Temas 3 y 4: Conjuntos, funciones y relaciones. Cuarta parte

David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

Def:

Dado un conjunto A, $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es

- *una relación de orden (ordinario o parcial) si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

  Notación: *Para referirse a un orden parcial suele utilizarse el símbolo* $\sqsubseteq$.
  $x \sqsubseteq y$ se lee x *precede a* y o x *es menor o igual a* y.

- *una relación de orden estricto si y sólo si es antirreflexiva y transitiva.*

  Notación: *Para referirse a un orden estricto suele utilizarse el símbolo* $\sqsubset$.
  $x \sqsubset y$ se lee x *precede estrictamente a* y o x *es menor que* y.

- *un orden lineal o total si y sólo si es una relación de orden conexa.*
- *un orden estricto lineal u orden estricto total si y sólo si es una relación de orden estricto conexa.*

Def:

Decimos que dos elementos distintos x, y *son* *incomparables* *bajo un orden* $\sqsubseteq$ *(o* $\sqsubset$*) sii* $x \not\sqsubseteq y \wedge y \not\sqsubseteq x$ $\quad$ *(o* $x \not\sqsubset y \wedge y \not\sqsubset x$*)*

Obs: En un orden total dos elementos cualesquiera son siempre comparables.

Ej: Las siguientes relaciones son órdenes ordinarios:

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \;\; x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \leq y$ (Orden total)
2. $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1, \;\; x\mathcal{R}y \equiv_{def} x|y$ (No es orden total: $3 \not| 5, 5 \not| 3$)
3. Dado un conjunto cualquiera A,
   $\mathcal{R} \subseteq \wp(A) \times \wp(A), \quad X\mathcal{R}Y \equiv_{def} X \subseteq Y$
   (En general no es orden lineal: $A = \mathbb{N}, \;\; \{0,1\} \not\subseteq \{1,2\}, \;\; \{1,2\} \not\subseteq \{0,1\}$)
4. $\mathcal{R} \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \;\; (x,y)\mathcal{R}(x',y') \equiv_{def} x \leq x' \wedge y \leq y'$
   (No es orden lineal: $(1,2) \not\mathcal{R} (2,1), \;\; (2,1) \not\mathcal{R} (1,2)$)

Ej: Las siguientes relaciones son órdenes estrictos:

1. $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \;\; x\mathcal{S}y \equiv_{def} x < y$ (Orden estricto total)
2. $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1, \;\; x\mathcal{S}y \equiv_{def} x|y \;\wedge\; x \neq y$ (No es orden estricto total)
3. Dado un conjunto cualquiera A,
   $\mathcal{S} \subseteq \wp(A) \times \wp(A), \;\; X\mathcal{S}Y \equiv_{def} X \subset Y$
   (En general no es orden estricto lineal)
4. $\mathcal{S} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \;\; (x,y)\mathcal{S}(x',y') \equiv_{def} x < x' \wedge y < y'$
   (No es orden estricto lineal)

Ej: La siguiente relación no es de orden:

$$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \mid y$$

No es antisimétrica: $2 \mid -2 \wedge -2 \mid 2 \wedge 2 \neq -2$.

Def:

- *Dado $\sqsubseteq$ orden sobre A, su orden estricto asociado $\sqsubset$ se define como:*

$$x \sqsubset y \equiv_{def} (x \sqsubseteq y) \wedge (x \neq y) \quad (x, y \in A)$$

- *Dado $\sqsubset$ orden estricto sobre A, su orden parcial asociado $\sqsubseteq$ se define como:*

$$x \sqsubseteq y \equiv_{def} (x \sqsubset y) \vee (x = y) \quad (x, y \in A)$$

- *Dado $\sqsubseteq$ orden sobre A, su relación inversa también es un orden, que se denota por $\sqsupseteq$ y se conoce como orden inverso asociado a $\sqsubseteq$:*

$$x \sqsupseteq y \equiv_{def} y \sqsubseteq x \quad (x, y \in A)$$

- *Dado $\sqsubset$ orden estricto sobre A, su relación inversa también es un orden estricto, que se denota por $\sqsupset$ y se conoce como orden inverso asociado a $\sqsubset$:*

$$x \sqsupset y \equiv_{def} y \sqsubset x \quad (x, y \in A)$$

DEF:

Un conjunto ordenado es un par $(A, \sqsubseteq)$ formado por un conjunto A y un orden $\sqsubseteq$ definido sobre A.

> *Decimos entonces que A está ordenado o que tiene estructura de orden o que ha sido dotado de un orden.*

Si además $\sqsubseteq$ es un orden total, se dice que $(A, \sqsubseteq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{N}^+, |)$ *(Orden de divisibilidad)*
2. Dado un conjunto cualquiera A, $(\wp(A), \subseteq)$ *(Orden de inclusión)*
3. $(\mathbb{N}, \leq)$ *(Orden de magnitud)* Conjunto totalmente ordenado.

Representación gráfica de conjuntos ordenados finitos: **Diagramas de Hasse**

Dado $(A, \sqsubseteq)$:

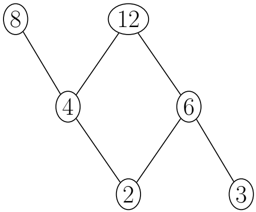
- Cada elemento de A se representa por medio de un punto (o círculo).
- Se traza una línea ascendente entre los puntos x e y si $x \sqsubseteq y$ y además no hay ningún z tal que $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$.

De este modo, las líneas que se deducen por transitividad o reflexividad no se pintan.

Ej:

$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

$\forall x, y \in A \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$



$(A, |)$

Relaciones de Orden

Órdenes derivados.

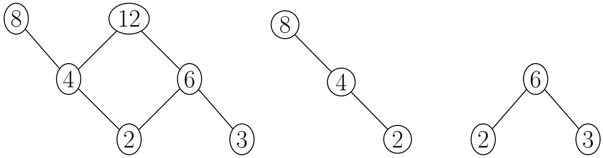
Prop: Si $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una relación de orden y $S \subseteq A$, entonces la **restricción** de $\mathcal{R}$ a S, $\mathcal{R} \restriction S \equiv_{not} \mathcal{R}\Big|_S = \mathcal{R} \cap (S \times S)$ también es un orden.

Cor: Si $(A, \mathcal{R})$ un conjunto ordenado y $S \subseteq A$, entonces $(S, \mathcal{R} \cap (S \times S))$ también es un conjunto ordenado.

Ej:

$A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\} \qquad \forall x, y \in A \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$

$S = \{2, 4, 8\} \qquad S' = \{2, 3, 6\}$



$(A, |)$ $\qquad$ $(S, |_S)$ $\qquad$ $(S', |_{S'})$

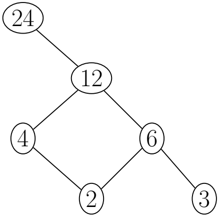
Def:

Siendo $(A, \sqsubseteq)$ *un conjunto ordenado y* $S \subseteq A$, *decimos que* S *es una* *cadena* *dentro de* $(A, \sqsubseteq)$, *si* $\sqsubseteq \big|_S$ *es un orden lineal.*

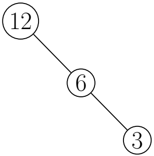
Ej:

$A = \{2, 3, 4, 6, 12, 24\} \qquad \forall x, y \in A \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$

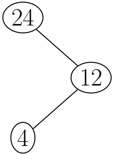
$S = \{3, 6, 12\}$ y $S' = \{4, 12, 24\}$ son cadenas dentro de $(A, |)$



$(A, |)$



$(S, |_S)$



$(S', |_{S'})$

Def:

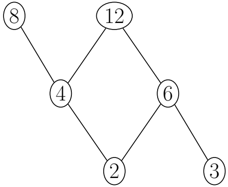
Dados un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y $S \subseteq A$, decimos que $x \in S$ es

1) *el máximo de S, $maxS$, si $y \sqsubseteq x \ \ \forall y \in S$*
2) **maximal** *en S si $\nexists\, y \in S \ \ x \sqsubset y$*
3) *el mínimo de S, $minS$, si $x \sqsubseteq y \ \ \forall y \in S$*
4) **minimal** *en S si $\nexists\, y \in S \ \ y \sqsubset x$*

- Elementos extremos: máximo y mínimo.
- Elementos extremales: los maximales y los minimales.

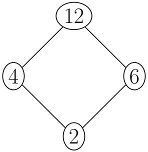
Ejs:

1) $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
$\forall x, y \in A \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$
Maximales: 8, 12
Minimales: 2,3
$8 \nmid 12, \quad 12 \nmid 8, \quad 2 \nmid 3, \quad 3 \nmid 2$
No tiene máximo ni mínimo.



$(A, |)$

2) $S = \{2, 4, 6, 12\} \subseteq A$
Maximal: 12
Minimal: 2
$\max S = 12$
$\min S = 2$



$(S, |_S)$

3) $(\mathbb{N}, \leq)$
Minimal: 0
min$\mathbb{N} = 0$
$\nexists$ max$\mathbb{N}$
No tiene maximales

4) $(\mathbb{Z}, \leq)$
No tiene maximales ni minimales, ni por tanto máximo ni mínimo

Def:

Dados un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ *y* $S \subseteq A$, *decimos que* $x \in A$ *es*

1) *cota superior de* S *si* $y \sqsubseteq x \quad \forall y \in S$

$$Sup(S) =_{def} \{x \in A \,/\, x \text{ es cota superior de } S\}$$

2) *Si* $\exists\ minSup(S)$ *se le llama supremo y se denota* $\sqcup S$

$$\sqcup S =_{def} minSup(S)$$

3) *cota inferior de* S *si* $x \sqsubseteq y \quad \forall y \in S$

$$Inf(S) =_{def} \{x \in A / x \text{ es cota inferior de } S\}$$

4) *Si* $\exists\ maxInf(S)$ *se le llama ínfimo y se denota* $\sqcap S$

$$\sqcap S =_{def} maxInf(S)$$

Obs:

- Si existen $\max S$ y $\min S$ pertenecen a S.
- Si existen $\sqcup S$ y $\sqcap S$ pertenecen a A, pero pueden no pertenecer a S.

Prop: Dados un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y $S \subseteq A$

1) si $\exists$ $\max S$ entonces $\sqcup S = \max S$
2) si $\exists$ $\min S$ entonces $\sqcap S = \min S$

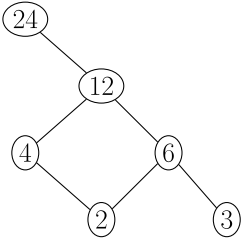
Prop: Dados un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y $S \subseteq A$

1) $\max S$ es maximal en S.
1) si existe $x = \max S$ entonces x es el único maximal en S.
3) $\min S$ es minimal en S.
4) si existe $x = \min S$ entonces x es el único minimal en S.

Ej:

$B = \{2, 3, 4, 6, 12, 24\} \qquad \forall x, y \in B \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$
$S = \{4, 6, 2, 3\}$

$\nexists$ max$S$, $\nexists$ min$S$
$Sup(S) = \{12, 24\} \quad \sqcup S = 12$
$Inf(S) = \emptyset \quad \nexists \sqcap S$



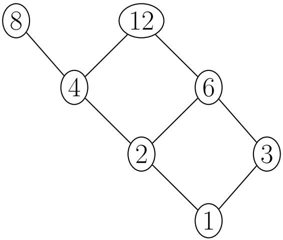
$(B, |)$

Ej:

$A = \{1,2,3,4,6,8,12\}$ $\quad \forall x,y \in A \;\; x \sqsubseteq y \equiv_{def} x \mid y$
$S = \{1,4,6,2,3\}$
$T = \{4,6,2,3\}$

$\nexists\ \max S\ ,\ \ \min S = 1$
$Sup(S) = \{12\} \quad \sqcup S = 12$
$Inf(S) = \{1\} \quad \sqcap S = 1 = \min S$

$\nexists\ \max T\ ,\ \nexists\ \min T$
$Sup(T) = \{12\} \quad \sqcup T = 12$
$Inf(T) = \{1\} \quad \sqcap T = 1$



$(A, |)$

Relaciones de Orden

Extensión de un orden parcial.

Def:

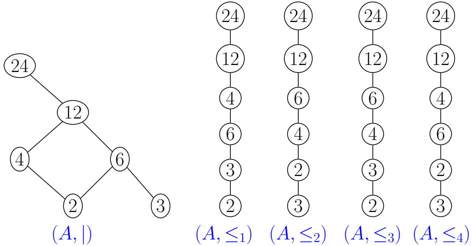
Dado $\sqsubseteq$ orden parcial sobre A, se llama **extensión total** *de $\sqsubseteq$ a cualquier orden $\leq$ sobre A que cumpla*

1. *$\leq$ es un orden lineal, y*
2. $\forall x, y \in A\ (x \sqsubseteq y \to x \leq y)$ *(o sea $\sqsubseteq \subseteq \leq$)*

Teorema: Todo orden sobre un conjunto A puede extenderse a un orden total.

(• Caso de conjuntos finitos: problema de ordenación topológica)

Ej:



Def:

Dados dos conjuntos ordenados $(A, \sqsubseteq_A)$ *y* $(B, \sqsubseteq_B)$ *y una función* $f : A \to B$, *decimos que*

1) f *es monótona* *si* $\forall x, y \in A \ \ (x \sqsubseteq_A y \to f(x) \sqsubseteq_B f(y))$
2) f *preserva el orden* *si* $\forall x, y \in A \ \ (x \sqsubseteq_A y \leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_B f(y))$
3) f *es un isomorfismo de orden* *si es biyectiva y preserva el orden.*
   - *Automorfismo:* *isomorfismo de orden de* $(A, \sqsubseteq)$ *en* $(A, \sqsubseteq)$
4) $(A, \sqsubseteq_A)$ *y* $(B, \sqsubseteq_B)$ *son isomorfos si existe un isomorfismo de orden entre ellos.*

Ejs:

1. $P = \{2i / i \in \mathbb{N}\}$ $\quad I = \{2i+1 / i \in \mathbb{N}\}$
   $f : P \to I, \quad f(2i) = 2i + 1$ es un isomorfismo de orden entre $(P, \leq)$ e $(I, \leq)$

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = n + 1$ es un automorfismo de $(\mathbb{Z}, \leq)$

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n^2$ preserva el orden (habitual) de $\mathbb{N}$, ya que $x \leq y \leftrightarrow x^2 \leq y^2$, pero no es un isomorfismo de orden, ya que no es biyectiva.

4. $f : \wp(\mathbb{Z}) \to \wp(\mathbb{Z}), \quad f(X) = \{x^2 / x \in X\}$ es monótona respecto al orden de la inclusión, pero no preserva el orden de la inclusión:
   - Monótona: $\forall X, Y \in \wp(\mathbb{Z}), \quad (X \subseteq Y \to f(X) \subseteq f(Y))$

     Dem: $\quad f(X) = \{x^2 / x \in X\} \subseteq \{x^2 / x \in Y\} = f(Y)$
   - No preserva el orden de la inclusión:

     $X = \{2, 3\}, \quad Y = \{-2, 3\}, \quad f(X) = \{4, 9\} = f(Y)$

     luego $f(X) \subseteq f(Y)$ pero $X \not\subseteq Y$

Teorema: Si $f : A \to B$ es un isomorfismo entre los conjuntos ordenados $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$, se tiene $\forall x \in A$:

1) $x = \max A \ \leftrightarrow \ f(x) = \max B$
2) x es maximal en $A \ \leftrightarrow \ f(x)$ es maximal en B.
3) $x = \min A \ \leftrightarrow \ f(x) = \min B$
4) x es minimal en $A \ \leftrightarrow \ f(x)$ es minimal en B.

Es decir, los isomorfismos de orden preservan los elementos extremos y los extremales

Ej: $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$ no son isomorfos, ya que $0 = \min \mathbb{N}$, pero $\nexists \min \mathbb{Z}$.

Def:

- *Dado $\sqsubseteq$ orden parcial sobre A, se dice que es un orden bien fundamentado si cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq A$ tiene algún elemento minimal con respecto a $\sqsubseteq$.*
- *Buen orden: orden bien fundamentado y lineal.*

Teorema:

Dado $\sqsubseteq$ orden parcial sobre A, se tiene que
$\sqsubseteq$ está bien fundamentado si y sólo si
no puede formarse ninguna sucesión infinita decreciente

$s_0 \sqsupset s_1 \sqsupset \cdots \sqsupset s_i \sqsupset s_{i+1} \sqsupset \cdots$ de elementos $s_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$.

Ejs:

1. $\subseteq$ sobre $\wp(\mathbb{N})$ no es un orden bien fundamentado:

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \cdots$$

2. $\subseteq$ sí es un orden bien fundamentado sobre $F = \{X \in \wp(\mathbb{N}) \,/\, X \text{ es finito } \}$, pero no es un buen orden, porque no es lineal.

3. $\leq$ es un buen orden sobre $\mathbb{N}$.

4. $\leq$ no es un buen orden sobre $C = \{x \in \mathbb{Q}/x \geq 0\}$:

$$S = \{\frac{1}{2^n} \,/\, n \in \mathbb{N}\} \subset C, \quad S \neq \emptyset, \text{ pero } S \text{ no tiene elemento minimal y}$$

$$\frac{1}{2^0} > \frac{1}{2^1} > \cdots > \frac{1}{2^i} > \frac{1}{2^{i+1}} \cdots$$