

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Análisis de Variable Real. Curso 18–19.

Los números reales y la propiedad de supremo. Hoja 3

46 Probar que si  $A \subset \mathbb{R}$  es acotado superiormente, entonces  $\alpha = \sup(A)$  se caracteriza por que

i)  $\alpha$  es una cota superior de  $A$

ii) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in A$  tal que  $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$ .

Enunciar y demostrar una propiedad análoga para el ínfimo de un conjunto.

47 Encuentra, en caso de que existan, el ínfimo y el supremo de los siguientes conjuntos:

- i)  $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 5 < 0\}$       ii)  $B = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \geq x^2\}$       iii)  $C = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/x\}$   
iv)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 5 < 0\}$       v)  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ,      vi)  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ ,  
vii)  $\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0\}$ ,      viii)  $\{x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 1 < 0\}$ ,      x)  $\{x \in \mathbb{R}, x < 0, x^2 + x + 1 \geq 0\}$ ,  
xi)  $\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ .

48 Sea  $S \subset \mathbb{R}$  un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Probar que  $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$

49 Supongamos que  $E \subset F \subset \mathbb{R}$  y  $E \neq \emptyset$ .

i) Probar que si  $F$  es acotado superiormente, entonces  $E$  también lo es y que  $\sup(E) \leq \sup(F)$ .

ii) Probar que si  $F$  es acotado inferiormente, entonces  $E$  también lo es y que  $\inf(F) \leq \inf(E)$ .

50 Sea  $S \subset \mathbb{R}$  y supongamos que  $s^* = \sup S \in S$ . Si  $u \notin S$ , entonces  $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$

51 Sean  $A, B \subset \mathbb{R}$  y no vacíos y acotados superiormente. Probar que

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$$

$$\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$$

y con un ejemplo muestra que en general no se da “ $=$ ”. Demostrar algo semejante para el ínfimo.

52 i) Probar que todo conjunto finito de  $\mathbb{R}$  contiene a su supremo y a su ínfimo.

ii) Probar que si una cota superior pertenece al conjunto entonces esa cota es el supremo. Demostrar algo semejante para el ínfimo.

**Notación:** Cuando el supremo (o el ínfimo) de un conjunto, pertenece al conjunto, se llama **máximo** del conjunto (respectivamente, **mínimo**).

53 Demostrar que si  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  entonces el ínfimo de este conjunto es 0 y deducir que si  $|a - b| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ , entonces  $a = b$ .

54 i) Probar que  $\inf\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = 0$  y que por tanto para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon).$$

**Indicación:** Usar que  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

ii) Probar lo mismo para  $\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\}$  con  $x > 0$ .

iii) Si  $x < 0$ , probar que  $\sup\{\frac{x}{n}, n \in \mathbb{N}\} = 0$  y que por tanto para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{x}{n} \in (-\varepsilon, 0).$$

iv) Probar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

**55** Demostrar que si  $a, x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ , verifican

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $x = a$ .

**56** Probar que  $\sup\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$

**57** Si  $S = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ , calcular  $\inf S$  y  $\sup S$ .

**58** Como consecuencia de la propiedad Arquimediana de  $\mathbb{R}$  probar que

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$$

(unión disjunta dos a dos) y si  $x > 0$

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [nx, (n+1)x) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (nx, (n+1)x]$$

(unión disjunta dos a dos).

**59** Sean  $x$  e  $y$  números reales tales que  $x > 1$ ,  $y > 0$ .

i) Demostrar que existe un número  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$y < x^n$$

**Indicación:** Para  $y < 1$  o  $y = 1$  es fácil. Si  $y > 1$  argumentar por reducción al absurdo. En este caso utiliza que si  $0 < \varepsilon < x - 1$  entonces para todo  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ .

ii) Concluye la **Propiedad Arquimediana del producto**: existe un único  $p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$x^{p-1} \leq y < x^p \quad (\text{ó } x^{p-1} < y \leq x^p)$$

**Indicación:** Para  $y = 1$  es fácil. Para  $y > 1$ , usando i), considera el conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}, y < x^n\}$  y usa el Buen Orden de  $\mathbb{N}$ . Para  $0 < y < 1$  redúcelo al caso anterior.

iii) Concluye que

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [x^{p-1}, x^p)$$

(unión disjunta dos a dos).

Modifica ligeramente los argumentos anteriores para probar que

$$\mathbb{R}^+ = (0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (x^{p-1}, x^p]$$

(unión disjunta dos a dos).

**60** Probar que si  $y > 0$  entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/2^n < y$ .

**61** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  un conjunto acotado y no vacío.

(a) Sea  $a > 0$  y sea  $aS = \{as : s \in S\}$ . Probar que

$$\inf\{aS\} = a \inf S, \quad \sup\{aS\} = a \sup S$$

(b) Sea  $b < 0$  y sea  $bS = \{bs : s \in S\}$ . Probar que

$$\inf\{bS\} = b \sup S, \quad \sup\{bS\} = b \inf S$$

**62** Sea  $S$  un subconjunto de los números reales no negativos que es acotado superiormente y sea  $T = \{x^2 : x \in S\}$ . Probar que si  $u = \sup S$  entonces  $u^2 = \sup T$ . Dar un ejemplo que prueba que la conclusión es falsa si se permite que  $S$  contenga números reales negativos.

**63** Si  $x \in \mathbb{R}$ , probar que para todo  $\varepsilon > 0$  existen  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$  tales que

$$r_1 \in (x - \varepsilon, x), \quad r_2 \in (x, x + \varepsilon).$$

Concluir que de hecho hay infinitos números como  $r_1$  y  $r_2$ . Hacer lo mismo para números irracionales.

**64** Sea  $n \in \mathbb{N}$ .

i) Si  $n$  es par y  $a > 0$  probar que entonces  $a$  tiene exactamente dos raíces  $n$ -ésimas reales, una opuesta de la otra, que representamos por  $\pm \sqrt[n]{a}$ . Si además  $0 \leq a_1 < a_2$  entonces  $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$ . Si  $a < 0$  entonces no tiene raíces  $n$ -ésimas reales.

ii) Si  $n$  es impar y  $a \in \mathbb{R}$  probar que  $a$  tiene exactamente una raíz  $n$ -ésima real, con el mismo signo que  $a$ . Si además  $a_1 < a_2$  entonces  $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$ .

iii) Probar que si  $a > 1$  entonces  $\inf\{\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}\} = 1$  y si  $a < 1$  entonces  $\sup\{\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}\} = 1$ .

iv) Probar que si  $a, b > 0$ ,  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ .

### 65 Exponentes enteros y racionales

i) Si  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , y  $m \in \mathbb{N}$  definimos

$$a^m = \overbrace{a \cdots a}^m, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

Probar que  $a^n a^m = a^{n+m}$  para todos  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $(a^n)^m = a^{nm}$  para todos  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $(ab)^m = a^m b^m$  para todos  $a, b \neq 0$  y  $m \in \mathbb{Z}$ .

Probar que si  $a > 1$  y  $n < m$  entonces  $a^n < a^m$  mientras que si  $0 < a < 1$  y  $n < m$  entonces  $a^n > a^m$  para todos  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

ii) Si  $a > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ , definimos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$  y que la definición de  $a^{\frac{m}{n}}$  es consistente para todas las fracciones que representan al mismo número racional y por tanto  $a^r$  está bien definido para  $r \in \mathbb{Q}$ .

Probar que  $a^r a^s = a^{r+s}$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$  y  $a^0 = 1$ . Probar que  $(a^r)^s = a^{rs}$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$ .

Probar que  $(ab)^r = a^r b^r$  para todos  $a, b > 0$  y  $r \in \mathbb{Q}$ .

iii) Si  $a > 1$  y  $r < s$  entonces  $a^r < a^s$  mientras que si  $0 < a < 1$  y  $r < s$  entonces  $a^r > a^s$  para todos  $r, s \in \mathbb{Q}$ .

iv) Demuestra que si  $0 < a < b$  y  $r \in \mathbb{Q}$  y  $r > 0$  entonces  $a^r < b^r$  mientras que si  $r < 0$  entonces  $a^r > b^r$ .

### 66 La exponencial real

i) Probar que si  $x \in \mathbb{R}$  y llamamos  $I_x = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$  y  $S_x = \{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$  entonces estos conjuntos son no vacíos y

$$x = \sup I_x = \inf S_x.$$

ii) Concluir que si  $a > 1$  y definimos

$$a^x = \sup\{a^r, r \in I_x\}$$

entonces  $a^x = \inf\{a^r, r \in S_x\}$ . Probar que se tiene  $a^x a^y = a^{x+y}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a^0 = 1$  y si  $x < y$  entonces  $a^x < a^y$ .

iii) Si  $0 < a < 1$  definimos

$$a^x = \inf\{a^r, r \in I_x\}.$$

Prueba que  $a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$  y  $a^{-1} > 1$ . Obtén con esto que  $a^x a^y = a^{x+y}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a^0 = 1$  y si  $x < y$  entonces  $a^x > a^y$ .

Si  $a = 1$  definimos  $1^x = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

iv) Probar que si  $a > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$  entonces

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}.$$

v) Probar que  $(a^x)^y = a^{xy}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Indicación:** Prueba primero el caso  $x, y > 0$  y los demás redúcelos a este.

vi) Probar que  $(ab)^x = a^x b^x$  para todo  $a, b > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

**Indicación:** Prueba primero el caso  $a, b > 1$ . Reduce el caso  $0 < a, b < 1$  a este. Para el caso  $a > 1$  y  $0 < b < 1$  distingue los casos  $ab > 1$  y  $ab < 1$ .

vii) Probar que si  $0 < a < b$  y  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  entonces  $a^x < b^x$  mientras que si  $x < 0$  entonces  $a^x > b^x$ .

**67** Probar que si  $A, B \subset \mathbb{R}$  son no vacíos y tales que  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $a < b$  para todos  $a \in A$ ,  $b \in B$ , entonces existe un único número real  $\gamma$  tal que  $a \leq \gamma \leq b$  para todos  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

**68** Determinar los conjuntos

i)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ ,    ii)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$     iii)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}]$ ,    iv)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}]$ ,  
v)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ ,    vi)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-n, n)$

**69** Sea  $\{(a_n, b_n), n \in \mathbb{N}\}$  una familia de intervalos en  $\mathbb{R}$  y sea  $a = \inf_n a_n$ ,  $b = \sup_n b_n$ .

i) Demostrar que  $\bigcup_n (a_n, b_n) \subset (a, b)$

ii) Demostrar que si  $(a_{n+1}, b_{n+1}) \supset (a_n, b_n)$  entonces  $\bigcup_n (a_n, b_n) = (a, b)$

iii) Probar con un ejemplo que si  $\alpha = \sup_n a_n$ ,  $\beta = \inf_n b_n$ , en general no es cierto que  $\bigcap_n (a_n, b_n) = (\alpha, \beta)$  aunque  $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$ .