TEMA 6: COMBINATORIA.

María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(GRUPOS E y F)
UCM Curso 18/19

• Métodos de conteo para calcular de cuántas formas distintas puede ocurrir un suceso.

1^0 Definir un conjunto S cuyos elementos representan las distintas formas posibles de ocurrir el suceso en estudio.

2^0 Calcular $|S|$ aplicando métodos de conteo.

DEF:

Dos sucesos son **mútuamente excluyentes o incompatibles** *si no pueden ocurrir del mismo modo y se representan por tanto como conjuntos disjuntos.*

• Consideraremos conjuntos finitos

PRINCIPIOS ELEMENTALES DE CONTEO

Aplicables a sucesos compatibles e incompatibles.

Prop.: Para conjuntos finitos A y B se verifica:

1. Si $S \subseteq A$, entonces S es finito y $|S| \leq |A|$
2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (Principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos)

   REGLA DE LA SUMA: Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$
   (Cuando las posibilidades de un suceso se separan en casos distintos que no se solapan y que se cuentan por separado)
3. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$
4. **REGLA DEL PRODUCTO:** $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
   (Cuando un suceso se descompone en elementos independientes)
5. $|(A \longrightarrow B)| = |B|^{|A|}$
6. Si existe $f : A \to B$ biyectiva entonces $|A| = |B|$
7. $|\wp(A)| = 2^{|A|}$

Ej.: Si lanzamos 3 monedas distintas ¿cuántas formas hay de conseguir **al menos** dos caras?

Sea $A = \{$ lanzamientos de 3 monedas distintas en los que se consiguen **al menos** 2 caras $\}$

Lo "separamos" en los siguientes casos disjuntos:

$A_2 = \{$ lanzamientos de 3 monedas distintas en los que se consiguen **exactamente** 2 caras$\} = \{(c, c, x), (c, x, c), (x, c, c)\}$
$A_3 = \{$ lanzamientos de 3 monedas distintas en los que se consiguen **exactamente** 3 caras $\} = \{(c, c, c)\}$

$A = A_2 \cup A_3, \;\; A_2 \cap A_3 = \emptyset$ y aplicando la regla de la suma

$$| A | = | A_2 \cup A_3 | = | A_2 | + | A_3 | = 3 + 1 = 4$$

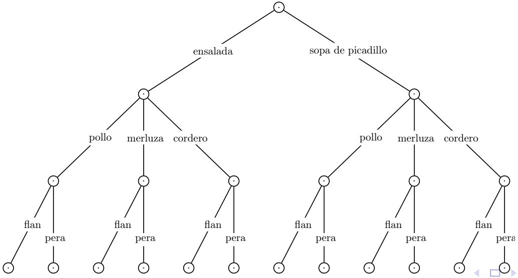
El suceso se descompone en pasos sucesivos cada uno de los cuales se puede realizar independientemente en un número finito de formas distintas.

Ej.: El menú del día de la facultad ofrece 2 primeros platos (ensalada o sopa de picadillo), 3 segundos (pollo, merluza o cordero) y 2 postres (flan o pera) ¿cuántos posibles menús podemos elegir ?

$M = \{$ elecciones de menú $\} = P_1 \times P_2 \times P_3$ con

$P_1 = \{$ ensalada, sopa de picadillo $\}$ $\quad P_2 = \{$ pollo,merluza,cordero $\}$

$P_3 = \{$ flan,pera $\}$ $\quad | M | = | P_1 | \cdot | P_2 | \cdot | P_3 | = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$



1. Demuestra que en un conjunto de 6 personas hay 3 que son conocidos mútuos (se conocen dos a dos) o tres que son desconocidos mútuos.

2. Dados $n \geq 2$ y $k \geq 2$ ¿cuántas palabras de longitud k pueden formarse con los elementos de $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$, en las que el primer elemento es distinto del segundo y a partir del tercero cada elemento de la palabra sea distinto de los dos anteriores?

3. ¿Cuántos números distintos de 3 dígitos diferentes y menores que 468 se pueden formar usando las cifras de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?. ¿Y si las cifras pueden repetirse?

Ej.: En una clase hay 14 alumnos rubios, 27 altos o rubios, 26 altos o delgados, 4 altos y rubios y 7 altos y delgados. ¿Cuántos alumnos delgados hay ?

Sean $A = \{$ alumnos altos $\}$, $R = \{$ alumnos rubios $\}$ y
$D = \{$ **alumnos delgados** $\}$

$$\mid R \mid = 14, \mid A \cup R \mid = 27, \mid A \cup D \mid = 26, \mid A \cap R \mid = 4, \mid A \cap D \mid = 7$$

Aplicando el principio de inclusión-exclusión para dos conjuntos:

$$\begin{aligned} 26 = \mid A \cup D \mid &= \mid A \mid + \mid D \mid - \mid A \cap D \mid \\ &= \mid A \mid + \mid D \mid - 7 \quad \Longrightarrow \quad \mid A \mid + \mid D \mid = 33 \end{aligned}$$

$$27 = \mid A \cup R \mid = \mid A \mid + \mid R \mid - \mid A \cap R \mid = \mid A \mid + 14 - 4 \quad \Longrightarrow \quad \mid A \mid = 17$$

Luego $\mid D \mid = 33 - 17 = 16$

Recuento por "filas" y "columnas"

A veces interesará representar un suceso como un conjunto finito de pares ordenados (es decir vía una relación binaria)

Sea $\mathcal{R} = \{R/R \subseteq A \times B\} = \wp(A \times B)$ el conjunto de las relaciones binarias definidas en $A \times B$.

Dada una relación binaria $R \subseteq A \times B$ para cada par $(x, y) \in A \times B$ definimos las funciones:

$$f_x : \mathcal{R} \to \mathbb{N} \ \text{(cardinal de la fila } x \in A \text{)}$$

$$f_x(R) = \mid \{y \in B/(x, y) \in R\} \mid$$

$$c_y : \mathcal{R} \to \mathbb{N} \ \text{(cardinal de la columna } y \in B \text{)}$$

$$c_y(R) = \mid \{x \in A/(x, y) \in R\} \mid$$

Entonces

$$\mid R \mid = \sum_{x \in A} f_x(R) = \sum_{y \in B} c_y(R)$$

Ej.: En un poblado africano hay exactamente 32 misioneros, cada uno de los cuales ha convertido exactamente a 5 indígenas. Además cada indígena ha sido convertido exactamente por 8 misioneros. ¿Cuántos indígenas hay en el poblado?

$A \equiv$ conjunto de misioneros $\quad \mid A \mid = 32$.
$B \equiv$ conjunto de indígenas.

$R \subseteq A \times B, \quad xRy \Leftrightarrow_{def} x$ ha convertido a $y \quad \forall (x, y) \in A \times B$

$f_x(R) = 5 \ \ \forall x \in A$
$c_y(R) = 8 \ \ \forall y \in B$

Entonces

$$\mid R \mid = 8 \cdot \mid B \mid = 5 \cdot \mid A \mid = 5 \cdot 32$$

$$\mid B \mid = 20 \text{ indígenas}$$

Ej.: Se va a celebrar un congreso en el que cada congresista ha de inscribirse exactamente en 4 de las 7 sesiones en las que se divide el congreso. Las sesiones son disjuntas. Los organizadores informan de que el número de inscritos en ellas es 40,32,21,31,23,25 y 16 respectivamente.

A) ¿Cuál es el número total de congresistas?

B) Si el número total de inscripciones en las 7 sesiones es 185, ¿qué conclusiones podemos sacar en cuánto al número de congresistas?

$X = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad |X| = n$

¿ De cuántas maneras se pueden seleccionar $m \in \mathbb{N}$ elementos de X?

Selecciones	Ordenadas	No ordenadas
Sin repetición	Variaciones {palabras de longitud m sin repeticiones sobre el alfabeto X} $\sim (\mathbf{m} \hookrightarrow X)$ $\mid (\mathbf{m} \hookrightarrow \mathbf{n}) \mid$ $(n)_m = \mid (\mathbf{m} \hookrightarrow \mathbf{n}) \mid$ $= \prod_{i=1}^{m}(n-i+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad n \geq m$ $(n)_m = 0 \quad n < m$ $(n)_0 = 1$ Si $n = m$, Permutaciones $(X \to X, \text{ biyectivas })$ $\mid (\mathbf{n} \to \mathbf{n}, \text{ biyectivas }) \mid$ $(n)_n = n!$	Combinaciones $\wp_m(X)$ $\mid \wp_m(\mathbf{n}) \mid$ $\binom{n}{m} = \mid \wp_m(\mathbf{n}) \mid$ $= \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 0 \leq m \leq n$ $\binom{n}{m} = 0 \quad n < m$
Con repeticiones	Variaciones con repetición $X^m = \{$palabras de longitud m sobre el alfabeto $X\}$ $\sim (\mathbf{m} \to X)$ $\mid (\mathbf{m} \to \mathbf{n}) \mid$ $[n]_m = \mid (\mathbf{m} \to \mathbf{n}) \mid = n^m$	Combinaciones con repetición $\mathcal{M}_m(X)$ $\mid \mathcal{M}_m(\mathbf{n}) \mid$ $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \mid \mathcal{M}_m(\mathbf{n}) \mid = \binom{n+m-1}{m}$

Variaciones

Variaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m :

Selecciones ordenadas sin repetición de m elementos entre n

Ej.: $X = \{a, b, c\}, \quad n = 3, m = 2$

ab, ac, ba, bc, ca, cb

$(3)_2 = 3 \cdot 2 = 6$

- Identificables con las funciones totales inyectivas de $\mathbf{m}$ en X: $(\mathbf{m} \hookrightarrow X)$

¿ Cuántas hay?

$$(n)_m = | (\mathbf{m} \hookrightarrow \mathbf{n}) | = \prod_{i=1}^{m} (n - i + 1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad n \geq m$$

$$(n)_m = 0 \quad n < m$$

$$(n)_0 = 1$$

Otra notación: V_m^n o $V_{n,m}$

Permutaciones de n elementos : Variaciones sin repetición de n elementos tomados de n en n :

La única diferencia entre las selecciones es el orden en que se colocan sus elementos, pues se seleccionan todos

Ej.: $X = \{a, b, c\}, \quad n = 3$
$abc, acb, bac, bca, cab, cba$
$(3)_3 = 3! = 6$

- Son las funciones biyectivas de X en X: $(X \to X, \text{ biyectivas })$

¿ Cuántas hay?

$$(n)_n = \mid (\mathbf{n} \to \mathbf{n}, \text{ biyectivas }) \mid = \prod_{i=1}^{n} (n - i + 1) = n!$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m :

Selecciones ordenadas con repetición de m elementos entre n i.e. el conjunto X^m de las palabras de longitud m sobre el alfabeto X

Ej.: $X = \{a, b, c\}, \quad n = 3, m = 2$

$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

$[3]_2 = 3^2 = 9$

- Identificables con las funciones totales de $\mathbf{m}$ en X: $(\mathbf{m} \to X)$

¿ Cuántas hay?

$[n]_m = \mid (\mathbf{m} \to \mathbf{n}) \mid = n^m$

Otra notación: VR^n_m o $VR_{n,m}$

Combinaciones sin repetición de n elementos tomados de m en m :

Selecciones no ordenadas sin repetición de m elementos entre los n de X, correspondientes a los subconjuntos de cardinal m de X.

Ej.: $X = \{a, b, c\}, \quad n = 3, \quad m = 2$

ab, ac, bc $\qquad \binom{3}{2} = 3$

- Dado X tal que $\mid X \mid = n$, son identificables con $\wp_m(X) = \{C \subseteq X / \mid C \mid = m\}$

¿ Cuántas hay?

$$\binom{n}{m} = \mid \wp_m(\mathbf{n}) \mid = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad 0 \leq m \leq n$$

$$\binom{n}{m} = 0 \quad n < m$$

Def:

$\forall n, m \in \mathbb{N}, \binom{n}{m} =$ *número de subconjuntos de cardinal m de un conjunto cualquiera de cardinal n. Estos números se llaman binomiales o combinatorios.*

Propiedades de los números combinatoros

A) $\binom{n}{m} = 0 \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq n < m$

B) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \ \ \forall n \geq 0$

C) $\binom{n}{1} = n \ \ \forall n \geq 0$

D) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq m \leq n$

E) $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad 0 < m \leq n$

F) $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n \ \ \forall n \geq 0$

G) $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} = 0 \ \ \forall n \geq 1$

Dem de D):

$$\alpha : \wp_m(\mathbf{n}) \to \wp_{n-m}(\mathbf{n})$$
$$\alpha(C) = \mathbf{n} \setminus C$$

es una biyección, luego

$$\binom{n}{m} = \mid \wp_m(\mathbf{n}) \mid = \mid \wp_{n-m}(\mathbf{n}) \mid = \binom{n}{n-m}$$

Dem de E):

Sea $x_0 \in \mathbf{n}$ y sean

$$U = \{C \subseteq \mathbf{n} \ / \ x_0 \in C, \mid C \mid = m\}$$

$$U' = \{C \subseteq \mathbf{n} \setminus \{x_0\} \ / \ \mid C \mid = m-1\}$$

$$V = \{C \subseteq \mathbf{n} \setminus \{x_0\} \ / \ \mid C \mid = m\}$$

y dado que $\wp_m(\mathbf{n}) = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $\mid \mathbf{n} \setminus \{x_0\} \mid = n-1$ y $\alpha : U \to U'$, $\alpha(C) = C \setminus \{x_0\}$ es una biyección, entonces

$$\binom{n}{m} = \mid \wp_m(\mathbf{n}) \mid = \mid U \cup V \mid = \mid U \mid + \mid V \mid = \mid U' \mid + \mid V \mid = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

Dem de F):

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}=\sum_{m=0}^{n}\mid \wp_m(\mathbf{n})\mid=\mid \wp(\mathbf{n})\mid=\mid (\mathbf{n}\to\mathbf{2})\mid=2^n$$

Dem de G):

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}=(-1)^0\binom{n}{0}+\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\binom{n}{m}+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{n-1}(-1)^m\left[\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}\right]+(-1)^n$$

$$=1-\binom{n-1}{0}+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}+(-1)^n$$

$$=1-1+(-1)^{n-1}+(-1)^n=0$$

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

Representación gráfica del cálculo recursivo de $\binom{n}{m}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Teorema binomial

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Dem: Por inducción simple sobre n.

- Los apartados F) y G) de la proposición anterior pueden demostrarse muy fácilmente aplicando el teorema binomial:

F) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = (1+1)^n = 2^n$

G) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i = (1-1)^n = 0$

- Ej: Utiliza el teorema binomial para demostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m :

Selecciones no ordenadas con repetición de m elementos entre los n de X, correspondientes a los multiconjuntos de cardinal m construídos con elementos de X.

Ej.: $\boldsymbol{X=\{1,2\}}$, $\boldsymbol{n=2}$, $\boldsymbol{m=3}$; $\boldsymbol{\mathcal{M}_3(X)=\{\{1,1,1\},\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{2,2,2\}\}}$

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\binom{2+3-1}{3}=\binom{4}{3}=4$$

- Dado X tal que $|X|=n$, son identificables con $\mathcal{M}_m(X)$={multiconjuntos de cardinal m de elementos tomados de X}

¿ Cuántas hay?

$$\begin{bmatrix}n\\m\end{bmatrix}=|\,\mathcal{M}_m(\mathbf{n})\,|=\binom{n+m-1}{m}$$

Dem: Consideramos las palabras sobre el alfabeto $\{1,*\}$ de la forma

$$\underbrace{\overbrace{11\cdots1}^{K_1}*\overbrace{11\cdots1}^{K_2}*\cdots\overbrace{11\cdots1}^{K_n}}_{m+n-1}\quad k_1+\cdots+k_n=m \text{ y hay } n-1\ *$$

$$\boldsymbol{|\,\mathcal{M}_m(\mathbf{n})\,|=\binom{n+m-1}{n-1}=\binom{n+m-1}{m}}$$

interpretando $\boldsymbol{k_i}$ como la multiplicidad de $\boldsymbol{i}$ en el correspondiente multiconjunto.

(Es decir hay tantas como posibles formas de elegir entre las $m+n-1$ posiciones, $n-1$ posiciones para colocar los $*$)

Principio de inclusión-exclusión

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

$| A \cup B \cup C | = | A | + | B | + | C | - | A \cap B | - | A \cap C | - | B \cap C | + | A \cap B \cap C |$

Principio de inclusión-exclusión

Teorema: Sean $A_0, A_1 \cdots A_{n-1}$, n conjuntos finitos. Para $1 \leq i \leq n$, definimos α_i como la suma de los cardinales de **todas** las intersecciones posibles de i de esos conjuntos, es decir

$$\alpha_i = \sum_{\substack{I \subseteq \mathbf{n} \\ |I| = i}} | \bigcap_{j \in I} A_j |$$

entonces

$$| \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i | = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i$$

Corolario: Sean $A_0, A_1 \cdots A_{n-1} \subseteq X$, $| X | = m$ entonces

$$| X \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i) | = m - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i$$

Demostración del Teorema: Cada $x \in A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ contribuye **exactamente con 1** en la suma $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$:

Sea $k \in \mathbf{n}$ tal que x pertenece **exactamente** a k de los n conjuntos $A_0 \cdots A_{n-1}$. Entonces:

- $\forall i > k \;\; x \notin \bigcap_{\substack{j \in I \subseteq \mathbf{n} \\ |I| = i}} A_j$ (es decir x no contribuye a α_i).
- $\forall i, \;\; 1 \leq i \leq k, \;\; x$ contribuye a α_i con $\binom{k}{i}$ (las maneras de intersecar i de los k conjuntos a los que pertenece x).
- Luego la contribución de x a $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n$ será:

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} = 1$$

ya que $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} = 0$

Ej.: En una clase hay 14 alumnos rubios, 27 altos o rubios, 26 altos o delgados, 4 altos y rubios, 7 altos y delgados, 3 rubios y delgados y un único alumno que es alto, rubio y delgado.

1. ¿Cuántos alumnos hay que sean altos pero ni delgados ni rubios a la vez?

$$\mid A \setminus (D \cap R) \mid = \mid A \mid - \mid A \cap D \cap R \mid = \mid A \mid -1$$

$$27 = \mid A \cup R \mid = \mid A \mid + \mid R \mid - \mid A \cap R \mid = \mid A \mid +14 - 4.$$

Luego $\mid A \mid = 17$ y $\mid A \setminus (D \cap R) \mid = 16$

2. ¿Cuántos alumnos hay que sean altos pero ni delgados ni rubios?
3. ¿Cuántos alumnos son delgados?
4. ¿Cuántos alumnos son altos y delgados pero no rubios?
5. ¿Cuántos alumnos hay en total?

Ej.: ¿Qué falla en este razonamiento?

"Puesto que la mitad de los elementos del conjunto $\{1, 2, \cdots, 60\}$ son pares, 29 de ellos no son primos. Además, puesto que la tercera parte de ellos son múltiplos de 3, 19 no pueden ser primos. Entonces a lo sumo 60-48 $=$ 12 son primos"

Def:

Dados $X = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mid X \mid = n$ *y* $k \in \mathbb{N}_1$ *un* **reparto ponderado** *es un reparto de los* n *elementos de* X *en* k *subconjuntos,*C_i, *con* $\mid C_i \mid = m_i$ $(1 \leq i \leq k)$, *satisfaciendo* $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

Def:

Dado X, $\mid X \mid = n$ *llamamos número multinomial de* n *sobre* $m_1, \cdots, m_k$, *y lo designamos* $\binom{n}{m_1, \cdots, m_k}$ *al número de repartos ponderados de* X *en* k *subconjuntos de cardinalidades* $m_1, \cdots, m_k$ *con* $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$

Dados $n, m_1, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{m_1, \cdots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}$$

Dem.:

$$\binom{n}{m_1, \cdots, m_k} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_k}{m_k} = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!}$$

Ej.: ¿De cuántas formas pueden repartirse un viaje para dos personas a Roma, un viaje para dos personas a Leganés y una vuelta al mundo para dos personas entre 6 amigos?

$$\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$$

Teorema multinomial

Generalización del teorema binomial para una potencia de k sumandos.

Teorema multinomial

$\forall k \in \mathbb{N}_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq m_i \leq n \\ \sum_{i=1}^{k} m_i = n}} \binom{n}{m_1, \cdots, m_k} x_1^{m_1} \cdots x_k^{m_k}$$

Dem: Por inducción completa sobre k.

Permutaciones con repetición

Permutaciones con repetición de k elementos distintos $x_1, \cdots x_k$, de longitud $n > k$ en las que x_i se repite m_i veces, con $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$:

Palabras de longitud n sobre el alfabeto $X = \{x_1, x_2, \cdots x_k\}$, en las que el símbolo x_i aparece m_i veces cumpliéndose $\sum_{i=1}^{|X|} m_i = n$

Ej.: $X = \{a, b, c\}, \quad n = 5, \; m_1 = 2, \; m_2 = 3, \; m_3 = 0$

aabbb, *baabb*, *babab*, *babba*, *ababb*, *abbab*, *abbba*, *bbaab*, *bbaba*, *bbbaa*

$P^5_{2,3,0} = \binom{5}{2,3,0} = \frac{5!}{2!3!0!} = 10$

¿ Cuántas hay?: $P^n_{m_1, m_2, \cdots m_k} = \binom{n}{m_1, \cdots, m_k}$

¿De cuántas formas pueden repartirse las $1, \cdots, n$ posiciones de la palabra en $\mid X \mid = k$ cajas, etiquetadas $x_1, x_2, \cdots x_k$, respetando la capacidad, m_j, de cada caja, e interpretando que si i cae en la caja x_j en esa permutación habría un x_j en la posición i ?

Luego es un reparto ponderado de $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$ objetos (posiciones) en k cajas de capacidades $m_1, \cdots, m_k$ asociadas a las "etiquetas" $x_1, \cdots, x_k$

Permutaciones circulares:

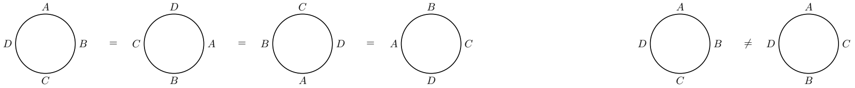
Cuando los elementos se colocan formando un círculo de tal manera que no hay ni principio ni fin pero el orden importa.

La información relevante es la disposición relativa de unos elementos con otros.

Def:

Dado un conjunto de n elementos, sus **permutaciones circulares** *son las agrupaciones de los n elementos de forma que una cualquiera de ellas será distinta de otra únicamente si varía la* **posición relativa** *de sus elementos.*

Ej.:



¿ Cuántas hay?: $P'_n = (n-1)!$