CI. Examen. 10 Julio 2020. Ejercicio 2

Sea $0 < \alpha < 1$ fijo. Consideramos el conjunto

$$A_{n,\alpha} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1, x_1 \in (-\alpha, \alpha)\}$$

Denotemos por B_n la bola unidad euclíea en $\mathbb{R}^n$

Probar que existen constantes $c_1, c_2 > 0$, que pueden depender de α, tales que

$$\frac{\mathrm{vol}(A_{n,\alpha})}{\mathrm{vol}(B_n)} \geq 1 - c_1 e^{-c_2 n} \tag{1}$$

(Es decir, todo el volumen de la bola se concentra exponencialmente, cuando n tiene a infinito, cerca del ecuador).

Sugerencia: Utilizar el cambio a coordenades hiperesféricas.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos(\phi_1) \\
x_2 &= r\sin(\phi_1)\cos(\phi_2) \\
x_3 &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_3) \\
&\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-2})\cos(\phi_{n-1}) \\
x_n &= r\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-2})\sin(\phi_{n-1})
\end{aligned}$$

con $r > 0$, $\phi_1, \dots \phi_{n-2} \in [0, \pi]$, $\phi_{n-1} \in [0, 2\pi]$. El jacobiano de esta transformación (no hace falta demostrarlo) es:

$$r^{n-1}\sin^{n-2}(\phi_1)\sin^{n-3}(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{n-2})$$

Probar (1) para el conjunto $B_{n,\beta}$ dado en coordenadas hiperesféricas por

$$\pi/2 - \beta < \phi_1 < \pi/2 + \beta.$$