ALGORITMO (DUAL) DEL SIMPLEX (Problema de minimización)

Paso 1:

Determinar una base inicial B tal que $c^t - c_B^t B^{-1} A \geq 0$, y su matriz no básica asociada N. Ir al paso 2.

Paso 2:

Calcular $\bar{x}_B = B^{-1} b$ y establecer $\bar{x}_N = 0$. Calcular

$$Y_j = B^{-1} a_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Paso 3 (Detección de optimalidad)**:**

Si $\bar{x}_B \geq 0$, PARAR ($\bar{x}$ es solución óptima del problema). En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4 (Detección de infactibilidad)**:**

Si existe $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{x}_{B_l} < 0$ e $y_{lj} \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, PARAR (el problema es infactible). En otro caso, ir al paso 5.

Paso 5 :

Determinar la variable x_{B_l} que sale de la base y la variable x_k que entra en la base, de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{B_l} = min \left\{ \bar{x}_{B_i} / \ i \in \{1 \dots m\} \quad \text{con} \ \bar{x}_{B_i} < 0 \right\}$$

$$-\frac{\bar{c}_k}{y_{lk}} = min \left\{ -\frac{\bar{c}_j}{y_{lj}} \ \middle| \ j \in \{1, \dots, n\} \ \text{con} \ y_{lj} < 0 \right\}$$

siendo $\bar{c}_j = c_j - c_B^t \, Y_j$ el coste reducido de la variable x_j .

Considerar la nueva base B' obtenida suprimiendo de B la columna a_{B_l} e incorporando la columna a_k. Ir al paso 2.

ALGORITMO (DUAL) DEL SIMPLEX (Problema de maximización)

Paso 1:

Determinar una base inicial B tal que $c^t - c_B^t B^{-1} A \leq 0$, y su matriz no básica asociada N. Ir al paso 2.

Paso 2:

Calcular $\bar{x}_B = B^{-1} b$ y establecer $\bar{x}_N = 0$. Calcular

$$Y_j = B^{-1} a_j \qquad\qquad j = 1, \dots, n$$

Paso 3 (Detección de optimalidad)**:**

Si $\bar{x}_B \geq 0$, PARAR ($\bar{x}$ es solución óptima del problema). En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4 (Detección de infactibilidad)**:**

Si existe $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{x}_{B_l} < 0$ e $y_{lj} \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, PARAR (el problema es infactible). En otro caso, ir al paso 5.

Paso 5 :

Determinar la variable x_{B_l} que sale de la base y la variable x_k que entra en la base, de la siguiente forma:

$$\bar{x}_{B_l} = min \left\{ \bar{x}_{B_i} / \ i \in \{1 \dots m\} \quad \text{con} \ \bar{x}_{B_i} < 0 \right\}$$

$$\frac{\bar{c}_k}{y_{lk}} = min \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{lj}} \ \middle| \ j \in \{1, \dots, n\} \ \text{con} \ y_{lj} < 0 \right\}$$

siendo $\bar{c}_j = c_j - c_B^t \, Y_j$ el coste reducido de la variable x_j .

Considerar la nueva base B' obtenida suprimiendo de B la columna a_{B_l} e incorporando la columna a_k. Ir al paso 2.

Los dos problemas siguientes forman un par de problemas duales.

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a.:} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & y^t b \\ \text{s.a.:} & y^t A \leq c^t \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Se puede determinar el problema dual de cualquier problema de Programación Lineal transformando el problema en una de las formulaciones anteriores. Así, si consideramos el problema de minimización en forma estándar

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

se puede formular como un problema de minimización en forma canónica de la siguiente forma

$$\begin{array}{l} \min \quad c^t x \\ \text{s.a.:} \\ \quad Ax \geq b \\ \quad -Ax \geq -b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \min \quad c^t x \\ \text{s.a.:} \\ \quad \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ \quad x \geq 0 \end{array}$$

El dual de este problema es el siguiente problema de maximización en forma canónica:

$$\begin{array}{l} \max \quad u^t b - v^t b \\ \text{s.a.:} \\ \quad (u^t, v^t) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \leq c^t \\ \quad u \geq 0, v \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \max \quad (u-v)^t b \\ \text{s.a.:} \\ \quad (u-v)^t A \leq c^t \\ \quad u \geq 0, v \geq 0 \end{array}$$

Denotando $\lambda \coloneqq u - v$, se obtienen los problemas duales

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ \text{s.a.:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \max & \lambda^t b \\ \text{s.a.:} & \lambda^t A \leq c^t \end{array}$$

Estos dos problemas duales son los que se consideran en la demostración de la validez del Algoritmo Dual del Simplex para resolver un problema de minimización en forma estándar.

Sea x^* solución básica factible óptima del problema de minimización anterior, asociada a la base *B* de la matriz *A*. Sea $\hat{\lambda}$ el vector

$$\hat{\lambda}^t := c_B^t B^{-1}$$

que verifica:

$$c_j - c_B^t B^{-1} a_j \geq 0 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$c_B^t B^{-1} a_j \leq c_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

$$\hat{\lambda}^t a_j \leq c_j \qquad (j = 1, \dots, n)$$

así, $\hat{\lambda}$ es una solución factible del problema dual de maximización. Además se verifica:

$$c^t x^* = c_B^t B^{-1} b = \hat{\lambda}^t b .$$

Por tanto, $\hat{\lambda}$ **es solución óptima del problema dual**.

Método Simplex Dual

En muchas ocasiones, un problema de programación lineal tiene una solución básica, asociada a una base *B*, que no es factible, pero el vector

$$\bar{\lambda}^t := c_B^t B^{-1}$$

es factible para el problema dual. Esto supone, en la tabla del Simplex, tener elementos no negativos en la última fila de la tabla (costes reducido mayores o iguales que cero), pero con una solución básica no factible (alguna variable básica toma un valor negativo). En este caso, se dice que **la solución básica es factible-dual**

En estas situaciones, al disponer de una solución factible para el problema dual, es conveniente pivotar para obtener la solución óptima del problema dual. Es más eficiente operar, al considerar el problema dual, utilizando la tabla primal, que construir una tabla para el problema dual. La técnica en que se basa esta idea es el Método Simplex Dual que, en la tabla del simplex primal, opera manteniendo la condición de optimalidad de los costes reducidos mientras busca la factibilidad primal. Sin embargo, desde el punto de vista del problema dual, mantiene la factibilidad dual mientras busca la optimalidad.

Dado el problema de Programación Lineal, (*P*), en forma estándar:

$$\min \quad c^t x$$

$$\text{s.a.:} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

se supone que se conoce una base *B*, tal que el vector

$$\bar{\lambda}^t := c_B^t B^{-1}$$

es solución factible para el problema dual. En este caso, se dice que la solución básica correspondiente del primal

$$\bar{x}_B = B^{-1}b\,, \quad \bar{x}_N = 0$$

es *factible dual*. Si además $\bar{x}_B \geq 0$, entonces esta solución básica es también factible primal y, por tanto, óptima.

El vector $\bar{\lambda}$ es factible para el problema dual y, por tanto verifica:

$$\bar{\lambda}^t\, a_j \leq c_j \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Si se supone, como es usual, que la base *B* está formada por las *m* primeras columnas de *A*, se tiene:

$$\bar{\lambda}^t\, a_j = c_j \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

$$\bar{\lambda}^t\, a_j \leq c_j \quad \text{para } j = m+1, \dots, n$$

Para ejecutar una iteración del método simplex dual, se halla un nuevo vector $\bar{\bar{\lambda}}$, de forma que una de las igualdades se convierte en desigualdad y una de las desigualdades se convierte en igualdad, a la vez que se incrementa (o iguala) el valor de la función objetivo dual. Las *m* igualdades de la nueva solución determinan una nueva base.

Sea $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{x}_l < 0$. Se denota por u^l la *l*-esima fila de B^{-1} y se considera

$$\bar{\bar{\lambda}}^t = \bar{\lambda}^t - \varepsilon\, u^l \qquad (\varepsilon \geq 0)$$

obteniéndose

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = \bar{\lambda}^t a_j - \varepsilon\, u^l a_j\ .$$

Teniendo en cuenta

$$u^l a_j = y_{lj}$$

Siendo y_{lj}, el *lj*-ésimo elemento de la tabla del simplex, resulta

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = c_j \qquad \text{para } j = 1, \dots, m, j \neq l$$

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_l = c_l - \varepsilon \leq c_l$$

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = \bar{\lambda}^t a_j - \varepsilon\, y_{lj} \quad \text{para } j = m+1, \dots, n$$

Se debe determinar el valor de ε para garantizar la factibilidad dual de $\bar{\bar{\lambda}}$.

Además,

$$\bar{\bar{\lambda}}^t b = \bar{\lambda}^t b - \varepsilon\, \bar{x}_l\ .$$

Puesto que $\bar{x}_l < 0$ $(\varepsilon \geq 0)$, se tiene $\bar{\bar{\lambda}}^t b \geq \bar{\lambda}^t b$.

Para mantener la factibilidad respecto del problema dual, se debe verificar

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j \leq c_j \qquad \text{para} \;\; j = m+1, \dots, n$$

es decir,

$$\bar{\lambda}^t a_j - \varepsilon\, y_{lj} \leq c_j \qquad \text{para} \;\; j = m+1, \dots, n$$

Si $y_{lj} \geq 0$, para $j = m+1, \dots, n$, entonces $\bar{\bar{\lambda}}$ es solución factible del problema dual para todo $\varepsilon > 0$, y por tanto, el problema dual tiene solución no acotada (y el problema primal es infactible).

Si $y_{lj} < 0$, para algún j, debe verificarse:

$$c_B^t\, B^{-1} a_j - \varepsilon\, y_{lj} \leq c_j$$

$$-\varepsilon\, y_{lj} \leq c_j - c_B^t\, B^{-1} a_j$$

$$-\varepsilon\, y_{lj} \leq \bar{c}_j$$

Por tanto, se determina ε como se indica a continuación:

$$\varepsilon = min\left\{ -\frac{\bar{c}_j}{y_{lj}} \;\middle|\; y_{lj} < 0 \right\} = -\frac{\bar{c}_k}{y_{lk}} \; .$$

Se verifica $\bar{\bar{\lambda}}^t a_k = c_k$.

Se considera una nueva base $\bar{B}$, sustituyendo a_l por a_k.

$$\bar{B} = (a_1, \dots, a_{l-1}, a_k, a_{l+1}, \dots, a_m)$$

$$c_{\bar{B}}^t = (c_1, \dots, c_{l-1}, c_k, c_{l+1}, \dots, c_m)$$

Puesto que se verifica:

$$\bar{\bar{\lambda}}^t \bar{B} = c_{\bar{B}}^t$$

se tiene

$$\bar{\bar{\lambda}}^t = c_{\bar{B}}^t\, \bar{B}^{-1}$$

Si la solución básica asociada a la base $\bar{B}$ es factible para el problema primal, es solución óptima de dicho problema. En caso contrario, se ejecuta una nueva iteración del simplex dual.

Método Simplex Dual (maximización)

Si se desea resolver un problema de maximización en forma estándar, se deben considerar los problemas duales

$$\begin{array}{llcll} \max & c^t x & \qquad & \min & \lambda^t b \\ \text{s.a.:} & Ax = b & & \text{s.a.:} & \lambda^t A \geq c^t \\ & x \geq 0 & & & \end{array}$$

Se supone que se conoce una base *B*, tal que el vector

$$\bar{\lambda}^t := c_B^t B^{-1}$$

es solución factible para el problema dual. En este caso, se dice que la solución básica correspondiente del primal

$$\bar{x}_B = B^{-1}b\,, \quad \bar{x}_N = 0$$

es *factible dual*. Si además $\bar{x}_B \geq 0$, entonces esta solución básica es también factible primal y, por tanto, óptima.

El vector $\bar{\lambda}$ es factible para el problema dual y, por tanto verifica:

$$\bar{\lambda}^t a_j \geq c_j \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Si se supone, como es usual, que la base *B* está formada por las *m* primeras columnas de *A*, se tiene:

$$\bar{\lambda}^t a_j = c_j \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

$$\bar{\lambda}^t a_j \geq c_j \quad \text{para } j = m+1, \dots, n$$

Para ejecutar una iteración del método simplex dual, se halla un nuevo vector $\bar{\bar{\lambda}}$, de forma que una de las igualdades se convierte en desigualdad y una de las desigualdades se convierte en igualdad, a la vez que se disminuye (o iguala) el valor de la función objetivo dual. Las *m* igualdades de la nueva solución determinan una nueva base.

Sea $l \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{x}_l < 0$. Se denota por u^l la *l*-esima fila de B^{-1} y se considera

$$\bar{\bar{\lambda}}^t = \bar{\lambda}^t + \varepsilon\, u^l \qquad (\varepsilon \geq 0)$$

obteniéndose

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = \bar{\lambda}^t a_j + \varepsilon\, u^l a_j \ .$$

Teniendo en cuenta

$$u^l a_j = y_{lj}$$

siendo y_{lj}, el *lj*-ésimo elemento de la tabla del simplex, resulta

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = c_j \qquad \text{para} \;\; j = 1, \dots, m, j \neq l$$

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_l = c_l + \varepsilon \geq c_l$$

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j = \bar{\lambda}^t a_j + \varepsilon\, y_{lj} \qquad \text{para} \;\; j = m+1, \dots, n$$

Se debe determinar el valor de ε para garantizar la factibilidad dual de $\bar{\bar{\lambda}}$.

Además,

$$\bar{\bar{\lambda}}^t b = \bar{\lambda}^t b + \varepsilon\, \bar{x}_l \;\; .$$

Puesto que $\bar{x}_l < 0$ $(\varepsilon \geq 0)$, se tiene $\bar{\bar{\lambda}}^t b \leq \bar{\lambda}^t b$.

Para mantener la factibilidad respecto del problema dual, se debe verificar

$$\bar{\bar{\lambda}}^t a_j \geq c_j \qquad \text{para} \;\; j = m+1, \dots, n$$

es decir,

$$\bar{\lambda}^t a_j + \varepsilon\, y_{lj} \geq c_j \qquad \text{para} \;\; j = m+1, \dots, n$$

Si $y_{lj} \geq 0$, para $j = m+1, \dots, n$, entonces $\bar{\bar{\lambda}}$ es solución factible del problema dual para todo $\varepsilon > 0$, y por tanto, el problema dual tiene solución no acotada (y el problema primal es infactible).

Si $y_{lj} < 0$, para algún j, debe verificarse:

$$c_B^t\, B^{-1} a_j + \varepsilon\, y_{lj} \geq c_j$$

$$\varepsilon\, y_{lj} \geq c_j - c_B^t\, B^{-1} a_j$$

$$-\varepsilon\, y_{lj} \leq -\bar{c}_j$$

Por tanto, se determina ε como se indica a continuación:

$$\varepsilon = min\left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{lj}} \;\middle|\; y_{lj} < 0 \right\} = \frac{\bar{c}_k}{y_{lk}} \;\; .$$

Se verifica $\bar{\bar{\lambda}}^t a_k = c_k$.

Se considera una nueva base $\bar{B}$, sustituyendo a_l por a_k.

$$\bar{B} = (a_1, \dots, a_{l-1}, a_k, a_{l+1}, \dots, a_m)$$

$$c_{\bar{B}}^t = (c_1, \dots, c_{l-1}, c_k, c_{l+1}, \dots, c_m)$$

Puesto que se verifica:

$$\bar{\bar{\lambda}}^t \bar{B} = c_{\bar{B}}^t$$

se tiene

$$\bar{\bar{\lambda}}^t = c_{\bar{B}}^t\, \bar{B}^{-1}$$

Si la solución básica asociada a la base $\bar{B}$ es factible para el problema primal, es solución óptima de dicho problema. En caso contrario, se ejecuta una nueva iteración del simplex dual.