El Teorema de Karlin-Rubin nos dice que el test UMP para contrastar $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ es

$$\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x_1 \dots x_n) \leq K \\ 0 & \text{si } T(x_1 \dots x_n) > K \end{cases} \quad \text{con}$$

$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta[\phi(X_1 \dots X_n)]$ el tamaño.

En nuestro caso esto se traduce en

$$\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq K \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 > K \end{cases} \quad \text{con } \alpha = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(X_1 \dots X_n)]$$

$$\sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{E_{\sigma^2}[\phi(X_1 \dots X_n)]\} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{P_{\sigma^2}\{\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq K\}\} =$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{P\{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \leq \frac{K}{\sigma^2} \mid \sigma^2\}\} \underset{\uparrow}{=}$$

$\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ por ser $X_i \sim N(0,\sigma)$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{F_{\chi_n^2}(\frac{K}{\sigma^2})\}.$$

Como $F_{\chi_n^2}$ es una función creciente, alcanza el máximo en un conjunto en el supremo del conjunto, es decir, en el máximo de $\{\frac{K}{\sigma^2} \mid \sigma^2 \geq \sigma_0^2\}$. Este cociente es máximo cuando el denominador es mínimo, es decir, cuando $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Por tanto $\alpha = F_{\chi_n^2}(\frac{K}{\sigma_0^2})$.