Examen Estadística

Pregunta 2:- m.a.s. $(X_1 - - X_n)$

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x) \qquad \begin{array}{l}\theta \in \mathbb{R} \\ \lambda > 0\end{array}$$

a) Estimador de máxima verosimilitud.

La función de verosimilitud es $L(\theta|x_1 - - x_n) = f(x_1 - - x_n|\theta) =$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(x_i-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x_i)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} \cdot I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i} e^{\frac{n\theta}{\lambda}} \cdot I_{(-\infty, x_{(1)}]}(\theta)$$

Esta función es creciente cuando $\theta \leq x_{(1)}$ como función de θ porque $\frac{n}{\lambda} > 0$ y la exponencial es creciente. Por tanto, el máximo de la función cuando $\theta \in (-\infty, x_{(1)}]$ es para $\theta = x_{(1)}$. Por tanto, el estimador de máxima verosimilitud existe y es $\hat{\theta}_{MV} = X_{(1)}$.

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D

b) Test de la razón de verosimilitudes para contrastar

$H_0: \theta \leq 0$

$H_1: \theta > 0$

La región de rechazo en estos test viene dada por

$RC = \{(x_1 \dots x_n) \mid \lambda(x_1 \dots x_n) \leq k\}$ con k, $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta[\phi]$

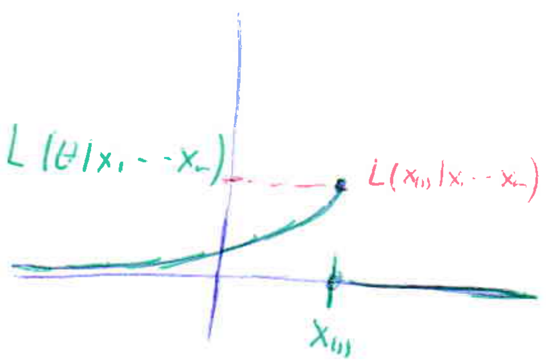
y $\lambda(x_1 \dots x_n) = \dfrac{\sup_{\theta \leq 0} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\}}{\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\}}$ para cierto α dado.

Ya hemos visto que $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\}$ se alcanza cuando

$\theta = x_{(1)}$ por lo que

$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\} = L(x_{(1)} \mid x_1 \dots x_n)$.

Si representamos la función podremos obtener más fácilmente $\sup_{\theta \leq 0} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\}$



Si $x_{(1)} > 0$ entonces

$\sup_{\theta \leq 0} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\} = L(0 \mid x_1 \dots x_n)$

Si $x_{(1)} \leq 0$ entonces

$\sup_{\theta \leq 0} \{L(\theta \mid x_1 \dots x_n)\} = L(x_{(1)} \mid x_1 \dots x_n)$

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D

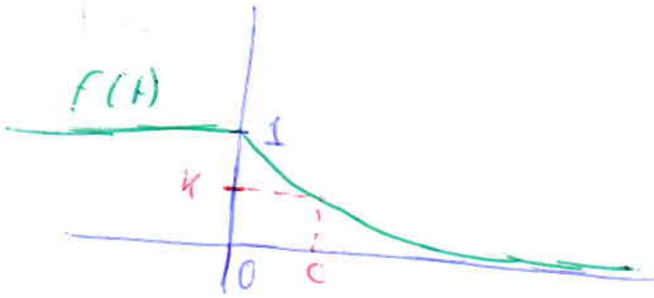
Esto es

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\theta \le 0} \{L(\theta | x_1 \dots x_n)\}}{\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \{L(\theta | x_1 \dots x_n)\}} = \begin{cases} \dfrac{L(0|x_1 \dots x_n)}{L(x_{(1)}|x_1 \dots x_n)} & \text{si } x_{(1)} > 0 \\ \dfrac{L(x_{(1)}|x_1 \dots x_n)}{L(x_{(1)}|x_1 \dots x_n)} & \text{si } x_{(1)} \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum x_i} e^{\frac{n \cdot 0}{\lambda}} I_{(-\infty, x_{(1)}]}(0)}{\frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum x_i} e^{\frac{n x_{(1)}}{\lambda}} I_{(-\infty, x_{(1)}]}(x_{(1)})} & \text{si } x_{(1)} > 0 \\ 1 & \text{si } x_{(1)} \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} e^{-\frac{n x_{(1)}}{\lambda}} & \text{si } x_{(1)} > 0 \\ 1 & \text{si } x_{(1)} \le 0 \end{cases}$$

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = f(x_{(1)}) \quad \text{con } f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{nt}{\lambda}} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t \le 0 \end{cases}$$



Como $e^{-\frac{nt}{\lambda}}$ es decreciente en t

$$RC = \{(x_1 \dots x_n) \mid \lambda(x_1 \dots x_n) \le k\} = \{(x_1 \dots x_n) \mid f(x_{(1)}) \le k\} =$$

$$= \{(x_1 \dots x_n) \mid x_{(1)} \ge c\} \quad \text{para cierto } c.$$

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D

La región de rechazo es por tanto:

$$RC = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_{(1)} \geq c\}$$ con c tal que

$$\sup_{\theta \leq 0} E_\theta[\phi(X_1 \dots X_n)] = \alpha$$ siendo $\phi(X_1 \dots X_n)$ es test de hipótesis

$$\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{(1)} \geq c \\ 0 & \text{si } x_{(1)} < c \end{cases}$$

c) La función de potencia es:

$$\beta(\theta) = E_\theta[\phi(X_1 \dots X_n)] = P_\theta(X_{(1)} \geq c) = 1 - F_{X_{(1)}}(c)$$

Calculamos la distribución del mínimo para dar la solución concreta

$$F_{X_{(1)}}(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(y) = n(1 - F_X(y))^{n-1} f_X(y).$$

$$F_X(x) = \int_\theta^x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}(t-\theta)} dt = \frac{e^{\frac{\theta}{\lambda}}}{\lambda} \int_\theta^x e^{-\frac{t}{\lambda}} dt =$$

$$= \frac{e^{\theta/\lambda}}{\lambda} \left[- \frac{e^{-t/\lambda}}{1/\lambda} \right]_\theta^x = e^{\theta/\lambda}\left(e^{-\theta/\lambda} - e^{-x/\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda} + \frac{\theta}{\lambda}}$$

$\Longrightarrow$

$$f_{X_{(1)}}(y) = n\left(e^{-\frac{y}{\lambda}+\frac{\theta}{\lambda}}\right)^{n-1}\frac{1}{\lambda}\,e^{-\frac{y}{\lambda}+\frac{\theta}{\lambda}}\cdot I_{[\theta,\infty)}(y) =$$

$$= \frac{n}{\lambda}\,e^{-\frac{yn}{\lambda}+\frac{\theta n}{\lambda}}\,I_{[\theta,\infty)}(y).$$

Ahora $F_{X_{(1)}}(y) = \int_\theta^y \frac{n}{\lambda} e^{-\frac{tn}{\lambda}+\frac{\theta n}{\lambda}}\,dt = \frac{n}{\lambda} e^{\frac{\theta n}{\lambda}} \int_\theta^y e^{-\frac{tn}{\lambda}}\,dt =$

$$= \frac{n}{\lambda} e^{\frac{\theta n}{\lambda}}\left[\frac{e^{-tn/\lambda}}{-n/\lambda}\right]_\theta^y = e^{\frac{\theta n}{\lambda}}\left(e^{-\frac{\theta n}{\lambda}} - e^{-\frac{yn}{\lambda}}\right) =$$

$$= 1 - e^{-\frac{yn}{\lambda}+\frac{\theta n}{\lambda}}$$

Si volvemos a la función de potencia:

$$\Lambda(\theta) = P_\theta(X_{(1)} \geq c) = 1 - P_\theta(X_{(1)} \leq c) = 1 - F_{X_{(1)}}(c) =$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{cn}{\lambda}+\frac{\theta n}{\lambda}}\right) = e^{-\frac{cn}{\lambda}}\cdot e^{\frac{\theta n}{\lambda}}.$$

Esta función es creciente en θ por ser la exponencial una función creciente y $\frac{n}{\lambda} > 0$.

Juan Carlos Llamas Núñez   Juan Carlos   11867802-D