MÉTODO DE PLANOS DE CORTE EN PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Sea

$$z^* = min\left\{c^t x \;/\; Ax = b, x \geq 0 \; y \; x_j \; entero \; para \; j \in \{1, \dots, n\}\right\}$$

Siendo los elementos de la matriz *A* y las componentes del vector *b* números enteros.

Puesto que todas las variables deben ser enteras, se considera, un problema de programación entera pura.

Se denomina relajación lineal o relajación continua del problema anterior al problema lineal,

$$min\{c^t x \;/\; Ax = b, x \geq 0\}$$

Sea

$$S = \{x \;/\; Ax = b, x \geq 0\}$$

y sea $\tilde{S}$ la envoltura convexa de los puntos enteros de *S*. *Se supone que S es un poliedro acotado*.

Las posibles soluciones óptimas de la relajación lineal son los puntos extremos de *S*, mientras que las posibles soluciones óptimas del problema entero son los puntos extremos de $\tilde{S}$.

Cuando se debe resolver un problema entero, en primer lugar se resuelve su relajación lineal continua. Si la solución óptima obtenida es un punto x^* entero, entonces dicha solución es también solución óptima del problema entero. En otro caso, se precisa de un método para resolver el problema entero inicial.
Aun cuando la resolución de la relajación lineal no produzca directamente una solución entera, es posible el uso (iterativo) de la Programación Lineal para resolver un problema de Programación Lineal Entera.

Definición:
Dado un poliedro *S* y un punto extremo x^* fraccional de *S*, se llama *corte* a una desigualdad

$$d^t x \leq d_0$$

válida para todos los puntos enteros de *S* y violada por x^*.

Dado un punto extremo fraccional x^* de un poliedro *S*, el problema de determinar un corte que separe a x^* de los puntos enteros de *S*, se denomina *problema de separación*. El algoritmo de planos de corte asume disponer de un procedimiento que resuelva el problema de separación. Dicho algoritmo se describe a continuación:

COMENZAR

Resolver la relajación lineal. Sea x^* una solución óptima.

Mientras x^* no sea entero, HACER

Encontrar un corte $d^t x \leq d_0$ que separe x^* de las posibles soluciones enteras;

resolver la relajación lineal con la nueva desigualdad adicional. Sea x^* una solución óptima.

FINALIZAR

Podría ocurrir que un problema lineal fuese infactible, en cuyo caso el problema entero también lo sería.

Una forma de obtener cortes de tipo general, es mediante la siguiente derivación debida a Chvátal:

Sea $u \in R^m$ un vector arbitrario. Entonces la igualdad $u^t A x = u^t b$ es válida para todo el poliedro *S*. Denotando por $a_j,\ j = 1, \dots, n$, las columnas de *A*, la anterior igualdad se puede expresar como

$$\sum_{j=1}^{n} u^t a_j x_j = u^t b$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^t a_j \rfloor x_j \leq u^t b$$

es también válida para todo el poliedro *S*. Ahora bien, la igualdad

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor u^t a_j \rfloor x_j \leq \lfloor u^t b \rfloor$$

Es válida para todos los puntos enteros en *S*, y quizás no para todo *S*. Esta última igualdad se denomina *derivación de Chvátal* mediante el vector *u*.

Teorema

Si x^* es un punto extremo no entero de S, entonces existe un vector tal que su derivación de Chvátal es un corte que separa x^* de los puntos enteros de S.

A continuación se expone una metodología constructiva, debida a *Gomory*, para encontrar tal vector, además de demostrar el teorema.

Supongamos que se ha resuelto la relajación lineal del problema entero. Sea B la base óptima obtenida, y por tanto,

$$x^* = \begin{cases} x_B^* = B^{-1}b = \bar{b} \\ x_N^* = 0 \end{cases}$$

es la solución óptima. Si dicha solución no es entera, entonces existe un índice $r \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{b}_r$ no es entero. Se considera la *r*-ésima ecuación obtenida en la tabla final del símplex:

$$x_{B_r} + \sum_{j \in J_N} y_{rj} x_j = \bar{b}_r$$

siendo J_N el conjunto de índices de las variables no básicas. Esta fila se ha obtenido pivotando desde el sistema inicial, y por tanto existe un vector *u* tal que dicha fila es

$$u^t A x = u^t b$$

siendo u^t la *r*-ésima fila de la matriz B^{-1}.

Si se considera la desigualdad

$$x_{B_r} + \sum_{j \in J_N} \lfloor y_{rj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_r \rfloor$$

se obtiene una derivación de Chvátal válida para todas las soluciones del problema entero y violada por el punto x^*, es decir, un corte; que se denomina *corte de Gomory*.

Una forma alternativa de expresar el corte de Gomory, resulta de restar la última desigualdad de la igualdad anterior, obteniéndose

$$\sum_{j \in J_N} \left(y_{rj} - \lfloor y_{rj} \rfloor \right) x_j \geq \bar{b}_r - \lfloor \bar{b}_r \rfloor$$

que se denomina ***forma fraccional del corte de Gomory***, puesto que los coeficientes que contiene coinciden con la parte fraccional de los coeficientes de la ecuación generatriz.

Las variables de holgura de las dos formas alternativas de un corte de Gomory, son en realidad la misma, y además sólo pueden tomar valores enteros, al ser las restantes variables enteras. Esto garantiza que los nuevos problemas lineales ampliados son de Programación Entera Pura.