I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.............. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

$\boxed{7.-}$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot sen(nx) \qquad r>0$

Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \underset{|z|<1}{=} \frac{1}{1-z}$. Tomando $z = r\cdot(\cos x + i\, sen x)$, $0 \le r < 1$

se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos x + i\, sen x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \cos nx + i \sum_{n=0}^{\infty} r^n sen(nx)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n(\cos x + i\, sen x)^n = \frac{1}{1-r(\cos x + i\, sen x)}$$

$$\frac{1}{1-r(\cos x + i\, sen x)} = \frac{1}{1 - r\cos x - i r\, sen x} = \frac{(1-r\cos x) + i r\, sen x}{(1-r\cos x)^2 + r^2 sen^2 x} =$$

$$= \frac{1 - r\cos x + i r\, sen x}{1 - 2r\cos x + r^2\cos^2 x + r^2 sen^2 x} = \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2} + i\, \frac{r\, sen x}{1-2r\cos x + r^2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cdot \cos nx = \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\, sen(nx) = \frac{r\, sen x}{1-2r\cos x + r^2}$$

7.-

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}$

Buscamos aplicar la formula de sumación por partes de Abel, para lo que consideramos $a_n = (-1)^n$

$b_n = z^{3n}$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \mathcal{E}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El radio de convergencia de la serie es 1 porque $\limsup \sqrt[n]{|(-1)^n|} = 1$. Consideramos los z, $|z|<1$

$$\sum_{n=0}^{q} (-1)^n z^{3n} = \sum_{n=0}^{q-1} A_n \cdot \left(z^{3n} - z^{3(n+1)}\right) + A_q z^{3q} - A_{-1} z^0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} \mathcal{E}_n \left(z^{3n} - z^{3n} \cdot z^3\right) + \mathcal{E}_q \cdot z^{3q} - 0 =$$

$$= \left(1 - z^3\right) \sum_{n=0}^{q-1} \mathcal{E}_n z^{3n} + \mathcal{E}_q \cdot z^{3q}$$

Ahora $\sum_{n=0}^{q-1} \mathcal{E}_n z^{3n} = 1 + z^6 + z^{12} + z^{18} + \dots + \underline{z^{3(q-1)}} =$

o z^{3q} según q sea par o impar

$$= \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} z^{6n}$$

Haciendo q tender a infinito

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n} = (1-z^3) \sum_{n=0}^{\infty} z^{6n} + \lim_{n \to \infty} \varepsilon_n z^{3n} \underset{|z|<1}{=} \frac{1-z^3}{1-z^6}$$