Juan Carlos Llamas Núñez

Entrega 1

Ejercicio 1.- Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(xy^2,x^2y,y)$ a través de la superficie (considerando la normal exterior):

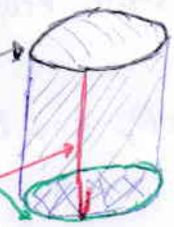
$$S=\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ -1\le z\le 1\} \cup \{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le 1,\ z=-1\}$$

El flujo a lo largo de dicha superficie será igual que el flujo si quitamos las siguientes curvas:

$$A=\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ z=-1\}$$

$$B=\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ z=1\}$$

$$C=\{(x,y,z)\in S: x\ge 0,\ y=0\}$$



Por tanto consideramos el conjunto

$$\hat{S}=\left(\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1,\ -1<z<1\} \cup \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2<1,\ z=-1\}\right)\setminus C$$

Por tanto $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\hat{S}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$

Esta integral la podemos calcular como la suma de dos integrales sobre las siguientes superficies:

$S_1=\{(x,y,z): x^2+y^2<1,\ z=-1\}\setminus\{(x,y,z): x\ge 0,\ y=0\}$ que corresponde a la tapa inferior del cilindro menos los puntos que pertenecen al semiplano $y=0$ donde $x\ge 0$.

$S_2=\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ -1<z<1\}\setminus\{(x,y,z): x\ge 0,\ y=0\}$ que es la superficie lateral del cilindro menos el semiplano anterior.

Vamos a calcular el flujo en S_1.

Damos la parametrización $\Phi_1 : (0,2\pi)\times(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, r) \longrightarrow \Phi(\theta,r) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta, -1)$$

Por tanto $D_1 = (0,2\pi)\times(0,1)$ y $\Phi_1(D_1) = S_1$. Φ_1 es también C^1 e inyectiva.

Vamos a calcular ahora el vector normal exterior.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= (-r\,\text{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= (\cos\theta, \text{sen}\theta, 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\,\text{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = -r\vec{k}.$$

En efecto hemos escogido la orientación correcta porque estos vectores normales son los que van hacia abajo (en este caso la normal exterior).

Por tanto $$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_1} (\vec{F}\circ\Phi)\cdot\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right) d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{D_1} \vec{F}(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta, -1)\cdot(0,0,-r)\, d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{D_1} (r^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta, r^3\cos^2\theta\,\text{sen}\theta, r\,\text{sen}\theta)\cdot(0,0,-r)\, d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{D_1} -r^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, dr = \left(\int_0^1 r^2\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} -\text{sen}\theta\, d\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\cos\theta\Big]_0^{2\pi}\right) = 0,$$ es decir, no hay flujo neto en esta superficie.

Nos fijamos ahora en la superficie S_2 de la que damos la parametrización Φ_2:

$$\Phi_2 : (0,2\pi)\times(-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, z) \longrightarrow \Phi_2(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$$

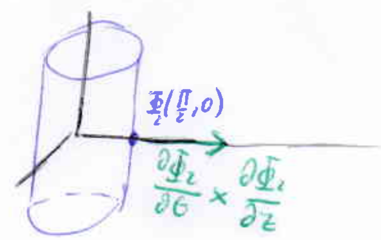
Entonces $D_2 = (0,2\pi)\times(-1,1)$ y $\Phi_2(D_2) = S_2$. Además Φ_2 es C^1 e inyectiva.

La normal exterior será:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} &= (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

Efectivamente, esta es la normal exterior ya que si tomamos el punto $\Phi_2(\frac{\pi}{2}, 0)$ su normal exterior es $(0,1,0)$ que concuerda con lo que buscamos:



Luego la integral de flujo será:

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_2}(\vec{F}\circ\Phi_2)\cdot\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right) d\theta\, dz =$$

$$= \iint_{D_2} \vec{F}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\, d\theta\, dz =$$

$$= \iint_{D_2} (\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta, \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\theta)\cdot(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\, d\theta\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (\cos^2\theta \,\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta \,\mathrm{sen}^2\theta)\, d\theta\, dz = 4\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\theta \, d\theta =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta)^2\, d\theta \underset{\mathrm{sen}2\theta = 2\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{\overset{\uparrow}{=}} 4\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right)^2 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2 2\theta \, d\theta \underset{\substack{\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = \cos 2\theta}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 4\theta \, d\theta =$$

$$= \pi - \left.\frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{8}\right]_0^{2\pi} = \pi .$$

En resumen, el flujo a través de S es igual al flujo a través de $\hat{S} = S_1 \cup S_2$ con $S_1 \cap S_2 = \phi$ por lo que

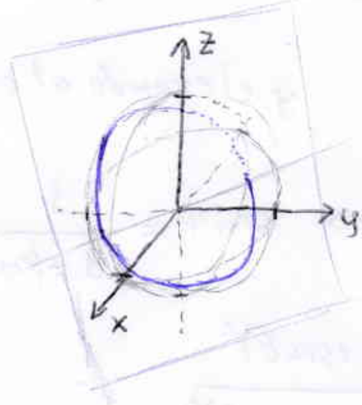
$$\boxed{\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}} = \iint_{\hat{S}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0 + \pi = \boxed{\pi}$$

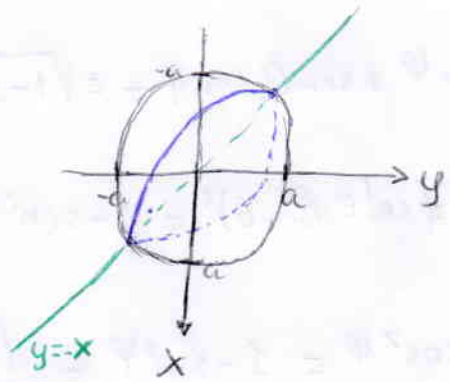
Ejercicio 2.- Calcular la integral de línea

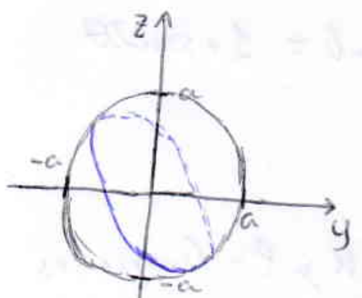
$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz \quad \text{siendo} \quad C = \{x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0\}$$

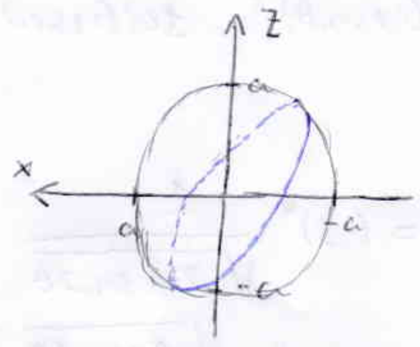
Elegir la orientación que se quiera.

En primer lugar nos damos cuenta de que C es la intersección de una esfera (su frontera) de radio a con un plano cuyo vector normal es el $(1,1,1)$ y pasa por el $(0,0,0)$ que es el centro de la esfera. Dicha intersección será una circunferencia de radio a que será la que tengamos que parametrizar.









Lo que primero podría uno intentar sería dar la parametrización pensando en coordenadas esféricas, es decir sustituir

$(x,y,z) = (r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi,\ r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\ r\cos\varphi)$ e intentar ver que condiciones tienen que cumplir r, θ y φ para poder quedar-nos con uno sólo de los parámetros.

De esta manera

La condición $x^2+y^2+z^2=a^2$ nos implica que

$$r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = a^2 \iff r^2\left(\mathrm{sen}^2\varphi(\mathrm{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\varphi\right)=a^2$$

$$\iff r^2=a^2 \underset{\text{Suponemos } a>0}{\Longrightarrow} r=a$$

La condición $x+y+z=0$ nos implica que

$$r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\cos\varphi = 0 \underset{r>0}{\iff} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi = 0$$

De aquí podemos despejar el $\mathrm{sen}^2\varphi$ en función de θ como

$$\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi = \pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\varphi}$$ y elevando al cuadrado

$$\mathrm{sen}^2\varphi\,(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2 = 1-\mathrm{sen}^2\varphi \iff \mathrm{sen}^2\varphi = \frac{1}{1+(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2}$$

También $\cos^2\varphi = 1-\mathrm{sen}^2\varphi = \dfrac{(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2}{1+(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2}$

Nótese que $(\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos^2\theta+\mathrm{sen}^2\theta+2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 1+\mathrm{sen}\,2\theta$

Por tanto

$$\mathrm{sen}\,\varphi = (-1)^k\frac{1}{\sqrt{2+\mathrm{sen}\,2\theta}}$$

$$\cos\varphi = (-1)^\ell\frac{\sqrt{1+\mathrm{sen}\,2\theta}}{\sqrt{2+\mathrm{sen}\,2\theta}}$$

con k y ℓ funciones de θ y que no nos interesa su valor.

Por esta vía hemos llegado a la parametrización

$$\Phi_1 : (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\theta \longrightarrow \Phi_1(\theta) = \left(a \cdot \frac{\cos\theta \, (-1)^k}{\sqrt{2+\operatorname{sen}2\theta}},\ a \frac{\operatorname{sen}\theta \, (-1)^k}{\sqrt{2+\operatorname{sen}2\theta}},\ a(-1)^\ell \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}2\theta}}{\sqrt{2+\operatorname{sen}2\theta}} \right)$$

Esta, en efecto, es una parametrización de C (quizás quitando algún punto lo que no afecta al cómputo de la integral de línea). Sin embargo, al intentar computar $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ la complejidad de los cálculos nos hace descartar esta primera aproximación.

En esta segunda aproximación vamos a parametrizar una circunferencia de radio a centrada en $(0,0,0)$ ~~a~~ y contenida en el plano $z=0$ a la que iremos aplicando una serie de rotaciones para que acabe ocupando el lugar de C.

El esquema de la segunda parametrización es el siguiente

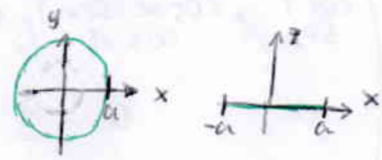
$$\Phi_2 : (0,2\pi) \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g_3} \mathbb{R}^3$$

(Ver esquema gráfico al final)

g_1: (Parametrización de una circunferencia conocida); g_2: Rotación sobre el eje X; g_3: Rotación sobre el eje Z

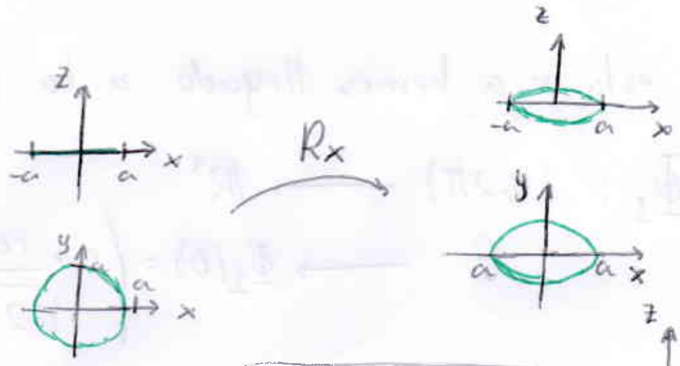
Primero vamos a parametrizar una circunferencia de radio a con centro $(0,0,0)$ y contenida en el plano $z=0$.

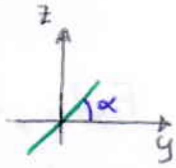
$$g_1 : (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$$



Ahora g_2 va a ser la rotación de α radianes sobre el eje X con α por determinar. g_2 es entonces un función lineal con matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R_x$$





luego $g_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow g_2(x,y,z) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^T$$

Por último realizamos una rotación de β radianes sobre el eje Z.

con lo que $g_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longrightarrow g_3(x,y,z) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= R_z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^T$$

De esta forma Φ_2 es la composición de estas funciones y

$$\Phi_2(t) = g_3(g_2(g_1(t))) = g_3(g_2(a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)) =$$

$$= g_3 \circ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = g_3(a\cos t, a\cos\alpha \operatorname{sen} t, a\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} t) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\cos\alpha \operatorname{sen} t \\ a\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \right)^T =$$

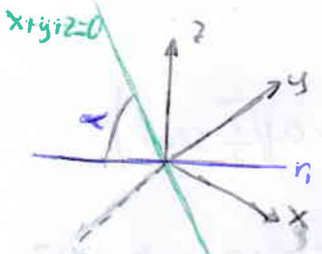
$$= a(\cos\beta\cos t - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\beta\cos t + \cos\beta\cos\alpha \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} t)$$

Ya tenemos nuestra parametrización, que va a ser mucho más manejable que la anterior a la hora de calcular la integral de línea.

$$\Phi_2 : (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow \Phi_2(t) = a(\cos\beta\cos t - \text{sen}\beta\cos\alpha\,\text{sen}t,\ \text{sen}\beta\cos t + \cos\beta\cos\alpha\,\text{sen}t,\ \text{sen}\alpha\,\text{sen}t)$$

Falta ahora por determinar α y β para que $\Phi_2((0,2\pi)) = C$ (salvo un punto que no estará pero no afecta al cómputo de la integral).

En primer lugar nos tenemos que dar cuenta de que α tiene que ser el ángulo que forman el plano $x+y+z=0$ con el plano $z=0$. pero con el signo cambiado.



(Plano visto de perfil)

Este ángulo $-\alpha$ es el ángulo entre las rectas

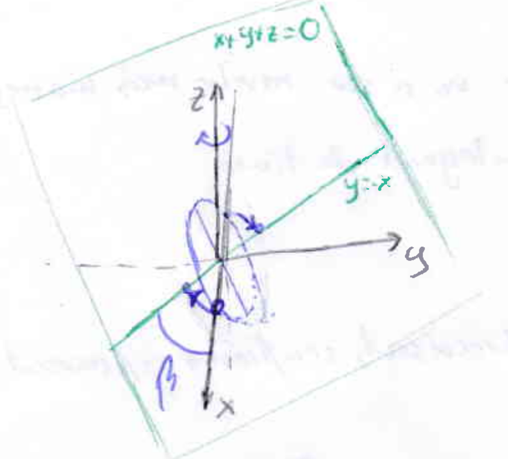
$$r_1 = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$ (contenida en el plano $x+y+z=0$)

que lo podemos calcular con la fórmula de producto escalar

$$(1,1,0)\cdot(1,1,-2) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos -\alpha \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto α es el ángulo entre $-\pi$ y 0 tal que $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ porque el coseno es par.

El ángulo β es más fácil de calcular porque ahora los puntos conservan su altura y los puntos que en un origen estaban en el eje X y tras la primera rotación no se movieron, tienen que acabar tras la segunda rotación en la recta intersección de los planos $x+y+z=0$ y $z=0$. Esto es la recta $y=-x$ (en el plano $z=0$) que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje X.



Como la rotación es en sentido horario entonces $\beta = -\frac{\pi}{4}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto $\Phi_2 : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \left(a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\right),\ a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen} t\right),\ a\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen} t\right) \right)$$

$$\Phi_2(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t,\ \frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ -a\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen} t \right)$$

Por construcción si $D = (0, 2\pi) \implies \Phi_2(D) = C \setminus \left\{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$

Esta parametrización es de clase C^1, es inyectiva y es mucho más sencilla que la dada en primer lugar.

$$\Phi_2'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t,\ \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,\ -a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t \right)$$

y $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_D \left(\vec{F} \circ \Phi_2\right) \cdot \Phi_2'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ -a\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen} t,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t \right) \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t + \frac{a\cos t}{\sqrt{6}} + \frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,\ -a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t \right) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t \right)\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t \right) dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(-a\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen} t \right) \cdot \left(\frac{a\cos t}{\sqrt{6}} + \frac{a\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \right) dt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t \right)\left(-a\sqrt{\frac{2}{3}}\cos t \right) dt}_{I_3}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{6}} \operatorname{sen} t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t + \frac{a}{\sqrt{6}} \cos t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^2}{\sqrt{12}} \operatorname{sen}^2 t + \frac{a^2}{6} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} t \cos t - \frac{a^2}{\sqrt{12}} \cos^2 t\right) dt$$

$$= -\frac{a^2}{\sqrt{12}} \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt + \frac{2a^2}{3} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t\, dt =$$

$$= -\frac{a^2\, 2\pi}{\sqrt{12}} + \frac{a^2}{3} \operatorname{sen}^2 t \Big]_0^{2\pi} = -\frac{a^2 \pi}{\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \left(-a\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{sen} t\right)\left(\frac{a \cos t}{\sqrt{6}} + \frac{a \operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \sqrt{\frac{2}{3\cdot 6}} \operatorname{sen} t \cos t - a^2 \sqrt{\frac{2}{3\cdot 2}} \operatorname{sen}^2 t\right) dt =$$

$$= -\frac{a^2}{6} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen} t \cos t\, dt - \frac{a^2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt \underset{\uparrow}{=}$$

$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$$= -\frac{a^2}{6} \operatorname{sen}^2 t \Big]_0^{2\pi} - \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt\right) = -\frac{a^2}{2\sqrt{3}} \left(2\pi - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\Big]_0^{2\pi}\right)$$

$$= -\frac{a^2 \pi}{\sqrt{3}}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \operatorname{sen} t\right)\left(-a\sqrt{\frac{2}{3}} \cos t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a^2}{\sqrt{3}} \cos^2 t - \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6\cdot 3}} \operatorname{sen} t \cos t\right) dt = -\frac{a^2}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt - \frac{a^2}{6} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen} t \cos t\, dt =$$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{a^2}{2\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} dt + \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt\right) - \frac{a^2}{6} \cdot \operatorname{sen}^2 t \Big]_0^{2\pi} = -\frac{a^2 \pi}{\sqrt{3}} - \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} \Big]_0^{2\pi} =$$

$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$

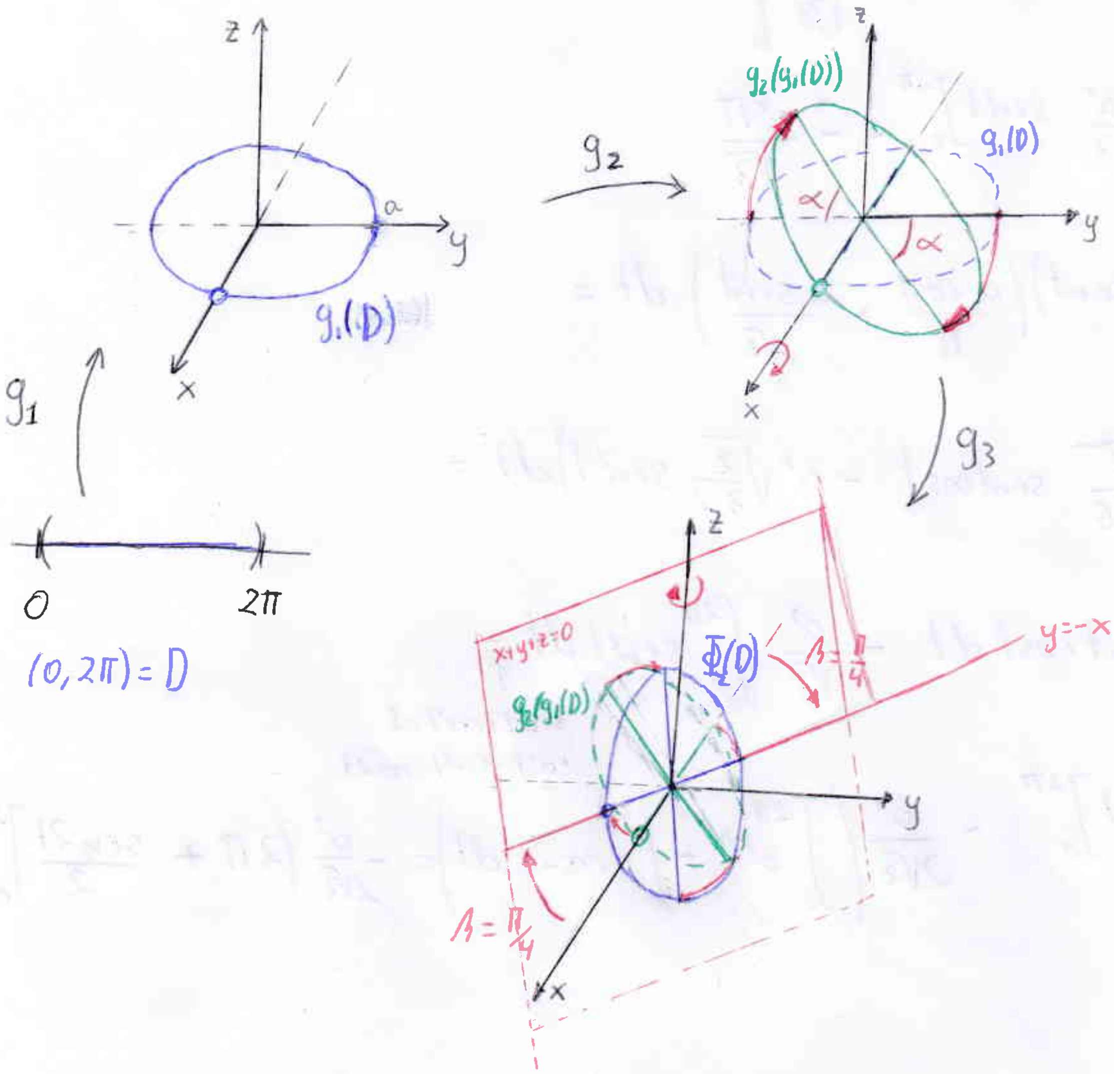
$\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos 2t$

$$= -\frac{a^2 \pi}{\sqrt{3}}$$

Por tanto $\boxed{\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz} = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{a^2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a^2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{a^2\pi}{\sqrt{3}} =$

$$= \boxed{-\sqrt{3}a^2\pi}$$

Esquema de la parametrización Φ_2



Ejercicio 3.- Hallar el área de la superficie

$$A = \{x^2+y^2=z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2ax,\ z \geq 0\}$$

Esta superficie es la intersección del cono (donde $z \geq 0$)

$C = \{x^2+y^2=z^2,\ z \geq 0\}$ con la esfera

$$E = \{x^2+y^2+z^2 \leq 2ax\} = \{x^2+y^2+z^2-2ax+a^2 \leq a^2\} =$$

$= \{(x-a)^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$, es decir, la esfera centrada en el punto $(a,0,0)$ y radio a.

El cono nos va a servir para dar la parametrización y la esfera para concretar el espacio de parámetros D.

Así, pensando en coordenadas cilíndricas

$$\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow \Phi(\theta,r) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$$

Donde hay que determinar D para que

$$\Phi(D) = A \setminus \left(\{(x,y,z)\in A \mid x \geq 0,\ y=0\} \cup \{(x,y,z)\in A \mid z=0\} \cup \{x^2+y^2+z^2=2ax\}\right)$$

Como siempre quitamos curvas que no tienen volumen, para que el conjunto de parámetros D sea abierto.

Veamos ahora que $D = \{(\theta,r)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<r<a\cos\theta,\ \theta\in(0,2\pi)\}$

En primer lugar Φ es C^1 e inyectiva porque se basa en las coordenadas cilíndricas y estas lo son.

Ver observación final $\left(\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Además, si tomamos un punto (x,y,z) que pertenece a

$$A \setminus \left(\{(0,0,0)\} \cup \{x \geq 0, y=0\} \cup \{x^2+y^2+z^2=2ax\}\right) = \hat{A}$$

Podemos tomar $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ y como $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ pertenece al círculo unitario existe un $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que.

$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\Rightarrow$ $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

Ahora tenemos que comprobar que este par $(r,\theta) \in D$.

Como $y \neq 0$ o $\cos\theta < 0 \Rightarrow \theta \neq 0 \Rightarrow \theta \in (0, 2\pi)$

Falta ver que $r < a\cos\theta$.

Como (x,y,z) pertenece al cono $x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow r^2 = z^2 \underset{z \geq 0}{\Leftrightarrow} r = z$

Como (x,y,z) pertenece a la esfera $x^2+y^2+z^2 < 2ax \Leftrightarrow$

$$r^2 + r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow 2r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r < a\cos\theta.$$

Esto prueba que $\hat{A} \subset \Phi(D)$

Si ahora tomamos un par $(r,\theta) \in D$ hay que ver si $\Phi(r,\theta) \in \hat{A}$.

Sea $(r,\theta) \in D \Rightarrow \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$

Se tiene que verificar:

$(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = r^2$ OK

$(r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 + r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow 2r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r < a\cos\theta$ OK

$(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow r \neq 0 \Leftarrow r > 0$ OK

$(r\operatorname{sen}\theta \neq 0$ o $r\cos\theta < 0) \Leftrightarrow \neg(r\operatorname{sen}\theta = 0$ y $r\cos\theta \geq 0) \Leftrightarrow \neg\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta = 0 \\ \cos\theta \geq 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg(\theta = 0) \Leftrightarrow \theta \neq 0$ OK

En resumen,

$$D = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < a\cos\theta \ , \ \underset{\substack{\uparrow \\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}}{\theta \in (0, 2\pi)}\}$$ es un conjunto abierto, con volumen bien definido y que verifica que

$$\Phi(D) = \hat{A}$$

Por tanto tenemos una parametrización de $\hat{A}$.

Para calcular el área de $\hat{A}$ primero tenemos que calcular la norma de sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos\theta\, \vec{i} + r\operatorname{sen}\theta\, \vec{j} - (r\operatorname{sen}^2\theta + r\cos^2\theta)\vec{k} =$$

$$= (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -r)$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}\, r$$

De esta forma

$$\boxed{\text{Área}(A)} = \text{Área}(\hat{A}) = \iint_{\hat{A}} 1 = \iint_D (1 \circ \Phi) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\| d\theta\, dr =$$

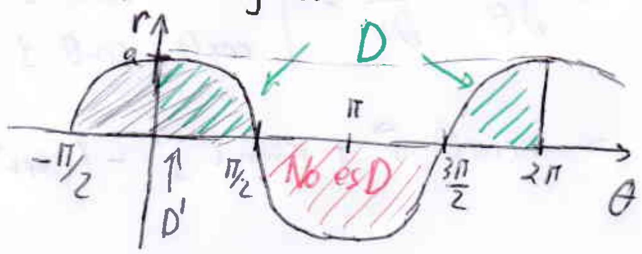
$$= \iint_D \sqrt{2}\, r \; d\theta\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Corolario} \\ \text{Fubini}}}{\overset{(*)}{=}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{2}\, r \, dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4} a^2 \pi}$$

(*) El conjunto $D = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < a\cos\theta \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$ se debe reescribir como $D = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < a\cos\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)\}$ u otro que tenga igual imagen por Φ: $D' = \{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < a\cos\theta, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$

La condición $0 < a\cos\theta$ implica (se supone que el radio es positivo) que $\cos\theta > 0$, es decir, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

Si no hacemos esta consideración y aplicamos el corolario de Fubini con 0 y 2π como extremos de la integral estaremos integrando en un conjunto más grande del que realmente queremos integrar.



Además, para que D sea realmente un conjunto conexo sustituimos el dominio de θ por $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es decir, consideramos D'.

En realidad, la parametrización que se está usando para ser precisos es:

$$\Phi : \underbrace{\{(\theta, r) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < a\cos\theta, \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\}}_{D' \,=} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

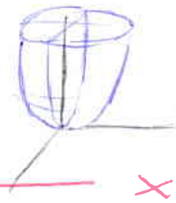
$$\Phi(\theta, r) \longrightarrow \Phi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$$

Nótese que $D \neq D'$ pero $\Phi(D) = \Phi(D') = \hat{A}$

Ejercicio 4.- Calcular la integral de superficie

$\iint_S rot(3y, -xz, yz^2) \cdot d\vec{S}$ siendo S la superficie definida por

$2z = x^2 + y^2 \quad z \leq 2$



Sea $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^3$.

Vamos a calcular esta integral de dos formas y veremos que los resultados son iguales. En primer lugar lo calcularemos directamente y en segundo lugar aplicando el Teorema de Stokes.

De la primera forma

$$\vec{G}(x,y,z) = rot(\vec{F}(x,y,z)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\vec{i} + 0\vec{j} + (-z-3)\vec{k}$$

y la superficie la podemos parametrizar como

$$\Phi_1 : (0, 2\pi) \times (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow \Phi_1(\theta, r) = \left(r\cos\theta, r\,sen\theta, \frac{r^2}{2}\right)$$

Φ_1 es C_1 e inyectiva y $D = (0,2\pi) \times (0,2)$ es abierto y conexo y se verifica que $\Phi_1(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2,\ z < 2\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ z \geq 0\}$ que es igual a S menos dos curvas en las que la integral no varía su cómputo.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= (-r\,sen\theta, r\cos\theta, 0) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= (\cos\theta, sen\theta, r) \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\,sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & sen\theta & r \end{vmatrix} =$$

$$= (r^2\cos\theta, r^2 sen\theta, -r)$$

Nótese que estamos considerando la normal exterior.

Así

$$\boxed{\iint_S \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}} = \iint_S \vec{G}\cdot d\vec{S} = \iint_D (\vec{G}\circ\Phi_1)\cdot\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right) d\theta\, dr =$$

$$= \iint_D \left(\frac{r^4}{4}+r\cos\theta,\ 0,\ -\frac{r^2}{2}-3\right)\cdot\left(r^2\cos\theta,\ r^2\mathrm{sen}\,\theta,\ -r\right) d\theta\, dr =$$

$$= \iint_D \left(\frac{r^6}{4}\cos\theta + r^3\cos^2\theta + \frac{r^3}{2} + 3r\right) d\theta\, dr \underset{\text{Fubini}}{=}$$

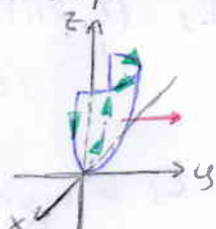
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r^6}{4}\cos\theta\, dr d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\cos^2\theta\, dr d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r^3}{2}\, dr d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r\, d\theta dr =$$

$$= \frac{2^7}{4\cdot 7}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta}_{0} + \frac{2^4}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta + \frac{2^4}{8}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{3\cdot 2^2}{2}\int_0^{2\pi} d\theta =$$

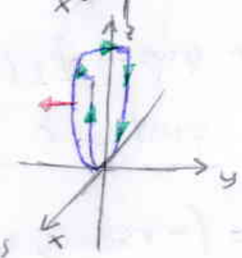
$$= 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta}_{0}\right) + 4\pi + 12\pi = \boxed{20\pi}$$

Si lo resolvemos aplicando el teorema de Stokes, primero tenemos que descomponer S en dos partes que sí sean superficies parametrizadas con borde:

$$S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2+y^2,\ z<2,\ y>0\}$$



$$S_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2+y^2,\ z<2,\ y<0\}$$

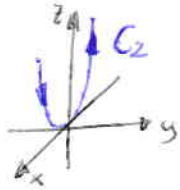


Para que en cada uno de los medios paraboloides las normales sea la exterior, tenemos que recorrer sus bordes de la forma que indican las flechas verdes.

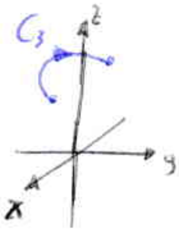
Así ∂S_1 será $C_1 + C_2$ y ∂S_2 será $C_3 + C_2^-$ con

C_1, C_2, C_3 las siguientes curvas simples orientadas:

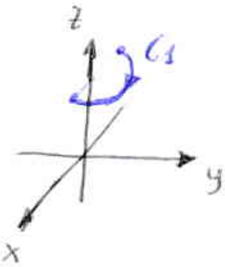
$$\gamma_2 : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{con } \gamma_2([-2,2]) = C_2$$
$$t \longrightarrow \left(t, 0, \frac{t^2}{2}\right)$$



$$\gamma_3 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (-2\cos t, 2\,\text{sen}\, t, 2) \qquad \text{con } \gamma_3([\pi, 2\pi]) = C_3$$



$$\gamma_1 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (-2\cos t, 2\,\text{sen}\, t, 2) \qquad \text{con } \gamma_1([0,\pi]) = C_1$$



Así aplicando el teorema de Stokes a las dos superficies (las hipótesis se verifican trivialmente):

$$\boxed{\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S}} = \iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \text{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} =$$

$$= \iint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \iint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \iint_{C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \iint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

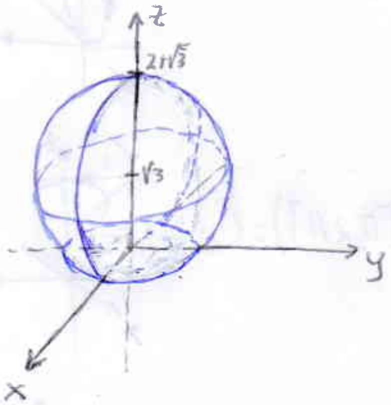
$$= \int_0^{2\pi} (3 \cdot 2\,\text{sen}\, t, +2\cos t \cdot 2, 2\,\text{sen}\, t \cdot 4) \cdot (2\,\text{sen}\, t, 2\cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (12\,\text{sen}^2 t + 8\cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 4\,\text{sen}^2 t\, dt + \int_0^{2\pi} 8\, dt = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt\right) +$$

$$+ 16\pi = 4 \cdot \frac{2\pi}{2} + 16\pi = \boxed{20\pi}$$ que, naturalmente, es el mismo resultado que habíamos obtenido directamente.

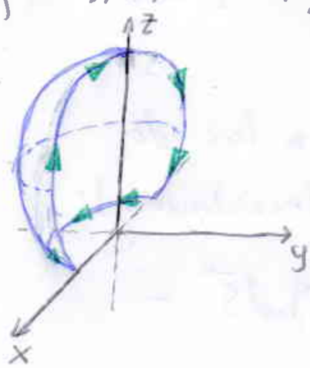
Ejercicio 5.- Calcular $\iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}$ con $\vec{F}(x,y,z)=(y,-x,e^{xz})$

y $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=4,\ z\geq 0\}$

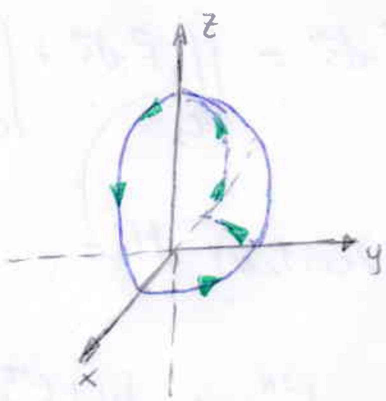


Vamos a aplicar el teorema de Stokes para lo cuál primero necesitamos dividir la superficie en 2 superficies parametrizadas con borde en las que sí podemos aplicar el Teorema de Stokes.

Sea $S_1=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=4,\ z>0,\ y<0\}$



Sea $S_2=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-\sqrt{3})^2=4,\ z>0,\ y>0\}$



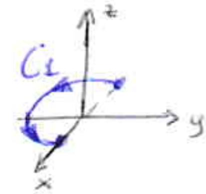
Para que en cada uno de las esferas cortadas las normales sean exteriores tenemos que recorrer sus bordes de la forma que indican las flechas verdes según "la regla del pulgar".

Entonces $\partial S_1 = C_1 + C_3$ y $\partial S_2 = C_2 + C_3^-$ donde

C_1, C_2, C_3 son las siguientes curvas orientadas simples:

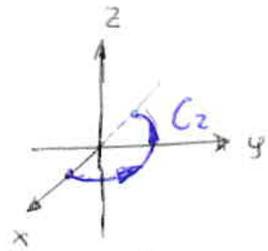
$$\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

$\gamma_1([\pi,2\pi]) = C_1$



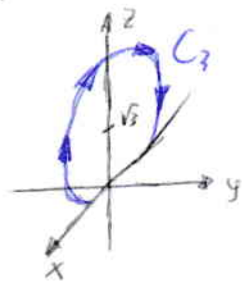
$$\gamma_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$$

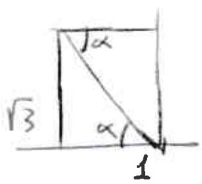
$\gamma_2([0,\pi]) = C_2$

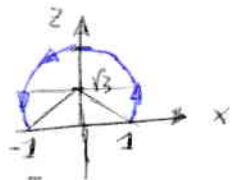


$$\gamma_3 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (2\cos t, 0, 2\operatorname{sen} t) + \sqrt{3})$$

$\gamma_3\left(\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]\right) = C_3$







$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\pi/3}$$

De esta forma, aplicando el teorema de Stokes a cada una de las superficies

$$\boxed{\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}} = \iint_{S_1} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} =$$

$$= \iint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \iint_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \iint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \iint_{C_3^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \iint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \bullet (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, -\cos t, 1)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = -\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \boxed{-2\pi}$$