Alvaro Delgado Aguado

Entrega 1

9,75

1

$$P^{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & 1 \; \ddots \; 1 & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(columns i, j marked above the matrix)

Primeramente, observamos que la matriz P^{ij} es la matriz Identidad a la que hemos permutado sus filas i, j entre sí.

Según se puede apreciar en el enunciado de la entrega, la notación a seguir es la que hace referencia a expresar los elementos de la matriz B como $b_{k\ell}$, y notación análoga para describir una matriz i.e, $B = (b_{k\ell})_{k,\ell=1}^{n}$.

Mostraremos únicamente que al multiplicar la matriz B a la izquierda por P^{ij} se intercambian las filas (es decir, es como si aplicáramos el intercambio que quisiéramos hacer en B de filas pero a la Identidad). ¿Por qué? Porque, si mostramos que $P^{ij} \cdot B = B^{ij}$ (entendiendo por B^{ij} el resultado que queremos probar), entonces $B^T \cdot P^{ij} \underset{P^{ij}=(P^{ij})^T}{=} B^T (P^{ij})^T \underset{\text{Propiedades de Trasponer}}{=} (P^{ij} \cdot B)^T \underset{\text{Resultado que vamos a probar}}{=} (B^{ij})^T$, lo que nos daría el resultado de intercambio de columnas, ya que permutar y trasponer, no se ve afectado el resultado por el orden.

Mostremos por tanto que $P^{ij} B = B^{ij}$.

Aunque no lo has dicho, se supone que son los elementos de la matriz P^{ij}, ¿no?

Sea $k \neq i, k \neq j$, $\ell = 1, \dots, n$. En este caso $p_{kq} = 0$ si $k \neq q$, y $p_{kk} = 1 \Rightarrow (P^{ij}B)_{k\ell} = \sum_{q=1}^{n} p_{kq} b_{q\ell} = b_{k\ell}$

En el caso de la fila i-ésima, se tiene que con $k = i$, $p_{iq} = 0$ si $q \neq j$ y $p_{ij} = 1. \Rightarrow (P^{ij}B)_{i\ell} = \sum_{q=1}^{n} p_{iq} b_{q\ell} = b_{j\ell}$

Idem para el caso de la fila j-ésima ($k = j$).

Es decir, las filas i y j quedan intercambiadas y el resto permanecen inmutables.

Para ver que $\det(P^{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, basta ver que si $i = j$ $P^{ij} = Id$ (con determinante trivialmente 1), y en el caso $i \neq j$, basta recordar las propiedades de los determinantes por las cuales intercambiar dos de sus líneas invertía el signo del determinante.

Finalmente, para comprobar que $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$, veamos que $P^{ij} \cdot P^{ij} = Id$. En efecto, pues lo que estamos haciendo es intercambiar 2 filas para luego volver a intercambiarlas (las mismas), deshaciendo el intercambio inicial (formalmente es repetir 2 veces la demostración realizada anteriormente donde trivialmente, aunque con engorrosa notación, se obtiene la matriz Identidad). $\boxtimes$

No exactamente. Se trata de aplicar **una** vez el apartado a) a la matriz P^{ij}

②

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & \ell_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n \qquad ¿E_k = I + \ell_k e_k^T?$$

Para poder argumentar esta igualdad, primero estudiemos el aspecto que tendrá el segundo sumando del segundo miembro de la igualdad, $\ell_k e_k^T$, pues es esencialmente lo que nos dará respuesta a la pregunta. Veamos qué aspecto tienen los elementos de este producto de matrices, i.e, $(\ell_k e_k^T)_{ij}$.
Podemos expresar $(\ell_k e_k^T)_{ij} = \langle \ell_{k i}, e_{k j}^T \rangle$ $i,j \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, consideremos:

No es un prod. escalar: son dos números

- Si $j \neq k \Rightarrow e_{kj}^T = 0 \Rightarrow \langle \ell_{ki}, e_{kj}^T \rangle = 0 \Rightarrow (\ell_k e_k^T)_{ij} = 0$
- Si $j = k$, cabe considerar 2 casuísticas:
  - $i \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow \ell_{ki} = 0 \Rightarrow \langle \ell_{ki}, e_{kj}^T \rangle = 0 \Rightarrow (\ell_k e_k^T)_{ij} = 0$
  - $i \in \{k+1, \dots, n\} \Rightarrow (\ell_k e_k^T)_{ij} = \langle \ell_{ki}, e_{kj}^T \rangle = \ell_{ki} \cdot e_{kj}^T = \ell_{ki} \cdot 1 = \ell_{ki}$

Una vez tenidas en cuenta estas consideraciones, advertimos el aspecto de la matriz $\ell_k e_k^T$:

$$\ell_k e_k^T = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & \ell_{k+1,k} & 0 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & \ell_{n,k} & & & 0 \end{pmatrix},$$

a la que sumando la identidad obtenemos la E_k que buscábamos.

Resta ver que E_k es invertible y $E_k^{-1} = I - \ell_k e_k^T$. Realmente, basándonos en la definición de matriz invertible, bastaría con verificar que de hecho $E_k^{-1} = I - \ell_k e_k^T$ es su inversa, i.e, $(I + \ell_k e_k^T)(I - \ell_k e_k^T) = I$.
No obstante, podemos decir de antemano que la matriz E_k es invertible por ser una matriz triangular cuya diagonal no tiene elementos nulos, y por tanto, $\det(E_k) \neq 0$. Operando:

$(I + \ell_k e_k^T)(I - \ell_k e_k^T) = I - \cancel{\ell_k e_k^T} + \cancel{\ell_k e_k^T} - (\ell_k e_k^T)^2$, por lo que basta verificar que $(\ell_k e_k^T)^2 = (0)$.

Llamamos $M = \ell_k e_k^T$ (Notación). Veamos que $\forall i,j$ se tiene $(M^2)_{ij} = 0$. Considerando casos:

- Si $i \in \{1, \dots, k\} \Rightarrow (M^2)_{ij} = \langle \ell_k e_k^T{}_i, \ell_k e_k^T{}_j \rangle = \langle \bar{0}, \ell_k e_k^T{}_j \rangle = 0$
- Si $i \in \{k+1, \dots, n\}$, cabe considerar 2 casuísticas:
  - Si $j \neq k \Rightarrow (M^2)_{ij} = \langle \ell_k e_k^T{}_i, \ell_k e_k^T{}_j \rangle = \langle \ell_k e_k^T{}_i, \bar{0} \rangle = 0$
  - Si $j = k \Rightarrow (M^2)_{ij} = \langle (\underbrace{0, \dots, 0}_{0 \text{ a } k-1}, \underbrace{\ell_{k+1,k}}_{k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{k+1 \text{ a } n}), (\underbrace{0, \dots, 0}_{0 \text{ a } k-1}, \underbrace{0}_{k}, \underbrace{\ell_{k+1,k}, \dots, \ell_{nk}}_{k+1 \text{ a } n}) \rangle = 0,$

    ya que en virtud del primer vector del producto escalar podemos ver cómo todo será cero (lo que aporte al producto escalar) salvo la k-ésima coordenada o la suma (si se quiere puede verse aún más claro separando el producto escalar en 3 sumatorias, como se sugiere con las anotaciones, aunque la notación sería farragosa). No obstante, esta k-ésima coordenada del primer vector también aportará 0 al producto escalar, ya que la k-ésima coordenada del segundo vector es nula. ☒

③ $\exists r>0$ y $\exists |||\cdot|||$ t.q. $A = rI + B$ con $|||B|||<r \Rightarrow A$ es inversible y $|||A^{-1}||| \leq \frac{|||I|||}{r-|||B|||}$.

Dem/: Partamos de que $|||B|||<r$.

$|||B|||<r \Rightarrow |||\frac{1}{r}\cdot B|||<\frac{1}{r}\cdot r=1$

También sabemos que $A=rI+B \Rightarrow \frac{1}{r}\cdot A = I+\frac{1}{r}B$

Apleando a que hay un Teorema que nos asegura que si $|||B|||<1$, entonces $I+B$ es inversible y $|||(I+B)^{-1}||| \leq \frac{|||I|||}{1-|||B|||}$, podemos aplicárselo a la matriz $\frac{B}{r}$.

Así, obtenemos que $I+\frac{B}{r}=\frac{A}{r}$ es inversible y $|||(I+\frac{B}{r})^{-1}|||=|||(\frac{A}{r})^{-1}||| \overset{④}{\leq} \frac{|||I|||}{1-|||\frac{B}{r}|||}$.

Además, como $\frac{A}{r}$ es inversible, su determinante es $\neq 0$, y para saber si A es inversible, considerando el determinante de $\frac{A}{r}\cdot r$, como sabemos que por propiedades del determinante sigue siendo distinto de cero, tenemos que A también es inversible, que es una de las cosas que queríamos probar.

Por otro lado, sabemos que $\frac{A}{r}$ es inversible, y que su inversa sería $r\cdot A^{-1}$, ya que si multiplicamos ambas obtenemos la Identidad, i.e: $\frac{A}{r}\cdot r\cdot A^{-1}=\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\cdot AA^{-1}=Id$. Entonces;

$|||(\frac{A}{r})^{-1}|||=|||r\cdot A^{-1}|||=r\cdot|||A^{-1}||| \overset{④}{\leq} \frac{|||I|||}{1-\frac{|||B|||}{r}}$. Finalmente, dividiendo en ambos miembros de la desigualdad por r, obtenemos $|||A^{-1}||| \leq \frac{|||I|||}{r-|||B|||}$ $\boxtimes$

Puesto que r>0, no cambia el sentido de la desigualdad