MÉTODO DE LAS DOS FASES

Se considera el problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\min \quad c^t x \\ \text{s.a.:} & \\ &Ax = b \qquad\qquad (P) \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $b \geq 0$. Se supone que no se dispone inicialmente de una descomposición de la matriz A de la forma $A = (I, N)$.

A partir de la región factible S del problema (P), se considera como región factible de un nuevo problema

$$Ax + Ix^a = b$$

$$x \geq 0, \;\; x^a \geq 0$$

siendo $x^a \in R^m$ un vector de *variables artificiales*. Es decir, se añaden m variables artificiales no negativas (en la práctica puede ser un número menor),

$$x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_i^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{pmatrix}.$$

La introducción de variables artificiales, permite disponer como matriz básica de la matriz identidad, lo que posibilita, en un nuevo problema, arrancar el método del Simplex. De esta manera, el proceso que tiene lugar para resolver el problema (P), se realiza en dos fases.

Fase I

Se resuelve el siguiente problema mediante el algoritmo del Simplex

$$\begin{aligned} &\min \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ \text{s.a.:} & \\ &Ax + Ix^a = b \qquad\qquad (P_a) \\ &x \geq 0, \;\; x^a \geq 0 \end{aligned}$$

El problema anterior es acotado $\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^a \geq 0\right)$ y, por tanto, tiene solución óptima. Sea

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}^a \end{pmatrix}$$

la solución óptima de (P_a).

$\bar{x}^a = 0$, si y sólo si, el problema (P) es factible, puesto que se tiene

$$\exists\, \acute{x} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists \begin{pmatrix} \acute{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^a \end{pmatrix} \in R^{n+m} \middle| \; Ax + Ix^a = b,\; x \geq 0,\; x^a \geq 0 \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}^a = 0.$$

Luego, si $\bar{x}^a \neq 0$, se puede afirmar que el problema (P) es infactible. Si $\bar{x}^a = 0$, se continúa con la Fase II.

Fase II

Sea (B, N) la descomposición de A asociada al punto extremo $\bar{x}$. La tabla del Simplex asociada a dicho punto extremo (la última obtenida en la Fase I) exceptuando la última fila, presenta el sistema de ecuaciones:

$$B^{-1}Ax + B^{-1}x^a = B^{-1}b\,.$$

Si se eliminan las columnas correspondientes a las variables artificiales, se tiene:

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b\,.$$

A partir de dicha tabla, en esta fase, se resuelve el problema:

$$\begin{array}{ll} & \min \quad c^t x \\ \text{s.a.:} & \\ & B^{-1}Ax = B^{-1}b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Se dispone de un punto extremo para el problema (P), al que está asociada la base B. A partir de dicho punto extremo, se resuelve el problema anterior mediante el método del Simplex.

MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES

Se considera el problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} & \min \quad c^t x \\ \text{s.a.:} & \\ & Ax = b \qquad\qquad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $b \geq 0$. Se supone que no se dispone inicialmente de una descomposición de la matriz A de la forma $A = (I, N)$.

A partir de la región factible S del problema (P), se considera como región factible de un nuevo problema

$$Ax + Ix^a = b$$

$$x \geq 0,\ \ x^a \geq 0$$

siendo $x^a \in R^m$ un vector de *variables artificiales*. Es decir, se añaden m variables artificiales no negativas (en la práctica puede ser un número menor),

$$x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_i^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{pmatrix}.$$

La introducción de variables artificiales, permite disponer como matriz básica de la matriz identidad, lo que posibilita, en un nuevo problema, arrancar el método del Simplex.

En el Método de las Penalizaciones, mediante el algoritmo del Simplex, se resuelve el problema

$$\begin{aligned} & \min\ u = c^t x + M\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^a\right) \\ \text{s.a.:} & \\ & Ax + Ix^a = b \qquad\qquad (P_M) \\ & x \geq 0,\ \ x^a \geq 0 \end{aligned}$$

donde la constante M $(M > 0)$ es arbitrariamente grande.

A continuación denotamos las variables artificiales de la siguiente forma:

$$x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_i^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+i} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

Con esta notación, se tiene:

$$c^t x = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \qquad \text{siendo} \quad c_j = 0 \quad \text{para} \ j = n+1 \ldots .n+m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^a = \sum_{j=1}^{n+m} d_j x_j \qquad \text{siendo} \quad d_j = 0 \quad \text{para} \ j = 1, \ldots, n$$

$$\text{y siendo} \quad d_j = 1 \quad \text{para} \ j = n+1, \ldots .n+m$$

$$u = \sum_{j=1}^{n+m} u_j x_j = \left(\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \right) + M \left(\sum_{j=1}^{n+m} d_j x_j \right)$$

$$u_j = c_j + M d_j \qquad para \quad j = 1 \ldots .n+m$$

Sea B la base considerada. Se tiene

$$\bar{u}_j = u_j - u_B^t Y_j = \left(c_j + M d_j\right) - (c_B^t + M d_B^t) Y_j$$

$$= \left(c_j - c_B^t Y_j\right) + M\left(d_j - d_B^t Y_j\right) = \bar{c}_j + M \bar{d}_j$$

$$para \quad j = 1 \ldots .n+m$$

El problema (P_M) es factible y, si el problema (P) es factible, existe solución factible de (P_M) con todas las variables artificiales nulas

$$\exists\, \acute{x} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists \begin{pmatrix} \acute{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^a \end{pmatrix} \in R^{n+m} \,\middle|\, Ax + I x^a = b,\ x \geq 0,\ x^a \geq 0 \right\}$$

siendo S la región factible del problema (P).

Luego, si la resolución del problema (P_M) termina con alguna variable artificial no nula, el problema (P) es infactible.

Al finalizar la resolución del problema (P_M) mediante el algoritmo del Simplex, se pueden presentar los siguientes casos:

a) En la última tabla del Simplex, alguna variable artificial toma un valor no nulo, entonces el problema (P) es infactible.

b) En la última tabla del Simplex, todas las variable artificiales son nulas. En este caso la solución que presenta la tabla es solución factible de (P). Pueden ocurrir dos situaciones distintas:

- La tabla presenta solución óptima $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}^a \end{pmatrix}$, con $\bar{x}^a = 0$. Entonces $\bar{x}$ es solución óptima de (P).

- La tabla indica que el problema (P_M) tiene solución no acotada. Entonces el problema (P) tiene solución no acotada.