SEMANTICA EXTENSIONAL DEL WHILE

Def: Para cada estado inicial s_0, definimos la sucesión de iteración del bucle while b do S, como la sucesión que comienza en s_0 e inductivamente continúa con s_{i+1} detrás de s_i sii $\langle S, s_i \rangle \longrightarrow s_{i+1}$, terminando en un s_i que forme parte de ella si no existe un tal s_{i+1}.

Decimos que la sucesión converge a s_k si k es el menor i para el que $\mathcal{B}[\![b]\!]s_k = ff$. Cuando exista, denotaremos dicho k como $it_{s,b}$.

Observación: Podemos definir la secuencia tanto bajo la sem. op. de paso corto, usando $\langle S, s_i \rangle \Rightarrow^* s_{i+1}$; como bajo la sem. denot., usando $S_{ds}[\![S]\!]s_i = s_{i+1}$.

Tma: $\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \rightarrow s_{it_{s,b}}$.

Observación: Dado que la sem. de While es determinista, el enunciado anterior nos dice simultaneamente que:

"$\Rightarrow$" $\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \rightarrow s' \Rightarrow it_{s,b}$ está definido y $s' = s_{it_{s,b}}$

"$\Leftarrow$" Si $it_{s,b}$ está definido, entonces $\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \rightarrow s_{it_{s,b}}$

Y como corolario: $\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \not\rightarrow \Leftrightarrow$ no existe $it_{s,b}$.

Dem operacional paso largo

Inducción sobre las derivaciones:

$[\text{while}^{ff}_{bs}]$ genera $\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \rightarrow s_0$ con $\mathcal{B}[\![b]\!]s_0 = ff$, y por tanto sii $it_{s,b} = 0$.

h.i. $s_{it^1_{s,b}}$

$$[\text{while}^{tt}_{bs}] \quad \frac{\langle S, s_0 \rangle \rightarrow s_1 \quad \langle \text{while } b \text{ do } S, s_1 \rangle \rightarrow \underbrace{s}_{\text{h.i. } = s_{it^1_{s,b}}}}{\langle \text{while } b \text{ do } S, s_0 \rangle \rightarrow s} \quad \mathcal{B}[\![b]\!]s_0 = tt$$

donde hemos denotado por $it^1_{s,b}$ el correspondiente valor cuando el estado inicial es s_1 en lugar de s_0.

Pero como $\langle S, s_0 \rangle \longrightarrow s_1$, la secuencia que empieza en s_0

es la misma que empieza en s_1 con s_0 "añadido delante", y como $\mathcal{B}[\![b]\!]\, s_0 = tt$, aplicando la def. de $it_{s,b}$ es obvio que $it_{s,b} = it^1_{s,b}$.

Dem denotacional

Usamos las aprox de FIX F, $F^n \bot$.

Sabemos que $S_{ds}[\![W]\!]\, s_0 \to s' \iff \exists n \;\; F^n \bot\, s_0 = s'$

y en tal caso existe un menor n que cumple lo anterior, que veremos que es $it_{s,b} + 1$.

Demostraremos entonces que $F^{n+1} \bot\, s_0 = s' \;\wedge\; F^n \bot\, s_0$ indef $\iff it_{s,b} = n$. Por inducción con respecto a n.

$n = 1$ $\quad F \bot\, s_0 = s'$, aplicando la def. de F,

$\iff \mathcal{B}[\![b]\!]\, s_0 = ff \;\wedge\; s' = s_0 \iff it_{s,b} = 0$.

Supuesto para n lo demostramos para $n+1$

Como $F^n \bot\, s_0$ está indefinido también lo está $F \bot\, s_0$, lo que equivale a $\mathcal{B}[\![b]\!]\, s_0 = tt$, y entonces

$F^{n+1} \bot\, s_0 = F(F^n \bot)\, s_0 = F^n \bot\, (S_{ds}[\![S]\!]\, s_0) = F^n \bot\, s_1$

y además $F^{n-1} \bot\, s_1$ indef. pues en caso contrario, aplicando la def. de F, $F^n \bot\, s_0 = s_1$, en contra de las hipótesis.

De este modo podemos aplicar la h.i. a s_1 obteniendo que $it^1_{s,b} = n-1$, con la misma notación que en el caso operacional, y concluyendo del mismo modo que $it_{s,b} = n$, ya que $S_{ds}[\![S]\!]\, s_0 = s_1 \;\wedge\; \mathcal{B}[\![b]\!]\, s_0 = tt$.

Dem. operacional paso largo

Inducción (completa) sobre la longitud de $\langle W, s_0 \rangle \Rightarrow^* s'$

$l = 3$ $\quad$ corresponde a $\mathcal{B}[\![b]\!]\, s_0 = ff$ y genera $s' = s_0$, lo que equivale a $it_{s,b} = 0 \ \wedge \ s' = s_{it_{s,b}}$.

$l > 3$ corresponde a $\mathcal{B}[\![b]\!]\ tt$, con lo que los 2 primeros pasos de la "computación" nos llevarán a $\langle S; W, s_0 \rangle \Rightarrow^* s'$

y aplicando Lemma 2.19 obtenemos $\langle S; s_0 \rangle \Rightarrow^* s_1$, $\langle W, s_1 \rangle \Rightarrow^* s'$

y aplicando Lemma 2.21 obtenemos $\langle S; W, s_0 \rangle \Rightarrow^* \langle W, s_1 \rangle \Rightarrow s'$

Por lo que podemos aplicar la h.i. obteniendo $s' = s^1_{it_{s,b}}$, y como $\langle S, s_0 \rangle \Rightarrow^* s_1$ y $\mathcal{B}[\![b]\!] = tt$, concluimos que $s' = s_{it_{s,b}}$, ya que $s_{it_{s,b}} = s^1_{it_{s,b}}$

<u>Observación</u>: Si somos "exquisitos" las demostraciones que he escrito van "sólo para un lado". Para completarlas con rigor habría que escribir "las contrarias", que parten de la existencia de $it_{s,b}$, y se hacen siempre por inducción sobre ese valor dando lugar exactamente a la reversión del razonamiento seguido "en la dirección que se ha visto", por lo que me he permitido obviar esa "reescritura" del razonamiento. No obstante, insisto en que por inducción respecto a "lo que aparece a un lado" no podemos nunca probar implicaciones en la dirección contraria: hace falta esa otra inducción con respecto a lo manejado ahora como punto de partida.

<u>Corolario</u>: Para toda función $r : \text{State} \hookrightarrow \mathbb{N}$ que verifique

$$it_{s,b}(s_0) \text{ está definido} \Rightarrow r(s_0) \leq it_{s,b}(s_0)$$

Hago explícita la dependencia de s_0 $\qquad$ Al menos en estos s_0 r está definido

se cumple $\mathcal{S}_{ds}[\![W]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![W]\!] \circ \mathcal{S}_{ds}[\![S^r]\!]$

<u>Dem</u>: Usando la caracterización extensional $\mathcal{S}_{ds}[\![W]\!] = \mathcal{S}_{ds}[\![S^{it_{s,b}}]\!]$ y por definición de las secuencias y del valor de $it_{s,b}(s)$, tenemos $it_{s,b}(s_i) = it_{s,b}(s_0) - i$, con $s^{s_i}_{it_{s,b}(s_i)} = s_{it_{s,b}(s_0)}$, donde

denotamos por $s_j^{s_i}$ los elementos de la sucesión que comienza en s_i (que mantenemos referido al s_0 "inicial").

Entonces $S_{ds} [\![S^{it_{s,b}}]\!] = S_{ds} [\![S^{it_{s,b} - r}]\!] \circ S_{ds} [\![S^r]\!] =$

$S_{ds} [\![S^{it_{s,b}(s_r)}]\!] \circ S_{ds} [\![S^r]\!]$

utilizando que $S_{ds} [\![S^r]\!] s_0 = s_r$ y el resultado de descomposición de la función $it_{s,b}$ y de las sucesiones con comienzo en cada s_i, considerando el caso de $s_{r(s_0)}$.

Continuamos entonces aplicando de nuevo la caracterización extensional para llegar a $S_{ds} [\![W]\!] = S_{ds} [\![W]\!] \circ S_{ds} [\![S^r]\!]$.

<u>Observación</u>: Aunque hemos utilizado la notación denotacional arriba, como las tres semánticas dadas para While son equivalentes, los resultados valen también para S_{bs} y S_{ss}.