I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................................... Fecha ....

Alumno/a HOJA 2 .... Curso.............. Nº...........

Apellidos Nombre

Calificación

1.- Estudia la convergencia de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\sqrt{n}}$ Sea $z_n = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\sqrt{n}}$ el término general

Consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

$|z_n| = \frac{|e^{\frac{\pi i}{n}}|}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no converge porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sí y solo sí $p > 1$.

Además $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos(\pi/n) + i \operatorname{sen}(\pi/n) \right)$ y sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sí y solo sí la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n)$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n)$ converge.

En este caso

$Re(z_n) = \frac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{n}}$ que si la comparamos con $\frac{1}{\sqrt{n}}$ por el criterio del cociente para $n > 2$ (todos los términos de $Re(z_n)$ son positivos)

$$\frac{\frac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n)$ converge sí y solo sí converge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$