Corrección de la Semántica Axiomática

Lema 9.17: $\vdash_p \{P\}\ S\ \{Q\} \Rightarrow\ \models_p \{P\}\ S\ \{Q\}$

Dem: Por inducción sobre la derivación de $\vdash_p \{P\}\ S\ \{Q\}$

- $S =$ while b do S'

$$\frac{\vdash_p \{\mathcal{B}[\![b]\!] \wedge P\}\ S'\ \{P\}}{\vdash_p \{P\}\ S\ \underset{\{\neg \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge P\}}{\{Q\}}} \qquad \overset{h.i}{\Rightarrow} \qquad \models_p \{\mathcal{B}[\![b]\!] \wedge P\}\ S'\ \{P\}$$

Hemos de probar $\models_p \{P\}\ S\ \{\neg \mathcal{B}[\![b]\!] \wedge P\}$, o sea que

$$\forall s \quad Ps \quad \langle S, s\rangle \to s'' \Rightarrow \begin{cases} \neg \mathcal{B}[\![b]\!] s'' \\ P(s'') \end{cases} \wedge$$

Ahora necesitamos inducción sobre la derivación de $\langle S, s\rangle \to s''$

- Si $\neg \mathcal{B}[\![b]\!] s$ tenemos $\langle S, s\rangle \to s$, cumpliéndose $\begin{cases} \neg \mathcal{B}[\![b]\!] s \\ P(s) \end{cases} \wedge$
- Si $\mathcal{B}[\![b]\!] s$ tenemos $\dfrac{\langle S', s\rangle \to s' \quad \langle S, s'\rangle \to s''}{\langle S, s\rangle \to s''}$

Ahora de $\models_p \{\mathcal{B}[\![b]\!] \wedge P\}\ S'\ \{P\}$

$$\mathcal{B}[\![b]\!] s \qquad P(s) \qquad P(s')$$

Y aplicando la inducción sobre la derivación de $\langle S, s\rangle \to s''$ podemos suponer que $\langle S, s'\rangle \to s''$ cumple la correspondiente tesis, ya que tenemos $P(s')$, concluyéndose directamente $\neg \mathcal{B}[\![b]\!] s'' \wedge P(s'')$

Observación: La "inducción sobre la derivación de $\langle S, s\rangle \to s''$" NO es aquí una inducción "general", sino que SOLO se refiere a derivaciones de S, que aquí es FIJO.