I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.............................. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.............. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

11.- Halla los ceros de las siguientes funciones y determina sus órdenes:

a) $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 2z^2 + 1 = 0 \overset{z^2=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^2 + 2\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow (\omega+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow ((z+i)(z-i))^2 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2(z-i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^4 + 2z^2 + 1 = (z+i)^2(z-i)^2.$$

Los ceros de la función son i y $-i$ y ambos tienen orden 2.

b) $f(z) = z^3 \cos^2 z$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ \text{o} \\ \cos^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Hacemos el desarrollo en serie de Taylor de $g(z) = \cos z$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ para saber la multiplicidad de los ceros de $g(z)$

$g(z) = \cos z$ $\qquad g(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$g^{1)}(z) = -\operatorname{sen} z$ $\qquad g^{1)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \mp 1$

$g^{2)}(z) = -\cos z$ $\qquad g^{2)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$g^{3)}(z) = \operatorname{sen} z$ $\qquad g^{3)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \pm 1$

$g^{4)}(z) = \cos z$ $\qquad g^{4)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n)}(z)}{n!}\left(z - \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}\left(z - \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n$$

donde $\varepsilon_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n impar.

$$\Longrightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} \left(z-\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} \left(z-\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)^n.$$

Por la proposición 14.2.2. la multiplicidad del cero en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ es 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto para $k \in \mathbb{Z}$ $\exists h_k$ función entera que no se anula en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ tal que

$$g(z) = \cos z = \left(z-\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) \cdot h_k(z).$$

Por tanto $\cos^2 z = \left(z-\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)^2 \cdot h_k^2(z)$

$$f(z) = z^3 \cdot \cos^2 z = \left(z-\left(\tfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)^2 z^3 h_k^2(z) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- Como $\cos^2 0 = 1$ y $\cos^2 z$ en entera entonces 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 3.
- Como $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^3 \cdot h_k\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2 \neq 0$ $\forall k$ y $z^3 h_k^2(z)$ es entera $\forall k \in \mathbb{Z}$ entonces $\frac{\pi}{2}+k\pi$ es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{c)}$ $f(z) = (1-e^{iz}) \operatorname{sen} z$

$$f(z)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{iz}=1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen} z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por el desarrollo en Serie de Taylor de $g(z) = \operatorname{sen} z$ centrado en $k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ se puede ver que

$$g(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} (z-k\pi)^n$$ donde $\varepsilon_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n es impar.

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura .... Fecha ....

Alumno/a .... Curso .... Nº ....

Apellidos Nombre

Calificación

$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}(z-k\pi)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}(z-k\pi)^n$ con el primer término distinto de 0.

Por tanto $k\pi$ es un cero de $\operatorname{sen} z$ con multiplicidad 1 para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\exists\, h_k \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ / $g(z) = (z-k\pi)\cdot h_k(z)$ con

$h_k(k\pi) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Sea $g_2(z) = 1 - e^{iz}$ y la función en serie de Taylor en $2k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

$g_2'(z) = -i e^{iz}$

$g_2^{2)}(z) = -i^2 e^{iz}$.

En general $g_2^{n)}(z) = -i^n e^{iz}$ y

$g_2^{n)}(2k\pi) = -i^n e^{i2k\pi} = -i^n$

$\Rightarrow g_2(z) = g_2(2k\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i^n}{n!}(z-2k\pi)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}(z-2k\pi)^n$

por lo que g_2 tiene un cero en $2k\pi$ de multiplicidad 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow g_2(z) = (z-2k\pi)\cdot h_{2,k}(z)$ con $h_{2,k}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h_{2,k}(2k\pi) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Volviendo a $f(z) = (1-e^{iz})\cdot \operatorname{sen} z$.

El conjunto de ceros de la función es $A = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ y $A_2 \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Veamos que si $a \in A_1$ entonces su multiplicidad es 2 y si $a \in A_2$ entonces su multiplicidad es 1.

Sea $a \in A_1 \Leftrightarrow a = 2k\pi$.

$\Rightarrow f(z) = (1-e^{iz}) \cdot \operatorname{sen} z = (z-2k\pi) \cdot h_{2,k}(z) \cdot (z-2k\pi) \cdot h_k(z) =$

$= (z-2k\pi)^2 \cdot h_{2,k}(z) \cdot h_k(z)$ donde $h_{2,k}(z) \cdot h_k(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no se anula en $2k\pi$.

Sea $a \in A_2 \Leftrightarrow a = \pi + 2k\pi$.

$\Rightarrow f(z) = (1-e^{iz}) \cdot \operatorname{sen} z = (z-(2k\pi+\pi))\, h_k(z) \cdot (1-e^{iz})$

donde $h_k(z) \cdot (1-e^{iz}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no se anula en $2k\pi+\pi$ porque $h_k(2k\pi+\pi) \neq 0$ y $(1-e^{i(2k\pi+\pi)}) = 2 \neq 0$.