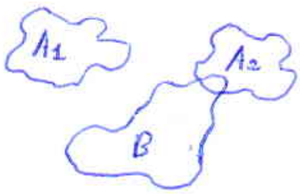
Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Lista 7

Ejercicio 7.26.- Sea X un espacio topológico. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X cuya unión y cuya intersección son conjuntos conexos. Demostrar que tanto A como B son conexos. ¿Y si son abiertos?

Vamos a razonar por reducción al absurdo, así que supongamos que A o B no es uno de ellos conexo y, sin pérdida de generalidad, consideramos que A no es conexo.

En primer lugar, una aproximación más intuitiva, informal y simplificada nos puede hacer pensar que A se divide en dos conjuntos "separados" y analizamos que sucede en función de la posición de B.

a) 

Si B no corta a alguno de los conjuntos que separan A entonces la unión se podrá separar en $A \cup B = A_1 \cup (B \cup A_2)$.

b) 

Si B corta a ambos, formando algo parecido a una cadena, entonces se puede separar la intersección por $A_1 \cap B$ y $A_2 \cap B$.

Ahora que tenemos la idea intuitiva podemos proceder con una demostración rigurosa.

Como A no es conexo existen C_A y F_A conjuntos cerrados en A, no vacíos y disjuntos tales que $A = C_A \cup F_A$.

Afirmamos que $B \cap C_A = \emptyset$ o $B \cap F_A = \emptyset$.

Si por el contrario, $B\cap C_A \neq \emptyset$ y $B\cap F_A \neq \emptyset$ entonces vamos a probar que estos dos conjuntos separan $A\cap B$.

En primer lugar, $A\cap B = (C_A\cup F_A)\cap B = (B\cap C_A)\cup(B\cap F_A)$.

Estamos suponiendo que $B\cap C_A$ y $B\cap F_A$ son no vacíos y, además, son disjuntos porque $(B\cap C_A)\cap(B\cap C_F) = B\cap(\underbrace{C_A\cap C_F}_{\emptyset}) = \emptyset$.

Por último, ambos conjuntos son cerrados en $A\cap B$. Como C_A y F_A son cerrados en A entonces existen C y F cerrados en X tales que $C_A = C\cap A$ y $F_A = F\cap A$ luego $B\cap C_A = B\cap(C\cap A) = C\cap(A\cap B)$ y $B\cap F_A = B\cap(F\cap A) = F\cap(A\cap B)$, que son conjuntos cerrados en $A\cap B$.

Por tanto, hemos encontrados dos conjuntos no vacíos, cerrados en $A\cap B$ y disjuntos tales que $A\cap B$ se puede escribir como su unión, lo que contradice que $A\cap B$ sea conexo.

Por tanto, $B\cap C_A = \emptyset$ o $B\cap F_A = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B\cap C_A = \emptyset$.

Ahora vamos a ver que los conjuntos C_A y $B\cup F_A$ separan $A\cup B$.

En primer lugar $A\cup B = (C_A\cup F_A)\cup B = C_A\cup(B\cup F_A)$. Por otro lado, C_A es no vacío y F_A es no vacío luego C_A y $B\cup F_A$ son no vacíos y son disjuntos ya que $C_A\cap(B\cup F_A) = (\underbrace{C_A\cap B}_{\emptyset})\cup(\underbrace{C_A\cap F_A}_{\emptyset}) = \emptyset$. Finalmente, C_A y $B\cup F_A$ son cerrados en $A\cup B$.

En efecto,

$$B\cup F_A = B\cup(F\cap A) = (B\cup F)\cap(B\cup A) = \underbrace{\overbrace{(B\cup F)}^{\text{unión de dos cerrados es cerrado}}}_{\text{cerrados en } X}\cap(A\cup B) \text{ cerrado en } A\cup B$$

$$C_A = C_A\cup(\underbrace{C_A\cap B}_{\emptyset}) \underset{C_A\subset A}{=} (C_A\cap A)\cup(C_A\cap B) = C_A\cap(A\cup B) = \underbrace{\boxed{\overbrace{\underbrace{(A\cap C)}_{\text{cerrados en} X}\cap(A\cup B)}^{\text{Unión de dos cerrados es cerrado}}}}_{\text{Cerrado en } A\cup B}$$

Esto último prueba que $B \cup F_A$ y C_A son cerrados en $A \cup B$ luego hemos escrito $A \cup B$ como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos y cerrados en $A \cup B$, lo que contradice que $A \cup B$ sea conexo.

Esto prueba que A y B deben ser conexos.

¿Qué sucede si A y B son abiertos en lugar de cerrados? Esencialmente lo mismo. La misma demostración prueba que dados dos abiertos cuya unión e intersección son conexos, entonces ambos son conexos, realizando cambios obvios en la demostración. Estos cambios son sustituir la palabra "cerrado" por "abierto" donde quiera que aparezca. Podemos hacer esto ya que si A no es conexo, en lugar de "tomar dos cerrados en A tales que...", la otra caracterización nos permite "tomar dos abiertos en A tales que...". En el resto de la demostración, para lo único que usamos que un conjunto es cerrado es para decir que la unión finita de cerrados es cerrado, lo que se cumple también para abiertos, y que si C_A es un cerrado de A entonces $C_A \cap B$ es un cerrado de $A \cap B$, lo que es también cierto para conjuntos abiertos.

Ejercicio 7.21.- Sea X un espacio compacto Hausdorff y $C_k \supset C_{k+1}, k \geq 1$, una cadena de subconjuntos cerrados conexos de X. Demostrar que la intersección $\bigcap_k C_k$ es un conjunto conexo.

Antes de demostrarlo, necesitamos un resultado previo que vamos a utilizar durante la demostración. Vamos a probar que si tenemos dos conjuntos A y B disjuntos y compactos en un espacio Hausdorff entonces podemos encontrar U, V abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

La demostración de este resultado es de algún modo similar a la demostración del Teorema de Tychonoff.

Sean entonces A y B dos conjuntos compactos y disjuntos en un espacio Hausdorff. Sabemos entonces que $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$ $\exists U_b^a$ y V_a^b tales que $a \in U_b^a$ entorno abierto de a y $b \in V_a^b$ entorno abierto de b con $U_b^a \cap V_a^b = \emptyset$.

Fijamos $a \in A$ y consideramos la familia $\mathcal{V}_b = \{V_a^b \mid b \in B\}$, que es un recubrimiento por abiertos de B porque $B \subset \bigcup_{b \in B} V_a^b$. Como B es compacto existen $b_1, b_2, \dots b_k$ tales que $(V_a^{b_i})_{i=1}^k$ es un subrecubrimiento finito de B, es decir, $B \subset \bigcup_{i=1}^k V_a^{b_i}$. Definimos ahora los abiertos $V^a = \bigcup_{i=1}^k V_a^{b_i}$ y $U^a = \bigcap_{i=1}^k U_{b_i}^a$. Nótese que $\forall a \in A$ se tiene que $B \subset V^a$ y que $a \in U^a$. Los conjuntos U^a son abiertos por ser intersección finita de abiertos y la familia $\mathcal{U}^a = \{U^a \mid a \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de A. Como A es compacto, existen $a_1, a_2, \dots a_r$ tales que $(U^{a_j})_{j=1}^r$ es un subrecubrimiento finito de A.

Si llamamos $U = \bigcup_{j=1}^r U^{a_j}$ y $V = \bigcap_{j=1}^r V^{a_j}$ entonces veamos que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Que $A \subset U$ se obtiene de que $(U^{a_j})_{j=1}^r$ es un subrecubrimiento finito de A luego $A \subset \bigcup_{j=1}^r U^{a_j} = U$. Por otro lado, $B \subset V$ porque habíamos hecho notar antes que $B \subset V^a$ $\forall a \in A$ luego $B \subset \bigcap_{j=1}^r V^{a_j} = V$. Por último, $U \cap V = \emptyset$. Antes no lo hemos comentado, pero $V^a \cap U^a = \emptyset$ $\forall a \in A$ (Si $x \in V^a$, $\exists i_0 \in \{1 \dots k\}$ // $x \in V_a^{b_{i_0}}$ luego $x \notin U_{b_{i_0}}^a$ porque $V_a^{b_{i_0}} \cap U_{b_{i_0}}^a = \emptyset$ así que $x \notin \bigcap_{i=1}^k U_{b_k}^a = U^a$). De esta forma $U \cap V = \emptyset$.

Si $x \in U$, $\exists j_0 \in \{1 \dots r\}$ // $x \in U^{a_{j_0}}$ luego $x \notin V^{a_{j_0}}$ porque $U^{a_{j_0}} \cap V^{a_{j_0}} = \emptyset$.

Por tanto, $x \notin \bigcap_{j=1}^{n} V^{a_j} = V^a$. Esto prueba que $U \cap V = \emptyset$ y, además, U y V son abiertos por ser uniones o intersecciones finitas de abiertos, por lo que queda probado este resultado.

Una vez tenemos este lema procedemos a probar que en un espacio compacto Hausdorff, dada una cadena $C_k \supset C_{k+1}$ $k \geq 1$ de cerrados conexos la intersección es conexa.

Supongamos que no lo es, es decir, que $C = \bigcap_{k \geq 1} C_k$ se puede escribir como $C = A \cup B$ con A, B conjuntos cerrados en C, disjuntos y no vacíos.

Lo primero que hacemos notar es que todos los conjuntos (los C_k, C, A y B) son compactos porque son conjuntos cerrados en un compacto. o cerrados en un cerrado (es decir, cerrados en el total) contenidos en un compacto.

Por el lema anterior, como A y B son conjuntos compactos en un espacio Hausdorff $\exists U, V$ abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Veamos que $\forall k \geq 1$ $C_k \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$.

Supongamos que $C_k \setminus (U \cup V) = \emptyset$, luego $C_k \subset U \cup V$. Además, $A \subset C \cap U \subset C_k \cap U$ y $A \neq \emptyset$ luego $C_k \cap U \neq \emptyset$. Análogamente $B \subset C \cap V \subset C_k \cap V$ y $B \neq \emptyset$ luego $C_k \cap V \neq \emptyset$. Finalmente, $C_k \cap U \cap V = \emptyset$ porque U y V son disjuntos luego C_k no es un subespacio conexo, lo que supone una contradicción con las hipótesis.

Por tanto $\forall k \geq 1$ $C_k \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$ así que si intersecamos una cantidad finita, la intersección es no vacía. Veámoslo,

Sean $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_r$ y se tiene

$$\bigcap_{i=1}^{r} (C_{k_i} \setminus (U \cup V)) \overset{?}{=} C_{k_r} \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$$

El contenido hacia la derecha es inmediato y si tomamos $x \in C_{k_r} \setminus (U \cup V)$ entonces $x \in C_{k_r} \subset C_{k_{r-1}} \subset C_{k_{r-2}} \subset \dots \subset C_{k_2} \subset C_{k_1}$ luego $x \in C_{k_i} \setminus (U \cup V)$ $\forall i \in \{1 - r\}$. Esto prueba que $\mathcal{F} = \{C_k \setminus (U \cup V) \mid k \geq 1\}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita y, como el espacio es compacto, $\bigcap_{k \geq 1} (C_k \setminus (U \cup V)) \neq \emptyset$. Nótese que todos los conjuntos de la familia son cerrados menos abiertos, es decir, cerrados intersecados con complementarios de abiertos luego cerrados.
No hubiera bastado considerar $C_k \setminus (A \cup B)$ porque es necesario que los conjuntos fueran cerrados.
(Por eso es necesario introducir U y V)

Sabemos entonces que $\bigcap_{k \geq 1} (C_k \setminus (U \cup V)) \neq \emptyset$ pero

$$\bigcap_{k \geq 1} (C_k \setminus (U \cup V)) = \left(\bigcap_{k \geq 1} C_k\right) \setminus (U \cup V) = C \setminus (U \cup V) \neq \emptyset.$$

Pero esto es una contradicción porque si $x \in C \setminus (U \cup V)$ entonces $x \in C = A \cup B$ y $x \notin U$, $x \notin V$. Si $x \in A$ como $A \subset U \Rightarrow x \in U$!!
Si $x \in B$ como $B \subset V \Rightarrow v \in V$!!

Llegamos a una contradicción tras haber supuesto que $C = \bigcap_{k \geq 1} C_k$ no era conexo.