I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.................. Nº............

Apellidos Nombre

Calificación

8.- Desarrolla en serie de potencias de $z+i$ la función $f(z)=\log(4-iz)$ eligiendo la determinación del logaritmo para la cual $f(0)=\log 4-2\pi i$. Determina la región de convergencia.

$$f'(z)=\frac{1}{4-iz}\cdot(-i)=-i\cdot(4-iz)^{-1}$$

Veamos que $f^{n)}(z)=-i\cdot(4-iz)^{-n}\cdot(n-1)!\cdot i^{n-1}$

Para $n=1$ es cierto.

Supuesto cierto para n.

$$f^{n+1)}(z)=\frac{\partial}{\partial z}f^{n)}(z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(-i\cdot(4-iz)^{-n}(n-1)!\,i^{n-1}\right)=$$

$$=-i\,(4-iz)^{-n-1}(n-1)!\,i^{n-1}\,(-n)\cdot(-i)=-i\,(4-iz)^{-(n+1)}\,n!\,i^{n}$$

$$\Rightarrow f^{n)}(z)=-i^{n}\cdot(4-iz)^{-n}\,(n-1)!$$

$$f^{n)}(-i)=-i^{n}\cdot(4-1)^{-n}\cdot(n-1)!=-\left(\frac{i}{3}\right)^{n}(n-1)!$$

$$\Rightarrow f(z)=\log(4-iz)=f(-i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{n)}(-i)}{n!}(z+i)^{n}=$$

$$=f(-i)+\sum_{n=1}^{\infty}-\left(\frac{i}{3}\right)^{n}\frac{(n-1)!}{n!}(z+i)^{n}=\underbrace{f(-i)}_{\log 3-2\pi i}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^{n}\frac{1}{n}\cdot(z+i)^{n}$$