CI. Solución hoja 1 ejercicios de repaso

Ejercicio 1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación Lipschitz. Si $K \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero, probar que $g(K)$ también tiene medida cero.

Solución:

Sea $M > 0$ tal que $\|g(x) - g(y)\|_\infty \leq M\|x - y\|_\infty$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^2$. Dicha M existe por ser g Lipschitz.

Sea $\epsilon > 0$. Como K tiene medida cero, existen cubos $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ tales que

Yo lo he hecho tomando rectangulos arbitrarios y haciendo que $l_1 \leq l_2 \leq 2l_1$

(Despues el mismo razonamiento con $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L^2 \frac{5}{2}}$???)

$$K \subset \bigcup_{i=1}^\infty C_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^\infty \text{vol}(C_i) < \frac{\epsilon}{M^2} .$$

Los cubos son bolas en la norma ∞, así que existen $x_i \in \mathbb{R}^2$, $r_i > 0$ tales que $C_i = B_\infty(x_i, r_i)$. Ahora, para $y \in C_i$, $\|g(y) - g(x_i)\|_\infty \leq M\|y - x_i\|_\infty \leq Mr_i$, lo que muestra que $g(C_i) \subset \tilde{C}_i$ para $\tilde{C}_i = B_\infty(g(x_i), Mr_i)$.

Por tanto $g(K) \subset \cup_{i=1}^\infty g(C_i) \subset \cup_{i=1}^\infty \tilde{C}_i$ y

$$\sum_{i=1}^\infty \text{vol}(\tilde{C}_i) = \sum_{i=1}^\infty (2Mr_i)^2 = M^2 \sum_{i=1}^\infty (2r_i)^2 = M^2 \sum_{i=1}^\infty \text{vol}(C_i) < \epsilon.$$

Esto prueba que $g(K)$ tiene medida cero.

Ejercicio 2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicacin Lipschitz. Si $K \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, probar que $g(K)$ tiene volumen cero.

Solución:

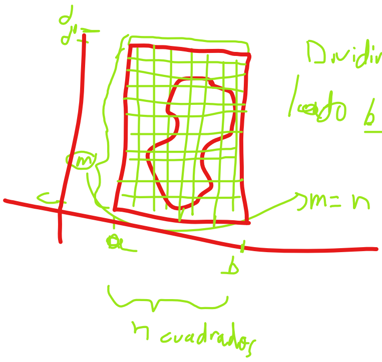
Definimos la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(x, y) = (x, y, 0)$ y $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(x, y, z) = (x, y)$. Claramente $\psi \circ \phi$ es la identidad $\text{Id} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Sea $h = g \circ \psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $H = \phi(K) \subset \mathbb{R}^3$. Como H está en el plano XY, tiene medida cero. Por otro lado h es Lipschitz por serlo g (trivial de verificar). Por el ejercicio anterior, que con la misma prueba funciona en $\mathbb{R}^3$, se tiene que $h(H)$ tiene medida cero.

Pero como $\psi \circ \phi = \text{Id}$, se tiene que $h(H) = g(K)$.

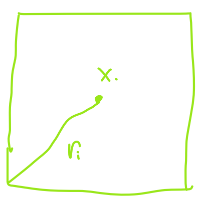
R_i $\quad \text{Vol}(R_i) = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$

Lo he hecho bastante diferente



Dividimos en cuadrados de lado $\frac{b-a}{n}$ para $n > \frac{16\sqrt{2}\,(b-a)^3 L^3 \left(\left[\frac{d-c}{b-a}\right]+1\right)}{\varepsilon}$

$m = n\left(\left[\frac{d-c}{b-a}\right]+1\right)$



$r_i = \sqrt{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$g(R_i) \subset B(g(x_i), L r_i)$

$S_i = B_\infty(g(x_i), L r_i)$

$\text{Vol}(S_i) = (2 L r_i)^2$

Ejercicio 3. La función Γ de Euler se define por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

1. Demostrar que está bien definida (es decir que la integral impropia es convergente) para todo $t > 0$.

2. Demostrar que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$.

3. Calcular $\Gamma(1)$ y deducir el valor de $\Gamma(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Apartado (1). Separamos los casos $0 < t < 1$ y $t \geq 1$.

Si $t \geq 1$, la función $f(x) = x^{t-1}e^{-x}$ es acotada, continua y positiva. Por tanto solo hay que ver que existe

$$\lim_M \int_0^M f\,,$$

lo que es equivalente a que $I : M \to \ nt_0^M$ esté acotada.

Sea M_0 tal que $x^{t-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$ para todo $x \geq M_0$. Dicho M_0 existe porque, por L'Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{t-1}}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Ahora

$$\int_0^M f = \int_0^{M_0} f + \int_{M_0}^M f \leq \int_0^{M_0} f + \int_{M_0}^M e^{\frac{x}{2}} e^{-x} dx = \int_0^{M_0} f + \int_{M_0}^M e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Como $\int_0^{M_0} f$ es una constante, basta ver que $\int_{M_0}^M e^{-\frac{x}{2}dx}$ es acotada. En efecto,

$$\int_{M_0}^M e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_{x=M_0}^{x=M} = 2e^{-\frac{M_0}{2}} - 2e^{-\frac{M}{2}}$$

que está acotada por tener límite con $M \to \infty$ bien definido.

El caso $0 < t < 1$ es distinto porque en ese caso $f(x) = x^{t-1}e^{-x}$ tiene una asíntota en $x = 0$ y por tanto no es acotada. En este caso por tanto hay que mostrar también que $\int_0^1 f$ existe (como integral impropia). Como en $[1, \infty)$ la función está acotada y es continua y positiva, el argumento del caso $t \geq 1$ muestra que de hecho basta con ver que $\int_0^1 f$ existe.

Para ver que $\int_0^1 f$ existe, usamos el criterio de comparación. Por un lado $0 \leq f(x) \leq x^{t-1}$. Por otro,

$$\int_c^1 x^{t-1} dx = \left[\frac{1}{t} x^t\right]_{x=c}^{x=1} = \frac{1}{t}\left(1 - c^t\right) \underset{c \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{t}$$

Apartado (2). Basta hacer una integración por partes ($u = e^{-x}$, $dv = x^{t-1}$).

$$\int_c^M x^{t-1}e^{-x}dx = \left[\frac{1}{t}x^t e^{-x}\right]_{x=c}^{x=M} + \frac{1}{t}\int_c^M x^t e^{-x}dx$$

Tomando $\lim_{c\to 0}$ y $\lim_{M\to\infty}$ se tiene el resultado.

$\Gamma(1) = 1$ (es una integral inmediata). Usando el apartado (2) se tiene por inducción que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Ejercicio 4. Demostrar que el siguiente conjunto tiene volumen bien definido y calcularlo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

Solución:

Se puede hacer como el ejercicio 5 (ver más abajo), pero en este caso hay un argumento directo como sigue.

Es trivial ver que $A = \{(x,y) : x \in [0,1], 0 \leq y \leq (1-\sqrt{x})^2\}$ que es justo el área por debajo de la gráfica de $f(x) = (1-\sqrt{x})^2$ entre $x = 0$ y x=1.

Por tanto, el volumen de A es precisamente

$$\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{6}$$

(la integral es inmediata expandiendo el cuadrado).

Ejercicio 5. Demostrar que el siguiente conjunto tiene volumen bien definido y calcularlo:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}$$

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x = u^2, y = v^2, z = w^2$. Es decir $g(u,v,w) = (u^2, v^2, w^2)$. Claramente, g es C^1 y biyectiva del primer octante en el primer octante. Además, es también obvio que si

$$D = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | u > 0, v > 0, w > 0, u + v + w \langle 1\},$$

se tiene que $g(D) = \overset{\circ}{A}$. Por otro lado, el jacobiano de g es $J_g = 8uvw$.

Por último, tanto A como D tienen volumen bien definido por estar delimitados por gráficas de funciones continuas.

Podemos aplicar por tanto el teorema del cambio de variable y tenemos que

$$(A) = \int_D 8uvw\; du\, dv\, dw$$

Esta integral se hace por Fubini (hicimos en clase de teoría una integral en exactamente el mismo dominio de integración como ejemplo de aplicación de Fubini):

Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Por el corolario de Fubini en tres variables, tenemos que

$$\int_D 8uvw\; du\, dv\, dw = \int_B \left(\int_0^{1-(u+v)} 8uvw\; dw \right) du\, dv = \int_B 4uv \left[w^2 \right]_{w=0}^{w=1-(u+v)} du\, dv =$$

$$= \int_B 4uv(1-(u+v))^2 du\, dv = \int_B (4uv - 4u^2v - 4uv^2)\; du\, dv$$

Aplicamos ahora el corolario de Fubini en dos variables a B y tenemos que

$$\int_B (4uv - 4u^2v - 4uv^2)\; du\, dv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (4uv - 4u^2v - 4uv^2)\; dv \right)\; du$$

que ya es inmediata de hacer y da $\frac{1}{90}$.

Da lo mismo por Fubini haciendo $\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} dz\, dy\, dx = \dots = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 dx = \dots = \frac{1}{90}$

Ejercicio 6.

(a) Calcular la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-y^3}\; dy\, dx.$$

(b) Calcular $\int_D f$, con

$$f(x,y) = \frac{y^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2},$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \leq y, x \geq 0\}.$$

Solución:

Apartado (a). Consideremos el recinto $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ y la función $f(x,y) = e^{-y^3}$. Por el corolario de Fubini se tiene que f es integrable en A y que

$$\int_A f = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-y^3}\; dy\, dx. \tag{1}$$

Por otro lado, es trivial ver que podemos reescribir A como

$$A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Aplicando el corolario de Fubini a esta forma de escribir A tenemos que

$$\int_A f = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{-y^3}\, dx\, dy = \int_0^1 y^2 e^{-y^3} dy = \left[-\frac{1}{3}e^{-y^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

que junto con (1) resuelve el apartado (a).

Apartado (b)

Hacemos un cambio a polares. Es trivial ver que el recinto D se transforma en el recinto

$$A = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\} = [1,2] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],$$

que es un rectángulo (y por tanto tiene volumen bien definido). D tiene también volumen bien definido por estar delimitado por gráficas de funciones continuas, lo que hace a f integrable por ser continua.

Podemos por tanto aplicar el teorema del cambio de variable y tenemos que, usando también Fubini,

$$\int_D f = \int_A r \sin^2\theta e^{r^2} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2\theta \left(\int_1^2 re^{r^2} dr\right)\, d\theta = \frac{1}{2}(e^4 - e)\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}(e^4-e)\left[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{16}(e^4-e)(2+\pi)$$

Problema 3. Hoja 5

Apartado (a). Estudiar la integrabilidad en $[0,1]\times[0,1]$ de la función $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$. Suponemos la función definida por 0 en los ejes y por tanto podemos asumir que el conjunto en el que estamos interesados es $A = (0,1]\times(0,1]$.

Por el teorema visto en clase sobre integrales impropias, podemos elegir cualquier sucesión de conjuntos compactos con volumen K_j tales que $K_j \subset K_{j+1}$ y $\bigcup_j K_j = A$ en el que la función, que es continua, sea acotada.

Elegimos $K_j = [\frac{1}{j}, 1]\times[\frac{1}{j}, 1]$. El problema es entonces equivalente a estudiar si existe $\lim_{j\to\infty}\int_{K_j} f$, y calcular su valor.

Ahora,

$$\int_{K_j} f = \int_{\frac{1}{j}}^1 \int_{\frac{1}{j}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\, dx\, dy = \left(\int_{\frac{1}{j}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\right)^2 =$$

$$= \left(\left[2\sqrt{x}\right]_{x=\frac{1}{j}}^{x=1}\right)^2 = 4\left(1-\sqrt{\frac{1}{j}}\right)^2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 4$$

con lo que la integral converge a $4\left(1-\sqrt{\frac{1}{j}}\right)^2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 4$.

Apartado (b). Misma pregunta pero para la función $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}$.

Como en este caso, la no acotación ocurre en la recta $y=x$, tomamos como conjunto K_j la intersección de $(0,1]\times(0,1]$ con la región $(x,y):|x-y|\geq\frac{1}{j}\}$. Cada K_j es por tanto la unión de dos triángulos:

El triángulo S_j delimitado por las rectas $x=0$, $y=1$, $y=x+\frac{1}{j}$, y el triángulo T_j que es su simétrico con respecto a la recta $y=x$, es decir, cambiando los roles de x e y, y por tanto el delimitado por las rectas $y=0$, $x=1$, $y=x-\frac{1}{j}$.

Tenemos que

$$\int_{K_j} f=\int_{S_j} f+\int_{T_j} f.$$

Vamos a hacer la integral en T_j. El caso S_j es análogo. De hecho, por la simetría del problema (haciendo el cambio de variable $x\leftrightarrow y$) se puede ver que $\int_{T_j} f=\int_{S_j} f$.

Por el corolario de Fubini

$$\int_{T_j} f=\int_{\frac{1}{j}}^{1}\int_{0}^{x-\frac{1}{j}}\frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy\,dx=\int_{\frac{1}{j}}^{1}\int_{0}^{x-\frac{1}{j}}\frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dy\,dx=$$

$$=\int_{\frac{1}{j}}^{1}\left[-2\sqrt{x-y}\right]_{y=0}^{y=x-\frac{1}{j}}\,dx=\int_{\frac{1}{j}}^{1}\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{\frac{1}{j}}\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{3}}-\frac{2}{\sqrt{j}}x\right]_{\frac{1}{j}}^{1}$$

que converge a $\frac{4}{3}$ cuando $j\to\infty$.

Problema 4. Hoja 6

Calcular la integral de la función $f(x,y)=xye^{-(x^{`2}+y^2)}$ en la banda $A=\{(x,y):x\geq 0, 0\leq y\leq 1\}$.

Solución:

El conjunto es no acotado y la función es positiva y continua, así que consideramos para cada $r\geq 1$ el cubo $C_r=[-r,r]\times[-r,r]$. Su intersección con A es $A_r=\{(x,y):0\leq x\leq r, 0\leq y\leq 1\}=[0,r]\times[0,1]$. La función es continua (y acotada) en A_r. Por tanto hay que calcular

$$\lim_{r\to\infty}\int_{A_r} f$$

Ahora, por Fubini

$$\int_{A_r} f=\int_0^r\int_0^1 xe^{-x^2}ye^{-y^2}dydx=\int_0^r xe^{-x^2}\left(\int_0^1 ye^{-y^2}dy\right)dx=$$

$$= \left(\int_0^1 y e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^r x e^{-x^2} \, dx \right)$$

Como $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$, concluimos que

$$\int_{A_r} f = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^r \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}(1 - e^{-r^2})(1 - \frac{1}{e}) \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{e})$$