Ejercicio 4.27.- Probar que si $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$ y $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ entonces $\exists\, \gamma'_{am}$ tal que $\gamma_{am} \rhd^{+} \gamma'_{am}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$.

Como $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ entonces $\gamma_{sos} = \langle S, s\rangle$. Lo probamos por inducción estructural sobre S.

Utilizando el determinismo y observación de las reglas $S = x := a$ ~~a~~ la regla aplicada en $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ es $[ass_{sos}]$, y de igual manera $S = skip \Leftrightarrow [skip_{sos}]$, $S = S_1 ; S_2 \Leftrightarrow [comp^1_{sos}]$ o $[comp^2_{sos}]$, $S = if \dots \Leftrightarrow [if^{tt}_{sos}]$ o $[if^{ff}_{sos}]$, $S = while \Leftrightarrow [while_{sos}]$.
Por tanto podemos distinguir casos según la regla aplicada:

A) $[ass_{sos}]$, entonces $\gamma_{sos} = \langle x := a, s\rangle$, $\gamma'_{sos} = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$

y como $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$, por definición, $\gamma_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![x := a]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle \mathcal{CA}[\![a]\!] : STORE\text{-}x, \varepsilon, s\rangle$.

Entonces veamos que podemos tomar $\gamma'_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]\rangle$ que verificará $\gamma_{am} \rhd^{+} \gamma'_{am}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$.

En efecto, por definición $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$ y

$\langle \mathcal{CA}[\![a]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^{*} \langle \varepsilon, \mathcal{A}[\![a]\!]s, s\rangle$, $c_2 = STORE\text{-}x$, y $e_2 = \varepsilon$

$$\gamma_{am} = \langle \mathcal{CA}[\![a]\!] : STORE\text{-}x, \varepsilon, s\rangle \overset{\text{Lema 8 y Ejercicio 4.4}}{\rhd^{*}} \langle STORE\text{-}x, \mathcal{A}[\![a]\!]s, s\rangle \overset{[STORE]}{\rhd} \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]\rangle = \gamma'_{am}$$

$\Longleftrightarrow \gamma_{am} \rhd^{+} \gamma'_{am}$

B) $[skip_{sos}]$, entonces $\gamma_{sos} = \langle skip, s\rangle$, $\gamma'_{sos} = s$ y como $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$, por definición, $\gamma_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![skip]\!], \varepsilon, s\rangle$

Entonces veamos que podemos tomar $\gamma'_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle$, que verifica $\gamma'_{sos} = s \approx \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle = \gamma'_{am}$ por definición y que

$$\gamma_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![skip]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle NOOP, \varepsilon, s\rangle \overset{[NOOP]}{\rhd} \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle = \gamma'_{am}.$$

Por lanto $\gamma_{am} \rhd^{+} \gamma'_{am}$

c) [$comp^1_{sos}$], entonces $\gamma_{sos} = \langle S_1; S_2, s\rangle$, $\gamma'_{sos} = \langle S_1'; S_2, s'\rangle$

y se verificaba $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle$. Como $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$

deducimos que $\gamma_{am} = \langle CS[\![S_1;S_2]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle CS[\![S_1]\!]:CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s\rangle$.

Como $\overset{\tilde{\gamma}_{sos}}{\overset{\shortparallel}{\langle S_1, s\rangle}} \Rightarrow \overset{\tilde{\gamma}'_{sos}}{\overset{\shortparallel}{\langle S_1', s'\rangle}}$ y $\overset{\tilde{\gamma}_{sos}}{\overset{\shortparallel}{\langle S_1, s\rangle}} \approx \overset{\tilde{\gamma}_{am}}{\overset{\shortparallel}{\langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle}}$,

por $HI_{estructural}$ $\exists\, \tilde{\gamma}'_{am}$ tal que $\tilde{\gamma}_{am} = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^+ \tilde{\gamma}'_{am}$ y

$\tilde{\gamma}'_{sos} = \langle S_1', s'\rangle \approx \tilde{\gamma}'_{am}$ ($\Rightarrow \tilde{\gamma}'_{am} = \langle CS[\![S_1']\!], \varepsilon, s\rangle$)

Sea $\gamma'_{am} = \langle CS[\![S_1';S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle$ y veamos que

$\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$ (porque es claro que $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$).

$$\gamma_{am} = \langle CS[\![S_1, S_2]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle CS[\![S_1]\!]:CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^+$$

$\leftarrow \tilde{\gamma}_{am} \rhd^+ \tilde{\gamma}'_{am}$ y Lema 8.

$$\rhd^+ \langle CS[\![S_1']\!]: C[\![S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle = \langle CS[\![S_1':S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle = \gamma'_{am}.$$

D) [$comp^2_{sos}$], entonces $\gamma_{sos} = \langle S_1; S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle = \gamma'_{sos}$

porque se cumplía $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$. Como $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am} \Rightarrow \gamma_{am} = \langle CS[\![S_1;S_2]\!], \varepsilon, s\rangle$.

Como $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'$, llamando $\tilde{\gamma}_{sos} = \langle S_1, s\rangle$, $\tilde{\gamma}'_{sos} = s'$ y

$\tilde{\gamma}_{am} = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle$, por hipótesis de inducción estructural $\exists\, \tilde{\gamma}'_{am}$ tal que

$\tilde{\gamma}'_{sos} \approx \tilde{\gamma}'_{am}$ (en particular $\tilde{\gamma}'_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle$) y $\tilde{\gamma}_{am} \rhd^+ \tilde{\gamma}'_{am}$.

Veamos que $\gamma'_{am} = \langle CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle$ verifica que $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$ y

$\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$. Lo primero es evidente y para lo segundo.

$$\gamma_{am} = \langle CS[\![S_1; S_2]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle CS[\![S_1]\!] : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s\rangle \overset{\text{Lema 8 y } \gamma_{am} \triangleright^+ \gamma''_{am}}{\triangleright^+}$$

$$\triangleright^+ \langle CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle = \gamma'_{am}.$$

E) $[\text{if}^{tt}_{sos}]$, entonces $\gamma_{sos} = \langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle = \gamma'_{sos}$ y $\mathcal{B}[\![b]\!]s = tt$. Como por hipótesis $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am} \Rightarrow$

$$\gamma_{am} = \langle CS[\![\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2]\!], \varepsilon, s\rangle.$$
$$\Vert$$
$$\langle C\mathcal{B}[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S_1]\!], CS[\![S_2]\!]), \varepsilon, s\rangle$$

Sea $\gamma'_{am} = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle$., que verifica $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$ y hay que probar que también se cumple $\gamma_{am} \triangleright^+ \gamma'_{am}$.

$$\gamma_{am} = \langle C\mathcal{B}[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S_1]\!], CS[\![S_2]\!]), \varepsilon, s\rangle \overset{\text{Ejercicio 4.19 y Lema 8}}{\triangleright^*}$$

$$\triangleright^* \langle BRANCH(CS[\![S_1]\!], CS[\![S_2]\!]), \mathcal{B}[\![b]\!]s, s\rangle =$$

$$= \langle BRANCH(CS[\![S_1]\!], CS[\![S_2]\!]), tt, s\rangle \overset{[BRANCH]}{\triangleright} \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle = \gamma'_{am}.$$

Luego efectivamente $\gamma_{am} \triangleright^+ \gamma'_{am}$.

F) $[\text{if}^{ff}_{sos}]$. Totalmente análogo, esta vez $\gamma'_{am} = \langle CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s\rangle$.

G) $[\text{while}_{sos}]$, entonces $\gamma_{sos} = \langle \text{while } b \text{ do } S, s\rangle \Rightarrow \gamma'_{sos}$

con $\gamma'_{sos} = \langle \text{if } b \text{ then } (S; \text{while } b \text{ do } S) \text{ else skip}, s\rangle$.

Como $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am} \Rightarrow \gamma_{am} = \langle CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!], \varepsilon, s\rangle$.

Veamos que $\gamma'_{am} = \langle CS[\![\text{if } b \text{ then } (S; \text{while } b \text{ do } S) \text{ else skip}]\!], \varepsilon, s \rangle$ verifica que $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$ (por definición) y que $\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$.

$$\gamma_{am} = \langle CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!], \varepsilon, s\rangle := \langle LOOP(CB[\![b]\!], CS[\![S]\!]), \varepsilon, s\rangle \overset{[LOOP]}{\rhd}$$

$$\rhd \langle CB[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S]\!] : LOOP(CB[\![b]\!], CS[\![S]\!]), NOOP), \varepsilon, s\rangle =$$

$$= \langle CB[\![b]\!] : BRANCH(\underbrace{CS[\![S]\!] : CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!]}_{CS[\![S;\, \text{while } b \text{ do } S]\!]}, CS[\![\text{skip}]\!]), \varepsilon, s\rangle =$$

$$= \langle CS[\![\text{if } b \text{ then } (S; \text{While } b \text{ do } S) \text{ else skip}]\!], \varepsilon, s\rangle = \gamma'_{am}$$

Veamos ahora que si $\langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$ entonces $\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle$

Vamos a probar por inducción sobre k que si

$\langle S, s\rangle \Rightarrow^k s'$ entonces $\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^+ \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle$.

Caso base $k=0$ El resultado es cierto por falsedad de la premisa.

Paso inductivo. Sea $k \geq 0$, supongamos cierto el resultado hasta k y lo probamos para $k+1$.

Como $\langle S, s\rangle \Rightarrow^{k+1} s'$ entonces $\exists \gamma$ tal que

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma \Rightarrow^k s'$$

Si $\gamma = \hat{s}$ entonces se deduce que $\hat{s} = s'$, $k=0$, es decir $\langle S, s\rangle \Rightarrow s'$.

Llamando $\gamma_{sos} = \langle S, s\rangle$, $\gamma'_{sos} = s'$ y $\gamma_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s\rangle$ que verifican $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$, por el resultado anterior $\exists\, \gamma'_{am}$ tal que $\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$. De esto último se deduce que $\gamma'_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle$ y como $\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$, en particular $\gamma_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle = \gamma'_{am}$.

Si $\gamma = \langle \hat{S}, \hat{s} \rangle$ entonces, por HI, $\langle CS[\![\hat{S}]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$.

Además, si $\gamma_{sos} = \langle S, s \rangle$, $\gamma'_{sos} = \langle \hat{S}, \hat{s} \rangle$ y $\gamma_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle$, se verifica que $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma_{sos} \approx \gamma_{am}$ luego por el resultado anterior $\exists \gamma'_{am}$ tal que $\gamma_{am} \rhd^+ \gamma'_{am}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma'_{am}$. Por esto último $\gamma'_{am} = \langle CS[\![\hat{S}]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$, luego

$$\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \rhd^+ \langle CS[\![\hat{S}]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle, \text{ luego}$$

$$\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$$

Ejercicio 4.28.- Supongamos que $\gamma_{sos} \approx \gamma^1_{am}$ y que $\gamma^1_{am} \rhd \gamma^2_{am} \rhd \cdots \rhd \gamma^k_{am}$ donde $k > 1$ y las únicas configuraciones con pila vacía son γ^1_{am} y γ^k_{am}. Probar que existe una configuración γ'_{sos} tal que $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma^k_{am}$.

Por hipótesis, $\gamma_{sos} \approx \gamma^1_{am}$ luego afirmamos que $\gamma^1_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s \rangle$ o $\gamma^1_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle$ para cierto $S \in$ Statement y $s \in$ State.

El primer caso no se puede dar porque $k > 1$ luego $\exists S \in$ Statement y $\exists s \in$ State tal que $\gamma_{sos} = \langle S, s \rangle \approx \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle = \gamma^1_{am}$.

Razonamos ahora por casos sobre S.

S. $S = x:=a$ | Veamos que $\gamma^k_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle$ y que basta tomar $\gamma'_{sos} = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$.

En efecto $\gamma^1_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![x:=a]\!], \varepsilon, s \rangle = \langle \mathcal{CA}[\![a]\!] : STORE\text{-}x, \varepsilon, s \rangle$.

$\triangleright^* \langle STORE\text{-}x, \mathcal{A}[\![a]\!]s, s \rangle \triangleright \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle$.

Lema 8 y Ej 4.4

Por tanto $\exists k_1$, $\gamma'_{am} \triangleright^{k_1} \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s \rangle$.

Hacemos notar que, por el determinismo de paso de ejecución, (Ejercicio 4.6) se puede probar por inducción sobre l que hay determinismo de ejecución en secuencias de longitud l $\forall l \geq 1$.

Revisar (determinismo)

Por tanto, si $k_1 < k \Rightarrow \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle \overset{\text{determinismo (unicidad de secuencia)}}{=} \gamma^{k_1}_{am}$ y esto es absurdo porque tiene la pila vacía

- Si $k_1 \geq k$, por unicidad de la secuencia de ejecución para la longitud k se tiene que.

$\gamma'_{am} \triangleright \gamma^2_{am} \triangleright \dots \triangleright \gamma^k_{am} \triangleright^{k_1 - k} \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle$.

Como no hay ninguna "regla" aplicable a γ^k_{am} entonces $k_1 - k = 0$ y $\gamma^k_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle$.

Tomamos entonces $\gamma'_{sos} = s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$ y comprobamos que

$\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma^k_{am}$. Lo segundo se desprende de la definición y lo primero es cierto por la aplicación de la regla $[ass_{sos}]$.

Si $S = skip$| Veamos que $\gamma_{am}^{k} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle$ y que basta tomar $\gamma'_{sos} = s$.

Efectivamente $\gamma_{am}^{1} = \langle CS[\![skip]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle NOOP, \varepsilon, s\rangle \rhd \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle = \gamma_{am}^{2}$

Se deduce que $k=2$ porque es el mínimo $k>1$ para el que la pila es vacía $\Rightarrow \gamma_{am}^{k} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s\rangle$.

Única regla aplicable y se aplica al menos 1 porque $k>1$.

Verificamos que $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma'_{sos} \approx \gamma_{am}^{k}$ pero ambos son inmediatos (regla [skip] y definición).

Si $S = $ while b do S|

Veamos que $\gamma_{am}^{k} = \langle CA[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S]\!] : LOOP(CA[\![b]\!], CS[\![S]\!]), NOOP, \varepsilon, s\rangle$.

y basta tomar $\gamma'_{sos} = \langle$if b then S while b do S else skip, $s\rangle$

En efecto

Única regla aplicable y se aplica al menos 1 porque $k>1$

$$\gamma_{am}^{1} = \langle CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle LOOP(CA[\![b]\!], CS[\![S]\!]), \varepsilon, s\rangle \rhd$$

$$\rhd \langle CA[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S]\!] : LOOP(CA[\![b]\!], CS[\![S]\!]), NOOP), \varepsilon, s\rangle.$$

Como en el caso anterior $k=2$, y γ_{am}^{k}

Además $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ por la regla [while] y

$$\gamma'_{sos} = \langle \overbrace{\text{if } b \text{ then } S \text{ while } b \text{ do } S \text{ else skip}}^{S'}, s\rangle \approx \langle CS[\![S']\!], \varepsilon, s\rangle =$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \langle CA[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S; \text{while } b \text{ do } S]\!], CS[\![skip]\!]), \varepsilon, s\rangle =$$

$$= \langle CA[\![b]\!] : BRANCH(CS[\![S]\!] : CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!], NOOP), \varepsilon, s\rangle = \gamma_{am}^{k} \checkmark$$

S: $S = $ if b then S_1 else S_2

$\Rightarrow \gamma^1_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2]\!], \varepsilon, s\rangle = \langle \mathcal{CA}[\![b]\!] : \text{BRANCH}(\mathcal{CS}[\![S_1]\!], \mathcal{CS}[\![S_2]\!]), \varepsilon, s\rangle$

Sabemos por el ejercicio 4.19 que

$\langle \mathcal{CA}[\![b]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \mathcal{A}[\![b]\!], s\rangle$ y que en todas las secuencias intermedias de cómputo la pila es no vacía.

Se puede probar utilizando inducción y este resultado además del Lema 8 que.

$\gamma^1_{am} \rhd^* \langle \text{BRANCH}(\mathcal{CS}[\![S_1]\!], \mathcal{CS}[\![S_2]\!]), \mathcal{B}[\![b]\!]s, s\rangle$. donde en todas las secuencias intermedias de cómputo la pila es no vacía.

Distinguimos ahora $\mathcal{A}[\![b]\!]s = tt$ o $\mathcal{A}[\![b]\!]s = ff$.

$\mathcal{A}[\![b]\!]s = tt$) Entonces $\langle \text{BRACH}(\mathcal{CS}[\![S_1]\!], \mathcal{CS}[\![S_2]\!]), tt, s\rangle \rhd \langle \mathcal{CS}[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle$

y por determinismo y que todas las secuencias intermedias de cómputo tienen pila no vacía entonces $\gamma^k_{am} = \langle \mathcal{CS}[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle$.

Entonces afirmamos que el γ'_{sos} buscado es $\gamma'_{sos} = \langle S_1, s\rangle$.

En efecto, $\gamma'_{sos} \approx \gamma^k_{am}$ y $\gamma_{sos} = \langle \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2, s\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle S_1, s\rangle}_{\gamma'_{sos}}$

por la regla $[\text{if}^{tt}_{sos}]$ ya que $\mathcal{A}[\![b]\!]s = tt$.

$\mathcal{A}[\![b]\!]s = ff$) Totalmente análogo. Esta vez $\gamma'_{sos} = \langle S_2, s\rangle$.

Si $S = S_1 ; S_2$ | En primer lugar, supongamos probado que para todo código $CS[\![S_1]\!]$, durante su ejecución deja la pila vacía en algún momento (tras dar al menos un paso) y la primera vez que deja vacía la pila el código restante es vacío o de la forma $CS[\![S_1']\!]$

Esto es que $\exists\ \alpha_1 = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd \alpha_2 \rhd \cdots \rhd \alpha_s = \langle c, \varepsilon, s'\rangle$ donde $c = \varepsilon$ o $c = CS[\![S_1']\!]$ y si $\alpha_i = \langle c_i, e_i, s_i\rangle\ \forall i = 2 \cdots s-1$, entonce $e_i \neq \varepsilon$.

Distinguiremos los casos $c = \varepsilon$ o $c = CS[\![S_1']\!]$.

Si llamamos $\bar{\gamma}_{sos} = \langle S_1, s\rangle$, $\bar{\gamma}^i_{am} = \alpha_i\ \ \forall i = 1 \cdots s$, estamos en condiciones de aplicar la hipótesis de inducción (estructural porque S_1 es parte (subexpresión) de S_1, S_2). y se tiene que $\exists\ \bar{\gamma}'_{sos}$ tal que.

$$\bar{\gamma}_{sos} \Rightarrow \bar{\gamma}'_{sos} \quad y \quad \bar{\gamma}'_{sos} \approx \gamma^s_{am} = \alpha_s = \langle \varepsilon, \varepsilon, s'\rangle.$$

Por la segunda condición $\begin{cases} \bar{\gamma}'_{sos} = s' \text{ si } c = \varepsilon \text{ y entonces } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow s' \\ \bar{\gamma}'_{sos} = \langle S_1', s'\rangle \text{ si } c = CS[\![S_1']\!] \text{ y entonces } \langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle \end{cases}$

Por otro lado tenemos que, por inducción sobre k que la siguiente secuencia de ejecución existe:

$$\beta_1 = \langle CS[\![S_1]\!] : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s\rangle \rhd \beta_2 \rhd \cdots \rhd \beta_s = \langle c : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s'\rangle$$

donde $\beta_i = \langle c_i : CS[\![S_2]\!], e_i, s_i\rangle$ $\quad (\alpha_i = \langle c_i, e_i, s_i\rangle)$.

Ahora bien, como $\beta_1 = \langle CS[\![S_1]\!] : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s \rangle = \langle CS[\![S_1;S_2]\!], \varepsilon, s \rangle = \gamma^1_{am}$

se tiene por unicidad de secuencias de derivación que $\beta_i = \gamma^i_{am}$ $\forall i = 1 \dots s$

luego $\gamma^s_{am} = \beta_s = \langle c : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s' \rangle$.

<u>Si $c = \varepsilon$</u> el γ'_{sos} buscado no es otro que $\gamma'_{sos} = \langle S_2, s' \rangle$.

Efectivamente, $\underset{\langle S_2, s' \rangle}{\gamma'_{sos}} \approx \underset{\langle CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s' \rangle}{\gamma^s_{am}}$ y $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$, es decir,

$\langle S_1 ; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_2, s' \rangle$ por la regla $[comp^2_{sos}]$ ya que

habíamos visto que $\langle S_1, s \rangle \Rightarrow s'$.

<u>Si $c = CS[\![S_1']\!]$</u> el γ'_{sos} buscado es $\gamma'_{sos} = \langle S_1' ; S_2, s' \rangle$.

Efectivamente $\gamma'_{sos} = \langle S_1' ; S_2, s' \rangle \approx \langle CS[\![S_1';S_2]\!], \varepsilon, s' \rangle = \underbrace{\langle CS[\![S_1']\!] : CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s' \rangle}_{\gamma^s_{am}}$

y $\gamma_{sos} \Rightarrow \gamma'_{sos}$ porque

$\langle S_1 ; S_2, s \rangle \Rightarrow \langle S_1' ; S_2, s' \rangle$ ya que, como $\langle S_1, s \rangle \Rightarrow \langle S_1', s' \rangle$

se puede aplicar la regla $[comp^1_{sos}]$.

Falta ver que para todo código $CS[\![S_1]\!]$, durante su ejecución deja la pila vacía en algún momento y que la primera vez que esto sucede el código restante es ε o $CS[\![S_1']\!]$ para cierta instrucción S_1'.

Lo probamos por inducción estructural sobre S_1.

Si $S_1 = x := a$ esto es claro porque hemos visto durante la demostración que

$\langle CS[\![x:=a]\!], \varepsilon, s \rangle \triangleright^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s] \rangle$ donde las

configuraciones intermedias no tienen la pila vacía.

Si $S_1 = skip$ $\langle CS[\![skip]\!], \varepsilon, s \rangle \triangleright \langle NOOP, \varepsilon, s \rangle \triangleright \langle \varepsilon, \varepsilon, s \rangle$ <u>OK</u>

Si $S_1 = $ while b do S. Hemos visto durante la demostración que en un paso,

$\langle CS[\![\text{while } b \text{ do } S]\!], \varepsilon, s \rangle \triangleright \langle CS[\![\text{if } b \text{ then } S; \text{while } b \text{ do } S]\!], \varepsilon, s \rangle$. <u>OK</u>

Si $S_1 = \text{if } b \text{ then } S_2 \text{ else } S_3$. Hemos visto durante la demostración que

$$<CS[\![\text{if } b \text{ then } S_2 \text{ else } S_3]\!], \varepsilon, s> \rhd^* <CS[\![S_2]\!], \varepsilon, s>$$

o

$$<CS[\![\text{if } b \text{ then } S_2 \text{ else } S_3]\!], \varepsilon, s> \rhd^* <CS[\![S_3]\!], \varepsilon, s>.$$

En cualquiera de los casos se vio que las configuraciones intermedias tenían la pila no vacía.

Por último, si $S_1 = \hat{S}_1 ; \hat{S}_2$, por HI estructural.

$<CS[\![\hat{S}_1]\!], \varepsilon, s> \rhd^* <c, \varepsilon, s'>$ dónde $c = \varepsilon$ o $c = CS[\![\bar{S}_1]\!]$

y las configuraciones intermedias tienen la pila no vacía.

Aplicando el lema 8:

$$<CS[\![S_1]\!], \varepsilon, s> = <CS[\![\hat{S}_1 ; \hat{S}_2]\!], \varepsilon, s> = <CS[\![\hat{S}_1]\!] ; CS[\![\hat{S}_2]\!], \varepsilon, s> \rhd^*$$

$\rhd^* <c : CS[\![\hat{S}_2]\!], \varepsilon, s>$ donde los estados intermedios tienen la pila no vacía. Si $c = \varepsilon$ se tiene el resultado buscado y

si $c = CS[\![\bar{S}_1]\!]$ entonces $<CS[\![\bar{S}_1]\!] : CS[\![\hat{S}_2]\!], \varepsilon, s> = <CS[\![\bar{S}_1 ; \hat{S}_2]\!], \varepsilon, s>$

y $S_1' = \bar{S}_1 ; \hat{S}_2$.

Veamos ahora que si $<CS[\![S]\!], \varepsilon, s> \rhd^* <\varepsilon, \varepsilon, s'>$ entonces $<S, s> \Rightarrow^* s'$.

Vamos a probar por inducción sobre n que si la secuencia $<CS[\![S]\!], \varepsilon, s> \rhd^* <\varepsilon, \varepsilon, s'>$ tiene n configuraciones intermedias con pila vacía, entonces $\langle S, s \rangle \Rightarrow^{n+1} s'$.

<u>Caso base $n=0$</u>/ Si no hay configuraciones intermedias con pila vacía en $\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$, denotando $\gamma^1_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle$, $\gamma^k_{am} = \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$ y $\gamma_{sos} = \langle S, s \rangle$, se tiene por el resultado anterior que $\exists \gamma'_{sos}$ tal que $\langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma'_{sos} \approx \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$.

De lo segundo $\gamma'_{sos} = s'$ y sustituyendo en la primera, $\langle S, s \rangle \Rightarrow s'$

$$\Downarrow$$

$$\langle S, s \rangle \Rightarrow^{n+1} s' \quad (n=0)$$

<u>Paso inductivo</u>/ Sea $n \geq 0$ y supongamos el resultado cierto hasta n. Veamos que se cumple para $n+1$, es decir, hay que probar que si:

$\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$ tiene $n+1$ configuraciones intermedias con pila vacía entonces $\langle S, s \rangle \Rightarrow s'$.

Sea α la primera configuración con la pila vacía en la secuencia. Por lo probado al final de la demostración del apartado anterior se tiene que $\alpha = \langle \varepsilon, \varepsilon, \hat{s} \rangle$ o $\alpha = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$.

Por tanto la situación es:

$$\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \underset{\substack{\text{Sin configur.} \\ \text{interm. con pila} \\ \text{vacía}}}{\rhd^*} \alpha \underset{\substack{\text{Con } n \\ \text{config. intermedias} \\ \text{con la pila vacía.}}}{\rhd^*} \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle.$$

<u>Si $\alpha = \langle \varepsilon, \varepsilon, \hat{s} \rangle$</u>/ No se ha podido dar ningún paso de ejecución desde $\langle \varepsilon, \varepsilon, \hat{s} \rangle$ porque no tiene código y se llega a contradicción con que $\alpha \rhd^+ \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$

Por tanto $\alpha = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$. Se tiene que

$\langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle \rhd^* \langle \varepsilon, \varepsilon, s' \rangle$ tiene n configuraciones intermedias con la pila vacía luego $\langle S_1, \hat{s} \rangle \Rightarrow^{n+1} s'$. por HI.

Por otro lado. $\langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle \rhd^+ \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$ y denotando $\gamma^1_{am} = \langle CS[\![S]\!], \varepsilon, s \rangle$, $\gamma^k_{am} = \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$, $\gamma_{sos} \approx \langle S, s \rangle$ podemos aplicar el resultado anterior (no hay config. intermed. con pila vacía) así que. $\exists\, \gamma'_{sos}$ tal que $\langle S, s \rangle \Rightarrow \gamma'_{sos}$ y $\gamma'_{sos} \approx \langle CS[\![S_1]\!], \varepsilon, \hat{s} \rangle$.

Por la segunda condición $\gamma'_{sos} = \langle S_1, \hat{s} \rangle$ y de la primera se tiene que $\langle S, s \rangle \Rightarrow \langle S_1, \hat{s} \rangle$.

Juntándolo todo $\langle S, s \rangle \Rightarrow \langle S_1, \hat{s} \rangle \Rightarrow^{n+1} s'$, luego

$\langle S, s \rangle \Rightarrow^{(n+1)+1} s'$ y se completa el paso inductivo.