

MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021

Entregas

Hoja 2. Resolución de sistemas lineales: métodos directos

- 1 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica e inversible que puede factorizarse en la forma $A = BC$, siendo $B \in \mathcal{M}_n$ real y triangular inferior, $C \in \mathcal{M}_n$ real y triangular superior y verificándose que $\text{diag}(B) = \text{diag}(C)$. Demostrar que $C = B^T$. Deducir que A es simétrica definida positiva.
- b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz real con todos sus menores principales estrictamente positivos. Demostrar que existen $B \in \mathcal{M}_n$ real y triangular inferior y $C \in \mathcal{M}_n$ real y triangular superior, con $\text{diag}(B) = \text{diag}(C)$, de forma que $A = BC$.

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

- a) Probar que si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1 D$ y $U_2 = D^{-1} U_1$.
- b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.
- c) Demostrar que si, además, A es simétrica y admite factorización LU , cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L .

3 a) Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^T & \alpha \end{array} \right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A_{n-1} es inversible y admite factorización LU

$$A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$$

entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^T & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array} \right).$$

- b) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si todos los menores principales de la matriz A son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.