Ejercicio 2.-

Sea $(X_1, \ldots X_n)$ una m.a.s. con $X \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Calcular el sesgo de los estimadores $T_1 = X_{(n)}$ y $T_2 = \bar{X}$ para estimar la media poblacional.

Recordemos que el sesgo de una v.a. es $b_\theta(T) = E_\theta[T] - h(\theta)$, donde $h(\theta)$ es la función a estimar.

En nuestro caso $h(\theta) = E[X] = \frac{\theta}{2}$

Empezando por T_2

$$b_\theta(T_2) = E_\theta[T_2] - h(\theta) = E_\theta[\bar{X}] - E[X] = 0$$

Para el sesgo de T_1 tenemos que calcular primero la distribución de $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{X_1 \leq x \ldots X_n \leq x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} = P\{X \leq x\}^n = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\, F_X(x)^{n-1} f_X(x).$$

En este caso $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta) \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$ y $f_X(x) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta)}(x)$

$$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = n \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta)}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} I_{[0,\theta)}(x)$$

Ahora podemos calcular la esperanza de T_1

$$E[T_1] = E[X_{(n)}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\, dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n\, dx = \theta \frac{n}{n+1}$$

El sesgo será por tanto

$$b_\theta(T_1) = E[X_{(n)}] - E[X] = \theta \frac{n}{n+1} - \frac{\theta}{2} = \frac{2n-n-1}{2n+2}\theta = \frac{n-1}{2n+2}\theta$$