Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat - Inf

Lista 4

Número 4.12.- En $\mathbb{R}^2$ se considera la colección β de todos los subconjuntos

$$V(a,b)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le a,\ y\le b\}$$

Demostrar que β es efectivamente base de una topología y estudiar sus propiedades de separación.

Para comprobar que β es base de una topología hay que ver que:

i) $X=\bigcup_{B\in\beta} B$ y ii) $\forall x\in B_1\cap B_2$ con $B_1,B_2\in\beta$ $\exists B^x\in\beta$ con $x\in B^x\subset B_1\cap B_2$

Lo primero es inmediato porque dado $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2=X$ entonces $(x_0,y_0)\in V(x_0,y_0)$

luego $(x_0,y_0)\in\bigcup_{a,b\in\mathbb{R}} V(a,b)=\bigcup_{B\in\beta} B$

Para lo segundo, nos damos cuenta de que $V(a_1,b_1)\cap V(a_2,b_2)=$

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le a_1,\ x\le a_2,\ y\le b_1,\ y\le b_2\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le \min\{a_1,a_2\},\ y\le\min\{b_1,b_2\}\}=$

$=V(\min\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})\in\beta$. Por tanto, dado $x\in V(a_1,b_1)\cap V(a_2,b_2)$

$\exists B^x=V(\min\{a_1,a_2\},\min\{b_1,b_2\})$ tal que $x\in B^x$ y $\underset{(\supset)}{B^x\subset} B_1\cap B_2$.

Los conceptos de separación que tenemos son que un espacio sea T_0, T_1 y T_2

Un espacio topológico (X,τ) es T_2 si $\forall x,y\in X, x\neq y$, $\exists U^x, U^y$ entornos disjuntos de x e y.

Un espacio topológico (X,τ) es T_1 si $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, $\exists U^x$ entorno de x al que no pertenece y.

Un espacio topológio (X,τ) es T_0 si $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, ($\exists U^x$ entorno de x con $y\notin U^x$ o $\exists U^y$ entorno de y con $x\notin U^y$)

Nótese que en esta topología todo punto tiene un entorno abierto mínimo

En efecto, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $V(x_0, y_0)$ es entorno abierto de (x_0, y_0) y si $\mathcal{U} = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} V(a,b)$ es entorno de (x_0, y_0) entonces

$$V(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}.$$

Si $(x_1, y_1) \in V(x_0, y_0)$ entonces $x_1 \leq x_0$, $y_1 \leq y_0$. Como $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ $\exists a_0 \in A$ y $\exists b_0 \in B$ tal que $(x_0, y_0) \in V(a_0, b_0)$ y por tanto $x_0 \leq a_0$ & $y_0 \leq b_0$ luego

$$x_1 \leq a_0 \,,\; y_1 \leq b_0 \Leftrightarrow (x_1, y_1) \in V(a_0, b_0) \subset \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} V(a,b).$$

Con esta observación es fácil ver que este espacio no es T_2, no es T_1 y sí es T_0

No es T_2 porque dado $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$, si $\mathcal{U}^{(x_0, y_0)}$ y $\mathcal{U}^{(x_1, y_1)}$ son entornos (que podemos suponer abiertos) de los puntos, entonces

$$(x_0, y_0) \in V(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}^{(x_0, y_0)} \quad \text{y} \quad (x_1, y_1) \in V(x_1, y_1) \subset \mathcal{U}^{(x_1, y_1)}.$$

Como $V(x_0, y_0) \cap V(x_1, y_1) = V(\min\{x_0, x_1\}, \min\{y_0, y_1\}) \neq \emptyset$ luego

$$\mathcal{U}^{(x_0, y_0)} \cap \mathcal{U}^{(x_1, y_1)} \neq \emptyset.$$

No es T_1 porque dado $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ con $x_1 < x_0$ & $y_1 < y_0$ entonces $(x_1, y_1) \in \mathcal{U}^{(x_0, y_0)}$ para todo entorno $\mathcal{U}^{(x_0, y_0)}$ de (x_0, y_0). En efecto,

$(x_1, y_1) \in V(x_0, y_0)$ porque $x_1 \leq x_0$ & $y_1 \leq y_0$ y $V(x_0, y_0) \subset \mathcal{U}^{(x_0, y_0)}$.

Sí es T_0 porque dado $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$ entonces distinguimos los casos:

- $x_0 = x_1$ (Podemos suponer $y_0 < y_1$) Entonces $V(x_0, y_0)$ es entorno de (x_0, y_0) y $(x_1, y_1) \notin V(x_0, y_0)$ porque $y_1 > y_0$.
- $x_0 \neq x_1$ (Podemos suponer $x_0 < x_1$) Entonces $V(x_0, y_0)$ es entorno de (x_0, y_0) y $(x_1, y_1) \notin V(x_0, y_0)$ porque $x_1 > x_0$.

Número 4.14.- Sea d una distancia en un conjunto X y sea τ_d la topología correspondiente. Demostrar que dos cerrados disjuntos de X tienen entornos disjuntos.

En el ejercicio 2.1. vimos que dado un conjunto A en un espacio métrico (X,d) en el que se define la topología τ_d de manera habitual entonces la función:

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x,A) = \inf_{a\in A} \{d(x,a)\} \end{aligned}$$ es continua.

Podemos definir entonces la función

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)} \end{aligned}$$ donde F_1 y F_2 son los cerrados que buscamos separar.

Por la continuidad de $d(x,A)$ $\forall A\subset X$ se tiene que f es continua, por ser cociente de funciones continuas donde el denominador no se anula. Esto es así porque el denominador solo se anula si $d(x,F_1)=d(x,F_2)=0$. Por ser F_1 y F_2 cerrados, entonces $d(x,F_i)=0 \iff x\in F_i$ para $i=1,2$. Si $d(x,F_1)=d(x,F_2)=0$ entonces $x\in F_1\cap F_2$ pero estos dos conjuntos son disjuntos luego concluimos que el denominador no se anula y f es continua.

Es evidente que $f(F_1)=\{0\}$ y $f(F_2)=\{1\}$. Por ser f continua $\mathcal{U}=f^{-1}((-\infty,1/2))$ es abierto y $V=f^{-1}((1/2,\infty))$ también. Además, son disjuntos y $F_1\subset\mathcal{U}$ y $F_2\subset V$. Hemos encontrado dos entornos (abiertos) de F_1 y F_2 que son disjuntos luego el resultado queda probado.