Hoja 5 – Convergencias estocásticas

1.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normales de media 0 y varianza 1. Estudiar la convergencia en probabilidad de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$, donde $Y_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

2.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli(p), con $0 < p < 1$. Sea la variable aleatoria $V_n = X_1 X_2 ... X_n$. Estudiar la convergencia en ley, la convergencia en probabilidad y la convergencia casi segura de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$.

3.- Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 4^{-1}\exp\{-x/2\}, & \text{si } x > 0, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Se pide:

(3.a) Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley $\mathcal{L}(X)$. Hallar la distribución de

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$, donde $V_n = n^{-2} Y_n$.

(3.b) Sea Z_n una variable aleatoria tal que $Z_n/X = x$ es Poisson de parámetro nx. Calcular la distribución de Z_n y estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Z_n : n \geq 1\}$.

4.- Demostrar que si $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que converge en ley a la constante c, entonces la sucesión $\{e^{X_n} : n \geq 1\}$ converge en ley hacia e^c. Usar este resultado para estudiar la convergencia en ley y en probabilidad de

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n},$$

donde $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniformes sobre el intervalo $(0, 1)$.

5.- Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y definamos

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}}.$$

Estudiar la convergencia en ley de $\{Y_n : n \geq 0\}$ cuando:

(5.a) $X_i \sim$ Normal $(0, \sigma^2)$, $i \geq 0$.

(5.b) $X_i \sim$ Cauchy $(0, 1)$, $i \geq 0$.

6.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con funciones de densidad

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + (nx)^2}.$$

Estudiar la convergencia en probabilidad y la convergencia en media de orden 2 de $\{X_n : n \geq 1\}$.

7.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones Poisson de parámetro n. Demostrar que

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en ley a X, donde X es una variable aleatoria Normal $(0, 1)$.

8.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniforme sobre $(0, 1)$. Consideremos

$$\begin{aligned} Y_n &= \max(X_1, ..., X_n), \\ Z_n &= nY_n, \\ T_n &= n^{\alpha}(1 - Y_n). \end{aligned}$$

Estudiar la convergencia en ley de las sucesiones $\{Y_n : n \geq 1\}$, $\{Z_n : n \geq 1\}$ y $\{T_n : n \geq 1\}$.

9.- Estudiar si las siguientes sucesiones de variables aleatorias independientes cumplen la ley débil y/o la ley fuerte de los grandes números:

(9.a) $\{X_n : n \geq 1\}$, donde

$$\begin{aligned} P(X_n = 2^n) &= P(X_n = -2^n) = \frac{1}{2^{2n+1}}, \\ P(X_n = 0) &= 1 - \frac{1}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

(9.b) $\{X_n : n \geq 1\}$, donde

$$P\left(X_n = \sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = P\left(X_n = -\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = \frac{1}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

10.- Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$, donde $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con función de masa

$$P\left(X_i = \frac{1}{2^i}\right) = P\left(X_i = -\frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2}.$$

11.- Sea X una variable aleatoria Exponencial de tasa λ. Sea

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } X(\omega) \in [0, 1 - 1/n), \\ 1, & \text{si } X(\omega) \in [1 - 1/n, n), \\ n, & \text{si } X(\omega) \in [n, \infty). \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media de orden 2 y casi segura de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$.

12.- Una empresa está especializada en la producción de tuercas. La experiencia en los últimos años muestra que la probabilidad de producir una tuerca defectuosa es 0.035. Las tuercas se empaquetan en cajas de 100 unidades. Determinar el porcentaje de cajas sin más de dos tuercas defectuosas.

13.- Una urna contiene diez bolas numeradas del cero al nueve. De la urna se extraen n bolas con reemplazamiento.

(13.a) Señalar qué dice la ley de los grandes números sobre la aparición de ceros.

(13.b) Determinar cuántas extracciones será preciso efectuar para que, con probabilidad 0.95, la frecuencia relativa de aparición de ceros esté comprendida entre 0.09 y 0.11.

(13.c) Utilizar el teorema central del límite para calcular la probabilidad de que, entre los n números elegidos, el 'cinco' aparezca entre $(n - 3\sqrt{n})/10$ y $n + 3\sqrt{n}$. Particularizar para $n = 25$ y $n = 100$.

14.- Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes donde X_i tiene función de masa

$$P(X_i = -2) = P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = P(X_i = 2) = \frac{1}{4i},$$
$$P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}.$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media cuadrática y casi seguro. Analizar si se cumple la ley fuerte de los grandes números.

15.- Sea ξ una variable aleatoria Uniforme sobre el intervalo $(-1/\theta, 1/\theta)$. Se definen las variables aleatorias $\eta = \theta\xi$ y

$$X_i(\omega) \quad = \quad \begin{cases} -1, & \text{si } \eta(\omega) \in [-1, -1/i), \\ 0, & \text{si } \eta(\omega) \in [-1/i, 1/i), \\ 1, & \text{si } \eta(\omega) \in [1/i, 1). \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad, casi segura y en media cuadrática de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$.

16.- La duración de una bombilla se distribuye Exponencial con media 1 mes. Cada vez que una bombilla se estropea es reemplazada inmediatamente por otra nueva. Determinar cuál es el número mínimo de bombillas que deben tenerse para que, con probabilidad 0.95, tengamos luz durante un intervalo de tiempo de dos años.