Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat - Inf

Lista 6

Número 6.20.- En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología τ_{CK} cuyos abiertos no vacíos son los complementarios de los compactos usuales. Probar que un conjunto es compacto en esta topología si y sólo si es cerrado en la usual. ¿Es localmente compacto $\mathbb{R}^2$ con esta topología τ_{CK}?

En primer lugar, comprobamos de manera rutinaria que τ_{CK} es una topología. Sabiendo que

$$\tau_{CK} = \{ \mathbb{R}^2 \setminus K \mid K \text{ es compacto usual} \} \cup \{\emptyset\} \quad \text{entonces}$$

i) $\emptyset \in \tau_{CK}$ y $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset \in \tau_{CK}$ porque $\emptyset$ es compacto usual.

ii) Sean $(U_i)_{i\in I} \subset \tau_{CK}$ ... y queremos ver que $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_{CK}$.

Sea $J \subset I$ tal que $U_j \neq \emptyset$ si $j \in J$. Si $J = \emptyset$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in \tau_{CK}$ y si $J \neq \emptyset$ entonces $\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{j\in J} U_j \overset{?}{\in} \tau_{CK}$ $(\neq \emptyset)$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j\in J} U_j = \bigcap_{j\in J} \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus U_j}_{\text{compacto usual}} = K \text{ es compacto usual por ser}$$

$K_j \Leftrightarrow U_j = \mathbb{R}^2 \setminus K_j$

intersección arbitraria de compactos en un $\underbrace{\text{espacio } T_2}_{(\mathbb{R}^2, \tau_{usual})}$ (Número 6.1).

Por tanto, $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathbb{R}^2 \setminus K \in \tau_{CK}$.

iii) Sean $(U_i)_{i=1}^n \subset \tau_{CK}$ y queremos ver que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{CK}$.

Si $\exists i_0 \in \{1 \dots n\}$ tal que $U_{i_0} = \emptyset$ entonces $\bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset \in \tau_{CK}$.

Si $U_i \neq \emptyset$ $\forall i \in \{1 \dots n\}$ entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{R}^2 \setminus U_i = \bigcup_{i=1}^n K_i$, donde

$\mathbb{R}^2 \setminus K_i = U_i$ con K_i compactos. Como la unión finita de compactos es compacto (basta tomar como subrecubrimiento la unión (finita) de los subrecubrimientos finitos, que es finito) entonces

$\mathbb{R}^2 \setminus \bigcap_{i=1}^{n} U_i = K$ es un compacto usual, luego $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \mathbb{R}^2 \setminus K \in \mathcal{T}_{CK}$.

Veamos que un conjunto es compacto en la topología $\mathcal{T}_{CK}$ (lo que llamaremos ser $\mathcal{T}_{CK}$-compacto) sí y solo si es cerrado en $\mathcal{T}_{usual}$ ($\mathcal{T}_u$-cerrado).

$\Leftarrow$ Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto $\mathcal{T}_u$-cerrado y sea $(U_i)_{i \in I}$ un subrecubrimiento por $\mathcal{T}_{CK}$-abiertos de $A \Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Si $\exists i_0 \in I$ tal que $U_{i_0} = \mathbb{R}^2$ basta considerar $\{U_{i_0}\}$ como subrecubrimiento finito por $\mathcal{T}_{CK}$-abiertos de A. En caso contrario sea $i_1 \in I$ tal que $U_{i_1} \neq \emptyset$. Como U_{i_1} es $\mathcal{T}_{CK}$-abierto, $U_{i_1} = \mathbb{R}^2 \setminus K$ con K $\mathcal{T}_u$-compacto. Se sigue que $A \cap K$ es $\mathcal{T}_u$-cerrado (K es $\mathcal{T}_u$-compacto en T_2, luego es $\mathcal{T}_u$-cerrado, y la intersección de cerrados es cerrada) y también $\mathcal{T}_u$-compacto (es un $\mathcal{T}_u$-cerrado es un $\mathcal{T}_u$-compacto K). Por tanto, dado cualquier recubrimiento por $\mathcal{T}_u$-abiertos de $A \cap K$ podemos extraer un subrecubrimiento finito. Veamos que $(U_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento por $\mathcal{T}_u$-abiertos. A priori, no sabemos que los U_i sean $\mathcal{T}_u$-abiertos, sino solo $\mathcal{T}_{CK}$-abiertos. Sin embargo, $\mathcal{T}_{CK} \subset \mathcal{T}_u$. En efecto, dado U $\mathcal{T}_{CK}$-abierto puede ser $U = \emptyset \in \mathcal{T}_u$ o $U = \mathbb{R}^2 \setminus C$ con C $\mathcal{T}_u$-compacto. Como compacto en T_2 es cerrado, entonces C es $\mathcal{T}_u$-cerrado y $U = \mathbb{R}^2 \setminus C$ es $\mathcal{T}_u$-abierto. Esto prueba que los U_i son $\mathcal{T}_u$-abiertos luego forman un recubrimiento abierto. Como $A \cap K$ es $\mathcal{T}_u$-compacto $\exists i_2, i_3 \cdots i_k \in I$ tales que $(U_{i_j})_{j=2}^{k}$ es un subrecubrimiento finito que $A \cap K$, es decir, $A \cap K \subset \bigcup_{j=2}^{k} U_{i_j}$.

Afirmamos que $(U_{i_j})_{j=1}^{k}$ es un subrecubrimiento finito de A.

$\Leftrightarrow \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.

Sea $x \in A$

Si $x \in K$ entonces $x \in A \cap K \subset \bigcup_{j=2}^{k} U_{i_j} \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$

Si $x \notin K \Rightarrow x \in \mathbb{R}^2 \setminus K = U_{i_1} \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$

$\Rightarrow$] Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto τ_{ck}-compacto y queremos probar que es τ_u-cerrado. Supongamos que A no es cerrado, es decir, que no contiene a todos sus puntos de acumulación. Sea

$x \in Adh_{\tau_u}(A) \setminus A$ y consideramos los conjuntos

$U_n = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, los complementarios de las bolas cerradas de centro x y radio $\frac{1}{n}$. Estos conjuntos U_n son todos ellos τ_{ck}-abiertos porque son el complementario de bolas cerradas usuales, que son compactos usuales. Entonces $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un subrecubrimiento por τ_{ck}-abiertos de A porque $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$. Como A es τ_{ck}-compacto $\exists\, n_1, n_2, \dots n_r$ tales que $(U_{n_i})_{i=1}^{r}$ es un subrecubrimiento finito de A.

Si $n_0 = \max\limits_{i \in \{1 \dots r\}} \{n_i\}$ afirmamos que $\bigcup_{i=1}^{r} U_{n_i} = U_{n_0}$.

Efectivamente, si $y \in \bigcup_{i=1}^{r} U_{n_i} \Rightarrow \exists j \in \{1 \dots r\}$, $y \in U_{n_j} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{n_j})$

$\Rightarrow y \notin \overline{B}(x, \frac{1}{n_j}) \Leftrightarrow \|x-y\| > \frac{1}{n_j} \geq \frac{1}{n_0} \Leftrightarrow y \notin \overline{B}(x, \frac{1}{n_0}) \Leftrightarrow$

$y \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(x, \frac{1}{n_0}) = U_{n_0}$.

Por tanto

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_{n_i} = U_{n_0}$$, es decir, $\forall a \in A$ $\|x-a\| > \frac{1}{n_0} > 0$ luego x no puede ser un punto adherente porque $B(x, \frac{1}{n_0}) \cap A = \emptyset$.

Esto es una contradicción de haber supuesto que A no es cerrado usual.

Falta ver si $\mathbb{R}^2$ con la topología τ_{cn} es localmente compacto. Veamos que sí que lo es. Para ello tenemos que ver que $\forall x \in X$ $\exists \beta^x$ una base de entornos compactos (τ_{cn}-compactos).

Sea $x \in X$ y consideramos

$$\beta^x = \{\overline{B}(x, \varepsilon), \varepsilon > 0\}.$$

Los elementos de β^x son conjuntos τ_{cn}-compactos porque acabamos de demostrar que τ_{cn}-compacto $\Leftrightarrow$ τ_u-cerrado y las bolas cerradas son conjuntos cerrados en la topología usual. Además, β^x es base de entornos porque si U es un τ_{cn}-abierto que contiene a x, hemos visto que en particular es abierto usual. Como las bolas cerradas son base de entornos en la topología usual $\exists \varepsilon > 0$, $x \in \overline{B}(x, \varepsilon) \subset U$ lo que prueba que β^x es base de entornos.

Por tanto, $(\mathbb{R}^2, \tau_{cn})$ es un espacio topológico localmente compacto.

Número 6.22.- Demostrar el teorema de Baire en un espacio cuya topología está definida por una distancia completa.

Tenemos que probar que en un espacio topológico con una topología definida por una distancia completa se cumple que la intersección numerable de abiertos densos es densa a su vez.

Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos abiertos y densos en X y queremos probar que $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es densa en X. Para ver que un conjunto es denso basta ver que corta a todo abierto no vacío así que sea $W \neq \emptyset$ un abierto de X.

Para $n=1$, como U_1 es denso $U_1 \cap W \neq \emptyset$ y como ambos conjuntos son abiertos, la intersección es abierta. Si tomamos $x_1 \in U_1 \cap W$, entonces $\exists \varepsilon_1$ con $0<\varepsilon_1<1$ tal que $\overline{B}(x_1,\varepsilon_1) \subset U_1 \cap W$.

En general, dado $n \geq 2$, como U_n es denso y $B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$ es un conjunto abierto $U_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \neq \emptyset$ y como ambos son abiertos la intersección lo es. Tomando $x_n \in U_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$ $\exists \varepsilon_n \in (0,\frac{1}{n})$ tal que $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n) \subset U_n \cap B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$.

Tras realizar esta construcción se tiene que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y que $\forall n>m$ $x_n \in B(x_m,\varepsilon_m)$, por lo que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como la distancia es completa, $\exists x \in X$ tal que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Queremos probar que $x \in W \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, es decir, $x\in W$ y $\forall n\in\mathbb{N}$ $x\in U_n$. Dado $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $\forall m \geq n$ $x_m \in \overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ luego, por ser $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ un conjunto cerrado, el límite pertenece al conjunto, esto es $x \in \overline{B}(x_n,\varepsilon_n) \subset U_n$. En particular, para $n=1$ $x\in \overline{B}(x_1,\varepsilon_1) \subset U_1 \cap W \subset W$ lo que prueba el resultado.