MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Problemas
Hoja 5. Interpolación e integración numéricas

1 Hallar el polinomio P que interpola la función $f(x) = \cos(\pi x)$ en los puntos $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$.

2 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos del intervalo $[a, b]$. Si P y Q son, respectivamente, los polinomios de interpolación de f y g en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

a) ¿Es $\alpha P + \beta Q$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) el polinomio de interpolación de $\alpha f + \beta g$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

b) ¿Es PQ el polinomio de interpolación de fg en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

3 Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ puntos distintos. Demostrar:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}.$ b) $\displaystyle E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x) - f(x_i)]L_i(x).$

4 Sean $P \in \mathcal{P}_n$ y $n + 1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Hallar el valor de $P[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

5 Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $f(x) = x^{n+1}$. Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange de f en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y determinar su término independiente.

6 Demostrar que si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ y existe $f'(x_i)$ para algún $x_i \in [a, b]$ entonces la función

$$g(x) = \begin{cases} f[x, x_i] & \text{si} \quad x \neq x_i \\ f'(x_i) & \text{si} \quad x = x_i \end{cases}$$

es continua en el intervalo $[a, b]$ (esto permite definir la diferencia dividida $f[x, x_i]$ en todo punto del intervalo). ¿Tiene $f[x, x_i]$ alguna propiedad similar a $(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$?

7 Sea $a > 0$, $\{-x_n, -x_{n-1}, \ldots, -x_1, 0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [-a, a]$ y P_{2n} el polinomio de interpolación de Lagrange de $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ en estos puntos. Demostrar los siguientes resultados:

a) Si f es una función par (resp. impar) entonces P_{2n} es par (resp. impar).

b) Si f es par existe $Q_n \in \mathcal{P}_n$ tal que $P_{2n}(x) = Q_n(x^2)$. ¿Quién es Q_n? ¿Qué utilidad tiene esto?

8 Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2 + 1), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

9 Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar:

a) Si $n < 4$ toda función spline cúbica que verifique

$$S_\Delta^{k)}(a) = S_\Delta^{k)}(b) = 0,\ k = 0, 1, 2$$

es idénticamente nula.

b) Si $n = 4$ la anterior función spline cúbica está unívocamente determinada por el valor que tome en x_2.

10 Demostrar, a partir del teorema de Rolle, la unicidad de la función spline cúbica de interpolación en los casos I y II.

11 Sea $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $S_\Delta(y; \cdot)$ la función spline cúbica que interpola los valores $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ con condiciones de tipo I. ¿Qué deben verificar los valores $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ para que $S_\Delta(y; \cdot)$ coincida en todo el intervalo $[a, b]$ con un polinomio $P \in \mathcal{P}_3$?

12 Aplicar la regla de Simpson compuesta a la integral

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para obtener una aproximación del logaritmo neperiano de 2 determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}.

13 Hallar la expresión de la regla de Simpson abierta compuesta.

14 Se considera la fórmula de integración

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq A(f(x_0) + f(x_1)).$$

Hallar el valor de $A,\ x_0$ y x_1 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

15 Encontrar un fórmula que aproxime $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ utilizando los valores de f en los puntos 0, 2 y 4 y que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

16 Dado $n \in \mathbb{N}$ se considera $h = \frac{1}{n}$, $x_i = ih$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y la función

$$f_n(x) = x^n \cos(2\pi n x).$$

Hallar el valor de la aproximación de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ que se obtiene utilizando la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $n+1$ puntos.

17 Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^4 |x-2|^3(1-\operatorname{sen}\pi x)\,dx$$

mediante la regla de Simpson compuesta para 4 subintervalos.

18 a) Hallar la expresión de la fórmula abierta de Newton–Côtes de dos puntos.

b) Determinar la expresión de la regla anterior compuesta.

c) ¿Qué valor se obtendría si se utilizara la regla de b) con 100 subintervalos para aproximar $\displaystyle\int_{-5}^5 |x|\,dx$? ¿Qué ocurriría si se tomaran 99 subintervalos?

19 Hallar la aproximación que se obtiene de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ cuando se considera la integral de la interpolación lineal a trozos de f en una partición equiespaciada.