Ej 3.- $(X_1 - X_n)$ m.a.s. con $X \sim f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$ $\theta > 0$

si $\pi(\theta) \sim U(0,1)$, hallar la mediana de la distribución a posteriori

$$f(x_1 -- x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x_i) = 2^n \cdot \frac{1}{\theta^{2n}} \prod_{i=1}^{n} x_i \; I_{(0,\infty)}(x_{(1)}) \cdot I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)})$$

$$\pi(\theta) = I_{[0,1]}(\theta)$$

$$\pi(\theta|x_1 -- x_n) = \frac{\pi(\theta) \cdot f(x_1 - x_n|\theta)}{\int_0^1 \pi(\theta) f(x_1 - x_n|\theta) d\theta}$$

Nótese que $\pi(\theta|x_1 - x_n)$ sólo está definido cuando $f(x_1 -- x_n|\theta) \neq 0$ es decir, cuando $x_{(1)} \in (0, \infty)$.

Con esta hipótesis

$$\pi(\theta|x_1 - x_n) = \frac{2^n \cdot \frac{1}{\theta^{2n}} \cdot \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i \; I_{(0,\infty)}(x_{(1)})} \cdot I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)}) \cdot I_{[0,1]}(\theta)}{\int_0^1 \cancel{2^n} \frac{1}{\theta^{2n}} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i \; I_{(0,\infty)}(x_{(1)})} \cdot I_{(-\infty,\theta)}(x_{(n)}) \cdot d\theta} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\theta^{2n}} I_{(x_{(n)},\infty)}(\theta) \cdot I_{[0,1]}(\theta)}{\int_0^1 \frac{1}{\theta^{2n}} I_{(x_{(n)},\infty)}(\theta) \, d\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^{2n}} I_{(x_{(n)},1)}(\theta)}{\int_{x_{(n)}}^1 \frac{1}{\theta^{2n}} d\theta} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\theta^{2n}} I_{(x_{(n)},1)}(\theta)}{\left. \frac{\theta^{1-2n}}{1-2n} \right]_{x_{(n)}}^1} = \frac{1-2n}{\theta^{2n}} \cdot \frac{I_{(x_{(n)},1)}(\theta)}{1 - x_{(n)}^{1-2n}}$$

Por tanto $\pi(\theta|x_1 -- x_n) \sim f(\theta|x_1 -- x_n) = \begin{cases} \nexists & \text{si } x_{(1)} \leq 0 \\ \frac{1-2n}{\theta^{2n}} \cdot \frac{I_{(x_{(n)},1)}(\theta)}{1 - x_{(n)}^{1-2n}} & \text{en c.c.} \end{cases}$

Para calcular la mediana despejamos la x de la ecuación $\frac{1}{2} = F(x)$ dado que estamos en una distribución continua.