Método de cálculo de las funciones spline cúbicas

La función $S_\Delta(y,\cdot)$ queda caracterizada en cada intervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, por sus momentos $M_j \doteq S''_\Delta(y, x_j)$ y $M_{j+1} \doteq S''_\Delta(y, x_{j+1})$:

$$S_\Delta(y,x) = y_j + \left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{2M_j + M_{j+1}}{6} h_{j+1}\right)(x-x_j) + \frac{M_j}{2}(x-x_j)^2 + \frac{M_{j+1}-M_j}{6h_{j+1}}(x-x_j)^3,$$

donde $h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$. Mediante la fórmula anterior se puede determinar $S_\Delta(y,\cdot)$ siempre y cuando se conozcan sus momentos. Veamos a continuación cómo se puede efectuar el cálculo de los mismos.

Como la función $S_\Delta(y,\cdot) \in \mathcal{C}^2([a,b])$ entonces, en particular, verifica

$$S'_\Delta(y, x_j^-) = S'_\Delta(y, x_j^+),\ j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que

$$S'_\Delta(y,x) = -M_j \frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j),$$

para $j = 1, 2, \ldots, n-1$ se verifica

$$S'_\Delta(y, x_j^-) = M_j \frac{h_j}{2} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{h_j}{6}M_{j-1}$$

y

$$S'_\Delta(y, x_j^+) = -M_j \frac{h_{j+1}}{2} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j) = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}.$$

De esta forma, para $j = 1, 2, \ldots, n-1$, la relación (1) determina

$$\boxed{\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}} \tag{2}$$

Para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vamos a emplear la notación

$$\lambda_j \doteq \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}},\ \mu_j \doteq 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$$

y

$$d_j \doteq \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right).$$

De esta forma, multiplicando (2) por

$$\frac{6}{h_j + h_{j+1}}$$

se verifica

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j,\ j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Para ver lo que ocurre en los extremos (correspondientes a $j = 0$ y $j = n$) y, de esta forma, obtener otras dos ecuaciones, tengamos en cuenta los diversos tipos de funciones spline:

- <u>tipo I</u>: $S''_\Delta(y,a) = S''_\Delta(y,b) = 0$. En este caso:

$$M_0 = S''_\Delta(y,a) = 0 = S''_\Delta(y,b) = M_n \Rightarrow \boxed{M_0 = M_n = 0}$$

Considerando

$$\lambda_0 = d_0 = \mu_n = d_n \doteq 0$$

se verifica

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2M_0 & + & \lambda_0 M_1 & & & = & d_0 \\ & & & & & & \\ & & \mu_n M_{n-1} & + & 2M_n & = & d_n \end{array}\right. \tag{4}$$

- <u>tipo II</u>: $S'_\Delta(y,a) = y'_0,\ S'_\Delta(y,b) = y'_n$. En este caso,

$$\begin{aligned} y'_0 = S'_\Delta(y,a) &= -M_0\frac{h_1}{2} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{h_1}{6}(M_1 - M_0) \\ &= -M_0\frac{h_1}{3} + \frac{y_1 - y_0}{h_1} - M_1\frac{h_1}{6} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y'_n = S'_\Delta(y,b) &= M_n\frac{h_n}{2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{h_n}{6}(M_n - M_{n-1}) \\ &= M_n\frac{h_n}{3} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} + M_{n-1}\frac{h_n}{6}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{h_1}{3}M_0 + \dfrac{h_1}{6}M_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \\ \dfrac{h_n}{6}M_{n-1} + \dfrac{h_n}{3}M_n = y'_n - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \end{array}}$$

Multiplicando la primera expresión por $\dfrac{6}{h_1}$ y la segunda por $\dfrac{6}{h_n}$, si consideramos

$$\lambda_0 = \mu_n \doteq 1,\ d_0 \doteq \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0\right) \ \text{ y } \ d_n \doteq \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

volvemos a obtener la relación expresada en (4).

De esta forma, con las notaciones anteriores, se obtiene el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2M_0 & + & \lambda_0 M_1 & & & & & & & = & d_0 \\ \mu_1 M_0 & + & 2M_1 & + & \lambda_1 M_2 & & & & & = & d_1 \\ & & \mu_2 M_1 & + & 2M_2 & + & \lambda_2 M_3 & & & = & d_2 \\ & & & & \ddots & & \ddots & \ddots & & = & \cdots \\ & & & & & & \mu_{n-1}M_{n-2} & + & 2M_{n-1} \quad + \quad \lambda_{n-1}M_n & = & d_{n-1} \\ & & & & & & & & \mu_n M_{n-1} \quad + \quad 2M_n & = & d_n \end{array}\right.$$

que podemos escribir, en forma matricial, como $AM = d$ donde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix},\ M \doteq \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \ \text{ y } \ d \doteq \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$