Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

Hoja 3.2. - Ejercicios sobre relaciones y relaciones de equivalencia

Curso 2018/2019

---

1. Todas las relaciones que siguen se suponen definidas sobre el conjunto $\mathbb{N}^+ =_{def} \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Estudia qué propiedades de las siguientes se cumplen en cada caso: *reflexividad, simetría y transitividad.*

   a) $xRy \iff_{def} x \mid y,\ x \neq y$.

   b) $xRy \iff_{def} x \neq y$.

   c) $xRy \iff_{def}$ al simplificar x/y e y/x, resultan dos fracciones con numerador y denominador impar.

   d) $xRy \iff_{def} x < y^2$.

   e) $xRy \iff_{def}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n < x < 2^{n+1}$, $2^n < y < 2^{n+1}$.

   f) $xRy \iff_{def}\ y - x + 2$ es un número primo.

   g) $xRy \iff_{def} \mid y - x \mid +2$ es un número primo.

2. Marca la (única) respuesta correcta y razona porqué ello es así.

   La relación $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ definida mediante $(a, b)\, R\, (c, d) =_{def} (a + c \leq b + d)$ es

   a) simétrica

   b) antisimétrica

   c) reflexiva

3. Consideraremos la relación binaria R definida sobre $\mathbb{Z}$ como xRy si y sólo si $4 \,|\, x + 3y$. Indica, razonándolo adecuadamente, cuál de las siguientes propiedades no cumple R :

   a) simétrica

   b) antisimétrica

   c) reflexiva

   d) transitiva

4. Enumera el conjunto formado por todas las relaciones binarias posibles sobre el conjunto $\{0, 1\}$. Determina cuáles son reflexivas, cuáles simétricas y cuáles transitivas.

5. Considera el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ y las siguientes relaciones binarias sobre A:

   $R = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1)\}$ y $S = \{(2, 3), (1, 3), (3, 2)\}$.

   Determina cuál de los siguientes es el enunciado correcto, y porqué ello es así:

   a) $dom(R) \subseteq dom(S)$ y $ran(R) \cap ran(S) \neq \emptyset$

   b) $dom(R) \subseteq dom(S)$ y $ran(R) = ran(S)$

   c) $dom(R) \cap dom(S) \neq \emptyset$ y $ran(R) \subseteq ran(S)$

   d) $dom(R) \cap dom(S) \neq \emptyset$ y $ran(S) \subseteq ran(R)$

6. Sean R y S dos relaciones binarias.

   a) Demuestra que $dom(R \circ S) \subseteq dom(R)$ y que $ran(R \circ S) \subseteq ran(S)$.

   b) Busca un ejemplo de relaciones R y S tales que las inclusiones de *a*) sean estrictas.

7. En los apartados que siguen, R, S, T, etc. , representan relaciones binarias cualesquiera, del tipo apropiado en cada caso para que las composiciones tengan sentido. Demuestra:

   a) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$
   b) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$
   c) $R \subseteq S \Longrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
   d) $R \subseteq R' \Longrightarrow R \circ S \subseteq R' \circ S$
   e) $S \subseteq S' \Longrightarrow R \circ S \subseteq R \circ S'$

8. Una relación $R \subseteq A \times A$ se llama *total* si $dom(R) = A$. Muestra por medio de un ejemplo que una relación simétrica y transitiva puede no ser reflexiva. A continuación, demuestra formalmente que toda relación simétrica, transitiva y total, siempre es reflexiva.

9. Construye relaciones binarias R_1, R_2, R_3 y R_4, sobre el conjunto $\{0, 1, 2\}$, que verifiquen las propiedades siguientes:

   a) R_1 es simétrica y antisimétrica.
   b) R_2 es simétrica, pero no antisimétrica.
   c) R_3 no es simétrica, pero sí antisimétrica.
   d) R_4 no es ni simétrica ni antisimétrica.

10. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)\, R\, (c, d) =_{def} a - d$ es múltiplo de 5. ¿Es R de equivalencia?. Razona tu respuesta.

11. Sea R una relación binaria y S la relación definida sobre el mismo dominio $S = \{(a, b) \,/\, \exists c, (a, c) \in R \quad \wedge \quad (c, b) \in R\}$. Demuestra que si R es de equivalencia entonces S también lo es.

12. Considera la siguiente relación sobre $\mathbb{Z}$:

$$R = \{(x, y) \,/\, (x * y > 0) \vee (x = y = 0)\}.$$

    Demuestra que es una relación de equivalencia y calcula sus clases de equivalencia.

13. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y la partición $S = \{\{a, b\},\ \{c\},\ \{d, e, f\}\}$ sobre el mismo, considera la relación de equivalencia R sobre A asociada a esa partición, se pide:

    a) Enumera los pares de la relación.
    b) Calcula la clase de equivalencia $[e]$.

14. Considera la siguiente partición de $\mathbb{Z}$:

$$S = \{\{0\},\ \{1, -1\},\ \{2, -2\},\ \cdots\}\,.$$

    Demuestra que la relación de equivalencia asociada a esta partición es la siguiente:

$$R = \{(x, y)/|x| = |y|\}$$

    .

15. Dada una relación binaria R sobre un conjunto A, las *potencias* de R se definen recursivamente como sigue:

$$R^0 = id_A \qquad\qquad R^{n+1} = R^n \circ R \quad (n \geq 0)$$

    Considera el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la relación $S = \{(a, c),\ (b, a)\}$ definida sobre A, y calcula las relaciones S^0, S^1, S^2, S^3 y $\bigcup_{n \leq 3} S^n$.

16. Una relación $R \subseteq A \times A$ se llama *circular* sii $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz \rightarrow zRx)$.

    Demuestra que R es reflexiva y circular si y sólo si R es de equivalencia.