Juan Carlos Llamas Núñez   3º DG Mat-Inf.

Entrega 1

1.- Una matriz de la forma:

$$P^{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i) & & j) & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}$$

se denomina matriz de permutación de las líneas i y j.

Si $B = (b_{kl})_{k,l=1}^{n}$ comprobar que:

i) $(P^{ij}B)_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si } k \neq i,j \quad l = 1 \dots n \\ b_{jl} & \text{si } k = i \quad l = 1 \dots n \\ b_{il} & \text{si } k = j \quad l = 1 \dots n \end{cases}$, es decir, que al multiplicar la matriz B a la izquierda por P^{ij} se intercambian las filas i y j de B

ii) $(BP^{ij})_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si } l \neq i,j \quad k = 1 \dots n \\ b_{kj} & \text{si } l = i \quad k = 1 \dots n \\ b_{ki} & \text{si } l = j \quad k = 1 \dots n \end{cases}$, es decir, que al multiplicar la matriz B a la derecha por P^{ij} se intercambian las columnas i y j de B

iii) $\det(P^{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

iv) $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

En primer lugar nos interesa identificar quién es el elemento (l,k) de P^{ij} y es fácil ver que

$$(P^{ij})_{kl} \overset{(1)}{=} \begin{cases} \delta_{kl} & \text{si } k \neq i,j \text{ (Fuera de las filas } i,j \text{ la matriz es como la identidad)} \\ \delta_{jl} & \text{si } k = i \text{ (En la fila } i\text{-ésima solo vale 1 el elemento de la columna } j) \\ \delta_{il} & \text{si } k = j \text{ (En la fila } j\text{-ésima solo vale 1 el elemento de la columna } i) \end{cases}$$

Alternativamente, si miramos la matriz P^{ij} por columnas en vez de por filas tenemos que:

$$(P^{ij})_{kl} \overset{(2)}{=} \begin{cases} \delta_{kl} & \text{si } l \neq i,j \\ \delta_{kj} & \text{si } l = i \\ \delta_{ki} & \text{si } l = j \end{cases}$$

Con esto podemos resolver i) y ii):

i)

$$(P^{ij}B)_{kl} = \sum_{m=1}^{n} (P^{ij})_{km} b_{ml} \overset{(1)}{=} \begin{cases} \sum_{m=1}^{n} \delta_{km} b_{ml} = b_{kl} & \text{si } k \neq i,j;\ l = 1 \ldots n \\ \sum_{m=1}^{n} \delta_{jm} b_{ml} = b_{jl} & \text{si } k = i,\ l = 1 \ldots n \\ \sum_{m=1}^{n} \delta_{im} b_{ml} = b_{il} & \text{si } k = j,\ l = 1 \ldots n \end{cases}$$

ii)

$$(BP^{ij})_{kl} = \sum_{m=1}^{n} b_{km} (P^{ij})_{ml} \overset{(2)}{=} \begin{cases} \sum_{m=1}^{n} b_{km} \delta_{ml} = b_{kl} & \text{si } l \neq i,j,\ k = 1 \ldots n \\ \sum_{m=1}^{n} b_{km} \delta_{mj} = b_{kj} & \text{si } l = i,\ k = 1 \ldots n \\ \sum_{m=1}^{n} b_{km} \delta_{mi} = b_{ki} & \text{si } l = j,\ k = 1 \ldots n \end{cases}$$

Veamos ahora iii)

Si $i=j$ entonces $P^{ij} = Id$ y $\det(P^{ij}) = \det(Id) = 1$

Si $i \neq j$ entonces podemos ver P^{ij} como la matriz identidad a la que le hemos intercambiado la fila i-ésima por la j-ésima, lo cual sabemos, por las propiedades de los determinantes, que supone multiplicar el valor del determinante por -1, es decir, $\det(P^{ij}) = -\det(Id) = -1$.

Otra forma de verlo sería desarrollar el determinante por las filas (alternativamente por columnas) distintas de i y de j con lo que quedaría $\det(P^{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Por último, para ver iv) basta aplicar i) (o ii)) con la matriz $B = P^{ij}$. Por lo visto en i) al multiplicar ... P^{ij} (que hace el papel de B) a la izquierda por P^{ij} se intercambian las columnas i y j de P^{ij}.
Esto es $P^{ij} \cdot P^{ij} = Id \iff (P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

2.- Se considera una matriz del tipo

$$E_K = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ 0 & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_n \qquad \text{con } k \in \{1 \cdots n-1\}.$$

Demostrar que E_K puede escribirse en la forma $E_K = Id + l_K e_K^T$ siendo e_K el K-ésimo vector de la base canónica y $l_K = \begin{array}{c} \\ \\ k) \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{pmatrix}$.
Probar que E_K es inversible y su inversa es

$(E_K)^{-1} = Id - l_K e_K^T$.

Veamos que $E_K = Id + l_K e_K^T$.   Nótese que $l_K \in M_{n\times 1}$ y $e_K^T \in M_{1\times n}$ luego $l_K e_K^T \in M_n$

$$(l_K e_K^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{1} (l_K)_{i1} (e_K^T)_{1j} = (l_K)_{i1} \cdot (e_K)_{j1} = (l_K)_{i1} \cdot \delta_{Kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq K \text{ o } i \geq k \\ l_{i+1,k} & \text{si } j = K \text{ e } i < k \end{cases}$$

es decir, $l_K e_K^T = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} k) \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & \cdots & 0 \\ & l_{k+1,k} & & \\ 0 & l_{nk} & & 0 \end{pmatrix} \end{array} k)$ luego, efectivamente,

$$E_K = Id + l_K e_K^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{k)} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & & l_{k+1,k} & 0 \\ & & l_{nk} & 0 \end{pmatrix}_{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & 1 & \\ & & l_{k+1,k} & \ddots \\ 0 & & l_{nk} & 0 \quad 1 \end{pmatrix}$$

Lo segundo es inmediato de la igualdad anterior:

$$E_K(Id - l_K e_K^T) = (Id + l_K e_K^T)(Id - l_K e_K^T) = Id - \cancel{l_K e_K^T} + \cancel{l_K e_K^T} - (l_K e_K^T)(l_K e_K^T) =$$

$$= Id - l_K \underbrace{(e_K^T l_K)}_{0} e_K^T = Id \iff (E_K)^{-1} = Id - l_K e_K^T$$

porque $(e_k^T \ell_k)_{11} = \sum_{\ell=1}^{n} (e_k^T)_{1\ell} (\ell_k)_{\ell 1} = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{\ell k} (\ell_k)_{\ell 1} = (\ell_k)_{k1} = 0$

3.- Probar que si $A \in M_n$ es una matriz de diagonal estrictamente dominante entonces todos sus menores principales son no nulos.

Recordamos que esta propiedad significa que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1 \ldots n.$$

Vamos a probar que si A es de diagonal estrictamente dominante entonces es inversible, es decir, su determinante es distinto de 0. Con este resultado basta ver que toda submatriz principal de una matriz de diagonal estrictamente dominante es de diagonal estrictamente dominante.

Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante y supongamos que no es inversible, es decir, $\exists z \neq 0$ tal que $Az = 0$.

Entonces $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n.$

Sea $|z_{i_0}| = \max\{|z_i| : i \in \{1 \ldots n\}\}$.

Cuando $i = i_0$ $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} z_j = 0 \iff a_{i_0 i_0} z_{i_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}} a_{i_0 j} z_j = 0$

$\iff a_{i_0 i_0} z_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} z_j$ y tomando módulos

$$|a_{i_0 i_0} z_{i_0}| = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}} a_{i_0 j} z_j\right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}||z_j| \leq |z_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}| < |z_{i_0}||a_{i_0 i_0}|$$

lo que nos lleva a contradicción tras haber supuesto que A no es inversible.

Hemos probado que si A es de diagonal estrictamente dominante entonces su determinante es no nulo.

Sea B una submatriz principal de una matriz A de diagonal estrict. dominante. Si probamos que B es también de diagonal estrictamente dominante entonces $\det(B) \neq 0$ (por el resultado anterior), pero $\det(B)$ no es otra cosa que un menor principal de A. Como esto vale para cualquier submatriz principal se seguiría el resultado.

Pero esto es claro porque, por ser B una submatriz principal,

$$B = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & & a_{i_p i_p} \end{pmatrix} \in M_p \quad \text{si } A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \text{ con}$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$$

y si $j \in \{1 \cdots p\}$

$$|b_{jj}| = |a_{i_j i_j}| \overset{\text{A de diag. estr. dom.}}{>} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_j}}^{n} |a_{i_j k}| \geq \overbrace{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} |a_{i_j i_k}|}^{\text{Menos sumandos}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} |b_{jk}|$$

luego queda probado el resultado.