I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.................. Nº............

Apellidos Nombre

Calificación

4.- Estudia la convergencia uniforme de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{z^n}{1+z^n}$ Vamos a probar que la serie converge uniformemente en los conjuntos $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq R < 1 \}$ y $\Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \geq R > 1 \}$

Si $z \in \Omega_1$

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{n^2} \cdot \frac{z^n}{1+z^n} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|^n}{|1+z^n|}$$

Como $|z| < 1 \Rightarrow |z|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

En particular dado $\varepsilon = 1/2$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ $|z^n| < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |1+z^n| = |z^n - (-1)| \geq |-1| - |z^n| = 1 - |z|^n > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|-1| \leq |z^n| + |(-1) - z^n|$$

$$\| $$

$$|-1-z^n+z^n|$$

Por tanto para $n \geq n_0$

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|^n}{|1+z^n|} < \frac{2}{n^2} = M_n$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ converge, por el criterio M de Weerstrass,

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en Ω_1.

Si $z \in \Omega_2$

Como $|z| > 1 \Rightarrow |z|^n = |z^n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

En particular si $M = 2$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$ $|z^n| > 2$

Si $n \geq n_1$

$$\Rightarrow |1 + z^n| = |z^n - (-1)| \geq |z^n| - |-1| = |z^n| - 1 > 2 - 1 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$|z^n| \leq |z^n - (-1)| + |-1|$$

$\Rightarrow$ Para $n \geq n_1$

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^2} \frac{|z^n|}{|z^n + 1|} = \frac{|z^n + 1 - 1|}{n^2 |z^n + 1|} \leq \frac{|z^n + 1|}{n^2 |z^n + 1|} + \frac{|-1|}{|z^n + 1| \cdot n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{|z^n + 1|} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n^2} = M_n$$

Como la serie converge, por el criterio M de Weerstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en Ω_2.

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.......... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$

Si $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R < 1\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n^2}}_{= 0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 z^n}}_{= \infty} = \infty$$

Por lo tanto la serie no converge puntualmente

Si $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R > 1\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n^2}}_{= \infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 z^n}}_{= 0} = \infty$$

Si $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$\left|\frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\right| = \frac{1}{n^2} \cdot \left|z^n + \frac{1}{z^n}\right| \leq \frac{1}{n^2} \cdot \left(|z|^n + \frac{1}{|z|^n}\right) = \frac{2}{n^2}.$$

Por el Criterio M de Weierstrass la serie converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y no converge en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (ni siquiera puntualmente)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{2^n+3^n}$

Sea $A=\{z\in\mathbb{C} \mid |e^{-z}|\leq R<3\}=\{z=x+iy\in\mathbb{C} \mid e^{-x}\leq R<3\}=$

$=\{z=x+iy\in\mathbb{C} \mid x\geq Ln\left(\frac{1}{R}\right)>Ln\left(\frac{1}{3}\right)\}=\{z=x+iy\in\mathbb{C} \mid x\geq K'>Ln\left(\frac{1}{3}\right)$

Si $z\in A$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{-nz}}{2^n+3^n}\right|=\frac{|e^{-nz}|}{2^n+3^n}\leq\frac{|e^{-nz}|}{3^n}=\left(\frac{|e^{-z}|}{3}\right)^n\leq\left(\frac{R}{3}\right)^n$$

Por el Criterio M de Weierstrass $\sum \frac{e^{-nz}}{2^n+3^n}$ converge uniformemente en A