ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 7

1. Clasifica las singularidades de las funciones siguientes:

a) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; b) $\dfrac{1}{z^2-z^5}$; c) $\dfrac{1}{z-\operatorname{sen} z}$ d) $e^{\frac{z}{z+2}}$;

e) $\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; f) $\dfrac{1-\operatorname{sen} z}{\cos z}$; g) $\cosh\dfrac{1}{z}$; h) $\dfrac{z^2}{\operatorname{sen}^2\frac{z}{z-1}}$.

2. Desarrolla en serie de Laurent:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3}$ en $0<|z|<\infty$; b) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ en $2<|z|<3$ y en $|z|>3$;

c) $\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ en $2<|z-1|<\infty$; d) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$ en $1<|z|<2$ y en $0<|z-1|<1$;

e) $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$ en $4<|z+2|<\infty$; f) $z^4\cos\dfrac{1}{z}$ en $0<|z|<R$ (determina R).

3. Demuestra que si f es una función que tiene una singularidad aislada no evitable en un punto a entonces e^f tiene una singularidad esencial en a.

4. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ que verifica $\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z)=1$, $\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\big((z-1)^2 f(z)\big)=2$ y $\lim_{z\to\infty} f(z)=1$. Determina la función f.

5. (Regla de L'Hôpital)

a) Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sean f y g dos funciones holomorfas en Ω. Supongamos que f y g tienen un cero de orden k en $a\in\Omega$. Comprueba que f/g tiene una singularidad evitable en a y

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{k)}(a)}{g^{k)}(a)}.$$

b) Estudia los casos de ceros de distintos ordenes.

c) Haz un estudio semejante cambiando ceros por polos.

6. Calcula el residuo de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $\dfrac{z^{n-1}}{\operatorname{sen}^n z}$, $n=1,2,\dots$, en $z_0=0$; b) $\dfrac{\operatorname{sen} 3z-3\operatorname{sen} z}{(\operatorname{sen} z-z)\operatorname{sen} z}$, en $z_0=0$;

c) $\dfrac{\operatorname{sen} 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$, en $z_0=0$; d) $\dfrac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\operatorname{sen} z}$, en $z_0=0$;

e) $\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$, en $z_0=-1$ y$z_0=2$; f) $\dfrac{(1-\cosh z)\operatorname{senh} z}{(1-\cos z)\operatorname{sen}^2 z}$, en $z_0=0$;

7. Calcula los residuos en las singularidades de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$ b) $z^3e^{1/z}$ c) $\dfrac{\cosh z}{(z^2+1)(z-3)}$ d) $\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$

e) $e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$ f) $z^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ g) $\dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$, $n>0$.

8. Sea f una función holomorfa no idénticamente nula en un abierto conexo Ω y sea $a\in\mathbb{C}$. Halla y clasifica las singularidades aisladas de la función $\frac{f'}{f-a}$ y calcula su residuo en dichas singularidades.

9. Supongamos que f tiene una singularidad aislada en ∞ y sea $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0; R)$. Se define el residuo de f en ∞ como $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz$ donde γ_r es la circunferencia de centro 0 y radio r, $(r > R)$, recorrida en sentido directo.

a) Demuestra que esta definición es independiente de r y que coincide con el residuo de la función $-\frac{1}{z^2} g(z)$ en 0, donde g es la función definida $g(z) = f(1/z)$ para $0 < |z| < R^{-1}$.

b) Demuestra que si f es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de puntos, entonces la suma de los residuos en todas las singularidades, incluido el punto del infinito, vale 0.