En consecuencia, $\frac{K}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n;1-\alpha}$ con $F_{\chi^2_n}(\chi^2_{n;1-\alpha}) = \alpha$

En resumen, el test de hipótesis UMP es:

$$\boxed{\phi(x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \end{cases}}$$

El p-valor para una muestra observada $(x_1 \ldots x_n)$

$$\boxed{p(x_1 \ldots x_n)} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ P_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right\} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ P_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \right) \right\}$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ F_{\chi^2_n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \right) \right\} \underset{\uparrow}{=} \boxed{F_{\chi^2_n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma_0^2} \right)}$$

Mismo razonamiento.

<u>Ejercicio 3</u>.- Sea $(X_1 \ldots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Hallar el contraste de razón de verosimilitudes de tamaño α para contrastar $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

—— x —— x —— x ——

Para ello, lo primero que tenemos que hacer es calcular

$$\lambda(x_1 \ldots x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \{f(x_1 \ldots x_n | \theta)\}}{\sup_{\theta \in \Theta} \{f(x_1 \ldots x_n | \theta)\}}$$

En nuestro caso $\Theta_0 = [0, \sigma_0^2]$ y $\Theta_1 = (\sigma_0^2, \infty)$ con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Vamos a calcular la función de verosimilitud

$$L(\sigma^2 | x_1 \ldots x_n) = f(x_1 \ldots x_n | \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - 0)^2} =$$