Ejercicio 4 (Hoja 4)

20-XII-2019

grupo diédrico D_n

(visto como subgrupo de $O(2)$ que deja invariante las raíces n-ésimas de la unidad)

(i) Probar que $|D_n| \leq 2n$.

Concluir la igualdad probando que

$$D_n = \{Id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \tau, \tau\rho, \dots, \tau\rho^{n-1}\}$$

con $\rho \in SO(2)$ rotación ángulo $2\pi/n$

$\tau \in O(2) - SO(2)$ conjugación.

⊛ Cabe recordar que

$$U_n = \{ \xi_k = e^{2\pi i k/n} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \} = \langle \xi_1 \rangle.$$

es subgrupo de $\mathbb{C}$ cíclico generado por ξ_1.

De hecho: $\mathbb{C} = \mathbb{R}\xi_0 \oplus \mathbb{R}\xi_1$.

(i) Sea $A \in D_n$

aplicación lineal que queda completamente determinada dando las imágenes de ξ_0 y ξ_1 (base de $\mathbb{C}$)

Además: Como $D_n \subseteq O(2)$, se tiene que A es una matriz ortogonal que preserva ángulos y distancias.

⇝ Conclusión: si $A(\xi_0) = \xi_k$, para cierto $k \in \{0, \dots, n-1\}$

necesariamente $A(\xi_1) = \xi_{k+j}$ con $\boxed{j \in \{\pm 1\}}$

En efecto: Si $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow [0, 2\pi)$ es la aplicación que devuelve el ángulo entre dos vectores en $\mathbb{C}$,

$$\langle A(\xi_0), A(\xi_1) \rangle \underset{\substack{A \text{ pres.} \\ \text{ángulos}}}{=} \langle \overset{1}{\cancel{\xi_0}}, \xi_1 \rangle = 2\pi/n$$

ángulo entre dos raíces n-ésimas de la unidad consecutivas

$$\parallel$$

$$\langle \xi_k, V \rangle$$

$\rightsquigarrow$ necesariamente ξ_k y v han de ser raíces n-ésimas de la unidad consecutivas

↳ i.e.: $v = \xi_{k\pm 1}$

Por tanto, hay n opciones (las raíces n-ésimas de la unidad) con las que puede coincidir $f(\xi_0)$ y, después, fijada esta, hay otras 2 opciones para $f(\xi_1)$. f saber, se ha probado:

$$|D_n| \leq 2n.$$

Hecho esto, como

$$\{Id, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \tau, \tau\rho, \ldots, \tau\rho^{n-1}\} \subseteq D_n$$

trivialmente $(ord(\rho) = n, ord(\tau) = 2)$, Si comprobamos que estos son distintos 2 a 2, obtendremos la igualdad $|D_n| = 2n$ deseada. Vamos a verlo:

- $\rho^k \neq \rho^j$ para $k, j \in \{0, \dots, n-1\}$ y $k \neq j$ por ser todas estas rotaciones de ángulo distinto.

  A saber: $\rho^k(1) = \xi_k \neq \xi_j = \rho^j(1)$ si $k \neq j$

- Como por el **Ejercicio 1** se tiene que $L_\tau : D_n \longrightarrow D_n$ es una biyección,

  es $$L_\tau \underbrace{\{1, \rho, \dots, \rho^{n-1}\}} = \underbrace{\{\tau, \tau\rho, \dots, \tau\rho^{n-1}\}}$$

  n elementos distintos $\Longrightarrow$ n elementos distintos

- Finalmente

$$\left.\begin{array}{l} \rho^k \in SO(2) \\ t \in O(2) - SO(2) \\ \hookrightarrow t\rho^j \in O(2) - SO(2) \end{array}\right\} \Rightarrow t\rho^j \neq \rho^k$$

R.A.

si $t\rho^j \in SO(2) \Rightarrow t \in SO(2)$ #

mult. por ρ^{-j} a derecha

<u>Conclusión</u>:

$$|\{Id, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, t, t\rho, \dots, t\rho^{n-1}\}| = 2n$$

Como $\hookrightarrow D_n = \{Id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, t, t\rho, \dots, t\rho^{n-1}\}$

$$D_n \subseteq \{Id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, t, t\rho, \dots, t\rho^{n-1}\}$$

En particular

$$\boxed{|D_n| = 2n}$$

(ii) ¿$p^k t p^k = t$, $\forall k \in \mathbb{Z}$?

Deducir el orden para los elementos de D_n.

Vamos a probar por inducción en k el caso $k>0$ ($k=0$ es trivial).

- Caso base: $\boxed{k=1}$

Basta ver que $ptpt = Id$

En efecto: $ptpt = Id \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(ptpt)}_{Id} t = t$

para esto, dada $\{\xi_0, \xi_1\}$ base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-e.v., basta ver que $ptpt$ deja fijos $\xi_0 = 1$ y ξ_1.

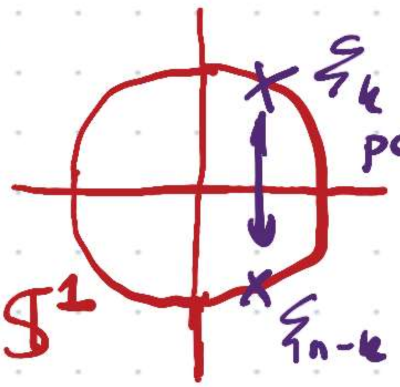
En efecto:

$$-ptp\underbrace{[t(1)]}_{1} = pt\underbrace{[p(1)]}_{\xi_1} = p\underbrace{[t(\xi_1)]}_{\xi_{n-1}} =$$

$$= p\,\xi_{n-1} = \xi_n = \xi_0 = 1 \,]$$

⊛ Recordad: $\underbrace{t}_{\text{conjugación compleja}}\xi_k = \xi_{n-k}$, $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$

$\mathbb{C}$



por conjugación

ξ_{n-k}

$$t\Big(\underbrace{e^{\frac{2\pi k}{n}}}_{\xi_k}\Big) \overset{\text{def.}}{=} e^{\frac{2\pi(-k)}{n}} = e^{\frac{2\pi(n-k)}{n}}$$

multiplicando por $e^{2\pi n/n} = 1$

$$= p\,t\,p\,[t(\underbrace{\cancel{\xi_1}}_{\xi_{n-1}})] = p\,t\,[p(\underbrace{\cancel{\xi_{n-1}}}_{\xi_n = \xi_0 = 1})] =$$

$$= p\,[t(\underbrace{\cancel{1}}_{1})] = p(1) = \xi_1 \,]$$

En definitiva: $ptpt = Id$.

- Caso general: Suponemos cierto el

resultado para $k-1$ $(k>1)$ [Hipótesis de inducción] y veamos este para k general.

$$p^k t p^k = p^{k-1}(\cancel{p t p})p^{k-1} =$$

 t caso base

$$= p^{k-1} t p^{k-1} = t \text{ (hip. inducción)}$$

Para terminar, es necesario ver qué sucede cuando $k<0$. Pero esto es inmediato, pues

$$p^k t p^k = (p^{-k})^{-1} (\underbrace{t^{-1}}_{t})^{-1} (p^{-k})^{-1} =$$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

pues $t = t^{-1}$ por ser de orden 2

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$$= (t p^{-k})^{-1} (p^{-k})^{-1} = p^{-k} t p^{-k} =$$

$-k>0$ caso anterior

$= t \,]$.

$-h > 0$
caso anterior

Calculemos el orden de cada elemento.

Obviamente: $\mathrm{ord}(p) = n$, $\mathrm{ord}(t) = 2$

Además, como consecuencia de lo que se acaba de probar

$$(tp^h)(tp^h) = t(\cancel{p^h t} p^h) = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{ord}(tp^h) = 2.$$

Finalmente, en virtud de la fórmula dada en el Ejercicio 2 se tiene que

$$\mathrm{ord}(p^h) = \frac{\mathrm{ord}(p)}{\mathrm{mcd}(\mathrm{ord}(p), h)} = \frac{n}{\mathrm{mcd}(n,h)} \,]$$

iii) D_n no es abeliano si $n \geq 3$

$\hookrightarrow n=1 \Rightarrow D_n \cong \mathbb{Z}_2$ [no hay otra opción] primo

$n=2 \Rightarrow D_n \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

[Ejercicio 30]

¿Centro de D_n?

Basta ver que $tp \neq pt$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} - t[\underbrace{p(\xi_1)}_{\xi_2}] = t(\xi_2) = \xi_{n-2} \\ - p[\underbrace{t(\xi_1)}_{\xi_{n-1}}] = p(\xi_{n-1}) = \xi_0 = 1 \end{array}\right\}$$

donde $\xi_{n-2} \neq \xi_0 = 1$ si $n \geq 3$

Luego $tp \neq pt$ si $n \geq 3$.

$\hookrightarrow D_n$ no es abeliano si $n \geq 3$.

Para calcular el centro, obsérvese que $Z(D_n) = D_n$ si $n = 1, 2$ (pues es abeliano hemos visto)

Luego suponemos $n \geq 3$, y sea

$$\underbrace{x = \tau^j \rho^k \in Z(D_n)}_{\text{se trata de ver qué condiciones deben imponerse al par } (j,k)} \text{ donde } \begin{cases} j \in \{0, \dots, n-1\} \\ k \in \{1, 2\} \end{cases}$$

Distinguimos dos casos:

- $j = 0$: tenemos $x = \rho^k \in Z(D_n)$.

Como $\mathrm{ord}(\tau\rho^j) = 2$ según se ha visto, tenemos que

$$Id = \underbrace{(\tau\rho^k)}_{\rho^k\tau}(\tau\rho^k) \overset{\text{def. centro}}{=} \rho^k \underbrace{\tau^2}_{Id} \rho^k = \rho^{2k}$$

$\Rightarrow 2k \in \{0, n\}$

como $\mathrm{ord}(\rho) = n$

- $j=1$: tenemos que $x = tp^k \in Z(D_n)$.

Como $\operatorname{ord}(tp^k)=2$ según se ha visto, tenemos que

$$Id = (t\boxed{p^k})\cdot\underbrace{(tp^k)}_{\in Z(D_n)} =$$

conmutan

$$= \cancel{t(t}p^k)p^k = p^{2k}$$

Id

$\hookrightarrow 2k \in \{\cancel{0}, n\}$

Como $\operatorname{ord}(\rho)=n$

De hecho, como $t \notin Z(D_n)$ (pues hemos visto que $tp \neq pt$), necesariamente $\boxed{2k=n}$

⊛ No olvidemos que estamos buscando condiciones necesarias (no suficientes)

En resumen:

- Si n es impar $\Longrightarrow Z(D_n) = \{Id\}$
necesariamente
- Si n es par ↳ pues $2k = n$ no tiene solución entera en ningún caso

$\boxed{\text{Candidatos}}$: $Id, \rho^{n/2}, t\rho^{n/2}$

⇝ $\boxed{1^{\underline{a}}\text{ observación}}$: cabe esperar algo así pues $|Z(D_n)| \mid |D_n| = 2n$ y n es arbitrario

$$\boxed{\rho^{n/2} \notin Z(D_n) \text{ ó } t\rho^{n/2} \notin Z(D_n)}$$

En efecto: R.A.

si $\rho^{n/2}, t\rho^{n/2} \in Z(D_n) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad t = (t\underbrace{\boxed{\rho^{n/2})\,\rho^{n/2}}}_{Id} \in Z(D_n) \#$$

⇝ $\boxed{2^{\underline{a}}\text{ observación}}$: $\rho^{n/2} \in Z(D_n)$

Basta comprobar que

$\rightarrow \rho^{n/2}\rho = \rho\rho^{n/2}$ (obvio)

$\rightarrow \rho^{n/2} t = t \rho^{n/2}$

En efecto:

$$\rho^{n/2} t = \rho^{n/2}(\rho^{n/2} t \rho^{n/2}) = t\rho^{n/2} \quad \text{ok}$$

Id

igualdad vista

Luego: $Z(D_n) = \{Id, \rho^{n/2}\}$ si n es par

(iv) Subgrupos de D_3, D_4, D_5

↳ Habrá que usar el TR. de Lagrange (divisores propios de $2n$)

↳ los subgrupos triviales son obvios

$\rightarrow n = 3$ (D_3)

Los posibles subgrupos propios han de tener órdenes 2 ó 3

En particular, todos van a ser cíclicos (orden primo) y son los generados por elementos de orden 2 y 3. A saber:

* sub. prop. orden 2:

$$\langle t \rangle, \langle tp \rangle, \langle tp^2 \rangle$$

* sub. prop. orden 3: $\langle p \rangle$

$\longrightarrow$ $n=4$ (D_4)

Los posibles subgrupos propios han de tener órdenes 2 ó 4.

* Como los de orden 2 son todos cíclicos, generados por elementos de orden 2, estos son

$$\langle t \rangle, \langle tp \rangle, \langle tp^2 \rangle, \langle tp^3 \rangle, \langle p^2 \rangle$$

[Ejercicio 30]

* Los subgrupos de orden 4, sin embargo, pueden ser cíclicos (a saber, tienen un elemento de orden 4 que los genera), o bien todos sus elementos son de orden 2 (salvo el neutro), siendo este isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

↳ i.e. es del tipo $\{Id, x, y, xy\}$

⇝ Dado que los únicos elementos de orden 4 en D_4 son ρ y ρ^3, que generan el mismo grupo cíclico claramente, el único subgrupo de orden 4 cíclico en D_4 es $\langle \rho \rangle$.

⇝ Veamos cuáles son los subgrupos (si los hay) de orden 4 del otro tipo.

$\boxed{\text{Sea } \rho^2 \in D_4 \text{ de orden } 2}$.

Se ha elegido este adecuadamente por lo que se va a ver ahora a continuación multiplicar por ρ^2

Para cualquier $x \in \{\tau, \tau\rho, \tau\boxed{\rho^2}, \tau\boxed{\rho^3}\}$

Se tiene que el conjunto

cjto. de elementos con órdenes 2 ó 3 en D_4 (que, cuando multipliquemos por ρ^2, da un elemento de orden 2 nuevo)

$$\{Id, x, \rho^2, x\rho^2\} \quad (\bullet)$$

es un subgrupo de orden 4 no cíclico. A saber, obtenemos dos subgrupos de orden 4 así:

$$\{Id, \tau, \rho^2, \tau\rho^2\}, \{Id, \tau\rho, \rho^2, \tau\rho^3\}$$

¿Hay más? Veamos que no.

elemento no trivial que tienen en común

Para ello, basta comprobar que ρ^2 pertenece a cualquier subgrupo de orden 4 no cíclico del tipo $(\bullet)$.

En efecto, sean $x = \tau\rho^j$, $y = \tau\rho^k$

(donde sup. sin pérd. general. $j > k$)

Se tiene así que

$$xy = (t\rho^h)(t\rho^j) = t\,\cancelto{t}{(\rho^h t \rho^h)}\,\rho^{j-h} =$$

como ya hemos visto

$$= \cancelto{Id}{t^2}\,\rho^{j-h} = \rho^{j-h}$$

↳ Como ord$(xy) = 2$ (hipótesis)

↳ $j-h = 2$ necesariamente

→ $\underset{\sim}{n=5}$ (D_5) $\qquad \rho^{j-h} = \rho^2 \in \langle \bullet \rangle$ fin

Los posibles subgrupos propios han de tener órdenes 2 ó 5.
En particular, todos van a ser cíclicos (orden primo) y son los generados por elementos de orden 2 y 5.
A saber:

* sub. prop. orden 2:

$$\langle t \rangle, \langle t\rho \rangle, \langle t\rho^2 \rangle, \langle t\rho^3 \rangle, \langle t\rho^4 \rangle$$

* sub. prop. orden 5: $\langle \rho \rangle$ $\blacksquare$