

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 18–19.
Funciones continuas. Hoja 6

127 Sea $D = \{\frac{1}{n}\}_n \cup (2, 3) \cup (3, 4] \cup \{5\} \subset \mathbb{R}$. Determina todos los puntos de acumulación de D .

128 Usar la definición de límite para probar que

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}, \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0, \quad iii) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x} = -\frac{1}{2},$$

129 Probar que los siguientes límites no existen

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{sgn}(x)) \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

130 Probar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell.$$

131 Calcular los siguientes límites

$$i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}, \quad ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h)^2-t^2}{h}, \quad iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}, \quad iv) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\sqrt{t^2+3}-2}, \quad v) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a},$$

$$vi) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$$

132 Calcular los siguientes límites

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}, \quad ii) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3}{z^2+1}, \quad iii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}, \quad iv) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}, \quad v) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}},$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}, \quad vii) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{t+\sqrt{t}}}, \quad viii) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}, \quad ix) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x(x+a)}-x,$$

$$x) \lim_{t \rightarrow \infty} t(\sqrt{t^2+1}-t), \quad xi) \lim_{t \rightarrow \infty} (t + \sqrt[3]{1-t^3})$$

133 Calcular los siguientes límites

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}, \quad ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x, \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x, \quad iv) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^t, \quad v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2},$$

$$vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}, \quad vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$$

134 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

i) Probar que cualquiera que sea $c \in \mathbb{R}$, no existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

ii) Probar que para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no existe $\lim_{x \rightarrow c} xf(x)$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$

135 Probar que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe pero $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Probar de hecho que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ con $-1 \leq \alpha \leq 1$ podemos construir una sucesión $x_n \rightarrow 0$ tal que $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \rightarrow \alpha$

136 Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función y x_0 un punto de acumulación de D . Supongamos que existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m$.

i) Si $m > 0$ probar que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D \cap E(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ se tiene $f(x) > 0$.

ii) Si $m < 0$ probar que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D \cap E(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ se tiene $f(x) < 0$.

iii) ¿Se puede deducir algo semejante si $m = 0$?

137 Sea $D \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funciones.

i) Si $x_0 \in D$ y f y g son continuas en x_0 probar que las siguientes funciones son continuas en x_0 :

af (para todo $a \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (supuesto $g(x_0) \neq 0$).

ii) Concluir que el conjunto de funciones continuas de D en \mathbb{R} , que denotamos $C(M, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

iii) Probar que los polinomios $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$) son funciones continuas en \mathbb{R} .

138 Siguiendo las notaciones del Problema 66,

i) Sea $a > 0$. Usando el Problema 97 probar que $f(x) = a^x$ es continua. Concluir que si $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $f(x) = a^{g(x)}$ es continua en D .

ii) Usando el Problema 100 probar que $f(x) = x^a$ es continua en $(0, \infty)$. Concluir que si $g : D \rightarrow (0, \infty)$ es continua entonces $f(x) = g(x)^a$ es continua en D .

iii) Concluir que si $f : D \rightarrow (0, \infty)$ y $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas, entonces $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $x \in D$, es continua.

139 Justificar que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$ y deducir que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$.

Deducir, usando fórmulas trigonométricas que $\cos(x)$ y $\sin(x)$ son funciones continuas en \mathbb{R} .

140 Determinar los puntos de continuidad de las siguientes funciones

i) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$), ii) $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ($x \geq 0$), iii) $h(x) = \frac{\sqrt{1 + |\sin(x)|}}{x}$ ($x \neq 0$), iv) $f(x) = |x|$.

141 Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **denso** en \mathbb{R} si todo intervalo abierto de \mathbb{R} contiene un punto de A . Demostrar

i) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(t) = 0$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $f(t) = g(t)$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

iii) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in A$ entonces $f(t) \geq g(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

142 Si $x \in \mathbb{R}$ denotamos $E(x)$ la **parte entera** de x , es decir, el mayor entero que no supera a x y consideramos la función $f(x) = x - E(x)$.

i) Encontrar los puntos en los que $f(x)$ es continua y en los que no.

ii) Encontrar el extremo inferior de los valores de $f(x)$ sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.

iii) Encontrar el extremo superior de los valores de $f(x)$ sobre cualquier intervalo que tenga en su interior un número entero.

iv) Discutir si el infimo y/o el supremo de los apartados anteriores se alcanza o no.

143 Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2 - t^2 & \text{si } t \text{ es racional} \\ t^2 - 2 & \text{si } t \text{ es irracional} \end{cases}$$

144 Sea la función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{si } t \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y estudiar su continuidad.

145 Sea $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, un polinomio.

i) Probar que si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = 0$ entonces $P(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Idem si $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = 0$ donde x_n es una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$.

ii) Probar que si P es acotado: $|P(x)| \leq M$ para cierta constante $M > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $P(x)$ es constante. Idem si la cota es válida sólo para $x > 0$ ó $x < 0$.

146 Estudia la continuidad de las funciones

$$f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = (-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad h(t) = \frac{1}{1-e^{1/t}}, \quad j(t) = t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

147 Estudia la continuidad de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} |\operatorname{sen}(x)| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad h(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0, \quad \alpha > 0$$

148 i) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x)$ es racional para todo $x \in [a, b]$. ¿Qué puede decirse de f ?

ii) Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y f es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostrar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

iii) Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y que existen los límites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Probar que f es acotada: existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

iv) Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Demostrar que existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (un Máximo Absoluto).

v) Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, probar que $f(I)$ es un intervalo.

Si además I es cerrado y acotado, probar que $f(I)$ también. ¿Cuales son los extremos de $f(I)$?

149 Probar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene por lo menos una raíz real.

150 i) Probar que la ecuación $x = \cos(x)$ tiene por lo menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

ii) Probar que la función $f(x) = 2\ln(x) + \sqrt{x} - 2$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

iii) Probar que el polinomio $P(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ tiene por lo menos dos raíces reales.

151 Demostrar que la ecuación

$$\operatorname{tg}(x) = x$$

tiene infinitas raíces.

152 Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en \mathbb{R} y discutir todas las funciones de este tipo.

153 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

i) Probar si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona y $f(I)$ es un intervalo entonces f es continua.

ii) Si además de continua f es estrictamente monótona, probar que existe f^{-1} y que f^{-1} es continua y estrictamente monótona en su dominio.

iii) Probar que una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

154 Logaritmos

Siguiendo las notaciones del Problema 66, sea $a > 0$ y $a \neq 1$.

i) Probar que $f(x) = a^x$ es continua, estrictamente monótona y que su imagen es $(0, \infty)$.

ii) Deducir que f es biyectiva sobre su imagen y que por tanto existe su inversa $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, que se llama **función logaritmo en base a** y que

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

es continua, estrictamente monótona y $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Si $a > 1$ probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty$.

Si $a < 1$ probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty$.

iii) Probar que $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ y que $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.

Cuando $a = e$ se escribe $\ln(x) = \log_e(x)$ y se llama **logaritmo Neperiano**.

iv) Deducir que $a = e^{\ln(a)}$ y que por tanto $a^x = e^{\ln(a)x}$ y $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ para $x > 0$.

155 Sea $D \subset \mathbb{R}$.

i) Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase Lipschitz (o Lipschitziana) si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D.$$

Probar que si f es Lipschitziana entonces f es uniformemente continua.

ii) Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase Hölder (o Hölderiana) si existen una constante $L > 0$ y $\alpha \in (0, 1]$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha, \quad x, y \in D.$$

Probar que si f es Hölderiana entonces f es uniformemente continua.

156 Método de la Bisección

Supongamos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(a)f(b) < 0$. El siguiente procedimiento permite encontrar una solución de $f(x) = 0$, $x \in (a, b)$.

Definimos $I_1 = [a, b]$. Tomamos $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Si $f(c_1) = 0$ terminamos. Si no, tomamos $x_1 \in I_1$ un punto cualquiera. Dividimos I_1 por el punto medio y nos quedamos con una mitad que llamamos I_2 , en la que f tenga signos distintos en los extremos.

Por inducción, construido I_n , tomamos c_n su punto medio. Si $f(c_n) = 0$ terminamos. Si no, tomamos $x_n \in I_n$ un punto cualquiera. Dividimos I_n por el punto medio y nos quedamos con una mitad que llamamos I_{n+1} , en la que f tenga signos distintos en los extremos.

Probar que o bien en un número finito de pasos encontramos un cero de f o bien construimos una sucesión $\{x_n\}$ que es de Cauchy y que converge a un número x_0 tal que $f(x_0) = 0$ y además

$$|x_n - x_0| \leq \frac{C}{2^n}.$$