Examen de prueba Estadística.

Juan Carlos Llamas Núñez 11867802-D

Juan Carlos

1.- Sea $(X_1 -- X_n)$ m.a.s. $X \sim Poisson(\lambda)$ con función de masa

$$p_x(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{con } x = 0,1,2 \cdots \text{ y } \lambda > 0$$

Construir el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ frente a $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

Para realizar este contraste tenemos que calcular

$$\lambda(x_1 -- x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \{f(x_1 -- x_n|\theta)\}}{\sup_{\theta \in \Theta} \{f(x_1 -- x_n|\theta)\}}$$

Para ello vamos a calcular la función de verosimilitud

$$L(\theta|x_1 -- x_n) = f(x_1 -- x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} =$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Preferimos trabajar con la función soporte que es

$$\ell(\theta|x_1 -- x_n) = Ln(L(\theta|x_1 -- x_n)) = -n\lambda + \sum x_i \, Ln\lambda - Ln(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$$

$$\ell'(\theta|x_1 -- x_n) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \iff \lambda = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\ell''(\theta|x_1 -- x_n) = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2} < 0$$ Por tanto $\lambda = \bar{x}$ es el máximo