Hoja 5

Convergencias Estocásticas

Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Normales de media 0 y varianza 1. Estudiar la convergencia en probabilidad de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$, donde $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$.*

Sabemos que la suma de los cuadrados de n variables aleatorias independientes Normales de media 0 y varianza 1 sigue una distribución $\mathcal{X}_n^2$ (chi-cuadrado con n grados de libertad). Ésta puede interpretarse como una distribución Gamma de parámetros $a = \frac{1}{2}$ y $p = \frac{n}{2}$. Por tanto, podemos calcular la función característica de Y_n como:

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{it\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j}\right] = \varphi_{\mathcal{X}_n^2}\left(\tfrac{t}{n}\right) = \varphi_{Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\tfrac{t}{n}\right)$$

La función característica de una variable aleatoria con distribución $Gamma(a,p)$ es:

$$\varphi_{Gamma(a,p)}(u) = \left(1 - \frac{iu}{a}\right)^{-p}$$

Por lo que:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{i\frac{t}{n}}{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 - \frac{it}{\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{it}{\frac{n}{2}}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{it}$$

Ahora bien, e^{it} se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Y degenerada en 1. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_Y(t) \quad \Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \equiv 1$$

Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \equiv 1$. Además, como tenemos convergencia en ley a una constante, se tiene también convergencia en probabilidad a dicha constante. En definitiva:

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Y \equiv 1$$

Ej. 2. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro p, con $0 < p < 1$. Sea la variable aleatoria $V_n = X_1 X_2 \cdots X_n$. Estudiar la convergencia en ley, la convergencia en probabilidad y la convergencia casi segura de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$.*

Analicemos cada una de las distintas convergencias pedidas de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ por separado:

- Convergencia en Ley

  Para poder estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ debemos en primer lugar encontrar la función de distribución de cada variable aleatoria V_n con $n \geq 1$. Por definición, V_n sólo puede tomar los valores 0 ó 1 al ser producto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro p. Por tanto, V_n tiene la siguiente función de masa:

  $$P(V_n = 1) = P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = p^n$$

  $$P(V_n = 0) = 1 - P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = 1 - p^n$$

  Lo que nos indica que V_n sigue una distribución Bernoulli de parámetro p^n. De esta forma, su función de distribución es:

  $$F_{V_n}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 - p^n & \text{si } 0 \leq v < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq v \end{cases}$$

  Se tiene entonces:

  $$\lim_{n \to \infty} F_{V_n}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq v \end{cases}$$

  Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria V degenerada en 0, por lo que la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $V \equiv 0$:

  $$V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} V \equiv 0$$

- Convergencia en Probabilidad

  Dado que la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $V \equiv 0$, se tiene también convergencia en probabilidad a dicha constante. Es decir:

  $$V_n \xrightarrow{\mathcal{P}} V \equiv 0$$

- Convergencia Casi Segura

  Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia casi segura:

  $$V_n \xrightarrow{c.s.} V \iff \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |V_m(\omega) - V(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

En nuestro caso concreto, como el candidato a límite es $V \equiv 0$, debemos estudiar si dado $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

O equivalentemente, mediante el uso del complementario, si:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|<\varepsilon\}\right)=1$$

Si $1 < \varepsilon$, como $|V_n| = 0$ ó $|V_n| = 1$ para cada $n \geq 1$, es claro que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|<\varepsilon\}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\Omega\right)=\lim_{n\to\infty} 1=1$$

Nos basta por consiguiente con estudiar el caso en que $0 < \varepsilon \leq 1$. Siendo así:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|<\varepsilon\}\right)=\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|=0\}\right)$$

Ahora bien:

- Por el principio de inclusión de la intersección:

$$\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|=0\}\subset\{\omega\in\Omega:\ |V_n(\omega)|=0\}$$

- Por definición, $V_m = V_n \prod_{j=n+1}^{m} X_j$ para cada $m > n$. Luego si $V_n(\omega) = 0$, entonces $V_m(\omega) = 0$ para cada $m > n$. Así:

$$\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|=0\}\supset\{\omega\in\Omega:\ |V_n(\omega)|=0\}$$

Luego:

$$\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|=0\}=\{\omega\in\Omega:\ |V_n(\omega)|=0\}$$

Y concluimos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\ |V_m(\omega)|<\varepsilon\}\right)&=\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega\in\Omega:\ |V_n(\omega)|=0\}\right)\\&=\lim_{n\to\infty} 1-p^n=1\end{aligned}$$

Es decir:

$$V_n \xrightarrow{c.s.} V\equiv 0$$

Ej. 3. *Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\, e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } 0 < x,\ -1 < y < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se pide:

(a) *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley $\mathcal{L}(X)$. Hallar la distribución de:*

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$, donde $V_n = \frac{1}{n^2}\, Y_n$.

(b) *Sea Z_n una variable aleatoria tal que $Z_n \,|\, X = x$ es Poisson de parámetro nx. Calcular la distribución de Z_n y estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Z_n : n \geq 1\}$.*

(a) Según la definición, podemos calcular la función de densidad marginal de X de la siguiente forma:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{4}\, I_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}y = \frac{y\, e^{-\frac{x}{2}}}{4}\, I_{(0,\infty)}(x) \Bigg]_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

Por tanto, X sigue una distribución Gamma de parámetros $a = \frac{1}{2}$ y $p = 1$. Como $\{X_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con ley $\mathcal{L}(X)$, $X_n = X$ para cada $n \geq 1$. De esta forma, $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ sigue una distribución Gamma de parámetros $a = \frac{1}{2}$ y $p = n$. Así, podemos calcular la función característica de V_n como:

$$\varphi_{V_n}(t) = E\left[e^{itV_n}\right] = E\left[e^{it\,\frac{1}{n^2}\,Y_n}\right] = \varphi_{Gamma\left(\frac{1}{2},n\right)}\left(\tfrac{t}{n^2}\right)$$

La función característica de una variable aleatoria con distribución $Gamma(a,p)$ es:

$$\varphi_{Gamma(a,p)}(u) = \left(1 - \frac{iu}{a}\right)^{-p}$$

Por lo que:

$$\varphi_{V_n}(t) = \left(1 - \frac{i\frac{t}{n^2}}{\frac{1}{2}}\right)^{-n} = \left(1 - \frac{\frac{2it}{n}}{n}\right)^{-n}$$

Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{V_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\frac{2it}{n}}{n}\right)^{-n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2it}{n}} = e^0 = 1$$

Ahora bien, 1 se corresponde con la función característica de una variable aleatoria V degenerada en 0. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{V_n}(t) = \varphi_V(t) \quad \Longrightarrow \quad V_n \xrightarrow{\mathcal{L}} V \equiv 0$$

Es decir, que la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $V \equiv 0$.

(b) De acuerdo con el Teorema de la Probabilidad Total, podemos calcular la función de masa de Z_n con $n \geq 1$ para $z \geq 0$ de la siguiente forma:

$$f_{Z_n}(z) = \int_{\mathbb{R}} P(Z_n = z \,|\, X = x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{(nx)^z\, e^{-nx}}{z!} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n^z}{2\,z!} \int_0^\infty e^{-\frac{2n+1}{2}x}\, x^z\,\mathrm{d}x$$

El integrando se corresponde con el núcleo de una distribución Gamma de parámetros $a = \frac{2n+1}{2}$ y $p = z+1$. La integral del núcleo de una distribución $Gamma(a, p)$ es:

$$\int_0^\infty e^{-au}\, u^{p-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

Sabiendo además que $\Gamma(p) = (p-1)!$ para $p \in \mathbb{N}$, deducimos que:

$$f_{Z_n}(z) = \frac{n^z}{2\,z!} \frac{z!}{(\frac{2n+1}{2})^{z+1}} = \frac{(2n)^z}{(2n+1)^{z+1}}$$

Por tanto, podemos calcular la función característica de Z_n como:

$$\varphi_{Z_n}(t) = E\left[e^{itZ_n}\right] = \sum_{z=0}^\infty e^{itz} \frac{(2n)^z}{(2n+1)^{z+1}} = \frac{1}{2n+1} \sum_{z=0}^\infty \left(\frac{2ne^{it}}{2n+1}\right)^z$$

Donde, a partir de la expresión de la suma de series geométricas de razón menor que 1, deducimos:

$$\varphi_{Z_n}(t) = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{1 - \frac{2ne^{it}}{2n+1}} = \frac{1}{1 + 2n(1 - e^{it})}$$

Sabiendo que $e^{it} = 1$ si y sólo si $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + 2n(1 - e^{it})} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ahora bien, esta función no es continua, luego no se corresponde con la función característica de ninguna variable aleatoria. Dado que según el Teorema de Continuidad de Paul-Levy:

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t)$$

Podemos concluir que la sucesión $\{Z_n : n \geq 1\}$ no converge en ley.

Ej. 4. *Demostrar que si* $\{X_n : n \geq 1\}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes que converge en ley a la constante c, entonces la sucesión* $\{e^{X_n} : n \geq 1\}$ *converge en ley hacia* e^c. *Usar este resultado para estudiar la convergencia en ley y en probabilidad de*

$$Y_n = \left(\prod_{j=1}^{n} X_j \right)^{\frac{1}{n}},$$

donde $\{X_n : n \geq 1\}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniformes sobre el intervalo* $(0, 1)$.

Comencemos demostrando el primer resultado, es decir:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \quad \Longrightarrow \quad e^{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^c$$

Así pues, sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes que converge en ley a la variable aleatoria $X \equiv c$:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \equiv c$$

Si $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$ es la función de distribución de X_n para cada $n \geq 1$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } c \leq x \end{cases}$$

Sean $Z_n = e^{X_n}$ y $F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z)$ su función de distribución con $n \geq 1$. Se verifica:

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P\left(e^{X_n} \leq z\right) = P(X_n \leq \ln(z)) = F_{X_n}(\ln(z))$$

Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(\ln(z)) = F_X(\ln(z)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ln(z) < c \\ 1 & \text{si } c \leq \ln(z) \end{cases}$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < e^c \\ 1 & \text{si } e^c \leq z \end{cases}$$

Donde $Z \equiv e^c$. Por tanto:

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \equiv e^c$$

Habiendo demostrado este resultado, sean $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniformes sobre el intervalo $(0, 1)$ e $\{Y_n : n \geq 1\}$ la sucesión de variables aleatorias tal que:

$$Y_n = \left(\prod_{j=1}^{n} X_j \right)^{\frac{1}{n}}$$

Definamos la sucesión de variables aleatorias $\{Z_n : n \geq 1\}$ donde $Z_n = \ln(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln(X_j)$. Entonces podemos calcular la función característica de Z_n como:

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_n}(t) &= E\left[e^{itZ_n}\right] = E\left[e^{it\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln(X_j)}\right] = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{it\frac{1}{n}\ln(X_j)}\right] = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{\ln(X_j)}\left(\tfrac{t}{n}\right) \\
&= \left(\varphi_{\ln(X_1)}\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\ln(X_1)}(u) &= E\left[e^{iu\ln(X_1)}\right] = \int_0^1 e^{iu\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{\ln(x^{iu})}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{iu}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{1+iu}}{1+iu}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= (1+iu)^{-1}
\end{aligned}$$

Así que deducimos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{it}{n}\right)^{-n} = e^{-it}$$

Ahora bien, e^{-it} se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Z degenerada en -1. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t) \quad \Longrightarrow \quad Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \equiv -1$$

Sabiendo esto y a partir del resultado anterior:

$$Y_n = e^{Z_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y = e^Z \equiv e^{-1}$$

Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \equiv e^{-1}$. Además, como tenemos convergencia en ley a una constante, se tiene también convergencia en probabilidad a dicha constante. En definitiva:

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Y \equiv e^{-1}$$

Ej. 5. *Sea $\{X_n : n \geq 0\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y definamos:*

$$Y_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{X_j}{2^{n+1-j}}$$

Estudiar la convergencia en ley de $\{Y_n : n \geq 0\}$ cuando:

(a) *$X_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $j \geq 0$.*

(b) *$X_j \sim Cauchy(0, 1)$, $j \geq 0$.*

(a) Supongamos que $X_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ con $j \geq 0$. Podemos calcular la función característica de Y_n como:

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{it\sum_{j=0}^{n}\frac{X_i}{2^{n+1-j}}}\right] = \prod_{j=0}^{n} E\left[e^{it\frac{1}{2^{n+1-j}}X_j}\right] = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{X_j}(\tfrac{t}{2^{n+1-j}})$$

Donde la función característica de una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es:

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(u) = e^{iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Por lo que:

$$\varphi_{X_j}(u) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Así que deducimos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3-2j}}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3}}\sum_{j=0}^{n} 4^j} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2^{2n+3}}\frac{4^{n+1}-1}{4-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{6}\frac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{6}}$$

Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Y Normal de media 0 y varianza $\frac{\sigma^2}{3}$. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_Y(t) \quad \Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{\sigma^2}{3})$$

Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{3})$.

(b) Supongamos que $X_j \sim Cauchy(0, 1)$ con $j \geq 0$. Podemos calcular la función característica de Y_n como:

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{it\sum_{j=0}^{n}\frac{X_i}{2^{n+1-j}}}\right] = \prod_{j=0}^{n} E\left[e^{it\frac{1}{2^{n+1-j}}X_j}\right] = \prod_{j=0}^{n} \varphi_{X_j}(\tfrac{t}{2^{n+1-j}})$$

Donde la función característica de una variable aleatoria $Cauchy(x_0, \gamma)$ es:

$$\varphi_{Cauchy(x_0,\gamma)}(u) = e^{iux_0 - \gamma|u|}$$

Por lo que:

$$\varphi_{X_j}(u) = e^{-|u|}$$

Así que deducimos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} e^{-\left|\frac{t}{2^{n+1-j}}\right|} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{n} 2^j} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{|t|}{2^{n+1}}\frac{2^{n+1}-1}{2-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-|t|\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}} = e^{-|t|}$$

Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Y Cauchy de parámetros $x_0 = 0$ y $\gamma = 1$. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_Y(t) \quad \Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim Cauchy(0,1)$$

Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \sim Cauchy(0,1)$.

Ej. 6. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con funciones de densidad:*

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+(nx)^2}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad y la convergencia en media de orden 2 de $\{X_n : n \geq 1\}$.

Analicemos cada una de las distintas convergencias pedidas de la sucesión $\{V_n : n \geq 1\}$ por separado. Añadamos la convergencia en ley para tener un candidato a límite (en caso de que haya convergencia en ley):

- Convergencia en Ley

  Para poder estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ debemos en primer lugar encontrar la función de distribución de cada variable aleatoria X_n con $n \geq 1$. Démonos cuenta de que la función de densidad de X_n nos indica que ésta sigue una distribución Cauchy de parámetros $x_0 = 0$ y $\gamma = \frac{1}{n}$. La función de distribución de una variable aleatoria $Cauchy(x_0, \gamma)$ es:

  $$F_{Cauchy(x_0,\gamma)}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

  Por lo que:

  $$F_{X_n}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(nx) + \frac{1}{2}$$

  Se tiene entonces:

  $$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

  Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria X degenerada en 0, por lo que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $X \equiv 0$:

  $$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \equiv 0$$

- Convergencia en Probabilidad

  Dado que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $X \equiv 0$, se tiene también convergencia en probabilidad a dicha constante. Es decir:

  $$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \equiv 0$$

- <u>Convergencia en Media Cuadrática</u>

  Como el candidato a límite es $X \equiv 0$, debemos estudiar si:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = 0$$

  Ahora bien:

$$E[|X_n|] = \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{n}{\pi\left(1+(nx)^2\right)} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{2nx}{\pi\left(1+(nx)^2\right)} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\ln\left(1+(nx)^2\right)}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

$$= \infty$$

  Como $E[|X_n|] = \infty$, entonces $E[X_n^2] = \infty$. Así pues:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] \neq 0$$

  Lo cual nos indica que $\{X_n : n \geq 1\}$ no converge en media cuadrática.

Ej. 7. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribuciones de Poisson de parámetro n. Demostrar que*

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en ley a X, donde X es una variable aleatoria $\mathcal{N}(0,1)$.

Sea $\{Y_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Poisson de parámetro 1. Comprobemos que $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Podemos calcular la función característica de $\sum_{j=1}^n Y_j$ como:

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j}(t) = E\left[e^{it\sum_{j=1}^n Y_j}\right] = \prod_{j=1}^n E\left[e^{itY_j}\right] = \prod_{j=1}^n \varphi_{Y_j}(t) = \left(\varphi_{Y_1}(t)\right)^n$$

Donde la función característica de una variable aleatoria $Poisson(\lambda)$ es:

$$\varphi_{Poisson(\lambda)}(u) = e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$$

Por lo que:

$$\varphi_{Y_1}(u) = e^{e^{iu}-1}$$

Así que deducimos:

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n Y_j}(t) = \left(e^{e^{iu}-1}\right)^n = e^{n\left(e^{iu}-1\right)}$$

Ahora bien, esta función se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Poisson de parámetro n. Por tanto, $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Sabemos que siendo $X_n \sim Poisson(n)$ se tiene $E[X_n] = Var(X_n) = n$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema Central del Límite a la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ con $X_n = \sum_{j=1}^n Y_j$:

$$\frac{X_n - E[X_n]}{\sqrt{Var(X_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

En particular:

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Obteniéndose el resultado buscado.

Ej. 8. *Sea* $\{X_n : n \geq 1\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Uniformes sobre el intervalo* $(0,1)$*. Estudiar la convergencia en ley de las siguientes sucesiones:*

(a) $\{Y_n : n \geq 1\}$*, donde* $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$*.*

(b) $\{Z_n : n \geq 1\}$*, donde* $Z_n = n\,Y_n$*.*

(c) $\{T_n : n \geq 1\}$*, donde* $T_n = n^{\alpha}\,(1 - Y_n)$*.*

(a) Primero calculemos la función de distribución de Y_n con $n \geq 1$. Distingamos tres casos:

- $\underline{y < 0}$

  $$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq y\right) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j < 0\right) = 0$$

- $\underline{0 \leq y < 1}$

  $$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq y\right) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leq y) = \prod_{j=1}^{n} y = y^n$$

- $\underline{1 \leq y}$

  $$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq y\right) = P\left(\max_{1 \leq j \leq n} X_j \leq 1\right) = 1$$

En resumen:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y^n & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Se tiene entonces:

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria Y degenerada en 1, por lo que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \equiv 1$:

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \equiv 1$$

(b) Primero calculemos la función de distribución de Z_n con $n \geq 1$. Podemos deducir de la definición de Z_n que:

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(n\,Y_n \leq z) = P\left(Y_n \leq \tfrac{z}{n}\right) = F_{Y_n}\left(\tfrac{z}{n}\right)$$

Por lo que:

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \left(\frac{z}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq z < n \\ 1 & \text{si } n \leq z \end{cases}$$

Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = 0$$

Esta función límite no se corresponde con la función de distribución de ninguna variable aleatoria, luego $\{Z_n : n \geq 1\}$ no converge en ley.

(c) Primero calculemos la función de distribución de T_n con $n \geq 1$. Podemos deducir de la definición de T_n que:

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(n^\alpha\,(1 - Y_n) \leq t) = P\left(1 - \tfrac{t}{n^\alpha} \leq Y_n\right) = 1 - F_{Y_n}\left(1 - \tfrac{t}{n^\alpha}\right)$$

Por lo que:

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n^\alpha}\right)^n & \text{si } 0 \leq t < n^\alpha \\ 1 & \text{si } n^\alpha \leq t \end{cases}$$

Distinguimos tres casos en función del parámetro α para el estudio de la convergencia:

- $\underline{\alpha = 1}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$$

Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria T Exponencial de tasa 1, por lo que la sucesión $\{T_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $T \sim Exp(1)$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T \sim Exp(1)$$

- $\underline{\alpha > 1}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n^{\alpha-1}}} & \text{si } 0 \leq t \end{cases} = 0$$

Esta función límite no se corresponde con la función de distribución de ninguna variable aleatoria, luego $\{T_n : n \geq 1\}$ no converge en ley.

- $\underline{\alpha < 1}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha} t} & \text{si } 0 \leq t \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \end{cases}$$

Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria T degenerada en 0, por lo que la sucesión $\{T_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $T \equiv 0$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T \equiv 0$$

Ej. 9. *Estudiar si las siguientes sucesiones de variables aleatorias independientes cumplen la ley débil y/o fuerte de los grandes números:*

(a) $\{X_n : n \geq 1\}$, *donde:*

$$P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = \frac{1}{2^{2n+1}}$$
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^{2n}}$$

(b) $\{X_n : n \geq 1\}$, *donde:*

$$P\left(X_n = \sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = P\left(X_n = -\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \alpha \in \mathbb{N}$$

(a) Analicemos cada una de las leyes de los grandes números por separado:

- Ley Débil de los Grandes Números

  Vamos a hacer uso del siguiente resultado:

  Teorema. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = \mu_n$ y $Var(X_n) = \sigma_n^2$, tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = 0$. Entonces:*

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n \mu_j}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$

  Es decir, $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley débil de los grandes números.

  En nuestro caso, la esperanza de las variables aleatorias X_n es:

$$E[X_n] = (2^n)\frac{1}{2^{2n+1}} + (-2^n)\frac{1}{2^{2n+1}} + (0)\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) = 0$$

  Y su varianza:

$$Var(X_n) = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = E[X_n^2] - 0^2$$
$$= (2^n)^2\frac{1}{2^{2n+1}} + (-2^n)^2\frac{1}{2^{2n+1}} + (0)^2\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) = 1$$

Además:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} Var(X_j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Por lo que estamos en las condiciones del teorema y $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley débil de los grandes números.

- Ley Fuerte de los Grandes Números

  Vamos a hacer uso del siguiente resultado:

  Teorema. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = \mu_n$ y $Var(X_n) = \sigma_n^2$, tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty$. Entonces:*
  $$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$
  Es decir, $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

  Ya sabemos que $E[X_n] = 0$ y $Var(X_n) = 1$. Además se tiene que:
  $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$$
  Por lo que estamos en las condiciones del teorema y $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

(b) Analicemos cada una de las leyes de los grandes números por separado:

- Ley Débil de los Grandes Números

  Vamos a hacer uso del siguiente resultado:

  Teorema. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = \mu_n$ y $Var(X_n) = \sigma_n^2$, tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 = 0$. Entonces:*
  $$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$
  Es decir, $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley débil de los grandes números.

  En nuestro caso, la esperanza de las variables aleatorias X_n es:
  $$E[X_n] = \left(\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right)\frac{1}{2} + \left(-\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right)\frac{1}{2} = 0$$
  Y su varianza:
  $$\begin{aligned} Var(X_n) &= E[X_n^2] - E[X_n]^2 = E[X_n^2] - 0^2 \\ &= \left(\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\sqrt{\ln(n+\alpha)}\right)^2\frac{1}{2} = \ln(n+\alpha) \end{aligned}$$

Además, como la función logaritmo es una función creciente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} Var(X_j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \ln{(j+\alpha)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \ln{(n+\alpha)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln{(n+\alpha)}}{n} = 0$$

Por lo que estamos en las condiciones del teorema y $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley débil de los grandes números.

- Ley Fuerte de los Grandes Números

  Vamos a hacer uso del siguiente resultado:

  Teorema. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = \mu_n$ y $Var(X_n) = \sigma_n^2$, tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty$. Entonces:*

  $$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

  Es decir, $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

  Ya sabemos que $E[X_n] = 0$ y $Var(X_n) = \ln{(n+\alpha)}$. Veamos que $\ln{(x)} \leq \sqrt{x}$ si $x > 0$. Para ello definamos la función auxiliar $g(x) = \sqrt{x} - \ln{(x)}$. Su derivada es:

  $$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

  Se tiene entonces:

  $$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4$$

  La segunda derivada de g es:

  $$g''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2}$$

  Por lo que $g''(4) = \frac{1}{32} > 0$ y g tiene un único mínimo en $x = 4$. Dado que $g(4) = 2 - \ln{(2)} > 0$, concluimos que g es una función positiva en todo su dominio y que $\ln{(x)} \leq \sqrt{x}$ si $x > 0$. Así pues:

  $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\ln{(j+\alpha)}}{j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j+\alpha}}{j^2} < \infty$$

  Por lo que estamos en las condiciones del teorema y $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

Ej. 10. *Estudiar la convergencia en ley de la sucesión* $\{Y_n : n \geq 1\}$*, donde* $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ *y* $\{X_n : n \geq 1\}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes con función de masa:*

$$P\left(X_n = \frac{1}{2^n}\right) = P\left(X_n = -\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$$

Podemos calcular la función característica de Y_n como:

$$\varphi_{Y_n}(t) = E\left[e^{itY_n}\right] = E\left[e^{it\sum_{j=1}^{n} X_j}\right] = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{itX_j}\right] = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t)$$

Donde:

$$\varphi_{X_j}(u) = E\left[e^{iuX_j}\right] = \frac{1}{2}\,e^{\frac{iu}{2^j}} + \frac{1}{2}\,e^{-\frac{iu}{2^j}} = \frac{\cos\left(\frac{u}{2^j}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2^j}\right)}{2} + \frac{\cos\left(-\frac{u}{2^j}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{u}{2^j}\right)}{2}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{u}{2^j}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2^j}\right)}{2} + \frac{\cos\left(\frac{u}{2^j}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2^j}\right)}{2} = \cos\left(\frac{u}{2^j}\right)$$

Si $t = 0$ es claro que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(0) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \cos(0) = 1$$

Pero si $t \neq 0$, aplicando la fórmula del seno del ángulo doble ($\mathrm{sen}(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$) podemos reformular la función característica de X_j como:

$$\varphi_{X_j}(u) = \cos\left(\frac{u}{2^j}\right) = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2^{j-1}}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{u}{2^j}\right)}$$

De donde deducimos, usando que $\mathrm{sen}(x)$ y x son funciones infinitésimamente equivalentes, que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^{j-1}}\right)}{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^j}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(t)}{2^n\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{\mathrm{sen}(t)}{t}$$

Ahora bien, si recordamos el Ejercicio 21 de la Hoja 3, esta función límite se corresponde con la función característica de una variable aleatoria Y Uniforme sobre el intervalo $(-1, 1)$. De acuerdo con el Teorema de Continuidad de Paul-Levy, podemos razonar entonces que:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \varphi_Y(t) \quad\Longrightarrow\quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$$

Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$.

Ej. 11. *Sea* X *una variable aleatoria Exponencial de tasa* λ*. Sea:*

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n(\omega) \in [0,\, 1 - \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{si } X_n(\omega) \in [1 - \frac{1}{n},\, n) \\ n & \text{si } X_n(\omega) \in [n,\, \infty) \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media de orden 2 y casi segura de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$*.*

Analicemos cada una de las distintas convergencias pedidas de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ por separado:

- Convergencia en Ley

  Para poder estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ debemos en primer lugar encontrar la función de distribución de cada variable aleatoria Y_n con $n \geq 1$. Recordemos que la función de distribución de la variable aleatoria $X \sim Exp(\lambda)$ es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

  Por tanto, Y_n tiene la siguiente función de masa:

$$P(Y_n = 0) = P(0 \leq X < 1 - \tfrac{1}{n}) = F_X(1 - \tfrac{1}{n}) - F_X(0) = 1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$$P(Y_n = 1) = P(1 - \tfrac{1}{n} \leq X < n) = F_X(n) - F_X(1 - \tfrac{1}{n}) = e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda n}$$

$$P(Y_n = n) = P(n \leq X) = 1 - F_X(n) = e^{-\lambda n}$$

  De esta forma, su función de distribución es:

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 - e^{-\lambda n} & \text{si } 1 \leq y < n \\ 1 & \text{si } n \leq y \end{cases}$$

  Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

  Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria Y Bernoulli de parámetro $e^{-\lambda}$, por lo que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$:

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$$

- Convergencia en Probabilidad

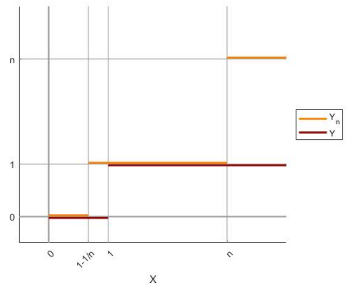
  Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia en probabilidad:

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Y \iff \lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : |Y_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

  Démonos cuenta, mediante el paso al límite, de que:

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n(\omega) \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } X_n(\omega) \in [1, \infty) \end{cases}$$

  Para poder estudiar con mayor facilidad las diferencias entre Y_n e Y, representemos ambas distribuciones en función de X:



Distingamos dos casos en función del valor de $\varepsilon > 0$:

- Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces:
$$\begin{aligned} P\left(\{\omega \in \Omega :\ |Y_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right) &= P(1 - \tfrac{1}{n} \leq X < 1) + P(n \leq X) \\ &= (F_X(1) - F_X(1 - \tfrac{1}{n})) + (1 - F_X(n)) \\ &= e^{-\lambda\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda} + e^{-\lambda n} \end{aligned}$$

- Si $1 \leq \varepsilon$, entonces (con $n > \varepsilon + 1$ suficientemente grande):
$$P\left(\{\omega \in \Omega :\ |Y_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right) = P(n \leq X) = (1 - F_X(n)) = e^{-\lambda n}$$

En cualquiera de ellos se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega :\ |Y_n(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

Por lo que:

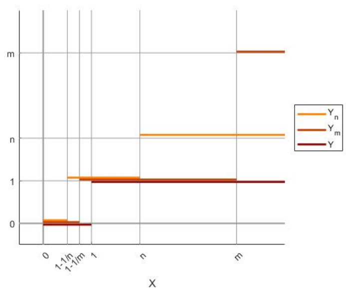
$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$$

- <u>Convergencia Casi Segura</u>

Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia casi segura:

$$Y_n \xrightarrow{c.s.} Y \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega :\ |Y_m(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Para poder estudiar con mayor facilidad las diferencias entre Y_n, Y_m con $m > n$ e Y, representemos las tres distribuciones en función de X:



En el diagrama se aprecia que:

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \, |Y_m(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega : \, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Por tanto, nos basta con comprobar si:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ahora bien, esto ya se ha hecho para la convergencia en probabilidad. Luego concluimos que:

$$Y_n \xrightarrow{c.s.} Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$$

- Convergencia en Media Cuadrática

  Debemos estudiar si:

  $$\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Y)^2] = 0$$

  De acuerdo a las diferencias entre Y_n e Y identificadas para la convergencia en probabilidad:

  $$E[(Y_n - Y)^2] = (1)^2\, P(1 - \tfrac{1}{n} \leq X < 1) + (n-1)^2\, P(n \leq X)$$

  $$= \left(F_X(1) - F_X(1 - \tfrac{1}{n})\right) + (n-1)^2\, (1 - F_X(n))$$

  $$= e^{-\lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right)} - e^{-\lambda} + (n-1)^2\, e^{-\lambda n}$$

  Por lo que:

  $$\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Y)^2] = 0$$

  Y se tiene:

  $$Y_n \xrightarrow{m^2} Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$$

  Es decir, que la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ converge en media cuadrática a $Y \sim Bernoulli(e^{-\lambda})$.

Ej. 12. *Una empresa está especializada en la producción de tuercas. La experiencia en los últimos años muestra que la probabilidad de producir una tuerca defectuosa es* 0,035. *Las tuercas se empaquetan en cajas de* 100 *unidades. Determinar el porcentaje de cajas sin más de dos tuercas defectuosas.*

Sea $X :=$ "Número de tuercas defectuosas en una caja". A raíz de los datos del enunciado, X sigue una distribución Binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0{,}035$. El enunciado pregunta por el porcentaje de cajas sin más de dos tuercas defectuosas, es decir, por $P(X \leq 2)$. Podemos obtener el resultado de las dos siguiente formas:

(i) Distribución Binomial

La función de distribución de una variable aleatoria $Bin(n,p)$ es:

$$F_{Bin(n,p)}(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Luego en nuestro caso concreto con $X \sim Bin(100; 0{,}035)$ tenemos:

$$F_X(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{100}{k} 0{,}035^k \, 0{,}965^{100-k}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Así pues:

$$P(X \leq 2) = F_X(2) \approx 0{,}316$$

(ii) Teorema Central del Límite

Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro p. Es conocido que $\sum_{j=1}^{n} X_j \sim Bin(n,p)$. Se tiene entonces $E[\sum_{j=1}^{n} X_j] = np$ y $Var(\sum_{j=1}^{n} X_j) = np(1-p)$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema Central del Límite a la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - E[\sum_{j=1}^{n} X_j]}{\sqrt{Var(\sum_{j=1}^{n} X_j)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

En nuestro caso concreto:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Dado que $X = \sum_{j=1}^{100} X_j$ particularizando para $n = 100$ y $p = 0{,}035$, mediante aproximación asintótica podemos calcular:

$$P(X \leq 2) = P\left(\sum_{j=1}^{100} X_j \leq 2\right) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{100} X_j - 3{,}5}{\sqrt{3{,}3775}} \leq \frac{2-3{,}5}{\sqrt{3{,}3775}}\right)$$

$$\approx P\left(Z \leq \frac{2-3{,}5}{\sqrt{3{,}3775}}\right) = P(Z \leq -0{,}186) = 0{,}207$$

Ej. 13. *Una urna contiene diez bolas numeradas del cero al nueve. De la urna se extraen n bolas con reemplazamiento:*

(a) *Señalar qué dice la ley de los grandes números sobre la aparición de ceros.*

(b) *Determinar cuántas extracciones será preciso efectuar para que, con probabilidad* 0,95, *la frecuencia relativa de aparición de ceros esté comprendida entre* 0,09 *y* 0,11.

(c) *Utilizar el Teorema Central del Límite para calcular la probabilidad de que, entre los n números elegidos, el cinco aparezca entre* $\frac{n-3\sqrt{n}}{10}$ *y* $\frac{n+3\sqrt{n}}{10}$ *veces. Particularizar para* $n = 25$ *y* $n = 100$.

(a) Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{10}$ de forma que $X_n :=$ "Aparece un cero en la n-ésima extracción". La frecuencia relativa de aparición de ceros en n extracciones vendrá dada por $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. En virtud del Teorema de Bernoulli se tiene:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{\mathcal{P}} p = \frac{1}{10}$$

Pero es que además, de acuerdo a la Ley Fuerte de Borel de los Grandes Números, también se verifica:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{c.s.} p = \frac{1}{10}$$

Luego lo que dice la ley de los grandes números sobre la aparición de ceros es que, según el número de extracciones tiende a infinito, la frecuencia relativa de aparición de ceros converge casi seguro a la proporción de ceros en la urna.

(b) La frecuencia relativa de aparición de ceros viene dada por $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$. Buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$P\left(0{,}09 \leq \frac{1}{n_0}\sum_{j=1}^{n_0} X_j \leq 0{,}11\right) \geq 0{,}95$$

Aplicando el Teorema Central del Límite a la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ de igual manera que en el ejercicio anterior, se obtiene:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Mediante aproximación asintótica podemos calcular entonces:

$$\begin{aligned}
P\left(0{,}09 \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \leq 0{,}11\right) &= P\left(\frac{9n}{100} \leq \sum_{j=1}^{n} X_j \leq \frac{11n}{100}\right) \\
&= P\left(\frac{\frac{9n}{100} - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \leq \frac{\frac{11n}{100} - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}}\right) \\
&\approx P\left(-\frac{\sqrt{n}}{30} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{30}\right) = 2P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{30}\right) - 1
\end{aligned}$$

Luego buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$2P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n_0}}{30}\right) - 1 \geq 0{,}95 \quad \Longleftrightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n_0}}{30}\right) \geq 0{,}975$$

Consultando la tabla de la Normal Estándar ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$) vemos que debemos exigir:

$$\frac{\sqrt{n_0}}{30} \geq 1{,}96 \quad \Longleftrightarrow \quad n_0 \geq 3457{,}44$$

Por lo que será preciso efectuar al menos 3458 extracciones para que, con probabilidad 0,95, la frecuencia relativa de aparición de ceros esté comprendida entre 0,09 y 0,11.

(c) Razonando de manera análoga al apartado anterior, la aparición de cincos viene dada por $\sum_{j=1}^{n} Y_j$ donde $\{Y_n : n \geq 1\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{10}$ de forma que $Y_n :=$ "Aparece un cinco en la n-ésima extracción". Queremos calcular:

$$P\left(\frac{n-3\sqrt{n}}{10} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq \frac{n+3\sqrt{n}}{10}\right)$$

Aplicando el Teorema Central del Límite a la sucesión $\{Y_n : n \geq 1\}$ de igual manera que en el apartado anterior, se obtiene:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Mediante aproximación asintótica podemos calcular entonces:

$$P\left(\frac{n-3\sqrt{n}}{10} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq \frac{n+3\sqrt{n}}{10}\right) = P\left(-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j - \frac{n}{10}}{\frac{3\sqrt{n}}{10}} \leq 1\right)$$

$$\approx P\left(-1 \leq Z \leq 1\right) = 2P\left(Z \leq 1\right) - 1$$

Consultando la tabla de la Normal Estándar ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$) podemos deducir que este valor es:

$$P\left(\frac{n-3\sqrt{n}}{10} \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq \frac{n+3\sqrt{n}}{10}\right) \approx 0{,}6826$$

Particularizando:

- Si $n = 25$, entonces:

$$P\left(1 \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq 4\right) \approx 0{,}6826$$

  Luego esperamos encontrar entre 1 y 4 cincos con probabilidad 0,6826.

- Si $n = 100$, entonces:

$$P\left(7 \leq \sum_{j=1}^{n} Y_j \leq 13\right) \approx 0{,}6826$$

  Luego esperamos encontrar entre 7 y 13 cincos con probabilidad 0,6826.

Ej. 14. *Sea* $\{X_n : n \geq 1\}$ *una sucesión de variables aleatorias independientes donde* X_n *tiene función de masa:*

$$P(X_n = -2) = P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = P(X_n = 2) = \frac{1}{4n}$$
$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Estudiar la convergencia en ley, en probabilidad, en media cuadrática y casi segura. Analizar si se cumple la ley fuerte de los grandes números.

Analicemos cada una de las distintas convergencias pedidas de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ por separado:

- Convergencia en Ley

  Para poder estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ debemos en primer lugar encontrar la función de distribución de cada variable aleatoria X_n con $n \geq 1$. A partir de la función de masa dada por el enunciado:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4n} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \frac{1}{2n} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{4n} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

  Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

  Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria X degenerada en 0, por lo que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $X \equiv 0$:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \equiv 0$$

- Convergencia en Probabilidad

  Dado que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en ley a $X \equiv 0$, se tiene también convergencia en probabilidad a dicha constante. Es decir:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \equiv 0$$

- Convergencia Casi Segura

  Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia casi segura:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \iff \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

En nuestro caso concreto, como el candidato a límite es $X \equiv 0$, debemos estudiar si dado $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

O equivalentemente, mediante el uso del complementario, si:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| < \varepsilon\}\right) = 1$$

Supongamos que $0 < \varepsilon \leq 1$. Siendo así:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| < \varepsilon\}\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| = 0\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\lim_{k\to\infty} \bigcap_{m=n}^{k} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| = 0\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{k} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| = 0\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} P\left(\{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| = 0\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} \frac{m-1}{m} = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \frac{n-1}{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} 0 = 0
\end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega)| < \varepsilon\}\right) \neq 1$$

Lo cual nos indica que $\{X_n : n \geq 1\}$ no converge casi seguro a $X \equiv 0$.

- Convergencia en Media Cuadrática

  Debemos estudiar si:

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$$

  En nuestro caso concreto, como el candidato a límite es $X \equiv 0$, debemos estudiar si:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = 0$$

De acuerdo a la función de masa de X_n:

$$E[X_n^2] = (-2)^2 \frac{1}{4n} + (-1)^2 \frac{1}{4n} + (0)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1)^2 \frac{1}{4n} + (2)^2 \frac{1}{4n} = \frac{5}{2n}$$

Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} = 0$$

Y se tiene:

$$X_n \xrightarrow{m^2} X \equiv 0$$

Es decir, que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en media cuadrática a $X \equiv 0$.

En cuanto a si $\{X_n : n \geq 1\}$ cumple la ley fuerte de los grandes números, vamos a hacer uso del siguiente resultado:

Teorema. *Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_n] = \mu_n$ y $Var(X_n) = \sigma_n^2$, tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty$. Entonces:*

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Es decir, $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

En nuestro caso, la esperanza de las variables aleatorias X_n es:

$$E[X_n] = (-2) \frac{1}{4n} + (-1) \frac{1}{4n} + (0) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1) \frac{1}{4n} + (2) \frac{1}{4n} = 0$$

Y su varianza:

$$Var(X_n) = E[X_n^2] - E[X_n]^2 = \frac{5}{2n} - 0^2 = \frac{5}{2n}$$

Además se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Var(X_j)}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{5}{2j^3} < \infty$$

Por lo que estamos en las condiciones del teorema y $\{X_n : n \geq 1\}$ verifica la ley fuerte de los grandes números.

Ej. 15. *Sea ξ una variable aleatoria Uniforme sobre el intervalo $(-\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$. Se definen las variables aleatorias $\eta = \theta\,\xi$ y X_n con $n \geq 1$ donde:*

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -1 & si\ \eta(\omega) \in (-1, -\frac{1}{n}) \\ 0 & si\ \eta(\omega) \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ 1 & si\ \eta(\omega) \in [\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Estudiar la convergencia en probabilidad, casi segura y en media cuadrática de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$.

Analicemos cada una de las distintas convergencias pedidas de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ por separado. Añadamos la convergencia en ley para tener un candidato a límite (en caso de que haya convergencia en ley):

- Convergencia en Ley

  Para poder estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ debemos en primer lugar encontrar la función de distribución de cada variable aleatoria X_n con $n \geq 1$. Es claro que si $\xi \sim \mathcal{U}(-\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\theta})$, entonces $\eta = \theta\,\xi \sim \mathcal{U}(-1, 1)$. Recordemos que la función de distribución de una variable aleatoria Uniforme sobre el intervalo (a, b) es:

$$F_{\mathcal{U}(a,b)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } a \leq y < b \\ 1 & \text{si } b \leq y \end{cases}$$

  Por lo que:

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \frac{y+1}{2} & \text{si } -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

  Así pues, X_n tiene la siguiente función de masa:

$$P(X_n = -1) = P(-1 < X < -\tfrac{1}{n}) = F_\eta(-\tfrac{1}{n}) - F_\eta(-1) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$$

$$P(X_n = 0) = P(-\tfrac{1}{n} \leq X < \tfrac{1}{n}) = F_\eta(\tfrac{1}{n}) - F_\eta(-\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}$$

$$P(X_n = 1) = P(\tfrac{1}{n} \leq X < 1) = F_\eta(1) - F_\eta(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)$$

  De esta forma, su función de distribución es:

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

  Se tiene entonces:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

  Ahora bien, esta función límite se corresponde con la función de distribución de una variable aleatoria X discreta con función de masa $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$, por lo que la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$ converge en ley a X:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

- <u>Convergencia en Probabilidad</u>

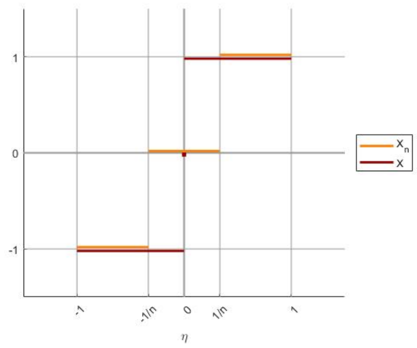
  Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia en probabilidad:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

  Démonos cuenta, mediante el paso al límite, de que:

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } X_n(\omega) \in (-1,0) \\ 0 & \text{si } X_n(\omega) \in \{0\} \\ 1 & \text{si } X_n(\omega) \in (0,1) \end{cases}$$

  Para poder estudiar con mayor facilidad las diferencias entre X_n y X, representemos ambas distribuciones en función de η:



  Distingamos dos casos en función del valor de $\varepsilon > 0$:

  - Si $0 < \varepsilon < 1$, entonces:

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = P(-\tfrac{1}{n} \le \eta < 0) + P(0 < \eta < \tfrac{1}{n})$$
$$= (F_\eta(0) - F_\eta(-\tfrac{1}{n})) + (F_\eta(\tfrac{1}{n}) - F_\eta(0)) = \tfrac{1}{n}$$

  - Si $1 \le \varepsilon$, entonces:

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = P(\emptyset) = 0$$

  En cualquiera de ellos se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0$$

  Por lo que:

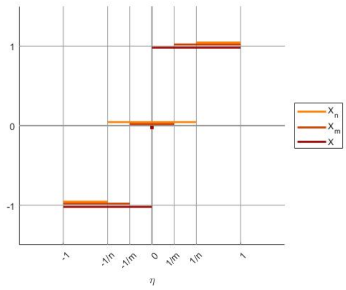
$$X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$$

- <u>Convergencia Casi Segura</u>

  Utilizaremos la siguiente caracterización de la convergencia casi segura:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \, |X_m(\omega) - X(\omega)| \ge \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

  Para poder estudiar con mayor facilidad las diferencias entre X_n, X_m con $m > n$ y X, representemos las tres distribuciones en función de η:



En el diagrama se aprecia que:

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \, |X_m(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

Por tanto, nos basta con comprobar si:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \, |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ahora bien, esto ya se ha hecho para la convergencia en probabilidad. Luego concluimos que:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X$$

- <u>Convergencia en Media Cuadrática</u>

  Debemos estudiar si:

  $$\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$$

  De acuerdo a las diferencias entre X_n y X identificadas para la convergencia en probabilidad:

  $$\begin{aligned} E[(X_n - X)^2] &= (1)^2\, P(-\tfrac{1}{n} \leq \eta < 0) + (-1)^2\, P(0 < \eta < \tfrac{1}{n}) \\ &= (F_\eta(0) - F_\eta(-\tfrac{1}{n})) + (F_\eta(\tfrac{1}{n}) - F_\eta(0)) = \tfrac{1}{n} \end{aligned}$$

  Por lo que:

  $$\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0$$

  Y se tiene:

  $$X_n \xrightarrow{m^2} X$$

  Es decir, que la sucesión $\{X_n : \, n \geq 1\}$ converge en media cuadrática a X.

Ej. 16. *La duración de una bombilla se distribuye Exponencial con media un mes. Cada vez que una bombilla se estropea es reemplazada inmediatamente por otra nueva. Determinar cuál es el número mínimo de bombillas que deben tenerse para que, con probabilidad* 0,95*, tengamos luz durante un intervalo de tiempo de dos años.*

Sea $\{X_n : n \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Exponencial de tasa $\lambda = 1$ donde $X_n :=$ "Duración (meses) de la bombilla n-ésima". Sea $Y_n = \sum_{j=1}^{n} X_j :=$ "Duración total (meses) de las primeras n bombillas", entonces Y_n sigue una distribución Gamma de parámetros $a = 1$ y $p = n$. Buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$P\left(24 \leq Y_{n_0}\right) \geq 0{,}95$$

Se tiene que $E[Y_n] = \frac{p}{a} = n$ y $Var(Y_n) = \frac{p}{a^2} = n$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema Central del Límite a la sucesión $\{X_n : n \geq 1\}$:

$$\frac{Y_n - E[Y_n]}{\sqrt{Y_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

En nuestro caso concreto:

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Mediante aproximación asintótica podemos calcular entonces:

$$P\left(24 \leq Y_n\right) = P\left(\frac{24-n}{\sqrt{n}} \leq \frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}\right) \approx P\left(\frac{24-n}{\sqrt{n}} \leq Z\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{24-n}{\sqrt{n}}\right)$$

Luego buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$1 - P\left(Z \leq \frac{24-n_0}{\sqrt{n_0}}\right) \geq 0{,}95 \quad \Longleftrightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{24-n_0}{\sqrt{n_0}}\right) \leq 0{,}05$$

Consultando la tabla de la Normal Estándar ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$) vemos que debemos exigir:

$$\frac{24-n_0}{\sqrt{n_0}} \geq -1{,}645 \quad \Longleftrightarrow \quad n_0 \geq 33{,}52$$

Por lo que será preciso tener al menos 34 bombillas para que, con probabilidad 0,95, tengamos luz durante un intervalo de tiempo de dos años (24 meses).