Investigación Operativa

Hoja 6

Problema 1

Resolver, mediante *Ramificación y Acotación*, el problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.\,a.: \quad & 2x_1 + 6x_2 \le 15 \\ & 28x_1 + 8x_2 \le 77 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \ \text{ y enteros} \end{aligned}$$

La solución óptima de la relajación lineal continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	7/38	–1/76	7/4
x_1	1	0	–1/19	3/76	9/4
	0	0	–6/19	–1/76	Z–(23/4)

OBSERVACIÓN: La infactibilidad de algunos subproblemas, se puede deducir de la formulación inicial.

Problema 2

Resolver, mediante *Ramificación y Acotación*, el problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \\ s.a. \quad & x_1 + x_4 - 2x_5 + x_6 = \frac{3}{2} \\ & x_2 + 2x_4 + x_5 - x_6 = \frac{5}{2} \\ & x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 4 \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, 6 \\ & x_1 \text{ y } x_2 \ \text{ enteros} \end{aligned}$$

La solución óptima de la relajación lineal continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	1	−2	1	3/2
x_2	0	1	0	2	1	−1	5/2
x_3	0	0	1	−1	1	1	4
	0	0	0	3	4	5	Z–0

$$max\ \ x_1 + 2x_2$$

$$s.a.:\ \ 2x_1 + 6x_2 \leq 15$$

$$28x_1 + 8x_2 \leq 77$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

$$x_1\ \ y\ \ x_2\ \ \text{enteros}$$

La solución óptima, del problema de programación lineal correspondiente a la relajación continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	7/38	–1/76	7/4
x_1	1	0	–1/19	3/76	9/4
	0	0	–6/19	–1/76	$Z-(23/4)$

$S_1 = \{x \in S \mid x_2 \leq 1\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	7/38	–1/76	0	7/4
x_1	1	0	–1/19	3/76	0	9/4
x_5	0	0	–7/38	1/76	1	–3/4
	0	0	–6/19	–1/76	0	$Z-(23/4)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	0	1	1
x_1	1	0	0	1/28	–2/7	69/28
x_3	0	0	1	–1/14	–38/7	57/14
	0	0	0	–1/28	–12/7	$Z-(125/28)$

$S_2 = \{x \in S \mid x_2 \geq 2\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	7/38	–1/76	0	7/4
x_1	1	0	–1/19	3/76	0	9/4
x_5	0	0	7/38	–1/76	1	–1/4
	0	0	–6/19	–1/76	0	$Z-(23/4)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	0	–1	2
x_1	1	0	1/2	0	3	3/2
x_4	0	0	–14	1	–76	19
	0	0	–1/2	0	–1	$Z-(11/2)$

$S_{21} = \{x \in S \mid x_2 \geq 2,\ x_1 \leq 1\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	0	–1	0	2
x_1	1	0	1/2	0	3	0	3/2
x_4	0	0	–14	1	–76	0	19
x_6	0	0	–1/2	0	–3	1	–1/2
	0	0	–1/2	0	–1	0	$Z-(11/2)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	1/6	0	0	–1/3	13/6
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	–4/3	1	0	–76/3	95/3
x_5	0	0	1/6	0	1	–1/3	1/6
	0	0	–1/3	0	0	–1/3	$Z-(16/3)$

$S_{22} = \{x \in S \mid x_2 \geq 2,\ x_1 \geq 2\}$

$max\{x_1 + 2x_2 :\ x \in S_{22}\}$ INFACTIBLE

$S_{211} = \{x \in S \mid x_2 \geq 2,\ x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 2\} = \{x \in S \mid x_1 \leq 1,\ x_2 = 2\}$

Se considera el problema $max\{x_1 + 2x_2 :\ x \in S_{211}\}$. Solución óptima:

$$x_1^{211} = 1,\ x_2^{211} = 2,\ z^{211} = 5.$$

Se establece: $\underline{z} = z^{211} = 5,\ \overline{x} = x^{211}$

El nodo correspondiente a P_1, se poda por acotación ($z^1 < \underline{z}$).

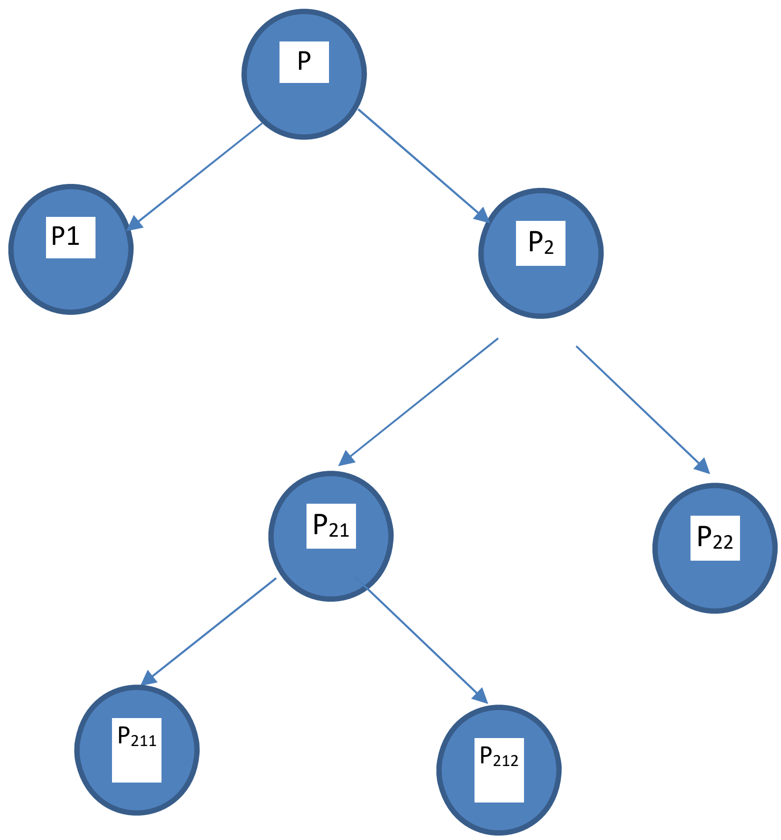
$S_{212} = \{x \in S \mid x_2 \geq 2,\ x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 3\} = \{x \in S \mid x_1 \leq 1,\ x_2 \geq 3\}$

$max\{x_1 + 2x_2 :\ x \in S_{212}\}$ INFACTIBLE

Solución óptima:

$$\boldsymbol{x_1^* = 1,\ x_2^* = 2,\ z^* = 5.}$$

Esquema de Ramificación



$$\min \quad 3x_4 + 4x_5 + 5x_6$$

$$s.a.: \quad x_1 \qquad + x_4 - 2x_5 + x_6 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 \quad + 2x_4 + x_5 - x_6 = \frac{5}{2}$$

$$x_3 \ - x_4 + x_5 + x_6 = 4$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6$$

$$x_1 \ y \ x_2 \ \ \text{enteros}$$

La solución óptima, del problema de programación lineal correspondiente a la relajación continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	1	–2	1	3/2
x_2	0	1	0	2	1	–1	5/2
x_3	0	0	1	–1	1	1	4
	0	0	0	3	4	5	Z –0

$S_1 = \{x \in S \mid x_2 \leq 2\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1	–2	1	0	3/2
x_2	0	1	0	2	1	-1	0	5/2
x_3	0	0	1	–1	1	1	0	4
x_7	0	0	0	–2	–1	1	1	–1/2
	0	0	0	3	4	5	0	Z – 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	0	–5/2	3/2	1/2	5/4
x_2	0	1	0	0	0	0	1	2
x_3	0	0	1	0	3/2	1/2	–1/2	17/4
x_4	0	0	0	1	1/2	–1/2	–1/2	1/4
	0	0	0	0	5/2	13/2	3/2	Z– (3/4)

$S_2 = \{x \in S \mid x_2 \geq 3\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	1	−2	1	0	3/2
x_2	0	1	0	2	1	−1	0	5/2
x_3	0	0	1	−1	1	1	0	4
x_7	0	0	0	2	1	−1	1	−1/2
	0	0	0	3	4	5	0	$Z - 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	3	−1	0	1	1
x_2	0	1	0	0	0	0	−1	3
x_3	0	0	1	1	2	0	1	7/2
x_7	0	0	0	−2	−1	1	−1	1/2
	0	0	0	13	9	0	5	Z– (5/2)

$S_{11} = \{x \in S \mid x_2 \leq 2,\ x_1 \leq 1\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	−5/2	3/2	1/2	0	5/4
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	2
x_3	0	0	1	0	3/2	1/2	−1/2	0	17/4
x_4	0	0	0	1	1/2	−1/2	−1/2	0	1/4
x_8	0	0	0	0	5/2	−3/2	−1/2	1	−1/4
	0	0	0	0	5/2	13/2	3/2	0	Z– (3/4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	0	5	–3	0	2	3/2
x_3	0	0	1	0	–1	2	0	–1	9/2
x_4	0	0	0	1	–2	1	0	–1	1/2
x_7	0	0	0	0	–5	3	1	–2	1/2
	0	0	0	0	10	2	0	3	Z– (3/2)

$S_{12} = \{x \in S \mid x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 2\}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	–5/2	3/2	1/2	0	5/4
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	2
x_3	0	0	1	0	3/2	1/2	–1/2	0	17/4
x_4	0	0	0	1	1/2	–1/2	–1/2	0	1/4
x_8	0	0	0	0	–5/2	3/2	1/2	1	-3/4
	0	0	0	0	5/2	13/2	3/2	0	Z– (3/4)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	0	0	0	0	–1	2
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	2
x_3	0	0	1	0	0	7/5	–1/5	3/5	19/5
x_4	0	0	0	1	0	–1/5	–2/5	1/5	1/10
x_5	0	0	0	0	1	–3/5	–1/5	–2/5	3/10
	0	0	0	0	0	8	2	1	Z– (3/2)

Solución óptima: $x_1^*=2$, $x_2^*=2$, $x_3^*=\frac{19}{5}$, $x_4^*=\frac{1}{10}$, $x_5^*=\frac{3}{10}$, $z^*=\frac{3}{2}$

Esquema de Ramificación