I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura............ Fecha ....

Alumno/a .... Curso............ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

$\boxed{12.-}$ Halla el orden del cero $z_0=0$ para las siguientes funciones:

$\boxed{a)}$ $f(z)=\begin{cases} 0 & \text{si } z=0 \\ \frac{\text{sen}^3 z}{z} & \text{si } z\neq 0. \end{cases}$ $\quad f(z)\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Haciendo el desarrollo de Taylor del $\text{sen}\, z$ en $z_0=0$ obtenemos que

$$\text{sen}\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n \quad \text{donde } \varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \text{sen}\, z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n$ y $\text{sen}\, z$ tiene un cero en 0 de multiplicidad 1 por lo que $\text{sen}\, z = z\cdot h(z)$ con $h(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h(0)\neq 0$.

$$\Longrightarrow \frac{\text{sen}^3 z}{z} = \frac{z^3\cdot h^3(z)}{z} = z^2\cdot h^3(z) \quad \text{con } h^3(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } h^3(0)\neq 0.$$

Por tanto $f(z)$ tiene un cero en z de multiplicidad 2.

$\boxed{b)}$ $f(z) = e^{\text{sen}\, z} - e^{\text{tg}\, z}$

$f(0) = e^0 - e^0 = 0$ por lo que f tiene un cero en 0.

$$f'(z) = e^{\text{sen}\, z}\cdot\cos z - e^{\text{tg}\, z}\cdot(1+\text{tg}^2 z) = e^{\text{sen}\, z}\cdot\cos z - e^{\text{tg}\, z} - e^{\text{tg}\, z}\,\text{tg}^2 z$$

$$f'(0) = e^0\cdot 1 - e^0(1+0) = 0$$

$$f''(z) = e^{\text{sen}\, z}\cdot\cos^2 z + e^{\text{sen}\, z}\cdot(-\text{sen}\, z) - e^{\text{tg}\, z}(1+\text{tg}^2 z)^2 - e^{\text{tg}\, z}\cdot 2\,\text{tg}\, z(1+\text{tg}^2 z)$$

$f^{II)}(0) = e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 0 - e^0 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 = 0$

$f^{3)}(z) = e^{\operatorname{sen} z} \cos^3 z - 2e^{\operatorname{sen} z} \cos z \operatorname{sen} z - e^{\operatorname{sen} z} \cos z \operatorname{sen} z - e^{\operatorname{sen} z} \cos z$

$- e^{\operatorname{tg} z} (1+\operatorname{tg}^2 z)^3 - e^{\operatorname{tg} z} \cdot 2(1+\operatorname{tg}^2 z) \cdot 2\operatorname{tg} z \cdot (1+\operatorname{tg}^2 z)$

$- 2e^{\operatorname{tg} z} (1+\operatorname{tg}^2 z)^2 \cdot \operatorname{tg} z - 2e^{\operatorname{tg} z} \cdot (1+\operatorname{tg}^2 z + 3\operatorname{tg}^2 z (1+\operatorname{tg}^2 z))$

$f^{3)}(0) = 1 - 0 - 0 - 1 - 1 - 0 - 0 - 2 = -3 \neq 0.$

Por tanto la serie de Taylor para $f(z)$ centrada en $z_0 = 0$ es

$$f(z) = e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n \quad \text{con } f^3(0) \neq 0.$$

Por tanto la multiplicidad de 0 es 3.

$\boxed{c)}$ $f(z) = 6\operatorname{sen}^3 z + z^3(z^6 - 6) = 6\operatorname{sen}^3 z + z^9 - 6z^3 \qquad f(0) = 0$

$f'(z) = 18\operatorname{sen}^2 z \cos z + 9z^8 - 18z^2. \qquad f'(0) = 0.$

$f''(z) = 18(2\operatorname{sen} z \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z \cdot (-\operatorname{sen} z)) + 72z^7 - 36z = \qquad f''(0) = 0$

$= 36 \operatorname{sen} z \cos^2 z - 18\operatorname{sen}^3 z + 72z^7 - 36z.$

$f^{3)}(z) = 36(\cos^3 z - \operatorname{sen}^2 z \, 2\cos z) - 54\operatorname{sen}^2 z \cdot \cos z + 72 \cdot 7 \cdot z^6 - 36 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 72\operatorname{sen}^2 z \cos z - 54\operatorname{sen}^2 z \cos z + 504z^6 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 126\operatorname{sen}^2 z \cos z + 504z^6 \quad ; \quad f^{3)}(0) = 0.$

$f^{4)}(z) = -108\cos^2 z \operatorname{sen} z - 126(2\operatorname{sen} z \cos^2 z - \operatorname{sen}^3 z) + 3024z^5 =$

$= -108\cos^2 z \operatorname{sen} z - 252\cos^2 z \operatorname{sen} z + 126\operatorname{sen}^3 z + 3024z^5 =$

$= -360\cos^2 z \operatorname{sen} z + 126\operatorname{sen}^3 z + 3024z^5 \quad ; \quad f^{4)}(0) = 0$

$f^{5)}(z) = -360(2\cos z \cdot \operatorname{sen}^2 z (-1) + \cos^3 z) + 126\operatorname{sen}^2 z \cdot \cos z \cdot 3 + 3024 \cdot 5 z^4.$

$f^{5)}(0) = -360 \neq 0.$

Por tanto, el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)=6\operatorname{sen}^3 z+z^3(z^6-6)$ en 0 es el de la potencia z^5, por lo que 0 es un cero de multiplicidad 5.

$\boxed{d)}$ $f(z)=(e^z-e^{z^2})\log(1-z)$.

$$f(0)=(e^0-e^0)\log 1=0.$$

$$f'(z)=(e^z-e^{z^2}\cdot 2z)\log(1-z)+(e^z-e^{z^2})\cdot\frac{(-1)}{1-z}=$$

$$=e^z\log(1-z)-2z\,e^{z^2}\log(1-z)-e^z(1-z)^{-1}+e^{z^2}(1-z)^{-1} \qquad f'(0)=0$$

$$f''(z)=e^z\log(1-z)-\frac{e^z}{1-z}-2e^{z^2}\log(1-z)-2z\left[e^{z^2}\log(1-z)\cdot 2z-\frac{e^{z^2}}{1-z}\right]$$

$$-e^z(1-z)^{-1}-e^z(1-z)^{-2}+e^{z^2}\cdot 2z(1-z)^{-1}+e^{z^2}\cdot(1-z)^{-2}$$

$$f''(0)=0-1-0-0-1-1+0+1=-2$$

Como el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)=(e^z-e^{z^2})\log(1-z)$ centrada en 0 es el que acompaña a z^2, 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2.

$\boxed{e)}$ $f(z)=\dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{\operatorname{sen} z}{2}\right)^2}$

Hemos visto varias veces en esta hoja que $\operatorname{sen} z=z\cdot h(z)$ para cierta función $h(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y tal que $h(0)\neq 0$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} z}{2}\right)^2} = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z\,h(z)}{2}\right)^2} = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 (1 - h^2(z))} =$$

$$= \frac{4 z^4}{1 - h^2(z)}.$$

Sabemos que $h(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$

Sea $g(z) = 1 - h^2(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$

Es claro que g tiene un cero en 0 y $g(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos la multiplicidad de dicho 0.

$$g'(z) \overset{z\neq 0}{=} - \frac{2\operatorname{sen} z \cos z\, z^2 - \operatorname{sen}^2 z \cdot 2z}{z^4} = \frac{2\operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^3}$$

$$g'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2} - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2 - \operatorname{sen}^2 z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{(z + \operatorname{sen} z)}{z} \frac{(z - \operatorname{sen} z)}{z^2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^2} \overset{*_1}{=} 0$$

$$\Rightarrow g'(z) = \begin{cases} \frac{2\operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^3} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$g''(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2\operatorname{sen}^2 z - z\operatorname{sen} 2z}{z^3} - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^4} \overset{*_2}{=} 2/3$$

Por tanto g tiene un cero en 0 de multiplicidad 2 es decir $\exists\, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $g_2(0) \neq 0$ y $g(z) = z^2 \cdot g_2(z)$.

$$\Rightarrow f(z) = \frac{4z^4}{1-h^2(z)} = \frac{4z^4}{g(z)} = \frac{4z^4}{z^2 \cdot g_2(z)} = 4z^2 \cdot \frac{1}{g_2(z)}$$

Como $\frac{4}{g_2(z)}$ es entera ($g_2(z) \neq 0 \; \forall z$) $*_3$ y $\frac{4}{g_2(z)} \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$ podemos asegurar que f tiene un cero de multiplicidad 2.

$*_3$

$$g_2(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ g_2(0) & \text{si } z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{z^2 - \operatorname{sen}^2 z}{z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ g_2(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

$$g_2(z) = 0 \overset{z \neq 0}{\Longleftrightarrow} z^2 - \operatorname{sen}^2 z = 0 \Leftrightarrow z^2 = \operatorname{sen}^2 z \Leftrightarrow z = 0 \; !!$$

Por tanto $g_2(z) \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Por último los límites $*_1$ y $*_2$ se han calculado cuando $z \in \mathbb{R}$. aplicando L'Hôpital sucesivamente. Podemos hacer esto porque sabemos que $g(z)$ es una función , por tanto, infinitamente derivable y con derivada continua. Por tanto sabemos que $\exists \lim_{z \to 0} \frac{g(z)-g(0)}{z-0}$. Como el límite tiene que valer lo mismo , independientemente de por donde nos acerquemos a cero y sabemos que si nos acercamos por reales, el límite es 0, entonces el límite es siempre 0. El mismo argumento sirve para justificar $*_2$.

Hacemos los límites en el caso real

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} \underset{\uparrow \text{ Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0 \ \downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x - x\operatorname{sen}2x}{x^4} \underset{\uparrow \text{ Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0 \ \downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{sen}2x - x\cos 2x\cdot 2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}2x - 2x\cos 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}2x - 2x\cos 2x}{4x^3} \underset{\uparrow \text{ Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0 \ \downarrow}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos 2x + 2x\operatorname{sen}2x\cdot 2}{4\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}2x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}2x}{3x} \underset{\uparrow \text{ Regla L'Hôpital}}{\overset{\text{Ind. } 0/0 \ \downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3} = 2/3$$