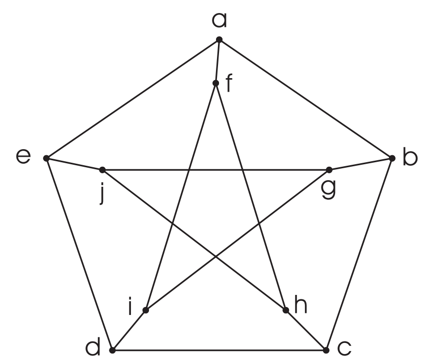
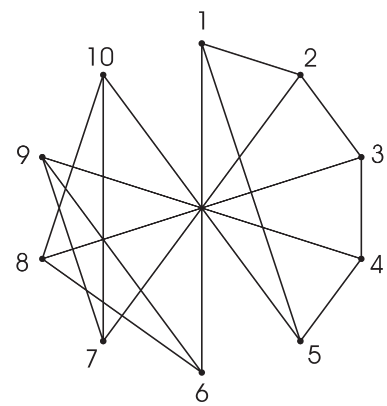
Matemática Discreta y Lógica Matemática

Facultad de Informática

Hoja de ejercicios Grafos y Árboles

1. Construye la *tabla de listas de adyacencia* y la *matriz de adyacencia* de los dos grafos siguientes y demuestra que son isomorfos.





2. En cada una de las 5 torres de Wormtown está encerrada una hija del rey Marschall. Desde la torre de la princesa Dignata (D) no se ve la torre de Consumata (C), aunque sí las otras tres. Las princesas Adelhata (A), Zebedea (Z) y Omata (O) también ven solamente tres torres cada una. Consumata sólo ve dos torres. Construye la tabla de listas de adyacencia y la matriz de adyacencia de un grafo que tenga como vértices las torres, y tal que dos vértices estén conectados por una arista cuando desde la torre correspondiente a uno de ellos se pueda ver la torre correspondiente al otro. Dibuja el grafo.

3. El *complementario* de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ cuyo conjunto V de vértices es el mismo de G y cuyo conjunto $\overline{E}$ de aristas está formado por todas las aristas $\{u, v\}$ entre vértices de V que no pertenezcan a E (es decir, que no sean aristas de G). Suponiendo que G tenga n vértices de grados $d_1, \ldots, d_n$, ¿cuáles serán los grados de los vértices de $\overline{G}$?

4. Construye un grafo con 5 vértices de grado 2 que sea isomorfo a su complementario.

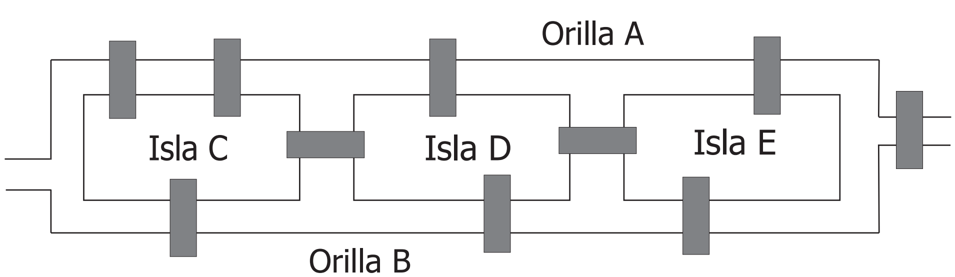
5. Suponiendo que G_1 y G_2 sean dos grafos isomorfos, demuestra que para cada número $k \in \mathbb{N}$ el número de vértices de grado k debe ser el mismo en ambos grafos.

6. Demuestra que si G es un grafo con más de un vértice, se pueden encontrar dos vértices diferentes de G que tengan el mismo grado.

7. Si un grafo $G = (V, E)$ tiene 15 aristas y su grafo complementario $G_c = (V, E_c)$ tiene 13 aristas, ¿cuántos vértices tiene G? *Observación*: Recuerda que para dos vértices $u, v \in V$, se cumple que $\{u, v\} \in E_c \iff \{u, v\} \notin E$.

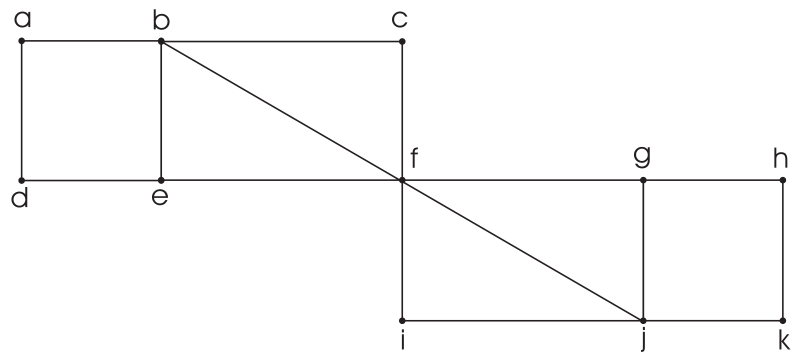
8. Disponemos de 9 cables para montar una red de conexiones entre 6 ordenadores. ¿Es posible montar una red en la que cada ordenador esté conectado con otros cuatro? ¿Y con otros tres? En caso afirmativo, ¿es única la red?

9. Demostrar que
    - W_4 es un subgrafo de K_5, pero no un subgrafo completo.
    - K_4 es un subgrafo completo de K_5.
10. Sea $G = (V, E)$ el grafo formado por el conjunto de vértices $V = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ y el conjunto de aristas $E = \{(a, b)(c, d) | (a = d, b \neq c) \text{ o } (b = c, a \neq d)\}$. ¿Es un grafo conexo? ¿Es semi-euleriano? ¿Es euleriano? ¿Es hamiltoniano?
11. Sea $A = \{0, 1, 2\}$ un conjunto y el grafo $G = (V, E)$ tal que $V = \mathcal{P}(A)$ y
$$\forall X, Y \in V,\ XY \in E \Leftrightarrow \quad (X \subseteq Y \text{ y } |X| = |Y| - 1) \text{ o } (Y \subseteq X \text{ y } |Y| = |X| - 1)$$
¿Es un grafo conexo? ¿Es semi-euleriano? ¿Es euleriano? ¿Es hamiltoniano? ¿No es conexo pero su componentes conexas son hamiltonianas?
12. Considera el grafo no dirigido $G = (V, E)$ tal que $V = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1875\}$ y $\{x, y\} \in E$ sii $x * y$ no es primo. ¿El grafo es conexo? En caso de no serlo, ¿cuántas componentes conexas tiene? Justifica tus respuestas.
13. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ $n \geq 2$ grado$(v_1) = 1$, grado$(v_i) \geq 2$ para $2 \leq i \leq n$. ¿G tiene al menos un camino circular? ¿G es hamiltoniano? ¿G es euleriano? ¿G tiene ciclos? Justifica tus respuestas.
14. Dado el grafo $G = (V, E)$ cuyo conjunto de vértices es $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y cuyo conjunto de aristas es $E = \{\{n, m\} \mid |m - n| \in \{2, 4\}, 0 \leq n, m \leq 6\} \cup \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$. Dibuja el grafo y responde justificadamente a las siguientes cuestiones: ¿Es conexo? ¿Cuántas compo- nentes conexas tiene? Responde a cada una de las siguientes preguntas para cada uno de los grafos correspondientes a las componentes conexas de G: ¿Es euleriano? ¿Es semieuleriano? ¿Es hamiltoniano?
15. El grafo $Q_n = (V_n, E_n)$ corresponde a un *hipercubo* de dimensión n. El conjunto de vértices $V_n = \{0, 1\}^n$ tiene 2^n elementos, que son todas las palabras binarias de longitud n, y el conjunto de aristas E_n viene determinado por la relación de adyacencia en la cual dos palabras $u,\ v \in V_n$ son adyacentes si y solo si difieren exactamente en un bit.
    a) Demuestra que Q_1, Q_2 y Q_3 son hamiltonianos.
    b) Razonando por inducción sobre n, demuestra que Q_n es un grafo hamiltoniano para todo $n \geq 1$.
16. En la siguiente figura aparecen 5 regiones y 10 puentes:



Construye un *multigrafo* que represente la situación, tomando como vértices las regiones y como aristas los puentes. ¿Es posible un recorrido que cruce cada puente una sola vez y regrese al lugar de partida? ¿Es posible un recorrido que cruce cada puente una sola vez, finalizando en un lugar diferente del de partida? Razona tus respuestas.

17. Considera el grafo G indicado por la figura siguiente:



¿Es posible realizar en G un recorrido que pase exactamente una vez por cada arista? En caso afirmativo, enumera las aristas en el orden correspondiente al recorrido.

18. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y euleriano con $|E| = 14$ y para todo $v \in V$ se tiene $g(v) > 2$. ¿Qué sabemos el número de vértices el grafo?

19. La siguiente tabla de adyacencia representa un grafo dirigido:

a	b	c	d	e	f
d	a	b	b	f	a
e			c		
			e		

Dibuja el grafo y construye su matriz de adyacencia. ¿Es este grafo conexo?

20. Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido. Demuestra que si se suman los grados de entrada y los grados de salida de todos los vértices de D, resulta el doble del número de arcos. Este resultado es válido incluso si el grafo contiene *bucles* (es decir, arcos de la forma (v, v) que conectan un vértice consigo mismo).

21. Hay exactamente seis árboles con seis vértices que sean diferentes (es decir, no isomorfos). Dibújalos.

22. Demuestra que un árbol que tenga al menos dos vértices tiene al menos dos vértices de grado 1.
Pista: Usa los dos resultados siguientes: (a) la suma de los grados de los vértices de un grafo vale el doble del número de aristas; el número de aristas de un árbol es igual al número de vértices menos 1.

23. Demuestra que si un grafo G tiene la propiedad de que entre cada dos vértices hay un único camino, entonces G es un árbol.