Segunda Entrega

Juan Carlos Llamas Núñez

Ejercicio 1.- Sean $(X_1 -- X_{n_1})$ e $(Y_1 -- Y_{n_2})$ dos muestras aleatorias simples de dos poblaciones independientes con distribuciones respectivas $Exp(\lambda_1)$ y $Exp(\lambda_2)$. Hallar un intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para el cociente λ_1/λ_2.

Vamos a calcular este intervalo por el método de la cantidad pivotal, para lo cuál necesitamos una función $T(X_1 -- X_{n_1}, Y_1 -- Y_{n_2}, \lambda_1, \lambda_2)$ cuya distribución no dependa de λ_1 ni λ_2 y de la que podamos despejar fácilmente el cociente λ_1/λ_2.

Parece razonable comenzar intentando calcular la distribución del cociente de medias muestrales $\dfrac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \dfrac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i}$ o

simplemente de $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{\sum_{i=1}^{n_2} Y_i}$.

Si llamamos $A = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ y $B = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ entonces

como $X \sim Exp(\lambda_1) = Gamma(\lambda_1, 1) \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n_1} X_i \sim Gamma(\lambda_1, n_1)$

e $Y \sim Exp(\lambda_2) = Gamma(\lambda_2, 1) \Rightarrow B = \sum_{i=1}^{n_2} Y_i \sim Gamma(\lambda_2, n_2)$.

Estamos interesados en la distribución del cociente $\frac{A}{B}$ para lo que planteamos la transformación

$$\begin{cases} U = \dfrac{A}{B} \\ V = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = V \\ B = \dfrac{V}{U} \end{cases}$$

Así $g(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = \left(v, \frac{v}{u}\right)$

y $J_g = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{v}{u^2} \\ 1 & \frac{1}{u} \end{vmatrix}$