TOPOLOGÍA ELEMENTAL

Muestras de examen

Febrero 2007

TEORÍA

1. Definir el producto de dos espacios topológicos.

2. Definir *compactificación de Alexandroff.*

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

V (1) La adherencia de una unión es la unión de las adherencias.
F (2) Toda aplicación continua suprayectiva es identificación. (+abierta/cerrada)
V (3) La imagen continua de un espacio Lindelöf es siempre Lindelöf. (Internet)
F (4) La unión de dos conjuntos disjuntos nunca es conexa. (adherencia)
F (5) Las componentes conexas son conjuntos abiertos. (son cerrados)
F (6) Dos espacios con el mismo grupo fundamental son necesariamente homeomorfos.

PROBLEMAS

1. Se considera en $X = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ la topología $\mathcal{T}$ producto de la usual $\mathcal{T}_u$ en $\mathbb{R}$ y la de los complementos finitos $\mathcal{T}_{\mathrm{CF}}$ en $\mathbb{Z}$.

(1) Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}.\mathcal{T}_u) : (t, k) \mapsto t - k$.

(2) Probar que si $M \subset X$ es compacto, entonces:

(i) $M \cap (\mathbb{R} \times \{k\})$ es compacto para cada $k \in \mathbb{Z}$, y

(ii) existe $L > 0$ tal que $|t| \leq L$ para todo $(t, k) \in M$.

(3) Demostrar que el conjunto

$$M = \{(1, 0)\} \cup \bigcup_{k \geq 1} [0, 1 - \tfrac{1}{k}] \times \{k\}$$

es compacto. ¿Es cerrado?

(4) Estudiar si una unión finita

$$[0, 1] \times \{k_1\} \cup \cdots \cup [0, 1] \times \{k_r\}$$

es un conjunto conexo. ¿Y la unión infinita $\bigcup_{k \geq 1} [0, 1] \times \{k\}$?

2. Sea $X \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2 + y^2 = 1, -2 \leq z \leq 2\}$, y sean $E, F \subset X$ las dos circunferencias $\{x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$, $\{x^2 + y^2 = 1, z = -1\}$. En M se considera la relación de equivalencia

$$p = (x, y, z) \sim p' = (x', y'.z') \quad \text{si y sólo si} \quad p = p' \quad \text{o} \quad z = z' = +1 \quad \text{o} \quad z = z' = -1.$$

(1) Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homomorfo al espacio cociente $M/\sim$.

(2) Calcular el grupo fundamental de $M/\sim$.

(3) ¿Es cierto en general que al hacer un cociente el grupo fundamental se simplifica?

Septiembre 2007

TEORÍA

1. ¿Cuándo se dice que una aplicación continua es abierta?

2. Definir espacio *simplemente conexo.*

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) La adherencia de la intersección es la intersección de las adherencias. ($\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$)
F (2) Si todos los puntos de un espacio son cerrados, el espacio es Hausdorff. (τ_{CF})
V (3) Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es también compacto.
V (4) Todo espacio con una base numerable de abiertos es separable. (IIAx $\Rightarrow$ Separable)
V (5) La imagen continua de un espacio conexo es asímismo un espacio conexo.
V (6) Toda aplicación continua no suprayectiva de un espacio en una esfera es homótopa a una aplicación constante.

PROBLEMAS

1. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los *triángulos semiabiertos* de vértice $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y anchura $\varepsilon > 0$ definidos por

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq a - b,\ x + y \geq a + b,\ a \leq x < a + \varepsilon\},$$

y equipamos $\mathbb{R}^2$ con la topología $\mathcal{T}$ que tiene todos esos triángulos por base de abiertos.

(1) Calcular la adherencia (en $\mathcal{T}$) de un triángulo semiabierto U.

(2) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es Lindelöf. ¿Y localmente compacto?

(3) Demostrar que los únicos conjuntos conexos para esta topología son los puntos.

(4) ¿Existe alguna topología $\mathcal{T}_1$ en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{T}$ sea la topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$? ¿Y tal que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ sea *homeomorfo* a $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1)$?

2. Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto

$$\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

En S se considera la relación de equivalencia definida por las relaciones

$$(x, y) \sim (x, y); \quad (1, y) \sim (0, y); \quad (x, 1) \sim (x', 1) \text{ para } 0 \leq x, x' \leq 1.$$

(1) Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = S/\sim$.

(2) Mostrar que X es simplemente conexo.

(3) ¿Es X homeomorfo a una esfera?

Febrero 2008

TEORÍA

1. Enunciar alguna condición suficiente para que una unión de conjuntos conexos lo sea también.

2. Definir cuándo dos espacios tienen el mismo *tipo de homotopía*.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) El interior de la unión de dos conjuntos es la unión de sus interiores. ($\supseteq$)

V (2) Si un espacio tiene una base numerable de abiertos, las adherencias se calculan mediante límites de sucesiones. II Ax $\Rightarrow$ I Ax $\approx$ límites

V (3) Una aplicación continua biyectiva de un espacio compacto sobre un espacio Hausdorff es un homeomorfismo.

F (4) Si un espacio no es conexo, su imagen por una aplicación continua tampoco es conexa. f = cte (El recip V)

F (5) Las componentes conexas por caminos son subconjuntos cerrados. cc $\to$ cerradas ccs $\to$ NO sen top

? F (6) Dos espacios con el mismo tipo de homotopía son necesariamente homeomorfos.

P: F

PROBLEMAS

1. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la topología $\mathcal{T}$ de la que una base consiste en los cuadrados abiertos de centro un punto arbitario $p \in \mathbb{R}^2$ y lado arbitrario $\varepsilon > 0$, menos los puntos $\neq p$ de las dos diagonales.

(1) Estudiar la continuidad de la aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) : t \mapsto (t, \lambda t)$, para $\lambda = 0, 1$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ conexo por caminos con esta topología?

(2) Mostrar que $\mathcal{T}$ no es una topología producto.

(3) Probar que esta topología es primer axioma de numerabilidad. ¿Es además separable? ¿Y segundo Axioma?

(4) Demostrar que en esta topología un cuadrado cerrado no es compacto, y deducir que los conjuntos compactos tiene interior vacío.

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ un hexágono regular cerrado con dos vértices opuestos en $(0,1)$ y $(0,-1)$, y consideremos la relación de equivalencia

$$(x, y) \sim (x, y) \quad \text{y} \quad (0, 1) \sim (0, -1).$$

(1) Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $H/\sim$.

(2) Calcular el grupo fundamental de $H/\sim$.

(3) ¿Es cierto en general que un cociente de un espacio simplemente conexo deja de serlo?

Septiembre 2008

TEORÍA

1. ¿Qué es un espacio separable?

2. Definir *homotopía de caminos con extremos fijos*.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) El interior del complementario es el complementario del interior. $[\;\infty)$
F (2) Toda aplicación continua y biyectiva es un homeomorfismo. + ab/cerr/f^{-1} cont
F - (3) Todo espacio que cumple el 2º axioma de numerabilidad es localmente compacto.
V (4) Los cocientes de espacios compactos son también compactos. (continuidad)
V (5) La imagen continua de un espacio conexo es conexo.
V (6) Todos los lazos de una esfera son homótopos a un lazo constante. ($\mathbb{S}^2$ simpl. conexo)

PROBLEMAS

1. Se consideran en el semiplano $\mathbb{H} : y \geq 0$ de $\mathbb{R}^2$ la topología $\mathcal{T}$ generada por los discos abiertos de centros (a, b) con $b > 0$, y los "semidiscos"

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - a)^2 + y^2 < \varepsilon,\ y > 0\} \cup \{(a, 0)\}.$$

Se pide:

(1) ¿Qué topología induce $\mathcal{T}$ en el borde $L : y = 0$ de $\mathbb{H}$?

(2) Estudiar si $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ es separable.

(3) Decidir qué cuadrados $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \times [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ son compactos, y utilizarlo para determinar si $\mathbb{H}$ es localmente compacto con esta topología.

(4) Estudiar si $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ es conexo por caminos.

2. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$S = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{1 \leq x \leq 2, y = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(2, 0)\},$$

equipados con la topología usual. En S se identifican entre sí todos los puntos de T (y nada más), y se denota X el espacio cociente resultante. Se pide:

(1) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a ese espacio cociente X.

(2) Mostrar que el grupo fundamental de X es $\mathbb{Z}$.

(3) ¿Es X homeomorfo a una circunferencia?

Febrero 2012

TEORÍA

1. Describir la topología de un *cociente* de un espacio topológico.

2. Enunciar el *teorema del punto fijo de Brouwer*.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

V (1) Una unión de conjuntos cerrados puede no ser cerrado. (Union arbitraria)

F (2) Si un espacio es 1^{er} axioma de numerabilidad y separable, entonces tiene una base numerable. $(\mathcal{T}_a, X)$ X infinito nonum

F (3) Una biyección continua entre espacios compactos es un homeomorfismo. (Necesitas T_2)

V (4) Un cociente de un espacio conexo por caminos es también conexo por caminos.

V (5) El producto de dos espacios contráctiles es contráctil a su vez. (Internet)

F (6) Dos espacios simplemente conexos son necesariamente homeomorfos. (Cambiar dim)

PROBLEMAS

1. Un subconjunto W del plano $\mathbb{R}^2$ se llama *radialmente abierto* si para cada punto $p \in W$ y cada recta L que pase por el punto, $W \cap L$ contiene un intervalo abierto centrado en p.

(1) Probar que los conjuntos radialmente abiertos son los abiertos de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué relación tiene con la usual?

(2) Estudiar que topología induce $\mathcal{T}$ en las circunferencias. ¿Cumple $\mathcal{T}$ el segundo axioma de numerabilidad? ¿Y el primero?

(3) Construir sucesiones de puntos del plano que convergan a un punto en la topología usual, pero no en esta topología $\mathcal{T}$. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ un espacio localmente compacto?

(4) Estudiar que topología induce $\mathcal{T}$ en las rectas. ¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta topología conexo por caminos?

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-1,1), (-1,-1), (1,-1)$ y $(1,1)$, y consideremos en él las dos relaciones de equivalencia definidas por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: (x,1) \sim (x,-1), \quad (x,0) \sim (0,0), \\ \mathcal{S} &: (x,1) \sim (-x,-1), \quad (x,0) \sim (0,0). \end{aligned}$$

(1) Describir subespacios de $\mathbb{R}^3$ homeomorfos a los espacios cocientes $X = H/\mathcal{R}$ e $Y = H/\mathcal{S}$.

(2) Calcular el grupo fundamental de X.

(3) Decidir si X e Y son homeomorfos.

3.♠ Demostrar que un espacio X que cumple las dos condiciones siguientes es compacto:

(a) Cada punto tiene una base de entornos cerrados.

(b) Toda imagen continua de X en un espacio Haussdorff es cerrada.

Septiembre 2012

TEORÍA

1. Definir espacio localmente conexo.

2. Explicar qué grupo fundamental tiene la circunferencia.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

V (1) Si un conjunto abierto no vacío tiene frontera vacía, entonces su complementario es abierto. $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \setminus A = \emptyset \Rightarrow A = \bar{A} \Rightarrow A$ cerrado $\Rightarrow A^c$ abierto

V (2) Un espacio que tiene una base numerable es separable. II Ax $\Rightarrow$ sep.

F (3) Si dos subconjuntos densos tienen intersección no vacía, entonces esa intersección es también un subconjunto denso. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I} \cup \{0\}$

V (4) Un subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es también localmente compacto. ab° $\Rightarrow$ $\Downarrow$ loc. cerrado $C = C \cap X$ / $U = U \cap X$

V (5) Todo abierto conexo del plano es conexo por caminos. por $\mathbb{R}^n$ + ab°

F (6) Si una aplicación continua entre dos espacios toppológicos induce un isomorfismo entre sus grupos fundamentales, entonces es un homeomorfismo.

PROBLEMAS

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el semiplano cerrado $\{y \geq 0\}$, $P \subset X$ el semiplano abierto $\{y > 0\}$ y L la recta $\{y = 0\}$.

(1) Mostrar que se puede definir en X una topología estrictamente más fina que la usual tomando como entornos de los puntos $p \in P$ los discos abiertos de P centrados en p, y como entornos de los puntos $p \in L$ los conjuntos $\{p\} \cup D$ donde D es un disco abierto de P tangente a L en p.

(2) ¿Qué topología induce $\mathcal{T}$ en L? Estudiar qué axiomas de numerabilidad cumple $\mathcal{T}$.

(3) Estudiar si son compactos en esta topología $\mathcal{T}$: (i) el triángulo cerrado $y \leq 1$, $y \geq x$, $y \geq -x$, (ii) el disco cerrado $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

(4) Describir un subconjunto $E \subset X$ que sea conexo por caminos para la topología usual y no para $\mathcal{T}$.

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-1, 1), (-1, 0), (1, 0)$ y $(1, 1)$, y consideremos en él la relación de equivalencia definida por

$$\mathcal{R} : (x, 1) \sim (x, 0), \quad (0, 0) \sim (0, y), \quad (1, 0) \sim (1, y).$$

(1) Encontrar subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = H/\mathcal{R}$.

(2) ¿Es X localmente homeomorfo al plano?

(3) Calcular el grupo fundamental de X.

Junio 2013

TEORÍA

1. Enunciar una condición suficiente para que una unión de conexos sea conexo.

2. Explicar qué es un *retracto de deformación*.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) La adherencia del interior de un conjunto cerrado es igual al propio conjunto. $A=\{x\}$

F (2) Un subespacio de un espacio separable es separable. (V si abierto)

F (3) Dos espacios no homeomorfos tienen compactificaciones por un punto no homeomorfas.

V (4) Un subespacio abierto de un espacio localmente conexo es locamente conexo. (subespacios en conexión nunca)

V ? (5) Un espacio con una cantidad *finita* de componentes conexas es la suma topológica de ellas.

V (6) Dos caminos continuos en la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ con los mismos extremos son homótopos con extremos fijos. ($\mathbb{S}^2$ es simp. conexa)

4. Sea X un espacio Hausdorff, $K \subset X$ un compacto y $a \in X$ un punto que no está en K. Demostrar que a y K tienen entornos abiertos disjuntos.

PROBLEMAS

1. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos W^a, $a \in \mathbb{R}^2$, obtenidos suprimiendo en una bola abierta B de centro a una cantidad finita de segmentos (a, b) con $b \in \mathbb{R}^2$.

(1) Mostrar que se puede definir en $\mathbb{R}^2$ una topología $\mathcal{T}$ estrictamente más fina que la usual tomando como base de abiertos la colección de todos los W^a anteriores.

(2) ¿Qué topología induce $\mathcal{T}$ en las rectas? ¿Y en las circunferencias?

(3) Estudiar si esta topología $\mathcal{T}$ cumple el primer axioma de numerabilidad.

(4) Encontrar sucesiones que converjan en la topología usual, pero no en $\mathcal{T}$.

(5) Estudiar la local compacidad de $\mathcal{T}$.

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-1, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(-1, 1)$, y consideremos en él la relación de equivalencia definida por

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (-1, y) \sim (0, y) \sim (1, y) \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1, \\ (0, 1) \sim (x, 1) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1, \\ (0, 0) \sim (x, 0) \quad \text{para } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = H/\mathcal{R}$.

(2) Mostrar que un semicono $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$, tiene cualquiera de sus generatrices por retracto de deformación. (Nótese que un semicono es homeomorfo a un disco cerrado.)

(3) Calcular el grupo fundamental de X.

(4) Explicar brevemente que espacio se obtendría suprimiendo la tercera condición de la relación $\mathcal{R}$.

(5) ¿Y qué grupo fundamental tendría ese espacio?

Septiembre 2013

TEORÍA

1. Enunciar dos axiomas de numerabilidad y explicar si uno implica otro.

2. Definir el grupo fundamental de un espacio.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) Una aplicación continua transforma entornos de un punto en entornos de su imagen. (al revés f^{-1}) x^2 $(-\varepsilon,\varepsilon) \to [0,\varepsilon)$

V (2) El producto de dos espacios localmente compactos es localmente compacto.

V (3) La intersección de dos conjuntos compactos puede no ser compacto. (si no es T_2)

F (4) Una biyección continua de un espacio compacto en sí mismo es abierta. (necesitas T_2)

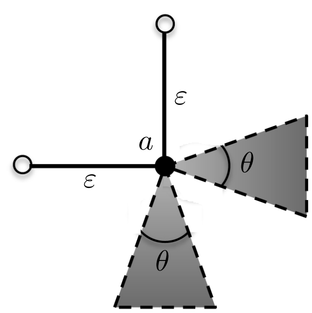
(5) Un espacio localmente conexo tiene una cantidad finita de componentes conexas. las cc son abiertas

F (6) Dos caminos continuos en un toro con los mismos extremos son homótopos. NO simp. conexo

4. Demostrar que un espacio locamente compacto tiene compactificación por un punto, y que es única salvo homeomorfismo.

PROBLEMAS $\boxed{T_{\text{discr}}}$

1. Se consideran en el plano $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos W^a, $a \in \mathbb{R}^2$, construidos como se indica en la figura, para todos los posibles ángulos positivos $\theta < \frac{1}{4}\pi$ y amplitudes $\varepsilon > 0$.



(1) Mostrar que se puede definir en $\mathbb{R}^2$ una topología $\mathcal{T}$ tomando como abiertos los conjuntos $U \subset \mathbb{R}^2$ tales que para cada $a \in U$ existe $W^a \subset U$. ¿Son los W^a abiertos en esta topología?

(2) Mostrar que $\mathcal{T}$ induce la topología usual en las rectas horizontales y verticales. ¿Y en las demás?

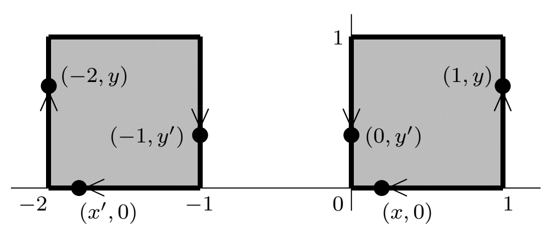
(3) Estudiar si el plano con esta topología cumple el 2º axioma de numerabilidad. ¿Es separable?

(4) Estudiar si el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es localmente compacto.

(5) Mostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es conexo por caminos.

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ la unión de los dos rectángulos de la figura, y consideremos en él la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida como se especifica a continuación (y representada en la figura mediante flechas):

$$\mathcal{R}: \begin{cases} (x,0) \sim (x',0) & x' = -2+x,\ -1 \le x \le 0, \\ (-2,y) \sim (1,y)) & \text{para } 0 \le y \le 1, \\ (-1,y') \sim (0,y') & \text{para } 0 \le y' \le 1, \end{cases}$$



(1) ¿Qué espacio es el cociente $H/\mathcal{R}$?

(2) Explicar cuál es el grupo fundamental de ese espacio.

(3) ¿Qué espacio cociente resulta si se define una nueva relación de equivalencia $\mathcal{S}$ escribiendo $x' = -1 - x$ en la primera línea de $\mathcal{R}$?

(4) Mostrar que este segundo cociente $H/\mathcal{S}$ es un espacio contráctil.

(5) Utilizar una subrelación común de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ para expresar $H/\mathcal{R}$ y $H/\mathcal{S}$ como cociente de un mismo espacio que sea contráctil. ¿Qué dice esto de la contractibilidad de un espacio y de sus cocientes?

Junio 2014

TEORÍA

1. ¿Qué es una botella de Klein?

2. Definir la topología cociente.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) El complementario de un conjunto denso no puede serlo también. $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$

F (2) Un subespacio de un espacio localmente compacto es localmente compacto. |V si loc. cerr|

F (3) Si las compactificaciones de Alexandroff de dos espacios conexos son homeomorfas, los espacios lo son también.

V (4) El producto de dos espacios separables es separable.

? V (5) Un espacio localmente conexo es la suma topológica de sus componentes conexas. (Test)

F (6) Dos lazos en la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ con distinto punto base pueden no ser homótopos.

4. Sea $\rho : X \to A \subset X$ un retracto de deformación. Demostrar que la aplicación $Y \mapsto \rho(Y)$ es una biyección entre el conjunto de componentes conexas de X y el de componentes conexas de A.

PROBLEMAS

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos

$$U^a_{\varepsilon,r} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\varepsilon \le \|x - a\| \le r\}, \quad 0 < \varepsilon < r,\ a \in \mathbb{R}^2.$$

(1) Mostrar que en $\mathbb{R}^2$ hay una topología $\mathcal{T}$, menos fina que la usual $\mathcal{T}_u$, que tiene como base de entornos de cada punto $a \in \mathbb{R}^2$ la colección de todos los $U^a_{\varepsilon,r}$ anteriores.

(2) Demostrar que un conjunto ($\neq \mathbb{R}^2$) es cerrado en $\mathcal{T}$ si y sólo si es compacto en $\mathcal{T}_u$. ¿Qué topología induce $\mathcal{T}$ en los subconjuntos compactos para $\mathcal{T}_u$?

(3) La aplicación $f(t) = (t, 1/t)$ está definida para $t \neq 0$. ¿Se puede extender a $t = 0$ para obtener una aplicación continua $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \mapsto (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$?

(4) Mostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ es un espacio localmente compacto.

(5) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ conexo por caminos?

2. Sea $H \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo cerrado con vértices $(-2,0), (2,0), (2,1)$ y $(-2,1)$, y consideremos en él las tres condiciones siguientes

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (-1,y) \sim (1,y) & \text{para } 0 \le y \le 1, \\ \left.\begin{array}{ll} (-2,y) \sim (2,y') & \text{para } 0 \le y, y' \le 1, \\ (x,0) \sim (x',0) & \text{para } -1 \le x, x' \le 1. \end{array}\right\} : \mathcal{R}' \end{cases}$$

Como se indica, sean $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia *generada* por todas ellas y $\mathcal{R}'$ la *generada* por la segunda y la tercera.

(1) Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = H/\mathcal{R}$.

(2) Construir un retracto de deformación de H compatible con la relación $\mathcal{R}$ y explicar qué retracto induce en X.

(3) Calcular el grupo fundamental de X.

(4) Repetir el proceso con la relación $\mathcal{R}'$, y sea $X' = H/\mathcal{R}'$.

(5) Los espacios X y X' tienen el mismo tipo de homotopía, pero ¿son homeomorfos?

$A = F\cap U$
$B = C\cap V$ $\Big\}$ $A\cap B = (F\cap C)\cap(U\cap V)$

Septiembre 2014

TEORÍA

1. Enunciar el lema de elevación para aplicaciones con valores en la circunferencia.

2. Definir dos axiomas de numerabilidad ninguno de los cuales implique al otro.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) Si dos conjuntos tienen el mismo interior, entonces tienen la misma adherencia. $\mathbb{Q}$ $\emptyset$

V (2) La intersección de dos conjuntos localmente cerrados es localmente cerrado.

F (3) La unión de dos conjuntos localmente conexos es localmente conexo. seno topologo

V (4) El producto de dos espacios localmente compactos es localmente compacto.

F (5) Un espacio simplemente conexo es contráctil. (Esfera)

? (6) El grupo fundamental de una superficie orientable es abeliano.

• **4.** Demostrar que un conjunto estrellado es contráctil.

PROBLEMAS

1. Se consideran en el espacio $\mathbb{R}^2$ los triángulos

$$T_{\varepsilon,\lambda} : 0 \le x < \varepsilon,\ 0 \le y \le \lambda x, \quad 0 < \varepsilon, \lambda.$$

Se pide:

(1) Mostrar que se puede definir en $\mathbb{R}^2$ una única topología $\mathcal{T}$ que tiene como base de entornos de cada punto $a \in \mathbb{R}^2$ la colección de todos los triángulos $a + T_{\varepsilon,\lambda}$.

(2) ¿Qué topología induce $\mathcal{T}$ en las rectas?

(3) Estudiar qué axiomas de numerabilidad cumple el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

(4) Mostrar que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ no es locamente compacto.

(5) Calcular las componentes conexas de este espacio. ¿Hay caminos no constantes?

2. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrado cerrado con vértices $(-1,-1), (1,-1), (1,1)$ y $(-1,1)$, sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia generada por $(-1,y) \sim (1,y)$ y sea $X = C/\mathcal{R}$ el espacio cociente correspondiente. Ahora consideramos los conjuntos $A \subset C_1 \subset C_0 \subset C$ siguientes:

$$\begin{cases} A = \big([-1,1]\times\{\pm 1\}\big) \cup \big(\{\pm 1\}\times[-1,1]\big), \\ C_1 = C \setminus (-1,1)\times\{0\}, \\ C_0 = C \setminus \{(0,0)\}. \end{cases}$$

La restricción de $\mathcal{R}$ a A, C_1 y C_0 define sendas relaciones de equivalencia y denotamos Y, X_1 y X_0 los correspondientes espacios cocientes.

(1) Describir los espacios $Y \subset X_1 \subset X_0 \subset X$ mediante subespacios de $\mathbb{R}^3$.

(2) Construir un retracto de deformación R_t de C_0 sobre A compatible con $\mathcal{R}$ tal que $R_t(C_1) \subset C_1$.

(3) Deducir que Y es retracto de deformación de X_0 y también de X_1.

(4) Calcular los grupos fundamentales de los espacios Y, X_1, X_0 y X.

(5) ¿Cuáles de los espacios Y, X_1, X_0 y X tienen igual tipo de homotopía? ¿Cuáles son homeomorfos?

Junio 2015

TEORÍA

1. Definir la topología cociente.

2. Caracterizar la compacidad mediante subconjuntos cerrados.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) Si dos conjuntos tienen la misma frontera y uno está contenido en el otro, entonces tienen el mismo interior. $[\,,\infty)$

V (2) En un espacio Hausdorff, la intersección de dos conjuntos localmente compactos es localmente compacto. → En T_2 $\cap$ comp = comp (Internet)

F (3) La intersección de dos conjuntos localmente conexos es localmente conexo. (Internet)

F (4) El producto de dos espacios Lindelöf es Lindelöf.

F (5) Dos espacios contráctiles son homeomorfos. $\mathbb{R}$ vs $\mathbb{R}^2$

F (6) El grupo fundamental del plano proyectivo es infinito. $\mathbb{Z}_2$

4. Demostrar que el grupo fundamental no depende del punto base.

PROBLEMAS

1. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la colección $\mathcal{B}$ de todos los abiertos usuales más todos los subconjuntos de $\mathbb{Q}^2$. Se pide:

(1) Mostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología en $\mathbb{R}^2$. Compararla con la topología usual $\mathcal{T}_u$. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ Hausdorff?

(2) Estudiar qué axiomas de numerabilidad cumple el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

(3) Mostrar que un compacto de $\mathcal{T}$ lo es de $\mathcal{T}_u$, pero no recíprocamente: un segmento cerrado que contenga un punto con ambas coordenadas racionales no es compacto para $\mathcal{T}$.

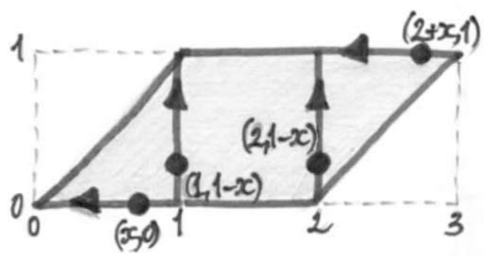
(4) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ localmente compacto?

(5) Calcular las componentes conexas de este espacio.

2. En el paralelogramo $K \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(0,0), (2,0), (3,1)$ y $(1,1)$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ generada por

$$(x,0) \sim (1, 1-x) \sim (2, 1-x) \sim (2+x, 1), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

como se representa en la figura siguiente



(1) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = K/\sim$.

(2) Sea $A \subset K$ la unión del cuadrado $\{1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$ y los dos segmentos $\{0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$, $\{2 \leq x \leq 3,\ y = 1\}$. Construir un retracto de deformación ρ_s de X sobre A *compatible* con $\mathcal{R}$, es decir, tal que si $p \sim q$ entonces $\rho_s(p) \sim \rho_s(q)$.

(3) Deducir que $A/\sim$ es retracto de deformación de $K/\sim = X$.

(4) Calcular el grupo fundamental de X.

(5) Estudiar que pares de puntos $p, q \in X$ tienen entornos (arbitrariamente pequeños) homeomorfos.

Septiembre 2015

TEORÍA

1. Citar dos propiedades que se conserven por identificaciones y dos que no.

2. ¿Qué es un retracto de deformación fuerte?

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) Un subespacio de un espacio separable es separable. (V para ab°)
V (2) El producto de dos espacios conexos por caminos es conexo por caminos.
V (3) La compactificación de Alexandroff de un espacio conexo es conexa. Adherencia
V (4) Un subespacio de un espacio 1er axioma es 1er axioma.
V (5) Un espacio contráctil es conexo por caminos.
V (6) El grupo fundamental del plano proyectivo es conmutativo y finito. $\mathbb{Z}_2$

4. Demostrar que un subconjunto localmente compacto de un espacio Hausdorff es localmente cerrado.

PROBLEMAS

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los subconjuntos

$$U^p = p + \{x^2 \leq y^3 < \varepsilon\},\ \varepsilon > 0, p \in \mathbb{R}^2.$$

Se pide:

(1) Mostrar que todos estos conjuntos son base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$.

(2) Estudiar qué axiomas de numerabilidad cumple el espacio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.

(3) Describir algún conjunto compacto en $\mathcal{T}_u$ que no lo sea en $\mathcal{T}$. ¿Qué topología tiene más compactos y por qué?

(4) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ localmente compacto?

(5) Calcular las componentes conexas de este espacio.

2. En el paralelogramo $T \subset \mathbb{R}^2$ dado por $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ se considera en la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ generada por

$$(-1, y) \sim (1, y) \quad \& \quad (x, 0) \sim (x, 1).$$

Se consideran asímismo los subconjuntos

$$K = \mathrm{Fr}(T) \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{y} \quad L = \mathrm{Fr}(T) \cup \{(2y-1, y) : 0 \leq y \leq 1\},$$

y $U = T \setminus \{p, q\}$ con $p = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Nótese que $T/\sim$ es homeomorfo al toro de revolución $\widetilde{T} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Identificar subespacios $\widetilde{K}, \widetilde{L}, \widetilde{U} \subset \widetilde{T}$ homeomorfos a los espacios cocientes $K/\sim$, $L/\sim$ y $U/\sim$.

(2) Definir retractos $U \to K$ y $U \to L$ de deformación fuerte compatibles con la relación de equivalencia $\sim$.

(3) Deducir que $\widetilde{K}$ y $\widetilde{L}$ son ambos retractos de deformación de $\widetilde{U}$.

(4) Calcular el grupo fundamental de $\widetilde{K}$ y $\widetilde{L}$.

(5) ¿Son $\widetilde{K}$ y $\widetilde{L}$ homeomorfos?

Junio 2016

TEORÍA

1. Citar dos propiedades que pasen de un conjunto a su adherencia.

2. ¿Qué es una superficie topológica?

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

F (1) Un espacio Lindelöf es separable. (+ metrizable)
V (2) El producto de dos espacios Hausdorff es Hausdorff.
V (3) La compactificación de Alexandroff de un espacio separable es separable. Añades a A el pto
V (4) Todo cociente de un espacio localmente conexo es localmente conexo.
F (5) Todo espacio conexo por caminos es localmente conexo.
F (6) El plano proyectivo es simplemente conexo. $\Longleftrightarrow \pi(X) = \{1\}$

4. Demostrar que un subconjunto localmente compacto de un espacio Hausdorff es localmente cerrado.

PROBLEMAS

1. Se considera en $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}_{CN}$ de los complementos numerables, y en $\mathbb{R}^2$ la topología producto de $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{CN} \times \mathcal{T}_u$.

(1) ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ separable? ¿Y Axioma I de numerabilidad?

(2) ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$?

(3) Demostrar que los conjuntos compactos de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ son las uniones finitas de conjuntos $\{a\} \times K$, donde $K \subset \mathbb{R}$ es compacto para $\mathcal{T}_u$. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ localmente compacto?

(4) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ conexo.

(5) Calcular las componentes conexas por caminos de este espacio.

2. En el paralelogramo $K \subset \mathbb{R}^2$ dado por $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ se consideran las dos relaciones de equivalencia siguientes:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{R} & \text{generada por } (-1, y) \sim (0, y), \quad 0 \le y \le 1, \\ \mathcal{R}^* & \text{generada por } (x, 0) \sim (x, 1), \ -1 \le x \le 1. \end{array}$$

(1) Sea X el espacio cociente $K/\mathcal{R}$. Encontrar un modelo en $\mathbb{R}^3$ de X.

(2) Mostrar que $\mathcal{R}^*$ induce una relación de equivalencia $\mathcal{S}$ en X y encontrar un modelo en $\mathbb{R}^3$ del correspondiente espacio cociente $Y = X/\mathcal{S}$.

(3) Calcular los grupos fundamentales de X y de Y.

(4) Describir los posibles tipos de entornos de los puntos de Y mediante semidiscos.

(5) Analizar el grupo fundamental de esos entornos perforados.

Septiembre 2016

TEORÍA

1. Definir la compactificación de Alexandroff.

2. Definir las componentes conexas de un espacio.

3. Marcar *verdadero* (V) o *falso* (F) según corresponda.

V (1) En un espacio Hausdorff los puntos son cerrados.
V (2) Todo espacio métrico cumple el axioma I de numerabilidad. si quitas localm
F → ? (3) Todo subespacio localmente cerrado de un espacio Lindelöf es Lindelöf. es cierto
F (4) Todo cociente de un espacio localmente compacto es localmente compacto. solo ab°
F (5) Todo espacio conexo por caminos y localmente conexo por caminos es simplemente conexo.
V (6) Toda aplicación continua de un disco abierto en sí mismo tiene algún punto fijo.

4. Sean X un espacio conexo y conexo por caminos y $A \subset X$ un retracto de deformación de X. Demostrar que A y X tienen el mismo grupo fundamental.

PROBLEMAS

1. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la colección $\mathcal{B}$ de los conjuntos $B \setminus L$ donde B es una bola euclídea abierta y L es la unión una colección numerable (incluido finita o vacía) de rectas.

(1) Mostrar que $\mathcal{B}$ es base de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$ y compararla con la usual.

(2) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ cumple el axioma I de numerabilidad. ¿Es un espacio separable?

(3) Se considera en $\mathbb{R}$ la topologia $\mathcal{T}_{CN}$ de los complementarios numerables. ¿Cuáles son los conjuntos compactos para esta topología?

(4) Se denotan $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las dos proyecciones lineales $p(x, y) = x, q(x, y) = y$. Mostrar que son continuas de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CN})$. Comparar $\mathcal{T}$ y la topología producto $\mathcal{T}_{CN} \times \mathcal{T}_{CN}$.

(5) Deducir de la continuidad de p y q que para $\mathcal{T}$ los compactos son finitos. ¿Es $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ conexo por caminos?

2. Se considera en $\mathbb{R}^2$ el conjunto

$$E = \Big([-2, 2] \times \{0\}\Big) \bigcup \Big([-1, 1] \times [-1, 1]\Big) \bigcup \Big(\{0\} \times [-2, 2]\Big)$$

y en él las relaciones de eequivalencia

$$\begin{cases} \mathcal{R} & \text{generada por } (-2, 0) \sim (2, 0), (0, -2) \sim (0, 2), \\ \mathcal{S} & \text{generada por } (-1, 0) \sim (1, 0), (0, -1) \sim (0, 1). \end{cases}$$

(1) Sea X el espacio cociente $E/\mathcal{R}$. Encontrar un modelo en $\mathbb{R}^3$ de X.
(2) Sea Y el espacio cociente $E/\mathcal{S}$. Encontrar un modelo en $\mathbb{R}^3$ de Y.
(3) Calcular los grupos fundamentales de X y de Y.
(4) Estudiar si X e Y son homeomorfos.
(5) Mostrar que uno de los dos espacios es retracto de deformación del otro.

Junio 2017

Tema sin demostraciones. Conexión.

Tema con demostraciones. La compactificación de Alexandroff.

Problema 1. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología cuyos abiertos son los conjuntos $U \subset \mathbb{R}^2$ que contienen para cada punto $(a,b) \in U$ un *aspa*

$$X = \{(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon\} \cap \big(\{x-y = a-b\} \cup \{x+y = a+b\}\big), \quad \varepsilon > 0.$$

(1) Estudiar si este espacio es: (i) 2º axioma, (ii) 1$^{\text{er}}$ axioma.
(2) Estudiar la compacidad local.

Problema 2. En el paralelogramo $K \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(-1,-1),(1,-1),(1,1)$ y $(-1,1)$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ generada por

$$(x,x) \sim (-x,-x), \quad 0 \le x \le 1,$$

y se denota

$$E = K \setminus \{a\}, \text{ siendo } a \text{ el punto } a = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

(1) Describir un conjunto $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = E/\!\sim$.
(2) Calcular el grupo fundamental de $\widetilde{X}$. ¿Y si a fuera el origen?

Septiembre 2017

Tema sin demostraciones. El grupo fundamental.

Tema con demostraciones. El teorema de Thychonoff.

Problema 1. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología cuyos abiertos son los conjuntos $U \subset \mathbb{R}^2$ que contienen para cada punto $(a,b) \in U$ una región parabólica del tipo

$$\alpha(x-a)^2 < y - b, \quad \alpha > 0.$$

(1) Estudiar los axiomas de numerabilidad de este espacio.
(2) Mostrar que en este espacio hay conjuntos compactos que no son ni acotados ni cerrados.

Problema 2. En el triángulo $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(1,0),(0,1)$ y $(0,-1)$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ generada por

$$(x, 1-x) \sim (x, -1+x), \quad 0 \le x \le 1,$$

y se denota

$$E = \Delta \setminus \{a\}, \text{ siendo } a \text{ el punto } a = (\tfrac{1}{2}, 0).$$

(1) Describir un conjunto $\widetilde{X} \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $X = E/\!\sim$.
(2) Calcular el grupo fundamental de $\widetilde{X}$. ¿Y si a fuera $(1,0)$?

Junio 2018

Tema sin demostraciones. El grupo fundamental de la circunferencia.

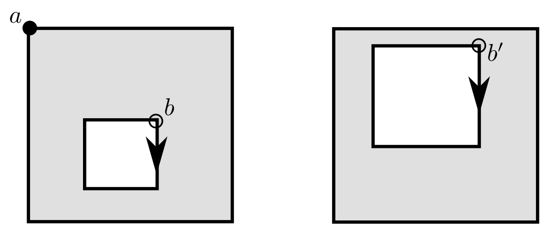
Tema con demostraciones. Demostrar que un espacio compacto y T_2 es localmente compacto. Subespacios localmente compactos de un espacio T_2.

Problema 1. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología obtenida tomando como base de entornos de un punto p los conjuntos E unión de dos discos cerrados tangentes en p en los extremos de sus dos diámetros horizontales. Encontrar una base de entornos *abiertos* de esta topología.

(1) Estudiar si con esta topología $\mathbb{R}^2$ es localmente compacto.

(2) Estudiar si con esta topología $\mathbb{R}^2$ es localmente conexo.

Problema 2. Se consideran dos cuadrados cerrados y en el interior de cada uno se suprime otro abierto más pequeño y se identifican con la misma orientación los bordes de los cuadrados suprimidos. La figura resume la situación.



El espacio resultante de esta identificación se denota X. Se hace lo mismo pero

(i) antes de identificar se suprime un vértice a de un cuadrado grande,

(ii) antes de identificar se suprimen dos vértices b, b' correspondientes de los cuadrados pequeños.

Los espacios resultantes se denotan respectivamente Y y Z.

(1) Encontrar modelos sencillos de X, Y y Z en $\mathbb{R}^3$.

(2) Calcular los grupos fundamentales de estos tres espacios.

Septiembre 2018

Tema sin demostraciones. El grupo fundamental.

Tema con demostraciones. Componentes conexas. Conexión local.

Problema 1. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología producto de la de Sorgenfray y la de los complementarios numerables.

(1) Estudiar los axiomas de numerabilidad de este espacio.

(2) Calcular sus componentes conexas y sus componentes conexas por caminos.

Problema 2. En el rectángulo $K \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(-1,0), (1,0), (1,1)$ y $(-1,1)$ se considera la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ generada por

$$\begin{aligned}
&(-1,y) \sim (1,y) \text{ para } 0 \le y \le 1,\\
&(-\tfrac{1}{2},y) \sim (-\tfrac{1}{2},y') \text{ para } 0 \le y,y' \le 1,\\
&(\tfrac{1}{2},y) \sim (\tfrac{1}{2},y') \text{ para } 0 \le y,y' \le 1.
\end{aligned}$$

(1) Describir un conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo al espacio cociente $K \setminus \{(0,0)\}/\!\sim$.

(2) Calcular el grupo fundamental de X.

Mayo 2019

Tema sin demostraciones. Espacios cocientes e identificaciones: definiciones, propiedades y comportamiento de compacidad y conexión.

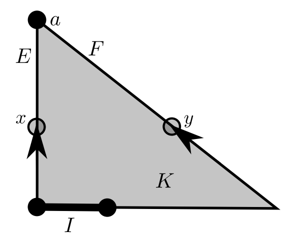
Tema con demostraciones. Bases de abiertos y bases de entornos. Numerabilidad.

Problema 1. Se considera en el plano $\mathbb{R}^2$ la topología producto de la de Sorgenfray y la usual.

(1) Estudiar la local compacidad de este espacio.

(2) Calcular sus componentes conexas por caminos. ¿Es localmente conexo este espacio?

Problema 2. En un triángulo $K \subset \mathbb{R}^2$ como en el dibujo se identifican todos los puntos del intervalo cerrado I con le vertice a, y cada punto x del lado E con el punto y del lado F a igual altura.



(1) Describir un conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente resultante.

(2) Calcular el grupo fundamental de X.

Junio 2019

Tema sin demostraciones. Espacios conexos y localmente conexos.

Tema con demostraciones. Enunciar las propiedades del producto de caminos y demostrar la asociatividad.

Problema 1. Sea $L \subset \mathbb{R}^2$ la recta $y = 0$. Se considera en $\mathbb{R}^2$ la topología generada por los conjuntos $W = U \cup (V \cap L)$ con U, V abiertos usuales.

(1) ¿Existe algún compacto usual que no lo sea en esta topología? Estudiar la local compacidad.

(2) Calcular las componentes conexas de este espacio. ¿Es localmente conexo?

Problema 2. Se considera un triángulo cerrado $T \subset \mathbb{R}^2$ y se identifican sus tres vértices.

(1) Representar el espacio cociente resultante X mediante un subconjunto de la esfera.

(2) Calcular el grupo fundamental de X.