I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.. Fecha ....

Alumno/a.. Curso..................... Nº..............

Apellidos Nombre

Calificación

2.- Demuestra que si la serie $\sum c_n$ converge y $|\arg c_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ entonces la serie converge absolutamente.

Sabemos que una serie de números complejos converge si y solo si convergen su parte real y su parte imaginaria.

Por tanto, $\sum Re(c_n)$ y $\sum Im(c_n)$ convergen.

Además $\arg(c_n) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Como

$$c_n = |c_n| \cdot \left(\cos(\arg(c_n)) + i \operatorname{sen}(\arg(c_n)) \right) = Re(c_n) + i\, Im(c_n)$$

y el $\cos x > 0$ si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Re(c_n) > 0$

Por tanto $\sum Re(c_n)$ converge absolutamente

Por otro lado

$$\frac{Im(c_n)}{Re(c_n)} = tg(\arg(c_n)) \Leftrightarrow Im(c_n) = tg(\arg(c_n))\, Re(c_n)$$

$$|Im(c_n)| = |tg(\arg(c_n))|\, |Re(c_n)| \underset{\uparrow}{=} tg(|\arg(c_n)|) \cdot Re(c_n) \underset{\uparrow}{\leq} tg(\alpha) \cdot Re(c_n)$$

$\arg(c_n) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y

Si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $|tg\, x| = \begin{cases} tg\, x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -tg\, x & \text{si } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases} \underset{\uparrow}{=} tg|x|$

tg impar

$tg(x)$ creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$