Otra vuelta más a las "definiciones con reglas"

Como hemos visto, una definición con reglas define la pertenencia a un cierto subconjunto "A" de un universo conocido "U", el cual asumimos conocido a priori, posiblemente mediante una definición inductiva del tipo que sea.

Primera precisión: Cuando decimos que A queda definido como "el conjunto de elementos" que aparecen como "conclusiones" de "derivaciones" (finitas) utilizando las reglas, estamos:

a) "afirmando" (en positivo) que "cada elemento" de A se corresponde con (al menos) una derivación tal. Ello hace que en lo sucesivo podamos hablar de "demostraciones por inducción sobre las derivaciones de los elementos de A", descomponiendo éstas "por abajo", considerando "la última" regla utilizada en una derivación.

Ilustraciones (sorprendentemente) correctas que parecen absurdas

Hemos visto que definido P (sobre $\mathbb{N}$) por medio de

$$\frac{}{0 \in P} \qquad \frac{p \in P}{p+2 \in P},$$ podemos probar que $P \subseteq$ Pares.

Pues ahora supongamos que añadimos una "macro-regla" más

$$\frac{(2n+1) \in P}{(2n+3) \in P} < n \in \mathbb{N}$$ que llamo "macro-regla" pues utiliza un parámetro n que se mueve en $\mathbb{N}$ y no en el propio P, de modo que la macro-regla cubriría el conjunto (infinito) de reglas $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$ ...

Evidentemente, si tenemos una definición y añadimos más reglas pasamos a definir un cierto "P'", con $P \subseteq P' \subseteq \mathbb{N}$.

Sin preocuparnos de "cómo de grande" es P', vamos a ¡volver a demostrar! que $P' \subseteq$ Pares.

De nuevo, si ya tenemos una prueba inductiva para un conjunto definido por reglas, si añadimos más reglas bastaría con ver que las mismas preservan la propiedad a probar. ¿Sucede esto en este caso? ¡Sí!

De hecho ¡ya lo tenemos probado cuando lo probamos para la segunda regla de la definición de P, que en realidad es más general, pues vale para cualquier $p \in P$, en particular para $p = 2n+1$, y la conclusión es en efecto $p + 2 = (2n+1) + 2 = 2n+3$!

¿Estás bromeando? ¿Acabas de "probar" que 3,5,7... son todos pares, e insistes en que <u>todo</u> está bien?

Pués sí, ¡todo está perfectamente!

Me he limitado a "volver a probar" que

"Si $2n+1$ es par, $2n+3$ es par"

pues, en efecto $(\exists k \in \mathbb{N} \;\; 2k = 2n+1) \Rightarrow$
$(\exists k' \in \mathbb{N} \;\; 2k' = 2n+3)$

pues "basta tomar" $k' = k+1$, con lo que $2k' = 2(k+1) = 2k+2 = (2n+1)+2 = 2n+3$. ¡Todo perfecto!

¡Pero no puede ser, las sucesivas conclusiones de la nueva macro-regla son 3, 5, 7, ... que son impares!

Ciertamente, pero aunque sean en efecto conclusiones de reglas de la definición de P', no tienen porqué serlo de derivaciones que prueben que son elementos de P'.

Es más, como quiera que la demostración que acabamos de hacer es perfectamente correcta, obtenemos como "corolario" ¡que no puede existir ninguna derivación de $3, 5, 7, \ldots \in P'$!

Podemos "comprobar" (o re-probar directamente) esto, viendo que $1 \notin P'$, trivialmente, pues no hay ninguna regla que pueda concluirlo, y a partir de ello $3 \notin P'$, pues no se cumple la premisa de que $1 \in P'$, que es la de la única regla que permitiría llegar a $3 \in P'$. Y más en general, por inducción sobre los impares (de la forma $2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$) demostraríamos que ninguno de ellos está en P', lo que de hecho constituiría otra prueba de que $P' \subseteq Pares$, ya que $\mathbb{N} = Pares \cup Impares$.

¿Pero y si añadiesemos también la regla $\dfrac{1 \in P}{1 \in P}$? Ciertamente habría una regla que de poderse aplicar nos llevaría a $1 \in P'$ (¡y con ello a que $Impares \subseteq P'$!), pero de nuevo esa regla no permite derivar $1 \in P'$, pues tendríamos que aplicarla ¡infinitas veces! De hecho es evidente que en general una regla "tonta" como esta jamás cambiaría el conjunto definido al añadirla, pues toda aplicación de la misma podría eliminarse obteniendo otra derivación para el sistema original sin la regla "tonta" añadida.

Y es fácil comprobar que tampoco cambiaría nada una regla del tipo $\dfrac{(2n+1) \in P}{1 \in P}$, para ningún valor de n (en $\mathbb{N}$).

¿Pero y si añadiesemos una regla cualquiera del tipo $\dfrac{2n \in P}{1 \in P}$? ¡Pues entonces sí que llegaríamos a $1 \in P'$, pues sabemos que $Pares \subseteq P$! ¿Y entonces sí que las cosas estarían "mal"? ¡Pues no, ya que cuando tratasemos de probar que $P' \subseteq Pares$, al considerar la regla añadida ya no encontraríamos la forma de probar $Par(2n) \Rightarrow Par(1)$, como debe ser, pues ahora Par(2n) es cierto, y de encontrar una demostración de la implicación, tendríamos una demostración de Par(1), lo que es falso!

En consecuencia, en algunos casos es posible probar resultados "universales" (del tipo $\forall a \in A\ P(a)$) viendo que "todas las reglas de la definición de A "conservan" P.

Sin embargo, podría suceder que un resultado universal se cumpla ¡habiendo reglas que no preserven P! Es "fácil" encontrar ejemplos, utilizando el hecho de que toda regla que contenga una premisa "falsa" (o sea de la forma $b \in A$, cuando sabemos que $b \notin A$ (pues no es posible derivar $b \in A$), entonces esa regla ¡no puede aparecer jamás en una derivación de ningún $a \in A$!, por lo que aunque la regla no preserve el predicado P jamás "necesitaríamos utilizar" ese hecho para probar que se tiene $P(a)$ para todo $a \in A$ (o sea derivable con las reglas).

Como ejemplo basta considerar el siguiente sistema de reglas

$$\frac{}{0 \in A} \qquad \frac{n \in A}{(n+4) \in A} \qquad \frac{2 \in A}{3 \in A}$$

Es fácil comprobar que $A \subseteq$ Pares, pero es evidente que la regla (inútil) $\frac{2 \in A}{3 \in A}$ no preserva el predicado ser Par, pues tenemos Par(2), pero no Par(3).

En cambio, sí que lo podríamos demostrar "por inducción sobre la derivación" de $a \in A$, lo que en detalle sería así:

Consideremos una derivación "cualquiera" de $a \in A$, cuya última regla aplicada "podría ser" cualquiera de las tres: podemos asumir que las "hipótesis" de la regla cumplen el predicado a probar, en este caso Par, y hemos de probar que su conclusión también lo cumple. En los dos primeros casos nos limitaríamos a aplicar que esas dos reglas "preservan el predicado Par", lo que resultaría inmediato. ¿Pero y en el tercero? El tercero veríamos que ... ¡no es posible! En efecto, una derivación que termine aplicando

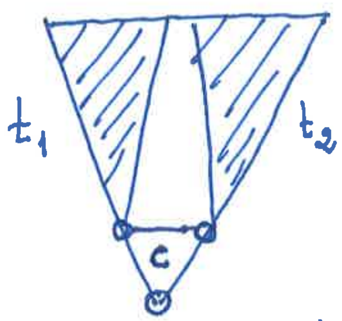
$$\frac{2 \in A}{3 \in A}$$

debería incluir "encima de ella" una derivación de $2 \in A$, pero como $2 \neq 0, 3$, la única posibilidad sería $n+4=2$, pero obviamente $\neg \exists n \in \mathbb{N} \; n+4=2$.

Segunda precisión: Cuando hemos de probar que un determinado elemento a pertenece al conjunto definido por un sistema de reglas hemos de probar de algún modo (habitualmente por construcción) que existe una derivación de a. En nuestras demostraciones habituales "imaginamos" estas derivaciones como "árboles finitos invertidos" con "axiomas" (reglas sin premisas) en las "hojas superiores" y "estructura ramificada" en los "nudos" internos especificada a base de las reglas con premisas. Pero el tratamiento "memotécnico" especial que damos a esta definición / constructiva de las derivaciones nos podría hacer pensar que hemos de asumir algún "principio esencial" nuevo para soportar "axiomáticamente" los razonamientos con derivaciones. Pues bien, esto no es cierto: si visualizamos las derivaciones como "objetos estructurados únicos" nos encontramos exactamente con una definición estructurada cuyos "casos base" son las reglas sin premisas, y los constructores las reglas "con premisas" ¡ aplicadas a las derivaciones de las mismas! (o mejor dicho a "alguna"

de las derivaciones de cada una de ellas (pues podría haber varias).
De este modo, cuando decimos que las reglas definen el conjunto de elementos derivables, en realidad estamos "saltándonos" (abstrayendo) el mecanismo concreto que soporta esa definición, que son las derivaciones "completas". Es cierto que lo que nos importa al final es sólo ese conjunto de elementos derivables, pero para llegar a ellos es ineludible un cierto manejo explícito de las derivaciones.

Sin embargo, eso no quiere decir ¡por fortuna! que para constatar que existe una derivación con una determinada "conclusión" tengamos que construirla "completamente" de un modo explícito. De hecho, el mecanismo "composicional" para generar los términos del "álgebra" generada por una serie de "constructores" nos facilita el siguiente modo de visualizarlos:



Si sabemos que t_1 y t_2 son términos (cuya "estructura interna" ya no necesitaremos explicitar), entonces $c(t_1, t_2)$ sería un término siempre que c sea "aplicable" a dicho par de "subtérminos". Evidentemente esto funcionaría de una forma "trivial" cuando c se pudiera aplicar a cualesquiera "subtérminos", pero en el caso de las derivaciones esto funciona prácticamente al revés: si pretendemos concluir una con una determinada "conclusión" a necesitamos aplicar una "regla concreta" del tipo $\dfrac{a_1 \quad a_2}{a}$, que aquí juega el papel de c, que sólo puede aplicarse sobre un par de derivaciones que "terminen" en a_1 y a_2, respectivamente, por lo que la mera existencia de este "constructor" no garantiza en absoluto la existencia de un "término válido" (o sea, una derivación) que culmine con su aplicación. De hecho esto quedó ilustrado anteriormente cuando teníamos una regla que hubiera permitido derivar $3 \in A$, de no haber sido porque comprobamos que la misma no era aplicable, o sea que no había ningún término (derivación) cuyo último constructor (regla aplicada) fuera la recordada antes.

Terminaré trasladando todo lo que acabo de comentar al terreno de la "lógica", que a nivel axiomático no es más que la definición del conjunto de fórmulas derivables por medio de los axiomas y reglas de "deducción" válidos que nos demos.
Entonces, el estudio de la "teoría" (que es el citado conjunto de fórmulas [illegible]ables) lo abordamos de dos formas (en cierto modo opuestas) diferentes :

a) Generación de las mismas : aplicando reiteradamente las reglas a "teoremas" (fórmulas previamente "probadas") voy derivando otros "más y más complejos". Esto se corresponde con la aplicación "hacia abajo" de la construcción presentada antes gráficamente : tengo t_1 y t_2 y c aplicable a ellos para "generar" $c(t_1, t_2)$.

b) Intento de prueba de nuevos teoremas : parto de la conclusión a la que quiero llegar y voy construyendo todos los pisos (de abajo a arriba) de la derivación que culmine con ella, hasta que "llegue" a una serie de premisas que sepa que formen parte de la teoría. Entonces la aplicación reiterada de las reglas desde éstas hacia abajo nos llevaría al término (demostración completa) que prueba el teorema en cuestión.