Tema 2 (Primera parte): Inducción y recursión.

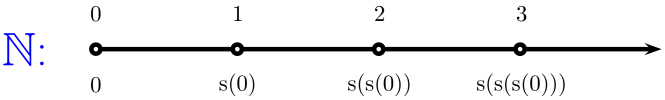
David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

El conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots\}$$

- $\mathbb{N}$ puede generarse a partir del 0 aplicando reiteradamente la función sucesor s: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que asigna a cada natural n el que le sigue, es decir $n + 1$



AXIOMAS DE PEANO

Se define el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales mediante los cinco axiomas siguientes:

1. Existe un elemento de $\mathbb{N}$ que llamamos 0 (Primer natural)
2. Existe la llamada función sucesor $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s(n) \in \mathbb{N}$
   (El sucesor de un número natural es otro número natural y es único)
3. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ s(n) \neq 0$ (El 0 no es el sucesor de ningún número natural)
4. $\forall\, n,m \in \mathbb{N},\ ((s(n) = s(m)) \to (n = m))$
   (No existen dos números naturales distintos con el mismo sucesor)
5. $\forall\, A \subseteq \mathbb{N} \quad (((0 \in A) \wedge (\forall\, n \in A,\ s(n) \in A)) \to (A = \mathbb{N}))$
   (Todo conjunto numérico A al que pertenece el 0 y dónde todo elemento de A tiene su sucesor en A, necesariamente coincide con $\mathbb{N}$)

- $\mathbb{N}$ es cerrado con respecto a las operaciones suma y producto
- $\mathbb{N}$ es un conjunto ordenado mediante la relación $\leq$ definida así: $\forall$ m, n $\in \mathbb{N}$, decimos que m es menor o igual que n, y lo escribimos $m \leq n$, si ambos son iguales o podemos obtener n a partir de m aplicando reiteradamente la función sucesor. Si $m \leq n$ y $m \neq n$ escribimos $m < n$
- **Principio de buena ordenación (PBO):** Todo subconjunto A no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo (primer elemento)
- Dado $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} \,|\, m \leq n\}$

Principio de inducción

Para toda propiedad P definida sobre $\mathbb{N}$, **si** se verifica:

- $P(0)$ **(caso base)**, y
- Para todo k de $\mathbb{N}$ **(paso inductivo)**:
  - si la verificación de $P(k)$ **(hipótesis de inducción (HI))** implica que se verifique $P(k+1)$ **(caso inductivo (CI))**

entonces $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(n)$

O como regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} \textbf{Base: } P(0) \\ \textbf{Paso inductivo: } \forall\ k \in \mathbb{N},\ (\overbrace{P(k)}^{(HI)} \rightarrow \overbrace{P(k+1)}^{(CI)}) \\ \hline \therefore\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ P(n) \end{array}$$

Ej.. Demostrar que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

Dem.:

$$P(n):\ \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \quad \text{donde} \quad \sum_{i=m}^{n} s_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < m \\ s_n & \text{si} \quad n = m \\ \sum_{i=m}^{n-1} s_i + s_n & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

Caso base: n $= 0$ $\quad \sum_{i=1}^{0} 2i = 0 = 0(0+1)$

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$

HI: P(k): $\sum_{i=1}^{k} 2i = k(k+1)$

CI: P(k+1): $\sum_{i=1}^{k+1} 2i = (k+1)(k+2)$

¿ P(k) $\rightarrow$ P(k+1) ?

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} 2i &= \sum_{i=1}^{k} 2i + 2(k+1) && [\text{def. } \textstyle\sum] \\ &= k(k+1) + 2(k+1) && [\text{HI}] \\ &= (k+1)(k+2) && [\text{Factor común}] \end{aligned}$$

Luego $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

Ej.. Demostrar que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\underbrace{(3^{2n}+4^{n+1}) \text{ es múltiplo de } 5}_{P(n)}$

Dem.:

$$P(n) \sim \exists m \in \mathbb{Z},\ (3^{2n}+4^{n+1}=5m)$$

Caso base: $n=0 \quad 3^{2\cdot 0}+4^{0+1}=1+4=5$

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$

HI: P(k): $\exists\ m \in \mathbb{Z},\ (3^{2k}+4^{k+1}=5m)$

CI: P(k+1): $\exists\ m \in \mathbb{Z},\ (3^{2(k+1)}+4^{(k+1)+1}=5m)$

¿ P(k) $\rightarrow$ P(k+1) ?

$$3^{2(k+1)}+4^{(k+1)+1}=3^{2k+2}+4\cdot 4^{(k+1)}= \quad 9\cdot 3^{2k}+4\cdot 4^{(k+1)}$$

$= (4+5)3^{2k}+4\cdot 4^{(k+1)}$

$= 4(3^{2k}+4^{(k+1)})+5\cdot 3^{2k}$ [Factor común]

$= 4\cdot 5m+5\cdot 3^{2k}$ para un cierto $m \in \mathbb{Z}$ [HI]

$= 5(4m+3^{2k})$ para un cierto $m \in \mathbb{Z}$ [Factor común]

$= 5m'$ para un cierto $m' \in \mathbb{Z}$ [en concreto: $m' = 4m + 3^{2k} \in \mathbb{Z}$, pues $\mathbb{Z}$ es cerrado bajo $+$ y $\times$]

Luego $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $(3^{2n}+4^{n+1})$ es múltiplo de 5

INDUCCIÓN SIMPLE SOBRE $\mathbb{N}_m$

Para toda propiedad P definida sobre $\mathbb{N}_m$, **si** se verifica:

- $P(m)$ **(caso base 1)**, $P(m+1)$ **(caso base 2)**, $\cdots$ y $P(m+i)$ **(caso base i+1)**
- Para todo k de $\mathbb{N}_m$ tal que $k \geq (m+i)$ **(paso inductivo)**:
  - si la verificación de $P(k)$ **(hipótesis de inducción (HI))** implica que se verifique $P(k+1)$ **(caso inductivo (CI))**

entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}_m,\ P(n)$

O como regla de inferencia:

$$\begin{array}{l} \textbf{Base: } P(m) \wedge P(m+1) \wedge \cdots \wedge P(m+i) \\ \textbf{Paso inductivo: } \forall\, k \in \mathbb{N}_{m+i},\ (\overbrace{P(k)}^{(HI)} \rightarrow \overbrace{P(k+1)}^{(CI)}) \\ \hline \therefore\ \forall n \in \mathbb{N}_m\ ,\ P(n) \end{array}$$

Ej.. Demostrar que $\forall\ n \geq 4,\ \ 2^n < n!$

Dem.:

$$P(n):\ 2^{n} < n!$$

Caso base: $n = 4,\ \ 2^4 = 16 < 4! = 24$

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}_4$ (es decir $k \in \mathbb{N},\ \ k \geq 4$)

HI: $P(k)$: $2^{k} < k\,!$

CI: $P(k{+}1)$: $2^{k+1} < (k{+}1)!$

¿ $P(k) \to P(k{+}1)$?

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^{k} \\ &< 2 \cdot k! && [\text{HI}] \\ &< (k+1)\cdot k! && [k+1 > 2 \ \text{ ya que } \ k \geq 4] \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Luego $\forall\ n \geq 4,\ \ 2^n < n!$

Obs: $P(n)$ no es cierta para $n \leq 3$

A veces para demostrar que P(k) es cierta, no es suficiente con suponer en el paso inductivo que el predecesor cumple la propiedad , sino que se necesita que todos los valores anteriores a k también la cumplan

INDUCCIÓN COMPLETA SOBRE $\mathbb{N}_m$

Para toda propiedad P definida sobre $\mathbb{N}_m$, **si** se verifica:

- $P(m)$ **(caso base 1)**, $P(m+1)$ **(caso base 2)**, $\cdots$ y $P(m+i)$ **(caso base i+1)**
- Para todo k de $\mathbb{N}_m$ tal que $(m+i) < k$ **(paso inductivo completo)**:
  - si la verificación de $P(l)$ $\forall l \in \mathbb{N}_m$ tal que $m \leq l < k$ **(hipótesis de inducción completa (HIC))**

    implica que se verifique $P(k)$ **(caso inductivo completo (CIC))**

entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}_m,\ P(n)$

Ej.. Demostrar que "Todo número natural mayor o igual que 4 puede expresarse como suma de (dos o más) primos"

Dem.: P(n): n puede expresarse como suma de primos.

Casos base:

n = 4, n = 2 + 2
n = 5, n = 2 + 3
n = 6, n = 3 + 3

Paso inductivo completo: Dado k ≥ 7

HIC: $\forall$ l , $4 \leq$ l $<$ k, l puede expresarse somo suma de primos

CIC: k puede expresarse somo suma de primos

¿(P(4)$\wedge$ P(5) $\wedge$ P(6) $\wedge \cdots \wedge$ P(k-1)) $\rightarrow$ P(k) ?

k = (k -3) + 3
 = suma de primos [HIC ya que $4 \leq$ k-3 $<$ k por ser k ≥ 7]

Luego $\forall$ n $\in \mathbb{N}_4$, P(n) (Todo número natural mayor o igual que 4 puede expresarse como suma de (dos o más) primos)

Con uno o varios casos base para $\mathbb{N}_m$

Ej.. Demostrar que "Para todo número natural n mayor o igual que 1, realizar el producto de n números requiere al menos $n-1$ multiplicaciones, independientemente del orden en que se asocien los factores al hacerlo"

Dem.: P(n): el producto de n factores requiere $n-1$ multiplicaciones.

Caso base: $n = 1$. El cálculo de un producto (degenerado) con sólo 1 factor no requiere multiplicaciones (observese que $0 = 1 - 1$).

Paso inductivo completo: Dado $k \geq 2$

HIC: $\forall\, l\,,\ \ 1 \leq l < k$, se cumple que

$$\underbrace{\text{el producto de } l \text{ factores requiere } l{-}1 \text{ multiplicaciones}}_{P(l)}.$$

CIC: P(k): el producto de k factores requiere k-1 multiplicaciones.

¿(P(1)$\wedge$ P(2) $\wedge \cdots \wedge$ P(k-1)) $\rightarrow$ P(k) ?

¿(P(1)$\wedge$ P(2) $\wedge \cdots \wedge$ P(k-1)) $\rightarrow$ P(k) ?

Al realizar el producto de k números la última operación será de la forma:

$$(a_1 \cdot \ldots \cdot a_m) \cdot (a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_k)$$

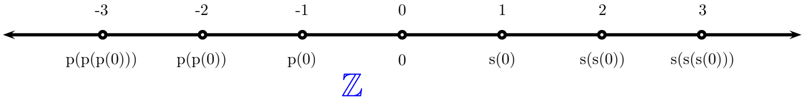
donde $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_m)$ y $(a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_k)$ son respectivamente el producto de m y $k - m$ números, con $1 \leq m < k$ y $1 \leq k - m < k$, así que podemos aplicar la HIC sobre ambos. Esta nos asegura que el primero requiere al menos $m - 1$ multiplicaciones y que el segundo requiere al menos $k - m - 1$, luego el producto de k factores requerirá al menos $(m - 1) + (k - m - 1) + 1 = k - 1$ multiplicaciones, con lo que queda demostrada la implicación (P(1)$\wedge$ P(2) $\wedge \cdots \wedge$ P(k-1))$\rightarrow$ P(k)

Luego $\forall$ n $\in \mathbb{N}_1$, P(n)

El conjunto de los números enteros (1)

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- $\mathbb{Z}$ puede generarse a partir del 0 aplicando reiteradamente bien la función sucesor s: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ o la predecesor p: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, que asignan respectivamente a cada entero n el que le sigue, es decir $s(n) = n + 1$ y el que le precede, es decir $p(n) = n - 1$. Estas dos operaciones generadoras están relacionadas así : $s(p(n)) = n = p(s(n))$



El conjunto de los números enteros (2)

- Existe un elemento de $\mathbb{Z}$ que llamamos 0.
- Existe la llamada función sucesor s: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, s(n) $\in \mathbb{Z}$ (El sucesor de un número entero es otro número entero y es único)
- Existe la llamada función predecesor p:$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $\forall$n$\in \mathbb{Z}$, p(n)$\in \mathbb{Z}$ (El predecesor de un número entero es otro número entero y es único)
- $\forall$ n,m $\in \mathbb{Z}$, $(s(n) = s(m)) \to (n = m)$ (No existen dos números enteros distintos con el mismo sucesor)
- $\forall$ n,m $\in \mathbb{Z}$, $(p(n) = p(m)) \to (n = m)$ (No existen dos números enteros distintos con el mismo predecesor)
- $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, $s(p(n)) = p(s(n)) = n$
- Todo n $\in \mathbb{Z}$ distinto del 0 puede obtenerse, bien por medio de una o más aplicaciones de s sobre el 0 (los positivos), o bien por medio de aplicaciones de p (los negativos), pero ninguno de ambas formas.

- $\mathbb{Z}$ es cerrado con respecto a las operaciones suma, resta y producto
- $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ $\quad \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \cdots\}$
- $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$
- $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado mediante la relación $\leq$ definida así: $\forall$ m, n $\in \mathbb{Z}$, decimos que m es menor o igual que n, y lo escribimos m $\leq$ n, si ambos son iguales, o bien podemos obtener n a partir de m aplicando reiteradamente la función sucesor. Si m $\leq$ n y m $\neq$ n escribimos m $<$ n
- **$\mathbb{Z}$ no cumple el principio de buena ordenación : $\mathbb{Z}^-$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ y no tiene un elemento mínimo**
- Dado m $\in \mathbb{Z}$, $\quad \mathbb{Z}_{\mathrm{m}} = \{\mathrm{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{m} \leq \mathrm{n}\}$
- Dado m $\in \mathbb{Z}$, los elementos de $\mathbb{Z}_{\mathrm{m}}$ pueden obtenerse aplicando reiteradamente la función sucesor sobre m
- **$\mathbb{Z}_m$ sí cumple el principio de buena ordenación:** Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{Z}_m$ tiene un elemento mínimo (primer elemento)

Los principios de inducción simple y completa con uno o varios casos básicos siguen siendo ciertos sobre cada $\mathbb{Z}_m$, pero no cubren todo $\mathbb{Z}$

Inducción estructural para $\mathbb{Z}$

Para toda propiedad P definida sobre $\mathbb{Z}$
si se verifica:

- P(0) **(caso base)**
- Para todo k $\in \mathbb{Z}$ **(paso inductivo)**:
  - si la verificación de P(k) **(hipótesis de inducción (HI))** implica que se verifique P(k+1) **(caso inductivo 1 (CI1))**
  - si la verificación de P(k) **(hipótesis de inducción (HI))** implica que se verifique P(k-1) **(caso inductivo 2 (CI2))**

entonces $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, P(n)

Ej.. Demostrar que dados $a, m \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$, se cumple que $\forall n \in \mathbb{Z}$ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Dem.:

Recordemos:

$$\begin{cases} a^0 = 1 & \\ a^i = a^{i-1} \cdot a & \text{si } i \geq 1 \\ \text{y si } a \neq 0 \text{ entonces} \quad a^{-i} = \frac{1}{a^i} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

Lema: Si $a \neq 0$ entonces $\forall i \in \mathbb{Z}$ $a^i = a^{i-1} \cdot a$

P(n): $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Caso base: n $= 0$ $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$

Paso inductivo: Sea k $\in \mathbb{Z}$

HI: P(k): $a^{m+k} = a^m \cdot a^k$

CI1: P(k+1): $a^{m+(k+1)} = a^m \cdot a^{k+1}$

CI2: P(k-1): $a^{m+(k-1)} = a^m \cdot a^{k-1}$

¿P(k) → P(k+1)?

$$\begin{aligned} a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && \text{[Asociatividad de la +]}\\ &= a^{m+k}\cdot a && \text{[Lema]}\\ &= (a^m\cdot a^k)\cdot a && \text{[HI]}\\ &= a^m\cdot(a^k\cdot a) && \text{[Asociatividad del x]}\\ &= a^m\cdot a^{k+1} && \text{[Lema]} \end{aligned}$$

¿P(k) → P(k-1)?

$$\begin{aligned} a^{m+(k-1)} &= a^{(m+k)-1} && \text{[Asociatividad de la +]}\\ &= \frac{a^{(m+k)-1}\cdot a}{a} && \\ &= \frac{a^{m+k}}{a} && \text{[Lema]}\\ &= \frac{a^m\cdot a^k}{a} && \text{[HI]}\\ &= a^m\cdot a^{k-1} && \text{[Lema]} \end{aligned}$$

Luego $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$, P(n)

- **Def.:** Una función $f : A \to B$ está definida recursivamente si para cada $x \in A$ o bien x es un *caso básico* para el que el valor de f está definido explícitamente por un valor $y \in B$; o bien x es un *caso "recurrente"* para el que el valor de f queda definido recurriendo (regla de recurrencia) al valor de f sobre algún(os) otro(s) elemento(s) $z \in A$, de tal modo que tras la aplicación de un número finito de veces de la regla de recurrencia, se obtiene el valor de $f(x)$combinando valores de f sobre casos básicos.
- Caso particular: Definiciones recursivas sobre $\mathbb{Z}_m$
- Relación entre inducción y recursión.

DEF:

Una función $f : \mathbb{Z}_m \to B$ está definida recursivamente sobre $\mathbb{Z}_m$ si para cada $n \in \mathbb{Z}_m$ o bien el valor de f está definido explícitamente por un valor $b_n \in B$, o bien recurriendo al valor de f para algún o algunos $k \in \mathbb{Z}_m$ tales que $m \leq k < n$.
Los valores $b_n \in B$, imágenes de la función f constituyen una sucesión definida recursivamente. (Obviamente, esta sucesión sigue las mismas reglas que la función f definida recursivamente)

Ej.. Función (o Sucesión) de Fibonacci $f : \mathbb{Z}_1 \to \mathbb{Z}$

(B) Casos base: $f(1) = 1, \;\; f(2) = 1$

(R) Regla de recurrencia: $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad \forall n \geq 3$

Para demostrar que está bien definida basta aplicar el principio de inducción completa sobre $\mathbb{Z}_1$

Números de Fibonacci: Los que pertenecen a la imagen de f: 1,1,2,3,5 $\cdots$. Constituyen una sucesión (sucesión de Fibonacci) definida recursivamente así:

(B) $f_1 = 1, \;\; f_2 = 1$

(R) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

- Por reescritura

  Ej: Para la función de Fibonacci:

$$\begin{aligned} f(6) &= f(5) + f(4) \\ &= f(4) + f(3) + f(3) + f(2) \\ &= f(3) + f(2) + f(2) + f(1) + f(2) + f(1) + 1 \\ &= f(2) + f(1) + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

- Por iteración

  Ej: Para la función de Fibonacci:

$$\begin{aligned} &f(1) = 1, \quad f(2) = 1 \\ &f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2 \\ &f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3 \\ &f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5 \\ &f(6) = f(5) + f(4) = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

- Operadores prefijos ($\sum, \prod$) para la escritura abreviada de la suma o el producto de parte de los términos de una sucesión.

$$\sum_{i=m}^{n} s_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < m \\ s_n & \text{si} \quad n = m \\ s_m + s_{m+1} + \ldots + s_n & \text{si} \quad m < n \end{cases} \qquad \prod_{i=m}^{n} s_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n < m \\ s_n & \text{si} \quad n = m \\ s_m \cdot s_{m+1} \cdot \ldots \cdot s_n & \text{si} \quad m < n \end{cases}$$

- Sumatorios y productorios como definiciones recursivas de funciones:

Fijado un $m \in \mathbb{Z}$ cualquiera,

$\sum_{i=m}^{n} s_i$

representa la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

(B) $f(n) = 0 \;\; \forall n < m, \quad f(m) = s_m$
(R) $f(n) = f(n-1) + s_n \;\; \forall n > m$

$\prod_{i=m}^{n} s_i$

representa la función $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

(B) $g(n) = 1 \;\; \forall n < m, \quad g(m) = s_m$
(R) $g(n) = g(n-1) \cdot s_n \;\; \forall n > m$

- **Ej.:** $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1)$ representa la función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n<1 \\ 1 & \text{si} \quad n=1 \\ 1+3+\cdots+(2n-1) & \text{si} \quad n>1 \end{cases}$$

  que puede definirse recursivamente así:

$$\begin{array}{ll} (B) & f(n)=0 \ \ \forall n\leq 0, \quad f(1)=1 \\ (R) & f(n)=f(n-1)+(2n-1) \ \ \forall n\geq 2 \end{array}$$

- **Ej.:** $\prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ representa la función factorial $!:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ que puede definirse recursivamente así:

$$\begin{array}{lll} (B) & n! = 1 & \text{si } n=0 \\ (R) & n! = (n-1)!\cdot n & \forall n\geq 1 \end{array}$$

La inducción es una técnica muy útil (imprescindible casi siempre) para demostrar propiedades de funciones definidas recursivamente.

Ej.. Demuestra que la función de Fibonacci $f : \mathbb{Z}_1 \to \mathbb{Z}$

(B) $f(1) = 1, \quad f(2) = 1$
(R) $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad \forall n \geq 3$

verifica que $\forall n \in \mathbb{Z}_1 \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f^2(i) = f(n) * f(n+1)}_{P(n)}$

donde $f^2(i)$ denota abreviadamente $(f(i))^2$

Dem.: Por inducción simple.

Casos base:

n $= 1 \quad f^2(1) = 1 = f(1) * f(2)$ [B]

n $= 2 \quad f^2(1) + f^2(2) = 1 + 1 = 2$ [B]

$f(2) * f(3) = 1 * 2 = 2$ [$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2$ por B y R]

Paso inductivo: Sea k $\in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$

HI: P(k): $\sum_{i=1}^{k} f^2(i) = f(k) * f(k+1)$

CI: P(k+1): $\sum_{i=1}^{k+1} f^2(i) = f(k+1) * f(k+2)$

¿P(k) $\rightarrow$ P(k+1)?

$\sum_{i=1}^{k+1} f^2(i) = \sum_{i=1}^{k} f^2(i) + f^2(k+1)$ [Def. de $\sum$]

$= f(k) * f(k+1) + f^2(k+1)$ [HI]

$= f(k+1) * (f(k+1) + f(k))$ [Factor común]

$= f(k+1) * f(k+2)$ [R ya que $k+2 \geq 4 > 3$ por ser $k \geq 2$]

Luego $\forall$ n$\geq$ 1 P(n)

Ej.. Demuestra que la sucesión de números enteros definida por medio de:

$$a_0 = 2 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ;$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \qquad \forall n \geq 0$$

verifica que $\forall n \geq 0 \quad \underbrace{a_n = 2^n + (-1)^n}_{P(n)}$

Dem.:

$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad \forall n \geq 0$ es equivalente a
$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

Por inducción completa tenemos:

Casos base:

n $= 0 \quad a_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + (-1)^0$ [B y aritmética elemental]
n $= 1 \quad a_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 + (-1)^1$ [B y aritmética elemental]

Paso inductivo completo: Dado k ≥ 2

HIC: $\forall$ l , $0 \leq$ l $<$ k, $a_l = 2^l + (-1)^l$
CIC: $a_k = 2^k + (-1)^k$

¿(P(0)$\wedge$ P(1) $\wedge \cdots \wedge$ P(k-1)) $\rightarrow$ P(k)?

$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}$	[R ya que $k \geq 2$]
$= 2^{k-1} + (-1)^{k-1} + 2(2^{k-2} + (-1)^{k-2})$	[HIC ya que $0 \leq$ k-2 $\leq$ k-1 $<$ k por ser k ≥ 2]
$= 2 \cdot 2^{k-1} + (-1)^{k-1} + 2 \cdot (-1)^{k-2}$	[Aritmética elemental]
$= 2^k + (-1)^{k-2}(2-1)$	[Aritmética elemental]
$= 2^k + (-1)^k$	[$(-1)^{k-2} = (-1)^k$]

Luego $\forall$ n≥ 0 P(n)

Consideraremos casos en que la recursión puede hacerse sobre sólo uno de los argumentos:

Ej.. Definimos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}$ así:

(B) $f(m, 0) = m$
(R) $f(m, n) = f(m, n-1) + 1 \quad \forall n > 0$

Demuestra que $\underbrace{\forall m \in \mathbb{Z} \text{ se verifica que } \forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \underbrace{f(m, n) = m + n}_{P(n)}}_{Q(m)}$

Dem.: Fijado $m \in \mathbb{Z}$, demostraremos $Q(m)$ por inducción simple en n, y luego aplicaremos generalización universal para concluir que $\forall m \in \mathbb{Z} \quad Q(m)$.

Caso base:

n $= 0 \quad f(m, 0) = m = m + 0$ [B y aritmética elemental]

Paso inductivo: Sea k $\in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0$

HI: P(k): $\quad f(m,k) = m + k$

CI: P(k+1): $\quad f(m,k+1) = m + (k+1)$

¿P(k) $\rightarrow$ P(k+1)?

$$
\begin{aligned}
f(m,k+1) &= f(m,k+1-1)+1 && \text{[R ya que } k+1>0 \text{ por ser } k \geq 0\text{]}\\
&= f(m,k)+1 \\
&= (m+k)+1 && \text{[HI]}\\
&= m+(k+1) && \text{[Asociatividad de la +]}
\end{aligned}
$$

Luego $\forall$ n$\geq$ 0 P(n), y por generalización universal concluimos que

$$\forall m \in \mathbb{Z} \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_0 \ \ f(m,n) = m + n$$