Ejercicio 2: Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región a la que se le aplica el Teorema de Gauss y supongamos que $(0,0,0) \notin V$. Probar que

$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{siendo } \vec{r}(x,y,z) = (x,y,z) \text{ y } r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|$$

Si llamamos $\vec{F}$ a $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$ entonces

$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Como V cumple las condiciones del Teorema de Gauss y $\vec{F}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \supset V$ podemos aplicar el Teorema de Gauss y

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})$$

Calculemos ahora la divergencia

$$\operatorname{div}(\vec{F}(x,y,z)) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right) =$$

$$= \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Análogamente $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$ y

$$\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$