El volumen de V se puede calcular como el volumen del conjunto $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq 3-x^2-y^2\}$ menos el volumen de media bola de radio 1 menos el volumen de $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2\leq z\leq 3-x^2-y^2\}$.

Haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas

$$vol(P)=\iiint_P 1 = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{3-r^2} r\cdot dz\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(3r-r^3)\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3r-r^3)dr = 2\pi\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(\frac{9}{2}-0-\frac{9}{4}+0\right) =$$

$$= \frac{9\pi}{2}$$

$$vol(S)=\iiint_S 1 = \int_0^{1}\int_0^{2\pi}\int_2^{3-r^2} r\cdot dz\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^1(r-r^3)dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}-0-\frac{1}{4}+0\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{vol(B((0,0,2),1))}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow vol(V) = vol(P)-vol(S)-\frac{vol(B((0,0,2),1))}{2} = \frac{9\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \frac{27-3-4}{6}\pi = \frac{20}{6}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial V}(\nabla f+rot(\vec{F}))\cdot d\vec{S} = 4\,vol(V) = 4\cdot\frac{10}{3}\pi = \boxed{\frac{40\pi}{3}}$$

De este modo obtenemos también el mismo resultado pero las cuentas son más sencillas.