Investigación Operativa

Hoja 2

Problema 1

a) Determinar los puntos extremos del siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^4$.

$$S = \{x \in R^4 |\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\ x_1 + x_2 - x_4 = 1;\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4\}.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se denota: $B_{ij} = (a_i,\ a_j)$.

A continuación se determinan las bases asociadas a soluciones básicas factibles.

$$B_{12}^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B_{13}^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$B_{14}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$B_{23}^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$B_{24}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

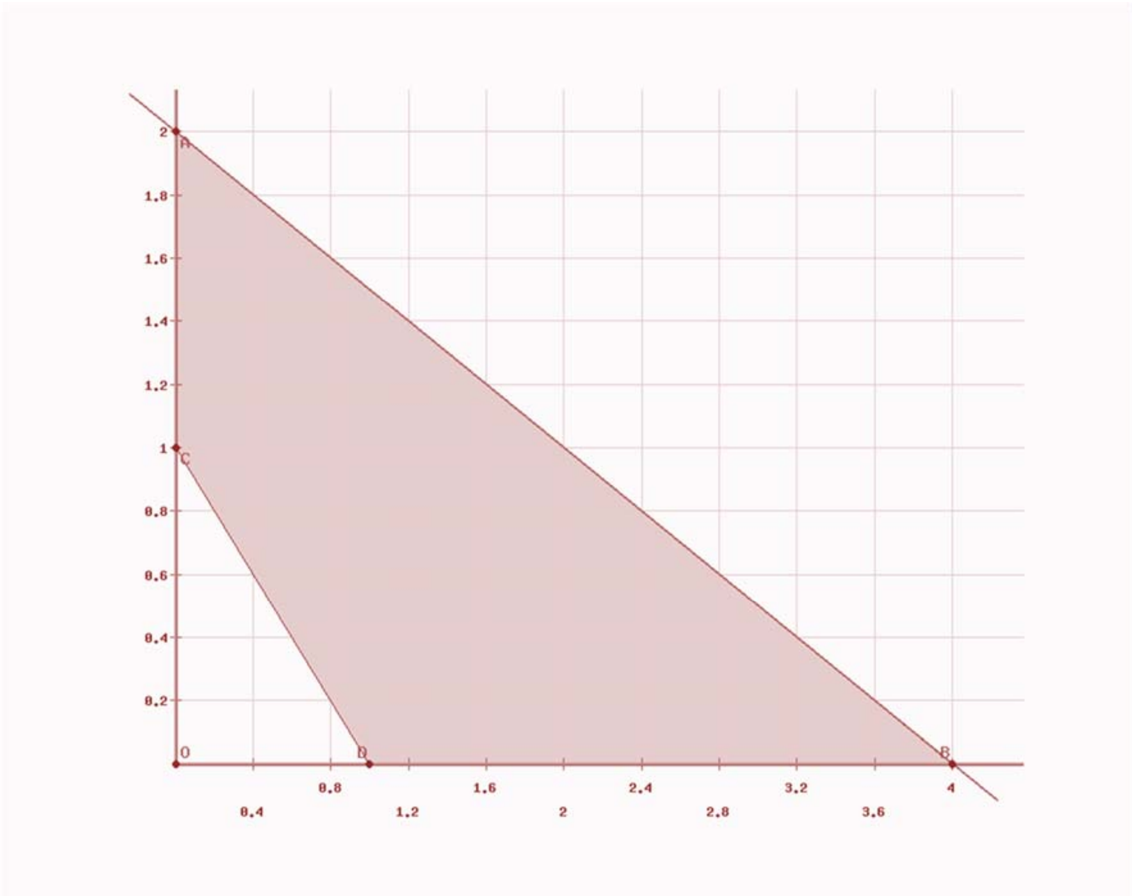
$$B_{34}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El conjunto S tiene cuatro puntos extremos correspondientes a las cuatro soluciones básicas factibles identificadas.

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se representa a continuación el conjunto

$$\bar{S} = \{x \in R^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1 + x_2 \geq 1;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$



b) Determinar los puntos extremos y las direcciones extremas del siguiente subconjunto de $\mathbf{R}^4$.

$$S = \{x \in R^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 5,\ x_1 + x_2 - x_4 = 2;\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4\}$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se denota: $B_{ij} = (a_i,\ a_j)$.

A continuación se determinan las bases asociadas a soluciones básicas factibles, de forma similar al apartado anterior.

$$B_{13}^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$B_{14}^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$B_{23}^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

El conjunto S tiene tres puntos extremos correspondientes a las tres soluciones básicas factibles identificadas.

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se identifican a continuación las direcciones extremas:

$$B_{12}^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$B_{14}^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{23}^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{24}^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B_{24}^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

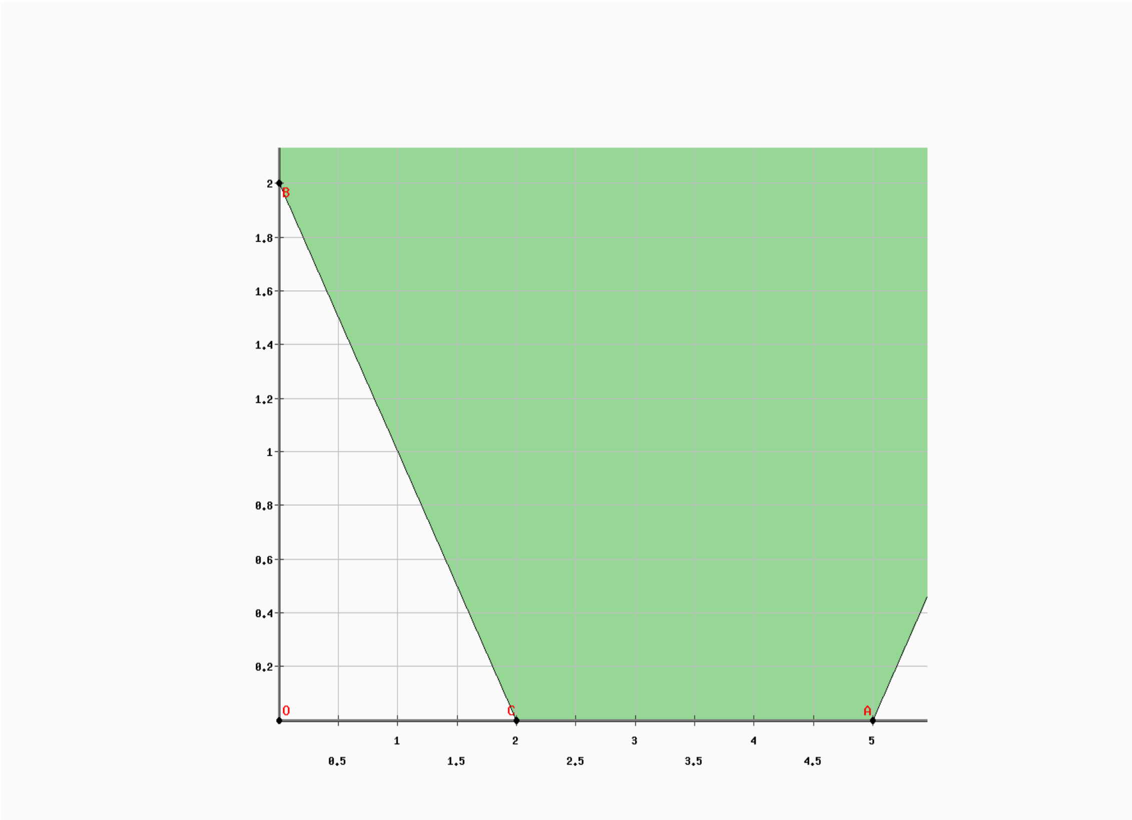
$$B_{34}^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El conjunto S tiene dos direcciones extremas:

$$d^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se representa a continuación el conjunto

$$\bar{S} = \{x \in R^2 \mid x_1 - x_2 \leq 5,\ x_1 + x_2 \geq 2;\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\,\}$$



Investigación Operativa

Hoja 2

Problema 2

Una refinería de petróleo va a producir un nuevo tipo de gasolina mezclando cuatro tipos de gasolina que están compuestos por tres aditivos *A*, *B*, *C*. La siguiente tabla contiene el porcentaje de dichos aditivos en cada tipo de gasolina y el precio unitario de cada tipo de gasolina:

		Porcentaje de *A*	Porcentaje de *B*	Porcentaje de *C*	Precio
Tipo de gasolina	1	80	10	10	43
	2	30	30	40	31
	3	70	10	20	47
	4	40	50	10	37

Debido a las exigencias del mercado, la nueva gasolina deberá estar compuesta por al menos un 60% del aditivo *A* y a lo sumo un 30% del aditivo *C*.

Modelizar el problema a resolver para que la empresa consiga minimizar el coste de la nueva gasolina..

Solución

Se denota por x_j la cantidad de gasolina del tipo *j* en una cantidad unitaria de la mezcla $(j = 1,2,3,4)$ $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1)$.

Se debe resolver el siguiente problema:

$$\min \quad z = 43\,x_1 + 31\,x_2 + 47x_3 + 37x_4$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$\frac{80}{100}x_1 + \frac{30}{100}\,x_2 + \frac{70}{100}\,x_3 + \frac{40}{100}\,x_4 \geq \frac{60}{100}$$

$$\frac{10}{100}x_1 + \frac{40}{100}\,x_2 + \frac{20}{100}\,x_3 + \frac{10}{100}\,x_4 \leq \frac{30}{100}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

Solución óptima:

$$z^* = 38{,}20$$

$$x_1^* = \frac{3}{5} = 0{,}60 \qquad x_2^* = \frac{2}{5} = 0{,}40 \qquad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 0$$

$$x_5^* = 0 \qquad x_6^* = \frac{8}{100} = \ 0{,}08$$

Siendo x_5 y x_6 las variables de holgura.

Problema 3

El propietario de un supermercado adquiere el aceite de oliva directamente del fabricante el primer día de cada mes. En la siguiente tabla se indica el precio de compra de cada litro de aceite y el precio de venta en el supermercado durante los cuatro próximos meses (expresados en euros), así como la demanda de este producto (expresada en litros):

Mes	Precio de compra	Precio de venta	Demanda
1	1.7	2.3	400
2	1.5	2.4	300
3	1.8	2.5	300
4	1.4	2.6	800

El abastecimiento del supermercado tiene lugar el primer día de cada mes, y las existencias de aceite han de coincidir con la cantidad que va a ser demandada durante ese mes. Por este motivo, si la cantidad de aceite que posee el propietario del supermercado es superior a la cantidad que va a ser demandada, deberá llevar el resto del aceite a un almacén.

Suponiendo que inicialmente el almacén está vacío, que su capacidad es de 500 litros de aceite y que al finalizar el cuarto mes deben quedar almacenados 100 litros, modelizar el problema a resolver para que la empresa consiga maximizar su beneficio.

Solución

Se denota por x_j el número de litros de aceite que deberá adquirir el propietario del supermercado el primer día del mes j ($j = 1,2,3,4$).

Se debe resolver el siguiente problema:

$$\min \quad z = 1.7\,x_1 + 1.5\,x_2 + 1.8\,x_3 + 1.4\,x_4$$

sujeto a:

$$x_1 - x_5 = 400$$

$$x_2 + x_5 - x_6 = 300$$

$$x_3 + x_6 - x_7 = 300$$

$$x_4 + x_7 = 900$$

$$x_1 \geq 0,\;\; x_2 \geq 0,\;\; x_3 \geq 0,\;\; x_4 \geq 0$$

$$0 \leq x_5 \leq 500,\;\; 0 \leq x_6 \leq 500,\;\;\; 0 \leq x_7 \leq 500$$

Solución óptima:

$$z^* = 2840$$

$$x_1^* = 400 \qquad x_2^* = 600 \qquad x_3^* = 0 \qquad x_4^* = 900$$

$$x_5^* = 0 \qquad x_6^* = 300 \qquad x_7^* = 0$$

HOJA 2

EJERCICIO 4

Problema 4

Una compañía textil tiene tres tipos de máquinas procesadoras de tejido. Cada uno de estos tipos de máquina tiene una velocidad y una precisión en el procesado de los tejidos, que se miden por el número de piezas procesadas por hora y el porcentaje de piezas correctamente procesadas.

El coste total asociado a cada uno de los tipos se puede evaluar en unidades monetarias por cada hora. Estos datos se recogen en la tabla adjunta:

		Velocidad	Precisión	Coste
Tipo de máquina	1	**30 p/h**	**90%**	**2.00**
	2	**20 p/h**	**95%**	**1.75**
	3	**10 p/h**	**100%**	**1.50**

Para cada jornada diaria de 8 horas, se solicitan 3500 piezas de tejido y hay disponibles 8 máquinas del tipo 1, 10 del tipo 2 y 20 del tipo 3.

a) ¿Cuántas máquinas de cada tipo interesa utilizar para minimizar el coste?. Se supone que la precisión indica exactamente el número de piezas procesadas correctamente.

b) Responder a la cuestión anterior, si se considera que cada error cometido al procesar incorrectamente un tejido le supone un coste de una unidad monetaria a la compañía.

Solución

Se denota por x_j el número de máquinas del tipo j que se deben utilizar en cada jornada de 8 horas ($j = 1,2,3$).

a)

Se considera la función objetivo que indica el coste de cada hora de trabajo:

$$\min \quad z = 2\,x_1 + 1.75\,x_2 + 1.50\,x_3$$

Se debe resolver el siguiente problema

$$\min \quad z = 2\,x_1 + 1.75\,x_2 + 1.50\,x_3$$

sujeto a:

$$8\left[\left(\frac{90}{100}\right)30x_1 + \left(\frac{95}{100}\right)\,20x_2 + 10x_3\right] \geq 3500 \qquad (*)$$

$$0 \leq x_1 \leq 8$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 20$$

$$x_1, \quad x_2 \;\; y \;\; x_3 \quad \text{enteros}$$

$$\left((*) \qquad 216\,x_1 + 152\,x_2 + 80\,x_3 \;\geq 3500\,\right)$$

Solución óptima:

$$z^* = 39{,}50$$

$$x_1^* = 8 \qquad x_2^* = 10 \qquad x_3^* = 4$$

$$x_4^* = 68 \qquad x_5^* = 0 \qquad x_6^* = 0 \qquad x_7^* = 16$$

Siendo x_4, x_5, x_6 y x_7 las variables de holgura.

b)

Se modifica la función objetivo que indica el coste de cada hora de trabajo, incorporando el coste debido a los errores cometidos en el procesamiento de los tejidos:

$$\min \quad z = 2\,x_1 + 1.75\,x_2 + 1.50\,x_3 + \left(\frac{10}{100}\right)30x_1 + \left(\frac{5}{100}\right)\,20x_2$$

$$= 5\,x_1 + 2.75\,x_2 + 1.50\,x_3$$

Se debe resolver el siguiente problema

$$\min \quad z = 5\,x_1 + 2.75\,x_2 + 1.50\,x_3$$

sujeto a:

$$8\left[\left(\frac{90}{100}\right)30x_1 + \left(\frac{95}{100}\right)\,20x_2 + 10x_3\right] \geq 3500 \qquad (*)$$

$$0 \leq x_1 \leq 8$$

$$0 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 20$$

$$x_1, \quad x_2 \;\; y \;\; x_3 \quad \text{enteros}$$

$$\left((*) \qquad 216\,x_1 + 152\,x_2 + 80\,x_3 \;\geq 3500\,\right)$$

Solución óptima:

$$z^* = 67{,}50$$

$$x_1^* = 2 \qquad x_2^* = 10 \qquad x_3^* = 20$$

$$x_4^* = 52 \qquad x_5^* = 6 \qquad x_6^* = 0 \qquad x_7^* = 0$$

Siendo x_4, x_5, x_6 y x_7 las variables de holgura.