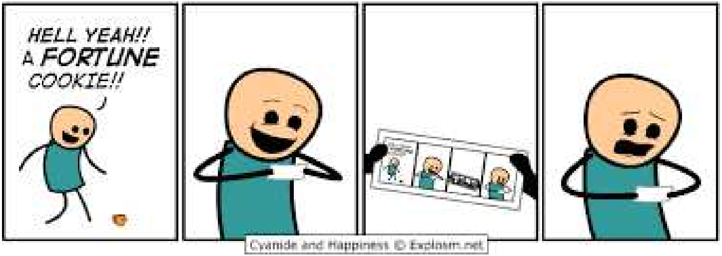
Diseño Recursivo



Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Objetivos

1. Distinguir los tipos de recursión.
2. Realizar un diseño razonado de algoritmos recursivos.
3. Saber cómo añadir parámetros para mejorar el coste de los algoritmos recursivos.
4. Aprender a verificar la corrección de un algoritmo recursivo respecto a su especificación.
5. Aprender a obtener un algoritmo iterativo equivalente a uno recursivo.

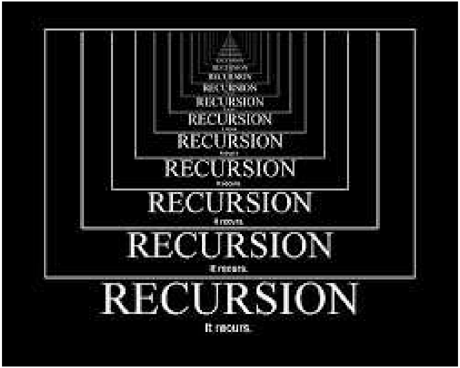
Sumario

- Conceptos básicos.
- Diseño de algoritmos recursivos.
- Verificación de algoritmos recursivos.
- Técnicas de inmersión.
- Transformación de algoritmos recursivos en iterativos.

Bibliografía

- R. Peña. *Diseño de programas. Formalismo y abstracción*. Tercera edición. Prentice Hall, 2005.Capítulo 3
- N. Martí Oliet, C. Segura Díaz y J. A. Verdejo López. *Algoritmos correctos y eficientes: diseño razonado ilustrado con ejercicios*. Garceta Grupo Editorial, 2012. Capítulos 2 y 5

¿Qué es? Permite que un procedimiento o función haga referencia a sí mismo dentro de su definición.



¿Cómo funciona? Resuelve un problema P sobre unos datos D suponiendo que P ya está resuelto para otros datos D', del mismo tipo que D pero más sencillos.

P se resuelve directamente para datos suficientemente sencillos.

¿Utilización? Para repetir cálculos (como la iteración).

Ejemplo: Potencia

Problema: $P \equiv m^n$ Datos: $D \equiv (m,n)$

Método iterativo

$m^n = m * m * \ldots^{(n} * m.$
Nuevo problema:
$P' \equiv$ multiplicar dos enteros.

fun potencia$(m,n : \textit{ent})$ **dev** $p : \textit{ent}$
var $x : \textit{ent}$
  $\langle x,p \rangle := \langle 0,1 \rangle$;
  mientras $(x \neq n)$ **hacer**
    $p := p * m$;
    $x := x + 1$
  fmientras
ffun

Método recursivo

$m^n = m^{n-1} * m.$
Mismo problema para datos más pequeños:
$D' \equiv (m,n-1).$

fun potencia$(m,n : \textit{ent})$ **dev** $p : \textit{ent}$
  casos
    $n = 0 \rightarrow p := 1$
    $\Box\ n > 0 \rightarrow p := m *$ potencia$(m,n-1)$
  fcasos
ffun

- Misma expresividad.
- Mayor nivel de abstracción.
- Programas más compactos.
- Lenguajes de programación funcional.

Esquema general

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun `f-rec`$(\overline{x} : T_1)$ **dev** $\langle\, \overline{y} : T_2\, \rangle$
    casos
        $B_t(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} :=$ `triv`$(\overline{x})$
        $\square\ B_{nt}(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} :=$ `comp(f-rec(s(`$\overline{x}$`)),`$\overline{x}$`)`
    fcasos
ffun
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

Recursión lineal única llamada recursiva.

Recursión final `comp` no realiza acciones (devuelve el primer argumento).

Recursón múltiple más de una llamada recursiva.

Ejemplo: Máximo común divisor

$\{ \; a > 0 \; \wedge \; b > 0 \; \}$

fun `euclides`$(a, b : \textsf{nat})$ **dev** $mcd : \textsf{nat}$

casos

$$
\begin{array}{lllll}
 & a = b & \rightarrow & mcd & := a \\
\Box & a > b & \rightarrow & mcd & := \texttt{euclides}(a - b, b) \\
\Box & a < b & \rightarrow & mcd & := \texttt{euclides}(a, b - a)
\end{array}
$$

fcasos

ffun

$\{ \; mcd = \mathrm{mcd}(a, b) \; \}$

$$
\begin{array}{lcl}
fib_0 & = & 0 \\
fib_1 & = & 1 \\
fib_n & = & fib_{n-1} + fib_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2
\end{array}
$$

{ cierto }
fun fibonacci(n : *nat*) **dev** f : *nat*
casos
$$
\begin{array}{lcl}
\quad n = 0 & \rightarrow & f := 0 \\
\square\ n = 1 & \rightarrow & f := 1 \\
\square\ n \geq 2 & \rightarrow & f := \texttt{fibonacci}(n-1) + \texttt{fibonacci}(n-2)
\end{array}
$$
fcasos
ffun
$\{ f = fib_n \}$

Los pasos a seguir son:

1. Especificación formal del algoritmo.
2. Análisis por casos, descomposición.
3. Composición de resultados.
4. Verificación formal de la corrección.
5. Estudio del coste.

¿Cómo descomponer los datos para calcular la solución a partir de la solución al mismo problema para datos más pequeños?

Análisis de casos: triviales o básicos

Reducir el tamaño de los problemas en los casos recursivos y acercarse al caso trivial.

Clasificación exhaustiva cubrir todos los casos permitidos por la precondición.

Casos excluyentes no ambigüedad.

Potencia

$$\begin{array}{c|l} n = 0 & m^0 = 1 \\ \hline n > 0 & m^n = m * m^{n-1} \end{array}$$

Corrección

Demostrar que para todo posible dato de entrada $\overline{x}$ que cumpla $P(\overline{x})$, se cumple $Q(\overline{x},\texttt{f-rec}(\overline{x}))$.

1. Se cubren todos los casos:

$$P(\overline{x}) \Rightarrow B_t(\overline{x}) \ \vee \ B_{nt}(\overline{x})$$

2. El caso trivial es correcto:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_t(\overline{x}) \Rightarrow Q(\overline{x},\texttt{triv}(\overline{x}))$$

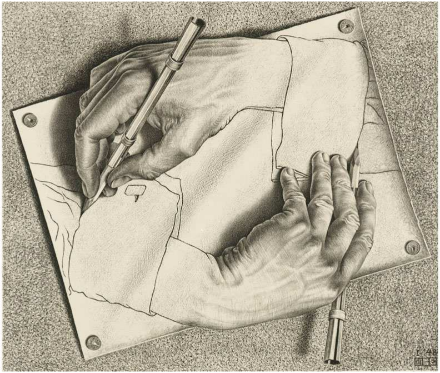
3. La función recursiva es invocada siempre en estados que satisfacen su precondición:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow P(\texttt{s}(\overline{x}))$$

4. El paso de inducción es correcto:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_{nt}(\overline{x}) \ \wedge \ Q(\texttt{s}(\overline{x}),\overline{y'}) \Rightarrow Q(\overline{x},\texttt{comp}(\overline{y'},\overline{x}))$$

Terminación



5. Existe una función de tamaño t tal que

$$P(\overline{x}) \Rightarrow t(\overline{x}) \geq 0$$

6. El valor de t decrece al hacer la llamada recursiva:

$$P(\overline{x}) \ \wedge \ B_{nt}(\overline{x}) \Rightarrow t(\mathbf{s}(\overline{x})) < t(\overline{x})$$

$\{\ n \geq 0\ \}$
fun `potencia`$(m, n : \mathit{ent})$ **dev** $p : \mathit{ent}$
  casos
    $n = 0 \ \rightarrow \ \ p := 1$
  $\square \ n > 0 \ \rightarrow$
      $p := m *$ `potencia`$(m, n-1)$
  fcasos
ffun
$\{\ p = m^n\ \}$

$\overline{x} = \langle\, m, n \,\rangle$

$\overline{y} = p$

$P(m, n) \equiv n \geq 0$

$Q(m, n, p) \equiv p = m^n$

$B_t(m, n) \equiv n = 0$

$B_{nt}(m, n) \equiv n > 0$

$\mathtt{s}(m, n) = \langle\, m, n-1 \,\rangle$

$\mathtt{triv}(m, n) = 1$

$\mathtt{comp}(p', m, n) = m * p'$

$t(m, n) = n$

1. $n \geq 0 \Rightarrow n = 0 \ \vee \ n > 0$
2. $n \geq 0 \wedge n = 0 \Rightarrow 1 = m^n$
3. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 \geq 0$
4. $n \geq 0 \wedge n > 0 \wedge p' = m^{n-1} \Rightarrow m * p' = m^n$
5. $n \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$
6. $n \geq 0 \wedge n > 0 \Rightarrow n - 1 < n$

Ejemplo: máximo común divisor

$\{ a > 0 \wedge b > 0 \}$
fun `euclides`$(a, b : \textit{nat})$ **dev** $mcd : \textit{nat}$
  casos
    $a = b \rightarrow mcd := a$
    $\square\ a > b \rightarrow mcd :=$ `euclides`$(a - b, b)$
    $\square\ a < b \rightarrow mcd :=$ `euclides`$(a, b - a)$
  fcasos
ffun
$\{ mcd = \mathrm{mcd}(a, b) \}$

Propiedades del máximo común divisor:

- $mcd(a, b) = mcd(a - b, b)$ si $a > b$.
- $mcd(a, b) = mcd(a, b - a)$ si $a < b$.
- $mcd(a, b) = a$ si $a = b$

1. $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a = b \vee a > b \vee a < b$
2. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a = b \Rightarrow a = mcd(a, b)$
3. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \Rightarrow a - b > 0 \wedge b > 0$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \Rightarrow a > 0 \wedge b - a > 0$
4. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \wedge mcd' = mcd(a - b, b) \Rightarrow mcd' = mcd(a, b)$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \wedge mcd' = mcd(a, b - a) \Rightarrow mcd' = mcd(a, b)$
5. Función de terminación: $t = a + b$
   $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b \geq 0$
6. $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b \Rightarrow a - b + b < a + b$
   $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a < b \Rightarrow a + b - a < a + b$

División entera

$\{ a \geq 0 \land b > 0 \}$
fun `dividir`$(a, b : ent)$ **dev** $\langle q, r : ent \rangle$
$\{ a = b * q + r \land 0 \leq r < b \}$

Análisis por casos y composición

- $a < b \longrightarrow q = 0$ y $r = a$ caso básico
- $a = b \longrightarrow q = 1$ y $r = 0$ caso básico
- $a > b \land a = b * q + r \Rightarrow a - b = b * (q - 1) + r$ caso recursivo

$a < b$	$q = 0$ y $r = a$
$a \geq b$	$q = q' + 1$ y $r = r'$ donde $\langle q', r' \rangle =$ `dividir`$(a - b, b)$

fun `dividir`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$
  casos
    $a < b \ \rightarrow\ \langle q, r \rangle := \langle 0, a \rangle$
  □ $a \geq b \ \rightarrow\ \langle q, r \rangle :=$ `dividir`$(a - b, b)$;
      $q := q + 1$
  fcasos
ffun

Coste depende de a y de b; tamaño: $n = a \text{ div } b$
$(a - b) \text{ div } b = (a \text{ div } b) - 1$

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + k_2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(n) = \Theta(a \text{ div } b)$$

Ejemplo: División entera

Mayor eficiencia si dividimos el tamaño del problema.

- dividiendo a
- multiplicando b

$\langle q', r' \rangle = \mathtt{dividir}(a, 2b) \Rightarrow a = (2b) * q' + r' \ \wedge\ 0 \leq r' < 2b$

Buscamos $\langle q, r \rangle$ tal que $a = b * q + r \ \wedge\ 0 \leq r < b$:

- $r' < b \longrightarrow \langle q, r \rangle = \langle 2q', r' \rangle$
- $b \leq r' < 2b \Rightarrow 0 \leq r' - b < b$

$$a = (2b) * q' + b + r' - b = b * (2q' + 1) + (r' - b)$$

$a < b$	$q = 0$ y $r = a$	
$a \geq b$	$\langle q', r' \rangle = \mathtt{dividir}(a, 2b)$	
	$r' < b$	$q = 2q'$ y $r = r'$
	$r' \geq b$	$q = 2q' + 1$ y $r = r' - b$

Ejemplo: División entera

fun `dividir-efic`$(a,b : ent)$ **dev** $\langle q,r : ent\rangle$
  casos
    $a < b \;\rightarrow\; \langle q,r\rangle := \langle 0,a\rangle$
    $\square\; a \geq b \;\rightarrow\; \langle q,r\rangle :=$ `dividir-efic`$(a, 2*b)$;
      casos
        $r < b \;\rightarrow\; q := 2*q$
        $\square\; r \geq b \;\rightarrow\; \langle q,r\rangle := \langle 2*q+1, r-b\rangle$
      fcasos
  fcasos
ffun

Tamaño: $n = a \text{ div } b$ $a \text{ div } (2b) = (a \text{ div } b) \text{ div } 2$

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & n = 0 \\ T(n \text{ div } 2) + k_2 & n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(\log n) = \Theta(\log(a \text{ div } b))$$

Ejercicio

Verificar la corrección de los dos algoritmos para la división entera.

Búsqueda binaria

$\{\ ord(V,1,N)\ \wedge\ N \geq 0\ \}$
fun `búsqueda-binaria-rec`$(V[1..N]$ **de** *ent*$, A :$ *ent*$)$ **dev** $\langle\, b :$ *bool*$, p :$ *nat* $\rangle$
$\{(b \rightarrow 1 \leq p \leq N\ \wedge\ V[p] = A)\ \wedge$
$(\neg b \rightarrow 1 \leq p \leq N+1\ \wedge\ V[1..p) \prec A\ \wedge\ A \prec V[p..N])\ \}$

$$ord(V,a,b) \equiv (\forall k : a \leq k < b : V[k] < V[k+1])$$
$$V[a..b) \prec x \equiv (\forall i : a \leq i < b : V[i] < x)$$
$$x \prec V[a..b] \equiv (\forall i : a \leq i \leq b : x < V[i])$$

Generalización: búsqueda en cualquier segmento $V[c..f]$.

$\{\ P \equiv ord(V,c,f)\ \wedge\ 1 \leq c \leq f+1 \leq N+1\ \}$
fun `búsqueda-binaria-rec`$(V[1..N]$ **de** *ent*$, A :$ *ent*$, c, f :$ *nat*$)$ **dev** $\langle\, b :$ *bool*$, p :$ *nat* $\rangle$
$\{\ Q \equiv (b \rightarrow c \leq p \leq f\ \wedge\ V[p] = A)\ \wedge$
$(\neg b \rightarrow c \leq p \leq f+1\ \wedge\ V[c..p) \prec A\ \wedge\ A \prec V[p..f])\ \}$

```
fun búsqueda-binaria-rec(V[1..N] de ent, A : ent, c,f : nat) dev ⟨ b : bool, p : nat ⟩
    si c > f entonces ⟨ b,p ⟩ := ⟨ falso, c ⟩
    si no
        m := (c + f) div 2 ;
        casos
              A < V[m]  →  ⟨ b,p ⟩ := búsqueda-binaria-rec(V, A, c, m − 1)
            □ A = V[m]  →  ⟨ b,p ⟩ := ⟨ cierto, m ⟩
            □ A > V[m]  →  ⟨ b,p ⟩ := búsqueda-binaria-rec(V, A, m + 1, f)
        fcasos
    fsi
ffun
```

Correcto para cualquier m tal que $c \leq m \leq f$.
$m := (c+f) \operatorname{div} 2$ es la más eficiente.

$$T(n) = \begin{cases} k_1 & n = 0 \\ T(n \operatorname{div} 2) + k_2 & n > 0 \end{cases}$$

$$T(n) \in \Theta(\log n) = \Theta(\log N)$$

1. Se cubren todos los casos:
   - $P \Rightarrow c > f \ \vee \ c \leq f$
   - $c \leq f \wedge m = (c+f) \text{ div } 2 \Rightarrow c \leq m \leq f$

     $P \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow A < V[m] \ \vee \ A = V[m] \ \vee \ A > V[m]$
2. Los casos triviales son correctos:
   - $P \wedge (c > f) \Rightarrow (\texttt{falso} \rightarrow c \leq c \leq f \ \wedge \ V[c] = A) \ \wedge$

     $(\neg\texttt{falso} \rightarrow c \leq c \leq f+1 \ \wedge \ V[c..c) \prec A \ \wedge \ A \prec V[c..f])$
   - $P \ \wedge \ (c \leq m \leq f) \wedge A = V[m] \Rightarrow$

     $(\texttt{cierto} \rightarrow c \leq m \leq f \ \wedge \ V[m] = A) \ \wedge$

     $(\neg\texttt{cierto} \rightarrow c \leq m \leq f+1 \ \wedge \ V[c..m) \prec A \ \wedge \ A \prec V[m..f])$
3. La función recursiva es invocada en estados que satisfacen su precondición:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow$

     $ord(V,c,m-1) \wedge (1 \leq c \leq m \leq N+1)$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \Rightarrow$

     $ord(V,m+1,f) \wedge (1 \leq m+1 \leq f+1 \leq N+1)$

Ejemplo: Búsqueda binaria

4. Los pasos de inducción son correctos:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \wedge (A < V[m]) \ \wedge$
     $(b' \rightarrow c \leq p' \leq m-1 \ \wedge \ V[p'] = A) \ \wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq m \ \wedge \ V[c..p') \prec A \ \wedge \ A \prec V[p'..m-1])$
     $\Rightarrow (b' \rightarrow c \leq p' \leq f \ \wedge \ V[p'] = A) \ \wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq f+1 \ \wedge \ V[c..p') \prec A \ \wedge \ A \prec V[p'..f])$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f) \wedge (A > V[m]) \ \wedge$
     $(b' \rightarrow m+1 \leq p' \leq f \ \wedge \ V[p'] = A) \ \wedge$
     $(\neg b' \rightarrow m+1 \leq p' \leq f+1 \ \wedge \ V[m+1..p') \prec A \ \wedge \ A \prec V[p'..f])$
     $\Rightarrow (b' \rightarrow c \leq p' \leq f \ \wedge \ V[p'] = A) \ \wedge$
     $(\neg b' \rightarrow c \leq p' \leq f+1 \ \wedge \ V[c..p') \prec A \ \wedge \ A \prec V[p'..f])$
5. Tamaño: $t = f - c + 1$

$$ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \Rightarrow (f - c + 1 \geq 0)$$

6. El valor de t decrece al hacer las llamadas recursivas:
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f)$
     $\Rightarrow (m - 1 - c + 1 < f - c + 1)$
   - $ord(V,c,f) \wedge (1 \leq c \leq f+1 \leq N+1) \wedge (c \leq m \leq f)$
     $\Rightarrow (f - (m+1) + 1 < f - c + 1)$

Cuando la función especificada `f` no admite una descomposición recursiva, lo intentamos con una función más general: con más parámetros (de entrada) o más resultados, tal que para ciertos valores calcule lo mismo que `f`.

$\{ N \geq 0 \}$
fun $\texttt{suma-vector}(V[0..N)$ **de** *ent*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ s = (\sum i : 0 \leq i < N : V[i]) \}$

Solución: debilitar la postcondición, sustituyendo la constante N por una variable n, que se añade como parámetro.

$\{ N \geq 0 \ \wedge \ 0 \leq n \leq N \}$
fun $\texttt{gsuma-vector}(V[0..N)$ **de** *ent*, n : *nat*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \}$

$$\texttt{gsuma-vector}(V, N) = \texttt{suma-vector}(V)$$

Descomposición recursiva: conociendo la suma hasta $n - 1$ se puede calcular la suma hasta n.

$$s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \overset{n \geq 0}{\equiv} s = (\sum i : 0 \leq i < n - 1 : V[i]) + V[n - 1]$$

$\{\ N \geq 0\ \wedge\ 0 \leq n \leq N\ \}$

fun $\texttt{gsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*$)$ **dev** s : *ent* $\quad \{\Theta(n)\}$

casos

$$
\begin{array}{lll}
\quad n = 0 & \rightarrow & s := 0 \\
\square\ n > 0 & \rightarrow & s := \texttt{gsuma-vector}(V, n-1)\ ; \\
 & & s := s + V[n-1]
\end{array}
$$

fcasos

ffun

$\{\ s = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i])\ \}$

Inmersión de `f` en `g`

$\{ P(\overline{x}) \}$
fun f$(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
$\{ Q(\overline{x},\overline{y}) \}$

y especificamos e implementamos una función g más general.

$\{ P'(\overline{x},\overline{w}) \}$
fun g$(\overline{x},\overline{w})$ **dev** $\langle \overline{y},\overline{z} \rangle$
$\{ Q'(\overline{x},\overline{w},\overline{y},\overline{z}) \}$

tal que, bajo ciertas condiciones $R(\overline{x},\overline{w})$, se cumple que g se comporta como f

$$P'(\overline{x},\overline{w}) \wedge \underbrace{R(\overline{x},\overline{w})}_{\overline{w}=\overline{c}} \wedge Q'(\overline{x},\overline{w},\overline{y},\overline{z}) \Rightarrow Q(\overline{x},\overline{y})$$

f es la función sumergida y g la función inmersora.

La condición R suele consistir en dar un valor inicial $\overline{c}$ a los nuevos parámetros.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

$\{ P \equiv n \geq 0 \}$
fun `raíz-ent`$(n : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$
$\{ Q \equiv r^2 \leq n < (r+1)^2 \}$

Inmersión: sustituir en Q la constante 1 por la variable a.

$Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2$

$Q' \wedge a = 1 \Rightarrow Q$

$\{ P' \equiv n \geq 0 \wedge a \geq 1 \}$
fun `graíz-ent`$(n, a : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$
$\{ Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2 \}$

Llamada inicial: `graíz-ent`$(n, 1) =$ `raíz-ent`(n).

Cuando a es *suficientemente* grande ($n < a^2$), la solución (trivial) será $r = 0$.

Podemos intentar aumentar a, pasando a $2a$.

¿Existe relación entre `graíz-ent`(n, a) y `graíz-ent`$(n, 2a)$?

La llamada recursiva devolverá r' tal que

$$r'^2 \leq n \ \wedge \ n < (r' + 2a)^2$$

Si r' cumpliera además $n < (r' + a)^2$, entonces valdría como resultado.

En caso contrario tenemos

$$(r' + a)^2 \leq n \ \wedge \ n < (r' + a + a)^2$$

con lo que $r' + a$ cumple lo que la postcondición Q' pide a r.

$\{\ P' \equiv n \geq 0\ \wedge\ a \geq 1\ \}$

fun `graíz-ent`$(n, a : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$

casos

$a^2 > n\ \rightarrow\ r := 0$

$\square\ a^2 \leq n\ \rightarrow\ r :=$ `graíz-ent`$(n, 2 * a)$;

casos

$n < (r+a)^2\ \rightarrow$ `nada`

$\square\ n \geq (r+a)^2\ \rightarrow\ r := r + a$

fcasos

fcasos

ffun

$\{\ Q' \equiv r^2 \leq n < (r+a)^2\ \}$

Tamaño: $m = n/a^2$

$$n/(2a)^2 = (n/a^2)/4$$

$$T(m) = \begin{cases} k_1 & m = 0 \\ T(m/4) + k_2 & m > 0 \end{cases}$$

`graíz-ent` tiene coste en $\Theta(\log m)$ y `raíz-ent` tiene coste en $\Theta(\log n)$.

Inmersión final

Cuando la función inmersora es recursiva final sus resultados valen como resultados de la función sumergida:

$$Q' \Rightarrow Q$$

y no depende de los parámetros adicionales $\overline{w}$.

¿Para qué sirven en este caso los parámetros adicionales?

Para acumular parte de los resultados y no tener que realizar el camino ascendente.

$\{ P' \equiv 0 \leq n \leq N \ \wedge \ w = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) \ \}$
fun $\texttt{gfsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
$\{ Q' \equiv s = (\sum i : 0 \leq i < N : V[i]) \ \}$

Como $P' \ \wedge \ n = N \Rightarrow Q'^{w}_{s}$ consideramos el caso trivial $B_t \equiv n = N$, en el cual se devuelve como resultado el acumulador.

Llamada inicial: $n = 0$ y $w = 0$.

Sucesor: $\mathtt{s}(n) = n + 1$.

La precondición se debe cumplir al hacer la llamada recursiva:

$$w = (\sum i : 0 \leq i < n+1 : V[i]) = (\sum i : 0 \leq i < n : V[i]) + V[n]$$

fun $\texttt{gfsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
  casos
    $n = N \ \rightarrow \ s := w$
    $\square \ n < N \ \rightarrow \ s := \texttt{gfsuma-vector}(V, n+1, w + V[n])$
  fcasos
ffun

Inmersión por razones de eficiencia

Añadir más parámetros (de entrada o salida) para que la función sea más eficiente.

Calcular expresiones costosas mediante parámetros acumuladores.

Inmersión de parámetros se necesita una expresión compleja e antes de la llamada recursiva.
: Nuevo parámetro p de entrada, y se añade $p = e$ a la precondición.

Inmersión de resultados se necesita una expresión compleja e después de la llamada recursiva.
: Nuevo parámetro de salida p, y se añade $p = e$ a la postcondición.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

Inmersión de parámetros para calcular $(r+a)^2 = r^2 + a^2 + 2ra$.

$\{\ n \geq 0 \ \wedge\ a \geq 1 \ \wedge\ ac = a^2\ \}$

fun ggraíz-ent$(n, a, ac : \mathit{ent})$ **dev** $r : \mathit{ent}$

casos

$ac > n \ \rightarrow\ r := 0$

$\square\ ac \leq n \ \rightarrow\ r :=$ ggraíz-ent$(n, 2*a, 4*ac)$;

casos

$n < r^2 + ac + 2*r*a \ \rightarrow$ nada

$\square\ n \geq r^2 + ac + 2*r*a \ \rightarrow\ r := r + a$

fcasos

fcasos

ffun

$\{\ r^2 \leq n < (r+a)^2\ \}$

Llamada inicial: ggraíz-ent$(n, 1, 1)$.

Ejemplo: Raíz cuadrada entera

Inmersión de resultados para calcular r^2.

$\{\, n \geq 0 \,\wedge\, a \geq 1 \,\wedge\, ac = a^2 \,\}$
fun $\texttt{gggraíz-ent}(n, a, ac : \mathit{ent})$ **dev** $\langle\, r, rc : \mathit{ent} \,\rangle$
casos
$\quad ac > n \;\rightarrow\; \langle\, r, rc \,\rangle := \langle\, 0, 0 \,\rangle$
$\square\; ac \leq n \;\rightarrow\; \langle\, r, rc \,\rangle := \texttt{gggraíz-ent}(n, 2*a, 4*ac)\,;$
$e := rc + ac + 2*r*a\,; \qquad \{\, e = (r+a)^2 \,\}$
casos
$\quad n < e \;\rightarrow\; \texttt{nada}$
$\square\; n \geq e \;\rightarrow\; \langle\, r, rc \,\rangle := \langle\, r+a, e \,\rangle$
fcasos
fcasos
ffun
$\{\, r^2 \leq n < (r+a)^2 \,\wedge\, rc = r^2 \,\}$

$\texttt{raíz-ent}(n) = \texttt{graíz-ent}(n,1) = \texttt{ggraíz-ent}(n,1,1) = \mathit{prim}(\texttt{gggraíz-ent}(n,1,1))$

Función de Fibonacci eficiente

$\{\ \texttt{cierto}\ \}$
fun $\texttt{gfibonacci}(n : \textit{nat})$ **dev** $\langle f, g : \textit{nat} \rangle$
casos

$$
\begin{array}{rll}
 & n = 0 \ \rightarrow & \langle f, g \rangle := \langle 0, 1 \rangle \\
\square & n > 0 \ \rightarrow & \langle f, g \rangle := \texttt{gfibonacci}(n-1)\,; \\
 & & \langle f, g \rangle := \langle g, f+g \rangle
\end{array}
$$

fcasos
ffun
$\{\ f = \mathit{fib}_n \ \wedge \ g = \mathit{fib}_{n+1}\ \}$

$T(n) \in \Theta(n)$

Transformación de recursivo a iterativo

- El lenguaje disponible no soporta recursión.
- Reducción del coste adicional en *tiempo*
  $\hookrightarrow$ llamada a subprograma y paso de parámetros.
- Reducción del coste adicional en *memoria*
  $\hookrightarrow$ pila de activaciones.

Pero la versión iterativa es menos legible y modificable.

Transformación automatizada (compilador) en algunos casos
$\hookrightarrow$ versión iterativa optimizada en memoria

Transformación de recursivo final a iterativo

$$\begin{tikzcd}
\texttt{fun-rec}(x) \arrow[r, "B_{nt}(x)"] & \texttt{fun-rec}(\texttt{s}(x)) \arrow[r, "B_{nt}(\texttt{s}(x))"] & \cdots \arrow[r, "B_t(x')"] & \texttt{triv}(x') \arrow[d, phantom, "\|"] \\
y & & & y \arrow[lll]
\end{tikzcd}$$

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-rec}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
  casos
    $B_t(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x})$
    □ $B_{nt}(\overline{x}) \ \rightarrow\ \overline{y} := \texttt{f-rec}(\texttt{s}(\overline{x}))$
  fcasos
ffun
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

$INV(\overline{x}',\overline{x}) \equiv P(\overline{x}') \wedge \texttt{f-rec}(\overline{x}) = \texttt{f-rec}(\overline{x}')$
Función de cota: tamaño de $\overline{x}'$.

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x}'$
  $\overline{x}' := \overline{x}$;
  $\{\ INV(\overline{x}',\overline{x})\ \}$
  mientras $B_{nt}(\overline{x}')$ **hacer**
    $\overline{x}' := \texttt{s}(\overline{x}')$
  fmientras ;
  $\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x}')$
ffun
$\{\ Q(\overline{x},\overline{y})\ \}$

Ejercicio

Verificar la versión iterativa.

Ejemplo: Suma de los elementos de un vector

fun $\texttt{gfsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
  casos
    $n = N \;\rightarrow\; s := w$
    $\square\; n < N \;\rightarrow\; s := \texttt{gfsuma-vector}(V, n+1, w+V[n])$
  fcasos
ffun

fun $\texttt{gfsuma-vector-it}(V[0..N]$ **de** *ent*$, n$: *nat*$, w$: *ent*$)$ **dev** s : *ent*
var n' : *nat*$, w'$: *ent*
  $\langle n', w' \rangle := \langle n, w \rangle$;
  mientras $n' < N$ **hacer**
    $\langle n', w' \rangle := \langle n'+1, w'+V[n'] \rangle$
  fmientras ;
  $s := w'$
ffun

fun $\texttt{suma-vector-it}(V[0..N]$ **de** *ent*$)$ **dev** s : *ent*
var n : *nat*
  $\langle n, s \rangle := \langle 0, 0 \rangle$;
  mientras $n < N$ **hacer**
    $\langle n, s \rangle := \langle n+1, s+V[n] \rangle$
  fmientras
ffun

```
fun mcd-rec(a,b : ent) dev mcd : ent
    casos
          a = b → mcd := a
        □ a > b → mcd := mcd-rec(a − b,b)
        □ a < b → mcd := mcd-rec(a,b − a)
    fcasos
ffun
```

```
fun mcd-it(a,b : ent) dev mcd : ent
var a′,b′ : ent
    ⟨a′,b′⟩ := ⟨a,b⟩ ;
    mientras a′ ≠ b′ hacer
        casos
              a′ > b′ → a′ := a′ − b′
            □ a′ < b′ → b′ := b′ − a′
        fcasos
    fmientras ;
    mcd := a′
ffun
```

Transformación de recursivo (lineal) no final a iterativo

$$
\begin{array}{ccccccc}
\texttt{fun-rec}(x_1) & \xrightarrow{B_{nt}(x_1)} & \texttt{fun-rec}(x_2) & \xrightarrow{B_{nt}(x_2)} & \cdots & \xrightarrow{B_t(x_k)} & \texttt{triv}(x_k) \\
 & & & & & & \| \\
\texttt{comp}(y_2, x_1) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \underbrace{\texttt{comp}(y_k, \overbrace{\texttt{s}^{-1}(x_k)}^{x_{k-1}})}_{y_{k-1}} & \longleftarrow & y_k
\end{array}
$$

$\{\ P(\overline{x})\ \}$
fun $\texttt{f-rec}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
  casos
    $B_t(\overline{x}) \rightarrow \overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x})$
    $\Box\ B_{nt}(\overline{x}) \rightarrow$
      $\overline{y} := \texttt{comp}(\texttt{f-rec}(\texttt{s}(\overline{x})), \overline{x})$
  fcasos
ffun
$\{\ Q(\overline{x}, \overline{y})\ \}$

fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x}'$
  $\overline{x}' := \overline{x}$;
  $\{\ INV_1(\overline{x}', \overline{x})\ \}$
  mientras $B_{nt}(\overline{x}')$ **hacer**
    $\overline{x}' := \texttt{s}(\overline{x}')$
  fmientras ;
  $\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x}')$;
  $\{\ INV_2(\overline{x}', \overline{x}, \overline{y})\ \}$
  mientras $\overline{x}' \neq \overline{x}$ **hacer**
    $\overline{x}' := \texttt{s}^{-1}(\overline{x}')$;
    $\overline{y} := \texttt{comp}(\overline{y}, \overline{x}')$
  fmientras
ffun

$$INV_1(\overline{x}',\overline{x}) \equiv P(\overline{x}') \wedge suc(\overline{x}',\overline{x})$$
$$suc(\overline{x}',\overline{x}) \equiv (\exists i : 0 \leq i : \overline{x}' = \mathtt{s}^i(\overline{x}) \wedge (\forall j : 0 \leq j < i : B_{nt}(\mathtt{s}^j(\overline{x})) \wedge P(\mathtt{s}^j(\overline{x}))))$$
$$INV_2(\overline{x}',\overline{x},\overline{y}) \equiv INV_1(\overline{x}',\overline{x}) \wedge Q(\overline{x}',\overline{y})$$

Ejercicio

Verificar la versión iterativa.

fun $\texttt{gsuma-vector}(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*$)$ **dev** s : *ent*

  casos

    $n = 0 \;\rightarrow\; s := 0$

    $\Box\; n > 0 \;\rightarrow\; s := \texttt{gsuma-vector}(V, n-1)\,;$

      $s := s + V[n-1]$

  fcasos

ffun

fun $\texttt{gsuma-vector-it}(V[0..N]$ **de** *ent*, n : *nat*$)$ **dev** s : *ent*

var n' : *nat*

  $n' := n\,;$

  mientras $n' > 0$ **hacer**

    $n' := n' - 1$

  fmientras ;

  (equivalente a $n' := 0$)

  $s := 0\,;$

  mientras $n' \neq n$ **hacer**

    $n' := n' + 1\,;$

    $s := s + V[n'-1]$

  fmientras

ffun

Ejemplo: División entera

fun `dividir-rec`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$

  casos

$$
\begin{array}{rll}
 & a < b \;\rightarrow & \langle q, r \rangle := \langle 0, a \rangle \\
\square & a \geq b \;\rightarrow & \langle q, r \rangle := \texttt{dividir-rec}(a - b, b) \\
 & & \quad q := q + 1
\end{array}
$$

  fcasos

ffun

fun `dividir-it`$(a, b : \mathit{ent})$ **dev** $\langle q, r : \mathit{ent} \rangle$

var $a', b' : \mathit{ent}$

  $a' := a\,;\; b' := b\,;$

  mientras $a' \geq b'$ **hacer**

    $a' := a' - b'$

  fmientras ;

  $\langle q, r \rangle := \langle 0, a' \rangle\,;$

  mientras $a' \neq a$ **hacer**

    $a' := a' + b'\,;\; q := q + 1$

  fmientras

ffun

¿Si no existe la función inversa del sucesor, s^{-1}?

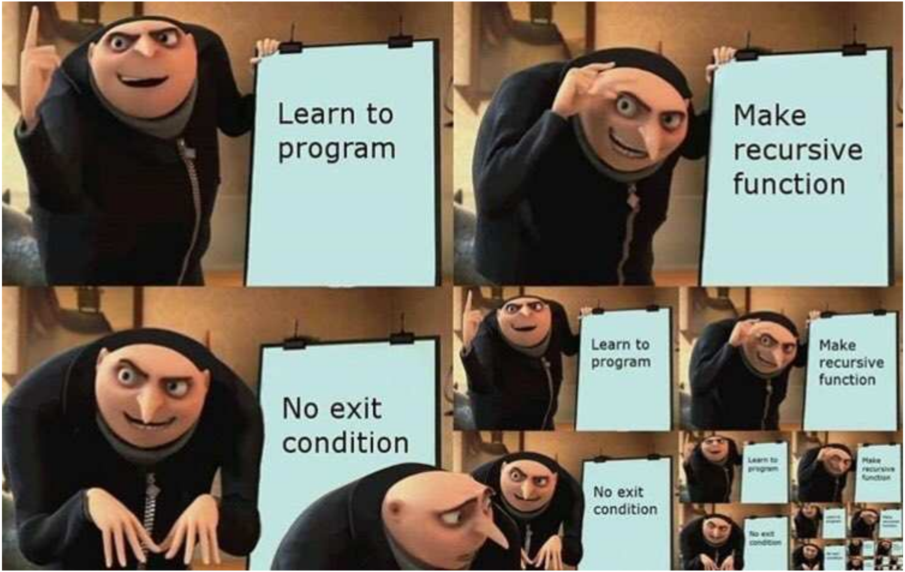
s	s^{-1}
$+1$	-1
-1	$+1$
$*2$	div 2
div 2	no hay

Resolvemos este problema utilizando una pila:

fun $\texttt{f-it}(\overline{x})$ **dev** $\overline{y}$
var $\overline{x'}, p$: *pila*
$\langle \overline{x'}, p \rangle := \langle \overline{x}, \texttt{pila-vacía}() \rangle$;
mientras $B_{nt}(\overline{x'})$ **hacer**
$\langle \overline{x'}, p \rangle := \langle \texttt{s}(\overline{x'}), \texttt{apilar}(p, \overline{x'}) \rangle$
fmientras ;
$\overline{y} := \texttt{triv}(\overline{x'})$;
mientras $\neg\texttt{es-pila-vacía}(p)$ **hacer**
$\langle \overline{x'}, p \rangle := \langle \texttt{cima}(p), \texttt{desapilar}(p) \rangle$;
$\overline{y} := \texttt{comp}(\overline{y}, \overline{x'})$
fmientras
ffun

fun $\texttt{suma-dígitos}(n : \mathit{nat})$ **dev** $s : \mathit{nat}$
  casos
    $n < 10 \ \rightarrow \ s := n$
    □ $n \geq 10 \ \rightarrow \ s := \texttt{suma-dígitos}(n \text{ div } 10) + (n \text{ mód } 10)$
  fcasos
ffun

fun $\texttt{suma-dígitos-it}(n : \mathit{nat})$ **dev** $s : \mathit{nat}$
var $n' : \mathit{nat}, p : \mathit{pila[nat]}$
  $n' := n$;
  $p := \texttt{pila-vacía}()$;
  mientras $n' \geq 10$ **hacer**
    $\texttt{apilar}(p, n')$;
    $n' := n' \text{ div } 10$
  fmientras ;
  $s := n'$
  mientras $\neg\texttt{es-pila-vacía?}(p)$ **hacer**
    $n' := \texttt{cima}(p)$; $\texttt{desapilar}(p)$;
    $s := s + (n' \text{ mód } 10)$
  fmientras
ffun


Learn to program
Make recursive function
No exit condition
Learn to program
Make recursive function
No exit condition
Learn to program
Make recursive function
No exit condition