Probabilidad

Ejercicios resueltos

Gwydion José Martín Ventura

Alicia Merayo Corcoba

Doble grado Ingeniería Informática-Matemáticas

Curso 2013/14

Índice general

0

Combinatoria

Ejercicio 0.1.

a. **Supongamos un alfabeto de n letras. Determinar cuántas iniciales diferentes se pueden formar con dos letras.**

b. **Determinar cuántas letras debería tener el alfabeto para que un millón de personas puedan ser identificadas mediante tres iniciales.**

a. Suponemos que las letras se pueden repetir. Son variaciones con repetición de 2 elementos tomados entre n. Por lo tanto hay n^2 iniciales diferentes.

b. Con 3 iniciales tenemos n^3 posibilidades.

$$n^3 = 1000000 \iff n = \sqrt[3]{1000000} = 100$$

Ejercicio 0.2. **Determinar cuántos números de tres cifras pueden tenerse su se emplean sólo cifras impares. Calcular cuántos de estos números son menos que 500.**

Tenemos cinco cifras impares. Es una variación con repetición de 3 elementos tomados entre 5. Por tanto tenemos $5^3 = 125$ números.

Los números serán menores que 500 si la primera cifra es 1 o 3. Por tanto, tenemos dos posibilidades para la primera cifra y 5 para cada una de las siguientes. Por tanto tenemos $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ números.

Ejercicio 0.3. **Se eligen cinco bolas de entre diez disponibles, siendo ordenadas en cinco cajas. Determinar de cuántas maneras distintas pueden colocarse.**

Para repartir r objetos en n grupos hay $\binom{n+r-1}{r}$ posibles repartos. En este caso r y n son ambas 5, por lo que el número de repartos es

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 3^2 \cdot 7 = 63$$

Ejercicio 0.4. **Calcular en cuántos subconjuntos de tres elementos de cinco posibles aparece un elemento específico.**

Uno de los elementos ya está determinado. Para escoger los otros dos, es un subconjunto, luego tenemos una combinación de 2 elementos tomados entre 4. Por tanto, el número de subconjuntos es

$$1 \cdot \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Ejercicio 0.5. **Se dispone de dos mesas para tres y seis personas. Calcular de cuántas formas pueden distribuirse nueve invitados.**

En cada mesa las posibilidades de colocar a los que se sienten en ellas se pueden calcular mediante permutaciones circulares. En una permutación circular de n elementos hay $(n-1)!$ permutaciones posibles. Por tanto, para cada elección de los invitados tenemos 2 formas de colocarlos en la mesa de 3 y 5! formas de colocarlos en la mesa de 6.

Las formas de escoger qué invitados se ponen en la mesa de 3 y cuáles en la de 6 son $\binom{9}{3}$. Basta escoger los que se ponen en la mesa de 3, el resto se pondrán en la de 6.

Por tanto, el número de posibilidades de sentar a los invitados es

$$\binom{9}{3} \cdot (2 + 5!) = 84 \cdot (2 + 5!) = 1248$$

Ejercicio 0.6. **Demostrar la identidad** $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

Por el teorema del binomio se sabe que

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Si tomamos $a, b = 1$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Ejercicio 0.7. **Calcular de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra 'catarata'.**

De cada letra tenemos

$$c : 1 \qquad a : 4 \qquad t : 2 \qquad r : 1$$

Son permutaciones con repetición (o repartos ponderados) en cuatro grupos:

$$\binom{n}{1,4,2,1} = \binom{8}{1,4,2,1} = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

Ejercicio 0.8. **Calcular cuántas señales diferentes, cada una de seis banderas colocadas en una línea vertical, pueden formarse con cuatro banderas rojas idénticas y dos banderas azules idénticas.**

Al igual que en el ejercicio anterior, es una permutación de 6 objetos donde 4 son iguales y 2 son iguales. Por tanto el número de señales es

$$\binom{6}{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Ejercicio 0.9. **Si se dispone de cuatro grupos de individuos (tres americanos, cuatro franceses, cuatro daneses y dos italianos), calcular de cuántas formas posibles pueden sentarse en una fila de sillas cuando aquellos de igual nacionalidad se sientan correlativamente.**

Si los de la misma nacionalidad se sientan juntos, son como un solo elemento. Tenemos cuatro nacionalidades, por lo que el número de formas de sentarlos será una permutación con $n = 4$

$$4! = 24$$

Ejercicio 0.10. **Calcular como pueden distribuirse nueve juguetes entre cuatro niños cuando el menor de éstos recibe tres juguetes y cada uno de los restantes recibe dos juguetes.**

Podemos escoger los juguetes que le tocan al pequeño de $\binom{9}{3}$ formas. Para saber de cuántas formas podemos repartir el resto, el número de subconjuntos posibles que podemos formar es

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$$

. Las formas de ordenar cada reparto de juguetes son una permutación de tres elementos, por tanto, tenemos que las formas de repartir los juguetes entre los niños son

$$\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 3! = 45360$$

Ejercicio 0.11. **Con las vocales 'a,e,i,o,u'y las consonantes 'b,c,d,f', calcular el número de palabras de nueve letras distintas que pueden formarse. Calcular este número cuando no hay vocales juntas.**

Si cualquier letra puede ir donde queramos, el número de palabras es una permutación de nueve elementos, es decir, $9! = 362880$.

Si no hay vocales juntas, las vocales tienen que ir en las posiciones impares de la palabra (suponemos que la primera letra ocupa la posición uno y la última letra la posición 9). Las formas de colocar estas vocales es una permutación de 5 elementos. Además, las formas de colocar las consonantes en las posiciones pares también es una permutación, esta vez de cuatro elementos. Por tanto, el número de palabras es

$$5! \cdot 4! = 2880$$

Ejercicio 0.12. **Se rellena un test de doce items, donde las respuestas son 'verdadero'y 'falso'. Se ha decidido contestar a seis items de forma aleatoria. Determinar el número de formas en que puede hacerse.**

Las formas se escoger los seis items que vamos a responder de forma aleatoria son $\binom{12}{6}$. Además, para cada respuesta aleatoria hay dos opciones, luego en las seis respuestas aleatorias tenemos 2^6 opciones. Por tanto, el número de formas de responder es

$$\binom{12}{6} \cdot 2^6 = 59136$$

Ejercicio 0.13. **Calcular cuántos números naturales de cuatro cifras hay con todas las cifras diferentes.**

Tenemos 9 posibilidades para escoger el primer número (no puede empezar por 0), 9 posibilidades para la segunda cifra, 8 para la tercera y 7 para la cuarta. Por tanto, el número de posibilidades es

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

Ejercicio 0.14. **Calcular cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos '1,3,5,7 y 9'. Calcular cuánto suman todos ellos.**

Suponemos que podemos repetir las cifras, es una variación con repetición de 3 elementos tomados entre 5, por lo que tenemos $5^3 = 125$ números distintos.

Tenemos 25 números que acaban en 9, 25 que acaban en 7... Por tanto, las unidades de todos ellos suman $25 \cdot (9+7+5+3+1) = 25 \cdot 25 = 625$. De nuevo tenemos 25 números que tienen un 9 en sus decenas, 25 número que en las decenas tienen un 7... y similar con las centenas. Por lo que la suma de estos números es

$$625 + 625 \cdot 10 + 625 \cdot 100 = 69375$$

Ejercicio 0.15. **Supongamos el conjunto de dígitos** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$**.**

a) **Calcular en cuántas ordenaciones de los elementos del conjunto aparecen el 1 y el 2 seguidos.**

b) **Calcular en cuántas ordenaciones de los elementos del conjunto aparecen el 1 y el 2 ordenados.**

a) Si el 1 y el 2 están seguidos, son como un elemento, por la que las formas de ordenarlos son 5!. Además, para cada una de esas ordenaciones puede ir el 1 primero o ir el 2 (tenemos dos posibilidades). El número de ordenaciones posibles es

$$2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$$

b) Si el 1 y el 2 están ordenados, el número de ordenaciones posibles es

$$5! = 120$$

Ejercicio 0.16.

a) **Calcular la cantidad de números de tres cifras que son capicúas.**

b) **Análogo en el caso de números de cinco cifras.**

a) Si son capicúas, sólo tenemos que escoger el primer dígito y el segundo, ya que el tercero será igual que el primero. Por tanto tenemos $9 \cdot 10 = 90$ números (el primer número no puede ser 0).

b) Si son cinco cifras, tenemos que hay $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números posibles, ya que el cuarto dígito es igual que el segundo y el quinto dígito es igual que el primero.

Ejercicio 0.17. **Determinar cuántas soluciones tiene la ecuación** $x+y+z = 8$ **con** x, y, z **enteros mayores que cero. Generalizar un resultado para** $x_1 + \ldots + x_k = n$**.**

Tenemos seis posibilidades de escoger la x:

$x = 1$: la y puede ser 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si determinamos x e y, la z queda determinada.

$x = 2$: la y puede ser 1, 2, 3, 4 o 5.

$x = 3$: la y puede ser 1, 2, 3 o 4.

$x = 4$: la y puede ser 1, 2 o 3.

$x = 5$: la y puede ser 1 o 2.

$x = 6$: la y sólo puede ser 1.

Por tanto el número de soluciones es $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Para generalizar este resultado, tenemos que en caso de $k = 3$ la solución es $\sum_{i=0}^{n-k}(1 + i)$. Con $k = 4$, la solución es $\sum_{i=0}^{n-k}\left(1 + i + \sum_{j=0}^{n-k-i}(1 + j)\right)$. Generalizando este resultado tenemos que con k incógnitas, el número de soluciones es

$$\sum_{i_1=0}^{n-k}\left(1 + i_1 + \sum_{i_2=0}^{n-k-i_1}(1 + i_2 + \dots \sum_{i_k=0}^{n-k-i_1-\dots-i_{k-1}}(1 + i_k))\right)$$

Ejercicio 0.18. **Para transmitir señales desde una isla a la costa, se dispone de 6 luces blancas y 6 luces rojas colocadas en el vértice de un hexágono. En cada vértice no puede haber encendida más que una luz (blanca o roja) y el número mínimo de luces encendidas es tres. Determinar cuántas señales se pueden realizar.**

Si encendemos tres vértices del hexágono tenemos 2^3 señales, con cuatro vértices, 2^4, con cinco 2^5 y con seis, 2^6. Por tanto, el número de señales es

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 8 + 16 + 32 + 64 = 120$$

1

Introducción al cálculo de probabilidades

***Ejercicio* 1.1. Dados el conjunto $B \subset \Omega$ y las sucesiones $\{A_n : n \geq 1\} \subset P(\Omega)$ y $\{B_n : n \geq 1\} \subset P(\Omega)$, se pide:**

a) **Demostrar la igualdad lím sup** $A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n$

b) **Si** $A_n \downarrow$**, demostrar que existe** $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ **y que** $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

c) **Demostrar que lím sup** $A_n =$ **lím sup** $A_{2n} \cup$ **lím sup** A_{2n-1} **y lím inf** $A_n =$ **lím inf** $A_{2n} \cap$ **lím inf** A_{2n-1}

d) **Demostrar que lím sup** $(B - A_n) = B -$ **lím inf** A_n **y lím inf** $(B - A_n) = B -$ **lím sup** A_n

e) **Demostrar que** (**lím sup** $A_n)^c =$ **lím inf** A_n^c **y** (**lím inf** $A_n)^c =$ **lím sup** A_n^c

f) **Demostrar que lím sup**$(A_n \cup B_n) =$ **lím sup** $A_n \ \cup$ **lím sup** B_n **y lím inf**$(A_n \cap B_n) =$ **lím inf** $A_n \ \cap$ **lím inf** B_n

a)

$$\begin{aligned}
\omega \in \limsup A_n &\iff \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_n : n \geq 1\} \\
&\iff \forall k \geq 1 \quad \omega \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \\
&\iff \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n
\end{aligned}$$

b) Si $A_n \downarrow \implies A_1 \supset A_2 \ldots A_k \supset A_{k+1} \supset A_{k+2} \ldots$ luego la unión es $A_k \quad \forall k$. La intersección desde el índice 1 es la misma que la intersección desde el índice k

Evaluamos:

- $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$
- $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Longrightarrow \liminf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \limsup A_n$$

$$\text{es decir, } \exists \lim_{n\to\infty} A_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

c)

- $\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}$

$$\begin{aligned}
\omega \in \limsup A_n &\iff \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_n : n \geq 1\}\\
&\iff \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_{2n} : n \geq 1\}\\
&\ \text{o}\\
&\ \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_{2n-1} : n \geq 1\}\\
&\iff \omega \in \limsup A_{2n} \quad \text{o} \quad \omega \in \limsup A_{2n-1}\\
&\iff \omega \in \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}
\end{aligned}$$

- $\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}$

$$\begin{aligned}
\omega \in \liminf A_n &\iff \omega \text{ pertenece a todo conjunto } A_n \text{ excepto a una cantidad finita de ellos}\\
&\iff \omega \text{ pertenece a todo } A_{2n} \text{ excepto a una cantidad finita}\\
&\ \text{y}\\
&\ \omega \text{ pertenece a todo } A_{2n+1} \text{ excepto a una cantidad finita}\\
&\iff \omega \in \liminf A_{2n} \text{ y } \omega \in \liminf A_{2n-1}\\
&\iff \omega \in \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}
\end{aligned}$$

d)

- $\limsup\,(B - A_n) = B - \liminf A_n$
  Por las leyes de Morgan:

  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$
  $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$$\begin{aligned}
\limsup\,(B - A_n) &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(B - A_k) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(B \cap A_k^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) =\\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c\right) = B \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c =\\
&= B - \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = B - \liminf A_n
\end{aligned}$$

- $\liminf\,(B - A_n) = B - \limsup A_n$

$$\begin{aligned}
\liminf\,(B - A_n) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(B - A_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(B \cap A_k^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) =\\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(B \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c\right) = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c\right) = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c =\\
&= B - \limsup A_n
\end{aligned}$$

e)

- $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c$$

- $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$

$$(\liminf A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k)^c = \limsup A_k^c$$

f)

- $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$

$$\begin{aligned}
\omega \in \limsup(A_n \cup B_n) &\iff \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_n \cup B_n : n \geq 1\}\\
&\iff \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{A_n : n \geq 1\}\\
&\quad\ \text{o}\\
&\quad\ \omega \text{ pertenece a infinitos conjuntos de } \{B_n : n \geq 1\}\\
&\iff \omega \in \limsup A_n \cup \limsup B_n
\end{aligned}$$

- $\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$

$$\begin{aligned}
\omega \in \liminf(A_n \cap B_n) &\iff \omega \text{ pertenece a todos los conjuntos de } \{A_n \cap B_n : n \geq 1\}\\
&\quad\ \text{excepto a una cantidad finita de ellos}\\
&\iff \omega \text{ pertenece a todos los conjuntos de } A_n\\
&\quad\ \text{excepto a una cantidad finita}\\
&\quad\ \text{y}\\
&\quad\ \omega \text{ pertenece a todos los conjuntos de } B_n\\
&\quad\ \text{excepto a una cantidad finita}\\
&\iff \omega \in \liminf A_n \text{ y } \omega \in \liminf B_n\\
&\iff \omega \in \liminf A_n \cap \liminf B_n
\end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. **Determinar los límites inferiores y superiores de $\{A_n : n \geq 1\}$ cuando:**

a) $A_{2n-1} = \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{n}, \frac{5n}{2n+2}\right]$ $\qquad A_{2n} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \left(-\frac{2}{n}, \frac{7n+3}{9n}\right]$

b) $A_{3n-2} = \left(\frac{n-1}{5n+3}, \frac{2n-1}{n}\right]$ $\qquad A_{3n-1} = \left(\frac{3n}{5n+1}, \frac{3n+2}{n}\right)$ $\qquad A_{3n} = \left[1, \frac{2n^2+1}{n+2}\right)$

c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\}$

a)

- Por un lado, $\liminf_{n\to\infty} A_n = \emptyset$, ya que $A_{2n-1} \subset \mathbb{Q}$ y $A_{2n} \subset (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

- Por otro, veamos el límite superior de A_n, teniendo en cuenta que la subsucesión A_{2n} es monótona decreciente:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_{2n} &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left((\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap\left(-\tfrac{2}{n},\tfrac{7n+3}{9n}\right]\right) = (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\tfrac{2}{n},\tfrac{7n+3}{9n}\right]\right) = \\
&= (\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap\left[0,\tfrac{7}{9}\right] \\
\limsup_{n\to\infty} A_{2n-1} &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\mathbb{Q}\cap\left[\tfrac{1}{n},\tfrac{5n}{2n+2}\right]\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{Q}\cap\left[\tfrac{1}{k},\tfrac{5}{2}\right]\right) = \\
&= \mathbb{Q}\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{k},\tfrac{5}{2}\right]\right) = \mathbb{Q}\cap\left(0,\tfrac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left((\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap\left[0,\tfrac{7}{9}\right]\right)\cup\left(\mathbb{Q}\cap\left(0,\tfrac{5}{2}\right)\right) = \left(0,\tfrac{7}{9}\right)\cup\left(\mathbb{Q}\cap\left[\tfrac{7}{9},\tfrac{5}{2}\right)\right)$$

b)

- La subsucesión A_{3n-1} es decreciente, y la subsucesión A_{3n} es creciente, por lo que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A_{3n-1} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{3n}{5n+1},\tfrac{3n+2}{n}\right) = \left[\tfrac{3}{5},3\right] \\
\lim_{n\to\infty} A_{3n} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1,\tfrac{2n^2+1}{n+2}\right) = [1,\infty)
\end{aligned}$$

- Veamos qué sucede con la subsucesión A_{3n-2}:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_{3n-2} &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_{3n-2} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\left(\tfrac{n-1}{5n+3},\tfrac{2n-1}{n}\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{k-1}{5k+3},2\right) = \left[\tfrac{1}{5},2\right) \\
\liminf_{n\to\infty} A_{3n-2} &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_{3n-2} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left(\tfrac{n-1}{5n+3},\tfrac{2n-1}{n}\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{5},\tfrac{2k-1}{k}\right] = \left[\tfrac{1}{5},2\right)
\end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \limsup_{n\to\infty} A_{3n-2}\cup\limsup_{n\to\infty} A_{3n-1}\cup\limsup_{n\to\infty} A_{3n} = \left[\tfrac{1}{5},\infty\right) \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \liminf_{n\to\infty} A_{3n-2}\cap\liminf_{n\to\infty} A_{3n-1}\cap\liminf_{n\to\infty} A_{3n} = [1,2)
\end{aligned}$$

c) A_n es una sucesión monótona creciente, por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\tfrac{1}{n},3-\tfrac{1}{n}\right] = (0,3)$$

Ejercicio 1.3. **Supongamos** $\Omega = \mathbb{R}^2$**. Calcular los conjuntos** $\lim_{n\to\infty} E_n$**,** $\lim_{n\to\infty} E_n^c$**,** $\lim_{n\to\infty} F_n$**,** $\lim_{n\to\infty} F_n^c$ **y** $\lim_{n\to\infty}(E_n \cap F_n^c)$**, donde:**

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 + \tfrac{1}{n}\right\}$$
$$F_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \tfrac{n}{n+1}\right\}$$

Para simplificar, tomamos las equivalencias $E_n \approx \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right)$, que es una subsucesión decreciente, y $F_n \approx \left(0, \frac{n}{n+1}\right]$, que es creciente. Así:

$$\lim_{n\to\infty} \left[0, 1 + \tfrac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, 1 + \tfrac{1}{n}\right) = [0,1] \implies \lim_{n\to\infty} E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} E_n^c = \left(\lim_{n\to\infty} E_n\right)^c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(0, \tfrac{n}{n+1}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \tfrac{n}{n+1}\right] = [0,1) \implies \lim_{n\to\infty} E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n^c = \left(\lim_{n\to\infty} F_n\right)^c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} (E_n \cap F_n^c) = \left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) \bigcap \left(\lim_{n\to\infty} F_n^c\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Ejercicio 1.4. **Calcular** $\lim_{n\to\infty} A_n$ **en los siguientes casos:**

a) $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{n}\right\}$

b) $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\right\}$

a) Para simplificar, tomamos la equivalencia $A_n \approx \left[\frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n}\right]$. Como la sucesión es monótona creciente:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\tfrac{1}{n}, 4 - \tfrac{1}{n}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\tfrac{1}{n}, 4 - \tfrac{1}{n}\right] = (0,4)$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\right\}$$

b) Para simplificar, tomamos la equivalencia $A_n \approx \left[0, \frac{1}{n}\right]$. Como la sucesión es monótona decreciente:

$$\lim_{n\to\infty} \left[0, \tfrac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \tfrac{1}{n}\right] = \{0\}$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\right\} = \{(0,0)\}$$

Ejercicio 1.5. **Estudiar la convergencia de la sucesión** $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ **en los siguientes casos:**

a) $A_{2n} = \left(-\frac{1}{n}, 1\right]$, $A_{2n-1} = \left(-1, \frac{1}{n}\right]$

b) $A_{2n} = \left[\frac{1}{n}, 1\right)$, $A_{2n-1} = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right]$

a) Como ambas subsucesiones son monótonas decrecientes:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1\right] = [0, 1]$$
$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1, \frac{1}{n}\right] = (-1, 0]$$

Por tanto:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_{2n} \cap \liminf_{n\to\infty} A_{2n+1} = \{0\}$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_{2n} \cup \limsup_{n\to\infty} A_{2n+1} = (-1, 1]$$

El límite superior y el límite inferior no coinciden, luego no existe el límite de la sucesión.

b) Como ambas subsucesiones son monótonas crecientes:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right) = (0, 1)$$
$$\lim_{n\to\infty} A_{2n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1)$$

Por tanto:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_{2n} \cap \liminf_{n\to\infty} A_{2n+1} = (0, 1)$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_{2n} \cup \limsup_{n\to\infty} A_{2n+1} = (0, 1)$$

El límite superior y el límite inferior coinciden, por lo que existe el límite de A_n y es $(0, 1)$.

2 Probabilidad

Ejercicio 2.1. **Sean Ω un espacio muestral y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Para $A \in \mathcal{A}$ fijado, se define**

$$\mathcal{A}_A = \{B \subset \Omega : B = A \cap C \text{ con } C \in \mathcal{A}\}$$

Demostrar que $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{P}(A)$ es σ-álgebra.

- $\underline{A \in \mathcal{A}_A}$

  $A \in \mathcal{A}_A$ puesto que $A = A \cap \Omega \quad$ y $\quad \Omega \in \mathcal{A} \subset P(\Omega)$

- $\underline{\forall B \in \mathcal{A}_A,\ B^c \in \mathcal{A}_A}$

  Sea $B \in \mathcal{A}_A$, es decir, $\exists C \in \mathcal{A} \shortparallel B = A \cap C$. Comprobemos ahora que $B^c_A \in \mathcal{A}_A$

  $B^c_A = A - B = A \cap B^c = A \cap (A \cap C)^c = A \cap (A^c \cup C^c) = \cancel{(A \cap A^c)} \cup (A \cap C^c) = A \cap C^c$,
  donde $C^c \in \mathcal{A}$

- $\underline{\forall \{B_n : n \geq 1\} \in \mathcal{A}_A,\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_A}$

  Sea $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_A$. Entonces $\exists C_n \in \mathcal{A}$ tal que $B_n = A \cap C_n$ para cada $n \geq 1$. Planteamos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n) = A \cap \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Ejercicio 2.2. **Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión monótona decreciente, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. Demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$**

Si $A_n \downarrow \Longrightarrow A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $A_n^c \uparrow y \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = A^c$

Es decir, podemos afirmar:

$$\exists \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P\Big(\lim_{n\to\infty} A_n^c\Big)$$

donde:

- $\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

- $P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n^c) = P(A^c) = 1 - P(A)$

$$\implies 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - P(A) \iff P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Ejercicio 2.3. **Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión convergente, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. Demostrar que existe $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$**

Observamos que $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \forall n \geq 1$

Sabemos que $\exists A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, es decir:

$$A = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

siendo:

1. $$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow, \text{ luego su límite es } \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A$$

2. $$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow, \text{ luego su límite es } \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A$$

Desde (1), $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A)$

Desde (2), $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) y \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = P(A)$

Además,

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq P(A_n) \leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \quad \forall n \geq 1$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)}_{P(A)} \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)}_{P(A)}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

Ejercicio 2.4. **Sean $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ y $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ dos σ-álgebras, y sea $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Demostrar que $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, para cada $\omega_1 \in \Omega_1$, y que $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, para cada $\omega_2 \in \Omega_2$.**

Ejercicio 2.5. **Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra y $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Demostrar las siguientes desigualdades:**

a) $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$

b) $\limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$

c) **Además, resolver el ejercicio 3 desde (5.a) y (5.b).**

a) Como $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, tomamos $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \uparrow$, converge a $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$

Además, $B_n \subset A_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \liminf A_n$. Entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) \underbrace{=}_{B_n\uparrow} P\Big(\lim\limits_{n\to\infty} B_n\Big) = P(\liminf A_n)$
- $B_n \subset A_n, \quad \forall n \geq 1 \implies P(B_n) \leq P(A_n), \quad \forall n \geq 1$

$$\implies P(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \liminf P(B_n) \overbrace{\leq}^{B_n\subset A_n,\, \forall n\geq 1} \liminf P(A_n)$$

b) Como $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, tomamos $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, por lo que $C_n \downarrow$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Además,

$$A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} C_n = \limsup A_n$$

Entonces:

- $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_n) \underbrace{=}_{C_n\downarrow} P\Big(\lim\limits_{n\to\infty} C_n\Big) = P(\limsup A_n)$
- $A_n \subset C_n,\ \forall n \geq 1 \implies P(A_n) \leq P(C_n),\ \forall n \geq 1$

$$\implies \limsup P(A_n) \leq \limsup P(C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(\limsup A_n)$$
$$\implies \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$$

c) Si $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ es convergente $\implies \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$$
$$\limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$$
$$\limsup P(A_n) \leq P(\lim_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf P(A_n)$$
$$\implies \limsup P(A_n) \leq \liminf P(A_n)$$

Pero sabemos que $\liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n)$

$$\implies \limsup P(A_n) = \liminf P(A_n)$$
$\implies$ la sucesión $P(A_n)$ converge, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$
$$\implies P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Ejercicio 2.6. **Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable y $\{P_n : n \geq 1\}$ una sucesión de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Se define $P : \mathcal{A} \to [0,1]$**

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A),$$

donde $a_n \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Demostrar que P es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.

- $\underline{P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}}$

$$\text{Es claro que } a_n \geq 0, \quad P_n(A) \geq 0 \quad \forall n \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A) \geq 0$$

- $\underline{P(\Omega) = 1}$

$$P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{P_n(\Omega)}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A} \text{ con } A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j \implies P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)}$

  Planteamos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{P_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}_{\sum_{i=1}^{\infty} P_n(A_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A_i)}_{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Observación. En el último punto, en la segunda igualdad, aplicamos el teorema de Fubini para series, que estudiaremos en el segundo cuatrimestre. Se puede hacer porque son términos positivos $(a_n P_n(A_i) \geq 0 \quad \forall i, n)$ y la serie es absolutamente convergente:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(A_i) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_n P_n(A_i) \text{ convergen}$$

***Ejercicio* 2.7. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ el espacio probabilizable con $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Demostrar que las funciones del conjunto $\mathcal{P}$ dadas en (7.a) y (7.b) son medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ y determinar las probabilidades de los conjuntos de (7.c).**

a) $P(A) = \sum_{x \in \mathcal{A}} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

b) $P(A) = \sum_{x \in A} p(1-p)^x$, siendo $p \in (0, 1)$

c) $A = \{x > 2\},\ B = \{x < 3\},\ C = \{3 < x < 6\},\ A \cap B,\ A \cup B,\ B \cap C,\ A \cup C^c$ y $B \cap C^c$

a)
- $\underline{P(A) \geq 0}$ Por definición.
- $\underline{P(\Omega) = 1}$

$$P(\mathbb{N}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A} \text{ con } A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \forall i \neq j \implies P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{x \in A_n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

b)
- $\underline{P(A) \geq 0}$ Por definición.
- $\underline{P(\Omega) = 1}$

$$P(\mathbb{N}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n = p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A} \text{ con } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \implies P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} p(1-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{x \in A_n} p(1-p)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

c) - $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(\{x \in \mathbb{N}_0 : x > 2\}) &= \sum_{x=3}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} -1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right) \end{aligned}$$

- $P(B)$:

$$P(\{x \in \mathbb{N}_0 : x < 3\}) = \sum_{x=0}^{2} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)e^{-\lambda}$$

- $P(C)$:

$$P(\{x \in \mathbb{N}_0 : 3 < x < 6\}) = \sum_{x=4}^{5} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^5}{5!} + \frac{\lambda^4}{4!}\right) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{5} + 1\right)\frac{\lambda^4}{4!}$$

- $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(\mathbb{N}_0) = 1$
- $P(B \cap C) = P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cap C^c)$:

$$\begin{aligned} P(\{x \in \mathbb{N}_0 : x = 3 \text{ ó } x \geq 6\}) &= P(\{3\}) + P(\{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 6\}) \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} + \sum_{x=6}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!} + e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3!} - \frac{\lambda^4}{4!} - \frac{\lambda^5}{5!}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \cancel{\frac{\lambda^3}{3!}} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!} - \cancel{\frac{\lambda^3}{3!}}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!}\right) \end{aligned}$$

- $P(B \cap C^c) = P(B)$

***Ejercicio** 2.8.* **Sean $\mathbb{N}_p$ y $\mathbb{N}_i$ los conjuntos de números naturales pares e impares, respectivamente. Definimos la familia de subconjuntos $\mathcal{C} = \{A \cup \mathbb{N}_i : A \subset \mathbb{N}_p\}$. Estudiar si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene estructura de algebra.**

Veamos que no satisface una de las tres condiciones para ser álgebra. En concreto, la condición que dice que si $A \in \mathcal{C}$, entonces $A^c \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } A_0 \in \mathcal{C} &\implies \exists\, A_p \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_p) \shortparallel A_0 = A_p \cup \mathbb{N}_i \implies \\
&\implies A_0^c = (A_p \cup \mathbb{N}_i)^c = A_p^c \cap \mathbb{N}_i^c = A_p^c \cap \mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}_p \implies \\
&\implies A_0^c \notin \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.9. **Demostrar que $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : A$ finito o A^c finito$\}$ tiene estructura de álgebra, pero no es una σ-álgebra de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.**

- $\underline{\mathbb{N} \in \mathcal{C}}$ (trivial, $\mathbb{N}$ es infinito)
- $\underline{\forall\, A \in \mathcal{C}, A^c \in \mathcal{C}}$
  - A finito: $(A^c)^c = A$ finito $\Rightarrow A^c \in \mathbb{N}$.
  - A infinito: A^c infinito $\Rightarrow A^c \in \mathbb{N}$.
- $\underline{\forall\, A, B \in \mathcal{C}, A \cup B \in \mathcal{C}}$
  Por el punto anterior, $A \cup B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathcal{C}$. Por tanto, veamos esta última pertenencia.
  - A, B finitos: $A \cap B$ finito $\Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{C}$.
  - A, B infinitos: $(A \cap B)^c$ finito $\Rightarrow (A \cap B)^c \in \mathcal{C} \Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{C}$.
  - A finito, B infinito *(o viceversa)*: $(A \cap B) \subset A$ (que es finito) $\Rightarrow (A \cap B) \in \mathcal{C}$.

Esto prueba que $\mathcal{C}$ tiene estructura de álgebra. Sin embargo, veamos que no cumple la condicion adicional para ser σ-álgebra:

- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \in \mathcal{C},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}}$
  Sea $A_n = \{2n\}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \cup A_n = \mathbb{N}_p,\ (\cup A_n)^c = \mathbb{N}_i$, y ambos son infinitos.

Ejercicio 2.10. **Sean $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ y $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : 2n \in A$ si y sólo si $2n+1 \in A\}$. Demostrar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra.**

- $\underline{\Omega \in \mathcal{C}}$ (trivial, contiene a todos los números, pares e impares).
- $\underline{\forall\, A \in \mathcal{C}, A^c \in \mathcal{C}}$
  Sea $A \in \mathcal{C}$. Para $2n \in A$ se tiene que $2n \in A \iff 2n+1 \in A$. Entonces:

  $$2n \in A^c \iff 2n \notin A \iff 2n+1 \notin A \iff 2n+1 \in A^c$$

  Es decir, $A^c \in \mathcal{C}$, porque verifica lo mismo que le pedíamos a los puntos del conjunto A.
- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \in \mathcal{C},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}}$
  Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C}$. Notemos que

  $$\begin{aligned}
  2n \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\iff \exists\, j \in \mathbb{N} \shortparallel 2n \in A_j \\
  &\iff \exists\, j \in \mathbb{N} \shortparallel 2n+1 \in A_j \\
  &\iff 2n+1 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i
  \end{aligned}$$

Ejercicio 2.11. **Sean Ω un conjunto no-numerable y $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : A$ o A^c es numerable$\}$. Estudiar si $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra.**

- $\underline{\Omega \in \mathcal{C}}$ (trivial, $\Omega^c = \emptyset$ es numerable)
- $\underline{\forall A \in \mathcal{C}, A^c \in \mathcal{C}}$

$$A \in \mathcal{C} \implies \{A \text{ numerable ó } A^c \text{ numerable}\} \implies A^c \in \mathcal{C}$$

- $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \in \mathcal{C},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}}$
  - Cuando A_n es numerable, $\forall n \geq 1$

$$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ es numerable} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

  - Cuando A_n^c es numerable, $\forall n \geq 1$

$$\implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \underbrace{\subset A_1^c}_{\text{por ejemplo}} \quad \text{numerable} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

  - Cuando $\exists I \subset \mathbb{N}$ con $I \neq \emptyset$ y $\mathbb{N} - I \neq \emptyset$, tal que
    - A_i es numerable, $\forall i \in I$

$$\implies A_I = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ es numerable}$$

    - A_i^c es numerable, $\forall i \in \mathbb{N} - I$

$$\implies A_{\mathbb{N}-I} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}-I} A_i \text{ es tal que } A_{\mathbb{N}-I}^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}-I} A_i^c \text{ es numerable}$$

    Ahora:

$$A_{\mathbb{N}-I} \subset A_I \cup A_{\mathbb{N}-I} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = (A_I \cup A_{\mathbb{N}-I})^c \subset A_{\mathbb{N}-I}^c \text{ es numerable}$$

$$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$$

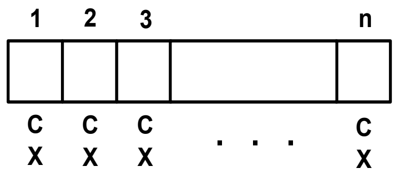
Ejercicio 2.12. **De los 30 temas de un examen, un alumno conoce 18 temas. Si se proponen los siguientes dos tipos de examen, determinar cuál de ellos es más favorable al alumno:**

1. **Se eligen 3 temas al azar y el alumno debe contestar 2**.
2. **Se eligen 5 temas al azar y el alumno debe contestar 3**.

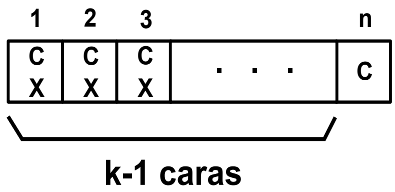
- $P(\text{“superar tipo 1”}) = \dfrac{\binom{18}{3} + \binom{18}{2}\binom{12}{1}}{\binom{30}{3}} = \dfrac{816 + 1836}{4060} = 0,6532$
- $P(\text{“superar tipo 2”}) = \dfrac{\binom{18}{5} + \binom{18}{4}\binom{12}{1} + \binom{18}{3}\binom{12}{2}}{\binom{30}{5}} = \dfrac{51408 + 36720 + 25296}{142506} = 0,7959$

***Ejercicio* 2.13. Calcular la probabilidad de que, al tirar una moneda n veces, obtengamos la k-ésima cara en la n-ésima tirada**

Sea A = "se obtiene la k-ésima cara en la n-ésima tirada". Como en todas las tiradas los sucesos son equiprobables, podemos aplicar la regla de Laplace. En total, hay 2^n sucesos elementales.



Para obtener la k-ésima cara:



En $n-1$ tiradas hay:

- $k-1$ caras
- $(n-1)-(k-1)$ cruces

Por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$$

***Ejercicio* 2.14. Se tiene un manojo de N llaves, donde solo una de ellas abre una puerta. Suponiendo que cada llave probada es retirada del manojo, determinar la probabilidad de que la puerta se abra en el k-ésimo intento. (Nota: todas las llaves deben ser probadas, por lo que es necesario hacer N intentos). Determinar también la probabilidad de este suceso cuando las llaves no se retiran del manojo**

- (se retiran las llaves tras cada intento)
  $P(\text{“se abre en el } k\text{-ésimo intento”}) = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$
- (no se retiran las llaves tras cada intento)
  $P(\text{“se abre en el } k\text{-ésimo intento”}) = \dfrac{(N-1)^{N-1}}{N^N} = \dfrac{1}{N}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{N-1}$

***Ejercicio* 2.15. En una urna se introducen n bolas, cada una de ellas de color blanco o negro con igual probabilidad. Se extraen k bolas con reemplazamiento desde la urna. Determinar la probabilidad de que la urna sólo contenga bolas blancas si las k bolas extraídas han sido blancas.**

Sean los sucesos:

- A_j: " la urna contiene j bolas blancas y $(n-j)$ bolas negras" $\quad j = 0, 1, \ldots, n$
- B: " las k bolas extraídas son blancas"

Se pide calcular:

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{P(B)}$$

donde:

- $P(A_j) = \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n$
- $P(B|A_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k$
- $P(B) = \sum_{j=0}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)$

Entonces:

$$P(A_n|B) = \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^k \cdot \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{j}{n}\right)^k\right)^{-1}$$

El sumatorio empieza en $j = 1$ por que para $j = 0$ la contribución es nula.

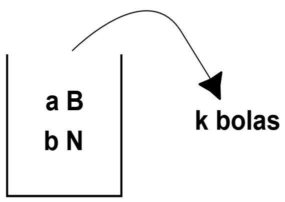
Ejercicio 2.16. **Se consideran $N + 1$ urnas idénticas numeradas desde 0 hasta N, conteniendo N bolas. En concreto, la i-ésima urna contiene i bolas negras y $N - i$ bolas blancas, para $0 \leq i \leq N$. Se escoge una urna al azar y se extraen n bolas una-a-una con reemplazamiento. Si las n bolas extraídas resultan ser negras, determinar la probabilidad de que, al extraer la $(n+1)$-ésima bola, ésta sea de color negro.**

Sean A="las n primeras bolas extraídas son negras", B="la $(n+1)$-ésima bola extraída es negra" y $\mathcal{U}_i$="la urna elegida contiene i bolas negras y $(N - i)$ bolas blancas", con $0 \leq i \leq N$. Por tanto, se pide evaluar el valor de $P(B/A)$.

- $P(A) = \sum_{i=0}^{N} P(\mathcal{U}_i) \cdot P(A/\mathcal{U}_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{i}{N}\right)^n$
- $P(A \cap B) = \sum_{i=0}^{N} P(\mathcal{U}_i) \cdot P(A \cap B/\mathcal{U}_i) = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}$

$$\Rightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{i}{N}\right)^n}{\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{N+1} \cdot \left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}} = \frac{\sum_{i=0}^{N} i^{n+1}}{N \cdot \sum_{i=0}^{N} i^{n+1}}$$

Ejercicio 2.17. **De una urna con a bolas blancas y b bolas negras, se extraen k bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las k bolas haya exactamente r bolas blancas?**



Por la regla de Laplace:

$$\text{P(“Entre } k \text{ bolas hay } r \text{ blancas”)} = \frac{\binom{a}{r} \cdot \binom{b}{k-r}}{\binom{a+b}{k}}$$

Ejercicio 2.18. **Se lanzan 2 dados n veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6 doble?**

$$
\begin{aligned}
&P(\text{“sacar un 6 doble en una tirada”}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &P(\text{“no sacar un 6 doble en una tirada”}) = \frac{35}{36} \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &P(\text{“no sacar un 6 doble en } n \text{ tiradas”}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n \Longrightarrow \\
\Longrightarrow\ &P(\text{“sacar al menos un 6 doble en } n \text{ tiradas”}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.19. **Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 amarillas y 4 blancas. Se extraen 8 bolas al azar. Calcular la probabilidad de que:**

a) **Exactamente sean 2 rojas, 2 verdes, 1 amarilla y 3 blancas.**

b) **Estén todas las bolas blancas.**

c) **Haya, al menos, una bola roja.**

a)

$$P(a) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{14}{8}} = 0{,}0799$$

b)

$$P(b) = \frac{\binom{10}{4} \cdot \cancel{\binom{4}{4}}}{\binom{14}{8}} = 0{,}0699$$

c)

$$P(c) = 1 - P(\text{“no hay bola roja”}) = 1 - \frac{\binom{9}{8}}{\binom{14}{8}} = 0{,}997$$

Ejercicio 2.20. **Con una moneda se juega a cara o cruz. Se suspenden los lanzamientos cuando por primera vez la diferencia entre el número de caras y el número de cruces es, en valor absoluto, igual a 3. Calcular la probabilidad de que los lanzamientos se suspendan en la sexta tirada o antes.**

Sean A="alcanzar una diferencia entre C y X igual a 3 como tarde en la sexta tirada", y T_i="alcanzar una diferencia entre C y X igual a 3 en la tirada i", con $3 \leq i \leq 6$. Veamos las posibles configuraciones de cada T_i:

- 3 lanzamientos: $\{CCC, XXX\}$
- 4 lanzamientos: no es posible.
- 5 lanzamientos: $\{CCXCC, XXCXX, CXCCC, XCXXX, XCCCC, CXXXX\}$
- 6 lanzamientos: no es posible.

$\Rightarrow P(A) = P(T_3) + P(T_5) = \dfrac{2}{2^3} + \dfrac{6}{2^5} = 0,44$

Ejercicio 2.21. **Los jugadores A, B y C participan en el siguiente juego: se lanza un dado y A gana si sale 1 ó 3, B gana si sale 4 ó 5, C gana si sale 6 y si sale 2 se vuelve a lanzar el dado. Calcular la probabilidad de que gane cada uno de los jugadores.**

Sean los sucesos:

- A: " gana el jugador A"
- A_k: " gana el jugador A en el k-ésimo lanzamiento"

$$\Longrightarrow \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \qquad \text{y} \qquad P(A_k) = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad k \geq 1$$

Es decir:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

Ahora para los sucesos:

- B: "gana el jugador B"
$$P(B) = P(A) = \frac{2}{5}$$
- C: "gana el jugador C"
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 2.22. **Una urna contiene 5 bolas negras y 4 blancas, y otra, 4 negras y 5 blancas. Supongamos que se trasladan 2 bolas de la primera a la segunda urna y, a continuacion, se extrae una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?**

Sean los sucesos:

- A: "la bola extraída de la urna dos es blanca"
- B_i: "se sacan de la urna uno i bolas blancas"

Entonces:

- $P(B_0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = 0{,}278$
- $P(B_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = 0{,}555$
- $P(B_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = 0{,}167$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_0)\cdot P(B_0) + P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) \\ &= \frac{5}{11}\cdot 0{,}278 + \frac{6}{11}\cdot 0{,}555 + \frac{7}{11}\cdot 0{,}167 \\ &= 0{,}535 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.23. **Se sabe que al lanzar cinco monedas aparecieron al menos dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que el numero de caras exacto fuese tres?**

Sean los sucesos:

- $A = \{\{C,C,X,X,X\},\{C,C,C,X,X\},\{C,C,C,C,X\},\{C,C,C,C,C\}\}$
- $B = \{\{C,C,C,X,X\}\}$

Se pide evaluar

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \underbrace{=}_{B\subset A \implies A\cap B = B} \frac{P(B)}{P(A)}$$

donde:

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{\binom{5}{3}\cdot\cancel{\binom{2}{2}}}{2^5} = \frac{5}{16} \\ P(A) &= 1 - P(\text{“Se obtienen 0 caras”}) - P(\text{“Se obtiene 1 cara”}) \\ &= 1 - \frac{\cancel{\binom{5}{5}}\cdot\cancel{\binom{1}{1}}}{2^5} - \frac{\binom{5}{1}\cdot\cancel{\binom{4}{4}}}{2^5} = 1 - \frac{1}{2^5} - \frac{5}{2^5} = \frac{13}{16} \\ P(B|A) &= \frac{\frac{5}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{5}{13} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.24. **Disponemos de una moneda y dos dados, A y B. A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda: si sale cara, se lanza repetidas veces el dado A, y si sale cruz, se hace lo mismo con el dado B.**

a) **Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento la cara observada sea roja.**

b) **Sabiendo que en los dos primeros lanzamientos hemos observado dos caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado lanzado sea A?**

Sean A=“obtener rojo en el primer lanzamiento”, B=“obtener cara en el lanzamiento de la moneda”, C=“obtener cruz en el lanzamiento de la moneda”, D=“lanzar el dado A” y E=“obtener rojo en los dos primeros lanzamientos”.

a) $P(A) = P(A/B) + P(A/C) = P(A)P(B) + P(A)P(C) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

b) $P(D/E) = \dfrac{P(E/D)P(D)}{P(E)} = \dfrac{[P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)]\cdot P(D)}{P(E)} = \dfrac{\left[\frac{2}{9}+\frac{1}{18}\right]\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}} = \dfrac{4}{5}$

Ejercicio 2.25. **Se lanzan dos monedas. Si es resultado es CC, se extraen dos bolas de la urna $\mathbf{U_1}$, que contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 negras. Si el resultado es CX, se extraen de $\mathbf{U_2}$, que contiene 2 rojas, 1 blanca y 5 negras. Si sale XC o XX, se extraen de $\mathbf{U_3}$, que contiene 6 rojas, 4 blancas y 6 negras. Si las dos bolas extraídas resultaron ser una blanca y otra roja, ¿cuál es la probabilidad de que sean de $\mathbf{U_1}$? ¿Y de $\mathbf{U_2}$?**

- $P(\mathcal{U}_1) = P(CC) = \frac{1}{4}$
- $P(\mathcal{U}_2) = P(CX) = \frac{1}{4}$
- $P(\mathcal{U}_3) = P(XC \text{ ó } XX) = \frac{1}{2}$

Sea el suceso BR =“se extraen una bola blanca y una bola roja”. Si pide evaluar $P(\mathcal{U}_i|BR)$ para $i = 1, 2, 3$

Teorema de Bayes:

$$P(\mathcal{U}_i|BR) = \frac{P(BR|\mathcal{U}_i)\cdot P(\mathcal{U}_i)}{P(BR)}$$

Evaluamos:

$$P(BR|\mathcal{U}_1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$P(BR|\mathcal{U}_2) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\cancel{\binom{1}{1}}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{14}$$

$$P(BR|\mathcal{U}_3) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{5}$$

Podemos calcular $P(BR)$ como:

$$P(BR) = P(BR|\mathcal{U}_1)\cdot P(\mathcal{U}_1) + P(BR|\mathcal{U}_2)\cdot P(\mathcal{U}_2) + P(BR|\mathcal{U}_3)\cdot P(\mathcal{U}_3)$$

Por último calculamos:

$$P(\mathcal{U}_1|BR) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{P(BR)} = \frac{35}{134}$$
$$P(\mathcal{U}_2|BR) = \frac{15}{134}$$
$$P(\mathcal{U}_3|BR) = \frac{84}{134}$$

Ejercicio 2.26. **Determinada bateria antiaérea disparaba sobre un avión. Para derribar el aparato bastaba con alcanzar ambos reactores o la cabina del piloto. Sean p_1 la probabilidad de alcanzar el primer reactor, p_2 la probabilidad de alcanzar el segundo reactor y p_3 la probabilidad de dar en la cabina del piloto. Se supone que estos tres puntos sensibles eran tocados uno independientemente del otro. Determinar la probabilidad de que dicho avion hubiese sido derribado.**

Sean R_1="alcanzar el reactor 1", R_2="alcanzar el reactor 2", C="alcanzar la cabina del piloto" y D="derribar el avión".

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(D) =& P((R_1\cap R_2)\cup C) = P(R_1\cap R_2) + P(C) - P(R_1\cap R_2\cap C) =\\ =& P(R_1)P(R_2) + P(C) - P(R_1)P(R_2)P(C) = p_1p_2 + p_3 - p_1p_2p_3\end{aligned}$$

Ejercicio 2.27. **El volumen diario de produccion de tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0.8 % y 2 % respectivamente, determinar la probabilidad de que:**

a) **Extraída una unidad al azar, resulte ser no defectuosa.**

b) **Habiendo sido extraída una unidad defectuosa, haya sido producida en la primera planta.**

a) Sean los sucesos

$$P(i) = \text{"la unidad extraída proviene de la } i-\text{ésima planta"}, \qquad i\in\{1,2,3\}$$

y sus probabilidades:

$$P(P_1) = \frac{500}{500+1000+2000} = \frac{1}{7}$$
$$P(P_2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}$$
$$P(P_3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$$

Sea el suceso D = "la unidad extraída es defectuosa"

Entonces,

- $P(D|P_1) = 0{,}01$
- $P(D|P_2) = 0{,}008$
- $P(D|P_3) = 0{,}02$

Además,

- $P(D^c|P_1) = 1 - P(D|P_1) = 0{,}99$
- $P(D^c|P_2) = 0{,}992$
- $P(D^c|P_3) = 0{,}98$

Entonces:

$$\begin{aligned} P(D^c) &= P(D^c|P_1) \cdot P(P_1) + P(D^c|P_2) \cdot P(P_2) + P(D^c|P_3) \cdot P(P_3) \\ &= 0{,}99 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}992 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}98 \cdot \frac{4}{7} \\ &= 0{,}9848 \end{aligned}$$

b) Se pide evaluar:

$$P(P_1|D) = \frac{P(D|P_1) \cdot P(P_1)}{P(D)} = \frac{0{,}01 \cdot \frac{1}{7}}{1 - 0{,}9848} = 0{,}094$$

***Ejercicio* 2.28. Se supone que n bolas se colocan al azar en n cajas numeradas. Calcular las probabilidades de que:**

a) **La caja 1 este vacía.**

b) **Alguna caja esté vacía.**

c) **La caja 1 sea la única vacía.**

d) **Hay una única caja vacía.**

a)

- Casos posibles: n^n
  - 1ª bola: n cajas
  - 2ª bola: n cajas

    $\vdots$
  - nª bola: n cajas
- Casos favorables: $(n-1)^n$
  - 1ª bola: $n-1$ cajas
  - 2ª bola: $n-1$ cajas

    $\vdots$
  - nª bola: $n-1$ cajas

$$P(\text{“la caja 1 está vacía”}) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) Estudiemos primero P(“la caja tiene 1 bola”)

$$1^a \text{ bola} \to n \text{ cajas}$$
$$2^a \text{ bola} \to n-1 \text{ cajas}$$
$$\vdots$$
$$n^a \text{ bola} \to 1 \text{ caja}$$

$$P(\text{“Cada caja tiene 1 bola”}) = \frac{n!}{n^n}$$

Ahora que hemos calculado esa probabilidad, podemos calcular P(“Alguna caja está vacia”) como:

$$P(\text{“Alguna caja está vacía”}) = 1 - P(\text{“Cada caja tiene 1 bola”}) = 1 - \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n - n!}{n^n}$$

c)

- Casos favorables: en todas las cajas habrá una bola excepto en la 1, que está vacía y la i, que tiene 2. Hay:
  - $\binom{n}{2}$ formas de escoger las dos bolas
  - $(n-1)$ formas de escoger la caja en la que colocar las 2 bolas
  - 1ª bola: $n-2$ cajas
    2ª bola: $n-3$ cajas
    $\vdots$
    $(n-2)$ª bola: 1 caja

  El número de casos favorables es:

  $$\binom{n}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$$

  La probabilidad pedida es:

  $$P(\text{“La caja 1 es la única vacía”}) = \frac{\binom{n}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$$

Otra forma:

Si la caja 1 es la única que está vacía, entonces habrá $(n-2)$ cajas con una bola y una caja con 2 bolas. Este *pack* de dos bolas puede hacerse de $\binom{n}{2}$ maneras. Por otro lado, la primera bola tendrá $(n-1)$ posibles cajas destino, la segunda bola $(n-2)$... hasta la bola $(n-1)$, que solo tendrá una caja para elegir. La n-ésima bola ya se ha introducido junto con la primera bola. Por tanto:

$$P(\text{“alguna caja esté vacía”}) = \frac{\binom{n}{2}(n-1)!}{n^n}$$

d)

Sea C_i el suceso “la caja i está vacía”

$$P_{\text{total}} = P(C_1) + P(C_2) + \ldots + P(C_n) = n \cdot \frac{\binom{n}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{n^{n-1}}$$

***Ejercicio* 2.29. En un colegio electoral de 42 electores, 15 han votado la lista A y el resto la lista B. Seleccionados 10 electores, calcular la probabilidad de que, como máximo, tres de ellos hayan votado la lista A.**

Escribiremos el suceso en términos de una variable aleatoria.

Sea X="número de electores que votan la lista A entre los 10 electores elegidos"

$$P(X=k) \underbrace{=}_{k\in\{0,1,\ldots,10\}} \frac{\dbinom{15}{k}\cdot\dbinom{27}{10-k}}{\dbinom{42}{10}}$$

Se pide evaluar

$P(X\leq 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0{,}006+0{,}048+0{,}158+0{,}257 = 0{,}487$

***Ejercicio* 2.30. De una baraja española (40 cartas) repartida en su totalidad entre 4 jugadores, hallar la probabilidad de que haya como mínimo un jugador cuya mano sean cartas todas del mismo palo.**

Sean:

- S_i = "el jugador $i-$ésimo tiene todas sus cartas del mismo palo", $\quad i\in\{1,2,3,4\}$
- S = "como mínimo un jugador tiene todas sus cartas del mismo palo"

Remarcando primero que S_1,S_2,S_3,S_4 no son disjuntos, podemos escribir:

$$S = S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$$

Evaluamos:

$$\begin{aligned}P(S) &= P(S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4) = \\ &= \sum_{i=1}^{4} P(S_i) - \sum_{i<j} P(S_i\cap S_j) + \sum_{i<j<k} P(S_i\cap S_j\cap S_k) - P(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4) = \\ &= \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{Las formas de escoger al primer jugador}} \cdot \underbrace{P(S_1)}_{\text{La prob. es igual para 1, 2, 3 y 4}} - \binom{4}{2}\cdot P(S_1\cap S_2) \\ &\quad + \binom{4}{3}\cdot P(S_1\cap S_2\cap S_3) - \binom{4}{4}\cdot P(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4)\end{aligned}$$

Donde

$P(S_1) = \dfrac{4}{\binom{40}{10}} = 4{,}719\cdot 10^{-9}$ El numerador es 4 porque pueden ser oros, copas, bastos o espadas.

$P(S_1\cap S_2) = P(S_1)\cdot P(S_2|S_1) = \dfrac{4}{\binom{40}{10}}\cdot\dfrac{3}{\binom{30}{10}} = 4{,}712\cdot 10^{-16}$

$P(S_1\cap S_2\cap S_3) = P(S_1)\cdot P(S_2|S_1)\cdot P(S_3|(S_1\cap S_2)) = \dfrac{4}{\binom{40}{10}}\cdot\dfrac{3}{\binom{30}{10}}\cdot\dfrac{2}{\binom{20}{10}} = 5{,}101\cdot 10^{-21}$

$P(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4) = P(S_1\cap S_2\cap S_3) = 5{,}101\cdot 10^{-21}$

Si sustituimos arriba obtenemos:

$$\begin{aligned}P(S) &= \binom{4}{1}\cdot P(S_1) - \binom{4}{2}\cdot P(S_1\cap S_2) + \binom{4}{3}\cdot P(S_1\cap S_2\cap S_3) - \binom{4}{4}\cdot P(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4) = \\ &= \binom{4}{1}\cdot\frac{4}{\binom{40}{10}} - \binom{4}{2}\cdot\frac{4}{\binom{40}{10}}\cdot\frac{3}{\binom{30}{10}} + \binom{4}{3}\cdot\frac{4}{\binom{40}{10}}\cdot\frac{3}{\binom{30}{10}}\cdot\frac{2}{\binom{20}{10}} - \binom{4}{4}\cdot\frac{4}{\binom{40}{10}}\cdot\frac{3}{\binom{30}{10}}\cdot\frac{2}{\binom{20}{10}}\cdot\cancel{\frac{1}{\binom{10}{10}}} = \\ &= 1{,}887\cdot 10^{-8}\end{aligned}$$

Ejercicio 2.31. **Se tiene una moneda y una urna. Se lanza la moneda al aire: si sale cara, se introduce una bola negra en la urna, y si sale cruz, la bola introducida es de color blanco. El proceso se repite 10 veces. A continuacion, se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. El procedimiento se repite 10 veces. Finalizado éste, se ha observado que las 10 bolas extraídas eran de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas?**

Sean B_i="la urna contiene i bolas blancas y $(10-i)$ bolas negras", con $0 \leq i \leq 10$, y E="las 10 bolas extraídas son blancas". Entonces:

$$P(B_{10}/E) = \frac{P(E/B_{10})P(B_{10})}{P(E)} = \frac{P(E/B_{10})P(B_{10})}{\sum_{i=0}^{10} P(E/B_i)P(B_i)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\sum_{i=0}^{10}\left(\frac{i}{10}\right)^{10}\binom{10}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{i}{10}\right)\binom{10}{i}}$$

Ejercicio 2.32. **Dos de las cuatro válvulas de un aparato, que funcionan independientemente, han fallado. Calcular la probabilidad de que hayan sido la 1 y la 2, si la probabilidad de que falle la válvula i es de $\frac{i}{10}$.**

Sean:

- A_i: "ha fallado la válvula i", $\quad i = 1, 2, 3, 4$
- $A_{i,j}$: " han fallado únicamente las válvulas i, j", $\quad 1 \leq i < j \leq 4$
- B: "han fallado dos válvulas"

Se pide evaluar:

$$P(A_{1,2}|B) = \frac{P(A_{1,2} \cap B)}{P(B)} \underbrace{=}_{A_{1,2} \subset B} \frac{P(A_{1,2})}{P(B)}$$

Donde, sabiendo que $B = A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{1,4} \cap A_{2,3} \cap A_{2,4} \cap A_{3,4}$, y que los conjuntos $A_{i,j}$ son disjuntos dos a dos:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_{1,2}) + P(A_{1,3}) + P(A_{1,4}) + P(A_{2,3}) + P(A_{2,4}) + P(A_{3,4}) \\
P(A_{1,2}) &= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{3}{10}\right)}_{\text{la 3 no falla}} \cdot \left(1-\frac{4}{10}\right) = \frac{21}{2500} \\
P(A_{1,3}) &= \frac{1}{10} \cdot \left(1-\frac{2}{10}\right) \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(1-\frac{4}{10}\right) = \frac{9}{625} \\
P(A_{1,4}) &= \frac{1}{10} \cdot \left(1-\frac{2}{10}\right) \cdot \left(1-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{4}{10} = \frac{14}{625} \\
P(A_{2,3}) &= \left(1-\frac{1}{10}\right) \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(1-\frac{4}{10}\right) = \frac{81}{2500} \\
P(A_{2,4}) &= \left(1-\frac{1}{10}\right) \cdot \frac{2}{10} \cdot \left(1-\frac{3}{10}\right) \cdot \frac{4}{10} = \frac{63}{1250} \\
P(A_{3,4}) &= \left(1-\frac{1}{10}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{10}\right) \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{54}{625}
\end{aligned}$$

Si sustituimos:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_{1,2}) + P(A_{1,3}) + P(A_{1,4}) + P(A_{2,3}) + P(A_{2,4}) + P(A_{3,4}) \\
&= \frac{21}{2500} + \frac{9}{625} + \frac{14}{625} + \frac{81}{2500} + \frac{63}{1250} + \frac{54}{625} \\
&= \frac{134}{625}
\end{aligned}$$

3

Variables aleatorias unidimensionales

Ejercicio 3.1. **Sean $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una aplicación.**

a) **Demostrar que**

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \qquad f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \qquad f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$$

b) **Demostrar que** $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

a)

- $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A^c) &\iff f(x) \in A^c \\ &\iff f(x) \notin A \\ &\iff x \notin f^{-1}(A) \\ &\iff x \in (f^{-1}(A))^c \end{aligned}$$

- $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) &\iff f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff \exists w \in I \shortparallel f(x) \in A_w \\ &\iff \exists w \in I \shortparallel x \in (f^{-1}(A_w)) \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1} A_i \end{aligned}$$

- $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) &\iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\iff \forall w \in I,\ f(x) \in A_w \\ &\iff \forall w \in I,\ x \in (f^{-1}(A_w) \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

b) $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$

Ejercicio 3.2. **Sea una urna con 3 bolas blancas, 2 negras y 1 verde. Se extraen 3 bolas al azar y se considera ξ definida como "el número de bolas blancas extraídas". Construir la función de probabilidad inducida por ξ y su función de distribución.**

Sea ξ = "número de bolas blancas extraídas". Evaluamos la probabilidad, sabiendo que es una hipergeométrica:

$$P_\xi(\{x\}) = P(\xi = x) = \frac{\binom{3}{x} \cdot \binom{3}{3-x}}{\binom{6}{3}} = \begin{cases} 0{,}05 & si \quad x = 0 \\ 0{,}45 & si \quad x = 1 \\ 0{,}45 & si \quad x = 2 \\ 0{,}05 & si \quad x = 3 \end{cases}$$

Es decir, ξ es una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_\xi = \{0,1,2,3\}$ y función de distribución:

$$F_\xi(x) = P_\xi(-\infty, x] = P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 0{,}05 & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 0{,}95 & si \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Ejercicio 3.3. **Sea Ω el espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda equilibrada en tres ocasiones, con puntos muestrales denotados por ω_{ijk} con $i,j,k \in \{C,X\}$. Sea $\mathcal{A} = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$ una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, donde $A_1 = \{\omega_{ccx}, \omega_{cxc}\}$, $A_2 = \Omega \backslash (A_1 \cup A_3)$ y $A_3 = \{\omega_{xxx}\}$. Sea $X(\omega)$ el "número de caras obtenidas en el resultado ω". Estudiar si X es una variable aleatoria.**

Como se realizan tres lanzamientos, el valor de $X(\omega) \in \{0,1,2,3\}$. Por ello, veamos si $X^{-1}(-\infty, a]$ está contenido en $\mathcal{A}$:

$\underline{a < 0}$: $X^{-1}(-\infty, a] = \emptyset \in \mathcal{A}$
$\underline{0 \leq a < 1}$: $X^{-1}(-\infty, a] = X^{-1}(\{0\}) = \{\omega_{xxx}\} = A_3 \in \mathcal{A}$
$\underline{1 \leq a < 2}$: $X^{-1}(-\infty, a] = X^{-1}(\{0,1\}) = \{\omega_{xxx}, \omega_{cxx}, \omega_{xcx}, \omega_{xxc}\} \notin \mathcal{A}$

Por tanto, $X(\omega)$ no es una variable aleatoria.

Ejercicio 3.4. **Sean $\Omega = \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, y $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}, \forall \omega \in \Omega$. Se define $\xi(\omega)$ como el "resto de ω (módulo k)". Demostrar que ξ es una variable aleatoria y determinar $P(\xi = r)$ para $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.**

Así definida, la variable aleatoria ξ toma valores en $\{0,1,...,k-2,k-1\}$. En concreto:

$$\xi(\omega) = r \Leftrightarrow \omega \in \{r, r+k, r+2k, r+3k, ...\} = r + k\mathbb{Z} \qquad \forall r \in \{0,1...k-1\}$$

Ahora, evaluamos $\xi^{-1}(-\infty, a]$, con $a \in \mathbb{R}$:

$\underline{a < 0}$: $\xi^{-1}(-\infty, a] = \emptyset \in \mathcal{A}$
$\underline{0 \leq a < 1}$: $\xi^{-1}(-\infty, a] = \xi^{-1}(\{0\}) = \{0, k, 2k, ...\}$
$\underline{r \leq a < r+1}$: $\xi^{-1}(-\infty, a] = \xi^{-1}(\{0,1,2,...,r\}) = \{0, k, ..., 1, 1+k, ... \; ... \;, r, r+k, ...\}$
$\underline{k-1 \leq a}$: $\xi^{-1}(-\infty, a] = \xi^{-1}(\{0,1,...,k-1\}) = \mathbb{Z}_+$

Es decir, ξ genera $\mathcal{P}(\Omega)$, por lo que es una variable aleatoria. Evaluemos ahora $P(\xi = r)$:

$$P_\xi(r) = P(\xi = r) = P(r+k\mathbb{Z}) = \sum_{c=0}^{\infty} P(r+ck) = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+ck}} = \frac{1}{2^r}\sum_{c=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^c = \frac{1}{2^r}\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{2^{k-r}}{2^k-1}$$

Una simple comprobación permite observar que $\displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} P_\xi(\{r\}) = 1$.

Ejercicio 3.5. **Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ una función Riemann-integrable tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$. Demostrar que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ define una función de distribución absolutamente continua.**

En primer lugar evaluamos $\begin{cases} F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0 \\ \\ F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \end{cases}$

Además F es continua por la derecha, puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$F(x+\varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)dt = \varepsilon \cdot c(\varepsilon)$$

para $\varepsilon > 0$, de acuerdo al teorema del valor medio del cálculo integral, donde, siendo m, M unas ciertas constantes:

$$m \le \inf_{t\in[x,x+\varepsilon]} f(t) \le c(\varepsilon) \le \sup_{t\in[x,x+\varepsilon] f(t)} \le M$$
$$\Longrightarrow \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \underbrace{(F(x+\varepsilon) - F(x))}_{F(x^+)-F(x)} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} c(\varepsilon)\cdot\varepsilon = 0$$

por lo que F es continua por la derecha. Finalmente, es monótona no decreciente, puesto que

$$F(x+\varepsilon) - F(x) = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)dt \ge 0$$

Como ya tenemos la función de densidad, es absolutamente continua.

Ejercicio 3.6. **La duración T de las conferencias telefonicas en una central es una variable aleatoria con función de densidad**

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-kt} & si \quad t > 0 \\ 0 & si \quad t \le 0 \end{cases} \qquad (k > 0)$$

a) **Calcular α para que f sea función de densidad.**

b) **Si $\frac{1}{k} = 2$ minutos, calcular la probabilidad de que una conversación dure más de 3 minutos.**

c) **Probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.**

a) Como $f(t) \geq 0 \ \ \forall t \implies \alpha > 0$. Además, $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$, por lo que

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-kt}dt = \alpha \left[\frac{-e^{-kt}}{k}\right]_0^{\infty} = \frac{\alpha}{k} = 1 \iff \alpha = k$$

b) $\frac{1}{k} = 2 \ min \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$. Por tanto:

$$P(T > 3) = \int_3^{\infty} \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}dt = \left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_3^{\infty} = e^{-\frac{3}{2}}$$

c)

$$P(3 < T < 6) = \int_3^{6} \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}dt = \left[-e^{-\frac{1}{2}t}\right]_3^{6} = e^{-\frac{3}{2}} - e^{-3}$$

Ejercicio 3.7. **Sea F la función definida por**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{3} \\ x^{2\alpha-1} & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < \alpha \\ 1 & \text{si} \quad \alpha \leq x \end{cases} \qquad (k > 0)$$

a) **Determinar los valores de α para que F sea función de distribución.**

b) **Determinar α para que F sea discreta. Análogo para el caso absolutamente continuo.**

c) **Calcular $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$ cuando $A_n = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}, \alpha\right)$**

a) Para que F sea monótona no-decreciente debe verificarse

$$x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Cuando $\frac{1}{3} \leq x_1 < x_2 < \alpha$, debe tenerse

$$x_1^{2\alpha-1} \leq x_2^{2\alpha-1}$$

lo cual se tiene solo cuando $2\alpha - 1 \geq 0$, de modo que $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Además,

$$F(\alpha) = 1 \geq F(\alpha^-) = \alpha^{2\alpha-1} \implies \log \alpha^{2\alpha-1} \leq 0 \text{ , es decir, } (2\alpha - 1)\log \alpha \leq 0$$

Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, se tiene que $(2\alpha - 1)\log \alpha = 0$. En el caso $\alpha > \frac{1}{2}$, debe tenerse $\log \alpha \leq 0 \iff \alpha \leq 1$. Como consecuencia, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

b) Distinguimos entre

- $\alpha = \frac{1}{2}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x \end{cases} \implies F \equiv \text{Degenerada}\left(x = \frac{1}{3}\right)$$

- $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$: F es mixta, la amplitud de salto es menor que 1.
- $\alpha = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{3} \\ x & \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

La amplitud de salto es menor que 1. La función de distribución es mixta.

Por tanto, NO hay función de distribución absolutamente continua.

c) $A_n = \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}, \alpha\right)$

Observamos que $A_n \uparrow \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\dfrac{1}{3}, \alpha\right)$, por lo que

$$P(\liminf A_n) = P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P\left(\frac{1}{3}, \alpha\right) = F(\alpha^-) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha^{2\alpha-1} - \frac{1}{3^{2\alpha-1}}$$

Ejercicio 3.8. **Sea**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{x+1}{10} & si \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{x-\frac{3}{2}}{3} & si \quad \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 1 & si \quad \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$

a) **Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$.**

b) **Evaluar $P_F(\mathbb{Q})$ y $P_F(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.**

c) **Dada la sucesión de subconjuntos**

$$A_{2n-1} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{5n+2}{n+1}\right), \qquad A_{2n} = \left(\frac{4n+3}{n}, \frac{8n+1}{n+1}\right)$$

se pide evaluar $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$.

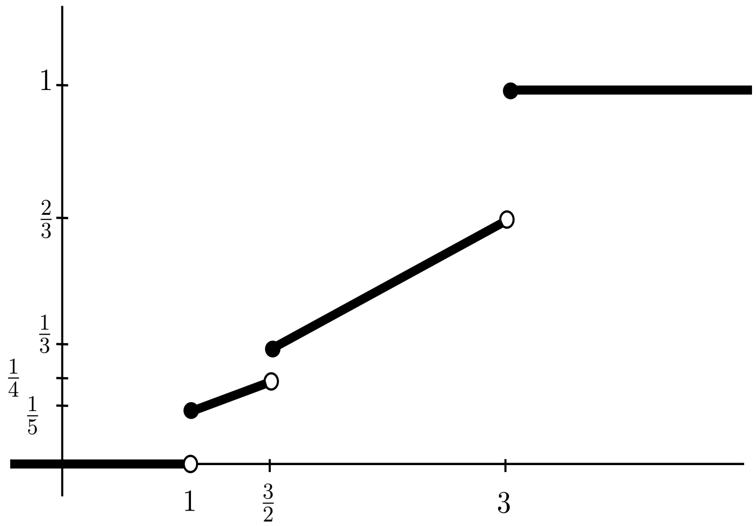
a) Es claro que:

- F es monótona no-decreciente.
- F es continua por la derecha.
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Notemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P_F(\{1\}) = F(1) - F(1^-) = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5} \\ P_F\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{3}{2}^-) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ P_F\left(\left\{\frac{5}{2}\right\}\right) = F(\frac{5}{2}) - F(\frac{5}{2}^-) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda = P_F(\{1\}) + P_F\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right) + P_F\left(\left\{\frac{5}{2}\right\}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{37}{60}$$



Entonces F_1 es una función de distribución discreta con función de masa:

$$\left.\begin{array}{l} p_1(1) = \dfrac{P_F(\{1\})}{\lambda} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{37}{60}} = \dfrac{12}{37} \\[3ex] p_1\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{P_F\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right)}{\lambda} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{37}{60}} = \dfrac{5}{37} \\[3ex] p_1\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{P_F\left(\left\{\frac{5}{2}\right\}\right)}{\lambda} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{37}{60}} = \dfrac{20}{37} \end{array}\right\} \implies F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\[2ex] \dfrac{12}{37} & \text{si} \quad 1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{17}{37} & \text{si} \quad \dfrac{3}{2} \leq x < \dfrac{5}{2} \\[2ex] 1 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Para evaluar F_2, primero calculamos $\dfrac{dF(x)}{dx}$ en todo punto x donde exista, es decir

$$\frac{d(F(x))}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{10} & \text{si} \quad 1 < x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{3} & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x < \dfrac{5}{2} \\[2ex] 0 & \text{si} \quad x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Como resultado, tomamos como punto de partida $f_2(x) = \dfrac{\frac{dF(x)}{dx}}{1-\lambda}$ en todo punto $x \notin \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$. En estos puntos se puede definir como queramos, siempre que siga siendo función de distribución.

Es decir, F_2 es una función de distribución continua con función de densidad

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{37}{60}} = \dfrac{6}{23} & \text{si} \quad 1 < x < \frac{3}{2} \\ \\ \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{37}{60}} = \dfrac{20}{23} & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\implies F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{6(x-1)}{23} & \text{si} \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \\ \dfrac{3}{23} + \dfrac{20}{23}\left(x - \dfrac{3}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

b)

$$P_F(\mathbb{Q}) = P_F\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}}\{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{Q}} P_F(\{x\}) = P_F(\{1\}) + P_F\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}\right) + P_F\left(\left\{\frac{5}{2}\right\}\right) = \frac{37}{60}$$

$$P_F(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = 1 - P_F(\mathbb{Q}) = 1 - \frac{37}{60} = \frac{23}{60}$$

c)

- $A_{2n-1} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{5n+2}{n+1}\right)$

$$A_{2n-1} \uparrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} A_{2n-1} \text{ y } \lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = (0,5)$$

- $A_{2n} = \left(\frac{4n+3}{n}, \frac{8n+1}{n+1}\right)$

$$A_{2n} \uparrow \implies \exists \lim_{n\to\infty} A_{2n} \text{ y } \lim_{n\to\infty} A_{2n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} = (4,8)$$

Entonces,

$$\liminf A_n = \liminf A_{2n-1} \cap \liminf A_{2n} = (0,5) \cap (4,8) = (4,5)$$
$$\limsup A_n = \limsup A_{2n-1} \cup \limsup A_{2n} = (0,5) \cup (4,8) = (0,8)$$

$$P_F(\liminf A_n) = P_F((4,5)) = F(5^-) - F(4) = 1 - 1 = 0$$
$$P_F(\limsup A_n) = P_F((0,8)) = F(8^-) - F(0) = 1 - 0 = 1$$

***Ejercicio* 3.9. Demostrar que la función**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - 2^{-x-1} - 2^{-[x]-1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es una función de distribución de tipo mixto, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Consideramos $n \in \mathbb{N}$

$$P_F(\{n\}) = F(n) - F(n^-) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n-1+1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \qquad \forall n \geq 1$$

y para $n = 0$

$$P_F(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 0 = 0$$

Luego el 0 no es punto de discontinuidad, no pertenece al soporte.

Cuando $x \notin \mathbb{N}_0$

$$P_F(\{x\}) = F(x) - F(x^-) = 0$$

ya que si $x \in (n, n+1)$, siendo $n \in \mathbb{N}$, pertenece a un tramo en el que en su entorno la parte entera es constante, luego $F(x) = F(x^-)$

Además,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P_F(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < 1$$

La aportación de la parte discreta no acumula toda la masa, sólo aporta $\frac{1}{2}$, luego la función es de tipo mixto.

***Ejercicio* 3.10. Sea la función de densidad de una variable aleatoria X con distribución Cauchy**

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Determinar la distribución de la variable aleatoria $Y = 3X + 1$.

Como $Y = \varphi(X) = 3X + 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} \quad \Longrightarrow \quad (\varphi^{-1}(y))' = \frac{1}{3}$, que es continua y definida en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, $\mathcal{C}_Y = \mathcal{C}_X = \mathbb{R}$ y

$$f_Y(y) = \frac{1}{3\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{3}\right)^2} = \frac{3}{\pi(y^2-2y+10)}$$

Otra forma:

Para $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(Y \le y) = P(3X + 1 \le y) = P\left(X \le \frac{y-1}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-1}{3}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi}[\arctan(x)]_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y-1}{3} - \underbrace{\arctan(-\infty)}_{-\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y-1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{3\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y-1}{3}\right)^2}$$

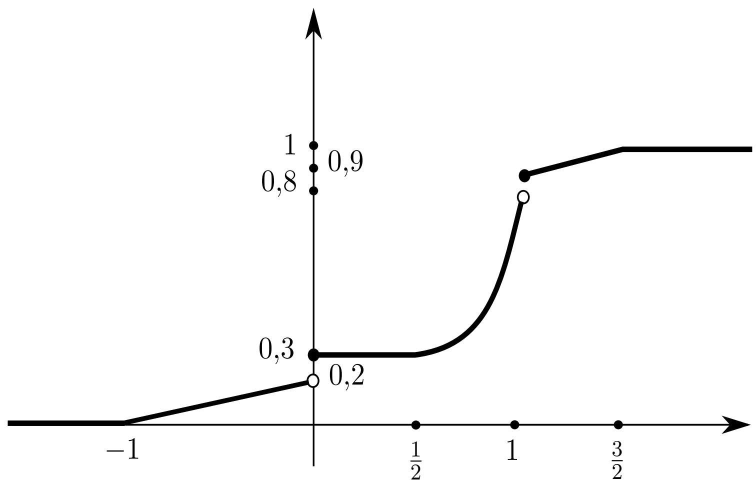
***Ejercicio* 3.11. Sea X una variable aleatoria con función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -1 \\ 0{,}2 \cdot (x+1) & si \quad -1 \le x \le 0 \\ 0{,}3 & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0{,}3 + 2 \cdot (x - 0{,}5)^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0{,}9 + 0{,}2 \cdot (x-1) & \text{si} \quad 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 1 & si \quad \frac{3}{2} \le x \end{cases}$$

a) **Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda)F_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.**

b) **Determinar la distribución de $Y = |X|$.**

a) Gráficamente



Consideramos

$$\left.\begin{array}{l} P_F(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1 \\ P_F(\{1\}) = F(1) - F(1^-) = 0{,}9 - 0{,}8 = 0{,}1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda = P_F(\{0\}) + P_F(\{1\}) = 0{,}2$$

F_1 tiene función de masa, si $x \in \{0, 1\}$

$$p_1(x) = \frac{P_F(\{x\})}{\lambda} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \frac{1}{2}$$

$$F_1(x) = P_{F_1}(-\infty, x] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Para determinar F_2 evaluamos, para cada x donde exista $\frac{dF(x)}{dx}$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0{,}2 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 4(x - 0{,}5) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0{,}2 & \text{si} \quad 1 < x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

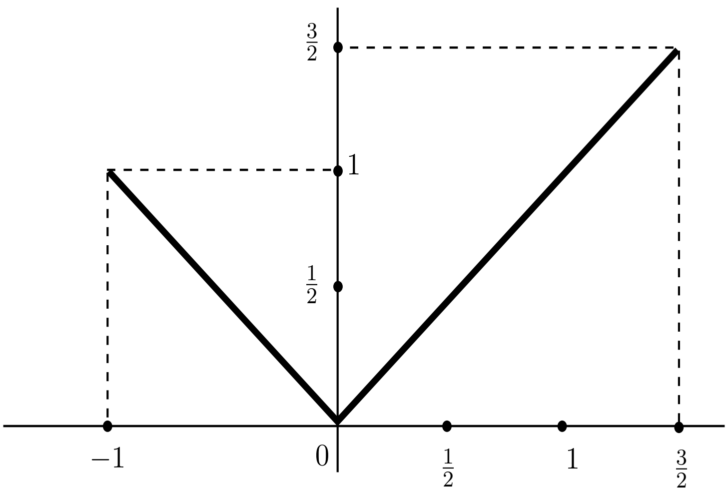
Es decir, F_2 tiene función de densidad

$$f_2(x) = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{1-\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 5\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 1 < x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

La función de distribución F_2 se obtiene al integrar f_2:

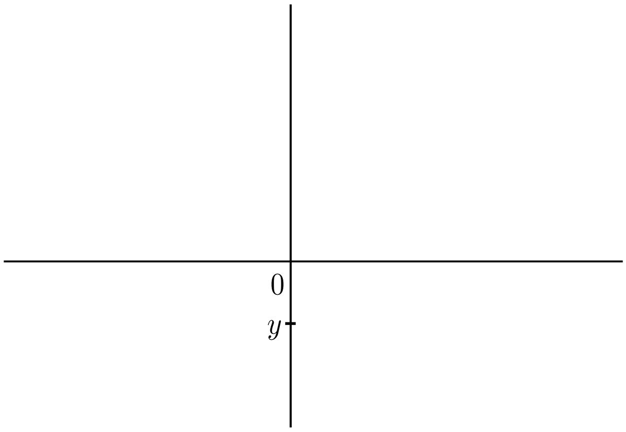
$$f_2(x) = \frac{\frac{dF(x)}{dx}}{1-\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{5x(x-1)}{2} + \frac{7}{8} & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{2x+5}{8} & \text{si} \quad 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{si} \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Evaluamos $F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(|X| \leq y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$



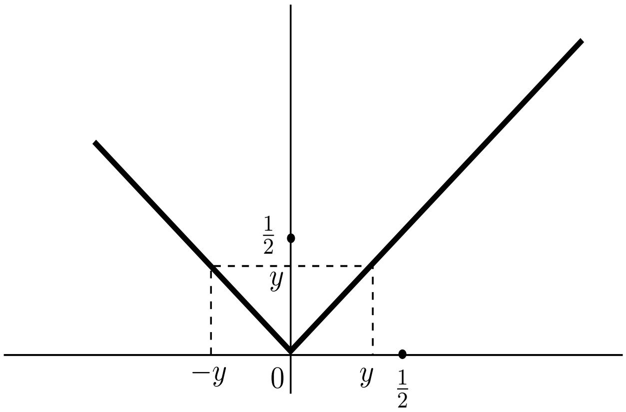
Distinguimos entre:

- $y < 0$



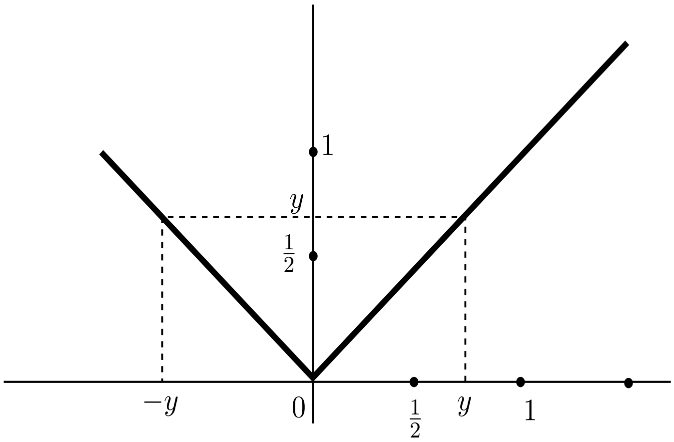
$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(\emptyset) = 0$$

- $0 \leq y < \frac{1}{2}$



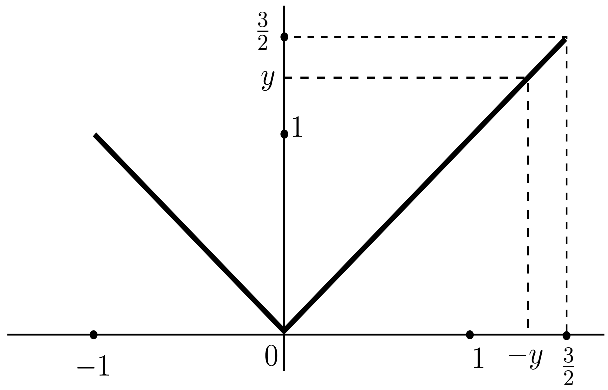
$$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y^-) = 0{,}3 - 0{,}2(-y+1) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2y$$

- $\frac{1}{2} \leq y < 1$



$$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y^-) =$$
$$= 0{,}3 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 0{,}2(-y+1) = 0{,}6 - 1{,}8y + 2y^2$$

- $1 \leq y < \frac{3}{2}$

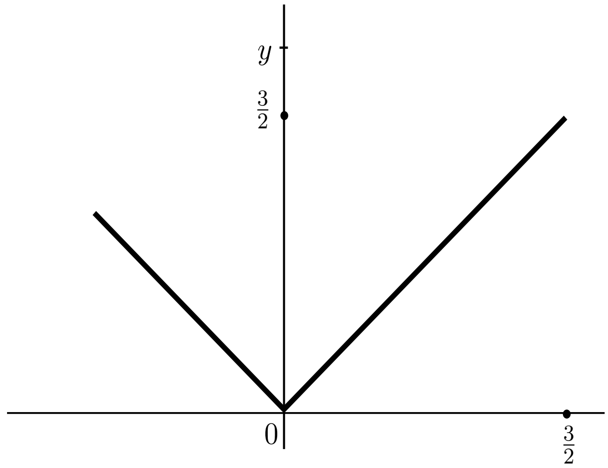


$$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(-1 \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-1^-) = 0{,}9 + \frac{y-1}{5}$$

Si resolvemos el ejercicio con el dibujo, es preferible utilizar la opción que hemos visto. Debemos incluir el -1 porque es imagen inversa de 1, que está en el conjunto que estamos estudiando. Otra alternativa sería:

$$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P(X \leq y) = F_X(y) = 0{,}9 + \frac{y-1}{5} = 0{,}7 + 0{,}2y$$

- $y \geq \frac{3}{2}$



Si $y \geq \frac{3}{2}$, las y_i pertenecientes a $\left[\frac{3}{2}, y\right]$ no tienen imagen inversa, luego

$$F_Y(y) = P(|X| \leq y) = P\left(-1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = 1$$

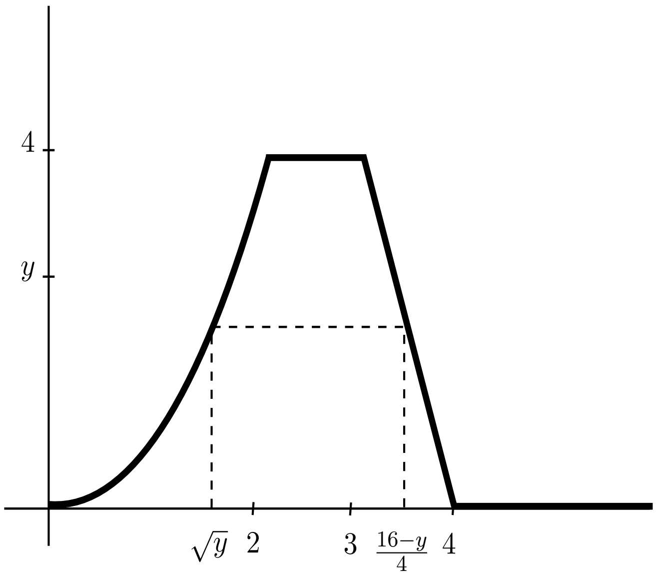
Ejercicio 3.12. **Sea X una variable aleatoria exponencial de tasa $\lambda = 1$. Se define Y como**

$$Y = \begin{cases} X^2 & \text{si} \quad 0 \leq X < 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 \leq X < 3 \\ -4 \cdot (X-4) & \text{si} \quad 3 \leq X < 4 \\ 0 & si \quad 4 \leq X \end{cases}$$

Determinar la distribución de Y.

La función de distribución de la exponencial es absolutamente continua, su soporte está fijado en la semirrecta real positiva.

$$F_X(x) \underbrace{=}_{x>0} \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$



Distinguimos entre

- $y < 0$

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(\emptyset) = 0$$

- $0 \leq y < 4$

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P\left(X \in (0, \sqrt{y}] \cup \left[\frac{16-y}{4}, \infty\right)\right) =$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(0) + 1 - F_X\left(\frac{16-y}{4}\right) = 1 - e^{-\sqrt{y}} - e^{\frac{y}{4}-4}$$

- $y \geq 4$

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(X \in (0, \infty)) = 1$$

Y es una variable aleatoria transformada mixta. Su función de distribución es:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}} + e^{\frac{y}{4}-4} & \text{si} \quad 0 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si} \quad y \geq 4 \end{cases}$$

Ejercicio 3.13. **Sea X una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_X$ y función de masa p_X. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible e $Y = g(X)$ la variable aleatoria transformada. Demostrar que Y es una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_Y = g(\mathcal{D}_X)$ y función de masa**

$$p_Y(y) = \sum_{\{x \in \mathbb{R} : g(x) = y\} \cap \mathcal{D}_x} p_X(x), \quad \text{si } y \in \mathcal{D}_Y$$

Por definición, el soporte $\mathcal{D}_x$ es a lo sumo numerable y, como consecuencia, $\mathcal{D}_y = g(\mathcal{D}_x)$ es, a lo sumo, numerable y no vacío.

Además $\forall y \in g(\mathcal{D}_x)$, como X es una variable aleatoria discreta:

$$p_Y(y) = P_Y(\{y\}) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) =$$
$$= P_X(\{x \in \mathbb{R} : g(x) = y\}) = \sum_{\{x\in\mathbb{R}:g(x)=y\}\cap\mathcal{D}_x} p_X(x)$$

Por otro lado:

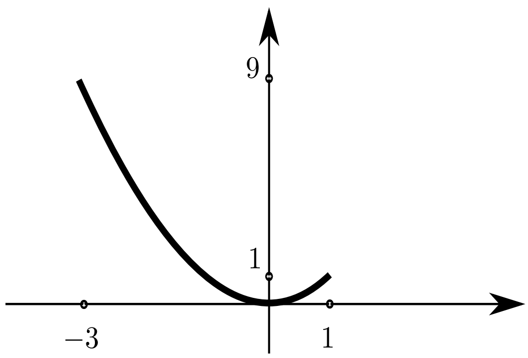
$$\sum_{y\in g(\mathcal{D}_X)} p_Y(y) = \underbrace{\sum_{y\in g(\mathcal{D}_X)} \sum_{\{x\in\mathbb{R}:g(x)=y\}\cap\mathcal{D}_X}}_{\sum_{x\in\mathcal{D}_X}} p_X(x) = \sum_{x\in\mathcal{D}_X} p_X(x) = 1$$

Ejercicio 3.14. **Sea $(\mathbb{R}, \beta, P)$ un espacio de probabilidad, siendo P la medida de probabilidad relativa a la función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & si \quad -3 \leq x < 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Sean las variables aleatorias $\xi_1 = X^2$, $\xi_2 = X^3$ y $\xi_3 = e^{-X}$, supuesto que X es una variable aleatoria con función de distribución F. Calcular las funciones de distribución inducidas por cada una de ellas.

- $\underline{\xi_1 = X^2}$



-3 no pertenece a $\mathcal{D}$ porque es un punto de la función de distribución, al igual que 1. Si incluyésemos -3, $\mathbb{C}_{\xi_1} = [0, 9]$, pero es lo de menos, porque la función de distribución es continua.

- $y < 0$

$$F_{\xi_1}(y) = 0$$

- $0 \leq y < 1$

$$F_{\xi_1}(y) = P(\xi_1 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F\left(-\sqrt{y}^-\right) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) =$$
$$= \frac{\sqrt{y}+3}{4} - \frac{3-\sqrt{y}}{4} = \frac{2\sqrt{y}}{4} = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

- $1 \leq y < 9$

$$F_{\xi_1}(y) = P(\xi_1 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X < 1) = F(1^-) - F(-\sqrt{y}^-) = 1 - \frac{3-\sqrt{y}}{4} =$$
$$= \frac{1+\sqrt{y}}{4}$$

- $y \geq 9$

$$F_{\xi_1}(y) = P(\xi_1 \leq y) = P(-3 < X < 1) = F(1^-) - F(-3) = 1 - 0 = 1$$

$$F_{\xi_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < 0 \\ \frac{\sqrt{z}}{2} & \text{si} \quad 0 \leq z < 1 \\ \frac{1+\sqrt{z}}{4} & \text{si} \quad 1 \leq z < 9 \\ 1 & \text{si} \quad z \geq 9 \end{cases}$$

- $\underline{\xi_2 = X^3}$

  - $y < -27$

$$F_{\xi_2}(y) = 0$$

  - $-27 \leq y < 1$

$$F_{\xi_2}(y) = P(\xi_2 \leq y) = P(-3 < X \leq \sqrt[3]{y}) = F(\sqrt[3]{y}) - F(-3) = \frac{\sqrt[3]{y}+3}{4}$$

  - $y \geq 1$

$$F_{\xi_2}(y) = P(\xi_2 \leq y) = P(-3 < X < 1) = F(1^-) - F(-3) = 1 - 0 = 1$$

$$F_{\xi_2}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < -27 \\ \frac{3+\sqrt[3]{z}}{4} & \text{si} \quad -27 \leq z < 1 \\ 1 & \text{si} \quad z \geq 1 \end{cases}$$

- $\underline{\xi_3 = e^{-X}}$

  - $y < e^{-1}$

$$F_{\xi_3}(y) = 0$$

  - $e^{-1} \leq y < e^3$

$$F_{\xi_3}(y) = P(\xi_3 \leq y) = P(-\ln z \leq X < 1) = F(1^-) - F(-\ln z^-) = 1 - \frac{3-\ln z}{4} = \frac{1+\ln z}{4}$$

  - $y \geq e^3$

$$F_{\xi_3}(y) = P(\xi_3 \leq y) = P(-3 < X < 1) = F(1^-) - F(-3) = 1 - 0 = 1$$

$$F_{\xi_3}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z < e^{-1} \\ \frac{1+\ln z}{4} & \text{si} \quad e^{-1} \leq z < e^3 \\ 1 & \text{si} \quad z \geq e^3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.15. **Sea X una variable aleatoria con función de densidad**

$$f(x) = \begin{cases} kx + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) **Determinar los valores de k tales que f es una función de densidad.**

b) **Calcular la esperanza, la moda y la mediana de X.**

c) **¿Para qué valores de k es máxima la varianza de X?**

a) $X \sim f(x) = kx + \dfrac{1}{2}$, si $x \in [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}\left(kx+\frac{1}{2}\right)dx = k\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}[x]_{-1}^{1} = k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$f(x)\geq 0 \iff kx+\frac{1}{2}\geq 0 \quad \forall x\in[-1,1] \iff |k|\leq\frac{1}{2}$$

Llegamos a este resultado porque:

$$kx+\frac{1}{2}\geq 0 \iff kx\geq -\frac{1}{2}$$

- Si $x>0,\ k\geq -\dfrac{1}{2x}, \implies$ si $x=1,\ k\geq -\dfrac{1}{2}$
- $x<0,\ k\leq -\dfrac{1}{2x}, \implies$ si $x=-1,\ k\leq \dfrac{1}{2}$

$$\implies -\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{1}{2}$$

b)

- Esperanza:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} x\cdot\left(kx+\frac{1}{2}\right)dx = \left[k\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{2k}{3}$$

- Moda: es el máximo de $f(x)$. Evaluamos $f'(x)=k$ y $f''(x)=0$. Distinguimos:
  - $k>0 \implies kx+\dfrac{1}{2}$ es creciente y el máximo lo alcanza en $x=1$.
  - $k=0 \implies \dfrac{1}{2}$ es una constante y el máximo es cualquier $x\in[-1,1]$.
  - $k<0 \implies kx+\dfrac{1}{2}$ es decreciente, el máximo lo alcanza en $x=-1$.
- Mediana:
  Evaluamos $\xi_{0,5}$ desde

$$P(X>\xi_{0,5}) = 0{,}5 \iff 0{,}5 = \int_{\xi_{0,5}}^{1}\left(kx+\frac{1}{2}\right)dx = \left[k\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_{\xi_{0,5}}^{1} = \frac{k}{2}+\frac{1}{2}-k\frac{\xi_{0,5}^2}{2}-\frac{\xi_{0,5}}{2}$$

$$\implies k\xi_{0,5}^2+\xi_{0,5}-k=0 \iff \xi_{0,5} \underbrace{=}_{\xi_{0,5}\in[-1,1]} \frac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k},\ \text{si } k\neq 0$$

Si $k=0,\ \xi_{0,5}=0$

c)

$$Var(X) \underbrace{=}_{E[X^2]=\frac{1}{3}} E\Big[X^2\Big] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \frac{4k^2}{9}$$

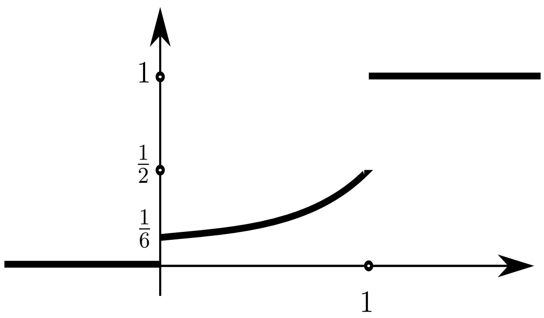
Sea $f(k) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4k^2}{9}$, alcanza su máximo en $k = 0$

$$\implies f(k) = \frac{1}{2} I_{[-1,1]}(x) \implies X \sim \text{Uniforme}[-1,1]$$

***Ejercicio* 3.16. Sea X una variable aleatoria con función de distribución**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1+2x^2}{6} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular $E[X]$ y $Var(X)$



Evaluamos

$$P(X = 0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$
$$P(X = 1) = F(1) - F(1^-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2x}{3} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \, dx + 0 \cdot P(X = 0) + \int_{0}^{1} x \cdot \frac{2x}{3} dx + 1 \cdot P(X = 1) + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \, dx =$$
$$= \frac{13}{18}$$
$$E\Big[X^2\Big] = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \, dx + 0^2 \cdot P(X = 0) + \int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{2x}{3} dx + 1^2 \cdot P(X = 1) + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \, dx =$$
$$= \frac{2}{3}$$
$$Var(X) = E\Big[X^2\Big] - (E[X])^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{13}{18}\right)^2 = \frac{47}{324}$$

Ejercicio 3.17. **Sea**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

la función de densidad de una variable aleatoria X y sea $Y = -2\ln X$. Calcular la distribución de Y.

$$(X = x \in (0,1) \implies \ln x < 0) \implies y = -2\ln x > 0$$

Tomamos

- $y < 0 \implies F_Y(y) = 0$
- $y > 0$

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P(Y \leq y) = P(-2\ln X \leq y) = P\Big(\ln X \geq -\frac{y}{2}\Big) = P\Big(X \geq e^{-\frac{y}{2}}\Big) =$$
$$= 1 - e^{-\frac{y}{2}}$$

Para la última igualdad hemos tenido en cuenta que

$$P\Big(X \geq e^{-\frac{y}{2}}\Big) = \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1} 1dx = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \implies F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{2}} & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} \text{ si } y > 0$$
$$Y \sim \text{Exp}\Big(\lambda = \frac{1}{2}\Big)$$

Ejercicio 3.18.

a) **Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X con momentos $E[X^n] = \dfrac{1}{n+1}$.**

b) **Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo (a, b).**

c) **Se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta viene dada por**

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^t}, \qquad \alpha \in (0,1)$$

Determinar la función de masa de X.

a) Observamos que

$$M(t) = 1 + tm_1 + \frac{t^2}{2}m_2 + \frac{t^3}{3!}m_3 + \cdots \underbrace{=}_{m_k = \frac{1}{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$
$$= \frac{1}{t}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}}_{e^t - 1} = \frac{e^t - 1}{t}$$

b)

$$X \sim \mathcal{U}(a,b) \implies f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ si } x \in (a,b)$$

Evaluamos

- $t \neq 0$

$$M(t) = E\Big[e^{tX}\Big] = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t}$$

- $t = 0$

$$M(t) = E\Big[e^{tX}\Big] = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Si en el resultado general sale $t \to 0$, se aplica l'Hôpital y sale este último resultado.

¿Qué ocurre si $a = 0$ y $b = 1$?

Entonces $M(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$

c) Antes de resolver el ejercicio notemos que

$$|\alpha e^t| < 1 \iff \alpha e^t < 1 \iff t < \ln\frac{1}{\alpha} = -\ln\alpha$$

Ahora reescribimos la fórmula del enunciado

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^t} = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\alpha e^t\Big)^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}(1-\alpha)\alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}P(X=k)$$

$$X \sim \text{Geométrica}(p = 1-\alpha)$$

Nota 1. *La función generatriz de momentos no necesariamente existe para todos los* $t \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3.19. **Dada la función**

$$\varphi(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$$

se pide:

a) **Comprobar que φ es la función característica de una variable aleatoria X discreta y hallar la función de masa, la media y la varianza de X.**

b) **Escribir la función caracteristica de $Y = 1+2X$, asi como su media y su varianza.**

c) **Si $Y_1 = (Y+2)^2$ e $Y_2 = X^2+5$, calcular $P(Y_1 \in [10,50])$ y $P(Y_2 \in [6,10])$.**

a) Reescribimos

$$\begin{aligned}\varphi(t) = E\left[e^{itX}\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itx_n}P(X=x_n)\\ &= \frac{1}{2-e^{it}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{e^{it}}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n}_{\text{converge}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

$$\implies X \text{ es variable aleatoria con soporte discreto } \mathcal{D}_X = \mathbb{N}_0 \text{ y } p_X(n) = P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Evaluamos

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{ie^{it}}{(2-e^{it})^2} \\
\varphi''(t) &= \frac{i^2e^{it}(2-e^{it}) + 2i^2e^{2it}}{(2-e^{it})^3}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{i}{i} = 1 \\
E\Big[X^2\Big] &= \frac{\varphi''(0)}{i^2} = \frac{3i^2}{i^2} = 3 \\
Var(X) &= E\Big[X^2\Big] - (E[X])^2 = 3 - 1^2 = 2
\end{aligned}$$

b)

$$\varphi_y(t) = E\Big[e^{itY}\Big] = E\underbrace{\Big[e^{it(1+2X)}\Big]}_{e^{it}\cdot e^{i(2t)X}} = e^{it}\varphi_X(2t) = \frac{e^{it}}{2-e^{2it}}$$

$$E[Y] = E[1+2X] = 1 + 2E[X] = 1 + 2\cdot 1 = 3$$

$$E\Big[Y^2\Big] = E\Big[(1+2X)^2\Big] = E\Big[1 + 4X^2 + 4X\Big] = 1 + 4E\Big[X^2\Big] + 4E[X] = 1 + 4\cdot 3 + 4\cdot 1 = 17$$

$$\implies Var(\varphi) = E\Big[Y^2\Big] - (E[X])^2 = 17 - 9 = 8$$

c) Evaluamos

$$\begin{aligned}
P(Y_1 \in [10,50]) &= P\Big(10 \le (Y+2)^2 \le 50\Big) = P\Big(10 \le (2X+3)^2 \le 50\Big) = P\Big(\sqrt{10} \le 2X+3 \le \sqrt{50}\Big) \\
&= P\left(\underbrace{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}_{0{,}08} \le X \le \underbrace{\frac{5\sqrt{2}-3}{2}}_{2{,}03}\right) = P(X \in \{1,2\}) = P(X=1) + P(X=2) \\
&= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Y_2 \in [6,10]) &= P\Big(6 \le X^2 + 5 \le 10\Big) = P\Big(1 \le X^2 \le 5\Big) = P\left(1 \le X \le \underbrace{\sqrt{5}}_{2{,}236}\right) \\
&= P(X \in \{1,2\}) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.20. **Determinar la función caracteristica de las variables aleatorias que cumplen:**

a) **Toda la probabilidad está concentrada en un punto.**

b) **Toda la probabilidad está concentrada en n puntos.**

Sea X la variable aleatoria.

a) Si toda la probabilidad está concentrada en un punto, X tiene distribución degenerada. Sea p el punto que concentra toda la probabilidad:

$$\varphi_X(t) = E\Big[e^{itX}\Big] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot P(X = x) = e^{itp}$$

b) Sea D_X el soporte de X

$$\varphi_X(t) = E\Big[e^{itX}\Big] = \sum_{x \in D_X} e^{itx} \cdot P(X = x)$$

Ejercicio 3.21. **Demostrar que $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ es la función característica de una variable aleatoria.**

Evaluamos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{\operatorname{sen} t}{t} \underbrace{=}_{(*)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2it}\Big(e^{it(1-x)} - e^{-it(1+x)}\Big)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2it}(\cos(t(1-x)) + i\operatorname{sen}(t(1-x)) - \cos(t(1+x)) + i\operatorname{sen}(t(1+x)))dt \\
&\underbrace{=}_{(**)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2it}i(\operatorname{sen}(t(1-x)) + \operatorname{sen}(t(1+x)))dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2t}(\operatorname{sen}(t(1-x)) + \operatorname{sen}(t(1+x)))dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(t(1-x))}{t} + \frac{sen(t(1+x))}{t}\right)dt \\
&\underbrace{=}_{(***)} \frac{1}{4\pi}\cdot 2\cdot 2\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}dy = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si integramos $f(x)$ en $(-1,1)$, la integral vale 1. Por tanto, $f(x) = \frac{1}{2}I_{(-1,1)}(x)$. La variable aleatoria tiene una distribución de una $Uniforme(-1,1)$.

Veamos qué pasaría si $x \notin (-1,1)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t(1-x))}{t}dt + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t(1+x))}{t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Estudiamos el caso $x > 1$. Si $x < -1$ el procedimiento es similar, basta aplicar los cambios a las integrales en orden contrario. En la tercera igualdad utilizaremos el cambio de variable

$$z = -y \iff dz = -dy \qquad y = 0 \implies z = 0, \quad y \to -\infty \implies z \to \infty$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t(1-x))}{t}dt + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(t(1+x))}{t}dt = \int_0^{-\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}dy + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y}dy = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(-z)}{-z}(-dz) + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}dy = -\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}dz + \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}dy = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

Para terminar, desarrollamos los pasos intermedios de la integral:

(*) Sabemos que $e^{it} = \cos(t) + i\,\text{sen}(t)$ y $e^{-it} = \cos(-t) + i\,\text{sen}(-t) = \cos(t) - i\,\text{sen}(t)$. Entonces

$$e^{it} - e^{-it} = 2i\,\text{sen}(t) \implies \text{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

(**) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = 0$, por lo que las integrales $\cos(t(1-x))$ y $\cos(t(1+x))$ son cero, ya que $(1+x)$ y $(1-x)$ son factores que dividen o multiplican a las integrales y no influyen en el resultado.

(***) En la integral A utilizaremos el cambio de variable

$$y = t(1-x) \implies dy = (1-x)dt \qquad t = 0 \implies y = 0, \quad t \to \infty \implies y \to \infty\ (x \in (-1,1))$$

En la integral B utilizaremos el cambio de variable

$$y = t(1+x) \implies dy = (1+x)dt \qquad t = 0 \implies y = 0, \quad t \to \infty \implies y \to \infty\ (x \in (-1,1)$$

$$A = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t(1-x))}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{\frac{y}{1-x}} \cdot \frac{1}{1-x} dy = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy$$
$$B = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(t(1+x))}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{\frac{y}{1+x}} \cdot \frac{1}{1+x} dy = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} dy$$

Ejercicio 3.22. **El porcentaje de piezas defectuosas fabricadas por una máquina es el 4 %. Las piezas se empaquetan en lotes de 100. El cliente rechaza el lote si contiene más de dos piezas defectuosas. Calcular el porcentaje de lotes rechazados que puede esperar el fabricante si el proceso de fabricación no ha sufrido modificaciones.**

Sea X la variable aleatoria. Cada componente puede ser defectuoso o no, por lo que tenemos una distribución $Binomial(100; 0{,}4)$:

$$P(X = n) = \binom{100}{n} 0{,}04^n \cdot 0{,}96^{100-n}$$

Rechazaremos el lote si tiene más de dos unidades defectuosas. Sea R = "el lote es rechazado".

$$\begin{aligned} P(R) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - \binom{100}{0} 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{100} - \binom{100}{1} 0{,}04 \cdot 0{,}96^{99} - \binom{100}{2} 0{,}04^2 \cdot 0{,}96^{98} \\ &= 0{,}76786 \end{aligned}$$

Luego se rechaza el 76.8 % de los lotes.

Ejercicio 3.23. **En dos grupos de segundo año de carrera se ha medido el coeficiente de inteligencia de los alumnos. En el grupo A la media fue 100 y la desviación típica 10, mientras que en el grupo B estas medidas fueron 105 y 12, respectivamente. Supongamos que ambos grupos tienen el mismo número de alumnos. Se escoge un alumno al azar y se comprueba que su coeficiente es mayor que 120. Calcular, suponiendo normalidad, la probabilidad de que el citado alumno pertenezca al grupo B.**

Sean los sucesos

- A = “el alumno elegido es del grupo A”
- B = “el alumno elegido es del grupo B”

con lo que tenemos

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$$

Además, sabemos que si X es el coeficiente de inteligencia del alumno, entonces

$$X/A \sim Normal(100, 10^2) \qquad\qquad X/B \sim Normal(105, 12^2)$$

$$\begin{aligned}
P(X > 120) &= P(X > 120|A) \cdot P(A) + P(X > 120|B) \cdot P(B) \\
&= P(Normal(100, 100) > 120) \cdot P(A) + P(Normal(105, 144) > 120) \cdot P(B) \\
&= \underbrace{P\left(\frac{(N(100, 100) - 100}{10} > \frac{120 - 100}{10}\right) \cdot \frac{1}{2} + P\left(\frac{(N(105, 144) - 105}{12} > \frac{120 - 105}{12}\right) \cdot \frac{1}{2}}_{\text{restamos la media y dividimos por la desviación típica para llegar a } Z\sim N(0,1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot [P(Z > 2) + P(Z > 1{,}25)] = \frac{1}{2}[0{,}0228 + 0{,}1056] = 0{,}0642
\end{aligned}$$

Tenemos que evaluar

$$P(B|X > 120) = \frac{P(X > 120|B) \cdot P(B)}{P(X > 120)} = \frac{0{,}1056 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}0642} = 0{,}8224$$

Ejercicio 3.24. **Una máquina fabrica bolas de 5 cm de diámetro. Los desajustes de la máquina producen diversos tamaños. Se estima que los errores en tamaño medidos en cm siguen una distribución “X: error en el diámetro (en cm)” con función de densidad**

$$f(x) = 0{,}5 \cdot e^{-|x|} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si son desechadas todas las bolas con error superior a $\pm 0{,}5$ **cm, se pide la distribución de probabilidad de los errores en el diámetro de las bolas no rechazadas, y la probabilidad de que una bola no rechazada tenga diámetro mayor que** $5{,}2$ **cm.**

Definimos la variable aleatoria $Y \sim X/\{|X| \leq 0{,}5\}$. Evaluamos

$$F_Y(y) = P(X \leq y/\{|X| \leq 0{,}5\}) = \frac{P(X \leq y, -0{,}5 \leq X \leq 0{,}5)}{P(-0{,}5 \leq X \leq 0{,}5)}$$

$$P(-0{,}5 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} 0{,}5 \cdot e^{-|u|} du = 1 - e^{-0{,}5}$$

$$P(X \leq y, -0{,}5 \leq X \leq 0{,}5) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -0{,}5 \\ 1 & \text{si } 0{,}5 < y \\ \int_{-0{,}5}^{y} 0{,}5 \cdot e^{-|u|} du & \text{si } -0{,}5 \leq y \leq 0{,}5 \end{cases}$$

$$\int_{-0{,}5}^{y} 0{,}5 \cdot e^{-|u|} du = \begin{cases} \int_{-0{,}5}^{y} 0{,}5 \cdot e^{u} du = 0{,}5 \cdot (e^{y} - e^{-0{,}5}) & \text{si } y < 0 \\ \int_{-0{,}5}^{0} 0{,}5 \cdot e^{u} du + \int_{0}^{y} 0{,}5 \cdot e^{-u} du = 1 - 0{,}5 \cdot (e^{-0{,}5} + e^{-y}) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -0{,}5 \\ \dfrac{0{,}5 \cdot (e^{y} - e^{-0{,}5})}{1 - e^{-0{,}5}} & \text{si } -0{,}5 \leq y < 0 \\ \dfrac{1 - 0{,}5 \cdot (e^{-y} + e^{-0{,}5})}{1 - e^{-0{,}5}} & \text{si } 0 \leq y < 0{,}5 \\ 1 & \text{si } 0{,}5 \leq y \end{cases}$$

Para terminar evaluamos

$$P(Y > 0{,}2) = 1 - P(Y \leq 0{,}2) = 1 - F_Y(0{,}2) = 1 - \frac{1 - 0{,}5 \cdot (e^{-0{,}5} + e^{-0{,}2})}{1 - e^{-0{,}5}} = 0{,}2697$$

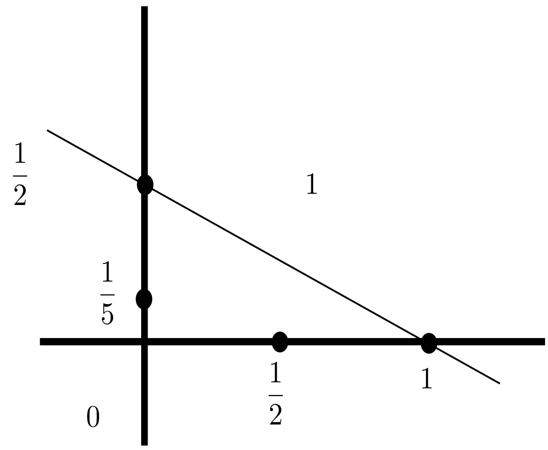
4

Variables aleatorias multidimensionales

Ejercicio 4.1. **Estudiar si**

$$F(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x+2y\geq 1\\ 0 & \text{si } x+2y<1\end{cases}$$

es una función de distribución en $\mathbb{R}^2$



Una de las condiciones que tiene que cumplir F para ser función de distribución es que $\forall\,(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x_1<x_2,\ y_1<y_2$ se verifica

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

Sean $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$, $(x_2,y_2)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$

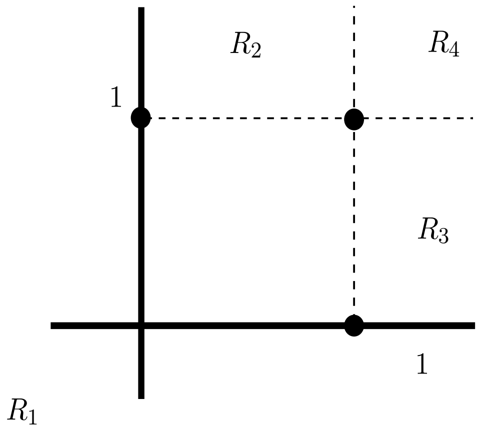
$$\Longrightarrow\ F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)=F\left(1,\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-F\left(1,\frac{1}{5}\right)+F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$$
$$=1-1-1+0=-1<0$$

Luego F no es función de distribución en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4.2. **Dada la variable aleatoria 2-dimensional** (X,Y) **tal que**

$$P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3},$$

calcular la función de distribución conjunta de (X, Y) y las funciones de distribución marginales de X e Y.



Sean

$$R_1 = \{x < 1, y < 1\} \cup \{x \geq 1, y < 0\} \cup \{x < 0, y \geq 1\} \implies F(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in R_1$$

$$R_2 = \{0 \leq x < 1, y \geq 1\} \implies F(x, y) = \frac{1}{3} \qquad \forall (x, y) \in R_2$$

$$R_3 = \{0 \geq 1, 0 \leq y < 1\} \implies F(x, y) = \frac{1}{3} \qquad \forall (x, y) \in R_3$$

$$R_4 = \{x \geq 1, y \geq 1\} \implies F(x, y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \qquad \forall (x, y) \in R_4$$

$$\implies F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in R_1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } (x, y) \in R_2 \text{ o } (x, y) \in R_3 \\ 1 & \text{si } (x, y) \in R_4 \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y = 0) + P(X \leq x, Y = 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X = 0, Y \leq y) + P(X = 1, Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

***Ejercicio* 4.3. Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con distribución uniforme sobre el recinto**

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{x}{3}, x \leq 3, y \geq 0\right\}$$

Calcular la función de densidad conjunta de (X, Y), la función de distribución conjunta de (X, Y) y las distribuciones marginales de X e Y.

El recinto es el utilizado como ejemplo en el apéndice de “Integrales en $\mathbb{R}^2$”.

Si la distribución es uniforme sobre el recinto, tenemos que

$$f(x, y) = kI_{\mathcal{C}}(x, y)$$

Debe cumplirse $1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{C}} f(x,y)dxdy + \int_{\mathcal{C}^c} f(x,y)dxdy = \int_{\mathcal{C}} kdxdy + \int_{\mathcal{C}^c} 0dxdy$$
$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} kdydx = \int_0^3 \frac{kx}{3}dx = \frac{3k}{2}$$

Luego $k = \dfrac{2}{3}$. La función de densidad conjunta de (X,Y) es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{3}I_{\mathcal{C}}(x,y)$$

Para calcular la función de distribución conjunta, definimos cuatro recintos a mayores:

$$R_1 = \{x < 0, y < 0\} \cup \{x < 0, y \geq 0\} \cup \{x \geq 0, y < 0\}$$
$$R_2 = \left\{0 \leq x < 3, y \geq \frac{x}{3}\right\}$$
$$R_3 = \{x \geq 3, 0 \leq y < 1\}$$
$$R_4 = \{x \geq 3, y \geq 1\}$$

Distinguimos los casos en función de los recintos:

- $(x,y) \in R_1$
$$F(x,y) = 0$$
- $(x,y) \in R_2$
$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^{\frac{u}{3}} \frac{2}{3}dvdu = \int_0^x \frac{2}{3}[v]_0^{\frac{u}{3}} du = \int_0^x \frac{2u}{9} = \frac{2}{9}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{9}$$
- $(x,y) \in R_3$
$$F(x,y) = \int_0^y \int_{3v}^3 \frac{2}{3}dudv = \int_0^y \frac{2}{3}[u]_{3v}^3 dv = \int_0^y \frac{2}{3}(3-3v)dv = \int_0^y (2-2v)dv$$
$$= \int_0^y 2dv - \int_0^y 2vdv = 2[v]_0^y - 2\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^y = 2y - y^2 = y(2-y)$$
- $(x,y) \in R_4$
$$F(x,y) = \int_{\mathcal{C}} \frac{2}{3}dxdy = 1$$
- $(x,y) \in \mathcal{C}$
$$F(x,y) = \int_0^y \int_{3v}^x \frac{2}{3}dudv = \int_0^y \frac{2}{3}[u]_{3v}^x dv = \int_0^y \left(\frac{2x}{3} - 2v\right)dv = \frac{2x}{3}\int_0^y dv - 2\int_0^y vdv$$
$$= \frac{2xy}{3} - y^2 = y\left(\frac{2x}{3} - y\right)$$

$$\Longrightarrow F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si } (x,y) \in R_2 \\ y(2-y) & \text{si } (x,y) \in R_3 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_4 \\ y\left(\dfrac{2x}{3} - y\right) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{C} \end{cases}$$

Para calcular la distribución marginal de X, calculamos la función de densidad marginal de X:

- Si $x \leq 0$ o $x \geq 3$:
$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} 0dy = 0$$
- Si $0 < x < 3$:
$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_0^{\frac{x}{3}} \frac{2}{3}dy = \frac{2x}{9}$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = \frac{2x}{9} I_{(0,3)}(x)$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \dfrac{2u}{9}du = \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

La distribución marginal de Y se calcula de manera análoga:

- Si $y \leq 0$ o $y \geq 1$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0$$
- Si $0 < y < 1$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{3x}^{3} \frac{2}{3}dx = 2(1-y)$$

$$\Longrightarrow f_Y(y) = 2(1-y)I_{(0,1)}(y)$$

$$\Longrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \int_0^y 2(1-v)dv = y(2-y) & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4.4. **Dada la variable aleatoria 2-dimensional (X,Y) con función de densidad conjunta**

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-1}\operatorname{sen}(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

calcular:

a) **Las esperanzas de X e Y.**

b) **La matriz de varianza-covarianzas de (X,Y).**

Sea $\mathcal{C} = \left\{0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

a) Para calcular la esperanza de X, calculamos la función de densidad marginal de X.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{2} dy = \dfrac{\cos(x) - \cos(x+\frac{\pi}{2})}{2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{\cos(x) - \cos(x+\frac{\pi}{2})}{2} dx \\
&= \left[x\left(\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) dx \\
&= \left[x\left(\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) + \cos(x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1 + 1 = \frac{\pi}{4} \\
E[Y] &= E[X] = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ambas variables aleatorias varían igual y tienen un papel intercambiable en la integral original.

b) De nuevo basta calcular la varianza de X, ya que la de Y será igual.

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{\cos(x) - \cos(x+\frac{\pi}{2})}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \left(\frac{\pi^2}{4} + 2\right)\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\pi + 2) \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2}(\pi - 1) \\
E\left[Y^2\right] &= \frac{\pi}{2}(\pi - 1) \\
Var(X) &= E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \left[\frac{\pi}{2}(\pi - 1)\right] - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{8} + 1\right) \\
Var(Y) &= -\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{8} + 1\right) \\
E[XY] &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y) dxdy = \int_{\mathcal{C}} xy \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \operatorname{sen}(x+y) dydx = \frac{\pi}{2} - 1 \\
Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{8} + 1\right) & \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} \\ \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} & -\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\pi}{8} + 1\right) \end{pmatrix}$$

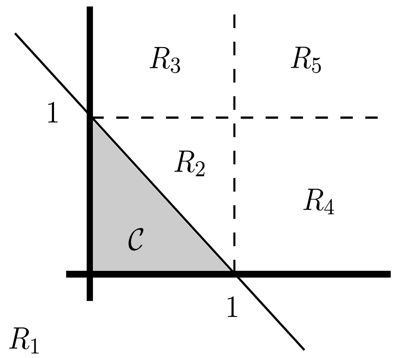
***Ejercicio* 4.5. Sea (X,Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad $f(x,y) = 24y(1-x-y)$ sobre el recinto $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Calcular**

a) **La función de distribución conjunta.**

b) **Las funciones de densidad marginales.**

c) **Las funciones de densidad condicionadas.**

a)



- Si $(x, y) \in R_1$

$$F(x,y) = 0$$

- Si $(x, y) \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^x \int_0^y 24v(1-u-v)dvdu = 24\int_0^x \int_0^y (v-uv-v^2)dvdu \\
&= 24\int_0^x \left[(1-u)\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^y du = 24\int_0^x \left[\frac{y^2}{2}(1-u) - \frac{y^3}{3}\right] du \\
&= 12y^2\int_0^x (1-u)du - 8y^3x = 12y^2\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - 8y^3x \\
&= 12y^2x - 6y^2x^2 - 8y^3x = 2y^2x(6-3x-4y)
\end{aligned}$$

- Si $(x, y) \in R_2$

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^{1-y} \int_0^y 24v(1-u-v)dvdu + \int_{1-y}^x \int_0^{1-u} 24v(1-u-v)dvdu \\
&= 24\int_0^{1-y} \int_0^y (v-uv-v^2)dvdu + 24\int_{1-y}^x \int_0^{1-u} (v-uv-v^2)dvdu \\
&= 24\int_0^{1-y} \left[(1-u)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right] du + 24\int_{1-y}^x \left[(1-u)\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^{1-u} du \\
&= 24\int_0^{1-y} \frac{y^2}{6}[3(1-u)-2y]du + 24\int_{1-y}^x \frac{(1-u)^3}{6}du \\
&= \ldots = y^2(3y^2-8y+6) - (1-x)^4
\end{aligned}$$

- Si $(x, y) \in R_3$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^{1-u} 24v(1-u-v)dvdu = 1-(1-x)^4$$

- Si $(x, y) \in R_4$

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^{1-v} 24v(1-u-v)dudv = y^2(3y^2-8y-16)$$

- Si $(x, y) \in R_5$
$$F(x, y) = 1$$

$$\implies F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ y^2(3y^2 - 8y + 6) - (1-x)^4 & \text{si } (x,y) \in R_2 \\ 1 - (1-x)^4 & \text{si } (x,y) \in R_3 \\ y^2(3y^2 - 8y - 16) & \text{si } (x,y) \in R_4 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_5 \\ 2y^2x(6 - 3x - 4y) & \text{si } (x,y) \in \mathcal{C} \end{cases}$$

b) Veamos primero la función de densidad marginal de X.

- $x \notin (0, 1)$
$$f_X(x) = 0$$
- $x \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 24y(1-x-y)dy = 24\int_0^{1-x} \Big[(1-x)y - y^2\Big]dy = 24\left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}$$
$$= 24\left[(1-x)\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\right] = \frac{24(1-x)3}{6} = 4(1-x)^3$$

Es decir,
$$f_X(x) = 4(1-x)^3 I_{(0,1)}(x)$$

Análogamente, calculamos la función de densidad marginal de Y.

- $y \notin (0, 1)$
$$f_Y(y) = 0$$
- $y \in (0, 1)$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 24y(1-x-y)dx = 24y(1-y)\int_0^{1-y} dx - 24y\int_0^{1-y} xdx$$
$$= 24y(1-y)[x]_0^{1-y} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 24y(1-y)^2 - 12y(1-y)^2 = 12y(1-y)^2$$

Luego
$$f_Y(y) = 12y(1-y)^2 I_{(0,1)}(y)$$

c) La función de densidad de Y condicionada a X es

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24y(1-x-y)I_{\mathcal{C}}(x,y)}{4(1-x)^3} = \frac{6y(1-x-y)}{(1-x)^3} I_{(0,1-x)}(x)$$

La función de densidad de X condicionada a Y es

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(1-x-y)}{(1-y)^2} I_{(0,1-y)}(x)$$

***Ejercicio* 4.6. Se sitúan de forma aleatoria e independiente N puntos en el intervalo $(0, T)$. Si X representa la distancia de 0 al primer punto e Y denota la distancia de 0 al segundo punto, entonces calcular la distribución conjunta y las correspondientes marginales de (X, Y).**

Sean

- $X =$" distancia desde 0 al primer punto".
- $Y =$ "distancia desde 0 al segundo punto".

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ representan las distancias al origen 0 de los puntos $1, 2, \ldots, N$, entonces $X = \text{mín}(Z_1, \ldots, Z_N)$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P(Z_1 > x, Z_2 > x, \ldots, Z_N > x) \\ &= 1 - \prod_{j=1}^{N} P(Z_j > x) = 1 - (P(Z_1 > x))^N \underbrace{=}_{(*)} 1 - \left(1 - \frac{x}{T}\right)^N \quad 0 \leq x < T \end{aligned}$$

$$(*): \quad \text{Es una } \mathcal{U}(0,T) \implies P(Z_1 > x) = \int_x^T \frac{1}{T} du = \frac{T-x}{T} = 1 - \frac{x}{T}$$

Entonces la función de distribución marginal de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{T}\right)^N & \text{si } 0 \leq x < T \\ 1 & \text{si } x \geq T \end{cases}$$

La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \frac{N}{T}\left(1 - \frac{x}{T}\right)^{N-1} I_{(0,T)}(x)$$

Tengamos en cuenta que si $X = x_0$, entonces Y toma valores sobre (x_0, T).

$$\begin{aligned} F_{Y/X}(y/x_0) &= P(Y \leq y/X = x_0) = 1 - P(Y > y/X = x_0) = 1 - (P(Z_1 > y))^{N-1} \\ &= 1 - \left(\int_y^T \frac{1}{T - x_0} du\right)^{N-1} = 1 - \left(\frac{T-y}{T-x_0}\right)^{N-1} \qquad x_0 < y < T \end{aligned}$$

Entonces la función de distribución de Y condicionada a $X = x_0$ es:

$$F_{Y/X}(y/x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x_0 \\ 1 - \left(\dfrac{T-y}{T-x_0}\right)^{N-1} & \text{si } x_0 \leq y < T \\ 1 & \text{si } y \geq T \end{cases}$$

Y la función de densidad condicionada es

$$f_{Y/X}(y/x_0) = \frac{N-1}{T-x_0}\left(\frac{T-y}{T-x_0}\right)^{N-2} I_{(x_0,T)}(y)$$

Como consecuencia, la función de densidad conjunta es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_{Y/X}(y/x) = \frac{N(N-1)}{T(T-x_0)}\left(\frac{T-x}{T}\right)^{N-1}\left(\frac{T-y}{T-x}\right)^{N-2} I_{(0,T)}(x)I_{(x,T)}(y)$$
$$= \frac{N(N-1)(T-y)^{N-2}}{T^N} I_{\mathcal{C}}(x,y) \qquad \mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < T\right\}$$

Quedaría integrar en los diferentes recintos para hallar la función de distribución marginal.

Para terminar, calculamos la densidad marginal de Y. Para la distribución marginal, bastaría integrar en (0,y) la función de densidad.

- $y \leq 0$ o $y \geq T$
$$f_Y(y) = 0$$
- $0 < y < T$
$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{N(N-1)}{T^N}(T-y)^{N-2}dx = \frac{N(N-1)}{T^N}(T-y)^{N-2}y$$
$$\Longrightarrow f_Y(y) = \frac{N(N-1)y(T-y)^{N-2}}{T^N} I_{(0,y)}(y)$$

Ejercicio 4.7. **La probabilidad de que desde un huevo nazca un insecto es p. En una flor, el número de huevos puestos por estos insectos sigue una distribución de Poisson de media λ.**

a) **Calcular la distribución del número de insectos que nace en una flor.**

b) **Se ha observado una flor y se ha constatado que el número de insectos que han nacido en ella han sido n. Calcular la distribución del número de huevos que había en la flor.**

a) Sean

- $X =$“número de huevos puestos en una flor”
- $Y =$“número de insectos nacidos desde los huevos puestos en una flor”

Se sabe que $X \sim Poisson(\lambda)$, es decir, $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, con $k \in \mathbb{N}_0$. Además, la función de masa de Y condicionada a $X = k$ es una $Binomial(k,p)$. Por tanto, si $n \in \{0,1,2,\ldots,k\}$

$$P(Y=n/X=k) = \binom{k}{n} p^n(1-p)^{k-n}$$

Planteamos evaluar

$$P(Y=n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k)P(Y=n/X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{k!}{n!(k-n)!}p^n(1-p)^{k-n}$$
$$= e^{-\lambda}\frac{1}{n!}(p^n(1-p)^{-n})\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!}(\lambda(1-p))^n = \frac{e^{-\lambda}p^n\lambda^n}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}p^n\lambda^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}p^n\lambda^n}{n!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Por tanto, $Y \sim Poisson(\lambda p)$

b) Evaluamos

$$P(X=k/Y=n)=\frac{P(X=k)P(Y=n/X=k)}{P(Y=n)}=\frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda(1-p)} \quad k\in\{n,n+1,\ldots\}$$

***Ejercicio* 4.8. Sea ξ una variable aleatoria discreta con función de masa**

$$p(x)=\frac{1}{2^x}, \qquad x=1,2,\ldots$$

Supongamos que $\eta/\xi=x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(y/x)=x(1-y)^{x-1}, \qquad 0<y<1$$

Determinar la distribución de η.

$$f_\eta(y)=\sum_{x\in\mathbb{N}}p(x)f(y/x)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^x}x(1-y)^{x-1}=\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{\infty}x\left(\frac{1-y}{2}\right)^{x-1}$$

Sea $G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\dfrac{1}{1-z}$ si $|z|<1$

$$G'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{x=1}^{\infty}x\left(\frac{1-y}{2}\right)^{x-1}=G'(z)\big|_{z=\frac{1-y}{2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1-y}{2}\right)^2}=\frac{4}{(1+y)^2}$$

Por tanto,

$$f_\eta(y)=\frac{2}{(1+y)^2} \qquad 0<y<1$$

***Ejercicio* 4.9. Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro $\lambda=1$. Supongamos que $Y/X=x$ es una variable aleatoria con función de densidad**

$$f(y/x)=\begin{cases} xy^{-(x+1)} & \text{si } y>1\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Calcular:

a) **La función de densidad conjunta.**

b) **La función de densidad marginal de Y.**

c) **La función de densidad de $X/Y=y$.**

a) Sea $\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>1\}$

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_{Y/X}(y/x)=e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)\frac{x}{y^{x+1}}I_{(1,\infty)}(y)=e^{-x}\frac{x}{y^{x+1}}I_{\mathcal{C}}(x,y)$$

b) Para $y > 1$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{y^{x+1}}dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty xe^{-x}y^{-x}dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty xe^{-x}e^{-x\ln y}dy \\
&= \frac{1}{y}\int_0^\infty \underbrace{e^{-(1+\ln y)x}x^{2-1}}_{\text{núcleo de } Gamma(a=1+\ln y, p=2)} dx = \frac{1}{y}\frac{\Gamma(2)}{(1+\ln y)^2}\int_0^\infty \frac{(1+\ln y)^2}{\Gamma(2)}e^{-(1+\ln y)x}x^{2-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(2)}{y(1+\ln y)^2} = \frac{1}{y(1+\ln y)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \; f_Y(y) = \frac{1}{y(1+\ln y)^2} I_{(1,\infty)}(y)
$$

c) Si $y > 1$:

$$
f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-x}\dfrac{x}{y^{x+1}}I_{\mathcal{C}}(x,y)}{\dfrac{1}{y(1+\ln y)^2}} = \frac{(1+\ln y)^2 x}{y^x e^x} I_{(0,\infty)}(x)
$$

Ejercicio 4.10. **Se considera la variable aleatoria 2-dimensional (ξ,η), donde ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ y $\eta/\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $x^2 - 2x$ y varianza σ^2. Calcular la esperanza de η y la matriz de varianza-covarianzas.**

Sabemos que $f_\eta(y) = \sum_{x=0}^\infty P_\xi(x) f_{\eta/\xi}(y/x)$

$$
\begin{aligned}
E[\eta] &= \int_{\mathbb{R}} y f_\eta(y)dy = \int_{\mathbb{R}} y\sum_{x=0}^\infty P_\xi(x)f_{\eta/\xi}(y/x)dy = \sum_{x=0}^\infty P_\xi(x)\underbrace{\int_{-\infty}^\infty y f_{\eta/\xi}(y/x)dy}_{E[\eta/\xi=x]=x^2-2x} \\
&= \sum_{x=0}^\infty P_\xi(x)(x^2-2x) = \sum_{x=0}^\infty x^2 P_\xi(x) - 2\sum_{x=0}^\infty xP_\xi(x) = E\left[\xi^2\right] - 2E[\xi] \\
&= Var(\xi) + (E[\xi])^2 - 2E[\xi] = \lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

Por otra parte, $Cov(\xi,\eta) = E[\xi\eta] - E[\xi]E[\eta]$, siendo

$$
\begin{aligned}
E[\xi\eta] &= \sum_{x=0}^\infty \int_{-\infty}^\infty xyP_\xi(x)f_{\eta/\xi}(y/x)dy = \sum_{x=0}^\infty xP_\xi(x)\int_{-\infty}^\infty yf_{\eta/\xi}(y/x)dy = \sum_{x=0}^\infty E[\eta/\xi=x]P_\xi(x) \\
&= \sum_{x=0}^\infty x(x^2-2x)P_\xi(x) = \sum_{x=0}^\infty x^3P_\xi(x) - 2\sum_{x=0}^\infty x^2P_\xi(x) = E\left[\xi^3\right] - 2E\left[\xi^2\right] \\
&\underbrace{=}_{(*)} \lambda(\lambda^2+3\lambda+1) - 2\lambda(\lambda+1) = \lambda(\lambda^2+\lambda+1)
\end{aligned}
$$

Veamos $(*)$:

$$
E\left[\xi^3\right] = \frac{\varphi^{(3)}(0)}{i^3} = \frac{\lambda i^3(\lambda^2+3\lambda+1)}{i^3} = \lambda(\lambda^2+3\lambda+1)
$$

$$
\Longrightarrow \; Cov(\xi,\eta) = \lambda(\lambda^2+\lambda-1) - \lambda^2(\lambda-1) = \lambda(\lambda^2+\lambda-1-\lambda^2+\lambda) = \lambda(2\lambda-1)
$$

Además, $Var(\xi) = \lambda$ y $Var(\eta) = E[\eta^2] - (E[\eta])^2$, donde

$$
\begin{aligned}
E\left[\eta^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \sum_{x=0}^{\infty} P_\xi(x) f_{\eta/\xi}(y/x)dy = \sum_{x=0}^{\infty} P_\xi(x) \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\eta/\xi}(y/x)dy \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} P_\xi(x) E\left[\eta^2/\xi = x\right] = \sum_{x=0}^{\infty} P_\xi(x)\left[\sigma^2 + (x^2 - 2x)^2\right] = \sum_{x=0}^{\infty} P_\xi(x)(\sigma^2 + x^4 + 4x^2 - 4x^3) \\
&= \sigma^2 + E\left[\xi^4\right] + 4E\left[\xi^2\right] - 4E\left[\xi^3\right] \underbrace{\Longrightarrow}_{(**)} Var(\eta) = \sigma^2 + \lambda(4\lambda^2 - 2\lambda + 1)
\end{aligned}
$$

Donde $(**)$:

$$
E\left[\xi^4\right] = \frac{\varphi^{(4)}(0)}{i^4} = \frac{\lambda i^4(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1)}{i^4} = \lambda(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1)
$$

$$
\Longrightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda(2\lambda - 1) \\ \lambda(2\lambda - 1) & \sigma^2 + \lambda(4\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 4.11. **Calcular la matriz de varianza-covarianzas de la variable aleatoria 2-dimensional con función característica**

$$
\varphi(t, u) = \frac{9e^{3i(t+2u)-(t^2+4u^2)/2}}{(3 - it)^2}
$$

$$
\varphi(t, u) = \frac{9e^{3i(t+2u) - \frac{t^2+4u^2}{2}}}{(3 - it)^2} = \left(\frac{3}{3 - it}\right)^2 e^{3it - \frac{t^2}{2}} e^{6iu - 2u^2} = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{3}}\right)^2 e^{3it - \frac{t^2}{2}} e^{6iu - 2u^2} = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(u)
$$

Donde ξ y η son variables aleatorias independientes. En concreto,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\eta(u) &= e^{6iu - \frac{4u^2}{2}} \equiv \eta \sim Normal(6, 4) \\
\varphi_\xi(t) &= \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{it}{3}}\right)^2}_{Gamma(a=3,p=2)} \underbrace{e^{3it - \frac{t^2}{2}}}_{Normal(3,1)} = \varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)
\end{aligned}
$$

donde ξ_1 y ξ_2 son variables aleatorias independientes con

$$
\xi_1 \sim Normal(3, 1) \qquad\qquad \xi_2 \sim Gamma(a = 3, p = 2)
$$

Como son variables aleatorias independientes, $Cov(\xi, \eta) = 0$. Además, $Var(\eta) = 4$. Falta calcular la varianza de ξ:

$$
Var(\xi) = Var(\xi_1 + \xi_2) = Var(\xi_1) + Var(\xi_2) = 1 + \frac{2}{3^2} = \frac{11}{9}
$$

$$
\Longrightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

Ejercicio 4.12. **Se considera la variable aleatoria 2-dimensional** (ξ, η) **con función de masa**

$$P(-1,-1) = \frac{1}{16} \qquad P(-1,0) = \frac{3}{16} \qquad P(-1,1) = 0$$
$$P(0,-1) = \frac{1}{16} \qquad P(0,0) = \frac{1}{4} \qquad P(0,1) = \frac{3}{16}$$
$$P(1,-1) = \frac{1}{8} \qquad P(1,0) = \frac{1}{16} \qquad P(1,1) = \frac{1}{16}$$

Demostrar que $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$ **y mostrar que, sin embargo,** ξ **y** η **no son independientes.**

		ξ			
		-1	0	1	
η	-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

La suma por columnas es la distribución marginal de ξ y la suma por filas es la distribución marginal de η.

$\eta+\xi$	-2	-1	0	1	2
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Por tanto,

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \frac{1}{16}e^{-2it} + \frac{1}{4}e^{-it} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{it} + \frac{1}{16}e^{2it} = \frac{1}{16}\Big(e^{-2it} + 4e^{-it} + 6 + 4e^{it} + e^{2it}\Big)$$
$$\varphi_\xi(t) = \frac{1}{4}\Big(e^{-it} + 2 + e^{it}\Big)$$
$$\varphi_\eta(t) = \frac{1}{4}\Big(e^{-it} + 2 + e^{it}\Big)$$

$$\implies \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t) = \frac{1}{16}\Big(e^{-it} + 2 + e^{it}\Big) = \varphi_{\xi+\eta}(t)$$

Veamos que ξ y η no son independientes:

$$P(\xi = 1, \eta = -1) = 0 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = P(\xi = 1)\cdot P(\eta = -1)$$

Ejercicio 4.13. **Sea** (X_1, X_2) **una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad**

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se considera la transformación (Y_1, Y_2)**, donde** $Y_1 = \text{máx}\{X_1, X_2\}$ **e** $Y_2 = \text{mín}\{X_1, X_2\}$**. Calcular la función de densidad de** (Y_1, Y_2)**.**

Observamos que si $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le x_1\big\}$ y $\mathcal{C}_2 = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_1 < x_2\big\}$, podemos distinguir dos casos:

- $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_1$. Usamos la transformación $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Longrightarrow J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

En la que el recinto transformado es

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq x_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{C}^* = \Big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq y_1\Big\}$$

- $(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_2$. Usamos la transformación $y_1 = x_2,\ y_2 = x_1$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_1 \end{cases} \Longrightarrow J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

En la que el recinto transformado es

$$\begin{cases} 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 \leq x_1 < x_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 < y_1 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{C}^* = \Big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq y_1\Big\}$$

Volvemos a obtener $\mathcal{C}$ porque, aunque la desigualdad es estricta, una recta no tiene masa.

Entonces
$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = (1 \cdot |J_1| + 1 \cdot |J_2|) I_{\mathcal{C}^*}(y_1, y_2) = 2 I_{\mathcal{C}^*}(y_1, y_2)$$

Ejercicio 4.14. **Sea (X, Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad uniforme en el recinto**

$$\mathcal{C} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\Big\}$$

Calcular las distribuciones de Z y (Z, T), donde $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

Calculamos $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$:

- $z < 0$

$$F_Z(z) = 0$$

- $0 \leq z < 1$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\text{Area}(\mathcal{C})} I_{\mathcal{C}}(x, y)$$

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_x^z dy dx = \int_0^z (z - x) dx = \left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_0^z = z^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}$$

No habría sido necesaria hacer esto ya que, si $0 \leq z < 1$, entonces

$$F_Z(z) = \frac{\text{Área del recinto triángulo}}{\text{Área } \mathcal{C}} = \frac{\frac{z^2}{2}}{1} = \frac{z^2}{2}$$

- Si $1 \leq z < 2$, entonces

$$F_Z(z) = \frac{\text{Área del recinto}}{\text{Área}(\mathcal{C})}$$

Pero es más fácil pasar al complementario:

$$F_Z(z) = 1 - \frac{\text{Área del triángulo superior}}{\text{Área}(\mathcal{C})} = 1 - \frac{\frac{(2-z)(2-z)}{2}}{1} = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

- Si $2 \leq z$

$$F_Z(z) = 1$$

$$\Longrightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq z \end{cases}$$

Veamos ahora $F_{(Z,T)}(z,t)$:

$$\begin{cases} z = x + y \\ t = x - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{z}{2} + \frac{t}{2} \\ y = \frac{z}{2} - \frac{t}{2} \end{cases} \Longrightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Donde el recinto transformado es $\mathcal{C}^* = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq z + t \leq 2, t \leq z \leq 2 + t\}$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{z+t}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{z-t}{2} \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 \leq z + t \leq 2 \\ 0 \leq z - t \leq 2 \iff t \leq z \leq 2 + t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}\left(\frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2}\right) \cdot |J| = \frac{1}{2} I_{\mathcal{C}^*}(z,t)$$

Ejercicio 4.15. **Sea (ξ_1, ξ_2) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad**

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (η_1, η_2), donde $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ y $\eta_2 = \text{máx}\{\xi_1, \xi_2\}$.

Sea $\mathcal{C} = (0,1) \times (0,1) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ con $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, 0 < x < y\}$. Entonces,

- $(x,y) \in \mathcal{C}_1$

$$\begin{cases} z = x + y \\ t = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = z - t \end{cases} \Longrightarrow J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Siendo el recinto transformado $\mathcal{C}^* = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 1, t < z < 2t\}$.

- $(x, y) \in \mathcal{C}_2$

$$\begin{cases} z = x + y \\ t = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = z - t \\ y = t \end{cases} \implies J_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Siendo el recinto transformado $\mathcal{C}^*$.

Entonces, $\forall (z, t) \in \mathcal{C}^*$

$$f_{(\eta_1,\eta_2)}(z, t) = f_{(\xi_1,\xi_2)}(t, z - t) \cdot |J_1| + f_{\xi_1,\xi_2}(z - t, t) \cdot |J_2| = 4t(z - t) + 4(z - t)t = 8t(z - t)$$

$$\implies f_{(\eta_1,\eta_2)}(z, t) = 8t(z - t)I_{\mathcal{C}^*}$$

Ejercicio 4.16. **Se consideran las variables aleatorias X e Y independientes, donde $X \sim Uniforme(1, 3)$ e Y tiene función de densidad**

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{2-y} & \text{si } y > 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:

a) **La distribución conjunta de (Z, W), donde $Z = X/Y$ y $W = XY$.**

b) **La distribución marginal de Z.**

a)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{2-y}I_{\mathcal{C}}(x, y) \qquad \mathcal{C} = (1, 3) \times (2, \infty)$$

Tomamos la transformación

$$\begin{cases} z = \dfrac{x}{y} \\ w = xy \end{cases} \implies \begin{cases} x = \sqrt{wz} \\ y = \sqrt{\dfrac{w}{z}} \end{cases} \implies J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{w}{z}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{z}{w}} \\ -\dfrac{\sqrt{w}}{2z^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{1}{2\sqrt{wz}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2z}$$

Siendo el recinto transformado $\mathcal{C}^* = \{(z, w) \in \mathbb{R}^2 : 1 < wz < 9, 4z < w\}$

Por tanto, si $(z, w) \in \mathcal{C}^*$:

$$f_{(Z,W)}(z, w) = f_{(X,Y)}\left(\sqrt{wz}, \sqrt{\frac{w}{z}}\right)|J| = \frac{1}{2}e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}\frac{1}{2z}$$

$$\implies f_{(Z,W)}(z, w) = \frac{1}{4z}e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}I_{\mathcal{C}^*}(z, w)$$

b) $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,W)}(z, w)dw$.

- $z \notin \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

$$f_Z(z) = 0$$

- $z \in (0, \frac{1}{2}]$

$$f_Z(z) = \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{9}{z}} \frac{1}{4z}e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}dw = \frac{e^2}{2}\left(-\frac{3}{z}e^{-\frac{3}{z}} - e^{-\frac{3}{z}} + \frac{1}{z}e^{-\frac{1}{z}} + e^{-\frac{1}{z}}\right)$$

- $z \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$f_Z(z) = \int_{4z}^{\frac{9}{z}} \frac{1}{4z} e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}} = \frac{e^2}{2}\left(-\frac{3}{z}e^{-\frac{3}{z}} - e^{-\frac{3}{z}} + 2e^{-2} + e^{-2}\right)$$

Ejercicio 4.17. **Sean $X_1, \dots, X_{n+1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución Bernoulli de parámetro p. Sean**

$$V_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{y} \qquad V_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i$$

Calcular la distribución conjunta de (V_n, V_{n+1}), su función característica y deducir si V_n y V_{n+1} son o no independientes.

La variable aleatoria (V_n, V_{n+1}) es discreta y definida sobre $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ con

$$\begin{aligned} p_{(1,1)} &= P(V_n = 1, V_{n+1} = 1) = P(X_1 = 1, \dots, X_{n+1} = 1) = p^{n+1} \\ p_{(1,0)} &= P(V_n = 1, V_{n+1} = 0) = P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1, X_{n+1} = 0) = p^n(1-p) \\ p_{(0,0)} &= P(V_n = 0, V_{n+1} = 0) = 1 - p^{n+1} - p^n(1-p) = 1 - p^n \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,u) &= e^{i(t+u)}p^{n+1} + e^{it}p^n(1-p) + 1 - p^n \\ \varphi_{V_n}(t) &= \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,0) = e^{it}p^n + 1 - p^n \\ \varphi_{V_{n+1}}(u) &= \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(0,u) = e^{iu}p^{n+1} + 1 - p^{n+1} \end{aligned}$$

Veamos que no son independientes:

$$\varphi_{V_n}(t)\varphi_{V_{n+1}}(u) = \left(e^{it}p^n + 1 - p^n\right)\left(e^{iu}p^{n+1} + 1 - p^{n+1}\right) \neq \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,u)$$

Ejercicio 4.18. **Sean X e Y variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Calcular la distribución de $T = |X - Y|$.**

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}I_{(0,\infty)}(x)e^{-y}I_{(0,\infty)}(y) = e^{-(x+y)}I_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y)$$

Sea $T = |X - Y|$. Entonces $F_T(t) = P(T \leq t) = P(|X - Y| \leq t)$:

- Si $t < 0$

$$F_T(t) = 0$$

- Si $t > 0$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(|X-Y| \leq t) = P(-t \leq X - Y \leq t) = \int_{\mathcal{C}} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy \\ &= \underbrace{\int_0^t \int_0^{t+y} e^{-(x+y)}dxdy}_{(*)} + \underbrace{\int_t^\infty \int_{y-t}^{y+t} e^{-(x+y)}dxdy}_{(**)} \\ &= 1 - e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} = 1 - e^{-t} \\ &\implies F_T(t) = 1 - e^{-t}I_{[0,\infty)}(t) \qquad T \sim Exp(1) \end{aligned}$$

Veamos las partes intermedias de la integral:

(*)

$$\int_0^{y+t} e^{-(x+y)}dx = e^{-y}\int_0^{y+t} e^{-x}dx = e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{y+t} = e^{-y}\left(-e^{-(y+t)}+1\right) = e^{-y}-e^{-(2y+t)}$$

$$\Longrightarrow \int_0^t\int_0^{y+t} e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^t\left(e^{-y}-e^{-(2y+t)}\right)dy = 1-e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

(**)

$$\int_{y-t}^{y+t} e^{-(x+y)}dx = e^{-(2y-t)}-e^{-(2y+t)}$$

$$\Longrightarrow \int_t^\infty\int_{y-t}^{y+t} e^{-(x+y)}dxdy = \int_t^\infty\left(e^{-(2y-t)}-e^{-(2y+t)}\right)dy = \frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}$$

Ejercicio 4.19. **Sea (ξ_1,ξ_2) una variable aleatoria con función de densidad**

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 2^{-1}e^{-x_1} & \text{si } x_1>0,\ -1<x_2<1 \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $\eta=|\xi_1+\xi_2|$.

$$F_\eta(z)=P(\eta\le z)=P(|\xi_1+\xi_2|\le z)$$

- Si $z<0$

$$F_\eta(z)=P(\emptyset)=0$$

- Si $z\ge 0$

$$F_\eta(z)=P(\eta\le z)=P(|\xi_1+\xi_2|\le z)=P(-z\le\xi_1+\xi_2\le z)$$

  - Si $0\le z<1$

$$F_\eta(z)=P(-z\le\xi_1+\xi_2\le z)=\int_0^{1-z}\int_{-z-x_1}^{z-x_1}\frac{1}{2}e^{-x_1}dx_2dx_1+\int_{1-z}^{1+z}\int_{-1}^{z-x_1}\frac{1}{2}e^{-x_1}dx_2dx_1$$

  - Si $1\le z$

$$F_\eta(z)=P(-z\le\xi_1+\xi_2\le z)=\int_{-1}^{1}\int_0^{z-x_2}\frac{1}{2}e^{-x_1}dx_1dx_2$$

Ejercicio 4.20. **Sea (X,Y) una variable aleatoria 2-dimensional con función de densidad**

$$f(x,y)=\begin{cases} k^2e^{-ky} & \text{si } 0<x<y \\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

a) **Hallar la probabilidad del recinto $[0,1]\times[0,1]$.**

b) **Determinar los valores de k para que f sea una función de densidad.**

c) **Demostrar que X e $Y-X$ son independientes.**

d) **Escribir la curva (general) de regresión y la recta de regresión de Y sobre X.**

a) Evaluamos

$$P((X,Y)\in[0,1]\times[0,1]) = \int_0^1\int_0^y k^2e^{-ky}dxdy = \int_0^1 k^2e^{-ky}[x]_0^y dy = k^2\int_0^1 ye^{-ky}dy$$
$$= \left(-\left[ye^{-ky}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-ky}dy\right)k = k\left(-e^{-k} + \left[-\frac{e^{-ky}}{k}\right]_0^1\right)$$
$$= k\left(-e^{-k} - \frac{1}{k}e^{-k} + \frac{1}{k}\right) = 1-(1+k)e^{-k}$$

b) Para que f sea una función de densidad debemos observar:

- $f(x,y)\geq 0 \implies k\neq 0$
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_0^\infty\int_0^y k^2e^{-ky}dxdy = k^2\int_0^\infty \underbrace{ye^{-ky}}_{\text{Núcleo de } Gamma(a=k,p=2)} dy$$
$$= k^2\frac{\Gamma(2)}{k^2}\int_0^\infty \frac{k^2}{\Gamma(2)}ye^{-ky}dy = \Gamma(2) = 1$$

Lo único que necesitamos es $k>0$, ya que el parámetro de la Gamma es mayor que 0. Si $k\leq 0$ la función sería no acotada.

c) Tomamos la transformación

$$\begin{cases} z = x \\ t = y-x \end{cases} \implies \begin{cases} x = z \\ y = z+t \end{cases} \implies J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

El recinto transformado es $\mathcal{C}^* = \{(z,t)\in\mathbb{R}^2 : z>0, t>0\}$. Entonces $(Z,T) = (X, Y-X)$ tiene función de densidad

$$f_{(Z,T)}(z,t) = f_{(X,Y)}(z,z+t)|J| = k^2e^{-k(z+t)}I_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(z,t)$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}(z,t)dt = \int_0^\infty k^2e^{-k(z+t)}dt = ke^{-kz}\int_0^\infty ke^{-kt}dt = ke^{-kz} \quad z>0 \\ &= 0 \quad z<0 \\ f_T(t) &= ke^{-kt} \quad t>0 \\ &= 0 \quad t\leq 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$f_Z(z)f_T(t) = ke^{-kz}I_{(0,\infty)}(z)ke^{-kt}I_{(0,\infty)}(t) = k^2e^{-k(z+t)}I_{(0,\infty)\times(0,\infty)}(z,t) = f_{(Z,T)}(z,t)$$

Es decir, X e $Y-X$ son independientes.

d) Hemos evaluado $f_X(x) = ke^{-kx}I_{(0,\infty)}(x)$. Para $x > 0$ tenemos:

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{k^2e^{-ky}I_{(x,\infty)}(y)}{ke^{-kx}} = ke^{-k(y-x)}I_{(x,\infty)}(y)$$

La curva general de regresión de Y sobre X viene dada por

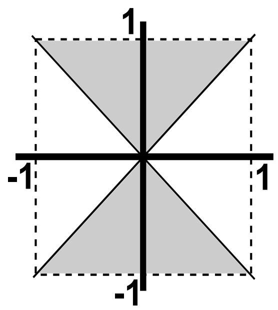
$$y = E[Y/X = x] = \int_{\mathbb{R}} yf_{Y/X}(y/x)dy = \int_x^{\infty} yke^{-k(y-x)}dy = e^{kx}\int_x^{\infty} yke^{-ky}dy = x + \frac{1}{k}$$

La curva tiene la ecuación de una recta, por lo que no hace falta calcular la recta de regresión de Y sobre X, ambas coinciden.

Ejercicio 4.21. **Consideremos la variable aleatoria 2-dimensional (X,Y) con distribución uniforme en el recinto limitado por las rectas $y = x$, $x = -y$, $y = 1$ e $y = -1$; es decir, $f(x,y) = \frac{1}{2}$ para $(x,y) \in \mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y| < 1\}$.**

a) **Calcular la curva (general) de regresión de Y sobre X.**

b) **Estudiar si X e Y son independientes y/o incorreladas.**



a) Calculamos:

- $0 \leq x < 1$

$$f_X(x) = \int_{-1}^{-x} \frac{1}{2}dy + \int_x^1 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}((1-x) + (1-x)) = 1 - x$$

- $-1 < x < 0$:

$$f_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}dy + \int_{-x}^1 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}((x+1) + (1+x)) = 1 + x$$

- $x \notin (-1,1)$

$$f_X(x) = 0$$

$$\Longrightarrow f_X(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$$

Ahora, para $x \in (-1,1)$ tenemos que

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2}I_{\mathcal{C}}(x,y)}{1-|x|} = \frac{1}{2(1-|x|)}I_{\mathcal{C}_X}(y)$$

siendo

- $\mathcal{C}_X = (-1,-x) \cup (x,1)$ si $x \in (0,1)$
- $\mathcal{C}_X = (-1,x) \cup (-x,1)$ si $x \in (-1,0)$
- $\mathcal{C}_0 = (-1,1) \setminus \{(0,0)\}$

Para evaluar la curva general de regresión de Y sobre X distinguimos entre

a) $0 \leq x < 1$

$$y = E[Y/X = x] = \int_{-1}^{-x} \frac{y}{2(1-x)}dy + \int_{x}^{1} \frac{y}{2(1-x)}dy = \frac{1}{2(1-x)}\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{-x} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x}^{1}\right)$$
$$= \frac{x^2 - 1 + 1 - x^2}{4(1-x)} = 0$$

b) $-1 < x < 0$

$$y = E[Y/X = x] = \int_{-1}^{x} \frac{y}{2(1+x)}dy + \int_{-x}^{1} \frac{y}{2(1+x)}dy = \frac{1}{2(1+x)}\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{x} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{1}\right)$$
$$= \frac{x^2 - 1 + 1 - x^2}{4(1-x)} = 0$$

Es decir, la curva general de regresión de Y sobre X sólo existe para $x \in (-1,1)$, en cuyo caso viene dada por $y = 0$.

b) La curva general de regresión de Y sobre X coincide con la recta de regresión de Y sobre X, lo cual implica que $\rho(X,Y) = 0$. Es decir, X e Y son incorreladas. Veamos que no son independientes:

$$f_X(x)f_Y(y) = (1-|x|)(1-|y|)I_{(-1,1)\times(-1,1)}(x,y) \neq f_{(X,Y)}(x,y)$$

Ejercicio 4.22. **Consideremos las variables aleatorias X e Y, con rectas de regresión**

$$\begin{cases} 3x + 2y - 26 = 0 \\ 6x + y - 31 = 0 \end{cases}$$

Calcular las medias marginales y el coeficiente de correlación. Identificar cuál es la recta de regresión de Y sobre X.

Los valores de $\mu_1 = E[X]$ y $\mu_2 = E[Y]$ satisfacen las ecuaciones. Si resolvemos el sistema, obtenemos $x = 4$, $y = 7$, por lo que $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 7$.

La recta de regresión de Y sobre X es de la forma

$$y = \mu_2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1) \equiv y = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

Y la recta de regresión de X sobre Y es

$$x = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(y - \mu_2) \equiv y = \mu_2 + \frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

La recta de regresión de X sobre Y será la que tenga mayor pendiente en valor absoluto. Reescribimos las rectas como

1. $y = 13 - \frac{3}{2}x$

2. $y = 31 - 6x$

La recta de regresión de Y sobre X es la 1, y la 2 es la recta de regresión de X sobre Y.

Como las pendientes son negativas tenemos que $\rho < 0$. Además, sabemos que

$$\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{3}{2} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -6$$

Si dividimos:

$$\frac{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{\frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \frac{-\frac{3}{2}}{-6} \implies \rho^2 = \frac{3}{12} \implies \rho = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 4.23. **Se considera una variable aleatoria (X, Y) con distribución $Normal_2$. Se sabe que las rectas de regresión tienen por ecuaciones $x - y + 2 = 0$, $3x - 10y + 40 = 0$; y que la suma de las varianzas de X e Y es $1{,}3$. Determinar la correspondiente función de densidad.**

Sean

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Con $\mu_1 = E[X]$, $\mu_2 = E[Y]$, $\sigma_1^2 = Var(X)$, $\sigma_2^2 = Var(Y)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = Cov(X, Y)$

Evaluamos μ_1, μ_2 como solución de las ecuaciones de las rectas de regresión. Si resolvemos el sistema obtenemos

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{34}{7} \end{pmatrix}$$

La recta de regresión de Y sobre X es de la forma

$$y = \mu_2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}(x - \mu_1) \equiv y = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

Y la recta de regresión de X sobre Y es

$$x = \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(y - \mu_2) \equiv y = \mu_2 + \frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

La recta de regresión de X sobre Y será la que tenga mayor pendiente en valor absoluto. Reescribimos las rectas como

1. $y = \frac{3}{10}x + 4$

2. $y = x + 2$

La recta de regresión de Y sobre X es la 1, y la 2 es la recta de regresión de X sobre Y. Además,

$$\frac{3}{10} = \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}$$
$$1 = \frac{1}{\rho}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1{,}3 \\ \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} = \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1{,}3 \\ \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \dfrac{3}{10} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1{,}3 \\ \sigma_2^2 = \dfrac{3}{10}\sigma_1^2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\sigma_1^2 + \frac{3}{10}\sigma_1^2 = 1,3 \iff \sigma_1^2\left(1 + \frac{3}{10}\right) = 1{,}3 \iff \sigma_1^2\frac{13}{10} = 1{,}3 \iff \sigma_1^2 = 1$$
$$\sigma_2^2 = \frac{3}{10}$$
$$\sigma_{12} = \frac{3}{10}\sigma_1^2 = \frac{3}{10}$$

Por lo tanto:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{3}{10} \\ \dfrac{3}{10} & \dfrac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$f_{(X,Y)}\underbrace{(x,y)}_{\overline{x}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}}e^{-\frac{1}{2}(\overline{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\overline{x}-\mu)}$$

5

Convergencias estocásticas

Ejercicio 5.1. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normales de media 0 y varianza 1. Estudiar la convergencia en probabilidad de la sucesión $\{Y_n : n \leq 1\}$, donde $Y_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.**

$$\sum_{j=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2 \equiv Gamma\Big(a = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2}\Big)$$

Reducimos el problema a demostrar que $Y_n \to 1$(en ley) cuando $n \to \infty$, lo que implica $Y_n \to 1$ (en probabilidad) cuando $n \to \infty$.

Planteamos el cálculo

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\Big[e^{itY_n}\Big] = E\Big[e^{\frac{it}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2}\Big] = \varphi_{\sum_{j=1}^{n} X_j^2}\Big(\frac{t}{n}\Big) = \left(\frac{1}{1 - \frac{2it}{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{2it}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Evaluamos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2it}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{2it}}\right)^{-\frac{n}{2it}}\right)^{\frac{2it}{n}\frac{n}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{2it}}\right)^{-\frac{n}{2it}}\right)^{it} = e^{it}$$

Entonces,

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y \qquad (Y \equiv 1)$$

Ejercicio 5.2. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Bernoulli(p)$, con $0 < p < 1$. Sea la variable aleatoria $V_n = X_1X_2 \ldots X_n$. Estudiar la convergencia en ley, la convergencia en probabilidad y la convergencia casi segura de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$.**

- Convergencia en ley

$$P(V_n = 1) = P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j = 1) = p^n$$

$$P(V_n = 0) = 1 - P(V_n = 1) = 1 - p^n$$

Entonces, $V_n \sim Bernoulli(p^n)$

$$F_{V_n}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - p^n & \text{si } 0 \leq u < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq u \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_V(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq u \end{cases}$$

La convergencia también se produce en el punto de discontinuidad.

Por lo tanto, $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} V$, donde $V \sim Degenerada(0)$

- Convergencia en probabilidad

  Tomando $V \equiv 0$ (es decir, la degenerada $V(w) = 0$, $\forall w \in \Omega$) tenemos $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

- Convergencia casi segura

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} V \iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : |V_m(w) - V(w)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Veamos que $V_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$. Si pasamos al complementario:

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) \geq \varepsilon\}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) < \varepsilon\}\right)$$

Entonces,

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) < \varepsilon\}\right) = 1$$

Ahora, para $\varepsilon > 1$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) < \varepsilon\}\right) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega) = 1$$

y para $\varepsilon < 1$

$$P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) < \varepsilon\}\right) = P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : V_m(w) = 0\}\right) = P(V_n = 0) = 1 - p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\implies V_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} V$$

***Ejercicio* 5.3. Sea (X, Y) la variable aleatoria con función de densidad conjunta**

$$f(x, y) = \begin{cases} 4^{-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0, \ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se pide:

a) **Sea $\{X_n : n \leq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley $\mathcal{L}(X)$. Hallar la distribución de**

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$, donde $V_n = \dfrac{1}{n^2} Y_n$.

b) **Sea Z_n una variable aleatoria tal que $Z_n/X = x$ es Poisson de parámetro nx. Calcular la distribución de Z_n y estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Z_n : n \geq 1\}$.**

a) Evaluamos $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$

- Si $x \leq 0$
$$f_X(x) = 0$$
- Si $x > 0$
$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} dy = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} [y]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\Longrightarrow X \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma\left(a = \frac{1}{2}, p = n\right)$$

Entonces, $V_n = \dfrac{1}{n^2} Y_n$ tiene función característica

$$\varphi_{V_n}(t) = \varphi_{\frac{Y_n}{n^2}}(t) = \varphi_{Y_n}\left(\frac{t}{n^2}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{2it}{n^2}\right)^n}$$

Si estudiamos el límite:

$$\lim_{\text{n}\to\infty} \left(1 - \frac{2it}{n^2}\right)^{-n} = \lim_{\text{n}\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\frac{-n^2}{2it}}\right)^{-\frac{n^2}{2it}}\right)^{-\frac{2it}{n^2}(-n)} = e^{\lim_{\text{n}\to\infty} \frac{2it}{n}} = 1$$

donde $1 = \varphi_V(t)$, siendo $V \sim Degenerada(0)$. Por el teorema de continuidad de Paul-Levy,

$$V_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} V$$

b) Evaluamos

$$P(Z_n = z) = \int_{\mathbb{R}} P(Z_n = z/X = x) f_X(x) dx = \int_0^\infty (e^{-nx}) \frac{(nx)^z}{z!} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \frac{n^z}{2z!} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)x} x^{(z+1)-1} dx = \frac{n^z}{2z!} \frac{z!}{\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}}{\Gamma(z+1)} e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)x} x^z dx$$

$$= \frac{n^z}{2z!} \frac{z!}{\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}} = \frac{n^z}{2\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}}$$

Hay que aplicar el teorema de Paul-Levi. Evaluamos

$$P(Z_n = z) = \frac{n^z}{2\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}}, \qquad z \in \mathbb{N}_0$$

Entonces,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \sum_{z=0}^{\infty} e^{itz} \frac{n^z}{2\left(\frac{1}{2}+n\right)^{z+1}} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}+n\right)} \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{ne^{it}}{\frac{1}{2}+n}\right)^z$$

Podemos acotar la razón de la serie geométrica:

$$|\frac{ne^{it}}{\frac{1}{2}+n}| = \frac{n}{\frac{1}{2}+n}|e^{it}| < 1$$

Como el módulo de la razón de la serie geométrica es menor que 1, la serie converge. Por tanto,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{1 - \frac{ne^{it}}{\frac{1}{2}+n}} = \frac{1}{1+2n(1-e^{it})}$$

Si estudiamos el límite de la función característica tenemos:

- Si $t = 2k\pi$

$$e^{it} = \cos(t) + i\,\text{sen}(t) = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+0} = 1$$

- Si $t \neq 2k\pi$

$$e^{it} \neq 1 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+2n(\neq 0)} = 0$$

Por tanto, no podemos asegurar la convergencia en ley.

***Ejercicio* 5.4. Demostrar que si $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que converge en ley a la constante c, entonces la sucesión $\left\{e^{X_n} : n \geq 1\right\}$ converge en ley hacia e^c. Usar este resultado para estudiar la convergencia en ley y en probabilidad de**

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

donde $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniformes sobre el intervalo $(0, 1)$.

Si $F_n(x) = P(X_n \leq x)$, entonces tenemos que

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}$$

Sea $Z_n = e^{X_n}$ y sea $G_n(z) = P(Z_n \leq z)$. Entonces, $G_n(z) = P\Big(e^{X_n} \leq z\Big) = P(X_n \leq \ln z) = F_n(\ln z)$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
&G_n(z) = F_n(\ln z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \ln z < c \\ 1 & \text{si } \ln z > c \end{cases} \\
&\iff G_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} G(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < e^c \\ 1 & \text{si } z > e^c \end{cases} \\
&\implies G_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} G(z) \sim Degenerada(e^c) \\
&\implies Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} e^c \implies Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} e^c
\end{aligned}$$

Sea

$$Y_n = \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)^{\frac{1}{n}}$$

Tomamos $Y_n = e^{Z_n}$ con

$$Z_n = \ln Y_n = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln X_j$$

Evaluamos

$$\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^{n} \ln X_j}\left(\frac{t}{n}\right) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\ln X_j}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{\ln X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

donde

$$\varphi_{\ln X_1}(t) = E\Big[e^{it\ln X_1}\Big] = E\Big[X_1^{it}\Big] = \int_0^1 u^{it} du = \left[\frac{u^{it+1}}{it+1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+it}$$

Entonces,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(\frac{1}{1+i\frac{t}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{it}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-it} = \varphi_Z(t), \qquad Z \sim Degenerada(-1)$$

Por el teorema de continuidad de Paul-Levi,

$$Y_n = e^{Z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} e^{-1} \implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} e^{-1}$$

Ejercicio 5.5. **Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y definamos**

$$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}}$$

Estudiar la convergencia en ley de $\{Y_n : n \geq 0\}$ cuando:

a) $X_i \sim Normal(0, \sigma^2),\ i \geq 0$

b) $X_i \sim Cauchy(0,1),\ i \geq 0$

Por el teorema de continuidad de Paul Levy, si $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, siendo φ una función continua en $t=0$, entonces φ es la función característica de una función de distribución F tal que $F_n \to F$ (en ley) cuando $n \to \infty$. Siendo $\{F_n : n \geq 1\}$ una sucesión de funciones de distribución sobre $\mathbb{R}$ y $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ la correspondiente sucesión de funciones características.

a) Tenemos que $\varphi_{X_j} = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}\ \forall t \in \mathbb{R}$. Evaluamos

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= \varphi_{\sum_{j=0}^{n} \frac{X_j}{2^{n+1-j}}}(t) = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{\frac{X_j}{2^{n+1-j}}}(t) = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{2^{n+1-j}}\right) = \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{2^{n+1-j}}\right)^2} \\
&= e^{-\sum_{j=0}^{n} \frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3-2j}}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3}} \sum_{j=0}^{n} 2^{2j}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3}} \sum_{j=0}^{n} 4^j} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3}} \frac{4-4^n-1}{4-1}} \\
&= e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{24} \frac{4^{n+1}-1}{4^n}}
\end{aligned}$$

Evaluamos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{24} \frac{4^{n+1}-1}{4^n}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{6}} = \varphi_Y(t)$$

donde $Y \sim Normal\left(0, \dfrac{\sigma^2}{3}\right)$

Entonces Y_n converge en ley a Y cuando $n \to \infty$

b) Evaluamos

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_n}(t) &= \varphi_{\sum_{j=0}^{n} \frac{X_j}{2^{n+1-j}}} = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{\frac{X_j}{2^{n+1-j}}}(t) = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{X_j}\left(\frac{t}{2^{n+1-j}}\right) = \prod_{j=0}^{n} e^{-\left|\frac{t}{2^{n+1-j}}\right|} = \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{|t|}{2^{n+1-j}}} \\
&= e^{-|t| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-j}}} = e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n} 2^j} = e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}} \frac{2^n 2-1}{2-1}} = e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}} \cdot \left(2^{n+1}-1\right)}
\end{aligned}$$

Planteamos

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-|t| \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} = e^{-|t|} = \varphi_Y(t)$$

donde $Y \sim Cauchy(0,1)$. Entonces $Y_n \to Y$ (en ley) cuando $n \to \infty$

Ejercicio 5.6. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con funciones de densidad**

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+(nx)^2}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad y la convergencia en media de orden 2 de $\{X_n : n \geq 1\}$.

Analizamos $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$ planteando si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{w \in \Omega : |X_n(w) - 0| > \varepsilon\}) = 0$$

lo cual equivale a analizar si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{w \in \Omega : |X_n(w)| \leq \varepsilon\}) = 1$$

Fijando $\varepsilon > 0$ calculamos la probabilidad $P(\{w \in \Omega : |X_n(w)| \leq \varepsilon\})$.

$$P(|X_n| \leq \varepsilon) = P(-\varepsilon \leq X_n \leq \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+(nx)^2} dx = \frac{1}{\pi}[\arctan(nx)]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$
$$= \frac{\arctan(n\varepsilon) - \arctan(-n\varepsilon)}{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}{\pi} = 1$$
$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Para analizar si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^2} 0$, planteamos $E\left[X_n^2\right] = \infty$, X_n no es integrable, $E[|X_n|] = \infty$:

$$E[|X_n|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n|x|}{1+(nx)^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{nx}{1+(nx)^2} dx = \frac{2}{\pi} \Big[\ln(1+(nx)^2)\Big]_0^{\infty} = \infty$$

Luego X_n no converge en media de orden 2 a 0

Ejercicio 5.7. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones Poisson de parámetro n. Demostrar que**

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en ley a X, donde X es una variable aleatoria $Normal(0,1)$.

Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $Poisson(1)$. Entonces $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j \sim Poisson(n)$.

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(t) = \prod_{j=1}^n e^{1(e^{it}-1)} = e^{n(e^{it}-1)} \Longrightarrow X_n \sim Poisson(n)$$

Aplicamos el teorema central del límite a la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$

$$\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - E\left[\sum_{j=1}^n Y_j\right]}{\sqrt{Var\left(\sum_{j=1}^n Y_j\right)}} = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \sim Normal(0,1)$$

Ejercicio 5.8. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $Uniforme(0,1)$. Consideremos**

$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$$
$$Z_n = nY_n$$
$$T_n = n^{\alpha}(1 - Y_n)$$

Estudiar la convergencia en ley de las sucesiones $\{Y_n : n \geq 1\}$, $\{Z_n : n \geq 1\}$ y $\{T_n : n \geq 1\}$.

- $\underline{Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)}$

  Evaluamos $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y)$

  - Si $y < 0$

  $$F_{Y_n}(y) = P(\emptyset) = 0$$

- Si $0 \leq y < 1$

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(\text{máx}(X_1, \ldots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y, \ldots, X_n \leq y)$$
$$= \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leq y) = (P(X_1 \leq y))^n = y^n$$

- Si $y \geq 1$

$$F_{Y_n}(y) = 1$$

Entonces

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y^n & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases} \qquad Y \sim Degenerada(1)$$

$$\Longrightarrow Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$$

- $Z_n = nY_n$

  - Si $z < 0$

$$G_{Z_n}(z) = 0$$

  - Si $0 \leq z < n$

$$G_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(nY_n \leq z) = P\left(Y_n \leq \frac{z}{n}\right) = F_{Y_n}\left(\frac{z}{n}\right) = \left(\frac{z}{n}\right)^n$$

  - Si $z \geq n$

$$G_{Z_n}(z) = 1$$

Por tanto,

$$G_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \left(\frac{z}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq z < n \\ 1 & \text{si } z \geq n \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

No converge a una función de distribución, luego Z_n no converge en ley.

- $T_n = n^\alpha(1 - Y_n)$

  - Si $t < 0$

$$F_{T_n}(t) = 0$$

  - Si $0 \leq t < n^\alpha$

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(n^\alpha(1 - Y_n) \leq t) = P\left(1 - Y_n \leq \frac{t}{n^\alpha}\right) = P\left(Y_n \geq 1 - \frac{t}{n^\alpha}\right)$$
$$= 1 - P\left(Y_n < 1 - \frac{t}{n^\alpha}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n^\alpha}\right)^n$$

  - Si $t \geq n^\alpha$

$$F_{T_n}(t) = 1$$

Por tanto,

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{t}{n^\alpha}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n^\alpha \\ 1 & \text{si } t \geq n^\alpha \end{cases}$$

Distinguimos:

- Si $\alpha = 1$

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{t}{n^\alpha}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n^\alpha \\ 1 & \text{si } t \geq n^\alpha \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} T, \qquad T \sim \mathit{Exponencial}(1)$$

- Si $\alpha > 1$

$$F_{T_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para $\alpha > 1$, la sucesión $\{T_n : n \geq 1\}$ no converge en ley.

- Si $\alpha < 1$

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{t}{n^\alpha}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n^\alpha \\ 1 & \text{si } t \geq n^\alpha \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} T, \qquad T \sim \mathit{Degenerada}(0)$$

***Ejercicio* 5.9. Estudiar si las siguientes sucesiones de variables aleatorias independientes cumplen la ley débil y/o la ley fuerte de los grandes números:**

a) $\{X_n : n \geq 1\}$**, donde**

$$P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = \frac{1}{2^{2n+1}}$$
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^{2n}}$$

b) $\{X_n : n \geq 1\}$**, donde**

$$P\left(X_n = \sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = P\left(X_n = -\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = \frac{1}{2} \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

a)

- Ley débil de los grandes números
  Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = 0$

$$E[X_n] = 2^n \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} + (-2^n)\frac{1}{2^{2n+1}} + 0 = 0$$

$$Var(X_n) = E\Big[X_n^2\Big] - (E[X_n])^2 = E\Big[X_n^2\Big] = 2^{2n}\frac{1}{2^{2n+1}} + 2^{2n}\frac{1}{2^{2n+1}} + 0 = 2^{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}} = 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Luego la sucesión verifica la ley débil de los grandes números.

$$\frac{S_n - \sum_{j=1}^{n}\mu_j}{n} = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

- Ley fuerte de los grandes números
  Tenemos que $E[X_n] = 0$ y $Var(X_n) = 1$, por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{B_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\Longrightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n}X_j - E\Big[\sum_{j=1}^{n}X_j\Big]}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n}X_j - \sum_{j=1}^{n}E[X_j]}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

b)

- Ley débil de los grandes números
  Evaluamos

$$E[X_n] = \sqrt{\ln(n+\alpha)}\cdot\frac{1}{2} + \Big(-\sqrt{\ln(n+\alpha)}\Big)\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$$Var(X_n) = E\Big[X_n^2\Big] = \Big(\sqrt{\ln(n+\alpha)}\Big)^2\cdot\frac{1}{2} + \Big(-\sqrt{\ln(n+\alpha)}\Big)^2\cdot\frac{1}{2} = \ln(n+\alpha)$$

  Chequeamos

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\ln(j+\alpha) \leq \frac{1}{n^2}n\ln(n+\alpha) = \frac{\ln(n+\alpha)}{n}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+\alpha)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\alpha}}{1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

- Ley fuerte de los grandes números

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sigma_j^2}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\ln(j+\alpha)}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{j+\alpha}}{j^2} < \infty \text{ cuando } p > 1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

Veamos que $\ln(x) < \sqrt{x}$ cuando $x \geq 1$. Consideramos $g(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$. Entonces $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$. En concreto,

$$g'(x) = 0 \iff x = 2\sqrt{x} \iff x^2 = 4x \iff x(x-4) = 0 \implies x = 4$$
$$g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^2} \implies g''(4) = \frac{-1}{4\sqrt{43}} + \frac{1}{16} > 0$$

Por tanto, la función $g(x)$ tiene un mínimo para $x \geq 1$ en $x = 4$ y $g(4) > 0$. Esto implica que $g(x) \geq g(4) > 0, \quad \forall x \geq 1$

Ejercicio 5.10. **Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$, donde $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con función de masa**

$$P\left(X_i = \frac{1}{2^i}\right) = P\left(X_i = -\frac{1}{2^i}\right) = \frac{1}{2}$$

Evaluamos

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t)$$

donde

$$\varphi_{X_j}(t) = E\left[E^{itX_j}\right] = \frac{1}{2}e^{it\frac{1}{2^j}} + \frac{1}{2}e^{-it\frac{1}{2^j}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{t}{2^j}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^j}\right) + \cos\left(-\frac{t}{2^j}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{t}{2^j}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}2\cos\left(\frac{t}{2^j}\right) = \cos\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

Entonces, usando la igualdad $\cos(x) = \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2\,\mathrm{sen}(x)}$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^{j-1}}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^j}\right)} = \frac{\mathrm{sen}(t)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^2}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^4}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$
$$= \frac{\mathrm{sen}(t)}{2^n\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)}, \qquad t \neq 0$$
$$\varphi_{Y_n}(0) = 1$$

Entonces, $\forall t \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(t)}{2^n\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(t)}{2^n \frac{t}{2^n}} = \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}$$

$$\implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \qquad Y \sim Uniforme(-1, 1)$$

Ejercicio 5.11. **Sea X una variable aleatoria Exponencial de tasa λ. Sea**

$$Y_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(w) \in [0, 1 - \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si } X(w) \in [1 - \frac{1}{n}, n) \\ n & \text{si } X(w) \in [n, \infty) \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media de orden 2 y casi segura de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$.

- Convergencia en ley

  Calculamos

$$
\begin{aligned}
P(Y_n = 0) &= P\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in [0, 1 - \frac{1}{n})\right\}\right) = P\left(0 \leq X_n < 1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= F_X\left(1 - \frac{1}{n}^-\right) - F_X(0^-) = 1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - 0 = 1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\
P(Y_n = 1) &= P\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in [1 - \frac{1}{n}, n)\right\}\right) = P\left(1 - \frac{1}{n} \leq X < n\right) \\
&= F_X(n^-) - F_X\left(1 - \frac{1}{n}^-\right) = 1 - e^{-\lambda n} - \left(1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) = e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda n} \\
P(Y_n = n) &= 1 - P(Y_n = 0) = e^{-\lambda n}
\end{aligned}
$$

  Entonces

$$
F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 - e^{-\lambda n} & \text{si } 1 \leq y < n \\ 1 & \text{si } y \geq n \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}
$$

$$
\implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y, \qquad Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})
$$

- Convergencia en probabilidad

  Definimos la variable aleatoria

$$
Y(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(w) \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } X(w) \in (1, \infty) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(\{w \in \Omega : Y(w) = 0\}) = P(\{w \in \Omega : X(w) \in [0, 1]\}) = P(0 \leq X \leq 1) \\
&= F_X(1) - F_X(0^-) = 1 - e^{-\lambda} - 0 = 1 - e^{-\lambda} \\
P(Y = 1) &= 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

  Planteamos evaluar $P(\{w \in \Omega : |Y_n(w) - Y(w)| > \varepsilon\})$

  - $0 < \varepsilon < 1$

$$
\begin{aligned}
&P(\{w \in \Omega : |Y_n(w) - Y(w)| > \varepsilon\}) = P\left(\left\{w \in \Omega : X(w) \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \cup [n, \infty)\right\}\right) \\
&= P\left(1 - \frac{1}{n} \leq X \leq 1\right) + P(X \geq n) = F_X(1) - F_X\left(1 - \frac{1}{n}^-\right) + 1 - F_X(n^-) \\
&= 1 - e^{-\lambda} - \left(1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right) + 1 - \left(1 - e^{-\lambda n}\right) = e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda} + e^{-\lambda n} \\
&= e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda} - e^{-\lambda n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0
\end{aligned}
$$

- $\varepsilon \geq 1$

$$\begin{aligned} &P(\{w \in \Omega : |Y_n(w) - Y(w)| > \varepsilon\}) = P(\{w \in \Omega : X(w) \geq n\}) \\ &= 1 - F_X(n^-) = e^{-\lambda n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y$$

- Convergencia casi segura

  Planteamos

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{w \in \Omega : |Y_m(w) - Y(w)| > \varepsilon\}\right) = P(\{w \in \Omega : |Y_n(w) - Y(w)| > \varepsilon\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} Y$$

- Convergencia en m^2

  Calculamos

$$\begin{aligned} E\Big[(Y_n - Y)^2\Big] &= 1^2 \cdot P\Big(1 - \frac{1}{n} \leq X \leq 1\Big) + (n-1)^2 \cdot P(X \geq n) \\ &= F_X(1) - F_X\Big(1 - \frac{1}{n}^-\Big) + (n-1)^2 \cdot (1 - F_X(n^-)) \\ &= e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda} + (n-1)^2 e^{-\lambda n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0 \end{aligned}$$

  Entonces,

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^2} Y$$

Ejercicio 5.12. **Una empresa está especializada en la producción de tuercas. La experiencia en los últimos años muestra que la probabilidad de producir una tuerca defectuosa es 0.035. Las tuercas se empaquetan en cajas de 100 unidades. Determinar el porcentaje de cajas sin más de dos tuercas defectuosas.**

Sea X = "número de tuercas defectuosas en una caja". $X \sim Bin(n = 100, p = 0{,}035)$, entonces

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k) = \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} 0{,}035^k (1 - 0{,}035)^{100-k} = 0{,}31590$$

Otra opción es:

$$X = \sum_{j=1}^{100} X_j$$

donde $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $Bernoulli(p)$, entonces

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \sim Normal(0, 1)$$

Es decir, podemos calcular

$$P(X \leq 2) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 3{,}5}{\sqrt{3{,}5 \cdot 0{,}965}} \leq \frac{2 - 3{,}5}{\sqrt{3{,}3775}}\right) \simeq P(Z \leq -0{,}81649) = 0{,}20755$$

La aproximación no es buena, $n = 100$ no es suficientemente grande.

***Ejercicio* 5.13. Una urna contiene 10 bolas numeradas del cero al nueve. De la urna se extraen n bolas con reemplazamiento.**

a) **Señalar qué dice la ley de los grandes número sobre la aparición de ceros.**

b) **Determinar cuántas extracciones será preciso efectuar para que, con probabilidad 0.95, la frecuencia relativa de aparición de ceros esté comprendida entre 0.09 y 0.11.**

c) **Utilizar el teorema central del límite para calcular la probabilidad de que, entre los n números elegidos, el cinco aparezca entre $\frac{n-3\sqrt{n}}{10}$ y $(n+3\sqrt{n})$. Particularizar para $n=25$ y $n=100$.**

a) Definimos

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si se obtiene “0” en la } n\text{-ésima extracción} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Entonces, $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $Bernoulli\left(p = \frac{1}{10}\right)$, es decir,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow[n\to\infty]{c.s./P} p = \frac{1}{10}$$

b) En la n-ésima extracción

$$\frac{1}{n}S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

representa la frecuencia relativa de la aparición del dígito “0”. Debe evaluarse el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$P\left(\left\{w \in \Omega : \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j(w) \in (0{,}09\ ,\ 0{,}11)\right\}\right) \geq 0{,}95$$

Aplicando el teorema central del límite

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} = \frac{S_n - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z \sim Normal(0,1)$$

Donde $S_n \sim Bin\left(n, p = \frac{1}{10}\right)$, por lo que

$$E[S_n] = np = \frac{n}{10} \qquad Var(S_n) = np(1-p) = n\frac{1}{10}\frac{9}{10} = \frac{9n}{100}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}0{,}95 \leq P\left(0{,}09 < \frac{S_n}{n} < 0{,}11\right) &= P(0{,}09n - 0{,}1n < S_n - 0{,}1n < 0{,}11n - 0{,}1n)\\ &= P\left(\frac{-0{,}01n}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} < \frac{S_n - 0{,}1n}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} < \frac{0{,}01n}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right) \simeq P\left(\frac{-0{,}1\sqrt{n}}{3} < Z < \frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right)\\ &= F_Z\left(\frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) - F_Z\left(-\frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{-0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{-0{,}1\sqrt{n}}{3}\right)\\ &= 1 - 2P\left(Z < -\frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) = 1 - 2P\left(Z > \frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right)\end{aligned}$$

Entonces,

$$0{,}95 = 1 - 2P\left(Z > \frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) \iff P\left(Z > \frac{0{,}1\sqrt{n}}{3}\right) = 0{,}025$$

$$\implies \frac{0{,}1\sqrt{n}}{3} = 1{,}96 \implies n = 3457{,}4$$

Tomamos $n = 3458$.

Ejercicio 5.14. **Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes donde X_i tiene función de masa**

$$\begin{aligned}P(X_i = -2) = P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = P(X_i = 2) = \frac{1}{4i}\\ P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}\end{aligned}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media cuadrática y casi seguro. Analizar si cumple la ley fuerte de los grandes números.

- Convergencia en ley

  Evaluamos

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2\\ \frac{1}{4n} & \text{si } -2 \leq x < -1\\ \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0\\ 1 - \frac{1}{2n} & \text{si } 0 \leq x < 1\\ 1 - \frac{1}{4n} & \text{si } 1 \leq x < 2\\ 1 & \text{si } x \geq 2\end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 1 & \text{si } x \geq 0\end{cases}$$

$$\implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X, \qquad X \sim \mathit{Degenerada}(0)$$

- Convergencia en probabilidad

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 0 \implies X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

- Convergencia en media cuadrática

  Planteamos el cálculo

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[|X_n - 0|^2\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[X_n^2\Big] = \lim_{n\to\infty}\left((-2)^2\frac{1}{4n} + (-1)^2\frac{1}{4n} + 0^2\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1^2\frac{1}{4n} + 2^2\frac{1}{4n}\right)$$
$$= 0$$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^2} 0$$

- Convergencia casi segura

  Analizamos

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{w\in\Omega : |X_m(w) - 0| > \varepsilon\}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{w\in\Omega : |X_m(w)| \le \varepsilon\}\right)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{w\in\Omega : X_m(w) = 0\}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\lim_{k\to\infty}\bigcap_{m=n}^{k}\{w\in\Omega : X_m(w) = 0\}\right)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{k}\{w\in\Omega : X_m(w) = 0\}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{m=n}^{k} P(X_m = 0)\right)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{m=n}^{k}\left(1-\frac{1}{m}\right)\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\prod_{m=n}^{k}\frac{m-1}{m}\right)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m}{m+1}\cdot\ldots\cdot\frac{k-1}{k}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\frac{m-1}{k}$$
$$1 - 0 = 1 \neq 0$$

  Luego X_n no converge a 0 casi seguro.

Tenemos que $Var(X) = E[X^2] = \frac{5}{2n}$, por tanto, tomando $B_n = n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{B_n^2} < \infty$$

por lo que

$$\frac{S_n - E[S_n]}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

Ejercicio 5.15. **Sea ξ una variable aleatoria Uniforme sobre el intervalo $\left(-\frac{1}{\theta},\frac{1}{\theta}\right)$. Se definen las variables aleatorias $\eta = \theta\xi$ y**

$$X_i(w) = \begin{cases} -1 & \text{si } \eta(w)\in[-1,-\frac{1}{i}) \\ 0 & \text{si } \eta(w)\in[-\frac{1}{i},\frac{1}{i}) \\ 1 & \text{si } \eta(w)\in[\frac{1}{i},1) \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad, casi segura y en media cuadrática de la sucesión $\{X_n : n\geq 1\}$.

- Convergencia en ley

  Evaluamos

$$
\begin{aligned}
P(X_n=-1) &= P\Big(-1\le \eta < -\frac{1}{n}\Big) = P\Big(-1\le \theta\xi < -\frac{1}{n}\Big) = P\Big(-\frac{1}{\theta}\le \xi < -\frac{1}{n\theta}\Big) \\
&= \int_{-\frac{1}{\theta}}^{-\frac{1}{\theta n}} \frac{1}{\frac{1}{\theta}-\Big(-\frac{1}{\theta}\Big)}dx = \int_{-\frac{1}{\theta}}^{-\frac{1}{\theta n}} \frac{2^{-1}}{\theta^{-1}}dx = \frac{\theta}{2}\Big(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta n}\Big) \\
&= \frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\theta}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) \\
P(X_n=0) &= P\Big(-\frac{1}{n}\le \eta < \frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n} \\
P(X_n=1) &= P\Big(\frac{1}{n}\le \eta < 1\Big) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)
\end{aligned}
$$

  Entonces,

$$
F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) & \text{si } -1\le x<0 \\ 1-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) & \text{si } 0\le x<1 \\ 1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1\le x<1 \\ 1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}
$$

  donde $F_X(x)\sim X$, es decir, $\mathcal{D}_X=\{-1,1\}$ y $\Big\{p_X(-1)=p_X(1)=\dfrac{1}{2}\Big\}$. Por ello $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$

- Convergencia casi segura Sea X la variable aleatoria definida de la siguiente forma:

$$
X(w) = \begin{cases} -1 & \text{si } \eta(w)\in[-1,0) \\ 1 & \text{si } \eta(w)\in[0,1) \end{cases}
$$

  Es decir, de todas las posibles variables aleatorias con soporte $\mathcal{D}_X$ y función de masa $p_X(\cdot)$, elegimos una variable aleatoria cuyos valores dependen de los valores de $\eta(x)$.

  Distinguimos:

  - $\varepsilon \ge 1$

$$
\lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcup_{m=k}^{\infty}\{w\in\Omega : |X_m(w)-X(w)|\ge\varepsilon\}\Big) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0
$$

  - $0<\varepsilon<1$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{w\in\Omega : |X_m(w)-X(w)|>\varepsilon\}\Big) &= \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty}\Big\{w\in\Omega : -\frac{1}{m}\le\eta(w)<\frac{1}{m}\Big\}\Big) \\
= \lim_{n\to\infty} P\Big(-\frac{1}{n}\le\eta(w)<\frac{1}{n}\Big) &= \lim_{n\to\infty} P\Big(-\frac{1}{n\theta}\le\xi<\frac{1}{n\theta}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0
\end{aligned}
$$

  En definitiva, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} X$

- Convergencia en probabilidad

  Como $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} X$, tenemos que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$.

- Convergencia cuadrática

  Planteamos

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[|X_n - X|^2\Big] = \lim_{n\to\infty} 1^2 \cdot P\Big(-\frac{1}{n} \leq \eta < \frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

  Entonces, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{m^2} X$

Ejercicio 5.16. **La duración de una bombilla se distribuye Exponencial con media 1 mes. Cada vez que una bombilla se estropea es reemplazada inmediatamente por otra nueva. Determinar cuál es el número mínimo de bombillas que deben tenerse para que, con probabilidad 0.95, tengamos luz durante un intervalo de tiempo de dos años.**

Sean ξ_i =“duración (en meses) de la i-ésima bombilla”. Entonces $\{\xi_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas $Exponencial(\lambda = 1) \equiv Gamma(a = 1, p = 1)$. Entonces, si η_n es el tiempo que tenemos luz con las n primeras bombillas:

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim Gamma(a = 1, p = n)$$

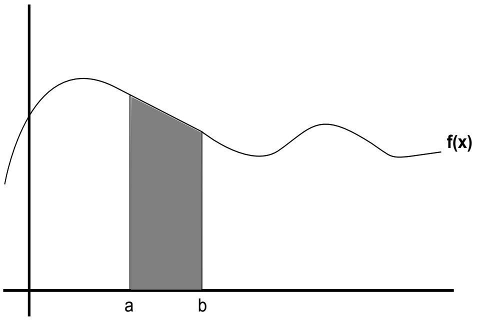
$$E[\eta_n] = \frac{p}{a} = \frac{n}{1} = n$$
$$Var(\eta_n) = \frac{p}{a^2} = \frac{n}{1^2} = n$$

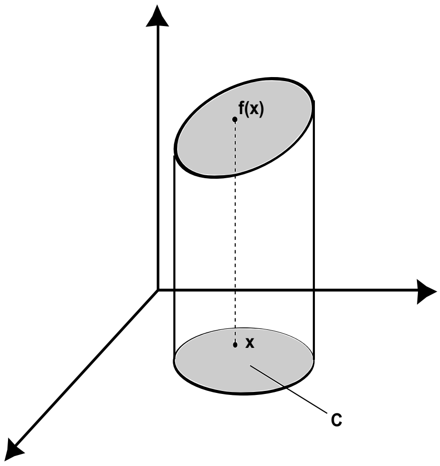
$$\implies \frac{\eta_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Normal(\mu = 0, 1)$$

$$0{,}95 = P(\eta_n \geq 24 \text{ meses}) = P\Big(\frac{\eta_n - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{24 - n}{\sqrt{n}}\Big) \simeq P\Big(Z \geq \frac{24 - n}{\sqrt{n}}\Big)$$
$$\implies -1{,}64 \simeq \frac{24 - n}{\sqrt{n}} \iff (m = \sqrt{n}) \qquad 24 - m^2 = -1{,}64m$$
$$\iff m^2 - 1{,}64m - 24 = 0 \iff m = 5{,}787 \text{ ó } -4{,}147$$
$$\implies m = 5{,}787 \implies n = 33{,}489$$
$$\implies \text{tomamos como solución el valor } n = 34$$

$\mathcal{A}$

Integrales en $\mathbb{R}^2$





$$
\begin{aligned}
f :&\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \geq 0 \\
&x \mapsto f(x) \\
&\mathcal{C} = (a,b) \in \mathbb{R} \\
&\int_a^b f(x)dx = \text{Área}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f \geq 0 \\
&(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) \\
&\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2 \\
&\int_{\mathcal{C}} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \text{Volumen}
\end{aligned}
$$

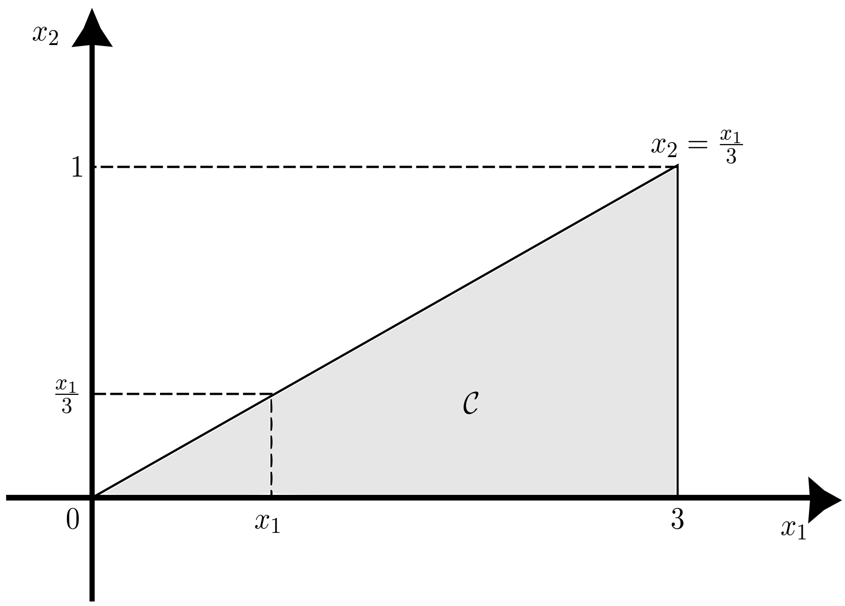
Ejercicio A.1. **Sea** $f(x_1,x_2) = k$ **con** $k > 0$**. Definimos** $\mathcal{C} = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq \frac{x_1}{3},\ x_1 \leq 3,\ x_2 \geq 0\right\}$

Siempre hay que dibujar $\mathcal{C}$: Evaluamos la integral. Hay que reexpresar la integral sobre el conjunto como una integral iterada. x_1 varía entre 0 y 3, y x_2 varía en función de los valores de x_1.

$$\int_{\mathcal{C}} f(x_1,x_2)\ dx_1dx_2 = \int_0^3 \int_0^{\frac{x_1}{3}} k\ dx_2dx_1$$

Primero se calcula la integral de dentro:

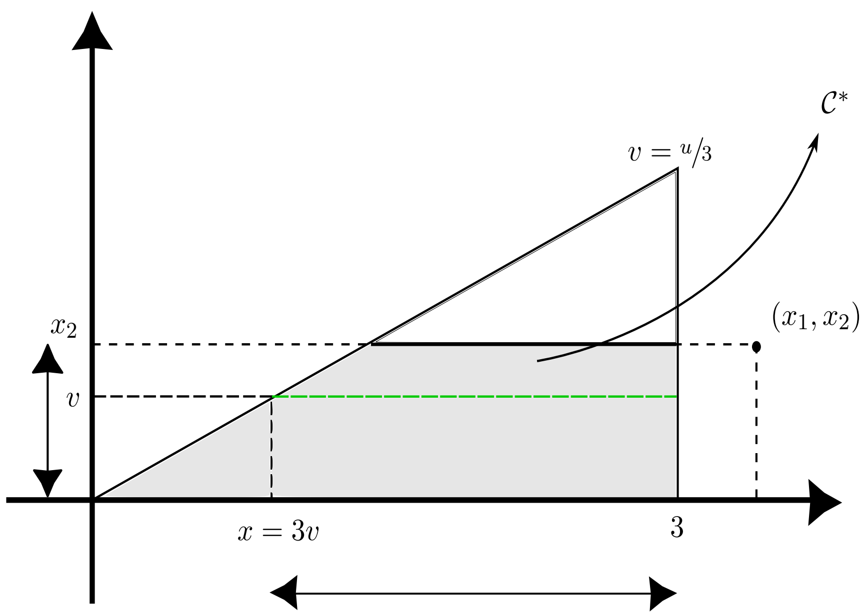
$$\int_0^{\frac{x_1}{3}} k\ dx_2 = k \cdot\ \left. x_2\right]_0^{\frac{x_1}{3}} = \frac{k}{3} \cdot x_1$$



Sustituimos en la integral anterior:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{x_1}{3}} k \; dx_2 dx_1 = \int_0^3 \frac{k}{3} x_1 \; dx_1 = \frac{k}{3} \cdot \left. \frac{x_1^2}{2} \right]_0^3 = \frac{3}{2} k$$

Ejercicio A.2. **Con el mismo recinto del ejercicio anterior, tomamos otros recintos basados en la intersección formada con rectángulos creados a partir de otro punto.**



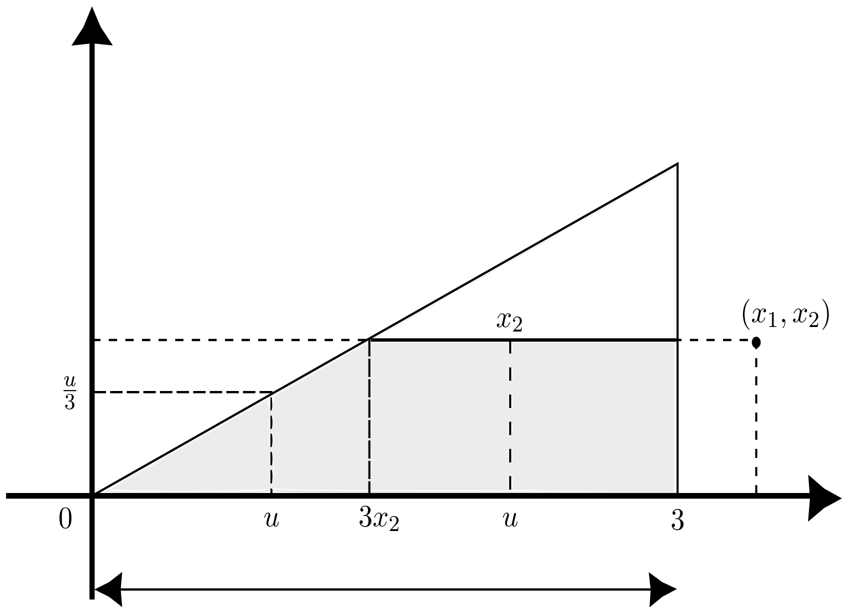
¡¡¡CUIDADO CON LAS VARIABLES MUDAS DE INTEGRACIÓN!!!

$$\int_{\mathcal{C}^*} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^{x_2}\int_{3v}^{3} k\,du\,dv = \int_0^{x_2}\Big(k\cdot \;\; u]_{3v}^{3}\Big)dv = \int_0^{x_2}(k\cdot(3-3v))\,dv =$$

$$= \int_0^{x_2} 3k(1-v)dv = 3k\left(v-\frac{v^2}{2}\right)\Bigg]_0^{x_2} = 3k\left(x_2-\frac{x_2^2}{2}\right) =$$

$$= 3k\cdot x_2\cdot\left(1-\frac{x_2}{2}\right)$$

En este caso hemos fijado la v primero pero, ¿qué habría pasado si hubiéramos fijado la u?



La mínima v es 0, y la máxima x_2.

$$\int_{\mathcal{C}^*} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^{3x_2}\underbrace{\int_0^{\frac{u}{3}} k\;dv}_{(*)}\;du + \int_{3x_2}^{3}\underbrace{\int_0^{x_2} k\;dv}_{(**)}\;du$$

La integral $(*)$ es:

$$\int_0^{\frac{u}{3}} k\;dv = k\cdot\;v]_0^{\frac{u}{3}} = \frac{k}{3}\cdot u$$

La integral $(**)$ es:

$$\int_0^{x_2} k\;dv = k\cdot\;v]_0^{x_2} = k\cdot x_2$$

Si sustituimos en la primera integral:

$$\int_{\mathcal{C}^*} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^{3x_2}\frac{k}{3}u\;du + \int_{3x_2}^{3} k\cdot x_2\;du = \frac{k}{3}\cdot\frac{u^2}{2}\Bigg]_0^{3x_2} + k\cdot x_2\cdot\;u]_{3x_2}^{3} =$$

$$= \frac{k}{3}\cdot\frac{9x_2^2}{2} + 3k\cdot x_2 - 3\cdot k\cdot x_2^2 = 3\cdot k\cdot\left(\frac{x_2^2}{2}+x_2-x_2^2\right) =$$

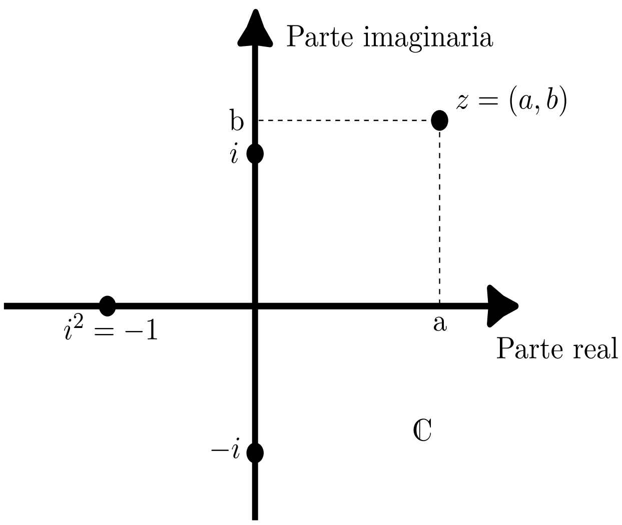
$$= 3\cdot k\cdot x_2\cdot\left(1-\frac{x_2}{2}\right)$$

$\mathcal{B}$

Números complejos. La exponencial compleja. La exponencial real.

B.1. Números complejos

Definición B.1 (Número complejo)**.** Un número complejo es un par ordenado de números reales $z = (a, b)$ donde llamamos $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$. El conjunto de números complejos se denota por $\mathbb{C}$.



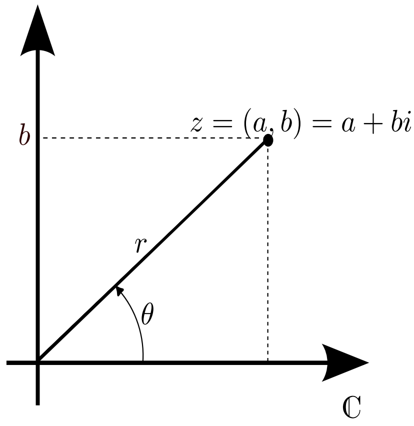
Definición B.2. Si $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, se definen:

- $(a, b) + (c, b) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Definición B.3 (Unidad imaginaria)**.** Se define la unidad imaginaria como $i = (0, 1)$, es decir, $i^2 = i \cdot i = (-1, 0)$

Notación B.1. Se conoce como forma binómica a $(a, b) =_{not} a + bi$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$



Cómo localizar un punto en el plano

Podemos hacerlo por coordenadas o mediante el ángulo θ y r.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

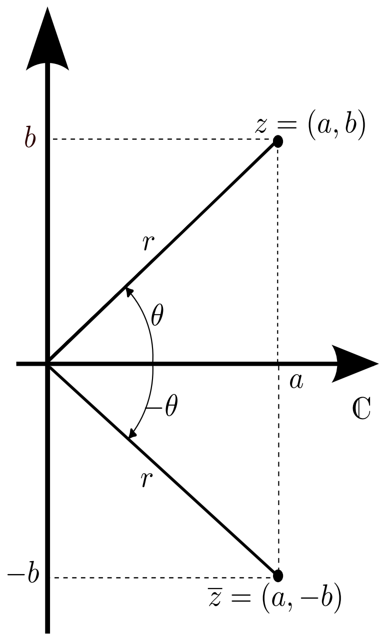
$$a = r\cos\theta \qquad\qquad b = r\operatorname{sen}\theta$$

Gráficamente:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \text{ con } r \in \mathbb{R} \text{ único y } \theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Definición B.4 (Módulo)**.** El módulo de $z = (a, b)$ se define como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Definición B.5 (Conjugado)**.** Dado $z = (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$, su conjugado es $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$



Propiedades:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $z \neq 0$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$

B.2. La exponencial compleja

Definición B.6.

Para $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Para $z \in \mathbb{R}$

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$$

Sabemos que:

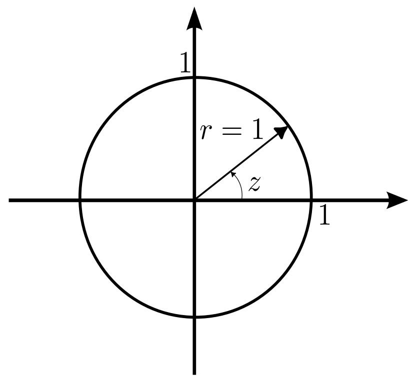
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot i^k = 1 + \frac{z}{1!} \cdot i - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} \cdot i + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} \cdot i + \ldots = \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right)}_{(*)} + i \cdot \underbrace{\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)}_{(**)} = \cos z + i \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

(*) Representación de Taylor del coseno de z en un entorno de 0.

(**) Representación de Taylor del seno de z en un entorno de 0.

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \quad zin\mathbb{R}$$
$$e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z$$
$$\Longrightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$



$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \underbrace{\Longrightarrow}_{z=\pi} e^{i\pi=-1} \iff \underbrace{e^{i\pi} + 1 = 0}_{\text{Identidad de Euler}}$$

La representación $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ sirve para calcular más fácilmente potencias de números complejos.

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$
$$\frac{e^{i\theta}}{i} = \int e^{i\theta} d\theta = \int (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) d\theta = \int \cos\theta d\theta + i \int \operatorname{sen}\theta d\theta$$

B.3. La exponencial real. El número e.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Obtención del número e:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{ax}\right)^{ax} = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} (1+ax)^{\frac{1}{ax}}$$

Ejemplo B.1. *Veamos el cálculo de algunos límites sirviéndonos del número e:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}\cdot 4} = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4}x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^4 = e^4$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3-2}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{x\cdot\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}} = e^{-2}$$