Ejercicio 3.- Hallar el área de la superficie

$$A = \{x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2ax,\ z \geq 0\}$$

Esta superficie es la intersección del cono (donde $z \geq 0$)

$C = \{x^2+y^2=z^2,\ z \geq 0\}$ con la esfera

$$E = \{x^2+y^2+z^2 \leq 2ax\} = \{x^2+y^2+z^2-2ax+a^2 \leq a^2\} =$$

$$= \{(x-a)^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$$, es decir, la esfera centrada en el punto $(a,0,0)$ y radio a.

El cono nos va a servir para dar la parametrización y la esfera para concretar el espacio de parámetros D.

Así, pensando en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \Phi: D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, r) &\longrightarrow \Phi(\theta,r) = (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta,\ r) \end{aligned}$$

Donde hay que determinar D para que

$$\Phi(D) = A \setminus \left(\{(x,y,z)\in A \mid x \geq 0,\ y=0\} \cup \{(x,y,z)\in A \mid z=0\} \cup \{x^2+y^2+z^2=2ax\}\right)$$

Como siempre quitamos curvas que no tienen volumen para que el conjunto de parámetros D sea abierto.

Veamos ahora que $D = \{(\theta,r)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<r<a\cos\theta,\ \theta\in(0,2\pi)\}$

En primer lugar Φ es C^1 e inyectiva porque se basa en las coordenadas cilíndricas y estas lo son.

Ver observación final $\left(\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$