MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Entregas
Hoja 2. Resolución de sistemas lineales: métodos directos

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz con todos sus menores principales no nulos. Demostrar que existen matrices $B \in \mathcal{M}_n$ triangular inferior y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ triangular superior con

$$c_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \dots, n$$

tales que $A = BC$. ¿Es única la factorización anterior?

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.

c) Demostrar que si, además, A es simétrica y admite factorización LU, cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L.

3 a) Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1},\ a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A_{n-1} es inversible y admite factorización LU

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$$

entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right).$$

b) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si todos los menores principales de la matriz A son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.