ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 8

1. Calcula:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2+\cos x}dx$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-2x+2}dx$;

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx \quad (a,b>0)$; e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}dx$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{x^2-1}dx$;

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}dx$; h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)}dx$; i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos x + x\operatorname{sen} x}{x^2+a^2}dx$;

j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/3}}{1+x^2}dx$; k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x}}dx$; l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}dx$;

m) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2}dx$; n) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx$; ñ) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log^2 x}{(1+x)^2}dx$;

o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}dx$; p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^{2x}+e^{2a})(x^2+\pi^2)}dx$.

2. Calcula la suma de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}, \quad (a\in(0,1))$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}, \quad (a>0)$.

3. Sea $c = e^{i\pi/4}$. Para cada $R>0$ sea Γ_R el borde del paralelogramo de vértices los puntos $\pm\frac{1}{2}\pm Rc$ recorrido en sentido directo.

a) Calcula $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\pi z^2}}{\operatorname{sen}\pi z}\,dz$

b) Deduce de a) el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

4. Para cada $R>0$ sea γ_R el borde del sector del círculo de centro 0 y radio R que está limitado por los segmentos $[0,R]$ y $[0,Re^{i\pi/4}]$, recorrido en sentido directo.

a) Calcula $\displaystyle\int_{\gamma_R} e^{-z^2}dz$

b) Deduce de a) el valor de $\displaystyle\int_0^{\infty}\cos x^2\,dx$ y $\displaystyle\int_0^{\infty}\operatorname{sen} x^2\,dx$.

5. Para cada $R>0$ sea Γ_R el borde del rectángulo de vértices π, $-\pi$, $\pi+iR$ y $-\pi+iR$ recorrido en sentido directo. Utiliza la integral $\displaystyle\int_{\Gamma_R}\frac{z}{1-e^{-iz}}dz$ para calcular

$$\int_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen} x}{2-2\cos x}dx.$$

6. Para cada $R>0$ sea Γ_R el borde del rectángulo de vértices R, $-R$, $R+2\pi i$ y $-R+2\pi i$ recorrido en sentido directo. Calcula

$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz, \qquad (0<a<1)$$

y deduce el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx.$$