Como la serie $\sum Re(c_n)$ converge y $tg(\alpha)$ es una constante positiva entonces la serie $\sum Im(c_n)$ converge absolutamente.

Por tanto

$|c_n| = |Re(c_n) + i\, Im(c_n)| \leq |Re(c_n)| + |Im(c_n)|$. Como $\sum Re(c_n)$ y $\sum Im(c_n)$ convergen absolutamente entonces $\sum |c_n|$ converge.

$\boxed{3.-}$ Supongamos que las series $\sum c_n$ y $\sum c_n^2$ convergen. Demuestra que si $Re(c_n) \geq 0$ entonces la serie $\sum |c_n|^2$ también converge.

Sabemos que una serie de números complejos converge si y solo si la serie de su parte real y la serie de su parte imaginaria convergen.

Por tanto $\sum Re(c_n)$, $\sum Im(c_n)$, $\sum Re(c_n^2)$ y $\sum Im(c_n^2)$ convergen.

Sabemos que si una serie numerica de reales $a_n \geq 0$ converge entonces la serie de sus cuadrados a_n^2 tambien converge. Esto es claro porque si $\sum a_n$ converge entonces $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y a partir de un n_0 suficientemente grande $a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n < 1$.

Como $\sum a_n$ converge, por el criterio de comparación $\sum a_n^2$ también converge.

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura .... Fecha ....

Alumno/a .... Curso .... Nº ....

Apellidos Nombre

Calificación

Deducimos entonces que $\sum Re(c_n)^2$ también converge

Por otra parte $Re(c_n^2) = Re(\, Re(c_n)^2 - Im(c_n)^2 + 2Re(c_n)Im(c_n)i)$

$= Re(c_n)^2 - Im(c_n)^2$

Sabemos también que si dos series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sum \alpha a_n + \beta b_n$ converge y lo hace a $\alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$

$\Rightarrow \sum Re(c_n)^2 + Im(c_n)^2 = 2\sum Re(c_n)^2 - \sum Re(c_n)^2 - Im(c_n)^2$

$\quad \| $

$\sum |c_n|^2$. En conclusión, $\sum |c_n|^2$ converge.