ENTREGA 3. EA. GRUPO M3 (19-20).
CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.

Fecha límite: 22-XI-2019 antes de las 20:00 horas.

Entregar en la hora de problemas en mano o enviar por correo: andonide@ucm.es.

Problema 1. Se definen las dos nociones siguientes:

Definición 1. Sea G un conjunto no vacío con una operación binaria interna dada por

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & G\times G & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}.$$

Decimos que un par $(G,\cdot)$ satisfaciendo que la **operación** $\cdot$ es **asociativa**; a saber, que

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c, \quad \forall\, a,b,c\in G,$$

es

- un *grupo por la izquierda* si además satisface los axiomas siguientes:
  (i) Existe un elemento $1\in G$ tal que $g\cdot 1 = g$ para todo $g\in G$.
  (ii) Existe un elemento $g^{-1}\in G$ tal que $g\cdot g^{-1} = 1$ para todo $g\in G$.
- un *grupo por la derecha* si además satisface los axiomas siguientes:
  (i) Existe un elemento $1\in G$ tal que $1\cdot g = g$ para todo $g\in G$.
  (ii) Existe un elemento $g^{-1}\in G$ tal que $g^{-1}\cdot g = 1$ para todo $g\in G$.

(1) Probar que $(G,\cdot)$ es un grupo por la izquierda si, y sólo si, lo es por la derecha. Deducir que los elementos neutro e inverso para cada $g\in G$ son únicos. Decimos, en cualquiera de los dos casos, que $G\equiv(G,\cdot)$ es un grupo.

(2) Demostrar que el conjunto formado por las 8 matrices complejas

$$\pm\mathrm{Id} = \pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \pm A = \pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};$$

$$\pm B = \pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}; \quad \pm C = \pm i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

forman un grupo respecto del producto habitual[1]. ¿Es este **cíclico**? ¿Y **abeliano**? Comprobar que este da una **representación del grupo cuaternio**[2] **de orden** 8.

(3) Denotamos por $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ al grupo de matrices reales que tienen dimensión 2×2 con el producto habitual. Escribir la tabla del subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ generado por las matrices

$$a = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

¿Qué grupo conocido presentan estos dos elementos? Comprobar las relaciones. ¿Qué tienen en común este grupo y el ahora estudiado en el apartado anterior?

---

[1] A las matrices

$$\sigma_x := -iA = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y := -iB = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma_z := -iC = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

se las conoce por *matrices de Pauli* (importantes en física; entre otros, en teoría conforme de campos). Este grupo coincide con las unidades del anillo de cuaterniones enteros estudiado en el **Ejercicio** 1 **de la Hoja** 1.

[2] A saber, que existen a y b generadores del grupo, tales que $a^4 = \mathrm{Id}, a^2 = b^2, a^b \equiv b^{-1}ab = a^{-1}$.

Problema 2. Sean $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos.

(1) Dado $g \in G_1$ **elemento de orden finito**, probar que $\operatorname{ord}(f(g))\,|\operatorname{ord}(g)$ (en particular $f(g) \in G_2$ también tiene orden finito). Si f es inyectivo, entonces $\operatorname{ord}(f(g)) = \operatorname{ord}(g)$.
(2) Deducir de lo anterior que, si f es un isomorfismo de grupos, entonces G_1 y G_2 tienen el mismo número de elementos con el mismo orden.
(3) Aplicar este último apartado a los dos grupos estudiados en el **Problema** 1 anterior para concluir que estos NO pueden ser grupos isomorfos.

Problema 3. Sea G un grupo. Para cada $x, y \in G$ arbitrarios, definimos el *conmutador* de x e y como $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1} \in G$. En estas condiciones, sea $\Gamma_G \equiv \{[x, y] : x, y \in G\} \subseteq G$. Se define el *subgrupo derivado* de G como $G' \equiv [G, G] := \langle \Gamma_G \rangle \leq G$.

(1) Probar que $[G, G]$ es el menor subgrupo normal de G que contiene a Γ_G.
(2) Demostrar que G es abeliano si, y sólo si, se tiene que $\Gamma_G = \{1_G\}$. Concluir que el grupo cociente $G/[G, G]$ es abeliano siempre.
(3) ¿Es todo subgrupo de G que contiene a $[G, G]$ normal? Probar el recíproco (a saber, todo subgrupo H normal de G contiene al derivado) si el cociente G/H es abeliano.

Problema 4. El objetivo de este ejercicio es demostrar que las unidades de $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo, forman un grupo cíclico de orden $p - 1$ (que no es un número primo).

(1) Dado G un **grupo abeliano** arbitrario, sean g y h dos elementos de órdenes n y m respectivamente. Demostrar que existe un elemento en G de orden $\operatorname{mcm}(n, m)$.
(2) Si $\mathbb{K}$ es cuerpo, probar que todo $f \in \mathbb{K}[x]$ de grado n tiene **a lo más** n raíces distintas.
(3) Concluir de todo lo anterior que existe $g \in \mathbb{Z}_p^*$ de orden $p - 1$.
(4) [3] ¿Se te ocurre o conoces alguna otra manera de demostrar este resultado?

IMPORTANTE: Quienes quieran que les devuelva las soluciones propuestas con correcciones, que me lo hagan saber escribiéndolo al comienzo de la entrega (indicando el método: a mano en la hora de problemas o por correo).

Instrucciones y Aclaraciones NO MATEMÁTICAS

- NO se corregirán anónimos (por favor, nombre visible en al menos una de las hojas a entregar), ni fotografías (si no se quiere/puede escanear en los envíos por correo, pegar las fotos en un word, guardar este como pdf y enviarlo después).
- Es IMPORTANTE respetar la fecha límite (se da tiempo más que suficiente).
- Más importante que hacer bien los ejercicios es **razonar correctamente** cada paso. Es mejor tener un ejercicio mal hecho, pero bien razonado; que tener un ejercicio bien hecho, y mal razonado.
- Es conveniente **intentar todos los ejercicios**. Mejor intentarlos y que estén mal, que no haberlo intentado si quiera. **Siempre se puede pedir ayuda**. La idea de las entregas es que os enfrentéis a los problemas **con ganas** (tampoco seáis vagos y responder a todo lo que se pregunta), no tanto hacerlos bien (para demostrar los conocimientos adquiridos en la asignatura está el examen).
- Antes de lanzarse a escribir la resolución de los problemas, es mejor (**después de leer bien el problema**) pararse a pensar un rato e intentar dar soluciones óptimas.

[3] Este apartado del problema es optativo para quienes quieran trabajarlo.