Primer examen final 2018-2019

La Teoría puntúa el 20% y los Problemas el 80% restante que luego se detalla.

Teoría

Se trata de dar una exposición de conjunto de estos teoremas. Es casi imposible dar definiciones, demostraciones, ejemplos, etc. de todo esto en el tiempo disponible. Se pretende que, tras un rato de reflexión, se escriba lo que podría ser una introducción en sus ideas esenciales para quien conoce los prerrequisitos básicos.

UNO.- El concepto de suma y suma directa de subespacios vectoriales. Teoremas principales.

DOS.- Los teoremas espectrales.

Problemas

Los dos primeros problemas puntúan 16 sobre 80 y los otros dos 24 sobre 80.

Problema 1 *Sea $\mathbb{E}$ el espacio de los polinomios reales de grado $\leq 2k$, que tiene dimensión $n = 2k+1$. Damos como cierto (hay un ejemplo similar en el texto) que*

$$\begin{aligned} \omega\left(P\left(X\right), Q\left(X\right)\right) &= P\left(-k\right) Q\left(-k\right) + P\left(-k+1\right) Q\left(-k+1\right) + \ldots + P\left(-1\right) Q\left(-1\right) \\ &+ P\left(0\right) Q\left(0\right) + P\left(1\right) Q\left(1\right) + \ldots + P\left(k-1\right) Q\left(k-1\right) + P\left(k\right) Q\left(k\right) \end{aligned}$$

es un producto euclidiano. Recordamos que los polinomios pares son los que cumplen $P\left(-X\right) = P\left(X\right)$ y los impares los que cumplen $P\left(-X\right) = -P\left(X\right)$. Sean $\mathbb{P}$ e $\mathbb{I}$ los subespacios que forman. Probar que tenemos una suma directa $\mathbb{E} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{I}$. siendo $\mathbb{P}$ e $\mathbb{I}$ ortogonales entre sí.

Solución. Se tiene

$$\omega\left(P\left(X\right), Q\left(X\right)\right) = \sum_{i=-k}^{k} P\left(i\right) Q\left(i\right) = P\left(0\right) Q\left(0\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(P\left(i\right) Q\left(i\right) + P\left(-i\right) Q\left(-i\right)\right).$$

Si $P\left(X\right)$ es par y $Q\left(X\right)$ es impar, se tiene que $Q\left(0\right) = 0$ ya que $Q\left(0\right) = Q\left(-0\right) = -Q\left(0\right)$. Entonces,

$$\omega\left(P\left(X\right), Q\left(X\right)\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(P\left(i\right) Q\left(i\right) + \left(-1\right) P\left(i\right) Q\left(i\right)\right) = 0.$$

Resulta pues que $\mathbb{P}$ e $\mathbb{I}$ son ortogonales entre sí. Evidentemente, si $R\left(X\right) \in \mathbb{P} \cap \mathbb{I}$ debe cumplir $\left\|R\left(X\right)\right\|^2 = 0$ y $\mathbb{P} \cap \mathbb{I} = 0$. Por último, todo polinomio es suma de uno par y otro impar, como muestra

$$P\left(X\right) = \frac{1}{2}\left(P\left(X\right) + P\left(-X\right)\right) + \frac{1}{2}\left(P\left(X\right) - P\left(-X\right)\right).$$

Por ejemplo, el segundo sumando es impar ya que

$$\left[\frac{1}{2}\left(P\left(X\right) - P\left(-X\right)\right)\right]_{X=-X} = \frac{1}{2}\left(P\left(-X\right) - P\left(X\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(P\left(X\right) - P\left(-X\right)\right). \spadesuit$$

Problema 2 *Determinar el número de matrices ortogonales $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos coeficientes solo pueden ser 0 o 1.*

Solución. Cada columna a_j debe cumplir $\left\|a_j\right\|^2 = 1$ y esto solo es posible si hay un 1 en la fila i, digamos $a_j^i = 1$ y los demas $a_j^k = 0$. Tenemos una función $F : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ definida diciendo que $F\left(j\right)$ es el superíndice i tal que $a_j^i = 1$. La función F determina unívocamente la matriz a con las condiciones del problema. Sucede que si F determina a no es arbitraria, sino que es inyectiva porque $F\left(p\right) = F\left(q\right) = 1$ implica $\langle a_p, a_q\rangle = a_p^i a_q^i = 1 \neq 0$. El número de funciones inyectivas (de hecho, biyectivas) de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, \ldots, n\}$ es $n!$ y ese es el número de las matrices ortonormales del problema.

Se puede argumentar de un modo algo más informal del modo siguiente. En a_1 se puede elegir la posición del único coeficiente 1 de n formas. La posición del único coeficiente 1 de a_2 puede elegirse de $n-1$ formas, porque no puede ser $a_1^i = a_2^i = 1$. Hasta aquí hay $n(n-1)$ elecciones posibles. La posición del único coeficiente 1 en a_3 se puede elegir de $n-2$ maneras porque si $a_3^i = 1$ no puede ser i la fila donde a_1 y a_2 tienen el 1. Hasta aquí hay $n(n-1)(n-2)$ elecciones posibles. Al llegar a a_n solo hay un hueco libre y el total de posibilidades es $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$. ♠

Problema 3 *n $\mathbb{R}^3$ con el producto euclidiano estándar tomamos un vector unitario u y definimos $L, M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por*

$$L(x) = x - 2\langle x, u\rangle u, \quad M(x) = \langle x, u\rangle u + u \times x.$$

1. *Admitiendo (fácil y no hay que hacerlo) que son lineales, calcular sus matrices en una base ortonormal cuyo primer vector sea u. (Ayuda mucho utilizar el producto vectorial.)*
2. *¿Qué tipo de isometría son L y M?*
3. *Tomamos v unitario y ortogonal a u y definimos $N(x) = x - 2\langle x, v\rangle v$. Qué tipo de isometría (rotación, simetría, rotosimetría, etcétera.) es $M \circ N$?*
4. *En una base ortonormal que incluya a u y v, calcular la matriz de $M \circ N$. Confirmar que esta matriz no contradice lo obtenido en **3**. (El orden de **3** y **4** es casi intercambiable porque lo mejor es trabajar en una base ortonormal que contiene a u y v.)*

Solución. Tomamos v unitario y ortogonal a u y la base $\mathcal{B} = (u, v, u \times v)$. Calculamos

$$L(u) = u - 2\langle u, u\rangle u = -u, \quad L(v) = v - 2\langle v, u\rangle u = v, \quad L(u \times v) = u \times v - 2\langle u \times v, u\rangle u = u \times v,$$

$$\begin{gathered} M(u) = \langle u, u\rangle u + u \times u = u, \quad M(v) = \langle v, u\rangle u + u \times v = u \times v, \\ M(u \times v) = \langle u \times v, u\rangle u + u \times (u \times v) = u \times (u \times v) = \langle u, v\rangle u - \|u\|^2 v = -v \end{gathered}$$

Las matrices respectivas para $\mathcal{B}$ son

$$\ell = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente L fija v y $u \times v$ invirtiendo u, luego es la simetría respecto al plano ortogonal a u. Esto casi se sabía desde el principio porque la fórmula $L(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$ es muy familiar. Por otra parte, $\det(m) = 1$, luego es una rotación de eje u. Si se quiere más precisión, es una rotación de ángulo $\pi/2$. Esto se prueba observando que v es ortogonal al eje y el ángulo θ está dado por $\cos\theta = \langle v, M(v)\rangle = (v, u \times v) = 0$.

En la base $\mathcal{B} = (u, v, u \times v)$ tenemos

$$\begin{aligned} &M \circ N(u) = M(u) = \langle u, u\rangle u + u \times u = u \\ &M \circ N(v) = M(-v) = \langle -v, u\rangle u + u \times (-v) = -u \times v \\ &M \circ N(u \times v) = M(u \times v) = \langle u \times v, u\rangle u + u \times (u \times v) = u \times (u \times v) = -\|u\|^2 v = -v. \end{aligned}$$

Aunque vamos a usar esto para la matriz de $M \circ N$, basta con saber que $M \circ N(u) = u$ para saber que tenemos una simetría especular. En efecto, $\det(M \circ N) = \det(M)\det(N) = 1 \cdot (-1) = -1$ y fija u. El fijar puntos descarta de las isometrías con determinante -1 a las simetría central y las rotosimetrías, y solo es posible la simetría especular.

Con las fórmulas de $M \circ N$ que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(M \circ N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(casi igual que m). ♠

Problema 4 *Dada la forma bilineal* $\sigma : \mathbb{R}^{2k+1} \times \mathbb{R}^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que en la base estándar tiene matriz*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & \ddots & & & & \diagup & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & -1 & & \\ & \diagup & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{, por ejemplo, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } 2k+1 = 5.$$

pedimos calcular su signatura (p, q) *.*

Tomemos ahora con $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *una forma bilineal simétrica* σ *cuya signatura* (p,q) *cumpla* $p, q \geq 1$*. Definimos* $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{E} \mid \sigma(x,x) = 0\}$ *. ¿Es* $\mathbb{S}$ *un subespacio vectorial?*[1]

Solución. Sea $n = 2k+1$. Las operaciones columna restan a a_n la columna a_1. y la operación fila homóloga a la fila n la fila a^1. Luego a la columna a_{n-1} se le resta la columna 2 y se hace la operación análoga por filas. La última operación resta a la columna a_{k+1} la columna a_{k-1} y luego se hace lo homólogo por filas. Al final queda la matriz diagonal

$$d = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \diagup & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 0 & & -2 & & \\ & \diagup & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & -2 \end{pmatrix}, \text{por ejemplo, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ si } 2k+1 = 5.$$

Es evidente que la signatura es $(k+1, k)$.

Es siempre falso que $\mathbb{S}$ *sea un subespacio vectorial.* Tomemos una base $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n)$ que diagonalice σ con $\sigma(u_i, u_i) = 1$ cuando $i \leq p$ y $\sigma(u_{p+j}, u_{p+j}) = -1$. Los vectores de $\mathbb{S}$ son aquellos cuyas coordenadas verifican

$$0 = \sigma(x,x) = \left(x^1\right)^2 + \cdots (x^p)^2 - \left(x^{p+1}\right)^2 - \cdots - (x^n)^2 .$$

Los vectores x e y con coordenadas

$$\left(1, 0, \ldots 0, \overset{p+1}{1}, 0, \ldots, 0\right)^\top \quad \text{y} \quad \left(1, 0, \ldots 0, \overset{p+1}{-1}, 0, \ldots, 0\right)^\top$$

están en $\mathbb{S}$. Su suma $x + y$ de coordenadas $(2, 0, \ldots, 0)^\top$ no está en $\mathbb{S}$. ♠

[1] Las dos preguntas son independientes.