Por tanto

$$\operatorname{div}(\vec{F}(x,y,z)) = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

Luego.
$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \underline{\underline{0}}$$

Nótese que los cálculos son muy similares al ejercicio 1 apartado d) de la primera hoja donde se nospedía probar que el Laplaciano del potencial gravitatorio es cero. Salvo constantes $\vec{F} = \nabla f$ con f el potencial gravitatorio.

Ejercicio 3.- Demostrar la identidad

$$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G}).$$

Sean $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$

Si desarrollamos el lado de la izquierda:

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (F_2G_3 - F_3G_2)\vec{i} + (F_3G_1 - F_1G_3)\vec{j} + (F_1G_2 - F_2G_1)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_2G_3 - F_3G_2) + \frac{\partial}{\partial y}(F_3G_1 - F_1G_3) + \frac{\partial}{\partial z}(F_1G_2 - F_2G_1) =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\cdot\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}.$$