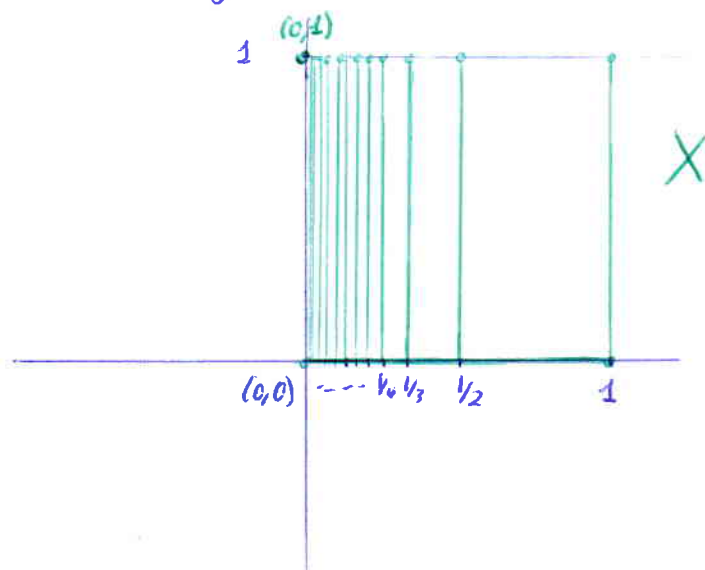


Lista 8

Número 8.11. En \mathbb{R}^2 con la topología usual se considera el subconjunto $X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(\frac{1}{k}, t) : k \geq 1, 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(0,1)\}$.

Demstrar que X es conexo pero no es conexo por caminos.

En primer lugar, hacemos un esbozo del conjunto X .



Veamos que X es un conjunto conexo. Comenzamos denotando por A_n con $n \geq 0$ a los conjuntos

$$A_0 = [0,1] \times \{0\} \quad \text{y} \quad A_n = \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \quad \forall n \geq 1$$

De esta forma podemos escribir X como $X = \bigcup_{n \geq 0} A_n \cup \{(0,1)\}$.

Afirmamos que $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ es un conjunto conexo (conexo por caminos).

Efectivamente, los conjuntos A_n son conexos (conexos por caminos) por ser segmentos en la topología usual y existe un $n_0 = 0$ tal

que $A_0 \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall n \geq 0$ ($A_0 \cap A_n = (\frac{1}{n}, 0) \quad \forall n \geq 1$). Por una de las variantes del Teorema del pivote para conjuntos conexos (conexos por caminos) entonces $\bigcup_{n \geq 0} A_n$ es un conjunto conexo (conexo por caminos).

Supongamos que X no es un conjunto conexo, es decir, existen U, V abiertos no vacíos tales que

$$X \subset U \cup V, \quad X \cap U \neq \emptyset, \quad X \cap V \neq \emptyset, \quad X \cap U \cap V = \emptyset.$$

Tiene que ser $U \cap \bigcup_{n \geq 0} A_n = \emptyset$ o $V \cap \bigcup_{n \geq 0} A_n = \emptyset$ porque si no U y V separarían $\bigcup_{n \geq 0} A_n$, que es conexo. Podemos suponer que $U \cap \bigcup_{n \geq 0} A_n = \emptyset$ así que, como $X \cap U \neq \emptyset$, entonces $X \cap U = \{(0, 1)\}$.

Al ser U un entorno abierto de $(0, 1)$ $\exists \epsilon > 0$ tal que $B((0, 1), \epsilon) \subset U$.

Podemos tomar $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\frac{1}{n_1} < \epsilon$. De esta forma $(\frac{1}{n_1}, 1) \in X \cap U \cap V = \emptyset !!!$ Esto es así ya que

$$(\frac{1}{n_1}, 1) \in A_{n_1} \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n \subset V \subset X \quad \text{y} \quad \|(0, 1) - (\frac{1}{n_1}, 1)\| = \frac{1}{n_1} < \epsilon \Rightarrow (\frac{1}{n_1}, 1) \in B((0, 1), \epsilon) \subset U.$$

La contradicción viene de suponer que X no es un conjunto conexo, luego hemos llegado a nuestro primer objetivo que era probar que X es conexo.

Más rápido: $\bigcup_{n \geq 0} A_n \subset X \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} A_n} \Rightarrow X$ conexo

Para ver que X no es conexo por caminos nos apoyamos en que

$\bigcup_{n \geq 0} A_n$ sí lo es, y por tanto, los "problemas" surgen al añadir el punto $(0, 1)$. Vamos a probar que no existe ningún camino en X de $(0, 1)$ a $(0, 0)$. Supongamos que $\exists \sigma: [0, 1] \rightarrow X$ con $\sigma(0) = (0, 1)$, $\sigma(1) = (0, 0)$ y σ continuo.

Vamos a probar que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es un conjunto no vacío, abierto y cerrado en $[0,1]$ y que no es el total. Que es no vacío, cerrado y propio en $[0,1]$ es inmediato porque $0 \in \sigma^{-1}(\{(0,1)\}) (\Leftrightarrow \sigma(0) = (0,1))$, $1 \notin \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ ($\sigma(1) = (0,0) \neq (0,1)$) y $\{(0,1)\}$ es cerrado y σ continua. Luego $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es cerrado.

Para ver que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es abierto sea $x \in \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ y vamos a encontrar U^x entorno abierto de x con $U^x \subset \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$.

Consideramos $V^{(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto de $(0,1)$ con la restricción de que $V^{(0,1)}$ no corta al eje de abscisas. Como σ es continua entonces $\sigma^{-1}(V^{(0,1)})$ es un abierto y contiene a x ya que $\sigma(x) = (0,1) \in V^{(0,1)}$. Por tanto, $\exists U^x$ intervalo abierto que contiene a x y contenido en $\sigma^{-1}(V^{(0,1)})$. Queremos probar que $U^x \subset \sigma^{-1}(\{(0,1)\}) \Leftrightarrow \sigma(U^x) = \{(0,1)\}$.

Supongamos que no, es decir, $\exists y \in U^x$ tal que $\sigma(y) \neq (0,1)$ y como $U^x \subset \sigma^{-1}(V^{(0,1)})$, entonces $\sigma(y) \in V^{(0,1)}$, luego $\sigma(y)$ no está en el eje X por como hemos construido $V^{(0,1)}$. Entonces será de la forma $\sigma(y) = (\frac{1}{n}, t)$ con $n \geq 1$, $t \in (0,1]$. Podemos entonces elegir $r \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ para probar que los conjuntos $(-\infty, r) \times \mathbb{R}$ y $(r, \infty) \times \mathbb{R}$ separan $\sigma(U^x)$. En efecto, ambos son abiertos no vacíos y $(0,1) \in \sigma(U^x) \cap (-\infty, r) \times \mathbb{R}$, $\sigma(y) \in \sigma(U^x) \cap (r, \infty) \times \mathbb{R}$ y $\sigma(U^x) \cap (-\infty, r) \times \mathbb{R} \cap (r, \infty) \times \mathbb{R} = \emptyset$. Sin embargo, $\sigma(U^x)$ es conexo por ser la imagen continua de un intervalo,

que es un conjunto conexo. Esta contradicción viene de suponer que $\sigma(U^*) \not\subset \{(0,1)\}$ luego queda probado que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es abierto, cerrado, no vacío y propio en $[0,1]$. Esto también es una contradicción porque $[0,1]$ es conexo. Esta contradicción viene de suponer que existe un camino en X de $(0,1)$ a $(0,0)$, lo cual es falso y podemos entonces concluir que X no es conexo por caminos. **bien redactado**

Número 8.9. Se considera en $\mathbb{R}^{m \times n}$ el subconjunto S de las matrices $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, que tienen las columnas distintas: $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$. Estudiar si S es conexo por caminos.

Empezamos mostrando que el resultado dependerá de m y n con estos dos ejemplos.

Si $m=n=1$ entonces $S = \mathbb{R}$, que es conexo por caminos.

Si $n=2$ y $m=1$ entonces $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2\} \subset \mathbb{R}^2$ que no es conexo porque los abiertos $U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_2\}$, $V = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$ separan S . En particular S no es conexo por caminos.

Por tanto no podemos afirmar que $\forall m, n \geq 1$ entonces S es conexo por caminos ni que $\forall m, n \geq 1$ entonces S no es conexo por caminos.

Podemos realizar la siguiente distinción de casos:

a) $n=1$, $m \geq 1$. Entonces $S = \mathbb{R}^m$ que es conexo por caminos.

b) $n \geq 2, m = 1$. En este caso $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \forall i \neq j\} =$
 $= \bigcap_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j\} = \bigcap_{i \neq j} \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\}$

Veamos que $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < x_2\}$ y $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > x_2\}$ son dos conjuntos abiertos que separan S . Claramente $U \neq \emptyset \neq V$ y ambos son abiertos porque si consideramos la función continua

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{entonces } U = f^{-1}((-\infty, 0)) \text{ y } V = f^{-1}(0, \infty)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_1 - x_2$$

que son preimágenes continuas de abiertos y, por tanto, abiertos.

Por otro lado $U \cap V = \emptyset \Rightarrow S \cap U \cap V = \emptyset$ y

$$(1, 2, 3, 4, \dots, n) \in S \cap U \neq \emptyset$$

$$(2, 1, 3, 4, \dots, n) \in S \cap V \neq \emptyset.$$

Finalmente $S \subset U \cup V$ porque si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ en particular $x_1 \neq x_2$ así que $x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$.

Esto prueba que S no es conexo y, en particular, no es conexo por caminos. **bien**

c) $n \geq 2, m \geq 2$. Proponemos un algoritmo que construye explícitamente un camino en S , más concretamente será una poligonal, que une dos matrices. $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}$ en S .

Introducimos la notación

$$\bar{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{m-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ y } \bar{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{m-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ con lo que las matrices}$$

X e Y las podemos escribir como

$$X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ahora elegimos $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}$ con $i=1, \dots, n$ de la siguiente manera:

Para $i=1$, consideramos $A_1 = \{x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}\}$ y renombramos todos los elementos menos x_{m1} de tal forma que

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_k, x_{m1}, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}\} \text{ cumpliendo } a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq x_{m1} < a_{k+1} \leq \dots \leq a_{k+l}.$$

Entonces tomamos $\tilde{x}_1 \in (x_{m1}, a_{k+1})$. (Si $l=0$ $\tilde{x}_1 \in (x_{m1}, \infty)$).

Con esta elección caprichosa conseguimos que el segmento que une X con

$$X_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \text{ esté contenido en } S \left(\begin{array}{c} \sigma_1: [0,1] \longrightarrow S \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ t\tilde{x}_1 + (1-t)x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ (x_{m1}, a_{k+1}) \forall t \in (0,1) \\ \downarrow \\ \sigma_1(t) \in S \forall t \in [0,1] \end{array} \right)$$

(La primera columna es distinta a las demás porque la última coordenada de lo es $\forall t \in (0,1]$ y $\sigma_1(0) = X \in S$)

Además $\tilde{x}_1 \neq y_{mj} \forall j=1, \dots, n$ y $\tilde{x}_1 \neq x_{mj} \forall j=1, \dots, n$.

Para $i \geq 2$, consideramos $A_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{i-1}, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}, y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}\}$ y renombramos todos los elementos menos x_{m1} de tal forma que

$$A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_k, x_{m1}, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}\} \text{ cumpliendo } a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq x_{m1} < a_{k+1} \leq \dots \leq a_{k+l}.$$

Entonces tomamos $\tilde{x}_i \in (x_{m1}, a_{k+1})$. Con esta elección conseguimos que el segmento que une X_{i-1} con $X_i = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_i & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_i & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ esté contenido en S .

$$\sigma_i: [0,1] \longrightarrow S$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_i & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & t\tilde{x}_i + (1-t)x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

(Las columnas que notamos siguen siendo distintas entre sí y la columna i -ésima es distinta a las demás $\forall t \in [0,1]$)

$\Rightarrow \sigma_i(t) \in S \forall t \in [0,1]$

Con esta construcción podemos concatenar los segmentos de tal forma que empecemos en X y terminemos en X_n

$$X = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_1} X_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_2} X_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_n} X_n = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, por construcción, $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j \quad \forall i \neq j$ y $\tilde{x}_i \neq y_{mj} \quad \forall i, j \in \{1 \dots n\}$

Ahora consideramos las matrices $Z_i = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_{i-1} & \bar{y}_i & \bar{x}_{i+1} & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_{i-1} & \tilde{x}_i & \tilde{x}_{i+1} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad \forall i=1 \dots n.$

Como $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j \quad \forall i \neq j$ entonces el segmento que une Z_{i-1} con Z_i está contenido en $S \quad \forall i=1 \dots n$ ($Z_0 = X_n$):

$$\begin{aligned} \gamma_i: [0,1] &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \dots & t\bar{y}_i + (1-t)\bar{x}_i & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & & \tilde{x}_i & & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{La columna } i\text{-ésima es} \\ \text{diferente a todas las demás} \\ \text{por ser } \tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j \quad \forall i \neq j \\ \forall t \in [0,1] \text{ y las otras} \\ \text{ya eran distintas entre sí.} \end{array} \right)$$

Así podemos unir con segmentos Z_1

$$\begin{aligned} X_n = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} &\xrightarrow{\gamma_1} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \dots \xrightarrow{\gamma_n} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} = Z_n \end{aligned}$$

Para llegar a $Y = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}$ faltaría únicamente cambiar

las \tilde{x}_i por y_{mi} pero debemos hacerlo con cuidado y asegurándonos de que no nos salimos de S .

Realizamos una construcción similar a las de los \bar{x}_i pero esta vez para los \bar{y}_i .

Para cada $i=1 \dots n$ construimos $y_i^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ de tal forma que todas las coordenadas de y_i^* son iguales a las de \bar{y}_i salvo la primera que la denotamos por \tilde{y}_i y la elegimos de manera especial.

Consideramos $B_i = \{\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \dots, \bar{y}_{i1}, \dots, \bar{y}_{in}\}$ siendo \bar{y}_{i1} la primera coordenada de \bar{y}_i y renombramos los elementos del conjunto menos \bar{y}_{i1} para que $B_i = \{b_1, b_2, \dots, b_k, \bar{y}_{i1}, b_{k+1}, \dots, b_{k+l}\}$ con

$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \bar{y}_{i1} < b_{k+1} \leq \dots \leq b_{k+l}$. Elegimos $\tilde{y}_i \in (\bar{y}_{i1}, b_{k+1})$ para

que $\alpha_i: [0,1] \rightarrow S$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \tilde{y}_i + t(\bar{y}_i - \tilde{y}_i) & \dots & \bar{y}_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_i & \dots & z_n \end{pmatrix} \text{ sea un segmento en } S.$$

$\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ y cuando $\alpha_i(0) \in S$. Esto es así porque la columna i -ésima de $\alpha_i(t)$ es distinta a todas las demás $\forall t \in (0,1]$ porque se distinguen en la primera coordenada. Lo mismo sucede para el segmento recorrido en sentido contrario que podemos llamar β_i y que verifica $\beta_i(t) \in S \forall t \in [0,1)$.

Con estas consideraciones y partiendo desde Z_n

$$\begin{aligned} Z_n &= \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_1} \begin{pmatrix} y_1^* & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_1} \begin{pmatrix} y_1^* & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_2} \\ &\xrightarrow{\beta_2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & y_2^* & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & y_2^* & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_2} \\ &\xrightarrow{\beta_2} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_n \\ y_{1m} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix} = Y \end{aligned}$$

donde d_i son los segmentos que unen las matrices

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \dots & y_i^* & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \dots & \tilde{x}_i & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \dots & y_i^* & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \dots & y_{mi} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{y que están contenidas}$$

en S porque $\forall t \in [0,1]$ la columna i -ésima de $d_i(t)$ es distinta a todas las demás porque se distingue en la primera coordenada.

Únicamente falta por probar que $\alpha_i(0) \in S$ y $\beta_i(1) \in S$.

$$\alpha_i(0) = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_{i-1} & \bar{y}_i & \bar{y}_{i+1} & \dots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \dots & y_{m,i-1} & \tilde{x}_i & \tilde{x}_{i+1} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{pertenece a } S \text{ porque las primeras}$$

$i-1$ se distinguen entre sí porque $Y \in S$ y las otras columnas se distinguen cada una de todas las demás en la última coordenada porque $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j \quad \forall i \neq j$ y $\tilde{x}_i \neq y_{mj} \quad \forall j = 1 \dots n$.

$\beta_i(1) = \alpha_m(0)$ luego está en S .

Por tanto, dadas $X, Y \in S$ hemos construido una poligonal en S que une X e Y concatenando los segmentos como hemos ido explicando.

Esto prueba que S es conexo por caminos.

En resumen, S es conexo por caminos si $n=1$ y $m \geq 1$ o si $n \geq 2$ y $m \geq 2$ y no es conexo por caminos si $n \geq 2$ y $m=1$.

bien, muy trabajada la construcción, no falta detalle. Al final todo se resume en: coge el segmento como camino, si se sale de S dale una pequeña patada (del estilo $x_i \mapsto \tilde{x}_i$) para volver a meter dentro.