De esta manera

La condición $x^2+y^2+z^2=a^2$ nos implica que

$$r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\varphi + r^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = a^2 \iff r^2\left(\text{sen}^2\varphi(\text{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\varphi\right)=a^2$$

$$\iff r^2=a^2 \underset{\text{Suponemos } a>0}{\Longrightarrow} r=a$$

La condición $x+y+z=0$ nos implica que

$$r\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + r\cos\varphi = 0 \underset{r>0}{\iff} \cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi + \cos\varphi = 0$$

De aquí podemos despejar el $\text{sen}^2\varphi$ en función de θ como

$$\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi}$$ y elevando al cuadrado

$$\text{sen}^2\varphi\,(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)^2 = 1-\text{sen}^2\varphi \iff \text{sen}^2\varphi = \frac{1}{1+(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)^2}$$

También $$\cos^2\varphi = 1-\text{sen}^2\varphi = \frac{(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)^2}{1+(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)^2}$$

Nótese que $(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta+\text{sen}^2\theta+2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 1+\text{sen}\,2\theta$

Por tanto

$$\text{sen}\,\varphi = (-1)^k\frac{1}{\sqrt{2+\text{sen}\,2\theta}}$$

$$\cos\varphi = (-1)^\ell\frac{\sqrt{1+\text{sen}\,2\theta}}{\sqrt{2+\text{sen}\,2\theta}}$$

con k y ℓ funciones de θ y que no nos interesa su valor.