La función de densidad de S será:

$$F_S(s) = \theta^2 \cdot f_W(\theta^2 s) = \theta^2 \cdot \frac{n}{\theta^2} \cdot \left(\frac{\theta^2 s}{\theta^2}\right)^{n-1} \cdot I_{(0,\theta^2)}(\theta^2 s) =$$

$$= n\, s^{n-1} I_{(0,\theta^2)}(\theta^2 s) = n\, s^{n-1} I_{(0,1)}(s)$$ ya que la condición

$\theta^2 s \in (0,\theta^2)$ equivale a $s \in (0,1)$.

Esta es ya una distribución que no depende de θ y además es conocida (es una distribución beta de parámetros $\alpha = n$ y $\beta = 1$).

Entonces $S = \frac{W}{\theta^2} = \frac{2\theta X_{(n)} - X_{(n)}^2}{\theta^2} \sim Beta(\alpha = n, \beta = 1)$

Podemos tomar S como cantidad pivotal y si queremos calcular ahora un intervalo de confianza para θ con probabilidad de colas iguales al nivel de confianza $1-\alpha$ prodecemos de la siguiente forma:

$$P\{a \leq S \leq b\} = 1 - \alpha.$$

Como nos piden que las probabilidades de las colas sean iguales

$a = \beta_{n,1:1-\alpha/2}$ con $F_{Beta(n,1)}(\beta_{n,1:1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ y

$b = \beta_{n,1:\alpha/2}$ con $F_{Beta(n,1)}(\beta_{n,1:\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Ahora tenemos que construir el intervalo para θ:

$$a \leq S \leq b \iff a \leq \frac{2\theta X_{(n)} - X_{(n)}^2}{\theta^2} \leq b \iff a\theta^2 \leq 2\theta X_{(n)} - X_{(n)}^2 \leq b\theta^2.$$

$$\iff a\theta^2 - 2X_{(n)}\theta + X_{(n)}^2 \leq 0 \quad (1)$$

y

$$b\theta^2 - 2X_{(n)}\theta + X_{(n)}^2 \geq 0. \quad (2)$$

Ahora, la desigualdad (1) equivaldrá a falso si el discriminante es negativo y la desigualdad (2) equivaldrá a cierto si el discriminante es positivo.