I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

d) $f(z) = \log \frac{2+z}{2-z}$ $\quad z_0 = 0$

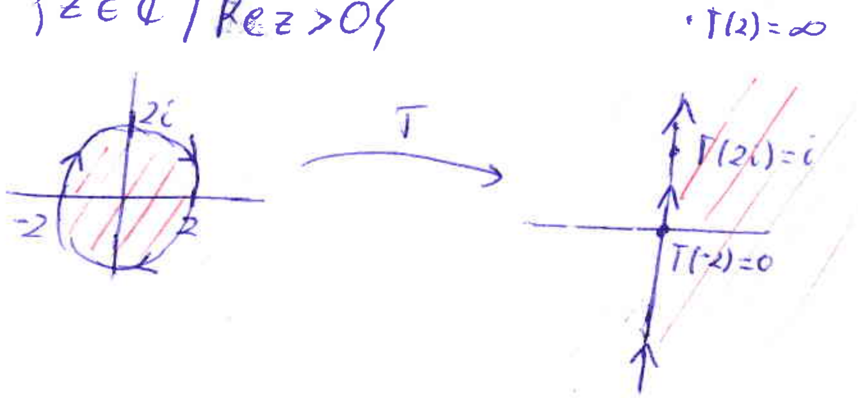
Queremos que esta función sea holomorfa en cierto disco $D(0,R)$. Para ello la imagen por $T(z) = \frac{2+z}{-z+2}$ de $D(0,R)$ debe ser un conjunto donde se pueda definir una determinación del logaritmo.

Consideramos la circunferencia $C(0,R)$ y distinguimos casos según $R=2$, $R<2$ o $R>2$.

Si $R=2$ $T(R) = \infty$ y la circunferencia se transforma en una recta que pasa por los puntos $T(-R) = 0$ y $T(iR) = \frac{2+2i}{-2i+2} =$

$= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \Rightarrow T(C(0,R)) = \{z = x+iy \mid x=0\}$

Tomando la orientación $(2,-2,2i)$ de $C(0,R)$, por el principio de orientación, su lado derecho se transformará en el lado derecho de $(T(2), T(-2), T(2i)) = (\infty, 0, i)$. Por tanto el disco $D(0,2)$ se transforma en $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$



Si $R \neq 2$ no hay ningún punto de $C(0,R)$ que vaya a ∞ por T por lo que su imagen es una circunferencia $C(a,r)$.

Como $T(2)=\infty$ y ∞ es el simétrico de a respecto a $C(a,r)$, por el principio de simetría, si w^* es el simétrico de 2 respecto a $C(0,R)$ entonces $T(w^*)=a$.

$$w^* = \frac{R^2}{\bar{2}-\bar{0}} + 0 = \frac{R^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad T\left(\frac{R^2}{2}\right) = \frac{\frac{R^2}{2}+2}{-\frac{R^2}{2}+2} = \frac{R^2+4}{4-R^2} = a$$

Para conocer r medimos la distancia de a a $T(R) = \frac{R+2}{-R+2}$.

$$|T(R)-a| = \left|\frac{R+2}{2-R} - \frac{R^2+4}{4-R^2}\right| = \left|\frac{(R+2)^2}{(2-R)(2+R)} - \frac{R^2+4}{4-R^2}\right| = \left|\frac{R^2+4+4R-R^2-4}{4-R^2}\right|$$
$$= \frac{4R}{|4-R^2|}$$

$$\Longrightarrow \quad C(a,r) = C\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right)$$

Además $T(0)=1$ y $1 \in D\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right) \Longleftrightarrow R<2$.

$$\left|\frac{R^2+4}{4-R^2} - 1\right| = \left|\frac{R^2+4-4+R^2}{4-R^2}\right| = \frac{2R^2}{|4-R^2|} < \frac{4R}{|4-R^2|}$$
$$\Updownarrow$$
$$2R^2 < 4R \Longleftrightarrow 2R(R-2)<0$$
$$\Updownarrow$$
$$R<2$$

Por tanto si $R<2$

$$\Longrightarrow T(C(0,R)) = D\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right) \quad y$$

si $R>2 \Longrightarrow T(C(0,R)) = \mathbb{C} \setminus \bar{D}\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right)$.

Para el caso $R>2$ no podemos definir una determinación del logaritmo pero si $R<2$ $0 \notin D\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right)$ porque

$$\left|\frac{R^2+4}{4-R^2}\right| > \frac{4R}{|4-R^2|} \iff R^2+4>4R \iff R^2-4R+4>0 \iff$$
$$\iff (R-2)^2>0.$$

Por tanto estamos en un disco abierto donde sí podemos definir una determinación del logaritmo.

Por tanto $f(z) = \log\frac{2+z}{2-z}$ es holomorfa en $D(0,R)$ con $R<2$

$$f'(z) = \frac{1}{\frac{2+z}{2-z}} \cdot \frac{(2-z)+(2+z)}{(2-z)^2} = \frac{4}{(2+z)(2-z)} = \frac{1}{2+z} + \frac{1}{2-z} =$$
$$= (2+z)^{-1} + (2-z)^{-1}$$

Veamos que $f^{n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(2+z)^{-n} + (n-1)!(2-z)^{-n}$

Para $n=1$ ya está probado.

Si lo suponemos para $n \geq 1$

$$f^{n+1)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} f^{n)}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left((-1)^{n-1} n\,(2+z)^{-n} + (n-1)!\,(2-z)^{-n}\right) =$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (-n) \cdot (2+z)^{-n-1} + (n-1)! \cdot (-n) \cdot (2-z)^{-n-1} (-1) =$$
$$= (-1)^{n}\, n!\, (2+z)^{-(n+1)} + n!\,(2-z)^{-(n+1)}$$

$$f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 2^{-n} + (n-1)!\,2^{-n} = \frac{(n-1)!}{2^n} \cdot \left((-1)^{n+1}+1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z) = \log \frac{2+z}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!}(z-0)^n = \log 1 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} \frac{1}{n!} z^n =$$

$$= \log 1 + 2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{n} = \log 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} \quad \forall z \in D(0,R)$$

con $R < 2$