I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.......... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

12.- Halla el orden del cero $z_0=0$ para las siguientes funciones:

a) $f(z)=\begin{cases} 0 & \text{si } z=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^3 z}{z} & \text{si } z\neq 0. \end{cases}$ $f(z)\in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Haciendo el desarrollo de Taylor del sen z en $z_0=0$ obtenemos que

$$\operatorname{sen} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}z^n \quad \text{donde } \varepsilon_n=\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \operatorname{sen} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}z^n$ y sen z tiene un cero en 0 de multiplicidad 1 por lo que $\operatorname{sen} z = z\cdot h(z)$ con $h(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h(0)\neq 0$.

$\Longrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^3 z}{z}=\dfrac{z^3\cdot h^3(z)}{z}=z^2\cdot h^3(z)$ con $h^3(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h^3(0)\neq 0$.

Por tanto $f(z)$ tiene un cero en z de multiplicidad 2.

$\boxed{\text{b)}}$ $f(z)=e^{\operatorname{sen} z}-e^{\operatorname{tg} z}$

$f(0)=e^0-e^0=0$ por lo que f tiene un cero en 0.

$f'(z)=e^{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z-e^{\operatorname{tg} z}\cdot(1+\operatorname{tg}^2 z)=e^{\operatorname{sen} z}\cdot\cos z-e^{\operatorname{tg} z}-e^{\operatorname{tg} z}\operatorname{tg}^2 z$

$f'(0)=e^0\cdot 1-e^0(1+0)=0$

$f''(z)=e^{\operatorname{sen} z}\cdot\cos^2 z+e^{\operatorname{sen} z}\cdot(-\operatorname{sen} z)-e^{\operatorname{tg} z}(1+\operatorname{tg}^2 z)^2-e^{\operatorname{tg} z}\cdot 2\operatorname{tg} z(1+\operatorname{tg}^2 z)$

$f''(0) = e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 0 - e^0 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 = 0$

$f^{3)}(z) = e^{senz} \cos^3 z - 2e^{senz} \cos z \, senz - e^{senz} \cos z \, senz - e^{senz} \cos z$

$- e^{tgz}(1+tg^2 z)^3 - e^{tgz} \cdot 2(1+tg^2 z) \cdot 2tgz \cdot (1+tg^2 z)$

$- 2e^{tgz}(1+tg^2 z)^2 \cdot tgz - 2e^{tgz} \cdot (1+tg^2 z + 3tg^2 z(1+tg^2 z))$

$f^{3)}(0) = 1 - 0 - 0 - 1 - 1 - 0 - 0 - 2 = -3 \neq 0.$

Por tanto la serie de Taylor para $f(z)$ centrada en $z_0 = 0$ es

$$f(z) = e^{senz} - e^{tgz} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n \quad \text{con } f^3(0) \neq 0.$$

Por tanto la multiplicidad de 0 es 3.

---

c) $f(z) = 6sen^3 z + z^3(z^6 - 6) = 6sen^3 z + z^9 - 6z^3 \qquad f(0) = 0$

$f'(z) = 18sen^2 z \cos z + 9z^8 - 18z^2. \qquad f'(0) = 0.$

$f''(z) = 18(2senz \cos^2 z + sen^2 z \cdot (-senz)) + 72z^7 - 36z = \qquad f''(0) = 0$

$= 36 \, senz \cos^2 z - 18sen^3 z + 72z^7 - 36z.$

$f^{3)}(z) = 36(\cos^3 z - sen^2 z 2\cos z) - 54sen^2 z \cdot \cos z + 72 \cdot 7 \cdot z^6 - 36 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 72 sen^2 z \cos z - 54 sen^2 z \cos z + 504 z^6 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 126 sen^2 z \cos z + 504 z^6 \; ; \quad f^{3)}(0) = 0.$

$f^{4)}(z) = -108\cos^2 z \, senz - 126(2senz \cos^2 z - sen^3 z) + 3024 z^5 =$

$= -108\cos^2 z \, senz - 252\cos^2 z \, senz + 126 sen^3 z + 3024 z^5 =$

$= -360\cos^2 z \, senz + 126 sen^3 z + 3024 z^5 \; ; \quad f^{4)}(0) = 0$

$f^{5)}(z) = -360(2\cos z \cdot sen^2 z(-1) + \cos^3 z) + 126 sen^2 z \cdot \cos z \cdot 3 + 3024 \cdot 5 z^4.$

$f^{5)}(0) = -360 \neq 0.$