ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

CURSO 2020-2021

HOJA 9

1. Determina el número de raíces de las ecuaciones siguientes en los recintos indicados:

a) $z^6 + 9z^4 + z^3 + 2z + 4 = 0$; en el disco $|z| < 1$.
b) $z^5 + z^2 + 1 = 0$; en el disco $|z| < 2$.
c) $2z = 8 + e^{-z}$; en $\operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z > 0$.
d) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$; en el anillo $1 < |z| < 2$.

2. Demuestra que el polinomio $2z^5 + 6z - 1$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 1)$. Halla cuántas raíces tiene en el anillo $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

3. Demuestra que para todos $m, n \in \mathbb{N}$, el polinomio

$$P(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$$

tiene exactamente n raíces en el disco unidad abierto.

4. Sea f una función holomorfa en un entorno del disco $\overline{D}(0; 1)$ tal que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. ¿Cuantos puntos fijos puede tener f en $D(0; 1)$?

5. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de Ω. Demuestra que:

a) Si f no es idénticamente nula y $a \in \Omega$, entonces $f(a) = 0$ si, y solo si, existe una sucesión $(z_n)_n \subset \Omega$ tal que $z_n \to a$ y $f_n(z_n) = 0$ para todo n a partir de un cierto n_0.
b) Si f no es constante y cada f_n es inyectiva, entonces f es inyectiva.

6. En cada uno de los siguientes casos, halla el máximo de $|f|$ en el conjunto A que se indica y los puntos de A donde se alcanzan:

a) $f(z) = e^z, \quad A = \overline{D}(1; 1)$;
b) $f(z) = z^2 + 1, \quad A = \overline{D}(i; 1)$;
c) $f(z) = z^2 + iz - 1, \quad A = \overline{D}(0; 1)$.

7. Sea Ω un subconjunto abierto conexo y acotado de $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$, tal que $|f(z)| = c$ para todo $z \in \partial\Omega$. Demuestra que o f es constante o f tiene un cero en Ω.

8. ¿Existe una función holomorfa del disco $D = D(0; 1)$ en él mismo con $f(1/2) = 3/4$ y $f'(1/2) = 2/3$?

9. Supongamos que f es holomorfa en un entorno del disco $\overline{D}(0; 1)$ y $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$ y supongamos que f tiene un cero simple en $z = \frac{1}{4}(1 + i)$ y un cero doble en $z = \frac{1}{2}$. ¿Puede ser $f(0) = \frac{1}{2}$?

10. Sea f una función holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ con $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Supongamos que existe un a tal que $f(a) = a$, demuestra que $|f'(a)| \leqslant 1$.

11. Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ el semiplano derecho abierto y sea $f : D(0; 1) \to \mathbb{H}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 1$. Demuestra que

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

para todo $z \in D(0; 1)$.

12. Si f es una función holomorfa que no se anula en un abierto Ω, demuestra que la función $u = \log|f|$ es armónica en Ω.

13. Sea u una función armónica en Ω. Sean $a \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$. Demuestra que

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{\overline{D}(a;R)} u(x,y)dxdy$$

14. Sea $f : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Se define u por

$$u(x+iy) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xf(it)}{x^2+(y-t)^2}dt \qquad (x > 0).$$

Demuestra que u es una función armónica acotada en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ tal que para todo $c \in \mathbb{R}$, $f(ic) = \lim_{z\to ic} u(z)$.

15. Sea Ω un abierto simplemente conexo acotado de $\mathbb{C}$ y sea $\varphi_0 : \Omega \to D(0;1)$ una aplicación holomorfa y biyectiva. Supongamos que existe un homeomorfismo φ de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{D}(0;1)$ que extiende φ_0. Demuestra que:

a) $\varphi(\Omega) = D(0;1)$ y $\varphi(\partial\Omega) = C(0;1)$.

b) Si $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, existe una función $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $u(z) = f(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$ y u es armónica en Ω.

16. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ simétrico con respecto al eje real. Si $v : \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \to \mathbb{R}$ es una función continua, armónica en $\{z \in \ \Omega : \ \operatorname{Im} z > 0\}$ y que se anula en $\{z \in: \ \operatorname{Im} z = 0\}$, entonces la función $V : \Omega \to \mathbb{R}$ definida:

$$V(z) = \begin{cases} v(z) & \text{si } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \\ -v(\bar{z}) & \text{si } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

es armónica.

17. (Teorema de Harnack). Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{C}$. Demuestra que:

a) Si (u_n) converge a una función u, uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω, entonces u es armónica en Ω.

b) Si $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots$ entonces o (u_n) converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de Ω o $u_n(z) \to \infty$ para todo $z \in \Omega$.