Por tanto

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(-1)}{n!}(z+1)^n \overset{f(-1)=1/4}{=} \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(n+5)\,n!}{2^{n+2}} \frac{1}{n!}(z+1)^n =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

3.- Sea f una función entera tal que $|f(z)| \geq |z|$ $\forall z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede decir de f?

Si $z \neq 0 \Leftrightarrow |z| > 0 \Rightarrow |f(z)| \geq |z| > 0 \Rightarrow f(z) \neq 0$

Veamos que $f(0) = 0$

Si $f(0) \neq 0$ entonces f no se anula en $\mathbb{C}$

Por tanto la función $g(z) = \dfrac{z}{f(z)}$ es entera, pero

$$|g(z)| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{f(z)}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq |f(z)|$$

Por el Teorema de Liouville $g(z)$ es constante

Pero $g(0) = 0$ y $g(1) = \dfrac{1}{f(1)} \neq 0$!!

Por tanto $f(0) = 0$. Como f tiene un cero en 0

$\Rightarrow$ $f(z) = z \cdot h(z)$ con $h(z)$ una función entera.

$$|f(z)| = |z \cdot h(z)| = |z| \cdot |h(z)| \geq |z| \Rightarrow |h(z)| \geq 1.$$