Estadística. Grupo m3

Hoja 4. Intervalos de confianza

Mayte Rodríguez

Ejercicio 8

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$. Encontrar el intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1-\alpha$ de amplitud mínima basado en un estadístico suficiente.

El estadístico $T = X_{(1)}$ es suficiente. La función de distribución es

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq \theta \\ 1 - \exp\{-n(x-\theta)\} & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}$$

y la densidad es

$$f_T(x) = n \exp\{-n(x-\theta)\} I_{(\theta,\infty)}(x)$$

Buscamos a y b de forma que

$$P(a < T < b) = 1 - \alpha$$

y tal que la longitud del intervalo sea mínima. Para ello, tomamos a y b de forma que

$$\begin{aligned} F_T(a) &= 1 - \exp\{-n(a-\theta)\} = \alpha_1 \\ F_T(b) &= 1 - \exp\{-n(b-\theta)\} = 1 - \alpha_2 \end{aligned}$$

de forma que $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

Ejercicio 8

Entonces,

$$
\begin{aligned}
a &= \theta - \frac{\ln(1-\alpha_1)}{n} \\
b &= \theta - \frac{\ln(\alpha-\alpha_1)}{n}
\end{aligned}
$$

y el intervalo de confianza es

$$
\begin{aligned}
a &< T < b \\
\theta - \frac{\ln(1-\alpha_1)}{n} &< X_{(1)} < \theta - \frac{\ln(\alpha-\alpha_1)}{n} \\
X_{(1)} + \frac{\ln(\alpha-\alpha_1)}{n} &< \theta < X_{(1)} + \frac{\ln(1-\alpha_1)}{n}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8

cuya longitud es

$$L(\alpha_1) = \frac{\ln(1-\alpha_1)}{n} - \frac{\ln(\alpha-\alpha_1)}{n} = \frac{1}{n}\ln\frac{1-\alpha_1}{\alpha-\alpha_1}$$

que, al ser una función creciente alcanza su valor mínimo en $\alpha_1 = 0$ y entonces

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(X_{(1)} + \frac{\ln\alpha}{n}, X_{(1)}\right).$$

Ejercicio 2

Sean (X_1, X_2) una muestra aleatoria simple de $X \sim N(0, \sigma^2 = 1/\theta)$ y $T = \frac{X_1^2+X_2^2}{2}$ un estadístico. Demostrar que $2T\theta$ es una cantidad pivotal y utilizarla para construir un intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1-\alpha$.

Sabemos que $2T\theta = \theta X_1^2 + \theta X_2^2 \sim \chi_2^2$.
Al nivel de confianza $1-\alpha$, hay que encontrar a y b de forma que

$$1 - \alpha = P(a < 2T\theta < b).$$

Ejercicio 2

Entonces

$$
\begin{aligned}
a &< 2T\theta < b \\
\frac{a}{2T} &< \theta < \frac{b}{2T}
\end{aligned}
$$

que tiene longitud

$$L(a,b) = \frac{1}{2T}(b-a),$$

que hay que minimizar sujeto a la restricción

$$F(b) - F(a) = 1 - \alpha.$$

Ejercicio 2

Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, vamos a minimizar

$$L = \frac{1}{2T}(b-a) - \lambda(F(b) - F(a) - 1 + \alpha),$$

que derivando e igualando a cero obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dL}{da} &= -\frac{1}{2T} + \lambda f(a) = 0 \\ \frac{dL}{db} &= \frac{1}{2T} - \lambda f(b) = 0 \end{aligned}$$

Lo que equivale a

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ F(b) - F(a) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Ejercicio 9

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\theta, \sigma^2 = 100)$. Construir una región creible de probabilidad 0.95 para la media θ, si se supone que la distribución a priori para θ es $N(\mu = 100, \tau^2 = 225)$.

La distribución a posteriori para θ dado $(x_1, \ldots, x_n)$ es una distribución normal $N(m, v^2)$ donde

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{x} + \frac{1}{\tau^2}\mu}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{\frac{n}{100}\bar{x} + \frac{1}{225}100}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}} \\
v^2 &= \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}} = \frac{1}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9

El intervalo de confianza bayesiano al nivel 0.95 se calcula hallando los valores a y b tales que

$$P(a < \theta < b) = 0.95$$

$$P\left(\frac{a-m}{v} < \frac{\theta - m}{v} < \frac{b-m}{v}\right) = 0.95$$

de forma que

$$\begin{aligned} \frac{b-m}{v} &= z_{\alpha/2} \\ \frac{a-m}{v} &= -z_{\alpha/2} \end{aligned}$$

Ejercicio 9

y entonces

$$\begin{aligned} b &= m + v z_{0.025} = m + 1.96 v \\ a &= m - v z_{0.025} = m - 1.96 v \end{aligned}$$

El intervalo de confianza bayesiano al nivel 0.95 es

$$IC(\theta) = \left(\frac{\frac{n}{100}\bar{x} + \frac{1}{225}100}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}} - 1.96 \frac{1}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}}, \frac{\frac{n}{100}\bar{x} + \frac{1}{225}100}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}} + 1.96 \frac{1}{\frac{n}{100} + \frac{1}{225}} \right)$$

Ejercicio 10

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \theta \; exp\{-\theta x\} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Hallar un intervalo de confianza asintótico para θ al nivel de confianza $1 - \alpha$.

El estimador de máxima verosimilitud para θ es $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}}$. El estimador de máxima verosimilitud verifica la siguiente convergencia en ley

$$\frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{(I_n(\theta))^{-1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

Ejercicio 10

La cantidad de información de Fisher de la muestra es $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$ y entonces

$$\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\theta}\right) < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Ejercicio 10

Por tanto,

$$\begin{aligned}
-z_{\alpha/2} &< \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_{MV}-\theta}{\theta}\right) < z_{\alpha/2} \\
\theta\left(1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) &< \hat{\theta}_{MV} < \theta\left(1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \\
\frac{\hat{\theta}_{MV}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} &< \theta < \frac{\hat{\theta}_{MV}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \\
\frac{1/\bar{X}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} &< \theta < \frac{1/\bar{X}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 10

El intervalo de confianza al nivel de confianza $1-\alpha$ es

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(\frac{1/\bar{X}}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}}, \frac{1/\bar{X}}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}} \right)$$