Matemática Discreta y Lógica Matemática

Facultad de Informática. Hoja de ejercicios 12

Lógica Proposicional: consecuencia lógica y tableaux proposicionales.

1. Estudia la validez de $\{p \to r, q \to r\} \models (p \vee q) \to r$, usando la definición de consecuencia lógica, es decir mediante la correspondiente tabla de verdad.

2. Demuestra los dos teoremas de deducción:

   a) $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \Longleftrightarrow \Phi \models \varphi \to \psi$

   b) $\Phi \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi \Longleftrightarrow \Phi \models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \psi$

3. Aplica el primer teorema de deducción para demostrar:

   a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi \Longleftrightarrow \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to (\ldots(\varphi_n \to \psi))))$ es una tautología

   b) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \psi \Longleftrightarrow \varphi_n \to (\varphi_{n-1} \to (\varphi_{n-2} \to (\ldots(\varphi_1 \to \psi))))$ es una tautología

4. Demuestra el teorema de reducción al absurdo: $\Phi \models \psi \Longleftrightarrow \Phi \cup \{\neg\psi\}$ es insatisfactible.

5. Estudia de nuevo la validez de $\{p \to r, q \to r\} \models (p \vee q) \to r$ de dos formas:

   a) Usando las leyes de equivalencia lógica, reduciendo a $\top$.

   b) Usando las leyes de equivalencia lógica, reduciendo a $\perp$.

6. Dado un conjunto de fórmulas Φ y una fórmula φ, razona sobre la posibilidad de que los siguientes apartados sean ciertos:

   a) $\Phi \models \varphi$ y $\Phi \models \neg\varphi$

   b) $\Phi \models \varphi$ y $\Phi \not\models \neg\varphi$

   c) $\Phi \not\models \varphi$ y $\Phi \models \neg\varphi$

   d) $\Phi \not\models \varphi$ y $\Phi \not\models \neg\varphi$

7. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi, \chi_1, \chi_2$ fórmulas proposicionales y $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$. Clasifica las siguientes afirmaciones según sean ciertas o no. Tu respuesta no debe hacer ninguna suposición adicional sobre la forma concreta de las fórmulas sobre las que se razona.

   a) si φ_2 es insatisfactible, entonces $\Phi \models \psi$

   b) si ψ es insatisfactible, entonces $\Phi \models \psi$

   c) si φ_2 es insatisfactible entonces $\Phi \not\models \psi$

   d) si ψ es insatisfactible, entonces $\Phi \not\models \psi$

   e) si $\Phi \models \psi$, entonces $\Phi \not\models \neg\psi$

   f) si $\Phi \models \psi$ y $\Phi \models \neg\psi$, entonces Φ es insatisfactible

   g) si $\Phi \models \chi_1 \to \chi_2$ y $\chi_1 \sim \psi$, entonces $\Phi \models \psi \to \chi_2$

   h) si $\Phi \models \chi_1$ y $\chi_1 \sim \psi$, entonces $\Phi \models \psi$

8. Sabemos que $\{p \to r, q \to r\} \models (p \vee q) \to r$ es correcta por varios ejercicios anteriores. Usa este hecho y la relación de equivalencia para asegurar rápidamente que también se dan:

   a) $\{p \to r, \neg(q \wedge \neg r)\} \models (p \vee q) \to r$

   b) $\{p \to r, \neg(q \wedge \neg r)\} \models \neg((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r))$

9. Demuestra que las siguientes fórmulas son tautologías usando el método de los tableaux:

   a) $\neg\neg p \leftrightarrow p$
   b) $p \to (p \vee q)$
   c) $p \to (q \to p)$
   d) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$
   e) $(p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow p$
   f) $((p \to q) \to p) \to p$
   g) $(p \to r) \wedge (q \to r) \to ((p \vee q) \to r)$
   h) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

10. Estudia la validez de las siguientes equivalencias usando tableaux:

   a) $p \to (q \to r) \sim (p \wedge q) \to r$
   b) $p \leftrightarrow q \sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
   c) $(p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow p \sim q \vee p$

11. Demuestra las siguientes consecuencias lógicas mediante tableaux:

   a) $\{p \to r, q \to r\} \models (p \vee q) \to r$
   b) $\{p \to q, p \to \neg q\} \models \neg p$
   c) $\{p \to (q \vee r), q \to \neg p\} \models p \to r$
   d) $\{p \vee q, q \to (p \vee r)\} \models p \vee r$
   e) $\{(p \wedge q) \to r, \neg p \to s\} \models q \to (r \vee s)$

   ¿Qué sucedería en el último apartado si la consecuencia fuera $q \to r$? Construye un contraejemplo que muestre que la consecuencia lógica ya no sería válida.

12. Se ha cometido un robo y se ha detenido a los únicos sospechosos posibles: p, q y r. En los siguientes problemas averigua quién o quiénes son necesariamente culpables:

   a) Se sabe que el o los ladrones huyeron en coche. También se sabe que r no actúa sin p, y que q no sabe conducir.
   b) Se sabe que p sólo trabaja si cuenta con algún cómplice, y que r es inocente.
   c) Se sabe que si p es inocente o q culpable entonces r es culpable, y que r es inocente si p lo es.
   d) p y r son gemelos idénticos y se sabe que son bastante tímidos, por lo que nunca trabajan sin otro de los sospechosos. q en cambio, de hacerlo, lo hace solo. Además se sabe que, en el momento del robo, uno de los gemelos estaba bebiendo en un bar.

13. En una isla viven escuderos y caballeros. Los primeros siempre mienten y los segundos siempre dicen la verdad. En los siguientes casos averigua qué es cada una de las personas que intervienen.

   a) Nos encontramos con dos personas A y B, y el primero dice: "si yo soy caballero entonces también lo es B"
   b) Nos encontramos con tres personas A, B y C. A declara: "B es caballero" y B afirma: "A es caballero sólo si C también lo es"
   c) Nos encontramos con dos personas A y B, y el primero dice: "si B es caballero, yo soy escudero".

d) X e Y son sospechosos de haber cometido un robo y A y B son testigos en el juicio. A declara: “si X es culpable, lo es Y”. B declara: “ X es inocente o Y es culpable”. ¿Son A y B ambos caballeros o escuderos?

14. Porcia tenía tres cofres, uno de oro, otro de plata y otro de plomo, y dentro de uno de ellos estaba guardado su retrato. El hombre que la pretendiera debía acertar en qué cofre estaba el retrato a partir de las inscripciones que estos tenían. En los siguientes casos, averigua dónde se encuentra el retrato:

    a) El cofre de oro tiene escrito: “ el retrato está en este cofre”; el de plata : “el retrato no está aquí”, y el de plomo: “el retrato no está en el de oro”. Se sabe además que a lo sumo una de las inscripciones es cierta.

    b) El cofre de oro tiene: “el retrato no está en el de plata”; el de plata: “el retrato no está aquí”, y el de plomo: “el retrato está aquí”. Se sabe además que, al menos, hay una inscripción verdadera y otra falsa.

    c) Los cofres tienen ahora dos inscripciones. El cofre de oro tiene: “(1) el retrato no está aquí, (2) el retrato lo hizo por completo un artista veneciano”; el de plata: “(1) el retrato no está en el cofre de oro, (2) el retrato lo hizo por completo un artista florentino”, y el de plomo: “(1) el retrato no está aquí, (2) el retrato está en el cofre de plata”. Se sabe además que hay, a lo más, una inscripción falsa por cofre.

    d) Los cofres siguen teniendo dos inscripciones. El de oro: “(1) el retrato no está aquí, (2) el retrato está en el cofre de plata”; el de plata: “(1) el retrato no está en el cofre de oro, (2) el retrato está en el de plomo”, y el de plomo: “(1) el retrato no está aquí, (2) el retrato está en el cofre de oro”. Se sabe además que hay un cofre con las dos inscripciones ciertas, otro con las dos falsas, y que el de oro tiene una cierta y otra falsa.

15. Formaliza y demuestra el siguiente razonamiento: “Voy sólo si no vienes. Si no voy, pero vienes, te espero arriba o abajo. Si vienes, abajo no estoy. No estoy arriba, luego estoy abajo cuando vienes”.