$f''(0) = e^0 \cdot 1 + e^0 \cdot 0 - e^0 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 = 0$

$f^{3)}(z) = e^{\text{sen} z} \cos^3 z - 2e^{\text{sen} z} \cos z \,\text{sen} z - e^{\text{sen} z} \cos z \,\text{sen} z - e^{\text{sen} z} \cos z$

$- e^{\text{tg} z}(1+\text{tg}^2 z)^3 - e^{\text{tg} z} \cdot 2(1+\text{tg}^2 z) \cdot 2\text{tg} z \cdot (1+\text{tg}^2 z)$

$- 2e^{\text{tg} z}(1+\text{tg}^2 z)^2 \cdot \text{tg} z - 2e^{\text{tg} z} \cdot (1+\text{tg}^2 z + 3\text{tg}^2 z(1+\text{tg}^2 z))$

$f^{3)}(0) = 1 - 0 - 0 - 1 - 1 - 0 - 0 - 2 = -3 \neq 0.$

Por tanto la serie de Taylor para $f(z)$ centrada en $z_0 = 0$ es

$$f(z) = e^{\text{sen} z} - e^{\text{tg} z} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n \quad \text{con } f^3(0) \neq 0.$$

Por tanto la multiplicidad de 0 es 3.

$\boxed{c)}$ $f(z) = 6\,\text{sen}^3 z + z^3(z^6 - 6) = 6\,\text{sen}^3 z + z^9 - 6z^3 \qquad f(0) = 0$

$f'(z) = 18\,\text{sen}^2 z \cos z + 9z^8 - 18z^2. \qquad f'(0) = 0.$

$f''(z) = 18(2\,\text{sen} z \cos^2 z + \text{sen}^2 z \cdot (-\text{sen} z)) + 72z^7 - 36z = \qquad f''(0) = 0$

$= 36\,\text{sen} z \cos^2 z - 18\,\text{sen}^3 z + 72z^7 - 36z.$

$f^{3)}(z) = 36(\cos^3 z - \text{sen}^2 z \, 2\cos z) - 54\,\text{sen}^2 z \cdot \cos z + 72 \cdot 7 \cdot z^6 - 36 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 72\,\text{sen}^2 z \cos z - 54\,\text{sen}^2 z \cos z + 504z^6 =$

$= 36\cos^3 z - 36 - 126\,\text{sen}^2 z \cos z + 504z^6 \;;\; f^{3)}(0) = 0.$

$f^{4)}(z) = -108\cos^2 z \,\text{sen} z - 126(2\,\text{sen} z \cos^2 z - \text{sen}^3 z) + 3024z^5 =$

$= -108\cos^2 z \,\text{sen} z - 252\cos^2 z \,\text{sen} z + 126\,\text{sen}^3 z + 3024z^5 =$

$= -360\cos^2 z \,\text{sen} z + 126\,\text{sen}^3 z + 3024z^5 \;;\; f^{4)}(0) = 0$

$f^{5)}(z) = -360(2\cos z \cdot \text{sen}^2 z(-1) + \cos^3 z) + 126\,\text{sen}^2 z \cdot \cos z \cdot 3 + 3024 \cdot 5z^4.$

$f^{5)}(0) = -360 \neq 0.$

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................................. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.............. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

Por tanto, el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = 6\operatorname{sen}^3 z + z^3(z^6 - 6)$ en 0 es el de la potencia z^5, por lo que 0 es un cero de multiplicidad 5.

d) $f(z) = (e^z - e^{z^2}) \log(1-z)$.

$$f(0) = (e^0 - e^0)\log 1 = 0.$$

$$f'(z) = (e^z - e^{z^2} \cdot 2z)\log(1-z) + (e^z - e^{z^2}) \cdot \frac{(-1)}{1-z} =$$

$$= e^z \log(1-z) - 2z\, e^{z^2} \log(1-z) - e^z (1-z)^{-1} + e^{z^2} (1-z)^{-1} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(z) = e^z \log(1-z) - \frac{e^z}{1-z} - 2e^{z^2}\log(1-z) - 2z\left[e^{z^2}\log(1-z) \cdot 2z - \frac{e^{z^2}}{1-z}\right]$$
$$- e^z (1-z)^{-1} - e^z (1-z)^{-2} + e^{z^2} \cdot 2z\,(1-z)^{-1} + e^{z^2} \cdot (1-z)^{-2}$$

$$f''(0) = 0 - 1 - 0 - 0 - 1 - 1 + 0 + 1 = -2$$

Como el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = (e^z - e^{z^2})\log(1-z)$ centrada en 0 es el que acompaña a z^2, 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2.

e) $f(z) = \dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} z}{2}\right)^2}$

Hemos visto varias veces en esta hoja que $\operatorname{sen} z = z \cdot h(z)$ para cierta función $h(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y tal que $h(0) \neq 0$.