ konstant.
2. $f'(\xi) = g'(\xi) \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies \exists c \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + c \; \forall x \in [a, b]$.
3. $f'(\xi) \ge 0 \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies f$ ist auf $[a, b]$ monoton wachsend.
4. $f'(\xi) > 0 \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies f$ ist auf $[a, b]$ strikt monoton wachsend.
5. $f'(\xi) \le 0 \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies f$ ist auf $[a, b]$ monoton fallend.
6. $f'(\xi) < 0 \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies f$ ist auf $[a, b]$ strikt monoton fallend.
7. $\exists M \ge 0, |f'(\xi)| \le M \; \forall \xi \in ]a, b[ \implies \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|$.

### 6.2.5 Bekannte Funktionen und deren Ableitung

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $cx$ | $c$ | | |
| $x^s$ | $sx^{s-1}$ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x}$ | $\ln(x-a)$ | $\frac{1}{x-a}$ | $\log_a \lvert x\rvert$ | $\frac{1}{x\ln a}$ |
| $e^{ax}$ | $ae^x$ | $a^{bx}$ | $(\ln a)ba^{bx}$ | | |

### 6.2.6 Trigonometrische Funktionen

| Funktion | | Domain | Range | Ableitung |
|---|---|---|---|---|
| sin | | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | $[-1,1]$ | $\cos$ |
| arcsin | | $[-1,1]$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ |
| cos | | $[0,\pi]$ | $[-1,1]$ | $-\sin$ |
| arccos | | $[-1,1]$ | $[0,\pi]$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ |
| tan | | $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ |
| arctan | | $\mathbb{R}$ | $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ | $\frac{1}{1+y^2}$ |
| sinh | $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\cosh$ |
| arcsinh | | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ |
| cosh | $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ | $\mathbb{R}$ | $[1,\infty]$ | $\sinh$ |
| arccosh | | $]1,\infty[$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| tanh | $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ | $\mathbb{R}$ | $]-1,1[$ | $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$ |
| arctanh | | $]-1,1[$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

1. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

### 6.2.7 Cauchy

Für $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. $\exists \xi \in ]a,b[, g'(\xi)(f(b)-f(a)) = f'(\xi)(g(b)-g(a))$.

- Falls $g'(x) \neq 0\ \forall x \in ]a,b[ \implies g(a) \neq g(b)$ und $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\ni)}$.

### 6.2.8 L'Hospital - Bernoulli

Für $f,g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0\ \forall x \in ]a,b[$. Falls $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0, \lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ und $\exists \lambda := \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Gilt auch für: • $b = +\infty$ • $x \to a^+$ • $\lambda = +\infty$ • $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} g(x) = \infty$

## 6.3 Konvexität

Für Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ ist:

**Konvex:** auf $I$ falls $\forall x,y \in I, x \leq y, \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

**Streng Konvex:** falls $\forall x,y \in I, x < y, \lambda \in ]0,1[, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

**Konkav:** auf $I$ falls $\forall x,y \in I, x \leq y, \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

- $f : I \to \mathbb{R}$ ist konvex $\iff \forall x_0 < x < x_1 \in I, \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x_0}$
- Summe von zwei konvexen(/konkaven) Funktionen ist konvex(/konkav).
- Für $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar. $f$ ist (streng) konvex $\iff f'$ (streng) monoton wachsend ist.
- Für $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar. Falls $f'' \geq 0 \implies f$ ist konvex.

## 6.4 Höhere Ableitungen

Für $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar:

**n-mal differenzirebar in $\mathbb{D}$:** für $n \geq 2$ falls $f^{(n-1)}$ in $\mathbb{D}$ differenzierbar ist. Dann ist die n-te Ableitung von $f$ $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$.

**n-mal stetig differenzierbar in $\mathbb{D}$:** falls $f$ n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)}$ in $\mathbb{D}$ stetig ist.

- $C^n(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{R} | f \text{ n-mal stetig diff.}\}$.

**glatt:** falls $\forall n \geq 1$ $f$ n-mal differenzierbar ist.

- $C^\infty(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to R | f \text{ glatt}\}$.

- $n$ mal differenzierbare Funktion is $n-1$ mal stetig differenzierbar.

Für $f,g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ $n$-mal differenzierbar:

**f + g:** ist $n$-mal diff. und $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

**f · g:** ist $n$-mal diff. und $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

**f/g:** ist $n$-mal diff. falls $g(x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{D}$.

**g ∘ f:** ist $n$-mal diff. und $(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x) \left(g^{(k)} \circ f\right)(x)$, $A_{n,k}$ ist ein Polynom.

## 6.5 Potenzreihen

- Für Folge $(f_n) \in C^1, f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f, f_n' \overset{\text{glm.}}{\to} g, f,g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$. Dann $f \in C^1$ und $f' = g$. Weiter ist – $f$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ glatt – $f^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k!}{((k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$ – $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$
- Für Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $\rho > 0$, dann ist – $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_o + \rho[$ differenzierbar – $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k (x-x_0)^{k-1}\ \forall x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$
- Falls glatte Funktion $f$ in einem Intervall $]-\rho, \rho[$ die Summe iner Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit Konvergenzbereich $\rho$ ist $\implies c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
- Potenzreihen $\implies$ glatte Funktion auf ihrem Konvergenzbereich.

## 6.6 Taylor Approximation

### 6.6.1 Approximation von glatten Funktionen

Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[(n+1)$-mal differenzierbar. $\forall x, a < x \leq b\ \exists \xi \in ]a,x[, f(x) = T_n(f,x,a) + R_n(f,x,a)$ • $T_n(f,x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ • $R_N(f,x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

### 6.6.2 Taylor Approximation

Für $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]c,d[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Für $c < a < d$, $\forall x \in [c,d]$ $\exists \xi$ zwischen $x$ und $a$ (oder $a$ und $x$): $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

- Entwicklungspunkt $a$ ist Punkt wo die Annäherung startet.
- $x$ ist der Punkt welchen man annähern möchte.
- $T_n(f,x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{6} + \frac{f''''(a)(x-a)^4}{24} + \ldots \left(+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right)$

### 6.6.3 Rezept: Approximiere Punkt

Approximiere $f$ mit Entwicklungspunkt $a$ an stelle $x$ mit Taylor von Ordnung $n$

1. Leite $f$ $n$ mal ab
2. Bilder Taylorpolynom durch einsetzen von $a$ und $x$

### 6.6.4 Rezept: Finde Fehler von Taylorpolynom

Gegeben Taylorpolynom $T_n(f,x,a)$ mit $n$. Ordnung.

1. Leite $f^{(n)}$ ab
2. Bilde Restpolynom $R_N(f,x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
3. Select $\xi \in ]a,x]$ so das $R_N(f,x,a)$ maximal ist

## 6.7 Sattelpunkt und Wendepunkt

Stelle $x_0$ wo $f'(x_0) = 0$ aber kein Extremum.

**Wendepunkt:** • $f''(x_0) = 0$ • $f'(x_0) \neq 0$
**Sattelpunkt:** • $f'(x_0) = 0$ • $f''(x_0) = 0$

## 6.8 Extremaltstellen

Für $n \geq 0, a < x_0 < b, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Falls

1. $n$ gerade und $x_0$ lokales Extremum $\implies f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2. $n$ ungerade und und $f^{(n+1)}(x_0) > 0 \implies x_0$ ist eine strikte lokale Minimalstelle.
3. $n$ ungerade und und $f^{(n+1)}(x_0) < 0 \implies x_0$ ist eine strikte lokale Maximalstelle.

Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ zweimal stetig differenzierbar. Für $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$. Falls

1. $f^{(2)}(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein strike lokale Minimalstelle.
2. $f^{(2)}(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein strike lokale Maximalstelle.

## 6.9 Eigenschaften Ableitung

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | $f'''(x)$ | Eigenschaft |
|---|---|---|---|---|
| $=0$ | | | | Nullstelle |
| $=0$ | $=0$ | $\neq 0$ | | 2-fache Nullstelle |
| | $>0$ | | | Strikt Monoton Steigend |
| | $<0$ | | | Strikt Monoton Fallend |
| | $=0$ | $<0$ | | Lokales Maximum |
| | $=0$ | $>0$ | | Lokales Minimum |
| | $\neq 0$ | $=0$ | $>0$ | Wendepunkt r $\to$ l |
| | $\neq 0$ | $=0$ | $<0$ | Wendepunkt l $\to$ r |
| | $=0$ | $=0$ | $>0$ | Sattelpunkt r $\to$ l |
| | $=0$ | $=0$ | $<0$ | Sattelpunkt l $\to$ r |
| | | $>0$ | | Streng Konvex |
| | | $<0$ | | Streng Konkav |

# 7 Riemann Integral

## 7.1 Partition

$P$ von Interval $I$ ist eine endliche Teilmenge $P \subset [a,b], a < b \in \mathbb{R}$ mit $a \in P, b \in P$. • $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ • $\mathbb{P}(I)$ Menge aller $P \subset I$. • $\mathbb{P}_\delta(I)$ Menge aller $P \subset I, \max_{1\leq i\leq n} \delta_i \leq \delta$.

**Feinheit:** $\delta(P) := max_{1\leq i\leq n}\delta_i$.
**Verfeinerung:** $P'$ von $P$ falls $P \subset P'$.
**Zwischen Punkte:** $\xi_i \in I_i$.

## 7.2 Riemannsche Summe

**Riemannsche Summe:** $S(f,P,\xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i$.
**Untersumme:** $s(f,P) := \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot \inf_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$.
**Obersumme:** $S(f,P) := \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)$.

- $s(f,P_1) \leq S(f,P_2)\ \forall P_1, P_2 \subset I$.
- $s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)\ \forall P' \subset P \subset I$.

**Unteres Integral:** $s(f) := \sup_{P\in\mathbb{P}(I)} s(f,P)$.
**Oberes Integral:** $S(f) := \inf_{P\in\mathbb{P}(I)} S(f,P)$.

- $s(f) \leq S(f)$.

## 7.3 Riemann-Integrierbar

Beschränkte Funktion $f : [a,b] \to R$ ist integrierbar

- falls $s(f) = S(f) =: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- $\iff \forall\epsilon > 0\ \exists P \in \mathbb{P}(I), S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
- $\iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall P \in \mathbb{P}_\delta(I), S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$.
- mit $A := \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall P \in \mathbb{P}_\delta(I),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ |A - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i| < \epsilon$.
- $\iff \exists \lim_{\delta P\to 0} S(f,P,\xi) =: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Weitere Kriterien:

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ auf $[a,b]$ integrierbar.
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ auf $[a,b]$ integrierbar.
- $a < b < c, f : [a,c] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar $\implies f$ integrierbar und $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.
- – $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ – $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a \mathrm{d}x$
- Für kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit Endpunkten $a,b$, Funktionen $f,g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \implies \int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

## 7.4 Funktionenverknüpfung

- Für $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \implies$ – $f+g$ – $\lambda * f$ – $f \cdot g$ – $|f|$ – $\max(f,g)$ – $\min(f,g)$ – $f/g, |g(x)| > 0$ – $g(f(x))$ integrierbar.
- Für Polynome $P,Q$ und Intervall $[a,b]$, $Q$ hat keine Nullstelle $\implies R : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto P(x)/Q(x)$ integrierbar.

## 7.5 Eigenschaften

Für $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar:

- falls $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
- $\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}$.
- Für Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:
  - Für $a,b,c \in \mathbb{R}$, Intervall $[a+c, b+c] \in I \implies \int_{a+c}^{b+c} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t+c)\mathrm{d}t$.
  - Für $a,b,c \in R, c \neq 0$, Intervall $[a\cdot c, b\cdot c] \in I \implies \int_a^b f(c\cdot t)\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)\mathrm{d}x$.

## 7.6 Mittelwertsatz

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. $\implies \exists\xi\in[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

- für $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}, f$ stetig, $g$ beschränkt integrierbar und $g(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b] \implies \exists\xi\in[a,b], \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

## 7.7 Fundamentalsatz der Differentialrechnung

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies \exists$ Stammfunktion $F$ von $f$, welche bis auf eine additive Konstante eindeutig ist und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$.

- Für $a<b,\ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ a\leq x\leq b$ in $[a,b]$ stetig differenzierbar und $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$.
- Für $a<b,\ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Die **Stammfunktion** $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ von $f$ ist differenzierbar in $[a,b]$ und $F'=f$.

## 7.8 Partielle Integration

Für $a<b,\ f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar $\implies \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$.

## 7.9 Substitution

Für $a<b,\ \phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, Intervall $I\subset\mathbb{R}$ mit $\phi([a,b])\subset I$ und $f:I\to\mathbb{R}$ stetig $\implies \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$.

- Für unbestimmtes integral $\int f(x)\mathrm{d}x|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t + c$.
- Integral in der Form $\int_{t_0}^{t_1} f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t \implies$ Anwendung von links nach rechts.
- Integral in der Form $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \implies$ versuch einer Substitution mittels $x=\phi(t)$, wobei $\phi(t_0)=\alpha$ und $\phi(t_1)=\beta$.
- Für best. Integrale gibt es zwei Methoden für den Umgang mit Grenzwerten:
  - Substitution von $x=\phi(t)$, Brechung einer Stammfunktion in $x$ und ersetzten der Variable $x$ mit $t$ und Benutzung des Grenze für $t$.
  - Änderung der Grenze während der Substitution.

## 7.10 Konvergente Reihen

- Für beschränkte, integrierbare Folge von Funktionen $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ welche gleichmässig gegen Funktion $f:[a,b]\to R$ konvergieren $\implies f$ ist beschränkt integrierbare und $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Für Folge $f_n[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkter integrierbarer Funktionen, $\sum_{n=0}^\infty f_n$ auf $[a,b]$ gleichmässig konvergiert $\implies \sum_{n=0}^\infty\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^\infty f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.
- Für Potenzreihe $f(x)=\sum_{n=0}^\infty c_k x^k$ mit positiven Konvergenzradius $\rho>0 \implies \forall 0\leq r<\rho$ ist $f$ auf $[-r,r]$ integrierbar und $\forall x\in]-\rho,\rho[\ \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$.
  - Potenzreihen können auf ihrem Konvergenzbereich gliedweise differenziert und integriert werden.

## 7.11 Approximation von $n!$

**Stirling:** $n!\approx(\frac{x}{e})^n$

**Besser:** $n!\approx(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$

## 7.12 Uneigentliche Integrale

Integral mit unendlicher oder undefinierter Grenze(n).

**Konvergent:** Falls Integral existiert (Grenzwert $\in\mathbb{R}$)

**Divergent:** Ansonsten

- Für $f:[a,c[\to\mathbb{R}$ beschränkt und $\forall a<b<c$ auf $[a,b]$ integrierbar. Falls $\exists\lim_{b\to c}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =: \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \implies \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ konvergent.
  - $c$ kann undefiniert oder auch $\infty$ sein.
  - Fall für $f:]a,c]\to\mathbb{R}$ ist analog.
- Für beidseitig offene Intervalle müssen mir den Grenzwert unabhängig nehmen: $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

### 7.12.1 Überprüfe Konvergenz

- $\int_1^\infty\frac{1}{x^s}\mathrm{d}x$ konvergiert $\iff s>1$.
- Für $f,g:]a,b[\to\mathbb{R}$ stetig, $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in]a,b[$:
  - $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ konvergent $\implies \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konv.
  - $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ divergent $\implies \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ div.
- $\int_a^b|f(x)|$ konvergent $\implies$ d$x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ abs. konv.
- Für $f:[1,\infty[\to[0,\infty[$ monoton fallend. Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert $\iff \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergiert und in diesem Fall ist $0\leq\sum_{k=1}^\infty f(k) - \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x\leq f(1)$.
- Für $f(x)$ auf $[a,\infty[$ stetig, monoton fallend und $\lim_{x\to\infty}=0 \implies$ : – $\int_a^\infty \sin x\mathrm{d}x$ – $\int_a^\infty\cos x\mathrm{d}x$ konvergieren.
- Für $f(x)$ auf $]a,b]$ stetig. Falls $f(x)(x-a)^2$ monoton wachsend und $\lim_{x\to a^+}f(x)(x-a)^2=0 \implies$ : – $\int_a^b f(x)\sin(\frac{1}{x-a})\mathrm{d}x$ – $\int_a^b f(x)\cos(\frac{1}{x-a})\mathrm{d}x$ konvergieren.

### 7.12.2 Gamma Funktion

- $\Gamma:]0,\infty[\to]0,\infty[$
- $\Gamma(s) :=\mapsto \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x = (n-1)!$
- $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$.
- $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}x = \Gamma(\frac{1}{2})$.

Folgende Eigenschaften beschreiben die Gamma Funktion eindeutig: 1. $\Gamma(1)=1$ 2. $\gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ \forall s>0$ 3. $\Gamma(s)$ ist logarithmisch konvex: $\Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\Gamma(x)^\lambda\Gamma(y)^{1-\lambda}\ \forall x,y>0,\ 0\leq\lambda\leq 1$

- $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t = \Gamma(\frac{1}{2})$

## 7.13 Rationale Funktionen

$R(x)=P(x)/Q(x),\ P(x),Q(x)$ sind Polynome, $x\mapsto\frac{P(x)}{Q(x)}$.

- 

### 7.13.1 Partialbruchzerlegung

$\int R(x)\mathrm{d}x, R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

1. **Reduktion**
   - Falls grad$(P)\geq$ grad$(Q)$ führe Polynomdivision durch: $P(x)=S(x)Q(X)+\hat{P}(x)$
   - $\implies \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x)+\frac{\hat{P}(x)}{Q(x)}$
2. **Zerlegung**

- $n := grad(Q)$
- $\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots \alpha_l \pm i\beta_l, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ paarweise verschiedene Nullstellen.
- $Q(x) = \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j} \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i}$
- $\frac{P(x)}{Q(x)} = (S(x)+) \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}+B_{ij}x}{\left((x-\alpha_i)^2+\beta_i^2\right)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j}, \exists A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}.$
- Finde eindeutige $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ durch Koeffizientenvergleich.

3. **Integration der Partialbrüche**

## 7.14 Gerade und Ungerade Funktionen

**Gerade Funktionen:** $f(x) = f(-x)$

- $f$ gerade $\implies f'$ ungerade.
- $f$ gerade, integrierbar $\implies \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = 0.$
- $f, g$ gerade $\implies f \cdot g$ gerade.
- $f$ gerade, $g$ ungerade $\implies f \cdot g$ ungerade.

**Ungarade Funktionen:** $-f(x) = f(-x)$

- $f$ ungerade $\implies f'$ gerade.
- $f$ ungerade, integrierbar $\implies \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{A} f(x)\mathrm{d}x.$
- $f, g$ ungerade $\implies f \cdot g$ gerade.
- $f$ ungerade, $g$ gerade $\implies f \cdot g$ ungerade.