Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf.

Lista 2.-

Número 2.17.- Denotamos $X = C([0,1])$ el conjunto de funciones continuas en el intervalo unidad, y consideramos en X las tres distancias siguientes:

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f-g|^2} \qquad d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g| \qquad d_2(f,g) = \sup_{[0,1]} |f-g|$$

Equipamos X con las tres topologías τ, τ_1, τ_2 definidas respectivamente por d_1, d_1, d_2. Estudiar la continuidad de la identidad $X \longrightarrow X$ según cuáles de esas topologías se consideras.

Nos están pidiendo en realidad que comparemos las topologías τ, τ_1 y τ_2 porque, en un caso general, la función identidad:

$$\begin{aligned} Id: (Y, \tau') &\longrightarrow (Y, \tau'') \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$ es continua si y solo si

la preimagen de todo abierto de τ'' es abierto de τ', es decir, que todo abierto de τ'' es abierto de τ', o lo que es lo mismo, τ' es más fina que τ''.

Antes de comenzar a trabajar con las topologías vamos a hablar un poco sobre las distancias.

Nos damos cuenta de que las tres distancias provienen de normas. Sean $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ las normas 1, 2 e infinito del espacio X definidas como:

$$\|\cdot\|_1 : X \longmapsto \mathbb{R} \qquad , \qquad \|\cdot\|_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f| \qquad\qquad f \longmapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2}$$

y $\|\cdot\|_\infty : X \longmapsto \mathbb{R}$
$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$$

Se comprueban las propiedades de positividad, no degeneración y multiplicidad de manera inmediata y la propiedad de la desigualdad triangular se sigue de la desigualdad de Minkowski para el caso integral. Por tanto, estas funciones son normas y las distancias d, d_1, d_2 son en efecto distancias por definirse como:

$$d(f,g) = \|f-g\|_1 \quad , \quad d_1(f,g) = \|f-g\|_2 \quad , d_2(f,g) = \|f-g\|_\infty$$

Este hecho nos va a ser de gran utilidad para lo que vamos a ver a continuación.

Vamos a probar que dos normas genéricas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ (no son la norma 1 y la norma 2 sino dos normas arbitrarias) definidas sobre un mismo espacio X verifican la siguiente doble implicación:

La topología inducida por la norma $\|\cdot\|_1$ es más fina que la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_2$ sí y solo si existe una constante positiva M talque para todo $x \in X$ $\|x\|_2 \leq M\|x\|_1$.

Antes de probar este resultado hacemos un breve comentario sobre la notación que vamos a usar:

τ_i es la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_i$ $\forall i = 1,2$.

$B_i(x,\varepsilon) = \{ y \in X : \|x-y\|_i < \varepsilon \}$ $\forall i = 1,2$ y $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$.

$\Leftarrow$] Hay que probar que $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ así que sea $\mathcal{U}$ un abierto de $\mathcal{T}_2$. y hay que ver que es abierto de $\mathcal{T}_1$.

Sea $x \in \mathcal{U}$ y queremos encontrar $\varepsilon' > 0$ tal que $B_1(x, \varepsilon') \subset \mathcal{U}$.
Por ser $\mathcal{U}$ abierto de $\mathcal{T}_2$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_2(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.
Basta tomar entonces $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M}$ con M la constante que acota $\| \ \|_2$ en función de $\| \cdot \|_1$ ($\|x\|_2 \leq M \|x\|_1 \ \forall x \in X$).
Efectivamente $B_1(x, \varepsilon') \overset{(*)}{\subset} B_2(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

$\subseteq$] . $y \in B_1(x, \varepsilon') \Leftrightarrow \|x - y\|_1 < \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M} \Leftrightarrow M\|x-y\|_1 < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x - y\|_2 \leq M \|x - y\|_1 < \varepsilon \Rightarrow y \in B_2(x, \varepsilon)$.
Luego $\mathcal{U}$ es abierto en $\mathcal{T}_1$

$\Rightarrow$] Razonando por reducción al absurdo supongamos que $\forall M > 0$ $\exists x \in X$ tal que $\|x\|_2 > M \|x\|_1$ y veamos que esto nos lleva a contradicción.

Consideramos $B_2(0,1)$ la bola unidad abierta en $\mathcal{T}_2$ que es un abierto de $\mathcal{T}_2$. Por hipótesis $B_2(0,1)$ es abierto de $\mathcal{T}_1$ luego $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_1(0, \varepsilon) \subset B_2(0,1)$. Tomamos entonces $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ y $\exists x_0 \in X$ tal que $\|x_0\|_2 > M \|x_0\|_1$. Definimos $y = \dfrac{x_0}{\|x_0\|_2}$. Esto está bien definido porque X es un espacio vectorial ~~real~~ y porque $\|x_0\|_2 \neq 0$ porque $\|x_0\|_2 > M \|x_0\|_1 \geq 0$.

Entonces $\|y\|_1 = \left\| \dfrac{x_0}{\|x_0\|_2} \right\|_1 = \dfrac{\|x_0\|_1}{\|x_0\|_2} < \dfrac{1}{M} = \varepsilon$, luego $y \in B_1(0, \varepsilon)$
Como $B_1(0, \varepsilon) \subset B_2(0,1) \Rightarrow \|y\|_2 < 1$ pero $\|y\|_2 = \left\| \dfrac{x_0}{\|x_0\|_2} \right\|_2 = \dfrac{\|x_0\|_2}{\|x_0\|_2} = 1$
con lo que llegamos a contradicción.

Con esta caracterización sólamente necesitamos saber si existen esas constantes para cada una de las normas y así sabremos qué topologías son las más finas. y la relación entre ellas.

Comenzamos con los casos más fáciles: si en el espacio de origen y en el de llegada tenemos la misma norma, entonces inducen la misma topología y la función identidad es trivialmente continua. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} Id &: (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau) \\ Id &: (X,\tau_1) \longrightarrow (X,\tau_1) \\ Id &: (X,\tau_2) \longrightarrow (X,\tau_2) \end{aligned}$$

son todas ellas continuas.

Veamos que $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \quad \forall f \in X$.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \leq \int_0^1 \sup_{[0,1]} |f| = \sup_{[0,1]}|f| \int_0^1 dt = \sup_{[0,1]} |f| = \|f\|_\infty.$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2} \leq \sqrt{\int_0^1 (\sup_{[0,1]}|f|)^2} = \|f\|_\infty$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2} = \|f\|_2$$

donde esta última desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Deducimos del resultado que hemos demostrado que

$$\tau_1 \subset \tau \subset \tau_2$$ luego las siguientes funciones

$$\begin{aligned} Id &: (X,\tau_2) \longrightarrow (X,\tau) \\ Id &: (X,\tau_2) \longrightarrow (X,\tau_1) \\ Id &: (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau_1) \end{aligned}$$

son todas ellas continuas

En los tres casos que nos quedan vamos a poder ver que no existen dichas constantes.

Vamos a razonar en los tres por reducción al absurdo.

Supongamos que $\exists M>0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1 \quad \forall f\in X$.

Nos construimos f como

$$f(t)=\begin{cases} -1+\frac{t}{\alpha} & \text{si } t\in[0,\alpha] \\ 0 & \text{si } t\in(\alpha,1] \end{cases} \quad \text{con } \alpha\in(0,1) \text{ por determinar.}$$

f es continua en $[0,1]$ y vamos a calcular $\|f\|_\infty$ y $\|f\|_1$.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \sup_{t\in[0,\alpha]} \left|-1+\frac{t}{\alpha}\right| = 1$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| = \int_0^\alpha \left|-1+\frac{t}{\alpha}\right| dt = \int_0^\alpha \left(1-\frac{t}{\alpha}\right) dt = \alpha - \frac{1}{\alpha}\left.\frac{t^2}{2}\right]_0^\alpha = \alpha - \frac{\alpha^2}{2\alpha} =$$
$$= \frac{\alpha}{2}$$

Basta elegir $\alpha < \frac{2}{M}$ para que $M\|f\|_1 = M\frac{\alpha}{2} < 1 = \|f\|_\infty$ y llegamos a contradicción.

Para el caso de $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ nos vale la misma función.

Supongamos que $\exists M>0$ tal que $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2 \quad \forall f\in X$.

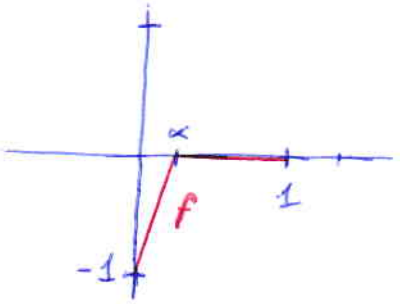
Sea f la de antes (no hemos determinado α todavía).

Entonces $\|f\|_\infty = 1$ y

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2} = \sqrt{\int_0^\alpha \left(-1+\frac{t}{\alpha}\right)^2 dt} = \sqrt{\alpha \left.\frac{\left(-1+\frac{t}{\alpha}\right)^3}{3}\right]_0^\alpha} = \sqrt{\alpha\frac{(0+1)}{3}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$$

Esta vez basta escoger $\alpha < \frac{3}{M^2}$ para que

$$M\|f\|_2 = M \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{3}} < 1 = \|f\|_\infty$$



Por último supongamos que $\exists M>0$ tal que $\|f\|_2 \leq M\|f\|_1$ $\forall f \in C([0,1])$.

Sea $f(t) = t^n$ $\forall t \in [0,1]$ con n por determinar.

Entonces $\|f\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ y

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |t^n|^2 dt = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow \|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Entonces $\|f\|_2 \leq M\|f\|_1 \Leftrightarrow \frac{\|f\|_2}{\|f\|_1} \leq M \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{n+1}} \leq M \Leftrightarrow \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \leq M.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} = \infty$ entonces existe un n suficientemente grande tal que $\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} > M \Leftrightarrow \|f\|_2 > M\|f\|_1$ lo que nos lleva a contradicción.

Con estas tres contradicciones hemos probado que

$$\tau \not\subset \tau_1 \ , \ \tau_2 \not\subset \tau \quad y \quad \tau_2 \not\subset \tau_1 \quad o$$

equivalentemente, las siguientes aplicaciones

$$\begin{aligned} Id : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau) \\ Id : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_2) \\ Id : (X, \tau) &\longrightarrow (X, \tau_2) \end{aligned}$$

no son ninguna continua.

Observaciones:

i) La notación puede resultar confusa porque los índices de las topologías se corresponden con los índices de las distancias pero no con los índices de las normas. Quizás hubiera sido más conveniente cambiar los índices de las distancias y las topologías (porque las normas siguen la notación estandar) pero he preferido mantenerla porque la daba así el enunciado. A modo de resumen y por si sirve de aclaración si llamamos τ_i a la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_i$ con $i = 1, 2, \infty$ entonces son continuas

$$\begin{aligned} Id : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_1) \\ Id : (X, \tau_2) &\longrightarrow (X, \tau_2) \\ Id : (X, \tau_\infty) &\longrightarrow (X, \tau_\infty) \\ Id : (X, \tau_\infty) &\longrightarrow (X, \tau_1) \\ Id : (X, \tau_\infty) &\longrightarrow (X, \tau_2) \\ Id : (X, \tau_2) &\longrightarrow (X, \tau_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Id : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_\infty) \\ Id : (X, \tau_2) &\longrightarrow (X, \tau_\infty) \\ Id : (X, \tau_1) &\longrightarrow (X, \tau_2) \end{aligned}$$

no continuas

porque $\tau_1 \subsetneq \tau_2 \subsetneq \tau_\infty$

ii) Es importante trabajar con las normas y no con las distancias

$d(x,y)=\sqrt{|x-y|}$ es una distancia que no viene de una norma e induce en $\mathbb{R}$ la topología usual. Sin embargo, no existen constantes M_1, M_2 tales que $d(x,y) \leq M_1 |x-y|$ o $|x-y| \leq M_2\, d(x,y)$

Número 2.16.- Demostrar que la topología $\mathcal{T}_{rad}$ de los conjuntos radialmente abiertos del plano es la topología que cumple las dos condiciones siguientes:

1) Induce en las rectas del plano la topología usual

2) Una aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow X$ es continua si lo son todas sus restricciones a rectas.

Estudiar la continuidad de la función $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$ respecto de esta topología radial y respecto de la topología usual.

Recordamos brevemente que la topología radial es aquella en la que sus abiertos son los conjuntos radialmente abiertos, es decir, aquellos $W \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\forall p \in W$ y toda recta L que pasa por p existe un intervalo abierto I centrado en p con $I \subset L \cap W$.

Nos piden probar que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{rad} \iff \begin{cases} \text{i) } \mathcal{T}|_L = \mathcal{T}_{usual} \quad \forall L \text{ recta.} \\ \text{ii) } \forall f: (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}') \text{ tal que } \forall L \subset \mathbb{R}^2 \text{ recta} \\ \quad \text{se tiene que } f|_L \text{ es continua, entonces } f \text{ es continua.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$] Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{rad}$ y vamos a probar i) y ii).

i) Ya fue probado en la entrega anterior para el ejercicio 1.21 pero repetimos rápidamente la demostración.

Sea L una recta y en general $\mathcal{T}_{usual} \subset \mathcal{T}_{rad}$ luego $\mathcal{T}|_L \supset \mathcal{T}_{usual}$.

Por otra parte si $U \in \tau|_L$ entonces $\exists W \in \tau = \tau_{rad}$ tal que $U = W \cap L$. Para ver que U es abierto usual sea $x \in U$ y por ser W radialmente abierto y $x \in L$ entonces existe I intervalo abierto centrado en x tal que $I \subset W \cap L = U$. Por tanto $x \in I \subset U$ donde I es una bola abierta usual centrada en x luego U es abierto usual.

Para ver ii) tomamos $U \in \tau'$ un abierto de X y hay que ver si $f^{-1}(U) \in \tau = \tau_{rad}$, es decir, hay que ver si $f^{-1}(U)$ es radialmente abierto. Sea $x \in f^{-1}(U)$ y sea L_0 una recta que pasa por x. Por ser $f|_L$ continua para cada recta L en particular lo será para L_0 luego $(f|_{L_0})^{-1}(U)$ es abierto relativo de L_0. Pero $(f|_{L_0})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap L_0$

Como este conjunto es abierto relativo de L_0 y hemos visto que τ_{rad} induce en las rectas la topología usual entonces $\exists I$ intervalo abierto centrado en x y contenido en $f^{-1}(U) \cap L_0$ lo que significa que $f^{-1}(U)$ es radialmente abierto y f continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponemos ahora que se cumplen i) y ii) y tenemos que probar la igualdad $\tau = \tau_{rad}$, lo cual haremos por doble contenido.

$\boxed{\subset}$ Sea $U \in \tau$ un abierto de la topología y hay que ver que es radialmente abierto. Sea $x \in U$ y L una recta que pasa por x. Nos preguntamos si existe un intervalo abierto I centrado en x y contenido en $U \cap L$. Por i) sabemos que $U \cap L$ es un abierto usual al que pertenece x, y por ser los intervalos abiertos base de la topología usual se puede escribir $U \cap L$ como una cierta unión de intervalos, y por estar x en la unión, estará en uno de ellos, al que podemos llamar $\hat{I}$.

$\hat{I}$ está contenido en $U \cap L$ y contiene a x pero nada nos abierto garantiza que esté centrado en x. Basta tomar otro intervalo I centrado en x y contenido en $\hat{I}$ para que quede probado el resultado

$\supseteq$) Tenemos que probar que $\mathcal{T}_{rad} \subset \mathcal{T}$.

Para ello basta ver que la función:

$Id: (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rad})$ es continua, pero por iii) es suficiente ver que $\forall L$ recta $Id|_L : (L, \mathcal{T}|_L) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{rad})$ es continua. Nótese que por i) $\mathcal{T}|_L = \mathcal{T}_{usual}$. Sea $U \in \mathcal{T}_{rad}$ y queremos ver que $(Id|_L)^{-1}(U)$ es un abierto usual, pero $(Id|_L)^{-1}(U) = U \cap L$. Para ver que es abierto usual tomamos $x \in U \cap L$ y por ser U radialmente abierto tomando L como recta existe I intervalo abierto centrado en x y contenido en $U \cap L$. Por tanto $U \cap L$ es es un abierto usual y queda probado el resultado.

Estudiamos ahora la continuidad de $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Es claro que si $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ podemos encontrar una bola abierta usual donde el denominador no se anula y la función es continua en (x_0, y_0) por ser cociente de funciones continuas en la que el denominador no se anula.
Por tanto, si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ f es continua con la topología usual y por tanto también es continua con la topología radial.

Si nos aproximamos al origen por rectas de la forma $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $f(x, \lambda x) = \dfrac{x^2 \lambda x}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \dfrac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } \lambda = 0 \text{ entonces} \\ y = 0 \text{ y } f(x,0) = 0 \\ \forall x \neq 0 \end{array} \right)$

Nos falta considerar la recta $x = 0$ pero $f(0,y) = 0 \quad \forall y \neq 0$.

Por tanto podemos definir una extensión de f como $f(0,0) := 0$ de tal manera que la restricción de f a rectas sea continua.

Por lo visto en ii), esto significa que f es continua con la topología radial en $(0,0)$. Sin embargo, esta función no es continua con la topología usual en $(0,0)$ porque no existe el límite. Basta acercarse a $(0,0)$ con $y = x^2$ ya que $f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$.