$$f(x_1 --- x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} =$$

$$= \theta^n \cdot e^{(\theta-1) Ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)} = \theta^n e^{(\theta-1) \sum_{i=1}^{n} Ln(x_i)}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico $S(X_1 -- X_n) = \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ es suficiente. Además, éste es completo ya que al pertenecer $f(\vec{x}|\theta)$ a la familia de distribuciones exponencial uniparamétrica, es suficiente que $\Pi(\theta) = (\theta - 1)$ contenga un rectángulo abierto $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo. Esto, en efecto, se cumple por lo que podemos concluir que al ser T, estimador insesgado de $Z(\theta)$, función de S, estadístico suficiente y completo, entonces $T = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ es el ECUMV.

Ejercicio 7.- Sea $(X_1 -- X_n)$ una m.as. con $X \sim f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$ con $x > 0$ y $\theta > 0$. Hallar un estadístico suficiente y completo para θ. Hallar ~~el~~ estimador de máxima verosimilitud para θ^2 y comprobar si además es eficiente para estimar $Z(\theta) = \theta^2$.

$$f(x_1 -- x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta^{2n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico $S(X_1 -- X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente. Además, es completo pues al tratarse de la familia exponencial uniparamétrica es suficiente comprobar que $\Pi(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ contiene un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Efectivamente, esto último es cierto por lo que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente y completo.