

Por tanto  $h$  no toma valores en  $D(0,1)$  y por lo visto en el ejercicio 2  $h$  tiene que ser constante.

Por tanto  $f(z) = \alpha \cdot z$  con  $|\alpha| \geq 1$ .

2.- Demuestra de si  $f$  es una función entera tal que  $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$  tiene un punto interior entonces  $f$  es constante.

Sea  $a \in \text{Int}(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C}))$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \quad D(a, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z) - a| \geq \delta$$

Sea  $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$  que es una función entera porque  $a \notin f(\mathbb{C})$ .

$$\text{Además } |g(z)| = \left| \frac{1}{f(z) - a} \right| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Como  $g(z)$  es una función entera acotada, por el Teorema de Liouville  $g(z)$  es constante  $\Rightarrow g(z) = C = \frac{1}{f(z) - a}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{C} + a \quad \text{que es una constante.}$$