# I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................................................. Fecha ....................

Alumno/a.................................................. Curso.................. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

11.- Halla los ceros de las siguientes funciones y determina sus órdenes:

a) $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow z^4+2z^2+1=0 \overset{z^2=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2+2\omega+1=0 \Leftrightarrow (\omega+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)^2=0 \Leftrightarrow ((z+i)(z-i))^2=0 \Leftrightarrow (z+i)^2(z-i)^2=0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^4+2z^2+1 = (z+i)^2(z-i)^2.$$

Los ceros de la función son $i$ y $-i$ y ambos tienen orden 2.

b) $f(z) = z^3\cos^2 z$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^3=0 \Leftrightarrow z=0 \\ \text{o} \\ \cos^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Hacemos el desarrollo en serie de Taylor de $g(z)=\cos z$ para cada $k\in\mathbb{Z}$ para saber la multiplicidad de los ceros de $g(z)$

$g(z) = \cos z$ $\qquad g(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$g^{1)}(z) = -\operatorname{sen} z$ $\qquad g'(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \mp 1$

$g^{2)}(z) = -\cos z$ $\qquad g^{2)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$g^{3)}(z) = \operatorname{sen} z$ $\qquad g^{3)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = \pm 1$

$g^{4)}(z) = \cos z$ $\qquad g^{4)}(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 0$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n)}(z)}{n!}\left(z-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}\left(z-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n$$

donde $\varepsilon_{n,k}$ es 0 si $n$ es par y $\pm 1$ si $n$ impar.