CAPÍTULO 26

Lema de Schwarz

En este capítulo vamos a establecer el lema de Schwarz y algunas de sus consecuencias. Aunque el lema de Schwarz es una consecuencia sencilla del principio del módulo máximo este resultado es una de las herramientas más importantes en el estudio de las aplicaciones complejas.

En todo este capítulo vamos a denotar por D al disco unidad abierto $D(0:1) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$.

26.1 Lema de Schwarz

Teorema 26.1.1 (Lema de Schwarz)**.** *Supongamos que f es una función holomorfa en D que verifica*

a) $|f(z)| \leqslant 1$ *para* $z \in D$,

b) $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para todo z en el disco D.

Además si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, existe una constante c de módulo 1 tal que $f(z) = cz$ para todo z de D.

Demostración. Sea h la función

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases} \qquad (z \in D).$$

Esta función es holomorfa en D. Si $0 < r < 1$, el principio del módulo máximo implica que

$$|h(z)| \leqslant \frac{1}{r}$$

para todo z, $|z| \leqslant r$. Haciendo tender r a 1 se tiene que $|h(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in D$.

Si $|h(z)| = 1$ para algún $z \in D$, por el principio del módulo máximo, h es constante. □

Corolario 26.1.2. *Sea f una función holomorfa e inyectiva del disco unidad D sobre él mismo. Si $f(0) = 0$, entonces $f(z) = cz$ para alguna constante c de módulo 1.*

Demostración. Como f es holomorfa y biyectiva, su inversa también es holomorfa (corolario 24.1.3). Aplicando el lema de Schwarz a f y su inversa se tiene

$$|z| = \left|f^{-1}\big(f(z)\big)\right| \leqslant |f(z)| \leqslant |z| \qquad (z \in D).$$

Aplicando otra vez el lema de Schwarz se deduce que $f(z) = cz$ para alguna constante c de módulo 1. □

26.2 Caracterización de los automorfismos del disco unidad

Para poder extender el lema de Schwarz nos van a ser de gran utilidad las siguientes transformaciones de Möbius.

Para cada $a \in D$ denotaremos por φ_a la transformación de Möbius

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \tag{26.1}$$

Aunque podemos considerar estas transformaciones como aplicaciones de $\mathbb{C}_\infty$ sobre $\mathbb{C}_\infty$, en este contexto, sin embargo, vamos a considerar únicamente la restricción de dichas aplicaciones al disco unidad cerrado $\overline{D}$.

Proposición 26.2.1. *Sea $a \in D$. La transformación φ_a es una función holomorfa en $\overline{D}$ e inyectiva, que transforma el disco unidad D sobre sí mismo, la circunferencia unidad sobre sí misma y el punto a en 0. La inversa de φ_a es φ_{-a}. Además*

$$\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2, \qquad y \qquad \varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}. \tag{26.2}$$

Demostración. Es inmediato que φ_a es una función holomorfa. Vimos en el capítulo 9 que las transformaciones de Möbius eran inyectivas. Sin embargo, esto se puede comprobar directamente porque

$$\varphi_{-a}\big(\varphi_a(z)\big) = \frac{\varphi_a(z)+a}{1+\bar{a}\varphi_a(z)} = \frac{\frac{z-a}{1-\bar{a}z}+a}{1+\bar{a}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}} = \frac{z-|a|^2 z}{1-|a|^2} = z \quad (z \in D).$$

Esto demuestra que φ_a es inyectiva y que φ_{-a} es su inversa. Además si $\theta \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{i\theta}-a}{1-\bar{a}e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-a}{e^{-i\theta}-\bar{a}}\right|,$$

lo que demuestra que $\varphi_a(C) \subset C$, donde C es la circunferencia unidad. Cambiando a por $-a$ se tiene que $\varphi_{-a}(C) \subset C$, lo que muestra que $\varphi_a(C) = C$. El principio del módulo máximo implica que $\varphi_a(D) \subset D$ y $\varphi_{-a}(D) \subset D$ de donde se deduce que $\varphi_a(D) = D$. Por último

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-\bar{a}z+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2},$$

de donde se obtienen las relaciones (26.2) sustituyendo z por 0 y a. □

Haciendo uso de estas transformaciones podemos caracterizar las aplicaciones holomorfas del disco unidad sobre sí mismo.

Teorema 26.2.2. *Si $f : D \to D$ es una aplicación holomorfa e inyectiva del disco unidad sobre sí mismo, entonces existen $a \in D$ y $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tales que*

$$f(z) = c\varphi_a(z) \qquad (z \in D).$$

Demostración. Sea $a \in D$ tal que $f(a) = 0$. La aplicación $g = f \circ \varphi_{-a}$ es inyectiva y aplica D sobre D y $g(0) = f\big(\varphi_{-a}(0)\big) = f(a) = 0$. Por 26.1.2 existe $c \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tal que $g(z) = cz$ para $z \in D$. En consecuencia $f = c\varphi_a$. □

26.3 Extensión del Lema de Schwarz a discos arbitrarios. Teorema de Pick

Vamos a continuación a dar una extensión del lema de Schwarz para discos arbitrarios. Por simplicidad supondremos discos centrados en 0. Sin excesiva dificultad la discusión que sigue se puede extender al caso general.

Sea $f : D(0;R) \to D(0;S)$ una función holomorfa. Fijamos $z_0 \in D(0;R)$ y sea $w_0 = f(z_0)$. Las aplicaciones

$$f_1(z) = \varphi_{\frac{z_0}{R}}\left(\frac{z}{R}\right) = R\frac{z-z_0}{R^2-\overline{z_0}z}$$

y

$$f_2(z) = \varphi_{\frac{w_0}{S}}\left(\frac{z}{S}\right) = S\frac{z-w_0}{S^2-\overline{w_0}z}$$

aplican de manera biyectiva los discos $D(0;R)$ y $D(0;S)$, respectivamente, sobre el disco D. Si $g = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$, g es una aplicación holomorfa de D en D que verifica

$$g(0) = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}(0) = f_2\big(f(z_0)\big) = f_2(w_0) = 0.$$

Aplicando el lema de Schwarz se tiene que $|g(z)| \leqslant |z|$ para todo $z \in D$ y $|g'(0)| \leqslant 1$. Además la igualdad $|g(z)| = |z|$ se da para algún $z \in D$, $z \neq 0$, ó $|g'(0)| = 1$, si, y solo si, $g(z) = cz$, $z \in D$, para algún $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$. En este caso

$$f(z) = S\varphi_{-\frac{w_0}{S}}\left[c\varphi_{\frac{z_0}{R}}\left(\frac{z}{S}\right)\right] \tag{26.3}$$

que es una transformación de Möbius de $D(0;R)$ sobre $D(0;S)$.

La desigualdad $|g(z)| \leqslant |z|$, $z \in D$, equivale a

$$\left|S\frac{f(z)-f(z_0)}{S^2-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leqslant \left|R\frac{z-z_0}{R^2-\overline{z_0}z}\right| \qquad (z \in D(0;R)). \tag{26.4}$$

Por otra parte, como

$$g'(0) = f_2'\big(f \circ f_1^{-1}(0)\big)f'\big(f_1^{-1}(0)\big)\big(f_1^{-1}\big)'(0) = f_2'(w_0)f'(z_0)\big(f_1^{-1}\big)'(0),$$

se tiene que

$$f_1'(z_0)g'(0) = f_2'(w_0)f'(z_0).$$

Como f_1 y f_2 son inyectivas sus derivadas no se anulan, por lo que la relación $|g'(0)| \leqslant 1$ equivale a $|f_2'(w_0)f'(z_0)| \leqslant |f_1'(z_0)|$, esto es

$$\frac{S}{S^2-|w_0|^2}\,|f'(z_0)| \leqslant \frac{R}{R^2-|z_0|^2}.$$

Resumiendo tenemos el siguiente teorema.

Teorema 26.3.1 (Teorema de Pick). *Si f es una función holomorfa del disco $D(0;R)$ en el disco $D(0;S)$, entonces para todo $z_0 \in D(0;R)$ se verifican las desigualdades*

$$\left|S\frac{f(z)-f(z_0)}{S^2-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leqslant \left|R\frac{z-z_0}{R^2-\overline{z_0}z}\right| \qquad (z \neq z_0), \tag{26.5}$$

y

$$|f'(z_0)| \leqslant \frac{R}{S}\,\frac{S^2-|f(z_0)|^2}{R^2-|z_0|^2}. \tag{26.6}$$

Más concretamente o f es una transformación de Möbius o, en caso contrario, para cada $z_0 \in D(0;R)$ se verifican las desigualdades

$$\left|S\frac{f(z)-f(z_0)}{S^2-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| < \left|R\frac{z-z_0}{R^2-\overline{z_0}z}\right| \qquad (z \neq z_0), \tag{26.7}$$

y

$$|f'(z_0)| < \frac{R}{S}\,\frac{S^2-|f(z_0)|^2}{R^2-|z_0|^2}. \tag{26.8}$$

En el caso de funciones holomorfas del disco unidad en sí mismo las desigualdades anteriores quedan:

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| < \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| \qquad (z \neq z_0), \tag{26.9}$$

y

$$|f'(z_0)| < \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}. \tag{26.10}$$

26.4 Desigualdades de Hadamard, Borel y Carathéodory

Con la ayuda del lema de Schwarz vamos a demostrar las desigualdades de Hadamard-Borel-Carathéodory.

Teorema 26.4.1 (Desigualdades de Hadamard-Borel-Carathéodory)**.** *Sea f una función holomorfa en el disco $D(0; R)$ y continua en $\overline{D}(0; R)$. Para cada $0 \leqslant r \leqslant R$ sean*

$$M(r) = \sup\{|f(z)| : |z| = r\} \quad y \quad A(r) = \sup\{\operatorname{Re} f(z) : |z| = r\}.$$

Entonces, si $0 \leqslant r < R$,

$$A(r) \leqslant \frac{R - r}{R + r} \operatorname{Re} f(0) + \frac{2r}{R + r} A(R) \tag{26.11}$$

y

$$M(r) \leqslant \frac{R + r}{R - r} |f(0)| + \frac{2r}{R - r} A(R). \tag{26.12}$$

Demostración. Como f es holomorfa, por 25.1.5, o f es constante o $A(R) > \operatorname{Re} f(z)$ para todo $z \in D(0; R)$. Si f es constante las desigualdades (26.11) y (26.12) son triviales. Por tanto, supongamos que f no es constante. Supongamos además que $f(0) = 0$. La función

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}, \qquad \big(z \in D(0; R)\big),$$

es una función holomorfa, $g(0) = 0$ y, como

$$\begin{aligned} |2A(R) - f(z)|^2 &= \big(2A(R) - \operatorname{Re} f(z)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2 \\ &> \big(\operatorname{Re} f(z)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2 = |f(z)|^2, \end{aligned}$$

para todo $z \in D(0; R)$,

$$|g(z)| \leqslant \frac{|f(z)|}{|2A(R) - f(z)|} \leqslant 1.$$

Por (26.4)

$$|g(z)| \leqslant \frac{|z|}{R} \qquad \big(z \in D(0;R)\big),$$

de donde

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{R}|2A(R) - f(z)| \qquad \big(z \in D(0;R)\big), \tag{26.13}$$

y, por tanto, si $0 \leqslant r < R$,

$$M(r) \leqslant \frac{r}{R}\big(2A(R) + M(r)\big)$$

luego

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r}A(r),$$

lo que demuestra la desigualdad (26.12) en este caso. Si $f(0) \neq 0$, aplicando la relación anterior a la función $f - f(0)$ se tiene, para z con $|z| = r$,

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2r}{R-r}\big[A(r) - Re f(0)\big] \leqslant \frac{2r}{R-r}A(r) + \frac{2r}{R-r}\,|f(0)|$$

luego

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r}A(r) + \frac{R+r}{R-r}\,|f(0)|\,.$$

Esto concluye la demostración de la desigualdad (26.12).

Para demostrar la otra desigualdad, suponemos nuevamente que $f(0) = 0$. Observemos en primer lugar que si $x, x' \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant |x'|$, entonces para cada $y \in \mathbb{R}$

$$\big|x(x' + iy)\big|^2 = (xx')^2 + (xy)^2 \leqslant (xx')^2 + (x'y)^2 = \big|x'(x + iy)\big|^2$$

de donde se deduce que, si $x' \neq 0$,

$$\left|\frac{x}{x'}\right| \leqslant \left|\frac{x + iy}{x' + iy}\right|.$$

Teniendo en cuenta esto y (26.13) se tiene que

$$\frac{\operatorname{Re} f(z)}{2A(R) - \operatorname{Re} f(z)} \leqslant \frac{|f(z)|}{|2A(R) - f(z)|} \leqslant \frac{|z|}{R}, \qquad \big(z \in D(0;R)\big),$$

luego

$$\left(1 + \frac{|z|}{R}\right)\operatorname{Re} f(z) \leqslant \frac{|z|}{R}2A(R), \qquad \big(z \in D(0;R)\big),$$

y, en consecuencia, si $0 \leqslant r < R$,

$$\left(1 + \frac{r}{R}\right)A(r) \leqslant \frac{r}{R}2A(R),$$

y, por tanto,

$$A(r) \leqslant \frac{2r}{R+r}A(R).$$

Si $f0) \neq 0$, aplicando lo anterior como antes a la aplicación $f - f(0)$, se tiene que

$$A(r) - \operatorname{Re} f(0) \leqslant \frac{2r}{R+r}\big(A(R) - \operatorname{Re} f(0)\big)$$

de donde

$$A(r) \leqslant \frac{R-r}{R+r} \operatorname{Re} f(0) + \frac{2r}{R+r} A(R).$$

□

Obsérvese que por el teorema 25.1.5,

$$A(R) = \sup\{\operatorname{Re} f(z) : |z| < R\}.$$

Utilizando esta expresión de $A(R)$, que no requiere que f esté definida en la frontera del disco, en realidad no es necesario exigir, en las hipótesis del teorema anterior, que la función esté definida y sea continua en el disco cerrado. Es suficiente con que $\operatorname{Re} f$ esté acotada superiormente en el disco $D(0; R)$.