Álvaro Delgado Aguado

① Razonemos paso a paso tratando de hacer intervenir una matriz auxiliar, como hemos razonado en otras ocasiones.
Primeramente, tendremos que ver que en efecto existe dicha matriz que queremos emplear.
Para ello, sabemos que A admite factorización LU gracias a las hipótesis del problema (los menores principales son distintos de cero).
En estas condiciones, tenemos pues que $A = L \cdot U$ con L triangular inferior de diagonal unitaria y U triangular superior (de hecho, de manera única).

$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$
Sabemos también que, $\det(L) = 1$, pues al ser una matriz triangular coincide con el producto de los elementos de su diagonal, que son todo unos.
De igual manera, tenemos que $\det(U) = \prod_1^n u_{ii} \neq 0$ (pues $\det(A) = \det(U)$ y A es en particular inversible).
Por tanto, tenemos que $u_{ii} \neq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$
Sea entonces la matriz diagonal $D := \operatorname{diag}(u_{ii})$. Por lo que acabamos de comentar, sabemos que es inversible y existe D^{-1}.

Ahora es cuando expresamos A como $A = LU = LDD^{-1}U$
Como LD es una matriz producto de triangular inferior por diagonal, sigue siendo triangular inferior
Como $D^{-1}U$ es producto de una matriz diagonal (pues D es diagonal) por triangular superior, sigue siendo triangular superior.
Sea entonces $B = LD$ y $C = D^{-1}U$. Queda ver por tanto quiénes son los elementos de la diagonal de $C = D^{-1}U$.
Como hemos visto y razonado reiteradas ocasiones en clase, tenemos que los elementos de $D^{-1} = \operatorname{diag} \frac{1}{d_{ii}}$ y al ser D^{-1} diagonal, los elementos del producto en la diagonal se corresponden con:
$C_{ii} = D^{-1}{}_{ii} U_{ii} = \frac{1}{d_{ii}} \cdot U_{ii} = \frac{1}{U_{ii}} U_{ii} = 1$, que es lo queríamos.

Para verificar la unicidad, recurriremos de manera análoga a la unicidad demostrada en el Teorema de la factorización LU.

Tenemos que ver que si $B \cdot C = A = B^* C^*$ en las condiciones del enunciado $\Rightarrow B = B^*$ y $C = C^*$.
Tenemos $\det(C) = \det(C^*) = 1$ y $\det(B) = \det(B^*) = \det(A) \neq 0$, con lo que existen sus matrices inversas.
Así, llegamos a que $(B^*)^{-1} B = C^* C^{-1}$.
Como C es una matriz triangular superior con unos en la diagonal principal, la matriz C^{-1} es también una matriz triangular superior con unos en la diagonal. C^* también es matriz triangular superior con unos en la diagonal.
Entonces: $C^* C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \ast \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. También, como $(B^*)^{-1}$ y B son triangulares inferiores: $(B^*)^{-1} B = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ \ast & \ast \end{pmatrix}$

Por tanto llegamos a que $(B^*)^{-1} B = I = C^* C^{-1} \Rightarrow B = B^*$ y $C = C^*$ ☒

Scanned by CamScanner

②

a) Partamos de que A es una matriz invertible, luego $det(A) \neq 0$.

Como $L_1U_1 = A = L_2U_2 \Rightarrow det(L_1U_1) = det(A) = det(L_2U_2) \Rightarrow det(L_1)\,det(U_1) = \overset{\neq 0}{det(A)} = det(L_2)\cdot det(U_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow det(L_1), det(U_1), det(L_2), det(U_2) \neq 0 \Rightarrow L_1, U_1, L_2, U_2$ son inversibles.

Por tanto, podemos transformar la siguiente igualdad $L_1U_1 = L_2U_2$ en $U_1\cdot U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$

Apreciamos ahora que, el término izquierdo de la igualdad el una matriz triangular superior por ser producto de dos triangulares superiores (pues U_2^{-1} lo es por serlo U_2).

Análogamente, tenemos que, razonando con matrices triangulares inferiores y sus productos, el producto $L_1^{-1}L_2$ es también una matriz triangular inferior. Llamaremos a estos términos Notacionalmente "D", i.e:

$U_1U_2^{-1} = D = L_1^{-1}L_2$, pues son una matriz diagonal, ya que posee la propiedad de ser al mismo tiempo matriz triangular superior y matriz triangular inferior.

Se sigue entonces que $\begin{cases} U_1U_2^{-1} = D \Rightarrow U_2 = D^{-1}U_1 \\ L_1^{-1}L_2 = D \Rightarrow L_2 = L_1D \end{cases}$

b) De manera análoga al apartado previo, consideremos que A admite factorización Cholesky.

Tenemos entonces que $B_1B_1^T = A = B_2B_2^T$. Nuevamente, como $det(A) \neq 0$, tenemos que $\begin{cases} det(B_1) = det(B_1^T) \neq 0 \\ det(B_2) = det(B_2^T) \neq 0 \end{cases}$
Así, tenemos inversibilidad en estas matrices, y por tanto:

$B_1B_1^T = A = B_2B_2^T \Leftrightarrow (B_1^T)(B_2^T)^{-1} = (B_1)^{-1}B_2$. Ahora bien, por hipótesis de la factorización Cholesky, tenemos que B_1 y B_2 son triangulares inferiores, y por ende, B_1^T y B_2^T triangulares superiores.

Es por ello que, las inversas de estas últimas, i.e: $(B_1^T)^{-1}$ y $(B_2^T)^{-1}$ siguen siendo triangulares superiores.

Hechas estas consideraciones, tenemos que $(B_1^T)(B_2^T)^{-1}$ es una matriz triangular superior (por ser producto de dos triangulares superiores), y que $(B_1)^{-1}B_2$ es una matriz triangular inferior por ser producto de dos triangulares inferiores, pues $(B_1)^{-1}$ lo es por serlo B_1. Entonces, como es una matriz triangular inferior y triangular superior al mismo tiempo, ha de ser diagonal ("D"). $\Rightarrow (B_1^T)(B_2^T)^{-1} = D = (B_1)^{-1}B_2$

Se sigue entonces que $\begin{cases} (B_1^T)(B_2^T)^{-1} = D \Rightarrow B_1^T = DB_2^T \\ (B_1)^{-1}B_2 = D \Rightarrow B_2 = B_1D \end{cases}$. Yendo más lejos, tenemos que tomando "traspuestas" en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera, obtenemos que $I = DD^T \Rightarrow D^T = D^{-1}$.

Reescribiendo, finalmente tenemos que $\begin{cases} B_2^T = D^{-1}B_1^T \\ B_2 = B_1D \end{cases}$

c) En las hipótesis del apartado, se tiene que $A = A^T$ (por ser A simétrica), admitiendo factorización LU con L triangular inferior de diagonal unitaria y U triangular superior. Entonces:

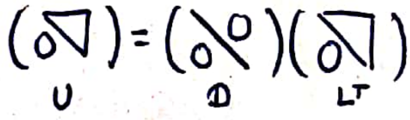
$LU = A = A^T = (LU)^T = U^TL^T$.

Como L es triangular inferior $\Rightarrow L^T$ es triangular superior $\Rightarrow \exists (L^T)^{-1}$ es triangular superior.

Como U es triangular superior $\Rightarrow U^T$ es triangular inferior $\Rightarrow \exists (U^T)^{-1}$ es triangular inferior.

Se sigue que $U(L^T)^{-1} = (L^{-1})U^T$ (donde la $\exists$ de inversas se justifica como he seguido anteriormente a lo largo de toda la práctica). Tenemos que $U(L^T)^{-1}$ es triangular superior por ser producto de dos triangulares superiores. De igual manera, $(L^{-1})U^T$ es triangular inferior por ser producto de dos triangulares inferiores.

Entonces, la matriz que tenemos resulta ser diagonal ("D"), tal que entonces $U(L^T)^{-1} = D = (L^{-1})U^T \Rightarrow$
$\Rightarrow U = D\cdot L^T$. Tenemos pues el siguiente dibujo ilustrativo:



Atendiendo al producto de matrices, obtenemos que cada $u_{ij} = \langle D_i \cdot (L^T)_j \rangle$ (donde D_i concierne a la fila i-ésima de D y L^T_j a la columna j-ésima de L^T). Debido al aspecto de D, tenemos que $u_{ij} = d_{ii}\cdot \ell^T_{ij} = d_{ii}\ell_{ji}$

Entonces, fijando "i" (filas) en U, apreciamos que cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L si variamos "j", que es justo lo que queríamos ver.

Scanned by CamScanner

3)

a) Suponiendo que tal relación fuera cierta, ¿quiénes habrían de ser x, y, β?

Atendiendo al producto matricial por bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^T & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}y \\ \hline x^T U_{n-1} & x^T y + \beta \end{array}\right)$$

En efecto, es posible, ya que:

- Por un lado, $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ por admitir factorización LU entre las hipótesis
- Queda por verificar la coherencia de $\begin{cases} x^T U_{n-1} = a^T \\ L_{n-1} y = b \\ x^T y + \beta = \alpha \end{cases}$, para ver que $\exists x, y, \beta$ como se nos pide.

Garanticemos la $\exists$ de x:

Por hipótesis, tenemos que A_{n-1} es inversible con lo que $\det(A_{n-1}) \neq 0$.

Además, por hipótesis, tenemos que $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1} \Rightarrow \det(A_{n-1}) = \det(L_{n-1})\det(U_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow$ En particular, $\det(U_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow U_{n-1}$ es inversible. Se sigue entonces, multiplicando por U_{n-1}^{-1}: $x^T = a^T U_{n-1}^{-1} \Rightarrow \exists x = (U_{n-1}^{-1})^T a$

Para garantizar la $\exists$ de y; basta tener en cuenta que, en particular, por el mismo argumento de antes de la inversibilidad de A_{n-1}, L_{n-1} es inversible, multiplicando convenientemente por L_{n-1}^{-1} se obtiene que $\exists y = L_{n-1}^{-1} b$

La $\exists$ de β se sigue trivialmente de su definición, pues se acaba de garantizar en las líneas anteriores la $\exists$ de x y de y.

b) Probemos el caso base con $n=1$:

Si $n=1$, el único menor principal es la "matriz escalar", que si es distinto de 0, i.e, $a_{11} \neq 0$, entonces se tiene que trivialmente $\underset{A_1}{a_{11}} = \underset{L_1}{1} \cdot \underset{U_1}{a_{11}}$

Corroboremos el paso inductivo; supongamos la hipótesis de inducción cierta para $n-1$, i.e:

Si todos los menores principales de A_{n-1} son distintos de cero, entonces $\exists L_{n-1}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $\exists U_{n-1}$ triangular superior tal que $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$.

Supongamos que todos los menores principales de A_n son distintos de cero. En particular, δ_{n-1}, el penúltimo menor principal es distinto de cero, que es el determinante correspondiente a A_{n-1} (identificada según el apartado a) de este problema). Entonces, A_{n-1} es inversible. Aún más; de hecho todos los menores principales hasta $n-1$ en particular son distintos de cero, por lo que, por la hipótesis de inducción aplicada a A_{n-1}, tenemos que $\exists L_{n-1}$ triangular inferior de diagonal unitaria, y $\exists U_{n-1}$ triangular superior, tal que $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$

Entonces, como se decía un par de líneas más arriba, aplicando el apartado a) al estar en las hipótesis tenemos que:

$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)}_{L_n}\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)}_{U_n}$$

, donde para concluir, basta apreciar que L_n es una matriz triangular inferior (pues la es L_{n-1} y el vector columna colindante tiene sus coord. de por encima de la diagonal nulas) y de diagonal unitaria (pues la diagonal desde l_{11} hasta $l_{n-1\,n-1}$ es unitaria por el aspecto de L_{n-1} y el l_{nn} añadido es un 1), y que U_n es una matriz triangular superior (pues lo es U_{n-1} y el vector fila colindante tiene sus coord. de la izquierda de la diagonal nulas).

Scanned by CamScanner