Examen Estadística

Pregunta 1.-

$$f(x|\theta) = \theta x\, e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \qquad x>0 \quad \theta>0$$

mas $(X_1 - - X_n)$

a) Estadístico suficiente y completo y distribución.

$$f(x_1 - - x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i\, e^{-\frac{\theta}{2}x_i^2} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico

$T(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente.

Como estamos en la familia exponencial uniparamétrica, será además completo si la imagen de $q(\theta) = -\frac{\theta}{2}$ contiene un rectángulo abierto de $\mathbb{R}$. Esto es así ya que $Im(q) = (-\infty, 0)$ que contiene un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Por tanto $T(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es un estadístico suficiente y completo.

Para calcular su distribución realizamos el cambio $Y = X^2$ y calculamos primero la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \underset{\underset{y>0}{\uparrow}}{=} P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D

De esta forma

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \theta \cdot \cancel{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}(\sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} = \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\theta}{2}y} \quad \text{con } y > 0$$

es decir $Y \sim Gamma(a = \frac{\theta}{2}, p = 1) = Exp(\frac{\theta}{2})$

Por la propiedad reproductiva de la Gamma se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Gamma\left(a = \frac{\theta}{2}, p = n\right)$$

b) Cantidad pivotal e intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$.

En general, sabemos que si $Z \sim Gamma(a, p)$ entonces $kZ \sim Gamma(\frac{a}{k}, p)$.

Aplicando esto a nuestro caso $\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim Gamma(\frac{\theta}{2\theta}, n) = \chi^2_{2n}$

Por tanto, la distribución de $\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ no depende de θ y nos sirve como cantidad pivotal. Además, su distribución es conocida y está tabulada.

Por tanto $P(a \leq \theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq b) = 1-\alpha$ con a y b por determinar.

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D

Despejando θ

$$a \leq \theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq b \iff \frac{a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \theta \leq \frac{b}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

El intervalo de confianza para θ al nivel $1-\alpha$ queda como

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{a}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \frac{b}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$$

Si particularizamos para el caso de probabilidad de colas iguales obtenemos que

$$a = \chi^2_{2n:1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{con} \quad F_{\chi^2_{2n}}\left(\chi^2_{2n:1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

y

$$b = \chi^2_{2n:\frac{\alpha}{2}} \quad \text{con} \quad F_{\chi^2_{2n}}\left(\chi^2_{2n:\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Por tanto el intervalo queda como:

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{\chi^2_{2n:1-\frac{\alpha}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \frac{\chi^2_{2n:\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$$

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D