



Asignatura..... Fecha

Alumno/a..... Curso..... Nº.....

Apellidos

Nombre

12.- Halla el orden del cero $z_0=0$ para las siguientes funciones:

a) $f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z=0 \\ \frac{\sin^3 z}{z} & \text{si } z \neq 0. \end{cases} \quad f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Haciendo el desarrollo de Taylor del $\sin z$ en $z_0=0$ obtenemos que

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n \quad \text{donde } \varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n \quad \text{y } \sin z \text{ tiene un cero en } 0 \text{ de multiplicidad } 1 \text{ por lo que } \sin z = z \cdot h(z) \text{ con } h(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } h(0) \neq 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3 z}{z} = \frac{z^3 \cdot h^3(z)}{z} = z^2 \cdot h^3(z) \quad \text{con } h^3(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } h^3(0) \neq 0.$$

Por tanto $f(z)$ tiene un cero en z de multiplicidad 2.

b) $f(z) = e^{\sin z} - e^{\tan z}$

$$f(0) = e^0 - e^0 = 0 \quad \text{por lo que } f \text{ tiene un cero en } 0.$$

$$f'(z) = e^{\sin z} \cdot \cos z - e^{\tan z} \cdot (1 + \tan^2 z) = e^{\sin z} \cdot \cos z - e^{\tan z} - e^{\tan z} \tan^2 z$$

$$f'(0) = e^0 \cdot 1 - e^0 (1 + 0) = 0$$

$$f''(z) = e^{\sin z} \cdot \cos^2 z + e^{\sin z} \cdot (-\sin z) - e^{\tan z} (1 + \tan^2 z)^2 - e^{\tan z} \cdot 2 \tan z (1 + \tan^2 z)$$