



Asignatura..... Fecha

Alumno/a..... Curso..... N°

Apellidos

Nombre

11.- Hallar los ceros de las siguientes funciones y determinar sus órdenes:

a) $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$

$$z^2 = w$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z^4 + 2z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow w^2 + 2w + 1 = 0 \Leftrightarrow (w+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow ((z+i)(z-i))^2 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^2(z-i)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^4 + 2z^2 + 1 = (z+i)^2(z-i)^2$$

Los ceros de la función son i y $-i$ y ambos tienen orden 2.

b) $f(z) = z^3 \cos^2 z$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \\ \cos^2 z = 0 \end{cases}$$

$$\cos^2 z = 0 \Leftrightarrow \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Hacemos el desarrollo en serie de Taylor de $g(z) = \cos z$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ para saber la multiplicidad de los ceros de $g(z)$

$$g(z) = \cos z$$

$$g\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$g'(z) = -\sin z$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \mp 1$$

$$g''(z) = -\cos z$$

$$g''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$g'''(z) = \sin z$$

$$g'''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1$$

$$g^{(4)}(z) = \cos z$$

$$g^{(4)}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z)}{n!} \left(z - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{n,k}}{n!} \left(z - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^n$$

donde $E_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n es impar.