

Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

HOJA 3.5. - EJERCICIOS SOBRE CARDINALES

Curso 2018/2019

1. Demuestra que si B es un conjunto numerable, cualquier subconjunto $S \subseteq B$, es también numerable.
2. ¿Existe algún conjunto X tal que $\mathcal{P}(X)$ sea infinito numerable?. Razona tu respuesta.
3. Demuestra que $(A \sim_c B \wedge A \cap B = \emptyset) \longrightarrow (A \cup B \sim_c A \times \{0, 1\})$.
4. Demuestra que se verifican las dos propiedades siguientes:
 - a) $A \leq_c B \longrightarrow \mathcal{P}(A) \leq_c \mathcal{P}(B)$.
 - b) $A \sim_c B \longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim_c \mathcal{P}(B)$.
5. Demuestra que si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $A \sim_c C$, entonces $A \sim_c B$ y $B \sim_c C$.
6. Demuestra que si A es infinito y B es finito. entonces $A \cup B \sim_c A$.
(Idea: Demuéstralo primero para $A = \mathbb{N}$, y después aborda el caso general, utilizando el hecho de que $\mathbb{N} \leq_c A$, por ser A un conjunto infinito).
7. Demuestra que para cualquier alfabeto finito no vacío \mathbb{A} , el conjunto \mathbb{A}^* es infinito numerable.
8. Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables. Indica si alguno de ellos es finito.
$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n &= \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = n\} && (\text{siendo } n \in \mathbb{N}, \text{ fijo}) \\ \mathcal{F} &= \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\} \\ \mathcal{CF} &= \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ es finito}\}\end{aligned}$$
9. En cada uno de los casos que siguen, razona si se tiene $A \leq_c B$, $B \leq_c A$, o ambas cosas.
 - a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$
 - b) $A = \mathbb{N}$, B finito
 - c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 - d) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
 - e) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$
 - f) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$
10. Dados los siguientes conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N} \cap [0, 4]$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, determina cuál es el enunciado correcto de los siguientes y razona porqué ese es el caso:
 - a) Los tres conjuntos son numerables.
 - b) Ninguno de los tres conjuntos es numerable.
 - c) El tercero es el único conjunto numerable.
 - d) El segundo y el tercero son numerables.
11. Dados los siguientes conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} / n \geq 15\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} / 2n^2 + 5n < 50\}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, determina cuál es el enunciado correcto de los siguientes y razona porqué ese es el caso:
 - a) Los tres conjuntos son infinito numerables.
 - b) A y B son infinito numerables.
 - c) A y B son numerables.
 - d) B y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son numerables.
12. Sea $f : \{p \in \mathbb{N} / p \text{ primo}\} \times \{2n / n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, determina cuál es el enunciado correcto de los siguientes y razona porqué ese es el caso:
 - a) f puede ser suprayectiva pero no biyectiva.
 - b) f puede ser inyectiva pero no biyectiva.
 - c) f puede ser biyectiva.
 - d) Ninguna de las anteriores.