Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

HOJA 3.1. - EJERCICIOS BÁSICOS SOBRE CONJUNTOS — Curso 2018/2019

---

1. Razona cuáles de las afirmaciones que siguen son verdaderas y cuáles falsas:

a) $1 \in \{1\}$	b) $\{1\} \subseteq \{1\}$	c) $\{1\} \in \{1\}$	d) $\emptyset \in \emptyset$
e) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$	f) $\{1\} \in \{\{1\}\}$	g) $\emptyset \subseteq \emptyset$	h) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
i) $\emptyset \subseteq \{1\}$	j) $\emptyset \in \{1\}$	k) $\{\emptyset\} = \emptyset$	l) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

2. Sean a, b objetos cualesquiera. Razona que si $a \in \{\{b\}\}$, entonces $b \in a$.

3. Construye dos conjuntos A, B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.

4. De las cuatro afirmaciones que se presentan, para A, B y C conjuntos cualesquiera no vacíos, demuestra que únicamente una es cierta y pon contraejemplos para las otras tres, que son falsas:

   a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.

   b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

   c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.

   d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

5. A partir de un conjunto cualquiera A, definimos $A' = A \cup \{A\}$. Enumera los elementos de los siguientes conjuntos $\emptyset'$, $\emptyset''$ y $\emptyset'''$.

6. Utilizando la operación introducida en el ejercicio anterior, definimos $A^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$ mediante $A^{(0)} = A$; $A^{(n+1)} = A^{(n)\prime}$. Indica cuántos elementos tiene $\emptyset^{(n)}$ y pruebalo por inducción.

7. Siendo A, B dos conjuntos, demuestra que si dos cualesquiera de los enunciados siguientes son verdaderos, también lo será forzosamente el tercero.

   a) A y B son disjuntos   b) $A \subseteq B$ c) $A = \emptyset$

8. Dados los conjuntos $A = \{1, \{2\}\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, enumera cada uno de los conjuntos siguientes:

a) $A \cup B$	b) $A \cap B$	c) $A \setminus B$	d) $B \setminus A$
e) $\mathcal{P}(A)$	f) $B \cap \mathcal{P}(A)$	g) $A \times B$	h) $(A \times B) \cap (B \times A)$

9. Sean X, Y y Z tres conjuntos disjuntos entre sí. Demuestra que si los conjuntos A y B cumplen que $A \subseteq X \cup Y$ y $B \subseteq X \cup Z$, entonces $A \cap B \subseteq X$.

10. Sean A, B, X tres conjuntos. Demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

    a) $X \subseteq A \cup B$ b) $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset$ c) $(X \setminus A) \subseteq B$

11. Enumera los conjuntos: $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

12. Definimos la sucesión de conjuntos

$$A_k = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \in \mathbb{N}, n \leq k\} \qquad (\text{con } k \in \mathbb{N})$$

    y el conjunto $B = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

    a) Enumera A_0, A_1 y A_2.

    b) Demuestra que $A_k \subseteq B$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    c) Demuestra que $\emptyset \in A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

13. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideraremos los conjuntos

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\} \qquad\qquad B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$$

Determina la unión e intersección de las siguientes familias:

$$\begin{array}{ll} \bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} & \qquad\qquad \bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \\ \bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} & \qquad\qquad \bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

14. Sea $\mathcal{C}$ una familia no vacía de conjuntos. Demuestra:

a) Para todo $A \in \mathcal{C}$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

b) Si B es un conjunto tal que $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{C}$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \subseteq B$.

c) Para todo $A \in \mathcal{C}$, $\bigcap \mathcal{C} \subseteq A$.

d) Si B es un conjunto tal que $B \subseteq A$ para todo $A \in \mathcal{C}$, entonces $B \subseteq \bigcap \mathcal{C}$.

15. Demuestra que, para todo $A, B, C \neq \emptyset$, se cumple que

$$((A \cap C) \subseteq (B \cap C)) \;\wedge\; (A \cap \backslash C) \subseteq (B \cap \backslash C)) \implies A \subseteq B$$

16. Prueba o refuta mediante un contraejemplo, según proceda, cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$. Indica si se verifica algún contenido.

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

d) $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$

e) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

f) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$

g) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

h) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$