ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 1

1. Determina en qué recintos son holomorfas las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^2\bar{z}$ b) $f(z) = |z|\bar{z}$

c) $f(x+iy) = x + ay + i(bx + cy)$ d) $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$

e) $f(x+iy) = x^3 - 3y^2 + i(3x^2y - y^3)$ f) $f(x+iy) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$.

2. Demuestra que si una función holomorfa es real en un abierto conexo entonces es constante.

3. Demuestra que si tanto $f = u + iv$ como $\bar{f} = u - iv$ son holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces f es constante.

4. Demuestra que si f es holomorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $|f|$ es constante, entonces f es constante.

5. Sea $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ y $f(0) = 0$.

a) Demuestra que no existe $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$.
b) Si $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, demuestra que $u(x,0) = x$, $v(0,y) = y$, $u(0,y) = v(x,0) = 0$.
c) Concluye que existen las derivadas parciales de u y v y que se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann aunque sin embargo $f'(0)$ no existe. Comenta el resultado.

6. Comprueba que si $f = u + iv$ es una función holomorfa entonces $|f'| = \|\nabla u\| = \|\nabla v\|$ donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$.

7. Demuestra que en coordenadas polares las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

8. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa e inyectiva. Demuestra que

$$\text{Área}(f(\Omega)) = \int_\Omega |f'|^2.$$

9. Consideremos la función $f(z) = z^2$, y los recintos$D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant 1\}$, $E = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| \leqslant 1\}$. Dibuja los conjuntos $f(D)$ y $f(E)$ y calcula sus áreas.

10. Demuestra que las siguientes funciones son armónicas:

a) $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$ b) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

11. Halla, en cada uno de los siguientes casos, una función holomorfa, $f = u + iv$, cuya parte real o imaginaria sea la dada:

a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ b) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x$

c) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ d) $v(x,y) = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

12. ¿Existe una función holomorfa, $f = u + iv$, tal que:

a) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ b) $v(x,y) = \dfrac{x^2 + 1}{2}y^2$?

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID