Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat.-Inf.

Lista 1

Número 1.19. Sea $\mathcal{T}$ la topología de la recta real $\mathbb{R}$ cuyos abiertos no vacíos son los subconjuntos $U \subset \mathbb{R}$ que contienen todos los números enteros $k \geq 1$ (esto es $1, 2, 3 \cdots \in U$).

1) ¿Tiene cada punto un entorno mínimo?
2) Definir las operaciones clausura e interior.

$0 \notin \mathbb{N}$ por convenio

En primer lugar comprobamos que $\mathcal{T} = \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \mathbb{N} \subset U\} \cup \{\emptyset\}$ es efectivamente una topología.

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{T}$

ii) Sean $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \overset{?}{\in} \mathcal{T}$

Si todos los U_i son vacíos entonces $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in \mathcal{T}$.

Si $\exists i_0 \in I,\ U_{i_0} \neq \emptyset$, como $U_{i_0} \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{N} \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

iii) Sean $(U_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \overset{?}{\in} \mathcal{T}$

Si $\exists i_0 \in \{1, \dots n\},\ U_{i_0} = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset \in \mathcal{T}$

Si $\forall i \in \{1 \dots n\}\ U_i \neq \emptyset$ entonces $\forall i \in \{1 \dots n\}\ \mathbb{N} \subset U_i$ y por tanto $\mathbb{N} \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ luego $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Una vez visto que es topología, veamos que todo punto tiene un entorno mínimo. Sea $x \in \mathbb{R}$ y veamos que $\{x\} \cup \mathbb{N}$ es su entorno mínimo. Ese conjunto es entorno porque contiene al punto y porque es abierto, ya que $\mathbb{N} \subset \{x\} \cup \mathbb{N}$. Además, es mínimo porque si V^x es otro entorno de x se tiene que verificar que

$\exists U^x$ entorno abierto de x contenido en V^x. Por ser U^x entorno abierto de x, $x \in U^x$ luego $U^x \neq \emptyset$ y U^x es abierto, luego $\mathbb{N} \subset U^x$. Esto es $\{x\} \cup \mathbb{N} \subset U^x \subset V^x$ luego, efectivamente, $\mathbb{N} \cup \{x\}$ es entorno mínimo de x. Nótese que si $x \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbb{N} \cup \{x\} = \mathbb{N}$.

Veamos que las operaciones de clausura e interior tienen una definición particularmente sencilla en esta topología.

Vamos a comprobar que las operaciones de interior y clausura se pueden definir como:

$$\mathring{\ }: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto \mathring{A} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mathbb{N} \not\subset A \\ A & \text{si } \mathbb{N} \subset A \end{cases}$$

$$\bar{\ }: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto \bar{A} = \begin{cases} A & \text{si } \mathbb{N} \cap A = \emptyset \\ \mathbb{R} & \text{si } \mathbb{N} \cap A \neq \emptyset \end{cases}$$

Comenzando por el interior, si $\mathbb{N} \not\subset A$, el único abierto contenido en A es el vacío, porque todo abierto distinto del vacío contiene a $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{N} \subset A$, entonces A es abierto por cómo se define esta topología y entonces coincide con su interior.

Para la adherencia, primero hacemos notar cuáles son los cerrados de esta topología. Estos conjuntos son el total y aquellos cuya intersección con $\mathbb{N}$ es vacía (son los complementarios del vacío y de los conjuntos que contienen a $\mathbb{N}$). Por tanto, si $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$, A es cerrado y $\bar{A} = A$ y si $A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, el único cerrado que contiene a A es el total luego este es el único candidato a ser su adherencia.

Número 1.21.- Un subconjunto $W \subset \mathbb{R}^2$ se llama radialmente abierto si para cada punto $p \in W$ y cada recta L que pase por el punto, $W \cap L$ contiene un intervalo abierto centrado en p. Probar que los conjuntos radialmente abiertos son los abiertos de una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Qué relación tiene con la usual? Estudiar que topología induce $\mathcal{T}$ en las rectas y en las circunferencias.

Sea $\mathcal{T} = \{ U \subset \mathbb{R} / U$ es radialmente abierto$\}$ y hay que ver que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

i) $\phi \in \mathcal{T}$ porque, como no tiene ningún elemento, sus elementos verifican cualquier cosa, en particular, que para cada recta que pasa por ellos la intersección del vacío con la recta contiene un intervalo abierto centrado en ese punto.

$\mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$ porque dado $p \in \mathbb{R}^2$ y L una recta que lo contiene, $\mathbb{R}^2 \cap L = L$ y podemos tomar como intervalo abierto el caso extremo en el que éste es la propia recta y que estará centrado en p y, por supuesto, contenido en L.

ii) Sean $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ y veamos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que $\bigcup_{i \in I} U_i$ es radialmente abierto. Sea $p \in \bigcup_{i \in I} U_i$ y como p pertenece a la unión entonces pertenece a uno de ellos y $\exists i_0 \in I$ / $p \in U_{i_0}$. Por ser U_{i_0} radialmente abierto dada una recta L que pasa por p, $\exists I$ intervalo abierto centrado en p y contenido en $L \cap U_{i_0} \Leftrightarrow I \subset L \cap U_{i_0}$. Pero $I \subset L \cap U_{i_0} \subset L \cap \bigcup_{i \in I} U_i$ luego $\bigcup_{i \in I} U_i$ es radialmente abierto.

iii) Sean $(U_i)_{i=1}^{n} \subset \mathcal{T}$ y veamos que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$, es decir, que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es radialmente abierto. Sea $p \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ y sea L una recta que pasa por p. Como $p \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ se tiene que $\forall i = 1 \ldots n$ $p \in U_i$ y por ser cada U_i radialmente abierto $\forall i = 1 - n$ $\exists I_i$ intervalo abierto centrado en p tal que $I_i \subset U_i \cap L$.

Sea I, $l(I) = \min_{i \in \{1 \dots n\}} \{l(I_i)\}$ el intervalo de mínima longitud. (intervalo intersección de todos)

Como todos los intervalos están centrados en p entonces

$I \subset I_i \quad \forall i = 1 \dots n$. y en particular I está centrado en p.

Entonces

$$I \subset I_i \subset U_i \cap L \quad \forall i = 1 \dots n \quad \text{luego} \quad I \subset \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \cap L) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \cap L$$

Es decir, dado un punto en la intersección y una recta que pasa por ese punto hemos encontrado un intervalo abierto centrado en p y contenido en la intersección de la recta y $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$, luego $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es radialmente abierto.

Con esto hemos probado que τ es topología. Veamos ahora cuál es la relación entre τ y τ_{usual}.

Vamos a probar primero que $\tau_{usual} \subset \tau$.

Sea U un abierto usual de $\mathbb{R}^2$ y hay que ver que es radialmente abierto. Sea $p \in U$ y L una recta que pasa por p. Como U es abierto usual $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset U$. Basta entonces tomar $I = B(p, \varepsilon) \cap L$ que es un intervalo abierto centrado en p y que verifica $I = L \cap B(p, \varepsilon) \subset L \cap U$, luego U es radialmente abierto.

Veamos ahora que $\tau \not\subset \tau_{usual}$. Para esto basta dar un contraejemplo (a que $\tau \subset \tau_{usual}$). Definimos el conjunto A como

$$A = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}\right) \cup \{(0,0)\}$$, es decir, A es el complementario de la parábola $y = x^2$ al que le añadimos el $(0,0)$.

A no es abierto usual porque $(0,0)\in A$ y $\forall \varepsilon>0$

$B_\varepsilon = B((0,0),\varepsilon)\cap(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}\setminus\{(0,0)\})\neq\emptyset$ porque, por ejemplo

$\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\in B_\varepsilon$ si $\varepsilon<1$ y si $\varepsilon\geq 1$ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\in B_\varepsilon$. Esto significa que $A\neq\mathring{A}$ luego A no es abierto usual.

Sin embargo, A sí que es radialmente abierto. Sea $p\in A$ y distinguimos los casos en los que $p=(0,0)$ y $p\neq(0,0)$.

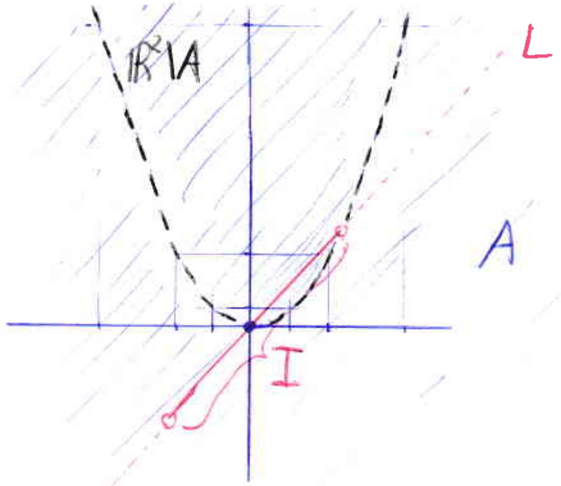
Si $p\neq(0,0)$ entonces $p\in(\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\})=C$ que es complementario de un conjunto cerrado usual y por tanto es abierto usual. Por lo visto anteriormente este conjunto es radialmente abierto de donde se sigue que dada una recta L que pase por p $\exists I$ intervalo abierto centrado en p y contenido en $C\cap L$, luego ese mismo intervalo estará contenido en $A\cap L$ $(C\cap L\subset A\cap L)$.

Si $p=(0,0)$ sea L una recta que pase por p. Entonces $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \alpha x+\beta y=0\}$ con α,β no ambos nulos.

Entonces $L\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}=\begin{cases}\{(0,0)\} & \text{si } \alpha=0 \text{ o } \beta=0\\ \{(0,0),\left(-\frac{\alpha}{\beta},\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\} & \text{si } \alpha\neq0 \text{ y } \beta\neq0\end{cases}$

En el primer caso, el intervalo que va de $\left(-\frac{\alpha}{\beta},\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ a $\left(\frac{\alpha}{\beta},-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$, al que llamaremos I, es un intervalo abierto centrado en $(0,0)$ y que está contenido en la recta (une el $(0,0)$ con el $\left(-\frac{\alpha}{\beta},+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ que son dos puntos de L) y en A (porque el único punto en el que la parábola corta al intervalo es el $(0,0)$ que está en A)

El segundo caso, que corresponde al caso en el que la recta es vertical u horizontal, es aún más sencillo porque basta coger como intervalos abiertos aquellos que unen $(0,1)$ con $(0,-1)$ y $(1,0)$ con $(-1,0)$, respectivamente.



Por tanto $\tau \not\subset \tau_u$. Nos preguntamos qué tiene de especial el conjunto A para ser radialmente abierto y no abierto usual.

A es el complementario del siguiente conjunto: la gráfica de una función a la que se hemos quitado un punto. Podríamos haber repetido las mismas construcciones si en vez de elegir la función $f(x)=x^2$ hubiéramos elegido otras funciones como $f(x)=x^3$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\operatorname{sen} x$ o incluso curvas como una circunferencia a la que le quitamos un punto.

Sin embargo, no sucede lo mismo con las rectas. Por ejemplo si consideramos una recta L, le quitamos un punto $p \in L$ y calculamos su complementario, este es $(\mathbb{R}^2 \setminus L) \cup \{p\}$. Este conjunto no es abierto usual, pero tampoco es radialmente abierto porque si elegimos como punto el p y como recta L, no podemos encontrar ningún intervalo abierto contenido en $((\mathbb{R}^2 \setminus L) \cup \{p\}) \cap L = \{p\}$ y centrado en p.

Por último vamos a estudiar qué topología induce τ en las circunferencias y rectas.

Si comenzamos por las circunferencias, se puede comprobar que la topología inducida es la discreta. Para ello basta ver que dada una circunferencia C se puede poner todo punto de ella como intersección de un conjunto radialmente abierto de $\mathbb{R}^2$ con C.

En efecto, si C es una circunferencia y $p \in C$ tomamos como conjunto $\mathcal{U} = (\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup \{p\}$. Entonces $C \cap \mathcal{U} = \{p\}$.

Para ver que $\mathcal{U}$ es un conjunto radialmente abierto usamos la misma estrategia que en el caso de la parábola. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ y $p=(0,1)$. Si L es una recta que pasa por p (suponemos que no es vertical porque si no la conclusión es inmediata) entonces $L \equiv y = 1+\alpha x$ y si $\alpha \neq 0$ la recta corta a la circunferencia en p y en otro punto. Basta tomar como intervalo aquel que tiene como uno de los extremos el otro punto y como centro el punto p y dicho intervalo está contenido en $L \cap \mathcal{U}$. Si las rectas son verticales u horizontales basta tomar intervalos análogos al caso de la parábola.

Esto demuestra que todo punto de una circunferencia es intersección de la circunferencia y un abierto de $\mathcal{T}$, por tanto abierto de $\mathcal{T}|_C$. Por tanto todo punto es abierto y $\mathcal{T}|_C = \mathcal{T}_{discr.}$

Para el caso de las rectas si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathcal{T}|_L$ entonces $\mathcal{U} = L \cap W$ con $W \in \mathcal{T}$. Pero por ser W abierto en $\mathcal{T}$, es decir, radialmente abierto, dado $p \in \mathcal{U}$ y considerando la recta L existe un intervalo I centrado en p y contenido en $L \cap W = \mathcal{U}$. Es decir, $\forall p \in \mathcal{U}$ $\exists I$ centrado en p y contenido en $\mathcal{U}$, o lo que es lo mismo, $\mathcal{U}$ es abierto usual.