TEOREMA DE GAUSS

Vimos en el vídeo anterior como el teorema de Stokes se podía aplicar a "superficies" $S \subset \mathbb{R}^3$ que son:

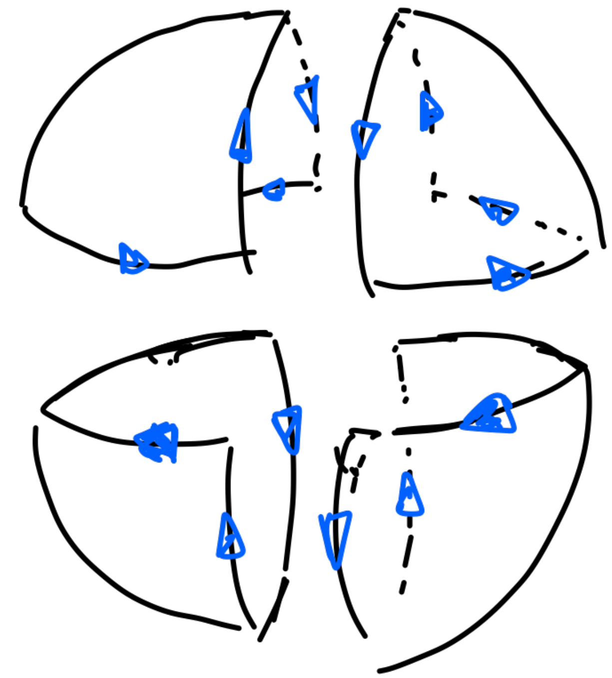
la unión de superficies paramétricas con borde SIMPLES (parametrizadas por el interior de una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$)

unidas por sus bordes de forma que cada borde común se recorre una vez en cada dirección.

$\circledast$

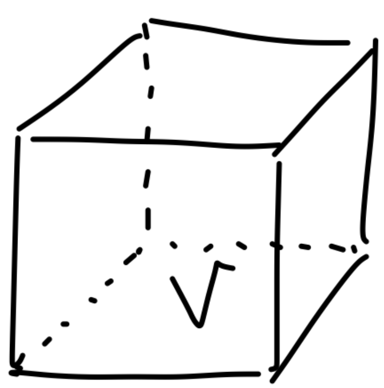
DEFINICIÓN: Llamaremos $\boxed{\text{SÓLIDO SIMPLE}}$ a todo abierto acotado V que es homeomorfo a la bola unidad euclídea y tal que su frontera ∂V es una superficie del tipo $(*)$.

Ej: La bola unidad euclídea

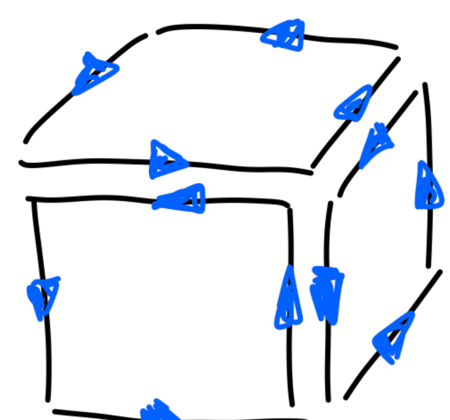


∂V

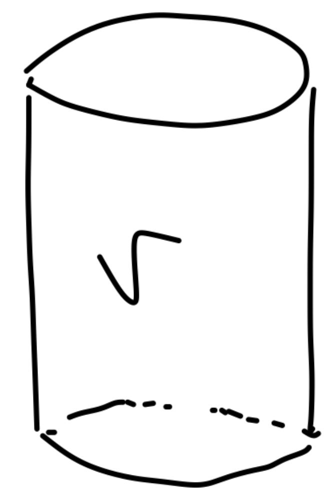
Ej: Un cubo (bola en $\|\cdot\|_\infty$)



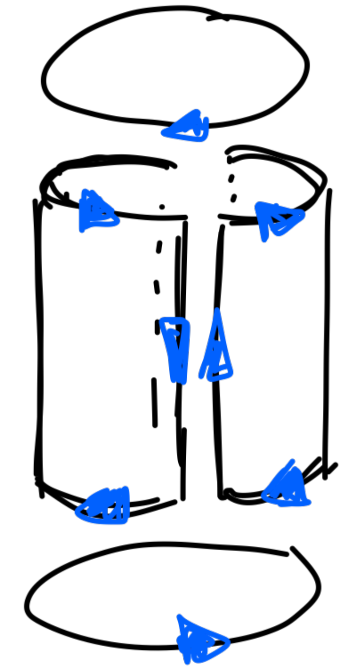
∂V = unión de las caras



Ej: cilindro con tapas



∂V



Teorema (Gauss): Sea V un sólido simple. ∂V orientado con la normal exterior. $\vec{F}$ de clase C^1.

Entonces

$$\iiint_V \mathrm{div}(\vec{F}) = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

int. usual

int. superficie

Ejercicio Sea $\vec{F} = 2x\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ y S la esfera unidad $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$. orientada con la normal ext. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Por Tma Gauss aplicado a $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ tenemos $(\partial B = S)$

$\mathrm{div}(\vec{F}) = 2(1+y+z)$

1ª parte curso

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_B \mathrm{div}(\vec{F}) = 2\iiint_B (1+y+z)\,dx\,dy\,dz = \frac{8\pi}{3}$$

Interpretación geométrica de la divergencia.

div($\vec{F}$) cart.

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{F})(p_0)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_r)} \iiint_{B_r} \operatorname{div}(\vec{F})$$

$B_r = B(p_0; r)$

Gauss

$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B(p_0,r))} \iint_{\partial B_r} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$=$ **flujo por unidad de volumen.** (infinitesimal)