Semántica Operacional del Lenguaje WHILE

David de Frutos Escrig

versión original elaborada por

Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Sumario

- Semántica de paso largo (*big step* o *natural semantics*).
- Semántica de paso corto (*small step* o *structural semantics*).
- Equivalencia entre ambas.

Bibliografía

- Hanne Riis Nielson & Flemming Nielson,
  Semantics with Applications. An Appetizer, Springer, 2007.
  Capítulo 2.

Sistema de transiciones

- Configuraciones:

$\langle S, s\rangle$ la sentencia S se ejecutará desde el estado s

s' estado terminal que se alcanzará al terminar su ejecución.

- Transiciones: $\langle S, s\rangle \to s'$

$$[\mathrm{ass}_{\mathrm{bs}}] \quad \langle x := a, s\rangle \to s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\mathrm{skip}_{\mathrm{bs}}] \quad \langle \mathtt{skip}, s\rangle \to s$$

$$[\mathrm{comp}_{\mathrm{bs}}] \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s',\ \langle S_2, s'\rangle \to s''}{\langle S_1\ ;\ S_2, s\rangle \to s''}$$

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{bs}}] \quad \frac{\langle S_1, s\rangle \to s'}{\langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \to s'} \quad \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{bs}}] \quad \frac{\langle S_2, s\rangle \to s'}{\langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \to s'} \quad \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

$$[\mathrm{while}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{bs}}] \quad \frac{\langle S, s\rangle \to s',\ \langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s'\rangle \to s''}{\langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s\rangle \to s''} \quad \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\mathrm{while}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{bs}}] \quad \langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s\rangle \to s \quad \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

Sistema de transiciones

La ejecución de una sentencia S en un estado s

- termina si y solo si existe un estado s' tal que $\langle S, s\rangle \to s'$,
- cicla si y solo si no existe ningún estado s' tal que $\langle S, s\rangle \to s'$.

Ejercicio 2.4

Determinar cuáles de las sentencias siguientes terminan/ciclan siempre (esto es, sea cual sea el estado inicial), y cuáles lo hacen dependiendo de dicho estado:

- $\texttt{while}\ \neg(\texttt{x} = 1)\ \texttt{do}\ (\texttt{y} := \texttt{y} \times \texttt{x}\ ;\ \texttt{x} := \texttt{x} - 1)$
- $\texttt{while}\ 1 \leq \texttt{x}\ \texttt{do}\ (\texttt{y} := \texttt{y} \times \texttt{x}\ ;\ \texttt{x} := \texttt{x} - 1)$
- `while true do skip`

Propiedades

Equivalencia semántica: $\forall s \in \textbf{State}\ \langle S_1, s\rangle \to s' \iff \langle S_2, s\rangle \to s'$

Lema 2: $\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S$ es semánticamente equivalente a
$\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ (S\,;\texttt{while}\ b\ \texttt{do}\ S)\ \texttt{else}\ \texttt{skip}$.

Ejercicio 2.6

- Demostrar que $S_1\,;(S_2\,;S_3)$ y $(S_1\,;S_2)\,;S_3$ son semánticamente equivalente, para cualesquiera sentencias S_1, S_2 y S_3.
- Demostrar que $S_1\,;S_2$ no es semánticamente equivalente a $S_2\,;S_1$.

Ejercicio 2.7

Extender el lenguaje **While** con la sentencia $\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$.

- Dar las reglas que definen su semántica.
- Demostrar que $\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$ es semánticamente equivalente a $S\,;\texttt{if}\ b\ \texttt{then}\ \texttt{skip}\ \texttt{else}\ (\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b)$.

Propiedades

Teorema 3: La semántica de paso largo es determinista:

$$\langle S, s\rangle \to s' \wedge \langle S, s\rangle \to s'' \Longrightarrow s' = s''$$

Inducción sobre el árbol de derivación (inducción por reglas)

1. Demostrar que la propiedad se verifica para los axiomas.
2. Para cada regla aplicable (o sea, cuando se satisfagan sus condiciones de aplicación), asumiendo que la propiedad es cierta para todas las premisas (hipótesis de inducción),
   demostrar que la propiedad se verifica para la conclusión.

Ejercicio 2.10

Demostrar que $\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$ es semánticamente equivalente a $S\,;\ \texttt{while}\ \neg b\ \texttt{do}\ S$.

Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{\text{ns}} : \textbf{Stm} \longrightarrow (\textbf{State} \hookrightarrow \textbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{\text{bs}}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s\rangle \to s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.11

- Definir una semántica operacional de paso largo para las expresiones aritméticas, con una relación de transición: $\langle a, s\rangle \to_{\text{Aexp}} z$.
- Demostrar que el significado de cada expresión según la misma, coincide con el definido por $\mathcal{A}$.

Ejercicio 2.12

- Definir una semántica operacional de paso largo para las expresiones booleanas, con una relación de transición: $\langle b, s\rangle \to_{\text{Bexp}} t$.
- Demostrar que el significado de cada expresión según la misma, coincide con el definido por $\mathcal{B}$.

Sistema de transiciones

Pasos de ejecución atómicos

- Transiciones: $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma$ que capturan el primer paso de la ejecución de S desde el estado s:
  - configuración intermedia $\gamma = \langle S', s'\rangle$, ejecución de S no completada;
  - estado final $\gamma = s'$, ejecución de S terminada.
- $\langle S, s\rangle$ está bloqueada si no existe γ tal que $\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma$.

$$[\mathrm{ass}_{\mathrm{ss}}] \qquad \langle x := a, s\rangle \Rightarrow s[x \mapsto \mathcal{A}[\![a]\!]s]$$

$$[\mathrm{skip}_{\mathrm{ss}}] \qquad \langle \mathtt{skip}, s\rangle \Rightarrow s$$

$$[\mathrm{comp}^1_{\mathrm{ss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow \langle S_1', s'\rangle}{\langle S_1 \,;\, S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1' \,;\, S_2, s'\rangle}$$

$$[\mathrm{comp}^2_{\mathrm{ss}}] \qquad \frac{\langle S_1, s\rangle \Rightarrow s'}{\langle S_1 \,;\, S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s'\rangle}$$

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{tt}}_{\mathrm{ss}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_1, s\rangle \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{tt}$$

$$[\mathrm{if}^{\mathrm{ff}}_{\mathrm{ss}}] \qquad \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ S_1\ \mathtt{else}\ S_2, s\rangle \Rightarrow \langle S_2, s\rangle \text{ si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathbf{ff}$$

$$[\mathrm{while}_{\mathrm{ss}}] \qquad \langle \mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S, s\rangle \Rightarrow \langle \mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (S\,;\mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S)\ \mathtt{else}\ \mathtt{skip}, s\rangle$$

Secuencias completas de derivación

Secuencia finita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_k$,

con $\gamma_0 = \langle S, s\rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i < k$,
donde $k \geq 0$ y γ_k es o un estado (final) o una configuración bloqueada.

Secuencia infinita $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \gamma_2 \Rightarrow \cdots$,

con $\gamma_0 = \langle S, s\rangle$ y $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i+1}$ para $0 \leq i$.

La ejecución de una sentencia S en un estado s

- termina si existe una secuencia de derivación finita comenzando en $\langle S, s\rangle$,
- termina con éxito si termina, alcanzando un estado s',
- cicla si existe una secuencia de derivación infinita comenzando en $\langle S, s\rangle$.

Ejercicio 2.17

Dar la(s) regla(s) que define(n) la semántica de `repeat` S `until` b.

Propiedades

Lema 4: $\langle S_1\,;\, S_2,\, s\rangle \Rightarrow^k s'' \implies \exists s' \in \textbf{State}\ \exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$
$\langle S_1,\, s\rangle \Rightarrow^{k_1} s' \wedge \langle S_2,\, s'\rangle \Rightarrow^{k_2} s''$, con $k = k_1 + k_2$.

Inducción completa sobre la longitud de la secuencia de derivación

1. Demostrar que la propiedad se verifica para todas las secuencias de longitud 0.
2. Asumiendo que la propiedad es cierta para todas las secuencias de derivación con longitud máxima k (hipótesis de inducción), demostrar que la propiedad se verifica para secuencias de derivación con longitud $k+1$.

Ejercicio 2.20 + 2.21

- Demostrar que la ejecución de una sentencia es independiente de las sentencias posteriores, enlazando siempre con las de éstas:
  si $\langle S_1,\, s\rangle \Rightarrow^k s'$ entonces $\langle S_1\,;\, S_2,\, s\rangle \Rightarrow^k \langle S_2,\, s'\rangle$.
- Sin embargo, si $\langle S_1\,;\, S_2,\, s\rangle \Rightarrow^* \langle S_2,\, s'\rangle$, no necesariamente $\langle S_1,\, s\rangle \Rightarrow^* s'$.

Propiedades

Ejercicio 2.22

Demostrar que la semántica de paso corto es (paso a paso) determinista:

$$\langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma \wedge \langle S, s\rangle \Rightarrow \gamma' \Longrightarrow \gamma = \gamma'$$

Corolario: Existe una única secuencia de derivación comenzando en $\langle S, s\rangle$.

Equivalencia semántica entre S_1 y S_2: Para todo estado $s \in \mathbf{State}$,

- $\langle S_1, s\rangle \Rightarrow^* \gamma \Longleftrightarrow \langle S_2, s\rangle \Rightarrow^* \gamma$, para cada γ terminal o bloqueada;
- la secuencia de derivación comenzando en $\langle S_1, s\rangle$ es infinita sii lo es la que comienza en $\langle S_2, s\rangle$.

Ejercicio 2.23

Demostrar que las siguientes sentencias son semánticamente equivalentes:

- $S\,;\,\mathtt{skip}$ y S
- $\mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S$ y $\mathtt{if}\ b\ \mathtt{then}\ (S\,;\,\mathtt{while}\ b\ \mathtt{do}\ S)\ \mathtt{else}\ \mathtt{skip}$
- $S_1\,;(S_2\,;\,S_3)$ y $(S_1\,;\,S_2);\,S_3$

Ejercicio 2.24

Demostrar que $\mathtt{repeat}\ S\ \mathtt{until}\ b$ es semánticamente equivalente a $S\,;\,\mathtt{while}\ \neg b\ \mathtt{do}\ S$.

Función semántica

Significado de una sentencia:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ss}} : \mathbf{Stm} \longrightarrow (\mathbf{State} \hookrightarrow \mathbf{State})$$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S]\!]s = \begin{cases} s' & \text{si } \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s' \\ \text{INDEFINIDO} & \text{e.c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio 2.25

Determinar si la equivalencia semántica de S_1 y S_2 nos dice más o menos que el hecho de que $\mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S_1]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S_2]\!]$.

Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

Teorema 5

$\forall S \in \mathbf{Stm} \quad \mathcal{S}_{\mathrm{bs}}[\![S]\!] = \mathcal{S}_{\mathrm{ss}}[\![S]\!]$

1. Si la ejecución de S desde un estado termina bajo una de las semánticas, entonces también termina en la otra, alcanzandose los mismos estados finales.
2. Si la ejecución de S desde un estado cicla bajo una de las semánticas, entonces también cicla bajo la otra.
3. Observese que toda ejecución de la semántica de paso corto que termina, lo hace con éxito.

Lema 6: $\forall S \in \mathbf{Stm}\, \forall s, s' \in \mathbf{State} \quad \langle S, s\rangle \to s' \Longrightarrow \langle S, s\rangle \Rightarrow^* s'$

Lema 7: $\forall S \in \mathbf{Stm}\, \forall s, s' \in \mathbf{State}\, \forall k \in \mathbb{N} \quad \langle S, s\rangle \Rightarrow^k s' \Longrightarrow \langle S, s\rangle \to s'$

Equivalencia de las semánticas de paso largo y paso corto

Resumen demostración equivalencia

1. **Inducción sobre el árbol de derivación**
   Para cada árbol de derivación en la semántica de paso largo, existe la correspondiente secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto.
2. **Inducción sobre la longitud de la secuencia de derivación**
   Para cada secuencia de derivación finita en la semántica de paso corto existe el correspondiente árbol de derivación en la semántica de paso largo.

Ejercicio 2.29

Extender la demostración del Teorema 5 incluyendo el tratamiento de la sentencia $\texttt{repeat}\ S\ \texttt{until}\ b$.