MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Problemas
Hoja 3. Resolución de sistemas lineales: métodos directos

1 **Método de Gauss–Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz**. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Adaptar la demostración del método de Gauss para probar que existe una matriz inversible $\widetilde{M}$ de manera que $\widetilde{M}A$ sea la identidad.

b) Explicar cómo se puede utilizar el resultado del apartado anterior (*método de Gauss–Jordan*) para el cálculo de la inversa de la matriz A.

2 Demostrar que la factorización LU sigue siendo posible si A es singular, siempre que los $n-1$ menores principales $\delta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1$, sean no nulos. Probar que, en ese caso, $u_{nn} = 0$.

3 a) Sea A una matriz cuadrada. Adaptar el método de eliminación de Gauss para probar que existe M inversible tal que MA es triangular inferior.

b) Encontrar condiciones suficientes para que una matriz A pueda factorizarse en la forma $A = UL$ con U triangular superior y L triangular inferior. ¿Es única tal factorización?

4 Sea A una matriz simétrica inversible (aunque no necesariamente definida positiva) que admite factorización LU. Probar que se puede escribir $A = B\widetilde{B}^{\mathrm{T}}$ donde B es triangular inferior y las columnas de $\widetilde{B}$ son las de B salvo, quizá, el signo.

5 ¿Cuántas factorizaciones de Cholesky distintas (es decir, sin suponer que los elementos diagonales de B son positivos) admite una matriz simétrica definida positiva?

6 Se considera una matriz A cuyos menores principales son todos no nulos.

a) Demostrar que A se puede factorizar en la forma $A = LDR$ con L triangular inferior, R triangular superior, $l_{ii} = r_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$ y D diagonal. Encontrar fórmulas para los elementos de L, D y R.

b) Probar que si A es simétrica entonces $R = L^{\mathrm{T}}$. Adaptar las fórmulas anteriores para el caso en que A sea simétrica.

c) ¿Cómo resolverías, mediante a) –o b), en el caso de que A sea simétrica– el sistema $Au = b$?

7 **Algoritmo para la resolución de sistemas tridiagonales**. Se considera el sistema lineal $Ax = d$ para una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

a) Llamando $\delta_0 = 1$ y δ_k al menor principal de orden k de A ($k = 1, 2, \ldots, n$) probar, desarrollando el determinante por la última columna, que

$$\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

b) Definimos las sucesiones

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = b_1 \\ m_k = b_k - \dfrac{c_{k-1}}{m_{k-1}}a_k,\ k = 2, 3, \ldots, n \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} g_1 = \dfrac{d_1}{m_1} \\ g_k = \dfrac{d_k - g_{k-1}a_k}{m_k},\ k = 2, 3, \ldots, n. \end{array}\right.$$

Probar que $m_k = \dfrac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ y deducir que si $\delta_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$ entonces $m_k \neq 0$ y, por tanto, los números m_k y $g_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$, están bien definidos.

c) Demostrar que la solución del sistema viene dada por

$$x_n = g_n \ \text{ y } \ x_k = g_k - \frac{c_k}{m_k}x_{k+1},\ k = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

d) Comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{a_2}{m_1} & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{a_{n-1}}{m_{n-2}} & 1 & \\ & & & \frac{a_n}{m_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & c_1 & & & \\ & m_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & m_n \end{pmatrix}$$

es la factorización LU de la matriz A.

8 a) Probar que la factorización LU preserva la estructura de matrices banda, es decir, si $a_{ij} = 0$ para $|i-j| \geq p$ entonces $l_{ij} = 0$ para $i - j \geq p$ y $u_{ij} = 0$ para $j - i \geq p$.

b) Demostrar el mismo resultado para la factorización de Cholesky.

9 **Factorización de Cholesky: demostración alternativa**.

a) Se considera una matriz A simétrica cuyos menores principales son todos positivos. Si se escribe A en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1},\ a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, demostrar que $\alpha - a^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{-1}a > 0$.

(**Indicación**: aplicar el método de Gauss por bloques para anular el bloque ocupado por a^{T}).

b) En el supuesto de que A_{n-1} admita factorización de Cholesky de la forma

$$A_{n-1} = B_{n-1}(B_{n-1})^{\mathrm{T}},$$

¿cómo deben elegirse $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1}^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right)?$$

Probar que tal elección de x y β es posible.

c) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, la existencia de factorización de Cholesky para una matriz simétrica cuyos menores principales son todos positivos.

d) Deducir, del apartado c), que toda matriz simétrica con menores principales positivos es definida positiva.

10 **Cálculo recursivo de la inversa de una matriz**.

a) **Fórmula de Sherman–Morrison**. Sea $B \in \mathcal{M}_n$ real e inversible y sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que la matriz $B + uv^{\mathrm{T}}$ es inversible. Comprobar que

$$(B + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^{\mathrm{T}}B^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}}B^{-1}u}.$$

b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz escrita en la forma

$$A = D + \sum_{i=1}^{m} u_i v_i^{\mathrm{T}}$$

donde D es una matriz diagonal e inversible y los vectores $u_i, v_i \in \mathbb{R}^n$ son tales que las m matrices

$$M_k = D + \sum_{i=1}^{k} u_i v_i^{\mathrm{T}}$$

para $k = 1, 2, \ldots, m$ son inversibles. Si $C_k = (M_k)^{-1}$, encontrar una fórmula recurrente para C_{k+1}.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica definida positiva. Demostrar que A se puede escribir en la forma

$$A = D + \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}$$

siendo $\mathbf{e}_i$ el i–ésimo vector de la base canónica, verificándose las hipótesis requeridas en b).

d) Razonar cómo pueden usarse los resultados anteriores para calcular la inversa de una matriz simétrica definida positiva.