$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{2n\bar{X}}{a^2} = -\lambda f_{\chi^2_{2n}}(a) \\ \dfrac{2n\bar{X}}{b^2} = \lambda f_{\chi^2_{2n}}(b) \\ F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1-\alpha \end{array} \right. \Rightarrow b^2 f_{\chi^2_{2n}}(b) = a^2 f_{\chi^2_{2n}}(a)$$

Por tanto, $L(a,b)$ alcanza un mínimo para aquellos valores $a_0, b_0 > 0$ que verifiquen que $F_{\chi^2_{2n}}(b_0) - F_{\chi^2_{2n}}(a_0) = 1-\alpha$ y $a_0^2 f_{\chi^2_{2n}}(a_0) = b_0^2 f_{\chi^2_{2n}}(b_0)$.

Entonces el intervalo de confianza de longitud mínima al nivel de confianza $1-\alpha$ para $\frac{1}{\theta}$ es:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}\left(\frac{1}{\theta}\right) = \left(\frac{2n\bar{X}}{b_0}, \frac{2n\bar{X}}{a_0}\right)}$$

Ejercicio 6.- Sea $(X_1 - - X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x)$. $\theta > 0$. Encontrar el intervalo Bayesiano de máxima densidad a posteriori al nivel $1-\alpha$ si la distribución a priori es $\pi(\theta) = e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta)$

La distribución a posteriori de θ es

$$\pi(\theta | x_1 - - x_n) = \frac{\pi(\theta) \cdot f(x_1 - - x_n | \theta)}{\int_{\Theta} \pi(\theta) \cdot f(x_1 - - x_n | \theta)\, d\theta} \quad \text{donde}$$

$$f(x_1 - - x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \theta)} I_{(\theta,\infty)}(x_i) = e^{n\theta} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$$

$$= e^{n\theta} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)$$