$$\Longrightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} \left(z - (\pi/2 + k\pi)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} \left(z - (\frac{\pi}{2} + k\pi)\right)^n.$$

Por la proposición 14.2.2. la multiplicidad del cero en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ es 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto para $k \in \mathbb{Z}$ $\exists h_k$ función entera que no se anula en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tal que

$$g(z) = \cos z = (z - (\tfrac{\pi}{2} + k\pi)) \cdot h_k(z).$$

Por tanto $\cos^2 z = (z - (\frac{\pi}{2} + k\pi))^2 \cdot h_k^2(z)$

$$f(z) = z^3 \cdot \cos^2 z = \left(z - (\tfrac{\pi}{2} + k\pi)\right)^2 z^3 h_k^2(z) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- Como $\cos^2 0 = 1$ y $\cos^2 z$ en entera entonces 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 3.
- Como $(\frac{\pi}{2} + k\pi)^3 \cdot h_k(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2 \neq 0$ $\forall k$ y $z^3 h_k^2(z)$ es entera $\forall k \in \mathbb{Z}$ entonces $\frac{\pi}{2} + k\pi$ es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{c)}$ $f(z) = (1 - e^{iz}) \operatorname{sen} z$

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen} z = 0 \Longleftrightarrow z = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por el desarrollo en Serie de Taylor de $g(z) = \operatorname{sen} z$ centrado en $k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$ se puede ver que

$$g(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!} (z - k\pi)^n$$

donde $\varepsilon_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n es impar.

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura .... Fecha ....

Alumno/a .... Curso .... Nº ....

Apellidos Nombre

Calificación

$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}(z-k\pi)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}(z-k\pi)^n$ con el primer término distinto de 0.

Por tanto $k\pi$ es un cero de $\operatorname{sen} z$ con multiplicidad 1 para todo $k\in\mathbb{Z}$, es decir, $\exists\, h_k \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ // $g(z) = (z-k\pi)\cdot h_k(z)$ con

$h_k(k\pi) \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Sea $g_2(z) = 1 - e^{iz}$ y la función en serie de Taylor en $2k\pi \ \forall k\in\mathbb{Z}$.

$g_2'(z) = -i e^{iz}$

$g_2^{2)}(z) = -i^2 e^{iz}$. En general $g_2^{n)}(z) = -i^n e^{iz}$ y

$g_2^{n)}(2k\pi) = -i^n e^{i2k\pi} = -i^n$

$\Rightarrow g_2(z) = g_2(2k\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i^n}{n!}(z-2k\pi)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}(z-2k\pi)^n$

por lo que g_2 tiene un cero en $2k\pi$ de multiplicidad 1 $\forall k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow g_2(z) = (z-2k\pi)\cdot h_{2,k}(z)$ con $h_{2,k}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h_{2,k}(2k\pi) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Volviendo a $f(z) = (1-e^{iz})\cdot \operatorname{sen} z$.

El conjunto de ceros de la función es $A = \{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ y $A_2 \{\pi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Veamos que si $a \in A_1$ entonces su multiplicidad es 2 y si $a \in A_2$ entonces su multiplicidad es 1.

Sea $a \in A_1 \Leftrightarrow a = 2k\pi$.

$$\Rightarrow f(z) = (1-e^{iz}) \cdot \operatorname{sen} z = (z-2k\pi) \cdot h_{2k}(z) \cdot (z-2k\pi) \cdot h_k(z) =$$

$$= (z-2k\pi)^2 \cdot h_{2,k}(z) \cdot h_k(z)$$ donde $h_{2,k}(z) \cdot h_k(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no se anula en $2k\pi$.

Sea $a \in A_2 \Leftrightarrow a = \pi + 2k\pi$.

$$\Rightarrow f(z) = (1-e^{iz}) \cdot \operatorname{sen} z = (z-(2k\pi+\pi))\, h_k(z) \cdot (1-e^{iz})$$

donde $h_k(z) \cdot (1-e^{iz}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y no se anula en $2k\pi+\pi$ porque $h_k(2k\pi+\pi) \neq 0$ y $(1-e^{i(2k\pi+\pi)}) = 2 \neq 0$.