$$= \frac{e^{-\theta(a-\sum_{i=1}^{n} Ln x_i)} \theta^{n+p-1}}{\frac{\Gamma(n+p)}{(a-\sum Ln x_i)^{n+p}} \int_0^\infty \frac{(a-\sum Ln(x_i))^{n+p}}{\Gamma(n+p)} e^{-\theta(a-\sum Ln x_i)} \theta^{n+p-1} d\theta} =$$

$$= \frac{(a-\sum Ln x_i)^{n+p}}{\Gamma(n+p)} e^{-\theta(a-\sum_{i=1}^{n} Ln x_i)} \theta^{n+p-1} \sim Gamma\left(a-\sum_{i=1}^{n} Ln x_i,\ n+p\right)$$

Efectivamente, la familia conjugada natural es la Gamma.

Nótese que ambos parámetros son positivos ya que como $(x_{(1)}, x_{(n)}) \subset (0,1)$

$\Rightarrow \forall i=1 \dots n \quad x_i \in (0,1) \Rightarrow Ln\, x_i \in (-\infty, 0) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} Ln x_i \in (-\infty, 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow a - \sum_{i=1}^{n} Ln x_i > 0$

Si $(x_{(1)}, x_{(n)}) \not\subset (0,1)$ ya hemos dicho que la muestra no nos aporta información y no tiene sentido calcular la distribución condicionada por la muestra.

## Estimadores Puntuales Bayesianos

Ejercicio 1: Demostrar que si $L(\theta, t) = |t-\theta|$, el estimador Bayesiano es la mediana a posteriori

Sea $\theta_0$ tal que $F(\theta_0 | x_1 \dots x_n) = \frac{1}{2}$ la mediana de la distribución a posteriori. Si $T = T(x_1 \dots x_n)$ verifica $\theta^* < T$ con $T$ arbitrario.

Entonces $|\theta - \theta_0| - |\theta - T| = \begin{cases} \theta_0 - T & si \quad \theta \leq \theta_0 \\ 2\theta - (\theta_0 + T) & si \quad \theta_0 \leq \theta \leq T \\ T - \theta_0 & si \quad \theta \geq T \end{cases}$

Podemos acotar entonces $|\theta - \theta_0| - |\theta - T| \leq (\theta_0 - T) I_{(-\infty, \theta_0]}(\theta) + (T - \theta_0) I_{[\theta_0, \infty)}(\theta)$

Efectivamente

Si $\theta \leq \theta_0 \Rightarrow |\theta - \theta_0| - |\theta - T| = \theta_0 - T \leq \theta_0 - T = (\theta_0 - T) I_{(-\infty, \theta_0]}(\theta) + (T - \theta_0) I_{[\theta_0, \infty)}(\theta)$.