I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.......... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

8.- Demuestra que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en todo punto de la circunferencia unidad salvo en $z=1$

Si $|z|=1$

$$\frac{z^n}{n} = \frac{(|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta))^n}{n} = \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\,\frac{\mathrm{sen}(n\theta)}{n}$$

La serie converge si y solo si convergen las series de su parte real y su parte imaginaria.

Si $\theta = 0$ es decir $z=1$ tenemos las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 0$.

Es bien sabido que la serie armónica diverge.

Si $\theta \neq 0$ sabemos por el ejercicio 10 que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$

y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left|2\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right|$. Por tanto, como ambas series convergen, si $|z|=1$ y $z \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge