$$= e^{n\theta}\left(\left[-x e^{-nx}\right]_{x=\theta}^{x=\infty} + \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_{x=\theta}^{x=\infty}\right) =$$

$$= e^{n\theta}\left(\theta e^{-n\theta} - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{nx}} + \frac{e^{-n\theta}}{n} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n e^{nx}}\right) =$$

$$= \theta + \frac{1}{n}$$

Por tanto podemos tomar $S(X_1 \dots X_n) = X_{(1)} - \frac{1}{n}$ como estadístico suficiente y que además será insesgado para θ ya que

$$E[S] = E\left[X_{(1)} - \frac{1}{n}\right] = E[X_{(1)}] - \frac{1}{n} = \theta + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \theta$$

Ejercicio 5: Dada una m.a.s. de tamaño $n=1$ de $X \sim Poisson(\lambda)$ y dado el estimador $T(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X=0 \\ 0 & \text{si } X\geq 1 \end{cases}$, demostrar que T es insesgado para $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$. ¿Es T eficiente para estimar $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$.

En primer lugar recordamos que si $X \sim Poisson(\lambda)$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = P[X=x] \qquad \lambda>0 \quad x=0,1,2 \dots$$

Por tanto $E[T] = 1 \cdot P[X=0] + 0 \cdot P\{X\geq 1\} = P[X=0] = e^{-\lambda}$, luego T es insesgado para $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$ ya que

$$b_\lambda(T) = E[T] - Z(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0.$$

Para ver si T es eficiente para estimar $Z(\lambda)$ basta ver si su varianza alcanza la cota de Fréchet-Cramer-Rao para $Z(\lambda)$, ya que hemos visto que es insesgado.