

Definición: Sea $D=(V,A)$ un digrafo simple conexo y sea $u: A \rightarrow \mathbb{R}^+$, el valor $u(a)$ se denomina *la capacidad* del arco a . Además, sean s y t dos vértices especiales de D , tales que t es accesible desde s . Entonces (D, u, s, t) se denomina *una red con capacidades, vértice fuente s y vértice sumidero t* . Un *flujo* en dicha red, es una aplicación $x: A \rightarrow \mathbb{R}^+$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(F1) $0 \leq x(a) \leq u(a)$ para cada arco a ;

(F2) para cada vértice $v \neq s, t$, se verifica $\sum_{a^+=v} x(a) = \sum_{a^-=v} x(a)$,

donde a^- y a^+ denotan los vértices inicial y final de a respectivamente.

El valor de x , denotado por $\alpha(x)$, se define:

$$\alpha(x) = \sum_{a^-=s} x(a) - \sum_{a^+=s} x(a) = \sum_{a^+=t} x(a) - \sum_{a^-=t} x(a).$$

Definición: Sea (D, u, s, t) una red con capacidades, vértice fuente s y vértice sumidero t . Sea (S, T) una partición, $V=S \cup T$ del conjunto de vértices V de D en dos conjuntos disjuntos S y T tales que $s \in S$ y $t \in T$ ((S, T) se denomina un *corte* de (D, u, s, t)). La capacidad del corte (S, T) es

$$u(S, T) = \sum_{a^-=s, a^+ \in T} u(a),$$

es decir, la suma de todas las capacidades de los arcos del correspondiente corte que están orientados de S a T .

Teorema: Sea (D, u, s, t) una red con capacidades, vértice fuente s y vértice sumidero t . Sea x un flujo en dicha red y (S, T) un corte tal que $s \in S$ y $t \in T$. Se verifica

$$\alpha(x) = \sum_{a^-=s, a^+ \in T} x(a) - \sum_{a^+ \in S, a^-=t} x(a),$$

y, por tanto, $\alpha(x) \leq u(S, T)$.

Teorema (Teorema de cadena de aumento): Sea (D, u, s, t) una red con capacidades, vértice fuente s y vértice sumidero t . Un flujo x en dicha red es de máximo valor si, y sólo si, no existe ninguna cadena de aumento con respecto a x .

Teorema (Teorema de Máximo Flujo – Mínimo Corte): El valor de un flujo de valor máximo en una red (D, u, s, t) , es igual a la capacidad de un corte $((S, T))$ tal que $s \in S$ y $t \in T$ de capacidad mínima en dicha red.

Teorema: Sea (D, u, s, t) una red donde todas las capacidades $u(a)$ son números enteros. Entonces existe un flujo de máximo valor en dicha red tal que todos los valores $x(a)$ son enteros.

Algoritmo (Algoritmo de etiquetado de Ford–Fulkerson)

Input: Una red de flujo (D, u, s, t) con $u: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

Output: Un flujo de máximo valor x y un corte de mínima capacidad (S, T) , tales que $\alpha(x) = u(S, T)$.

begin

for cada $a \in A$ **do** $x(a) := 0$

 etiquetar s con $(-, \infty)$

for cada $v \in V$ **do** $u(v) := \text{False}$, $d(v) := \infty$;

while exista algún vértice etiquetado v con $u(v) := \text{False}$ **do**

begin

 elegir un vértice etiquetado v con $u(v) := \text{False}$

for cada $a \in A$ tal que $a^- = v$ **do**

if $w = a^+$ no está etiquetado y $x(a) < u(a)$ **then**

begin

$d(w) := \min\{u(a) - x(a), d(v)\}$;

 etiquetar w con $(v, +, d(w))$

end

for cada $a \in A$ tal que $a^+ = v$ **do**

if $w = a^-$ no está etiquetado y $x(a) > 0$ **then**

begin

$d(w) := \min\{x(a), d(v)\}$;

 etiquetar w con $(v, -, d(w))$

end

$u(v) := \text{True}$

if t está etiquetado **then**

begin

 sea d la última componente de la etiqueta de t ,

$w := t$

while $w \neq s$ **do**

 encontrar la primera componente v de la etiqueta de w ;

if la segunda componente de la etiqueta de w es $+$ **then**

$x(a) := x(a) + d$ para el arco $a = (v, w)$

else $x(a) := x(a) - d$ para el arco $a = (w, v)$

$w := v$

 eliminar todas las etiquetas excepto la de s ;

for cada $v \in V$ **do**

$d(v) := \infty$, $u(v) := \text{False}$

end

 Sea S el conjunto de los vértices que están etiquetados y $T := V - S$.

end

Teorema: Sea (D, u, s, t) una red donde todas las capacidades $u(a)$ son números enteros. Entonces el algoritmo de Ford–Fulkerson determina un flujo de máximo valor x y un corte de mínima capacidad (S, T) ($s \in S$ y $t \in T$), tales que se verifica $\alpha(x) = u(S, T)$.

Teorema: Si la línea 7 del algoritmo de Ford–Fulkerson se sustituye por:

 sea v , entre todos los vértices etiquetados con $u(v) := \text{False}$, el primero en ser etiquetado, entonces, el algoritmo resultante (Algoritmo de Edmonds y Karp) tiene complejidad $O(|V| |A|^2)$.