

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2018-19
Integración. Hoja 9.

187 Sea la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \dots$ y $f(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ con $x \neq \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Probad que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ y calcular su integral.

188 Probar que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$$

189 Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{x} & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \end{cases}$$

probar que $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$.

190 Supongamos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y existen dos sucesiones de particiones (marcadas) \mathcal{P}_n y \mathcal{Q}_n con $\|\mathcal{P}_n\| \rightarrow 0$ y $\|\mathcal{Q}_n\| \rightarrow 0$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{P}_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \mathcal{Q}_n)$, entonces $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

Aplicar esta caracterización para probar que la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

no es integrable Riemann.

191 a) Supongamos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos la función “trasladada” $f_\alpha : [a + \alpha, b + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_\alpha(x) = f(x - \alpha)$. Usando particiones y la definición de integral, probar que $\int_a^b f = \int_{a+\alpha}^{b+\alpha} f_\alpha$.

b) Supongamos $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Definimos la función $f^\alpha : [\alpha a, \alpha b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^\alpha(x) = f(x/\alpha)$. Usando particiones y la definición de integral, probar que $\int_{a\alpha}^{b\alpha} f_\alpha = \alpha \int_a^b f$.

192 Probar que si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifica que para todo $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $E_\varepsilon \subset [a, b]$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in [a, b] \setminus E_\varepsilon$, entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $\int_a^b f = 0$. Aplicar esta caracterización al primer ejercicio de esta hoja.

193 Aplicar la caracterización del ejercicio anterior para probar que $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ donde f es la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1] \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

donde estamos asumiendo que la fracción $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible.

194 Supongamos que $f \in C^0[a, b]$ y que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que si $\int_a^b f = 0$ (¿por qué existe la integral?) entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que la hipótesis de continuidad de f no se puede sustituir por $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

195 Probar que la función $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ para $x \in (0, 1]$ y $g(0) = \alpha$ verifica $g \in \mathcal{R}[0, 1]$ independientemente del valor de α .

196 Construir una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $f \in \mathcal{R}[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y sin embargo $f \notin \mathcal{R}[a, b]$.

197 Si $f \in C^0[a, b]$, probar que existe $c \in [a, b]$ de forma que se tiene $\int_a^b f = f(c)(b-a)$ (Teorema del Valor Medio para Integrales).

198 Sea $f \in C^0[a, b]$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $M_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

199 Sea $a > 0$ y supongamos $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Probar:

a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$

b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^a f = 0$

200 Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y definamos $F(x) = \int_a^x f$ para $x \in [a, b]$. Sea $c \in (a, b)$. Evalúa las funciones

$$a) G(x) = \int_c^x f, \quad b) H(x) = \int_x^b f, \quad c) S(x) = \int_x^{\sin(x)} f$$

en términos de la función F . Asumiendo que $f \in C^0[a, b]$ calcular las derivadas de las tres funciones.

201 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in \mathbb{R}$. Definimos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f$. Probar que g es derivable en todo \mathbb{R} y calcular la derivada.

202 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y L -periódica con $L > 0$ (es decir, $f(x+L) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Probar que $\int_a^{a+L} f = \int_0^L f$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

203 Probar que si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ y se tiene

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a)$$

donde $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$

204 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Probar que si $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ entonces $fg, |fg| \in \mathcal{R}[a, b]$. (**Indicación:** $fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$).

Probar lo siguiente:

a) Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $\int_a^b (tf \pm g)^2 \geq 0$.

b) Deducir de a) que se tiene $2 \left| \int_a^b fg \right| \leq t \int_a^b f^2 + \frac{1}{t} \int_a^b g^2$

c) Minimizando en t el lado derecho de la desigualdad de b) probar que se obtiene

$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \left(\int_a^b f^2 \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2 \right)^{1/2}$$

205 Probar que si A_n es un conjunto de medida cero para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto de medida nula. En particular $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es de medida cero.

206 (*) Construir una función $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ que sea discontinua en todos los puntos $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.