Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf.

Lista 5.-

Número 5.20.- Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos radialmente abiertos.

En primer lugar, recordamos que un conjunto W es radialmente abierto si $\forall p \in W$ y toda recta L que pasa por p $\exists I$ intervalo abierto centrado en p con $I \subset W \cap L$.

Vamos a probar que no es ni primer ni segundo axioma, sí es separable y no es Lindelöf.

Comenzamos viendo que no es IAx, es decir, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\forall \beta^{(x,y)}$ base de entornos de (x,y), esta base no es numerable.

Si tomamos $(x,y)=(0,0)$ el resultado es cierto. Supongamos que no, es decir, $\exists \beta^{(0,0)} = \{U_k : k \geq 1\}$ base de entornos (que podemos suponer abiertos) del punto $(0,0)$. Como los U_k son radialmente abiertos y $(0,0) \in U_k$ $\forall k \geq 1$ tenemos que, dada la recta $L_k \equiv (x,y) = \lambda v_k$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y v_k es el vector que forma un ángulo $\frac{\pi}{2k}$ con el eje X, $\exists I_k$ intervalo abierto centrado en $(0,0)$ y contenido en $L_k \cap U_k$. Entonces I_k es de la forma $I_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \lambda v_k , |\lambda| < \varepsilon_k\}$ para cierto $\varepsilon_k > 0$.

Podemos tomar para cada $k \geq 1$ el punto $p_k = \lambda_k v_k$ con $0 < |\lambda_k| < \min\{\varepsilon_k, \frac{1}{k}\}$, es decir, $p_k \in (I_k \cap B((0,0),\frac{1}{k})) \setminus \{(0,0)\}$ $\forall k \geq 1$.

Veamos que $U = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{k \geq 1} \{p_k\}$ es un entorno abierto de $(0,0)$ pero $U_k \not\subset U$ $\forall k \geq 1$.

Es claro que $(0,0) \in \mathcal{U}$ y vamos a ver que $\mathcal{U}$ es radialmente abierto. Sea $p \in \mathcal{U}$.

Si $p \neq (0,0)$, como el único punto de acumulación de $(p_k)_{k\geq 1}$ es el $(0,0)$, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \cap \bigcup_{k\geq 1} \{p_k\} = \emptyset$, es decir, $B(p,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Dada una recta L que pasa por p basta tomar como intervalo abierto centrado en p $I = B(p,\varepsilon) \cap L \subset \mathcal{U} \cap L$.

Si $p = (0,0)$ sea L una recta que pasa por $(0,0)$. Como $L \equiv (x,y) = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, distinguimos los casos en los que $v = v_k$ para algún $k \geq 1$ y $v \neq v_k$ $\forall k \geq 1$.

En el primer caso, como $v_i \neq v_j$ $\forall i \neq j$ se tiene que $L \setminus \{p_k\} \subset \mathcal{U}$. Como $p_k = \lambda_k v_k \neq (0,0)$ basta tomar $I = B\left((0,0), \frac{|\lambda_k|}{2}\right) \cap L \subset \mathcal{U} \cap L$

En el segundo caso $L \subset \mathcal{U}$ luego basta tomar $I = L \subset \mathcal{U} \cap L$.

Por tanto, $\mathcal{U}$ es radialmente abierto. Por otro lado, $\mathcal{U}_k \not\subset \mathcal{U}$ $\forall k \geq 1$. En efecto, dado $k \geq 1$ $p_k \in I_k \subset \mathcal{U}_k$, pero $p_k \notin \mathcal{U}$. Esto quiere decir que $\mathcal{U}$ es un entorno abierto de $(0,0)$ pero ningún elemento de la base de entornos $\beta^{(0,0)}$ está contenido en $\mathcal{U}$, lo que supone una contradicción. Concluimos que el plano con la topología de los conjuntos radialmente abiertos no es primer axioma.

Como $\mathrm{II}Ax \Rightarrow \mathrm{I}Ax$ llegamos a la conclusión de que tampoco es segundo axioma.

Para ver que es separable basta considerar el conjunto $\mathbb{Q}^2$. Sabemos que $\mathbb{Q}^2$ es numerable y, para ver que es denso, es suficiente ver que corta a todo abierto (no vacío).

Sea W un conjunto radialmente abierto no vacío y sea $(x_0, y_0) \in W$. Por ser radialmente abierto, dada la recta horizontal $L_1 \equiv (x,y) = (x_0, y_0) + \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda}(1,0)$, $\exists\, I_1 \equiv (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda(1,0)$ con $|\lambda| < \lambda_1$ e $I_1 \subset L_1 \cap W$. Entonces $I_1 = (x_0 - \lambda_1, x_0 + \lambda_1) \times \{y_0\}$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ $\exists\, q_1 \in (x_0 - \lambda_1, x_0 + \lambda_1) \cap \mathbb{Q}$. Por tanto, $(q_1, y_0) \in I_1 \subset L_1 \cap W \subset W$ y $q_1 \in \mathbb{Q}$. Como $(q_1, y_0) \in W$ y W es radialmente abierto, dada la recta vertical $L_2 \equiv (x,y) = (q_1, y_0) + \lambda(0,1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ $\exists\, I_2 \equiv (x,y) = (q_1, y_0) + \lambda(0,1)$ con $|\lambda| < \lambda_2$ e $I_2 \subset L_2 \cap W$. Nuevamente, $I_2 = \{q_1\} \times (y_0 - \lambda_2, y_0 + \lambda_2)$ y por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ $\exists\, q_2 \in (y_0 - \lambda_2, y_0 + \lambda_2) \cap \mathbb{Q}$. Por tanto, $(q_1, q_2) \in I_2 \subset L_2 \cap W \subset W$, luego $(q_1, q_2) \in W \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset$.
Esto prueba que $\mathbb{Q}^2$ es denso y, como es numerable, concluimos que el plano $\mathbb{R}^2$ con esta topología es separable.

Por último, falta ver que no es Lindelöf. Consideramos una circunferencia C cualquiera. Como C es un conjunto cerrado en la topología usual y la topología de los conjuntos radialmente abiertos es más fina que la usual, C es cerrado en la topología de los conjuntos radialmente abiertos.
(C cerrado usual $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ abierto usual $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ radialmente abierto $\Leftrightarrow C$ "radialmente cerrado")
Vimos en el ejercicio Número 1.21.- que la topología radial inducía sobre circunferencias la topología discreta. Con esto, para probar que no es Lindelöf procedemos por reducción al absurdo. Si fuera Lindelöf, sabemos que Lindelöf se hereda a subespacios cerrados (cerrado en Lindelöf es Lindelöf), luego C con la topología de subespacio (la discreta) es Lindelöf. Como los puntos son abiertos, se puede recubrir la circunferencia por todos ellos, pero, como la circunferencia es no numerable y si quitamos algún punto ya no es

recubrimiento, no podemos extraer ningún subrecubrimiento numerable, lo que contradice que C sea Lindelöf. Llegamos a contradicción de haber supuesto que el plano con la topología de los conjuntos radialmente abiertos es Lindelöf.

En resumen, el plano con esta topología no es IAx, no es IIAx, sí es separable y no es Lindelöf.

Número 5.25.- Demostrar que un espacio topológico metrizable es separable si y sólo si es Lindelöf, si y sólo si cumple el segundo axioma de numerabilidad.

Vimos en clase que en cualquier espacio topológico, no necesariamente metrizable, se verifica que si X es segundo axioma entonces X es separable. Para ello basta construir el conjunto denso eligiendo un punto de cada elemento de la base.

Vamos a ver que separable en espacio métrico implica segundo axioma.

Por hipótesis $\exists A \subset X$ un conjunto denso y numerable. Basta entonces considerar como base de abiertos:

$$\mathcal{B} = \{ B(x, \tfrac{1}{n}) : x \in A, n \in \mathbb{N} \}$$, es decir, las bolas abiertas con centro en los puntos de A y radios $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Como A es numerable y la unión numerable de numerables es numerable, entonces $\mathcal{B}$ es numerable. Además las bolas abiertas son conjuntos abiertos con la topología definida por la distancia. Falta por ver que es base, es decir, que $\forall x \in X$ y todo $\mathcal{U}^x$ entorno abierto de x $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}^x$.

Sea $x \in X$ y $\mathcal{U}^x$ entorno abierto suyo. Como $\mathcal{U}^x$ es abierto $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}^x$. Podemos ahora elegir un $n \in \mathbb{N}$

suficientemente grande para que $\frac{2}{n} < \varepsilon$ luego

$$B(x,\tfrac{1}{n}) \subset B(x,\tfrac{2}{n}) \subset B(x,\varepsilon) \subset \mathcal{U}^x.$$

Como $B(x,\frac{1}{n})$ es un conjunto abierto y A es denso

$\exists\ y \in B(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $d(x,y) < \frac{1}{n}$ e $y \in A$.

Por tanto $x \in B(y,\frac{1}{n})$. $B(y,\frac{1}{n})$ va a ser nuestro conjunto $B \in \beta$, así que tenemos que demostrar que $B(y,\frac{1}{n}) \subset \mathcal{U}^x$. Es claro que $B(y,\frac{1}{n}) \in \beta$ porque es una bola abierta con centro $y \in A$ y radio el inverso de un natural. Para ver lo otro será suficiente con probar que

$B(y,\frac{1}{n}) \subset B(x,\frac{2}{n})$. En efecto, dado $z \in B(y,\frac{1}{n})$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \Longrightarrow z \in B(x,\frac{2}{n})$ y queda probado el resultado.

Veamos ahora que si X es segundo axioma entonces es Lindelöf, sin necesidad de que el espacio sea metrizable.

Sea $(U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos y, por hipótesis, existe $\mathcal{B} = \{B_n : n \geq 1\}$ una base de abiertos numerable. Para cada $n \geq 1$ realizamos la siguiente construcción: Si $\exists\, i \in I$ tal que $B_n \subset U_i$ entonces $V_n = U_i$ para cualquiera de los i que cumplan esta propiedad, da igual cuál. Si no existe entonces podemos tomar $V_n = \emptyset$. Veamos ahora que la familia $\mathcal{V} = \{V_n : n \geq 1\}$ es un subrecubrimiento numerable de X. Que es numerable es claro porque por cada B_n construimos un V_n y $\mathcal{B}$ es numerable. Para ver que es subrecubrimiento sea $x \in X$. Como los $(U_i)_{i\in I}$ formaban un recubrimiento

$\exists i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como U_{i_0} es un conjunto abierto y $\mathcal{B}$ es una base entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_0} \subset U_{i_0}$. Por tanto $\exists i \in I$ tal que $B_{n_0} \subset U_i$ luego $V_{n_0} \neq \emptyset$ y $V_{n_0} = U_{i_1}$ para cierto $i_1 \in I$, con $x \in B_{n_0} \subset V_{n_0} = U_{i_1}$. Por tanto $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ luego

$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. y queda probado el resultado.

Por último, vamos a ver que si X es un espacio metrizable y Lindelöf entonces es separable

Para cada $n \in \mathbb{N}$ las familias $\mathcal{F}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ son todas ellas un recubrimiento por abiertos de X, ya que cada punto esta contenido en la bola abierta de centro ese punto y radio el que toque $(\frac{1}{n})$. Por ser Lindelöf, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos extraer un subrecubrimiento numerable de la familia $\mathcal{F}_n$ que denotamos por $\mathcal{G}_n$ y es de la forma $\mathcal{G}_n = \{B(x_n^k, \frac{1}{n}) : k \geq 1\}$. Consideramos el conjunto $A = \{x_n^k : n \geq 1, k \geq 1\}$. A es numerable y para ver que es denso sea $x \in X$ y U^x entorno abierto de x. Entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U^x$ y para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Como $\mathcal{G}_{n_0}$ es recubrimiento $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B(x_{n_0}^{k_0}, \frac{1}{n_0})$ luego $d(x, x_{n_0}^{k_0}) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por tanto $x_{n_0}^{k_0} \in B(x, \varepsilon) \subset U^x$, es decir, $A \cap U^x \neq \emptyset$. Esto prueba que A corta a todo entorno abierto, es decir, es denso.

Hemos concluido la demostración porque hemos probado para X metrizable

$$\text{Separable} \underset{(\Leftarrow)}{\Rightarrow} \mathrm{II}\,Ax \Rightarrow \text{Lindelöf} \Rightarrow \text{Separable}.$$