Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

HOJA 2.2. - EJERCICIOS SOBRE DEFINICIONES RECURSIVAS Curso 2018/2019

---

1. Considera la definición recursiva de la sucesión de números de Fibonacci:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}\ \ (n \geq 3)$$

Demuestra que $f_n \leq n!$ para todo $n \geq 1$.

2. Para las siguientes pretendidas definiciones recursivas calcula, cuando sea posible, los correspondientes valores de s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, y cuando ello no sea posible, explica por qué es incorrecta la definición recursiva de la correspondiente sucesión s_n:

$$\begin{array}{llll} i) & s_0 = 1 & s_1 = 1 & s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}\ \ (n \geq 2) \\ ii) & s_0 = 1 & s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}\ \ (n \geq 1) & \\ iii) & s_0 = 0 & s_n = ns_{n-1}\ \ (n \geq 1) & \end{array}$$

3. Considera las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}$ definidas por:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3 & \text{si } n = 2 \\ g(n-1) + g(n-2) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Usando inducción completa, demuestra que $g(n) = f(n) + f(n-2)$, para todo $n \geq 2$.

4. Considera la función $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida recursivamente como sigue:

$$f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(n) = 3 * f(n-1) - 2 * f(n-2)\ \ (n \geq 3)$$

Razonando por inducción, demuestra que $f(n) = 2^n + 1$, para todo $n \geq 1$.

5. En los casos que siguen, encuentra una definición explícita de s_n, alternativa a su definición recursiva, y demuestra por inducción que es correcta.

$$i)\ \ s_1 = 1,\quad s_n = s_{n-1} + 3\ \ (n \geq 2) \qquad\qquad ii)\ \ s_1 = 1,\quad s_n = n^2 * s_{n-1}\ \ (n \geq 2)$$

6. Considera la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(2n) = 4f(n),\ \text{ para todo } n \geq 1 \\ f(2n+1) = 4f(n) + 4n + 1,\ \text{ para todo } n \geq 0 \end{array}$$

Construye una tabla de valores de $f(n)$ para $n = 0, \ldots, 5$, y demuestra por inducción completa que $f(n) = n^2$, para todo n natural.

7. Considera la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente por medio de:

$$f(0, m) = m,\ f(n, m) = f(n-1, n * m)\ \ (n \geq 1)$$

- Para m arbitrario, calcula razonadamente los valores de $f(0, m)$, $f(1, m)$, $f(2, m)$ y $f(3, m)$.
- Conjetura una expresión de $f(n, m)$ y demuéstrala por inducción sobre n. Observa, en particular, la expresión obtenida para $f(n, 1)$. ¿Corresponde a alguna función conocida?