Facultad de Matemáticas. UCM
TOPOLOGÍA ELEMENTAL

Raquel Díaz, Francisco Gallego Lupiañez, Feliciana Serrano, Jesús M. Ruiz

PROBLEMAS[1]

Lista 0. Para empezar

Número 0.1. Comprobar las leyes distributivas para la unión y la intersección de conjuntos, y las leyes de De Morgan.

Número 0.2. Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y subconjuntos $A_0 \subset A, B_0 \subset B$.
(1) Demostrar que $A_0 \subset f^{-1}(f(A_0))$ y que se da la igualdad si f es inyectiva.
(2) Demostrar que $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ y que se da la igualdad si f es sobreyectiva.

Número 0.3. Se consideran una aplicación $f : A \to B$ y colecciones de subconjuntos $A_i \subset A$ y $B_i \subset B$.
(1) Probar que f^{-1} conserva inclusiones, uniones, intersecciones y diferencias:
(a) Si $B_i \subset B_j$, entonces $f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(B_j)$.
(b) $f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$.
(c) $f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
(d) $f^{-1}(B_i \setminus B_j) = f^{-1}(B_i) \setminus f^{-1}(B_j)$.
(2) Demostrar que f conserva solamente las uniones y las inclusiones:
(a) Si $A_i \subset A_j$, entonces $f(A_i) \subset f(A_j)$.
(b) $f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$.
(c) $f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$; se da la igualdad si f es inyectiva.
(d) $f(A_i \setminus A_j) \supset f(A_i) \setminus f(A_j)$; se da la igualdad si f es inyectiva.

Número 0.4. Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable. Probar que el intervalo $[0, 1]$ no es numerable, y que por tanto no lo es $\mathbb{R}$.

Número 0.5. *(Distancias en $\mathbb{R}^n$)* Comprobar que cada una de las siguientes es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y estudiar cómo son las bolas en cada una de ellas.

$$d(x,y) = \sqrt{\sum\nolimits_i (x_i - y_i)^2}, \quad \rho_1(x,y) = \sum\nolimits_i |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

Para la primera, utilizar la *desigualdad triangular o de Minkowsky*:

$$\sqrt{\sum\nolimits_i (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum\nolimits_i a_i^2} + \sqrt{\sum\nolimits_i b_i^2}\,.$$

Número 0.6. Sea $X = \mathcal{C}([0, 1])$ el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$. Probar que las siguientes fórmulas definen distancias en X:

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt}, \quad \rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt, \quad \rho_2(f,g) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - g(t)|.$$

¿Cómo se parecen a las distancias en $\mathbb{R}^n$ del ejercicio anterior?

[1] 18 de septiembre de 2020

Número 0.7. *(Distancias acotadas)* Una distancia ρ en M es *acotada* si existe una constante A tal que $\rho(x,y) \leq A$ para todos $x, y \in M$. Probar que si ρ es una distancia cualquiera en M, entonces $\rho^*(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}$ es también una distancia y es acotada.

Número 0.8. Sea X un espacio compacto y sea $Y = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones continuas $X \to \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\operatorname{dist}(f,g) = \operatorname{máx} \|f-g\|$ es una distancia completa en Y (es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente).

Lista 1. Espacios topológicos

Número 1.1. Sea X un conjunto, y $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es finito, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios finitos.* ¿Qué topología obtenemos si X es un conjunto finito?

Número 1.2. Sea X un conjunto infinito, y $\mathcal{T}_{\mathrm{CN}}$ la familia de todos los subconjuntos de X cuyo complementario es numerable, más el conjunto vacío. Probar que $\mathcal{T}_{\mathrm{CN}}$ es una topología en X. Esta topología se llama, por razones evidentes, *topología de los complementarios numerables.* ¿Cuándo obtenemos la topología discreta?

Número 1.3. En un conjunto X se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos con complementario infinito, vacío o todo X. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología.

Número 1.4. Sea X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología en la que todos los conjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Número 1.5. En un conjunto X está definida una topología $\mathcal{T}$, y se considera un subconjunto $S \subset X$. Probar que

$$\mathcal{T}' = \{\emptyset, G \cup S : \ G \in \mathcal{T}\}$$

define una topología en X. Comparar $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$.

Número 1.6. Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en un conjunto X. Mostrar que su intersección $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ es también una topología. ¿Se puede decir lo mismo de su unión $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$? Construir la topología menos fina que contiene a esa unión.

Número 1.7. En el plano $X = \mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada punto $(a,b) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ con

$$\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b-\varepsilon, b+\varepsilon)\big) \subset U.$$

Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Número 1.8. En $X = \mathbb{R}^2$ se consideran los subconjuntos

$$G_t = \{(x,y) \in X : \ x > y + t\} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que estos subconjuntos, junto con $\emptyset$ y X, son los abiertos de una topología en X. ¿Es esto mismo cierto si $t \in \mathbb{N}$?, ¿y si $t \in \mathbb{Q}$?

Número 1.9. Sea ω un elemento que no está en $\mathbb{R}$, y denotemos $X = \{\omega\} \cup \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{T}$ la colección de todos los subconjuntos $G \subset X$ tales que: o bien (i) $\omega \notin G$, o bien (ii) $\omega \in G$ y $X \setminus G$ es finito. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en X.

Número 1.10. En el espacio $(X, \mathcal{T})$ del número 1.5, determinar la adherencia de un conjunto $A \subset X$ según la intersección $S \cap A$ sea o no vacía.

Número 1.11. En el conjunto finito $X = \{a, b, c, d, e\}$ se considera la topología $\mathcal{T}$ cuyos abiertos son los subconjuntos

$$\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}.$$

Calcular la adherencia de los conjuntos $\{a\}, \{b\}$ y $\{c, e\}$. ¿Es denso alguno de ellos? Calcular el interior y la frontera del conjunto $\{a, b, c\}$. Determinar los sistemas de entornos de los puntos e y c.

Número 1.12. Describir el operador adherencia en un espacio con la topología discreta. ¿Qué subconjuntos son densos? ¿Cuál es la base de entornos más simple de un punto dado?

Número 1.13. Describir el operador adherencia en un espacio equipado con la topología trivial. ¿Cuáles son los subconjuntos densos? ¿Cuáles son los entornos de un punto dado?

Número 1.14. Sea X un conjunto. Definir en X una distancia que tenga asociada la topología discreta. ¿Se puede hacer lo mismo para la topología trivial?

Número 1.15. La topología *usual* $\mathcal{T}_u$ de la recta real $\mathbb{R}$ está generada por los intervalos abiertos (a, b). Mostrar que los intervalos semiabiertos $[a, b)$ generan otra topología $\mathcal{T}_{[,)}$. Esta topología se denomina de *Sorgenfrey*. Compararla con la usual. ¿Y si se toman los intervalos $(a, b]$?

Número 1.16. En $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos

$$B((x, y), \varepsilon) = \big((x, x+\varepsilon)\times(y, y+\varepsilon)\big) \cup \{(x, y)\}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon > 0.$$

(1) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.
(2) Estudiar la relación de esta topología con la topología usual $\mathcal{T}_u$ del plano.
(3) Hallar el interior de $[0, 1] \times [0, 1]$ y la adherencia de $(0, 1) \times (0, 1)$ en $\mathcal{T}$ y en $\mathcal{T}_u$.

Número 1.17. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ del número 1.8. ¿Son las rectas cerrados de esta topología? Si no lo son, ¿cuál es su adherencia? Calcular:
(1) Las adherencias de los cuadrantes $A : x \geq 0, y \leq 0$ y $B : x \geq 0, y \geq 0$,
(2) El interior y la adherencia del conjunto $\{x > y\} \cup \{x > -y\}$.
(3) ¿Tiene algún punto (x, y) algún entorno cerrado distinto de todo el plano?

Número 1.18. Sea d la distancia euclídea en el plano $\mathbb{R}^2$. Se definen otras dos distancias mediante

$$D(P, Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = Q, \\ d(O, P) + d(O, Q) & \text{si no,} \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$\delta(P, Q) = \begin{cases} d(P, Q) & \text{si } O, P \text{ y } Q \text{ están alineados,} \\ d(O, P) + d(O, Q) & \text{si no,} \end{cases}$$

donde O es el origen, y una tercera

$$\rho(P,Q) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{si no,} \end{cases}$$

donde $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Se consideran entonces las cuatro topologías del plano asociadas a las cuatro distancias d, D, δ, ρ. Hallar en todas ellas el interior y la adherencia de:

(1) Una recta,
(2) $[0,1) \times [0,1)$,
(3) $[0,1] \times [0,1]$, y
(4) $[1,2] \times [1,2]$.

Número 1.19. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U \subset \mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k \geq 1$ (esto es, $1, 2, 3, \ldots \in U$).

(1) ¿Tiene cada punto un entorno mínimo?
(2) Describir las operaciones de clausura e interior.

Número 1.20. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los *triángulos semiabiertos* de vértice $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y anchura $\varepsilon > 0$ definidos por

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq a - b,\ x + y \geq a + b,\ a \leq x < a + \varepsilon\},$$

y equipamos $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ que tiene todos esos triángulos por base de abiertos. Calcular la adherencia (en $\mathcal{T}$) de un triángulo semiabierto U.

Número 1.21. Un subconjunto W del plano $\mathbb{R}^2$ se llama *radialmente abierto* si para cada punto $p \in W$ y cada recta L que pase por el punto, $W \cap L$ contiene un intervalo abierto centrado en p. Probar que los conjuntos radialmente abiertos son los abiertos de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué relación tiene con la usual? Estudiar que topología induce $\mathcal{T}$ en las circunferencias y en las rectas.

Número 1.22. Sea P un espacio proyectivo real de dimensión n. Definir en P una topología tal que para cada hiperplano proyectivo H todas las afinidades $h : P \setminus H \to \mathbb{R}^n$ sean homeomorfismos. Hacer lo mismo en el caso complejo.

Número 1.23. Demostrar que dos distancias d_1, d_2 en un conjunto X definen la misma topología si para cada punto $x \in X$ existen dos constantes $c_{i,x} > 0$ tales que $d_i(x,y) \leq c_{j,x} d_j(x,y)$ para todo $y \in X$ próximo a x para d_j. Estudiar la implicación contraria. (Comparar con la distancia usual $|x - y|$ en $\mathbb{R}$ una distancia del tipo $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.)

Lista 2. Aplicaciones continuas

Número 2.1. Sea d una distancia en un conjunto X y sea $\mathcal{T}_d$ la topología correspondiente.

(1) Demostrar que para cualquier conjunto $A \subset X$ dado la función

$$X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$$

es continua.

(2) Demostrar que un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si es el conjunto de ceros de una función continua $f : X \to \mathbb{R}$.

Número 2.2. Sean $(X, \mathcal{T}), (X', \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos y $f : X \to X'$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si existe una base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{T}'$ tal que $f^{-1}(B') \in \mathcal{T}$ para cada $B' \in \mathcal{B}'$. Enunciar y probar el resultado análogo para subbases.

Número 2.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $\chi_A : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ la correspondiente función característica:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Probar que χ_A es continua en $a \in X$ si y sólo si $a \notin \mathrm{Fr}(A)$.

Número 2.4. Probar que si un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de que todas las aplicaciones $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ son continuas, entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Número 2.5. Sean $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ y $g : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$ aplicaciones continuas cuya composición $g \circ f$ es un homeomorfismo. Probar que si g es inyectiva (resp. f es suprayectiva), entonces f y g son homeomorfismos.

Número 2.6. Se considera la aplicación

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right),$$

y se denota $X = f(\mathbb{R})$. Se equipan $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ con las topología usuales, y $X \subset \mathbb{R}^2$ con la topología relativa $\mathcal{T} = \mathcal{T}_u|X$. Mostrar que $f : (\mathbb{R}, T_u) \to (X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua y biyectiva, pero no un homeomorfismo.

Número 2.7. Describir los homeomorfismos entre espacios con la topología de los complementos finitos. ¿Y con la topología de los complementos numerables?

Número 2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(x) = x^2$. Estudiar si f es continua con las siguientes topologías:

$$\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{\mathrm{CN}}, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CF}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{CF}}, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{[,)}, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T}_{[,)}.$$

(Estas topologías se definieron en la lista anterior.)

Número 2.9. Demostrar que si una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua para $\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_{[,)}$, entonces es una aplicación constante.

Número 2.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación $f(x) = (x, x^2)$. Estudiar si es continua para las siguientes topologías:

$$\mathcal{T}_u \to \mathcal{T}_\rho \text{ (número 1.18)}, \quad \mathcal{T}_u \to \mathcal{T} \text{ (número 1.16)}, \quad \mathcal{T}_{\mathrm{CN}} \to \mathcal{T}_u, \quad \mathcal{T}_{[,)} \to \mathcal{T} \text{ (número 1.16)}.$$

Número 2.11. Se equipa $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}_\rho$ (de 1.18). Estudiar la continuidad de:

(1) Las traslaciones $\tau : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$.

(2) Los giros $\theta : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$.

(3) Las simetrías $\sigma : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\rho)$ respecto de una recta.

Número 2.12. Lo mismo que en el número anterior, reemplazando la topología $\mathcal{T}_\rho$ por la topología $\mathcal{T}_\delta$ del número 1.18.

Número 2.13. Se considera la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto [x] =$ parte entera de x. Estudiar qué topologías en $\mathbb{Z}$ hacen continua esta aplicación, cuando en $\mathbb{R}$ se considera la topología usual.

Número 2.14. Definir homeomorfismos:

(1) Entre un triángulo equilátero y un disco cerrado, que transforme el borde del triángulo en la circunferencia, y los tres vértices del triángulo en tres puntos prefijados de la misma.

(2) Entre un cuadrado y un disco cerrado, que transforme el borde del cuadrado en la circunferencia y los cuatro vértices del cuadrado en cuatro puntos prefijados de la misma.

Extender las construcciones a polígonos planos más generales, no necesariamente regulares ni convexos.

Número 2.15. Construir una biyección continua que no sea homeomorfismo entre el semiespacio cerrado $F = \{y \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y el abierto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Número 2.16. Demostrar que la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* del plano (1.21) es la topología que cumple las dos condiciones siguientes:

(1) Induce en las rectas del plano la topología usual.

(2) Una aplicacion $f : \mathbb{R}^2 \to X$ es continua si lo son todas sus restricciones a rectas.

Estudiar la cotinuidad de la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{y^2+x^4}$ respecto de esta topología *radial* y respecto de la topología usual.

Número 2.17. Denotamos $X = \mathcal{C}([0,1])$ el conjunto de las funciones continuas en el intervalo unidad, y consideramos en X las tres distancias siguientes (número 0.6):

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f-g|^2}\,, \quad d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\,, \quad d_2(f,g) = \sup_{[0,1]} |f-g|.$$

Equipamos X con las tres topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ definidas respectivamente por d, d_1, d_2. Estudiar la continuidad de la identidad $X \to X$ según cuáles de esas topologías se consideren.

Número 2.18. *(Teoremas de extension de Tietze)* Sea X un espacio con una topología $\mathcal{T}$ definida por una distancia d. Sea $f : F \to \mathbb{R}$ una función continua no negativa (≥ 0) con dominio F cerrado de X.

(1) Demostrar que

$$\bar{f}(y) = \inf\left\{f(x) + \tfrac{\operatorname{dist}(y,x)}{\operatorname{dist}(y,F)} - 1 : x \in F\right\} \quad \text{para } y \in X \setminus F$$

define una extensión continua $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ de f.

(2) Utilizar la desomposición $f = f^+ - f^-$ con $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geq 0$ y $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geq 0$ para extender funciones continuas $F \to \mathbb{R}$ arbitrarias.

(3) ¿Y si consideramos funciones $f : F \to [0,1]$?

Lista 3. Construcción de topologías

Número 3.1. Demostrar que si Y es un subespacio de X y Z uno de Y, entonces la topología de Z como subespacio de Y es la misma que como subespacio de X.

Número 3.2. Sea $\mathcal{B}$ una base de una topología en X y $A \subset X$. Demostrar que los conjuntos $B \cap A$ forman una base de la topología relativa de A.

Número 3.3. Sean $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ las topologías de $\mathbb{R}^2$ asociadas a las distancias D, δ y ρ del número 1.18. Describir la topología inducida por cada una de ellas en una recta de $\mathbb{R}^2$.

Lo mismo para la topología $\mathcal{T}$ del número 1.8.

Número 3.4. Sea $\mathcal{T}$ la topología del plano $\mathbb{R}^2$ definida en el número 1.16. Hallar la topología inducida por $\mathcal{T}$: (i) en la recta $r: x = 0$, y (ii) en la recta $s: x = y$.

Número 3.5. Estudiar si alguna de las topologías del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definidas en los dos números anteriores es el producto de dos topologías en $\mathbb{R}$.

Número 3.6. Sea $(X_i, \mathcal{T}_i)$ una colección finita de espacios topológicos y consideremos subconjuntos $A_i \subset X_i, i \in I$. Probar que la topología producto de las relativas $\mathcal{T}_i|A_i$ coincide con la topología relativa $\prod_i \mathcal{T}_i \big| \prod_i A_i$.

Número 3.7. Sean X e Y espacios topológicos, y $A \subset X$, $B \subset Y$ subconjuntos suyos. Se equipa $X \times Y$ con la topología producto. Demostrar que entonces:

(1) $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.
(2) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
(3) $A \times B$ es denso en $X \times Y$ si y sólo si A es denso en X y B es denso en Y.
(4) $\mathrm{Fr}(A \times B) = \big(\overline{A} \times \mathrm{Fr}\,(B)\big) \cup \big(\mathrm{Fr}\,(A) \times \overline{B}\big)$.

Número 3.8. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología $\mathcal{T}$ producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$. Estudiar la continuidad de la aplicación $f: (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) : (t, k) \mapsto t - k$.

Número 3.9. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 1.20. ¿Existe alguna topología $\mathcal{T}_1$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}$ sea la topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$? ¿Y tal que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea *homeomorfo* a $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$?

Número 3.10. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las rectas $r: y = 0$, $s: y = 1$ y $t: x = 0$, su unión $M = r \cup s \cup t$, y el segmento $A: x = 0, 0 \le y \le 1$. En M se define la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ que identifica todos los puntos de A. Ahora se equipa $\mathbb{R}^2$ con la topología usual y el conjunto cociente $M/\mathcal{R}$ con la topología cociente. Sea $p: M \to M/\mathcal{R}$ la aplicación canónica. Estudiar si $p(t)$ es entorno de $p(A)$ en $M/\mathcal{R}$, y determinar un subconjunto $E \subset M$ tal que $p(E)$ lo sea.

Número 3.11. Estudiar si dos espacios que son cada uno cociente del otro han de ser necesariamente homeomorfos.

Número 3.12. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ se considera la relación de equivalencia siguiente:

$$x\mathcal{R}y \text{ si y sólo si } x, y \in \mathbb{Q} \text{ (o } x = y).$$

Por otra parte, en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ se define análogamente:

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \text{ si y sólo si } (x, y), (x', y') \in \mathbb{Q}^2 \text{ (o } (x', y') = (x', y')).$$

¿Son homeomorfos el cociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ y el producto $\mathbb{R}/\mathcal{R} \times \mathbb{R}/\mathcal{R}$? Más generalmente, ¿puede $\mathbb{R}^2/\mathcal{S}$ ser homeomorfo a un espacio producto?

Número 3.13. Denotamos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el cociente obtenido identificando en $\mathbb{R}$ todos los números enteros entre sí, y análogamente denotamos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(1) Sea $X \subset \mathbb{R}$ el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. Utilizar el conjunto cerrado saturado

$$\big\{\big(\tfrac{1}{n}+\tfrac{\sqrt{2}}{m},\, n+\tfrac{1}{m}\big) : n \geq 1, m \geq 1\big\}$$

para probar que $X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es una identificación.

(2) Probar que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/Z$ no es una identificación.

Número 3.14. Denotamos $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ el cociente $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ del ejercicio 3.12. Estudiar si la aplicación $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} \times \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ es una identificación.

Número 3.15. Se llama cuadrado lexicográfico al conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ equipado con la topología generada por los intervalos del *orden lexicográfico:* $(x,y) < (x',y')$ si $x < x'$ o $x = x', y < y'$. Probar que la proyección $(x,y) \mapsto x$ de X sobre el intervalo usual es una identificación cerrada, que no es abierta. ¿Es esta topología en $[0,1] \times [0,1]$ una topología producto (véase 7.27)?

Número 3.16. En $\mathbb{R}$ con la topología usual se define la relación de equivalencia: $t \sim s$ si y sólo si $t - s$ es un entero. Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$ con la topología relativa como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Número 3.17. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se define la relación de equivalencia: $(x,y) \sim (x',y')$ si y sólo si $x - x'$ e $y - y'$ son enteros. Demostrar que el espacio cociente $\mathbb{R}/\sim$ es homeomorfo al *toro plano* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología relativa como subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Número 3.18. Demostrar que:

(1) La recta proyectiva real es homeomorfa a la circunferencia $\mathbb{S}^1$.

(2) La recta proyectiva compleja es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^2$.

Número 3.19. Demostrar que el plano proyectivo real es homeomorfo al espacio cociente obtenido del disco cerrado unidad del plano identificando cada dos puntos antipodales de su borde. Establecer el resultado análogo para espacios proyectivos reales de dimensión arbitraria.

Número 3.20. Describir cómo la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ puede obtenerse como espacio cociente del disco cerrado unidad del plano.

Número 3.21. Se considera la aplicación $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $p(x,y) = (x, xy)$ y se denota $E \subset \mathbb{R}^2$ su *divisor excepcional* $x = 0$.

(1) Mostrar que p induce un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \setminus E$ sobre sí mismo.

(2) Deducir que p induce una identificación topológica del cuadrado cerrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ sobre el triángulo cerrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Utilizar lo anterior para probar que si en un disco cerrado se identifican a un sólo punto todos los de un arco cerrado propio de su borde el espacio cociente es de nuevo un disco cerrado.

Número 3.22. Explicar cómo el disco cerrado unidad del plano puede obtenerse como cociente de un cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.

Número 3.23. Explicar cómo puede obtenerse la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante un cociente de la suma de dos discos cerrados.

Número 3.24. Describir el plano proyectivo real como cociente de la suma topológica de un disco cerrado del plano y una banda de Möbius con borde. O también, mostrar que un plano proyectivo menos un disco es una banda de Möbius.

Número 3.25. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2+y^2 = 1, -2 \leq z \leq 2\}$, y sean $E, F \subset X$ las dos circunferencias $\{x^2+y^2 = 1, z = 1\}$, $\{x^2+y^2 = 1, z = -1\}$. En M se considera la relación de equivalencia

$$p = (x, y, z) \sim p' = (x', y'.z') \text{ si y sólo si } p = p' \text{ o } z = z' = +1 \text{ o } z = z' = -1.$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homomorfo al espacio cociente $M/\sim$.

Número 3.26. En el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ se considera la relación de equivalencia generada por

$$(1, y) \sim (0, y); \quad (x, 1) \sim (x', 1) \text{ para } 0 \leq x, x' \leq 1.$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = S/\sim$.

Número 3.27. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ y $(1, 1)$, y consideremos en él las dos relaciones de equivalencia definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: (x, 1) \sim (x, -1), \quad (x, 0) \sim (0, 0), \\ \mathcal{S} &: (x, 1) \sim (-x, -1), \quad (x, 0) \sim (0, 0). \end{aligned}$$

Describir subespacios de $\mathbb{R}^3$ homeomorfos a los espacios cocientes $X = H/\mathcal{R}$ e $Y = H/\mathcal{S}$. ¿Son X e Y homeomorfos?

Número 3.28. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ un hexágono regular cerrado con dos vértices opuestos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$, y consideremos la relación de equivalencia generada por $(0, 1) \sim (0, -1)$. Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $H/\sim$.

Número 3.29. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$S = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{1 \leq x \leq 2, y = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\},$$

equipados con la topología usual. En S se identifican entre sí todos los puntos de T (y nada más), y se denota X el espacio cociente resultante. Describir un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a ese espacio cociente X.

Número 3.30. Sea $SO(3)$ el grupo ortogonal especial de $\mathbb{R}^3$, es decir, el grupo de los movimientos rígidos que conservan la orientación, o también, el grupo de las matrices ortogonales con determinante $+1$. Con esta última descripción, $SO(3) \subset \mathbb{R}^{3\times3}$ y es pues un subespacio del espacio afín usual. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ la bola cerrada $x^2 + y^2 + z^2 \leq \pi^2$ de radio π, cuya frontera es la esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = \pi^2$.

(1) Para cada punto $x \in D$ hay un único movimiento $\varphi_x \in SO(3)$ tal que: (i) la recta L generada por x es invariante, (ii) induce en el plano Π ortogonal a L una rotación de ángulo $\pm\|x\|$, y (iii) $\det(x, y, \varphi_x(y)) > 0$ para cada $y \in \Pi$.

(2) La aplicación $\varphi : D \to SO(3) : x \mapsto \varphi_x$ es continua.

(3) Se tiene $\varphi_x = \varphi_y$ si y sólo si x, y son dos puntos antipodales de S.

Concluir que $SO(3)$ es homeomorfo al espacio proyectivo real $\mathbb{P}^3$.

Número 3.31. (1) Se llama *toro sólido* al conjunto $N \subset \mathbb{R}^3$ generado al girar alrededor del eje de las z's el disco cerrado $\mathbb{D} : y = 0, (x-2)^2 + z^2 \leq 1$. Mostrar que N es homeomorfo a $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$.

(2) Consideramos la esfera unidad $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ y los subconjuntos suyos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$M \subset \mathbb{S}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq \tfrac{1}{2}\,, \qquad M' \subset \mathbb{S}^3 : x_3^2 + x_4^2 \leq \tfrac{1}{2}.$$

Demostrar que M y M' son (homeomorfos a) *toros sólidos* y deducir que $\mathbb{S}^3$ es unión de dos toros sólidos pegados por su borde de manera que los meridianos del uno son los paralelos del otro.

Lista 4. Separación

Número 4.1. Definir en $\mathbb{R}$ una topología que no sea Kolmogoroff ($= T_0$). Hágase de manera que difiera de la usual sólo en los entornos de dos puntos, que sean los únicos que no puedan separarse entre sí.

Número 4.2. *Los espacios que no son T_0 no son muy interesantes.* Sea X un espacio que no es T_0. Definir en X una relación de equivalencia $\sim$ de manera que el espacio cociente $X/\!\sim$ sea T_0 y la identificación $p : X \to X/\!\sim$ induzca una biyección entre los conjuntos abiertos de X y los de $X/\!\sim$.

Número 4.3. En un espacio topológico X se denota $y \to x$ la *relación de especialización* $x \in \overline{\{y\}}$.

(1) Definir una topología no trivial en un conjunto con dos puntos $x \neq y$, tal que la única especialización existente sea $y \to x$. Estudiar las propiedades de separación de ese espacio.

(2) El espacio anterior, llamado *de Sierpinski,* es el más simple ni trivial ni discreto. Interpretarlo en términos de la convergencia del espacio afín $\mathbb{R}^n$.

Número 4.4. Mostrar con un ejemplo que una topología de Fréchet ($= T_1$) puede no ser Hausdorff ($= T_2$).

Número 4.5. Se equipa $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ (cuyos abiertos no vacíos son los conjuntos con complementario finito). Estudiar las propiedades de separación de este espacio.

Número 4.6. Se considera la aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto [x] =$ parte entera de x y se equipa $\mathbb{Z}$ con la topología final correspondiente a la usual en $\mathbb{R}$. Estudiar qué puntos de $\mathbb{Z}$ se pueden separar de cuáles, y qué axiomas de separación se cumplen en $\mathbb{Z}$ con esa topología final.

Número 4.7. Mostrar que el cociente de un espacio Hausdorff puede no ser ni siquiera Kolmogoroff.

Número 4.8. Probar que un espacio es Fréchet si y sólo si cada punto es la intersección de todos sus entornos.

Número 4.9. En el intervalo abierto $X = (-1, 1)$ se considera la topología cuyos cerrados $(\neq \emptyset, X)$ son los intervalos cerrados $[a, b]$ con $-1 < a \leq 0 \leq b < 1$. Estudiar los axiomas de separación de este espacio.

Número 4.10. Se equipa el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales con la topología cuyos abiertos son los conjuntos E que cumplen la siguiente condición: *si* $2n + 1 \notin E$, *entonces* $2n, 2n + 2 \notin E$. Estudiar si resulta ser un espacio Hausdorff.

Número 4.11. ¿Se pueden utilizar las propiedades de separación de los espacios $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{CF}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ para distinguirlos topológicamente?

Número 4.12. En $\mathbb{R}^2$ se considera la colección $\mathcal{B}$ de todos los subconjuntos

$$V(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a,\ y \leq b\}.$$

Demostrar que $\mathcal{B}$ es efectivamente base de una topología, y estudiar sus propiedades de separación.

Número 4.13. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación continua para la topología usual de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y la de la recta afín $\mathbb{R}$. Mostrar que la topología $\mathcal{T}$ imagen inversa de f no es T_0.

Número 4.14. Sea d una distancia en un conjunto X y sea $\mathcal{T}_d$ la topología correspondiente. Demostrar que dos cerrados disjuntos de X tienen entornos disjuntos.

Lista 5. Numerabilidad

Número 5.1. Se considera en la recta $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ de los complementarios finitos. Estudiar:

(1) Si converge la sucesión $(n)_{n\geq 1}$, y a qué puntos. Lo mismo para las sucesiones

$$1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 6, 7, 1, \ldots \qquad \text{y} \qquad 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$$

(2) Si hay un criterio para saber cuándo una sucesión converge, y a qué puntos.

Número 5.2. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología de 1.7.

Número 5.3. En $X = (-1, 1)$ se considera la topología de 4.9. Se pide:

(1) Encontrar una sucesión que converja a todos los puntos del espacio, y un punto al que converjan todas las sucesiones. Mostrar que ese punto es único, y encontrar una sucesión (infinitta) que sólo converja a ese punto.

(2) ¿Existe una sucesión convergente (resp. no convergente) en la topología usual de la recta, y que no lo haga (resp. sí lo haga) en esta topología $\mathcal{T}$?

(3) Estudiar las propiedades de numerabilidad de esta topología $\mathcal{T}$.

Número 5.4. Sea X un espacio que cumple el I^{er} axioma de numerabilidad. Demostrar que es Hausdorff si y sólo si el límite de las sucesiones convergentes es único. ¿Y si no cumple el I^{er} axioma?

Número 5.5. Estudiar los axiomas de numerabilidad de un espacio discreto.

Número 5.6. En un conjunto E se fija un punto $p \in E$, y se considera la topología cuyos abiertos no vacíos son los conjuntos que contienen dicho punto p. Estudiar los axiomas de numerabilidad de esa topología.

Número 5.7. Probar que si un espacio cumple el II^{o} axioma de numerabilidad, entonces de cualquier base de abiertos se puede extraer una numerable.

Número 5.8. Estudiar los axiomas de numerabilidad de $\mathbb{R}$ con la topología
(1) de los intervalos semiabiertos $[a, b)$,
(2) de los complementarios finitos,
(3) de los rayos $[a, \rightarrow)$.

Número 5.9. Se equipa la recta real $\mathbb{R}$ con la topología descrita por las siguientes bases de entornos:
(1) Para los puntos $a \neq 0$ los intervalos abiertos, y
(2) Para $a = 0$ los conjuntos

$$(\leftarrow, -n) \cup (-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \cup (n, \rightarrow), \quad n \geq 1.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de esta topología.

Número 5.10. Demostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.8 cumple el II^{o} axioma de numerabilidad.

Número 5.11. Se equipa el espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología generada por los conjuntos $G = B \setminus A$, donde B es una bola abierta y A un conjunto numerable. Estudiar para esta topología:
(1) Las sucesiones convergentes.
(2) Los axiomas de numerabilidad.

Número 5.12. Estudiar las propiedades de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología $\mathcal{T}$ definida en 1.16.

Número 5.13. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ equipado con la topología de 4.12.

Número 5.14. Estudiar los axiomas de numerabilidad del cuadrado lexicográfico de 3.15.

Número 5.15. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las distancias definidas en 1.18. Demostrar que ninguna de ellas cumple el II^{o} axioma de numerabilidad.

Número 5.16. Estudiar los axiomas de numerabilidad de la esfera, del toro y de la botella de Klein.

Número 5.17. Estudiar los axiomas de numerabilidad de los espacios proyectivos reales y complejos.

Número 5.18. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U \subset \mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k \geq 1$ (esto es, $1, 2, 3, \ldots \in U$) (ver 1.19) Describir las sucesiones convergentes de esta topología y sus límites.

Número 5.19. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20 es un espacio de Lindelöf.

Número 5.20. Estudiar los axiomas de numerabilidad del plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* (1.21).

Número 5.21. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de la que una base consiste en los cuadrados abiertos de lados paralelos a los ejes menos los puntos de las dos diagonales distintos del centro. Probar que esta topología es primer axioma de numerabilidad. ¿Es además separable? ¿Y segundo Axioma?

Número 5.22. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología cuyos abiertos son los conjuntos $U \subset \mathbb{R}^2$ que contienen para cada punto $(a, b) \in U$ un *aspa*

$$X = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon\} \cap \big(\{x - y = a - b\} \cup \{x + y = a + b\}\big), \quad \varepsilon > 0.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de esta topología. En particular, probar que $\mathbb{Q}^2$ es un subconjunto denso.

Número 5.23. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ generada por los discos abiertos de centros (a, b) con $b > 0$, y los "semidiscos"

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x-a)^2 + y^2 < \varepsilon,\ y > 0\} \cup \{(a, 0)\}.$$

Estudiar los axiomas de numerabilidad de esta topología.

Número 5.24. Como se sabe, toda topología *metrizable,* es decir, inducida por una distancia, cumple el axioma primero de numerabilidad. Mostrar con un ejemplo que puede no cumplir ningún otro.

Número 5.25. Demostrar que un espacio topológico metrizable es separable si y sólo si es Lindelöf, si y sólo si cumple el segundo axioma de numerabilidad.

Lista 6. Compacidad

Número 6.1. Probar que en un espacio T_2 una intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacto.

Número 6.2. Equipamos el conjunto $X = [0, 1] \cup \{2\}$ con la topología que coincide con la usual en $[0, 1]$, y tiene por base de entornos de 2 los conjuntos $(a, 1) \cup \{2\}$ con $0 < a < 1$. Estudiar si este espacio es compacto. Encontrar dos subconjuntos compactos cuya intersección no lo sea.

Número 6.3. Estudiar los subconjuntos compactos de T_{CF} y de T_{CN}.

Número 6.4. Mostrar con un ejemplo que la adherencia de un conjunto compacto no tiene por qué serlo.

Número 6.5. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ las topologías $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T}_\delta$ y $\mathcal{T}_\rho$ asociadas a las distancias definidas en 1.18. Estudiar qué bolas cerradas son compactas.

Número 6.6. Caracterizar los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología de los rayos $(a, \rightarrow)$.

Número 6.7. Sea C el subconjunto de $I = [0,1]$ construido como sigue. Se toma primero $A_1 = I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, luego $A_2 = A_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, y en general A_n se obtiene suprimiendo los intervalos abiertos centrales de la división en tres partes de cada intervalo de A_{n-1}. El conjunto $\bigcap_n A_n$ se llama *conjunto de Cantor*. Mostrar que es compacto.

Número 6.8. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Demostrar que una aplicación $f : X \to Y$ en otro espacio Y es continua si y sólo si su grafo $\varGamma = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ es compacto. ¿Basta con que el grafo sea cerrado?

Número 6.9. Sean $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2$ dos topologías en un conjunto X. Mostrar que si X es con $\mathfrak{T}_1$ Hausdorff y con $\mathfrak{T}_2$ compacto, entonces ambas topologías coinciden.

Número 6.10. En $\mathbb{R}$ se considera la topología del número 5.9. Demostrar que con esta topología $\mathbb{R}$ es un espacio compacto homeomorfo a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 6.11. (*Lema de Wallace*) Sean $K \subset X$, $L \subset Y$ dos subconjuntos compactos de dos espacios X e Y. Demostrar que todo abierto $W \subset X \times Y$ que contiene a $K \times L$ contiene el producto $U \times V$ de dos abiertos U de X y V de Y que contienen respectivamente a K y a L.

Número 6.12. *(Marcos Herrero)* Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y suprayectiva, con X compacto y Hausdorff. Demostrar que f es cerrada si y sólo si Y es Hausdorff, si y sólo si $D = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado en $X \times X$.

Número 6.13. Sea $f : X \to Y$ una identificación cerrada con fibras compactas.

(1) Demostrar que si un abierto $W \subset X$ contiene una fibra $f^{-1}(y)$ entonces contiene la imagen inversa de un entorno de y.

(2) Demostrar que si X es Hausdorff, también lo es Y.

(3) Demostrar que si Y es compacto, también lo es X. Más generalmente, si $K \subset Y$ es compacto, también lo es $f^{-1}(K)$.

Número 6.14. Se considera el cuadrado lexicográfico $X = [0,1] \times [0,1]$ y la proyección canónica $(x,y) \mapsto x$ sobre abscisas (3.15).

(1) Deducir de las propiedades de la proyección que X es compacto.

(2) Deducir que el orden lexicográfico en X es completo: todo subconjunto tiene supremo e ínfimo.

Número 6.15. *(Marcos Herrero)* Sea $f : X \to Y$ una identificación cerrada con fibras compactas. Demostrar que si X es II$^{\text{o}}$ axioma de numerabilidad, entonces Y lo es también.

Número 6.16. Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua localmente inyectiva entre espacios Hausdorff. Demostrar que si f es inyectiva en un compacto $K \subset X$, entonces lo es en un entorno suyo.

Número 6.17. Demostrar que en un espacio localmente compacto y Hausdorff un punto y un cerrado tienen entornos abiertos disjuntos.

Número 6.18. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Demostrar que si un subconjunto

$A \subset \mathbb{Q}$ tiene algún punto adherente irracional, entonces A no es compacto. Deducir que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto (con la topología usual).

Número 6.19. Estudiar cuándo una intersección de subconjuntos localmente cerrados de un espacio topológico es un subconjunto localmente cerrado. ¿Y qué ocurre con la unión?

Número 6.20. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}_{\text{CK}}$ cuyos abiertos no vacíos son los complementarios de los compactos usuales. Probar que un conjunto es compacto en esta topología si y sólo si es cerrado en la usual. ¿Es localmente compacto $\mathbb{R}^2$ con esta topología $\mathcal{T}_{\text{CK}}$?

Número 6.21. Demostrar el *teorema de Baire:* En un espacio localmente compacto y T_2, una intersección numerable de abiertos densos es densa a su vez.

Número 6.22. Demostrar el *teorema de Baire* en un espacio topológico cuya topología esta definida por una distancia *completa.*

Número 6.23. Encontrar contraejemplos al teorema de Baire: (i) si la intersección no es numerable, (ii) si los conjuntos densos que se intersecan no son abiertos, (iii) si el espacio no es Hausdorff.

Número 6.24. Sea X un espacio localmente compacto y T_2, y sea $Y \subset X$ una intersección numerable de abiertos de X. Mostrar que en Y se cumple el teorema de Baire, aunque puede no ser localmente comapcto. Deducir que los números racionales no son intersección numerable de abiertos usuales de $\mathbb{R}$.

Número 6.25. Un número *transcendente* es un número $\alpha \in \mathbb{R}$ que no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes racionales. Demostrar que el conjunto de los números transcendentes es denso en $\mathbb{R}$.

Número 6.26. Estudiar con qué topologías de las que han ido apareciendo en estos problemas es la recta $\mathbb{R}$ un espacio localmente compacto.

Número 6.27. Se equipa el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.16 (resp. la de 4.12). Estudiar si es un espacio localmente compacto.

Número 6.28. Equipar la circunferencia $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ con una topología de modo que resulte ser la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{R}$ con la topología discreta.

Número 6.29. Se equipa el conjunto $X = (-1, 0) \cup (0, 1) \subset \mathbb{R}$ con la topología usual. Hallar su compactificación de Alexandroff.

Número 6.30. *(Francisco Criado)* Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano cerrado de ecuación $y \leq -1$.

(1) Mostrar que la compactificación de Alexandroff X^* de X es homeomorfa a un disco cerrado, utilizando la *inversión* $\imath(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x, y)$.

(2) La traslación $h(x, y) = (x+1, y)$ es un homeomorfismo sin puntos fijos de X. Mostrar que h se extiende a la compactificación de Alexandroff X^* y obtener así un homeomorfismo del disco cerrado en sí mismo con un único punto fijo, que está en el borde.

Número 6.31. *(Fernando Pérez)* Demostrar que un cilindro y una banda de Moebius, ambos sin borde, no son homeomorfos, comparando sus compactificaciones de Alexandroff.

Número 6.32. Sea X un espacio topológico cualquiera no compacto cuyos puntos sean cerrados (esto es, un espacio T_1). Se considera el conjunto $X^* = X \cup \{\omega\}$ obtenido añadiendo un punto ajeno a X. Mostrar que se puede definir una topología en X^* añadiendo como entornos abiertos de ω los complementarios de los subconjuntos finitos de X. Deducir que X es abierto y denso en X^*, con lo que se ha definido *una* compactificación por un punto de X. ¿Tiene alguna relación con la de Alexandroff?

Número 6.33. Demostrar que un espacio X que cumple las dos condiciones siguientes es compacto: (i) cada punto tiene una base de entornos cerrados, (ii) toda imagen continua de X en un espacio Haussdorff es cerrada.

Número 6.34. Encontrar todos los subconjuntos compactos del espacio afín $\mathbb{R}^n$ equipado con la topología de 5.11.

Número 6.35. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología $\mathcal{T}$ producto de la usual en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos en $\mathbb{Z}$ (ver 3.8). Se denota $\pi : X \to \mathbb{R}$ la proyección canónica.

(1) Probar que el conjunto siguiente no es compacto

$$N = \bigcup_{k \geq 1} \big[0, 1 - \tfrac{1}{k}\big] \times \{k\}$$

(2) Probar que $M = N \cup \{(1,0)\}$ es compacto pero no cerrado. ¿Cuál es su adherencia?

(3) Demostrar que un conjunto *cerrado* $M \subset X$ es compacto si y sólo si $\pi(M)$ es acotado, y deducir que la adherencia de un compacto es siempre compacta.

(4) Demostrar que un conjunto $M \subset X$ es compacto si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(a) $M \cap (\mathbb{R} \times \{k\})$ es compacto para cada $k \in \mathbb{Z}$, y

(b) el conjunto $\pi(M)$ es compacto.

(5) ¿Es X localmente compacto?

Número 6.36. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ de 1.19. Mostrar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ no es compacto. ¿Es localmente compacto?

Número 6.37. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20 es un espacio localmente compacto.

Número 6.38. Estudiar si el plano $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* (1.21) es un espacio localmente compacto. ¿Hay algún abierto con interior no vacío?

Número 6.39. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de 5.21. Demostrar que en esta topología un cuadrado cerrado no es compacto, y deducir que los conjuntos compactos tienen interior vacío. ¿Es el plano con esta topología localmente compacto?

Número 6.40. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 5.23. Estudiar el límite en esta topología de las sucesiones del tipo $\{(x, 1/k) : k \geq 1\}$ y utilizarlas para determinar si $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ es localmente compacto.

Número 6.41. Demostrar que un subconjunto compacto de la recta real $\mathbb{R}$ equipada con la topología de Sorgenfrey $\mathcal{T}_{[,)}$ es numerable.

Número 6.42. Construir una aplicación biyectiva y continua de un espacio compacto T_1 en sí mismo que no sea homeomorfismo.

Número 6.43. Un espacio se llama numerablemente compacto si todo recubrimiento numerable tiene un subrecubrimiento finito. Demostrar que esto equivale a que todo conjunto numerable infinito tenga algún punto de acumulación.

Número 6.44. Probar que un espacio topológico metrizable es compacto si y sólo si es numerablemente compacto. (Probar primero que es separable usando los recubrimientos formados por todas las bolas de un mismo centro y radio $n \geq 1$.)

Número 6.45. Demostrar que un espacio topológico metrizable X es compacto si y sólo si toda función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tiene un máximo, si y sólo si toda función continua es acotada. (Si X no es compacto, contiene un conjunto discreto cerrado numerable infinito $F = \{x_n : n \geq 1\}$ y la función continua $x_n \mapsto n$ se extiende a X por el teorema de Tietze, número 2.18.)

Lista 7. Conexión

Número 7.1. Probar que un espacio X es conexo si y sólo si cada subconjunto propio no vacío de X tiene frontera no vacía.

Número 7.2. Estudiar si son homeomorfos los intervalos $(0, 1)$ y $[0, 1)$.

Número 7.3. Estudiar si son homeomorfos los espacios cociente (de la topología usual) $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ obtenidos respectivamente identificando $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ a un punto.

Número 7.4. Estudiar si una circunferencia es homeomorfa a la unión de dos circunferencias tangentes en un punto.

Número 7.5. Demostrar que los puntos son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ con la topología usual.

Número 7.6. Equipamos el intervalo $X = (0, 1)$ con la topología cuyos abiertos $\neq \emptyset, X$, son los conjuntos $\big(0, 1 - \frac{1}{n}\big)$, $n \geq 1$. Estudiar si es un espacio conexo.

Número 7.7. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la topología generada por $\{0\}$ y los conjuntos con complementario finito. ¿Es $\mathbb{Z}$ con ella un espacio conexo?

Número 7.8. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número irracional, y $X = \mathbb{Q} \cup \{\theta\}$. Se considera en X la topología cuyos abiertos son los subconjuntos abiertos de $\mathbb{Q}$ para la topología usual, y los subconjuntos de X con complementario finito. Estudiar si X con esta topología es un espacio conexo.

Número 7.9. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología del número 5.9. Estudiar si es un espacio conexo.

Número 7.10. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las distancias D, δ y ρ de 1.18. Estudiar para cuáles de las topologías asociadas es $\mathbb{R}^2$ conexo.

Número 7.11. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la topología de 1.8. Demostrar que la unión de dos rectas es un conjunto conexo. ¿Tiene $\mathbb{R}^2$ algún subconjunto no conexo?

Número 7.12. Estudiar si es conexo el plano $\mathbb{R}^2$ con las topologías de 1.16, 5.11, y 6.20.

Número 7.13. Se considera el siguiente subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ con la topología usual:

$$X = \{(1,0),(0,0)\} \cup \bigcup_{n\neq 1}\{(x,\tfrac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determinar si X es localmente conexo, y hallar sus componentes conexas.

Número 7.14. En $\mathbb{R}^2$ sea

$$X = \{(x,0) : \tfrac{1}{2} < x \leq 1\} \cup \bigcup_{n\geq 1}\{(x,y) : ny{=}x,\ 0{\leq}x{\leq}1\}.$$

Probar que X y $\overline{X}$ son conexos, pero no localmente conexos.

Número 7.15. Se llama *seno polaco* al espacio $\widetilde{X}$ obtenido añadiendo el origen al grafo X de la función $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1/\pi$, es decir: $\widetilde{X} = X \cup \{(0,0)\}$. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo, y si es localmente conexo.

Número 7.16. Demostrar que en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables todos los conjuntos abiertos son conexos.

Número 7.17. Se considera en $X = \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ la topología de 6.35: el producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$. Estudiar si una unión finita

$$[0,1]\times\{k_1\}\cup\cdots\cup[0,1]\times\{k_r\}$$

es un conjunto conexo. ¿Y la unión infinita $\bigcup_{k\geq 1}[0,1]\times\{k\}$?

Número 7.18. Equipamos el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de 1.20. Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.

Número 7.19. Estudiar si los subespacios siguientes de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual son homeomorfos: $X : (x+1)^2{+}y^2 \leq 4,\ x^2{+}y^2 \geq 1$ e $Y : 1 \leq x^2{+}y^2 \leq 4$ (ambos en $\mathbb{R}^2$).

Número 7.20. ¿Cuáles son las componentes conexas del discontinuo de Cantor (6.7)?

Número 7.21. Sea X un espacio compacto Hausdorff y $C_k \supset C_{k+1}$, $k \geq 1$, una cadena de subconjuntos cerrados conexos de X. Demostrar que la intersección $\bigcap_k C_k$ es un conjunto conexo.

Número 7.22. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Demostrar que la componente conexa C de un punto $x \in X$ es la intersección de todos los conjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x.

Número 7.23. Sea X un espacio compacto y Hausdorff, $U \subset X$ un abierto ($\neq X$) y C una componente conexa compacta de U. Probar que:

(1) U contiene un entorno compacto K de C y C es una componente conexa de K.
(2) La frontera F de K tiene en K un entorno abierto y cerrado V que no corta a C.
(3) $K\setminus V$ es cerrado en K y abierto en $K\setminus F$, luego abierto y cerrado en X.
(4) C es una componente conexa de X.

Deducir que si X es conexo, todas las componentes conexas de U tienen puntos de acumulación fuera de U.

Número 7.24. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ una aplicación no constante continua para las topologías usuales. Sea X el espacio topológico cociente de $\mathbb{S}^1$ para la relación: $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. ¿Cuál es el tipo topológico de X?

Número 7.25. Sean X, Y dos espacios conexos ambos con más de un punto. Demostrar que $X \times Y \setminus \{\alpha\}$ también lo es para cualquier punto $\alpha \in X \times Y$. Deducir que la recta afín $\mathbb{R}$ no es homomorfa a ningún espacio producto (no trivial).

Número 7.26. Sea X un espacio topológico. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X cuya unión y cuya intersección son conjuntos conexos. Demostrar que tanto A como B son conexos. ¿Y si son abiertos?

Número 7.27. Se considera el cuadrado lexicográfico $X = [0,1] \times [0,1]$ (3.15). Demostrar que los intervalos de X son conexos y concluir que X es conexo y localmente conexo. Deducir que X no es homeomorfo a un espacio producto.

Número 7.28. Sea $f : X \to Y$ una identificación con fibras conexas. Demostrar que si es Y conexo, X también lo es. ¿Se puede decir lo mismo de la local conexión?

Lista 8. Conexión por caminos

Número 8.1. Enunciar y demostrar los teoremas del pivote para conexión por caminos.

Número 8.2. Demostrar que $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos es conexo por caminos.

Número 8.3. Demostrar que en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables todos los caminos son constantes. Deducir que los únicos subconjuntos conexos por caminos son los puntos. Así, éste es un espacio conexo pero totalmente disconexo por caminos.

Número 8.4. Demostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología de 1.8 es conexo por caminos.

Número 8.5. Estudiar si es conexo por caminos para la topología usual el conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ de los puntos con alguna coordenada racional. ¿Y el de los puntos con alguna coordenada irrational?

Número 8.6. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto de 7.14. Demostrar que X no es conexo por caminos, pero su adherencia sí.

Número 8.7. Sea $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^2$ como en 7.15. Estudiar si $\widetilde{X}$ es conexo por caminos.

Número 8.8. Demostrar que en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, los complementos de conjuntos numerables son conexos por poligonales, luego conexos por caminos para la topología usual.

Número 8.9. Se considera en $\mathbb{R}^{m\times n}$ el subconjunto S de las matrices $A = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, que tienen todas las columnas distintas: $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Estudiar si S es conexo por caminos.

Número 8.10. Se consideran los conjuntos $X_n = \{(x, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : -n \leq x \leq n\}$, $n \geq 1$, y la intersección $Y = \bigcap_{n\geq 1} \big(\mathbb{R}^2 \setminus X_n\big)$ equipada con la topología usual. Estudiar si esa intersección Y es conexa por caminos. ¿Y conexa?

Número 8.11. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$X = \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{(\tfrac{1}{k}, t) : k \geq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}\big) \cup \{(0,1)\}.$$

Demostrar que X es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 8.12. En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se consideran los subconjunto $S = \{\frac{1}{k} : k \geq 1\}$ $T = \{\frac{-1}{k} : k \geq 1\}$, y los intervalos $I = [0,1]$, $J = [-1,0]$. Sea

$$Y = \big(I \times S\big) \cup \big(T \times I\big) \cup \big(J \times T\big) \cup \big(S \times J\big).$$

Demostrar que X es conexo, pero no conexo por caminos.

Número 8.13. Se equipa $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con la topología generada por los conjuntos $G = B \setminus A$, donde B es una bola abierta y A un conjunto numerable. Demostrar que con esta topología $\mathbb{R}^n$ es conexo y localmente conexo, pero no conexo por caminos (luego tampoco localmente conexo por caminos). ¿Pasa lo mismo en el caso $n = 1$?

Número 8.14. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ descrita en 1.19. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, construir una aplicación suprayectiva continua

$$\alpha : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (\{1,a\}, \mathcal{T}|\{1,a\}).$$

¿Es $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ conexo por caminos?

Número 8.15. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de 5.21. Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) : t \mapsto (t, \lambda t)$, para $\lambda = 0, 1$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ conexo por caminos con esta topología?

Número 8.16. Se considera en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ de 5.23. Estudiar si $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ es conexo por caminos.

Número 8.17. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología cuyos abiertos son los conjuntos $U \subset \mathbb{R}^2$ que contienen para cada punto $(a,b) \in U$ un *aspa*

$$X = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon\} \cap \big(\{x - y = a - b\} \cup \{x + y = a + b\}\big).$$

Mostrar que esas aspas (que *no son* entornos (a,b)) son conjuntos conexos por caminos en esta topología, y deducir que el plano con esta topología es conexo y localmente conexo por caminos.

Número 8.18. Se equipa el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}_{\mathrm{CK}}$ de los complementos compactos (véase 6.20).

(1) Estudiar si la aplicación

$$\sigma : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{CK}}) : t \mapsto (t, 1/t), \text{ para } t \neq 0,$$

se puede definir en el origen para que sea continua.

(2) Probar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathrm{CK}})$ es localmente conexo por caminos.

Número 8.19. Se considera el subconjunto $\mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ de $\mathbb{R}^n$, equipado con la topología usual. Demostrar que $\mathbb{Q}^n \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$ es conexo por caminos. (Estudiar primero los segmentos que conectan puntos con coordenadas racionales, y usar un límite de tales segmentos para alcanzar puntos con coordenadas irracionales.)

Número 8.20. Mostrar que el plano $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ de los conjuntos *radialmente abiertos* (1.21) es conexo y localmente conexo por caminos.

Número 8.21. Se considera el cuadrado lexicográfico $X = [0,1] \times [0,1]$ (3.15). Demostrar que no es conexo por caminos (ni localmente conexo por caminos, pues es conexo 7.27).

Número 8.22. Se equipa $X = \mathbb{R}$ con la topología de los complementarios numerables y el intervalo $[0,1]$ con la topología usual. El *cono* sobre X es el espacio Y obtenido identificando en el cilindro $X \times [0,1]$ (con la topología producto) todos los puntos $(x,1)$ entre sí. Demostrar que Y es conexo por caminos y localmente conexo, pero no es localmente conexo por caminos.

Lista 9. Homotopía

Número 9.1. Sea X un espacio conexo por caminos X. Demostrar que dos aplicaciones constantes $f, g : Y \to X$ son homótopas.

Número 9.2. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ una aplicación continua no homótopa a la identidad. Probar que f transforma algún punto $x \in \mathbb{S}^n$ en su antípoda: $f(x) = -x$. Dar una condición suficiente análoga para que f tenga algún punto fijo $x = f(x)$.

Número 9.3. Sean A un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, X un espacio topológico e $Y \subset X$. Demostrar que si $f, g : X \to A$ son continuas y coinciden en Y, entonces f y g son homótopas por una homotopía que coincide con ambas en Y. Deducir que un conjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es simplemente conexo.

Número 9.4. Mostrar que el espacio afín menos un punto, $X = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ y utilizar esto para calcular el grupo fundamental de X. Deducir que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a ningún $\mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$.

Número 9.5. Demostrar que no existe ninguna elevación continua $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de la identidad $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$, es decir, ninguna aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tal que

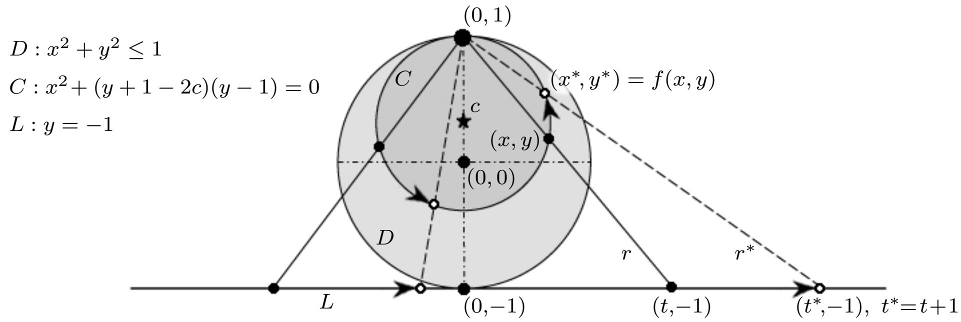
$$(x, y) = (\cos 2\pi h(x, y), \operatorname{sen} 2\pi h(x, y)).$$

Número 9.6. El toro de revolución $T \subset \mathbb{R}^3$ que se obtiene al girar alrededor del eje de las z's la circunferencia $y = 0, (x-2)^2 + z^2 = 1$. Comprobar que las ecuaciones

$$x = (2 + \cos u)\cos v, \quad y = (2 + \cos u)\operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u.$$

definen un homeomorfismo local suprayectivo $p : \mathbb{R}^2 \to T$, y utilizar p para definir un *doble número de vueltas* $\# : \pi_1(T, x_0) \to \mathbb{Z}^2$. Confirmar así que el grupo fundamental del toro es $\mathbb{Z}^2$.

Número 9.7. Definir un homeomorfismo $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ del disco cerrado $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ que tenga un único punto fijo, y esté en el borde, explicitando la construcción geométrica del dibujo:



Comparar el resultado con 6.30.

Número 9.8. Demostrar que un retracto de un espacio Hausdorff es un subconjunto cerrado. Deducir que una bola abierta no es retracto de $\mathbb{R}^n$.

Número 9.9. Demostrar que la esfera $\mathbb{S}^{n-1} : \|x\| = 1$ es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y también de la corona esférica $C \subset \mathbb{R}^n$ definida por $1 \leq \|x\| \leq 2$. Demostrar que una bola cerrada de $\mathbb{R}^n$ es retracto de deformación de todo $\mathbb{R}^n$.

Número 9.10. Demostrar que:

(1) La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ es un retracto de deformación del conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1\} \cup \{(1, 0)\}.$$

(2) El conjunto $X : (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$, formado por dos circunferencias tangentes, es un retracto de deformación del plano menos los centros $(\pm 1, 0)$.

Número 9.11. Calcular el grupo fundamental del espacio $X = A \cup B \subset \mathbb{R}^3$ donde

$$A : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \leq 0; \quad B : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, z = 0.$$

Número 9.12. Calcular los grupos fundamentales de:

$$\mathbb{R} \times B^2, \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1, \quad (B^2 \setminus \{a\}) \times \mathbb{S}^1, \quad (\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) \times \mathbb{S}^1.$$

(Se denota $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y $B^2 \subset \mathbb{R}^2$ el disco abierto $x^2 + y^2 < 1$.)

Número 9.13. Calcular el grupo fundamental de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_1 : x^2 - y^2 - z^2 = 2, \quad Q_2 : z = x^2 + y^2, \quad Q_3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad Q_4 : x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Número 9.14. Calcular el grupo fundamental del paraguas de Whitney $X \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 - zy^2 = 0$.

Número 9.15. Sea $\mathbb{D}^2$ el disco cerrado de $\mathbb{R}^2$, con borde $\mathbb{S}^1$. Calcular el grupo fundamental de $\mathbb{D}^2 \setminus \{a\}$ según a esté o no en el borde.

Número 9.16. Estudiar si los siguientes pares de espacios son homeomorfos:

(1) Un disco cerrado $D^2 \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1$ y la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(2) Una bola cerrada $D^3 \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ y $\mathbb{S}^2$.
(3) $X = D^2 \times \{0\} \cup \{(0, 0)\} \times [0, 1]$ e $Y = D^2 \times \{0\} \cup \{(1, 0)\} \times [0, 1]$.
(4) $X \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z \pm 1)^2 = 1$ e $Y \subset \mathbb{R}^2 : (x \pm 1)^2 + y^2 \leq 1$.

Número 9.17. Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ un entorno de un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}^2$. Sea $D \subset V$ un disco cerrado de centro a y $b \neq a$ otro punto de D.

(1) Mostrar que las inclusiones $D \setminus \{a\} \subset V \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ inducen un isomorfismo $\pi(D \setminus \{a\}, b) \to \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}, b)$ que factoriza a través de $\pi(V \setminus \{a\}, b)$.

(2) Deducir que $\pi(V \setminus \{a\})$ no es trivial.

Concluir que si $\mathbb{R}^2$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, entonces $n = 2$.

Número 9.18. (Invarianza del borde) Sea $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano cerrado $x \geq 0$. Demostrar que si $h : U \to V$ es un homeomorfismo entre dos abiertos U y V de $\mathbb{H}^2$, entonces

$$h(U \cap \{x = 0\}) = V \cap \{x = 0\}.$$

Número 9.19. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, -2 \leq z \leq 2\}$, $\sim$ la relación de equivalencia de 3.25, y $X = M/\sim$ el correspondiente espacio cociente. Calcular el grupo fundamental de X. ¿Es cierto en general que al hacer un cociente el grupo fundamental se simplifica?

Número 9.20. Consideramos en el rectángulo $S = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ la relación de equivalencia $\sim$ definida en 3.26, y el correspondiente cociente $X = S/\sim$. Mostrar que X es simplemente conexo, pero que no es homeomorfo a una esfera.

Número 9.21. Demostrar que existe una circunferencia en la banda de Möbius que es retracto de deformación suyo. Deducir que la banda de Möbius y el cilindro son homotópicamente equivalentes.

Número 9.22. Demostrar que el borde de una banda de Möbius no es un retracto suyo.

Número 9.23. Demostrar que en un espacio simplemente conexo dos caminos con los mismos extremos son homótopos *con extremos fijos.*

Número 9.24. Demostrar que un espacio es simplemente conexo si y sólo si toda aplicación continua de la circunferencia en el espacio se extiende al disco que la circunferencia bordea.

Número 9.25. Demostrar que si en un espacio todo lazo es homótopo a un lazo constante por una homotopía *de lazos,* pero no necesariamente de extremos fijos, entonces es un espacio simplemente conexo.

Número 9.26. Se llama *circulo polaco* al espacio Y obtenido pegando al seno del topólogo $\widetilde{X}$ (7.15) un arco de extremos $(1/\pi, 0), (0, 0)$ que sólo lo corta en ellos. Demostrar que Y es simplemente conexo.

Número 9.27. Demostrar que la unión de dos esferas tangentes en un punto es un espacio simplemente conexo. Más generalmente, demostrar que una *cadena de esferas* (incluso infinita) tangentes cada una en un punto a la anterior y en otro a la siguiente es un espacio simplemente conexo.

Número 9.28. Probar que el espacio obtenido pegando tres esferas por un punto es simplemente conexo. Mostrar lo mismo para un número arbitrario de esferas (incluso infinito). Estos espacios se denominan *bouquets de esferas.*

Número 9.29. Un *collar de esferas,* es una cadena finita de esferas cada una tangente a la siguiente, y la última a la primera. Calcular el grupo fundamental del collar de cuatro esferas $X \subset \mathbb{R}^3$, unión de las de radio 1 y centros $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$.

Número 9.30. Sea X un collar de n esferas. Mostrar que una cadena infinita de esferas $\widetilde{X}$ (9.27) es un recubridor de X, y utilizarlo para definir un isomorfismo $\pi(X) \to \mathbb{Z}$ similar al número de vueltas de la circunferencia.

Número 9.31. Sea X un collar de esferas. Definir una identificación del toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sobre X que induzca un epimorfismo entre los grupos fundamentales.

Número 9.32. Sea X una cadena, un bouquet o un collar de esferas. Definir un retracto $\rho : X \to A \subset X$ sobre una curva A que induzca un isomorfismo entre los grupos fundamentales.

Número 9.33. Sea $f : X \to Y$ una equivalencia de homotopía. Probar que si X es conexo (resp. conexo por caminos), entonces Y lo es también. Más generalmente, probar que f establece una biyección entre las componentes conexas (resp. conexas por caminos) C de X y las componentes conexas (resp. conexas por caminos) D de Y, de manera que las restricciones $f|_C : C \to D$ son equivalencias de homotopía bien definidas.

Número 9.34. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el toro de revolución del número 9.6 y $p : \mathbb{R}^2 \to T$ el homeomorfismo local suprayectivo allí definido, que induce un homeomorfismo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to T$ y un isomorfismo entre sus grupos fundamentales (que son $\equiv \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

(1) Definir un homeomorfismo de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en sí mismo que transforme uno de los generadores de su grupo fundamental en el otro, y concluir que T tiene también un homeomorfismo h con esa propiedad.

(2) Mostrar que este homeomorfismo h no puede extenderse a un homeomorfismo H de $\mathbb{R}^3$: tal H dejaría invariante la componente conexa acotada W de $\mathbb{R}^3 \setminus T$, y por tanto induciría un homeomorfismo del *toro sólido* $M = T \cup W$ (ver 3.31(1)) en sí mismo que transformaría un lazo nulhomótopo en otro que no lo es.

Número 9.35. Recordemos que la esfera $\mathbb{S}^3$ se obtiene pegando dos toros sólidos M y M' por su borde que es un toro de revolución T (3.31(2)). Mostrar que M y M' contienen circunferencias S y S' de manera que: (i) S es un retracto de deformación de M y (ii) T es un retracto de deformación de $M' \setminus S'$. Deducir que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^3 \setminus S$ es $\mathbb{Z}$.

Número 9.36. Sea Q el conjunto de polinomios mónicos de grado dos $P(t) = t^2 + xt + y$ con coeficientes complejos y dos raíces distintas. Este conjunto se identifica con el subconjunto de los puntos $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tal que $x^2 - 4y \neq 0$. Demostrar que Q tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}$ utilizando la homotopía

$$H_s(x, y) = ((1 - s)x, y - \tfrac{1}{4}s(2 - s)x^2).$$

Describir cómo esta homotopía interpola de las dos raíces de P a las de cierto polinomio $t^2 - z$.

Número 9.37. Describir el plano proyectivo como un cociente de la botella de Klein, de manera que ese cociente induzca un epimorfismo entre los grupos fundamentales.

Número 9.38. Probar que el complemento $\mathbb{R}^3 \setminus A$ de un conjunto numerable es simplemente conexo. (Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3 \setminus X$ se puede aplicar el teorema de Baire en el espacio de las homotopías $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ con $H_0 = f$ para concluir que alguna evita A, 6.22 y 0.8.)

Número 9.39. Sea F un subconjunto cerrado conexo de la esfera $\mathbb{S}^2$. Demostrar que las componentes conexas de $\mathbb{S}^2 \setminus F$ son todas simplemente conexas.

Lista 10. Borsuk y sus variantes.

Una aplicación definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ simétrico respecto del origen se llama *impar* si $f(-x) = -f(x)$ y *par* si $f(-x) = f(x)$.

Número 10.1. Demostrar que toda aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ impar se anula en algún punto. Deducir que toda función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ alcanza el mismo valor en al menos dos puntos antipodales.

Número 10.2. Sean C y F dos subconjuntos cerrados de la circunferencia $\mathbb{S}^1$ que la recubren. Utilizar la función $f(x) = \mathrm{dist}(x, C)$ para demostrar que al menos uno de ellos contiene dos puntos antipodales. ¿Y si son tres cerrados?

Número 10.3. (*Teorema de paridad de Borsuk-Hirsch*) Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la aplicación $p(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$. Demostrar que si una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es impar (resp. par), entonces el lazo $\sigma = f \circ p : [0, 1] \to \mathbb{S}^1$ tiene número de vueltas impar (resp. par).

Número 10.4. (*Teorema antipodal de Borsuk*) Demostrar que no existe ninguna aplicación continua impar $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$.

Número 10.5. (*Teorema de Borsuk-Ulam*) Mostrar que toda aplicación continua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ alcanza el mismo valor en al menos dos puntos antipodales. En particular, (i) no es inyectiva, y (ii) si es impar tiene al menos un cero.

Número 10.6. (*Propiedad de Lusternik-Schnirelmann*) Sean A_1, A_2, A_3 tres conjuntos cerrados que recubren la esfera. Aplicar el teorema de Borsuk-Ulam 10.5 a la aplicación $f(x) = (\mathrm{dist}(x, A_1), \mathrm{dist}(x, A_2))$ para probar que al menos uno de ellos contiene puntos antipodales. ¿Y si son cuatro?

Número 10.7. Sea $h : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Deducir del teorema antipodal de Borsuk 10.4 que h no puede ser impar en el borde del disco. (Si lo fuera, la función $g(x) = h(x_1, x_2)$ definida en $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 \geq 0\}$ se podría extender a una aplicación continua impar $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$.)

Número 10.8. Deducir del resultado del número anterior que no hay ninguna retracción $\rho : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$, y concluir que el teorema antipodal de Borsuk implica el teorema del punto fijo de Brouwer. (Se sabe que no al revés.)

Número 10.9. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) (*Teorema de Borsuk-Ulam*) Toda aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ alcanza el mismo valor en dos puntos antipodales.

(2) Toda aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ impar se anula en algún punto.

(3) (*Teorema antipodal de Borsuk*) No hay aplicaciones continuas impares $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.

(4) No hay aplicaciones continuas $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ impares en $\mathbb{S}^{n-1}$ ($\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ es el disco cerrado $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$ y $\mathbb{S}^{n-1}$ su frontera).

Obsérvese que (4) implica que no existe una *retracción* $\rho : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, es decir, una aplicación continua que sea la identidad en la frontera.

Número 10.10. Demostrar que las cuatro propiedades del problema anterior implican la

Propiedad de Lusternick-Schnirelmann general (ver 10.6):

Si $n+1$ cerrados recubren la esfera $\mathbb{S}^n$, entonces alguno contiene dos puntos antipodales.

Número 10.11. Se considera la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ y se inscribe en ella un simple con vértice en el polo norte $(0, \dots, 0, 1)$ y cara opuesta en el hiperplano $x_n = -\frac{1}{2}$. Proyectar el simple desde el origen para concluir que $\mathbb{S}^{n-1}$ es unión de $n+1$ subconjuntos cerrados ninguno de los cuales contiene puntos antipodales.

Número 10.12. Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ una aplicación continua y $C_1, \dots, C_{n+1}$ cerrados que recubren $\mathbb{S}^{n-1}$ en ninguno de los cuales hay un par de puntos antipodales. Aplicar la propiedad de Lusternik-Schnirelmann 10.10 a los cerrados $f^{-1}(C_i)$ para deducir de ella el teorema antipodal de Borsuk 10.9(3).

Número 10.13. La propiedad de Lusternik-Schnirelmann se puede formular para recubrimientos cuyos conjuntos sean abiertos y/o cerrados. Mostrar que:

(1) La propiedad para cerrados implica la propiedad para abiertos, ya que cualquier recubrimiento abierto $U_1, \dots, U_r$ de $\mathbb{S}^n$ tiene un *refinamiento* por cerrados $C_i \subset U_i$ que también recubren $\mathbb{S}^n$. (Se puede tomar $C_i = \{x \in \mathbb{S}^n : \text{dist}(x, \mathbb{S}^n \setminus U_i) \geq 1/k\}$ con $k \geq 1$ suficientemente grande.)

(2) La propiedad para abiertos implica la propiedad para abiertos y/o cerrados, pues si un cerrado C no tiene puntos antipodales el conjunto abierto $U = \{x \in \mathbb{S}^n : \text{dist}(x, C) < 1/k\}$ tampoco los tiene para $k \geq 1$ suficientemente grande.

Número 10.14. Consideremos el toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Formular adecuadamente la propiedad de paridad de Borsuk-Hirsch para aplicaciones $T \to \mathbb{R}^1$ y $T \to \mathbb{R}^2$ y estudiar si se cumple o no.

Número 10.15. Sean $x_0, x_1 \in \mathbb{S}^1$ dos puntos distintos y $\alpha : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ un camino del primero al segundo. Demostrar que el número de vueltas de un lazo $\sigma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ de base x_0 coincide con el del lazo conjugado $\alpha^{-1} * \sigma * \alpha$ de base x_1.

Número 10.16. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua y consideremos la parametrización habitual $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$.

(1) Demostrar que existe una *elevación* $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f, es decir, tal que $p \circ \overline{f} = f \circ p$, y que $\overline{f}$ es periódica: $\overline{f}(x+1) = \overline{f}(x) + k$, para cierto entero k.

(2) Sean $x_0 \in \mathbb{S}^1$ y $x_1 = f(x_0)$ y denotemos $\#_i$ el número de vueltas de los lazos de base x_i $(i = 1, 2)$. Demostrar que $\#_1(f \circ \sigma) = k\, \#_0(\sigma)$ para el mismo entero k de (1).

(3) Concluir que el entero k sólo depende de f. Este k se denomina *grado de Brouwer-Kronecker de f*.

(4) Calcular los grados de la identidad, la aplicación antipodal, las rotaciones y las simetrías de $\mathbb{S}^1$.

Número 10.17. (1) Probar que dos aplicaciones $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ son homótopas si y sólo si tienen el mismo grado de Brouwer-Kronecker.

(2) Comprobar el resultado anterior para la identidad, la aplicación antipodal, las rotaciones y las simetrías.

Número 10.18. (*Teorema de paridad*) Demostrar que una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ impar (resp. par) tiene grado de Brouwer-Kronecker impar (resp. par).

Número 10.19. Demostrar que una aplicación continua impar $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ no es nulhomótopa. Deducir que es suprayectiva.

Número 10.20. Se consideran el cono $X : x^2 + y^2 = z^2$ y los homeomorfismos $f(x, y, z) = (\pm x, \pm y, \pm z)$ correspondientes a todas las posibles elecciones de signos. Determinar si alguno de ellos (distinto de la identidad) es *isótopo* a ella, es decir existe una homotopía $h_s : X \to X$ con $h_0 = \mathrm{Id}_X$ y $h_1 = f$ tal que todas las aplicaciones h_s sean homeomorfismos.