$\boxed{4.-}$ Sea f una función entera. Si $R>0$ $a,b\in\mathbb{C}$ $a\neq b$, $|a|,|b|<R$ calcula $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$. Deducir el T^{a} de Liouville.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-B} = \frac{A(z-b)+B(z-a)}{(z-a)(z-b)}$$

$$1 = A(z-b) + B(z-a)$$

Si $z=b$ $\quad 1 = A\cdot 0 + B(b-a) \iff B = \frac{1}{b-a}$

$z=a$ $\quad 1 = A(a-b) \iff A = \frac{1}{a-b}$

$$\Rightarrow \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{1}{a-b}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{1}{b-a}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-b} =$$

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.......... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

$$= \frac{1}{a-b} \cdot f(a) \cdot 2\pi i \, \mathrm{Ind}(\gamma; a) + \frac{1}{b-a} f(b) 2\pi i \, \mathrm{Ind}(\gamma; b) =$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \cdot 2\pi i$$

Si f está acotada tomando $b=0$

$$f(a) - f(0) = \frac{a}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)z} dz$$

$$\Rightarrow \left| f(a) - f(0) \right| = \frac{|a|}{|2\pi i|} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)|z|} dz \right| \leq \frac{|a|}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z-a||z|} dz$$

$$\leq \frac{|a| \cdot M}{2\pi} \cdot \int_{|z|=R} \frac{1}{|z-a| \cdot R} dz \leq \frac{|a| M}{2\pi R} \int_{|z|=R} \frac{1}{|z|-|a|} dz =$$

$$= \frac{|a| M}{2\pi R} \cdot \frac{1}{R-|a|} \int_{|z|=R} 1 \, dz = 0 \rightarrow f(a) = f(0) \quad \forall a, |a|<R \text{ y } \forall R$$

5.- Desarrolla en serie de Taylor

a) e^z en $z_0 = 1$

$f(z) = e^z$ holomorfa en $D(1;R)$ $\forall R>0$.

$f^{n)}(z) = e^z \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(1)}{n!} (z-1)^n \Leftrightarrow e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^n \quad \forall z \in D(1,R) \; \forall R>0.$$