**ENTREGA 3. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES. 2021/2022.**
**E. FERNÁNDEZ Y J. M. SANJURJO.**

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta orientada con aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. En este problema vamos a probar que $S$ tiene, al menos, un punto elíptico; i.e. un punto con curvatura de Gauss positiva.

(i) Probar que la función $h : S \to \mathbb{R}, p \mapsto ||p||^2$; tiene, al menos, un máximo.
(ii) Sea $p_0 \in S$ un máximo de $h$, con $p_0 \neq 0$. Demostrar que $N(p_0) = \pm\frac{1}{||p_0||}p_0$.
(iii) Sean $p_0 \in S$ un máximo de $h$ y $\alpha : I \to S$ una curva PPA regular con $\alpha(0) = p_0$. Demostrar que

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle \alpha, \alpha \rangle_{|t=0} \leq 0.$$

(iv) Deducir que $S$ tiene al menos un punto elíptico.