Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2018-19

Derivabilidad. Hoja 7.

En esta hoja de ejercicios hay algunos que son de Cálculo. Para tener ejemplos relevantes (yendo más allá de los polinomios y potencias de racionales) vamos a utilizar funciones como e^x, x^α (con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$), $\ln(x)$, funciones trigonométricas, etc.. Podemos utilizar las propiedades conocidas de estas funciones (incluyendo sus derivadas) aunque no las hayamos deducido formalmente. Los ejercicios en donde se pueden utilizar estas propiedades están marcados con el símbolo (*).

157 Usar la definición de derivada para calcular la derivada de las funciones siguientes en un punto arbitrario de su dominio de definición.
a) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, c) $h(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

158 Probar que la función $f(x) = x^{1/3}$ no es diferenciable en $x = 0$.

159 i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, que está definida por $f(x) = 1$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ¿Es f derivable en algún punto?
ii) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $g(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que g es derivable en $x = 0$ y calcular $g'(0)$. ¿En qué puntos es la función g continua?
iii) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = x$ para $x \in \mathbb{Q}$ y $h(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de h.

160 Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^n$ para $x > 0$ y $f(x) = 0$, para $x \leq 0$. ¿Para qué valores de n la función f' es continua en $x = 0$? ¿Para qué valoers de n la función f' es derivable en $x = 0$?

161 Probar que la derivada de una función par es impar y la de una función impar es par. (**Observación:** Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice par si verifica $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y se dice impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$)

162 (*) Determina los valores $r \in \mathbb{R}$ para los que la función $f(x) = x^r \sin(\frac{1}{x})$ (con $f(0) = 0$) tiene derivada en $x = 0$.

163 (*) Deriva y simplifica:
a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, b) $g(x) = \sqrt{5 - 2x + x^2}$, c) $h(x) = (\sin(x^k))^m$, con $m, k \in \mathbb{N}$.

164 (*) Sabiendo que la función $\tan(x)$ es una función estrictamente creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$, calcula la derivada de la función inversa, que la denotamos por $f(y) = \arctan(y)$.

165 Para cada una de las funciones siguientes calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento/decrecimiento.
a) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, b) $g(x) = 3x - 4x^2$, $x \in \mathbb{R}$, c) $h(x) = x^4 + 2x^2 - 4$, $x \in \mathbb{R}$
d) $k(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, e) $l(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, f) $m(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$, $x > 0$.

166 Si a_1, a_2, $\dots a_n$ son números reales, ¿Dónde se alcanza el valor mínimo de la función $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$? Interpretar el resultado obtenido.

167 (*) Usar el Teorema del Valor Medio para probar:
a) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$,
b) $\dfrac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1$, $x > 1$ (Podeis usar que la derivada del $\ln(x)$ es $1/x$ para $x > 0$)

168 (*) a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^4+x^4\sin(1/x)$ para $x\neq 0$ y $f(0)=0$. Probar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y tiene un mínimo absoluto en $x=0$. Sin embargo la derivada de f toma valores positivos y negativos en todo entorno de 0.

b) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=x+2x^2\sin(1/x)$ para $x\neq 0$ y $g(0)=0$. Probar que g es derivable en $\mathbb{R}$, $g'(0)=1$ y sin embargo la función g' toma valores negativos y positivos en todo entorno de 0.

169 Sea I un intervalo. Probar que si una función $f:I\to\mathbb{R}$ es diferenciable y existe una contante L tal que $|f'(x)|\leq L$ para todo $x\in I$, entonces f es una función Lipschitz con constante de Lipschitz L.

170 Sea I un intervalo. Probar que si una función $f:I\to\mathbb{R}$ es diferenciable y $f'(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces la función es estrictamente creciente.

171 Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $h(x)=a$, $x<0$, $h(x)=b$, $x>0$ y $h(0)=c$, con $a\neq b$. Probar que no puede existir ninguna función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=h(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Dar dos funciones f_1 y f_2 tales que $f_1'(x)=f_2'(x)=h(x)$ para todo $x\neq 0$ y tal que f_1-f_2 no es una constante.

172 Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones diferenciables con $f(0)\leq g(0)$ y $f'(x)\leq g'(x)$ para todo $x>0$. Probar que se tiene $f(x)\leq g(x)$ para todo $x\geq 0$.

173 (*) Evalúa los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2(x)}{x^4}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\sin(x)}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(x)}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$, g) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^n\ln(x)$, h) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n e^{-x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$, con $\alpha>0$ j) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$, k) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin(x))^x$, l) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$, n) $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^c-c^x}{x^x-c^c}$, para $c>0$

174 (*) Para las siguientes funciones, obtener el desarrollo de Taylor de grado n centrado en $x_0=0$, y una expresión para el resto:

a) e^x, b) $\sin(x)$, c) $\cos(x)$, d) $\ln(1-x)$, e) $\dfrac{1}{1-x}$,

Para las funciones de a), b) y c) probar que el resto del polinomio de Taylor de orden n converge a 0 cuando $n\to\infty$ para todo x_0 y x.

175 (*) Sea la función $h(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x\neq 0$ y $h(0)=0$. Probar que h es continua en $x=0$. Probar además que $h^{n)}(0)=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Probar que el resto de Taylor centrado en $x_0=0$ y $x\neq 0$ no converge a 0 cuando $n\to\infty$.

176 (*) Si $x\in[0,1]$ y $n\in\mathbb{N}$ probar que se tiene

$$\left|\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right|<\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Usar esta desigualdad para aproximar $\ln(1'5)$ con un error menor de 0'01 y 0'001.

Utilizar esta desigualdad para probar que la serie armónica alternada (que sabemos que converge) lo hace a $\ln(2)$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln(2)$$

177 (*) Calcular el número e con las primeras 7 cifras decimales correctas.

178 Supongamos que I es un intervalo y que la función $f : I \to \mathbb{R}$ satisface que es dos veces diferenciable en todo $x \in I$ y verifica $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Si $c \in I$, probar que la gráfica de f en I no está por debajo de la recta tangente a la gráfica en el punto $(c, f(c))$.

179 Probar que la función $f(x) = x^3 - 2x - 5$ tiene una raíz, que llamaremos r, en el intervalo $I = [2, 2'2]$. Si consideramos la sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por el método de Newton empezando con $x_1 = 2$, probar que se tiene $|x_{n+1} - r| \leq 0{,}7|x_n - r|^2$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} x_n = r$. Probar que x_4 coincide con r en las primeras 6 cifras decimales.