

Estadística. Grupo m3

Hoja 2. Reducción de datos

1. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x)$. En los siguientes casos, encontrar un estadístico minimal suficiente y completo para θ :
 - (a) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, cuando $x \in (0, 1)$ y $\theta > 0$
 - (b) $f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2}$, cuando $x > 0$ y $\theta > 0$
 - (c) $f_\theta(x) = \theta(\frac{1}{x})^{\theta+1}$, cuando $x > 1$ y $\theta > 0$
 - (d) $f_\theta(x) = \frac{1}{6\theta^4} x^3 e^{-x/\theta}$, cuando $x > 0$ y $\theta > 0$
 - (e) $f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$, cuando $\theta < x < \infty$
 - (f) $f_\theta(x) = \theta^x(1 - \theta)$, cuando $x \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y $0 < \theta < 1$
2. Encontrar un estadístico minimal suficiente y completo en cada uno de los siguientes modelos para una muestra aleatoria de tamaño n .
 - (a) $X \sim \text{Beta}(a, b)$
 - (b) $X \sim \text{Gamma}(a, p)$
 - (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
3. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria de una población $N(\alpha\sigma, \sigma^2)$, donde α es un número real conocido. Probar que $T(X_1, \dots, X_n) = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ es un estadístico suficiente pero no completo para σ .
4. Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria de una población $U(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Probar que $T(X_1, \dots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente pero no completo para θ .