Ejemplo para la formalización del método de Gauss

Vamos a aplicar el *método de Gauss* a la resolución del sistema lineal

$$Au = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = b.$$

Como el elemento $a_{11} = 0$, debemos intercambiar la primera fila con, por ejemplo, la segunda, obteniendo

$$\mathcal{A}_1 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1,$$

donde $\mathcal{A}_1 = P_1 A$ y $\beta_1 = P_1 b$ siendo

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El siguiente paso consiste en “hacer ceros” por debajo de la diagonal en la primera columna. Para ello, restamos a la tercera fila la primera, obteniendo

$$A_2 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = b_2,$$

donde $A_2 = E_1 \mathcal{A}_1$ y $b_2 = E_1 \beta_1$, siendo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fijemos nuestra atención en el elemento $(A_2)_{22}$. Como es no nulo, no necesitamos permutar filas. Sin hacer ningún cambio escribimos

$$\mathcal{A}_2 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_2,$$

donde $\mathcal{A}_2 = P_2 A_2$ y $\beta_2 = P_2 b_2$, siendo

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para “hacer ceros” por debajo de la diagonal de la segunda columna, a la tercera fila le sumamos la segunda y a la cuarta se la restamos. Así,

$$A_3 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = b_3,$$

donde $A_3 = E_2 \mathcal{A}_2$ y $b_3 = E_2 \beta_2$, siendo

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, necesitamos permutar entre sí la tercera y cuarta filas. Haciéndolo, se obtiene

$$\mathcal{A}_3 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \beta_3,$$

donde $\mathcal{A}_3 = P_3 A_3$ y $\beta_3 = P_3 b_3$ con

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aunque ya hemos llegado a un sistema triangular, en el caso general habría que hacer cero el elemento $(\mathcal{A}_3)_{43}$. En nuestro caso no hay que hacer nada respecto a la etapa anterior, quedando

$$A_4 u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = b_4,$$

donde $A_4 = E_3 \mathcal{A}_3$ y $b_4 = E_3 \beta_3$ siendo

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así pues, se ha conseguido el siguiente sistema triangular equivalente

$$(E_3 P_3 E_2 P_2 E_1 P_1 A) u = E_3 P_3 E_2 P_2 E_1 P_1 b,$$

cuya resolución puede llevarse a cabo mediante el método de remonte, obteniendo

$$(u_1, u_2, u_3, u_4)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{75}{2}, -\frac{46}{3}, \frac{67}{6}, -6 \right)^{\mathrm{T}}.$$