ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

CURSO 2020-2021

HOJA 4

1. Calcula $\int_\gamma f(z)dz$ si:

a) $f(z) = e^z$ para γ el segmento orientado de $1+i$ a $2+1$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ para $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : \ |z-2| = 1; \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}$.

c) $f(z) = \bar{z}$ siendo γ el borde del triangulo de vértices $0, 2$ y $1+i$.

d) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z+6}$, y γ el rectángulo de vértices $\pm 9 \pm i$, orientado positivamente.

e) $f(z) = \dfrac{z^2+3}{z(z^2+9)}$, $\quad \gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}, \quad (R \neq 3)$.

2. Demuestra que si $f(z)$ es una función continua en el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant R_0, \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha\}$, $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$, y si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$ entonces $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = iA\alpha$, donde Γ_R es el arco del círculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ que está en S, recorrido en sentido directo.

3. Demuestra que:

a) $\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz\right| \leqslant 2\pi e^2$, donde $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

b) $\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z+i} dz\right| \leqslant \dfrac{\pi \operatorname{senh} 1}{\sqrt{2}}$, donde $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi\}$.

c) $\left|\displaystyle\int_\gamma \frac{z-2}{z-3} dz\right| \leqslant 4\sqrt{10}$ donde γ es el cuadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

d) $\dfrac{2}{\pi}\left|\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2-4}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{R}{R^2-4} & \text{si } R > 2 \\ \dfrac{R}{4-R^2} & \text{si } 0 < R < 2 \end{cases}$ donde $\gamma_R \equiv \left\{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right\}$.

4. Sea γ un camino en $\mathbb{C}$, y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas en la traza de γ, $\{\gamma\}$, tales que $(f_n)_n$ converge uniformemente en $\{\gamma\}$ a una función f . Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f.$$

5. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino, y $(\gamma_n)_n$ una sucesión de caminos, $\gamma_n : [a,b] \to \Omega$, tales que $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t)$ y $\lim_{n\to\infty} \gamma_n'(t) = \gamma'(t)$ uniformemente en $t \in [a,b]$. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f = \int_\gamma f.$$

6. Sea $F : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua, donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$, y sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino. Demuestra que la función $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(t) = \int_\gamma F(t,z)\, dz$ es continua.

7. Calcula las siguientes integrales para un camino γ que vaya de $-\pi i$ a πi en el semiplano derecho: $\int_\gamma z^4 dz$; $\int_\gamma e^z dz$; $\int_\gamma \cos z\, dz$; $\int_\gamma \operatorname{senh} z\, dz$.

8. Calcula
$$\int_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2} dz.$$

9. Sea P un polinomio de grado m, que no se anula en la región $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant R\}$. Calcula $\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz$, siendo $\gamma \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ recorrido en sentido directo.

10. Sea γ un camino cerrado contenido en $\mathbb{C} \smallsetminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$. Demuestra que $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$.

11. Demuestra que no existe una función holomorfa f definida en $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ tal que $f'(z) = \frac{1}{z}$. Concluye que en $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ no se puede definir una determinación del logaritmo.

12. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \neq 1$, calcula
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2}.$$