Hoja 4

Variables Aleatorias Multidimensionales

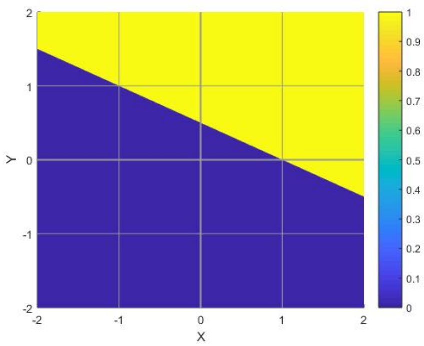
Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Estudiar si*

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x+2y \geq 1 \\ 0 & si\ x+2y < 1 \end{cases}$$

es una función de distribución en $\mathbb{R}^2$.

En primer lugar, representemos la función F:



Para ver si F es una función de distribución en $\mathbb{R}^2$, comprobemos si verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una función de distribución bidimensional:

i) $\underline{F(x,-\infty) = 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ F(-\infty,y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R} \text{ y } F(\infty,\infty) = 1}$

Es claro que $F(x,-\infty) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $F(-\infty,y) = 0\ \forall y \in \mathbb{R}$ y $F(\infty,\infty) = 1$ por definición.

ii) <u>F es monótona no-decreciente y continua por la derecha en ambas componentes</u>

Es sencillo apreciar que también se cumple esta propiedad por definición.

iii) $\underline{P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2),\ \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2}$

Tomemos por ejemplo los puntos $(x_1,y_1) = (0,0)$ y $(x_2,y_2) = (1,1)$. Sabemos que:

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$$

Evaluando dicha expresión, obtenemos:

$$P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$$

Por lo que no se tiene esta propiedad.

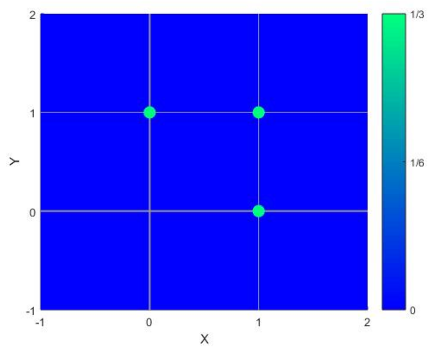
Dado que F no verifica la tercera propiedad, no es función de distribución en $\mathbb{R}^2$.

Ej. 2. *Dada la variable aleatoria bidimensional* (X, Y) *tal que*

$$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3},$$

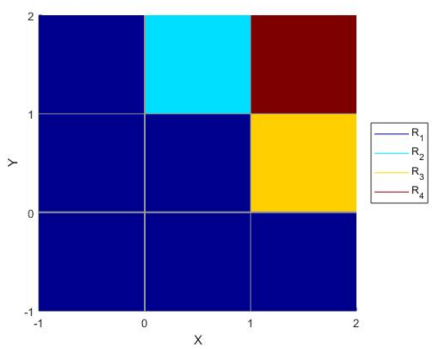
calcular la función de distribución conjunta de (X, Y) *y las funciones de distribución marginales de* X *e* Y*.*

En primer lugar, representemos la función de masa de la variable aleatoria (X, Y):



Para poder calcular la función de distribución conjunta de (X, Y), necesitaremos dividir el plano $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones. Sean éstas:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x < 1, \ y < 1) \text{ ó } (x < 0) \text{ ó } (y < 0)\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 1, \ 1 \leq y\}$$
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x, \ 0 \leq y < 1\}$$
$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x, \ 1 \leq y\}$$

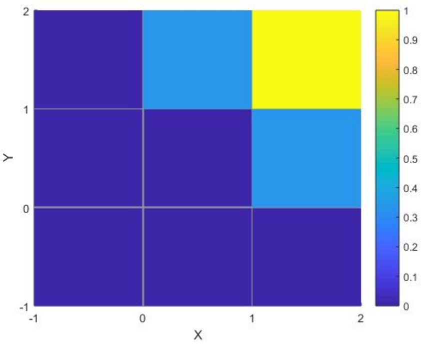


Entonces se tiene que:

- $\underline{(x,y) \in R_1}$
  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(\emptyset) = 0$
- $\underline{(x,y) \in R_2}$
  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(X=0, Y=1) = \frac{1}{3}$
- $\underline{(x,y) \in R_3}$
  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(X=1, Y=0) = \frac{1}{3}$
- $\underline{(x,y) \in R_4}$
  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) = 1$

La función de distribución de (X, Y) queda entonces:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } (x,y) \in R_2 \cup R_3 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_4 \end{cases}$$



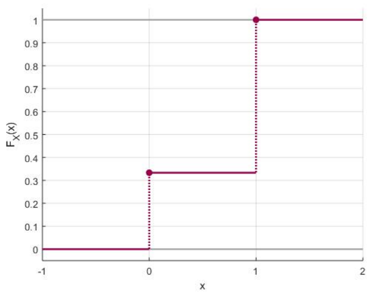
En cuanto a las funciones de distribución marginales, podemos calcular la de X como:

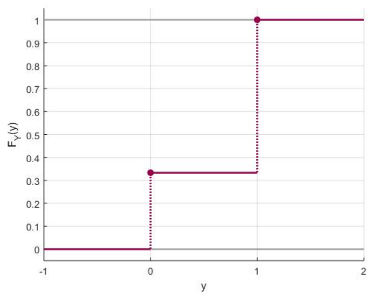
$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, \infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Y análogamente la de Y como:

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Las funciones de distribución de X e Y tienen la siguiente representación:



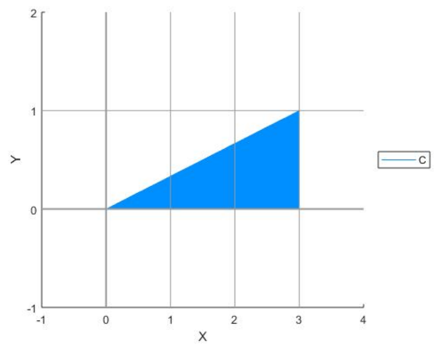


Ej. 3. *Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con distribución uniforme sobre el recinto*

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq \tfrac{x}{3},\; x \leq 3,\; 0 \leq y\}.$$

Calcular la función de densidad conjunta de (X,Y), la función de distribución conjunta de (X,Y) y las distribuciones marginales de X e Y.

En primer lugar, representemos el recinto $\mathcal{C}$:



Siendo (X,Y) una variable aleatoria bidimensional uniforme sobre el recinto $\mathcal{C}$, su función de densidad vendrá dada como:

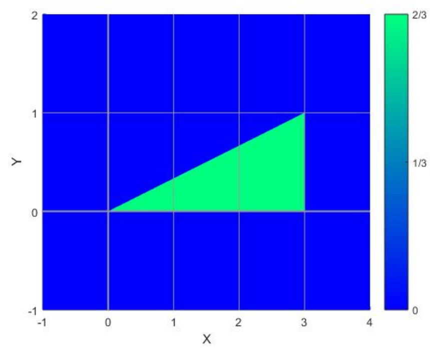
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\text{Área}(\mathcal{C})}\, I_{\mathcal{C}}(x,y)$$

Por tanto nos basta calcular el área del recinto $\mathcal{C}$ para obtener la función de densidad de (X,Y):

$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \int_0^3 \int_0^{\frac{u}{3}} 1 \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^3 v\Big]_{v=0}^{v=u/3} \mathrm{d}u = \int_0^3 \frac{u}{3}\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{6}\Bigg]_{u=0}^{u=3} = \frac{3}{2}$$

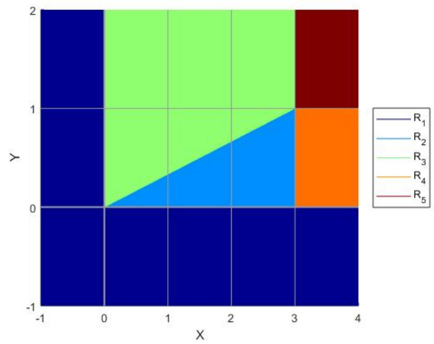
Dando lugar a la función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{3}\, I_{\mathcal{C}}(x,y)$$



Para poder calcular la función de distribución conjunta de (X,Y), necesitaremos dividir el plano $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones. Sean éstas:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x<0) \text{ ó } (y<0)\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 3,\ 0 \leq y < \tfrac{x}{3}\}$$
$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 3,\ \tfrac{x}{3} \leq y\}$$
$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x,\ 0 \leq y < 1\}$$
$$R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x,\ 1 \leq y\}$$



Entonces se tiene que:

- $\underline{(x,y) \in R_1}$

  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{(x,y) \in R_2}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_{3v}^x \frac{2}{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^y \frac{2u}{3}\Big]_{u=3v}^{u=x} \mathrm{d}v = \int_0^y \frac{2(x-3v)}{3}\,\mathrm{d}v$$
$$= -\frac{(x-3v)^2}{9}\Big]_{v=0}^{v=y} = \left(-\frac{(x-3y)^2}{9}\right) - \left(-\frac{x^2}{9}\right) = \frac{y\,(2x-3y)}{3}$$

- $\underline{(x,y) \in R_3}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_0^{\frac{u}{3}} \frac{2}{3}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^x \frac{2v}{3}\Big]_{v=0}^{v=\frac{u}{3}} \mathrm{d}u = \int_0^x \frac{2u}{9}\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{9}\Big]_{u=0}^{u=x} = \frac{x^2}{9}$$

- $\underline{(x,y) \in R_4}$

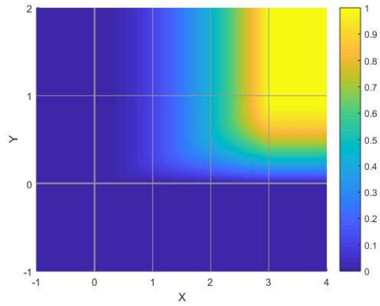
$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_{3v}^3 \frac{2}{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^y \frac{2u}{3}\Big]_{u=3v}^{u=3} \mathrm{d}v = \int_0^y 2(1-v)\,\mathrm{d}v$$
$$= -(1-v)^2\big]_{v=0}^{v=y} = \left(-(1-y)^2\right) - (-1) = y\,(2-y)$$

- $\underline{(x,y) \in R_5}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \iint_{\mathcal{C}} \frac{2}{3}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1$$

La función de distribución de (X,Y) queda entonces:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ \frac{y(2x-3y)}{3} & \text{si } (x,y) \in R_2 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } (x,y) \in R_3 \\ y\,(2-y) & \text{si } (x,y) \in R_4 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_5 \end{cases}$$



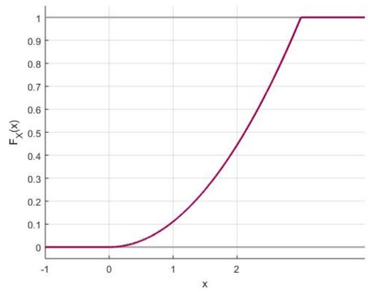
En cuanto a las funciones de distribución marginales, podemos calcular la de X como:

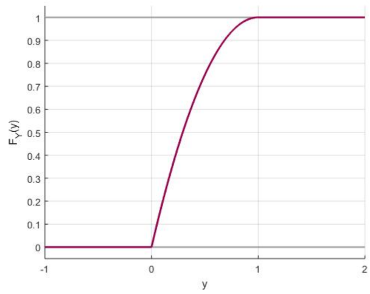
$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x,\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

Y análogamente la de Y como:

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y\,(2-y) & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Las funciones de distribución de X e Y tienen la siguiente representación:





Ej. 4. *Dada la variable aleatoria bidimensional (X,Y) con función de densidad conjunta:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2} & \textit{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

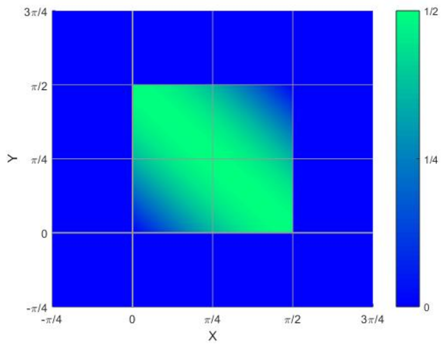
Calcular:

(a) *Las esperanzas de X e Y.*

(b) *La matriz de varianza-covarianzas de (X,Y).*

En primer lugar, representemos la función de densidad de la variable aleatoria (X,Y):

(a) En este apartado se nos pide calcular:



- $\underline{E[X]}$

  Para calcular la esperanza de X, necesitamos su función de densidad marginal. Ésta podemos obtenerla para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ como:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{2}\,\mathrm{d}y = -\frac{\cos(x+y)}{2}\Bigg]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(-\frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{2}\right) - \left(-\frac{\cos(x)}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2}$$

  De forma que:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\,\frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{2}\Bigg]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

- $\underline{E[Y]}$

  De forma análoga a la anterior, dado que la función de densidad conjunta de (X,Y) es simétrica, concluimos que $E[Y] = E[X] = \frac{\pi}{4}$.

(b) Para calcular la matriz de varianza-covarianzas de (X,Y) debemos obtener:

- $\underline{Var(X)}$

  Para calcular la varianza de X, conocido $E[X] = \frac{\pi}{4}$, resta computar:

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2\, f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\frac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\,\frac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{2}\Bigg]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\cos(x)-\operatorname{sen}(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \left(x\,(\mathrm{sen}(x) + \cos(x))\right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - [\mathrm{sen}(x) - \cos(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2$$

De forma que:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2 - 3$$

- <u>$Var(Y)$</u>

  De forma análoga a la anterior, dado que la función de densidad conjunta de (X, Y) es simétrica, concluimos que $Var(Y) = Var(X) = (1 + \frac{\pi}{4})^2 - 3$.

- <u>$Cov(X, Y)$</u>

  Para calcular la covarianza de X e Y, conocidos $E[X] = E[Y] = \frac{\pi}{4}$, resta computar:

$$E[X\,Y] = \iint_{\mathbb{R}^2} x\,y\,f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,y\,\mathrm{sen}(x+y)}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[-\frac{x\,y\,\cos(x+y)}{2}\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,\cos(x+y)}{2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi x\,\mathrm{sen}(x)}{4} + \left[\frac{x\,\mathrm{sen}(x+y)}{2}\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\frac{(\pi-2)\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)}{4}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\,\frac{2\,\mathrm{sen}(x) - (\pi-2)\cos(x)}{4}\Bigg]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-2)\cos(x) - 2\,\mathrm{sen}(x)}{4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{(\pi-2)\,\mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

  De forma que:

$$Cov(X,Y) = E[X\,Y] - E[X]\,E[Y] = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = -\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2$$

Así:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (1+\frac{\pi}{4})^2 - 3 & -(1-\frac{\pi}{4})^2 \\ -(1-\frac{\pi}{4})^2 & (1+\frac{\pi}{4})^2 - 3 \end{pmatrix}$$

Ej. 5. *Sea* (X,Y) *una variable aleatoria bidimensional con función de densidad*

$$f(x,y) = 24y\,(1-x-y)\ I_{\mathcal{C}}(x,y)$$

sobre el recinto

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\}.$$

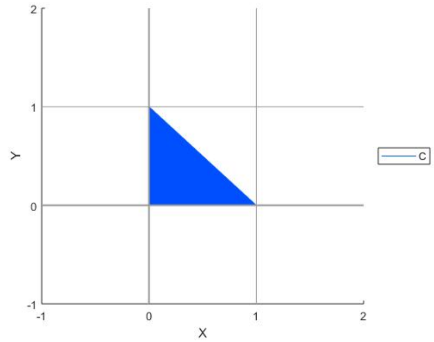
Calcular:

(a) *La función de distribución conjunta.*

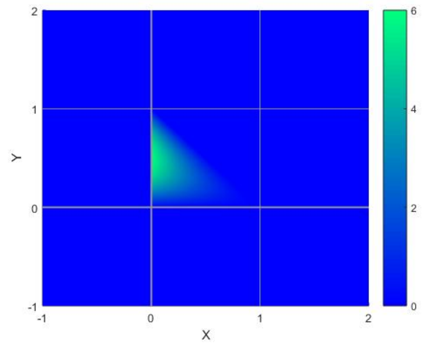
(b) *Las funciones de densidad marginales.*

(c) *Las funciones de densidad condicionadas.*

En primer lugar, representemos el recinto $\mathcal{C}$:

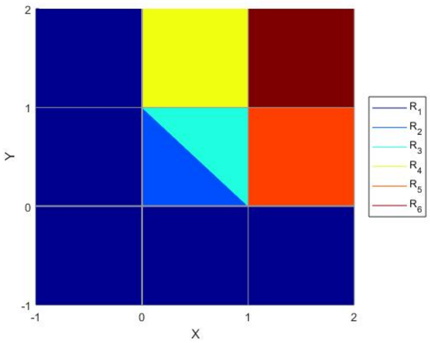


La representación de la función de densidad de la variable aleatoria (X,Y) es por tanto:



(a) Para poder calcular la función de distribución conjunta de (X,Y), necesitaremos dividir el plano $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones. Sean éstas:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x<0) \text{ ó } (y<0)\}$$
$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1-x\}$$
$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x < 1,\ 1-x \leq y < 1\}$$
$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x < 1,\ 1 \leq y\}$$
$$R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x,\ 0 \leq y < 1\}$$
$$R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x,\ 1 \leq y\}$$



Entonces se tiene que:

- $\underline{(x,y) \in R_1}$

  $F_{(X,Y)}(x,y) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{(x,y) \in R_2}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_0^y 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^x 12\,(1-u)\,v^2 - 8v^3\Big]_{v=0}^{v=y}\;\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x \left(12\,(1-u)\,y^2 - 8y^3\right)\;\mathrm{d}u = \;4y^2\,(3-2y)\,u - 6y^2\,u^2\Big]_{u=0}^{u=x}$$

$$= 2x\,y^2\,(6-3x-4y)$$

- $\underline{(x,y) \in R_3}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^{1-y} \int_0^y 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \int_{1-y}^x \int_0^{1-u} 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{1-y} 12\,(1-u)\,v^2 - 8v^3\Big]_{v=0}^{v=y}\;\mathrm{d}u + \int_{1-y}^x 12\,(1-u)\,v^2 - 8v^3\Big]_{v=0}^{v=1-u}\;\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{1-y} \left(12\,(1-u)\,y^2 - 8y^3\right)\;\mathrm{d}u + \int_{1-y}^x 4(1-u)^3\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[4y^2\,(3-2y)\,u - 6y^2\,u^2\right]_{u=0}^{u=1-y} + \left[-(1-u)^4\right]_{u=1-y}^{u=x}$$

$$= y^2\left(6-8y+3y^2\right) - (1-x)^4$$

- $\underline{(x,y) \in R_4}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_0^{1-u} 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x 12\,(1-u)\,v^2 - 8v^3\Big]_{v=0}^{v=1-u}\;\mathrm{d}u = \int_0^x 4(1-u)^3\,\mathrm{d}u$$

$$= -(1-u)^4\Big]_{u=0}^{u=x} = 1-(1-x)^4$$

- $\underline{(x,y) \in R_5}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_0^{1-v} 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^y 24v\,(1-v)\,u - 12v\,u^2\Big]_{u=0}^{u=1-v}\;\mathrm{d}v$$
$$= \int_0^y 12v\,(1-v)^2\;\mathrm{d}v = 6v^2 - 8v^3 + 3v^4\Big]_{v=0}^{v=y} = y^2\left(6 - 8y + 3y^2\right)$$

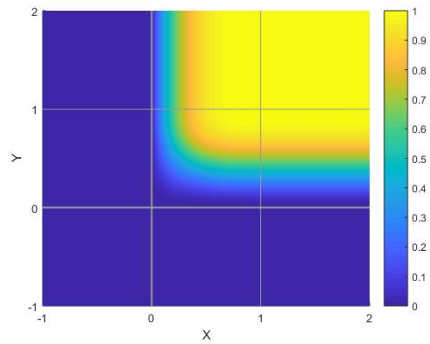
- $\underline{(x,y) \in R_6}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \iint_{\mathcal{C}} 24v\,(1-u-v)\;\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1$$

La función de distribución de (X,Y) queda entonces:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ 2x\,y^2\,(6-3x-4y) & \text{si } (x,y) \in R_2 \\ y^2\,(6-8y+3y^2) - (1-x)^4 & \text{si } (x,y) \in R_3 \\ 1-(1-x)^4 & \text{si } (x,y) \in R_4 \\ y^2\,(6-8y+3y^2) & \text{si } (x,y) \in R_5 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_6 \end{cases}$$

Con representación:



(b) En cuanto a las funciones de distribución marginales, podemos calcular la de X como:

$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x,\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^4 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Para derivando obtener su función de densidad marginal:

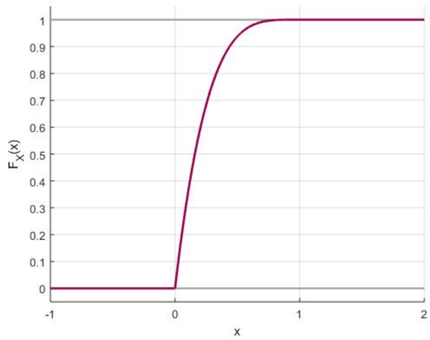
$$f_X(x) = 4(1-x)^3\,I_{(0,1)}(x)$$

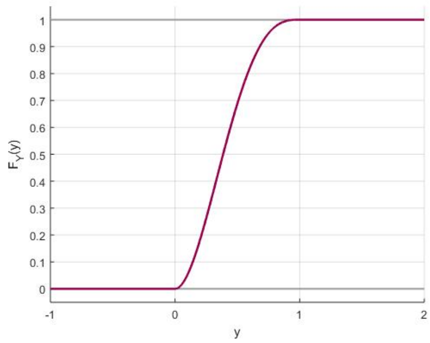
Análogamente calculamos la de Y como:

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y^2\,(6 - 8y + 3y^2) & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Para derivando obtener su función de densidad marginal:

$$f_Y(y) = 12y\,(1-y)^2\ I_{(0,1)}(y)$$





(c) Finalmente, por definición, podemos calcular la función de densidad condicionada de X dado $Y = y$ como:

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{24y\,(1-x-y)\ I_{\mathcal{C}}(x,y)}{12y\,(1-y)^2\ I_{(0,1)}(y)} = \frac{2(1-x-y)}{(1-y)^2}\,I_{(0,1-y)}(x)$$

Y análogamente la de Y dado $X = x$ como:

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24y\,(1-x-y)\ I_{\mathcal{C}}(x,y)}{4(1-x)^3\,I_{(0,1)}(x)} = \frac{6y\,(1-x-y)}{(1-x)^3}\,I_{(0,1-x)}(y)$$

Ej. 6. *Se sitúan de forma aleatoria e independiente N puntos en el intervalo $(0,T)$. Si X representa la distancia de 0 al primer punto e Y denota la distancia de 0 al segundo punto, entonces calcular la distribución conjunta y las correspondientes marginales de (X,Y).*

Definamos las variables aleatorias auxiliares $Z_n :=$ "Distancia de 0 al punto n-esimo" con $n \in \{1,\ldots,N\}$. En tal caso, es claro que:

$$X = \min_{1\leq n\leq N} Z_n$$

De forma que dado $x \in (0,T)$, podemos concluir que:

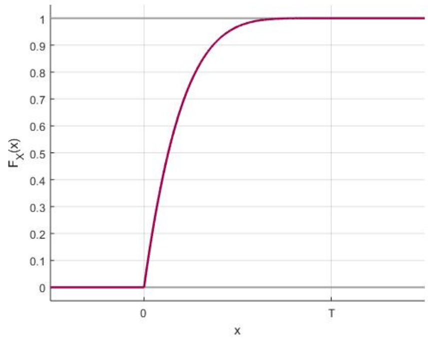
$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - P\left(\min_{1\leq n\leq N} Z_n > x\right)$$

Como las variables Z_n con $n \in \{1, \dots, N\}$ son independientes y uniformes (aleatorias) en el intervalo $(0, T)$:

$$F_X(x) = 1 - \prod_{n=1}^{N} P(Z_n > x) = 1 - \prod_{n=1}^{N} \frac{T-x}{T} = 1 - \left(\frac{T-x}{T}\right)^N$$

La función de distribución marginal de X queda entonces:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (\frac{T-x}{T})^N & \text{si } 0 \leq x < T \\ 1 & \text{si } T \leq x \end{cases}$$



Derivando obtenemos su función de densidad marginal:

$$f_X(x) = -\frac{N(T-x)^{N-1}}{T^N}\, I_{(0,T)}(x)$$

Por otra parte, sabiendo que $X = x$, es claro que Y debe localizarse en el intervalo $[x, T]$. Por lo que dado $y \in (x, T)$, podemos concluir que:

$$F_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x) = P(Y \leq y\,|\,X = x) = 1 - P(Y > y\,|\,X = x)$$

$$= 1 - \prod_{n=1}^{N-1} \frac{T-y}{T-x} = 1 - \left(\frac{T-y}{T-x}\right)^{N-1}$$

La función de distribución condicionada de Y dado $X = x$ queda entonces:

$$F_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < x \\ 1 - (\frac{T-y}{T-x})^{N-1} & \text{si } x \leq y < T \\ 1 & \text{si } T \leq y \end{cases}$$

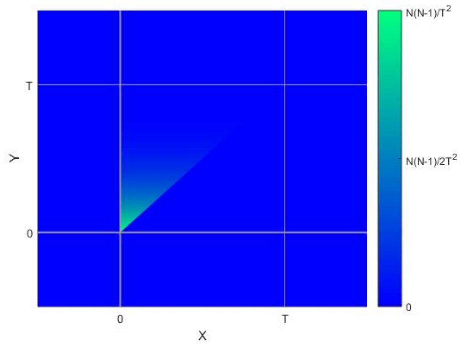
Y derivando obtenemos la función de densidad condicionada de Y dado $X = x$:

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x) = -\frac{(N-1)(T-y)^{N-2}}{(T-x)^{N-1}}\, I_{(x,T)}(y)$$

Con todos estos datos podemos calcular la función de densidad conjunta de (X, Y) como:

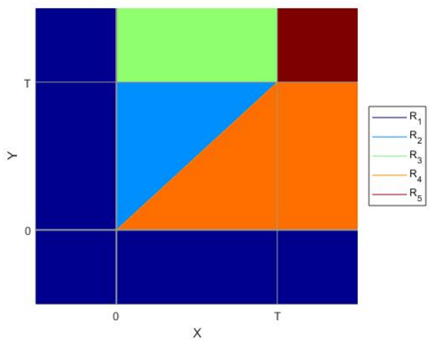
$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x)\, f_X(x) = \frac{N(N-1)(T-y)^{N-2}}{T^N}\, I_{(0,T)}(x)\, I_{(x,T)}(y)$$

Cuya representación es:



Para poder calcular la función de distribución conjunta de (X, Y), necesitaremos dividir el plano $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones. Sean éstas:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x < 0) \text{ ó } (y < 0)\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x < T, \, x \leq y < T\}$$
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x < T, \, T \leq y\}$$
$$R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (0 \leq x < T, \, 0 \leq y < x) \text{ ó } (T \leq x, \, 0 \leq y < T)\}$$
$$R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ T \leq x, \, T \leq y\}$$



Entonces se tiene que:

- $\underline{(x, y) \in R_1}$
  $F_{(X,Y)}(x, y) = P(\emptyset) = 0$
- $\underline{(x, y) \in R_2}$

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_0^x \int_u^y \frac{N(N-1)(T-v)^{N-2}}{T^N} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^x -\frac{N(T-v)^{N-1}}{T^N}\Bigg]_{v=u}^{v=y} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x \frac{N(T-u)^{N-1} - N(T-y)^{N-1}}{T^N} \, \mathrm{d}u$$

$$= -\frac{(T-u)^N + N(T-y)^{N-1}u}{T^N}\Bigg]_{u=0}^{u=x}$$

$$= 1 - \frac{(T-x)^N + Nx\,(T-y)^{N-1}}{T^N}$$

- $\underline{(x,y) \in R_3}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^x \int_u^T \frac{N(N-1)(T-v)^{N-2}}{T^N}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^x -\frac{N(T-v)^{N-1}}{T^N}\Bigg]_{v=u}^{v=T} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^x \frac{N(T-u)^{N-1}}{T^N}\,\mathrm{d}u = -\left(\frac{T-u}{T}\right)^N\Bigg]_{u=0}^{u=x} = 1 - \left(\frac{T-x}{T}\right)^N$$

- $\underline{(x,y) \in R_4}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^y \int_0^v \frac{N(N-1)(T-v)^{N-2}}{T^N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^y \frac{N(N-1)(T-v)^{N-2}u}{T^N}\Bigg]_{u=0}^{u=v} \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^y \frac{N(N-1)v\,(T-v)^{N-2}}{T^N}\,\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{Nv\,(T-v)^{N-1}}{T^N}\Bigg]_{v=0}^{v=y} + \int_0^y \frac{N(T-v)^{N-1}}{T^N}\,\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{Ny\,(T-y)^{N-1}}{T^N} - \left[\left(\frac{T-v}{T}\right)^N\right]_{v=0}^{v=y}$$

$$= 1 - \frac{(T-y)^N + Ny\,(T-y)^{N-1}}{T^N}$$

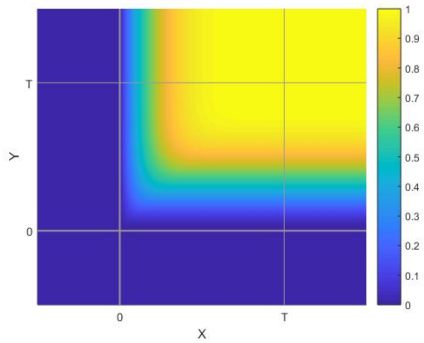
- $\underline{(x,y) \in R_5}$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_0^T \int_u^T \frac{N(N-1)(T-v)^{N-2}}{T^N}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1$$

La función de distribución de (X,Y) queda entonces:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in R_1 \\ 1 - \frac{(T-x)^N + Nx(T-y)^{N-1}}{T^N} & \text{si } (x,y) \in R_2 \\ 1 - (\frac{T-x}{T})^N & \text{si } (x,y) \in R_3 \\ 1 - \frac{(T-y)^N + Ny(T-y)^{N-1}}{T^N} & \text{si } (x,y) \in R_4 \\ 1 & \text{si } (x,y) \in R_5 \end{cases}$$

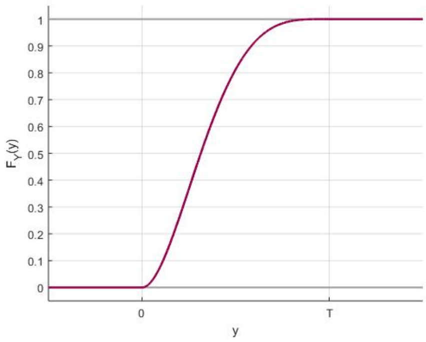
Con representación:



Finalmente, calculamos la función de distribución marginal de Y como:

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \frac{(T-y)^N + Ny(T-y)^{N-1}}{T^N} & \text{si } 0 \leq y < T \\ 1 & \text{si } T \leq y \end{cases}$$

Que tiene la siguiente representación:



Ej. 7. *La probabilidad de que desde un huevo nazca un insecto es p. En una flor, el número de huevos puestos por estos insectos sigue una distribución Poisson de media λ.*

(a) *Calcular la distribución del número de insectos que nace en una flor.*

(b) *Se ha observado una flor y se ha constatado que el número de insectos que han nacido en ella ha sido n. Calcular la distribución del número de huevos que había en la flor.*

(a) Definamos las variables aleatorias $X :=$ "Número de huevos puestos en una flor" e $Y :=$ "Número de insectos nacidos en una flor". A partir del enunciado sabemos que:

- $\underline{X \sim Poisson(\lambda)}$

  Esta información se extrae directamente del enunciado. Por tanto:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

- $\underline{Y \,|\, X = x \sim Binomial(x, p)}$

  Dado que la probabilidad de que desde un huevo nazca un insecto es p, para cada uno de los x huevos puestos en una flor tenemos el "experimento" aleatorio de que nazca un insecto o no con dicha probabilidad. Esto se corresponde con una variable aleatoria $Binomial(x, p)$. Por tanto:

$$P(Y = y \,|\, X = x) = \binom{x}{y} p^y \, (1-p)^{x-y}, \qquad y \in \{0, 1, \ldots, x\}$$

Buscamos la distribución de Y, por lo que recurrimos al Teorema de la Probabilidad Total. Así, dado $y \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, concluimos que:

$$\begin{aligned}
P(Y = y) &= \sum_{x=y}^{\infty} P(X = x) \, P(Y = y \,|\, X = x) = \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!} \binom{x}{y} p^y \, (1-p)^{x-y} \\
&= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda} \, p^y \, (1-p)^{x-y}}{y! \, (x-y)!} = \frac{p^y \, e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{\lambda^x \, (1-p)^{x-y}}{(x-y)!} \\
&= \frac{p^y \, e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+y} \, (1-p)^x}{x!} = \frac{(\lambda \, p)^y \, e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda \, (1-p))^x}{x!} \\
&= \frac{(\lambda \, p)^y \, e^{-\lambda}}{y!} \, e^{\lambda \, (1-p)} = \frac{(\lambda \, p)^y \, e^{-\lambda \, p}}{y!}
\end{aligned}$$

De forma que $Y \sim Poisson(\lambda \, p)$.

(b) En este caso sabemos que el número de insectos que han nacido en una flor ha sido n, es decir, que $Y = n$. Buscamos entonces la distribución de $X \,|\, Y = n$. Para ello aplicamos el Teorema de Bayes. Así, dado $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
P(X = x \,|\, Y = n) &= \frac{P(X = x) \, P(Y = n \,|\, X = x)}{P(Y = n)} = \frac{\frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!} \binom{x}{n} p^n \, (1-p)^{x-n}}{\frac{(\lambda \, p)^n \, e^{-\lambda \, p}}{n!}} \\
&= \frac{(\lambda \, (1-p))^{x-n} \, e^{-\lambda \, (1-p)}}{(x-n)!}
\end{aligned}$$

De forma que $X - n \,|\, Y = n \sim Poisson(\lambda \, (1-p))$.

Ej. 8. *Sea ξ una variable aleatoria discreta con función de masa*

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2^x}, \qquad x = 1, 2, \ldots$$

Supongamos que $\eta \,|\, \xi = x$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_{\eta \,|\, \xi}(y \,|\, \xi = x) = x \, (1-y)^{x-1}, \qquad 0 < y < 1.$$

Determinar la distribución de η.

Buscamos la función de distribución de η. Dado que disponemos de información relativa a las distribuciones de ξ y $\eta \,|\, \xi = x$, es razonable pensar en recurrir al Teorema de la Probabilidad Total. Así, dado $y \in [0,1]$:

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = \sum_{x=1}^{\infty} P(\eta \leq y \,|\, \xi = x)\, P(\xi = x)$$

Necesitamos conocer entonces:

- $\underline{P(\eta \leq y \,|\, \xi = x) \text{ con } x \in \{1, 2, \ldots\},\ y \in [0,1]}$
  El enunciado nos proporciona la función de densidad de $\eta \,|\, \xi = x$. Así pues, dados $x \in \{1, 2, \ldots\}$ e $y \in [0,1]$:

$$P(\eta \leq y \,|\, \xi = x) = F_{\eta\,|\,\xi}(y \,|\, \xi = x) = \int_{-\infty}^{y} f_{\eta\,|\,\xi}(v \,|\, \xi = x)\, \mathrm{d}v = \int_{0}^{y} x\,(1-v)^{x-1}\, \mathrm{d}v$$

$$= -(1-v)^x \Big]_{v=0}^{v=y} = 1 - (1-y)^x$$

- $\underline{P(\xi = x) \text{ con } x \in \{1, 2, \ldots\}}$
  Esta información se deduce directamente del enunciado puesto que conocemos la función de masa de ξ. Así pues, dado $x \in \{1, 2, \ldots\}$:

$$P(\xi = x) = p_\xi(x) = \frac{1}{2^x}$$

De forma que dado $y \in [0,1]$:

$$F_\eta(y) = \sum_{x=1}^{\infty} (1 - (1-y)^x)\ \frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1-y}{2}\right)^x = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1-y}{2}}$$

$$= \frac{2y}{y+1}$$

Obteniéndose así la función de distribución de η:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y}{y+1} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

Ej. 9. *Sea X una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Supongamos que $Y \,|\, X = x$ es una variable aleatoria con función de densidad:*

$$f_{Y\,|\,X}(y \,|\, X = x) = \begin{cases} x\, y^{-(x+1)} & \textit{si } y > 1 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Calcular:

(a) *La función de densidad conjunta.*

(b) *La función de densidad marginal de* Y*.*

(c) *La función de densidad de* $X \,|\, Y = y$*.*

(a) Dado que todas las variables aleatorias involucradas son absolutamente continuas, podemos calcular la función de densidad conjunta de (X, Y) como:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{Y\,|\,X}(y \,|\, X = x)\, f_X(x)$$

Para ello necesitamos conocer:

- $\underline{f_{Y\,|\,X}(y \,|\, X = x)}$

  Esta información se deduce directamente del enunciado:

  $$f_{Y\,|\,X}(y \,|\, X = x) = x\, y^{-(x+1)}\, I_{(1,\infty)}(y)$$

- $\underline{f_X(x)}$

  El enunciado nos indica que X es una variable aleatoria Exponencial de parámetro $\lambda = 1$, luego:

  $$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\, I(0, \infty)(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

De forma que:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = x\, y^{-(x+1)}\, e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(1,\infty)}(y)$$

Démonos cuenta de que:

$$y^{-(x+1)} = \frac{y^{-x}}{y} = \frac{\left(e^{\ln(y)}\right)^{-x}}{y} = \frac{e^{-x\ln(y)}}{y}$$

Lo que da pie a reformular la función de densidad conjunta de (X, Y) como:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{x\, e^{-x(1+\ln(y))}}{y}\, I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(1,\infty)}(y)$$

(b) Conocida la función de densidad conjunta de de (X, Y), podemos calcular la función de densidad marginal de Y de forma sencilla como:

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{x\, e^{-x(1+\ln(y))}}{y}\, I_{(1,\infty)}(y)\, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x\, e^{-x(1+\ln(y))}}{y\,(1 + \ln(y))}\, I_{(1,\infty)}(y)\Bigg]_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-x(1+\ln(y))}}{y\,(1 + \ln(y))}\, I_{(1,\infty)}(y)\, \mathrm{d}x$$

$$= 0 - \left[\frac{e^{-x(1+\ln(y))}}{y\,(1 + \ln(y))^2}\, I_{(1,\infty)}(y)\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{y\,(1 + \ln(y))^2}\, I_{(1,\infty)}(y)$$

(c) Finalmente, por definición, podemos calcular la función de densidad condicionada de X dado $Y = y$ como:

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{x\,e^{-x(1+\ln(y))}}{y}\,I_{(0,\infty)}(x)\,I_{(1,\infty)}(y)}{\frac{1}{y(1+\ln(y))^2}\,I_{(1,\infty)}(y)}$$

$$= x\,(1+\ln(y))^2\,e^{-x(1+\ln(y))}\,I_{(0,\infty)}(x)$$

Ej. 10. *Se considera la variable aleatoria bidimensional (ξ, η), donde ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ y $\eta\,|\,\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $x^2 - 2x$ y varianza σ^2. Calcular la esperanza de η y la matriz de varianza-covarianzas.*

En primer lugar se nos pide calcular la esperanza de η. Es decir:

$$E\left[\eta\right] = \int_{\mathbb{R}} y\,f_\eta(y)\,\mathrm{d}y$$

Teniendo información sobre la función de masa de ξ y la función de densidad de $\eta\,|\,\xi = x$, podemos expresar la función de densidad de η como:

$$f_\eta(y) = \sum_{x=0}^{\infty} f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,p_\xi(x)$$

De forma que:

$$E\left[\eta\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(y \sum_{x=0}^{\infty} f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,p_\xi(x) \right) \mathrm{d}y = \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) \int_{\mathbb{R}} y\,f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x)\,E\left[\eta\,|\,\xi = x\right]$$

Ahora bien, $\eta\,|\,\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $E\left[\eta\,|\,\xi = x\right] = x^2 - 2x$, luego:

$$E\left[\eta\right] = \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x)\left(x^2 - 2x\right) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\,p_\xi(x) - 2\sum_{x=0}^{\infty} x\,p_\xi(x) = E\left[\xi^2\right] - 2E\left[\xi\right]$$

$$= E\left[\xi^2\right] - E\left[\xi\right]^2 + E\left[\xi\right]^2 - 2E\left[\xi\right] = Var\left(\xi\right) + E\left[\xi\right]^2 - 2E\left[\xi\right]$$

Sabemos que ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ. Por tanto, $E\left[\xi\right] = Var\left(\xi\right) = \lambda$ y podemos concluir que:

$$E\left[\eta\right] = \lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda\left(\lambda - 1\right)$$

En segundo lugar se pide la matriz de varianza-covarianzas de (ξ, η). Para ello debemos obtener:

- <u>$Var(\xi)$</u>

  Este dato ya lo hemos deducido a la hora de calcular $E\left[\eta\right]$. Dado que ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ, se tiene:

$$Var\left(\xi\right) = \lambda$$

- <u>$Var(\eta)$</u>

  Para calcular la varianza de η, conocido $E[\eta] = \lambda\left(\lambda - 1\right)$, resta computar:

$$\begin{aligned}
E[\eta^2] &= \int_{\mathbb{R}} y^2\, f_\eta(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \left(y^2 \sum_{x=0}^{\infty} f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\, p_\xi(x) \right) \mathrm{d}y \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) \int_{\mathbb{R}} y^2\, f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,\mathrm{d}y = \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x)\, E\left[\eta^2\,|\,\xi = x\right] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) \left(E\left[\eta^2\,|\,\xi = x\right] - E\left[\eta\,|\,\xi = x\right]^2 + E\left[\eta\,|\,\xi = x\right]^2 \right) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) \left(Var\left(\eta\,|\,\xi = x\right) + E\left[\eta\,|\,\xi = x\right]^2 \right)
\end{aligned}$$

  Como $\eta\,|\,\xi = x$ sigue una distribución Normal de media $E\left[\eta\,|\,\xi = x\right] = x^2 - 2x$ y varianza $Var\left(\eta\,|\,\xi = x\right) = \sigma^2$:

$$\begin{aligned}
E[\eta^2] &= \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) \left(\sigma^2 + \left(x^2 - 2x\right)^2 \right) \\
&= \sigma^2 \sum_{x=0}^{\infty} p_\xi(x) + \sum_{x=0}^{\infty} x^4\, p_\xi(x) - 4 \sum_{x=0}^{\infty} x^3\, p_\xi(x) + 4 \sum_{x=0}^{\infty} x^2\, p_\xi(x) \\
&= \sigma^2 + E\left[\xi^4\right] - 4E\left[\xi^3\right] + 4E\left[\xi^2\right] \\
&= \sigma^2 + E\left[\xi^4\right] - 4E\left[\xi^3\right] + 4E\left[\xi^2\right] - 4E\left[\xi\right]^2 + 4E\left[\xi\right]^2 \\
&= \sigma^2 + E\left[\xi^4\right] - 4E\left[\xi^3\right] + 4Var\left(\xi\right) + 4E\left[\xi\right]^2
\end{aligned}$$

  Al igual que antes, dado que ξ sigue una distribución Poisson de parámetro λ, $E\left[\xi\right] = Var\left(\xi\right) = \lambda$. Ahora bien, para los momentos de mayor orden hemos de acudir a su función característica:

$$\varphi_\xi(t) = e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}$$

  De forma que derivando obtenemos:

$$\varphi_\xi'(t) = \lambda i\, e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}\, e^{it}$$

$$\varphi_\xi''(t) = -\lambda\; e^{\lambda\left(e^{it} - 1\right)}\, e^{it} \left(\lambda\, e^{it} + 1\right)$$

$$\varphi_\xi'''(t) = -\lambda i \, e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \, e^{it} \left(\lambda^2 \, e^{2it} + 3\lambda \, e^{it} + 1\right)$$

$$\varphi_\xi^{iv)}(t) = \lambda \, e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} \, e^{it} \left(\lambda^3 \, e^{3it} + 6\lambda^2 \, e^{2it} + 7\lambda \, e^{it} + 1\right)$$

De donde deducimos:

$$E\left[\xi^3\right] = \frac{\varphi_\xi'''(0)}{i^3} = \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right)$$

$$E\left[\xi^4\right] = \frac{\varphi_\xi^{iv)}(0)}{i^4} = \lambda\left(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1\right)$$

De forma que:

$$\begin{aligned} E[\eta^2] &= \sigma^2 + \lambda\left(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 1\right) - 4\lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) + 4\lambda + 4\lambda^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda\left(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1\right) \end{aligned}$$

Y finalmente concluimos que:

$$\begin{aligned} Var\,(\eta) &= E[\eta^2] - E[\eta]^2 = \left(\sigma^2 + \lambda\left(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1\right)\right) - \left(\lambda\left(\lambda - 1\right)\right)^2 \\ &= \sigma^2 + \lambda\left(4\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) \end{aligned}$$

- $\underline{Cov(\xi, \eta)}$

  Para calcular la covarianza de ξ y η, conocidos $E[\xi] = \lambda$ y $E[\eta] = \lambda\,(\lambda - 1)$, resta computar:

$$\begin{aligned} E[\xi\,\eta] &= \sum_{x=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} x\,y\,f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,p_\xi(x)\,\mathrm{d}y = \sum_{x=0}^{\infty} x\,p_\xi(x) \int_{\mathbb{R}} y\,f_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,\xi = x)\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x\,p_\xi(x)\,E\left[\eta\,|\,\xi = x\right] \end{aligned}$$

  Recordemos que $E\left[\eta\,|\,\xi = x\right] = x^2 - 2x$, por lo que:

$$\begin{aligned} E[\xi\,\eta] &= \sum_{x=0}^{\infty} x\,p_\xi(x)\left(x^2 - 2x\right) = \sum_{x=0}^{\infty} x^3\,p_\xi(x) - 2\sum_{x=0}^{\infty} x^2\,p_\xi(x) = E\left[\xi^3\right] - 2E\left[\xi^2\right] \\ &= E\left[\xi^3\right] - 2E\left[\xi^2\right] + 2E\left[\xi\right]^2 - 2E\left[\xi\right]^2 = E\left[\xi^3\right] - 2Var\,(\xi) - 2E\left[\xi\right]^2 \end{aligned}$$

  También sabemos de antes que $E\left[\xi^3\right] = \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right)$ y que $E\left[\xi\right] = Var\,(\xi) = \lambda$. Sustituyendo dichos valores:

$$E[\xi\,\eta] = \lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda + 1\right) - 2\lambda - 2\lambda^2 = \lambda\left(\lambda^2 + \lambda - 1\right)$$

  De forma que finalmente obtenemos:

$$Cov(\xi, \eta) = E[\xi\,\eta] - E[\xi]\,E[\eta] = \left(\lambda\left(\lambda^2 + \lambda - 1\right)\right) - \left(\lambda \cdot \lambda\left(\lambda - 1\right)\right) = \lambda\left(2\lambda - 1\right)$$

Así:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda\,(2\lambda - 1) \\ \lambda\,(2\lambda - 1) & \sigma^2 + \lambda\,(4\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

Ej. 11. *Calcular la matriz de varianza-covarianzas de la variable aleatoria bidimensional con función característica*

$$\varphi(t,u) = \frac{9e^{3i(t+2u) - \frac{t^2+4u^2}{2}}}{(3-it)^2}.$$

En primer lugar descompongamos la función característica dada en dos factores, cada uno dependiente de una única variable t ó u:

$$\varphi(t,u) = \frac{9e^{3it - \frac{t^2}{2}}}{(3-it)^2} \cdot e^{6iu - \frac{4u^2}{2}}$$

Denotemos la variable aleatoria bidimensional por (ξ, η). El hecho de que esta operación de descomposición haya sido posible sugiere que las dos componentes ξ y η son independientes. En tal caso

$$\varphi(t,u) = \varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(u),$$

donde

$$\varphi_\xi(t) = \frac{9e^{3it - \frac{t^2}{2}}}{(3-it)^2}; \qquad \varphi_\eta(u) = e^{6iu - \frac{4u^2}{2}}.$$

La función característica de η es reconocible como la de una distribución Normal de media $\mu_\eta = 6$ y varianza $\sigma_\eta^2 = 4$. En cuanto a la función característica de ξ, démonos cuenta de que podemos reescribirla como:

$$\varphi_\xi(t) = e^{3it - \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{3}\right)^2}$$

Esta reformulación sugiere que $\xi = \xi_1 + \xi_2$ con ξ_1 y ξ_2 variables aleatorias independientes. De esta forma

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\,\varphi_{\xi_2}(t),$$

donde

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{3it - \frac{t^2}{2}}; \qquad \varphi_{\xi_2}(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{3}\right)^2}.$$

Estas dos funciones características podemos reconocerlas entre aquéllas de las distribuciones notables. Así, ξ_1 sigue una distribución Normal de media $\mu_{\xi_1} = 3$ y varianza $\sigma_{\xi_1}^2 = 1$. Mientras que ξ_2 sique una distribución Gamma de parámetros $a_{\xi_2} = 3$ y $p_{\xi_2} = 2$.

Tenemos ya toda la información necesaria para calcular la matriz de varianza-covarianzas de (ξ, η). Para ello debemos obtener:

- $\underline{Var(\xi)}$

  ξ es la suma de dos variables aleatorias independientes ξ_1 y ξ_2. Por tanto:

$$Var\,(\xi) = Var\,(\xi_1) + Var\,(\xi_2)$$

  Sabiendo que ξ_1 sigue una distribución Normal de media $\mu_{\xi_1} = 3$ y varianza $\sigma^2_{\xi_1} = 1$, su varianza es $Var\,(\xi_1) = \sigma^2_{\xi_1} = 1$. Además, ξ_2 sique una distribución Gamma de parámetros $a_{\xi_2} = 3$ y $p_{\xi_2} = 2$, luego su varianza es $Var\,(\xi_2) = \frac{p_{\xi_2}}{a^2_{\xi_2}} = \frac{2}{9}$. Por tanto:

$$Var\,(\xi) = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9}$$

- $\underline{Var(\eta)}$

  η sigue una distribución Normal de media $\mu_\eta = 6$ y varianza $\sigma^2_\eta = 4$. Por tanto:

$$Var\,(\eta) = \sigma^2_\eta = 4$$

- $\underline{Cov(\xi,\eta)}$

  Dado que ξ y η son variables aleatorias independientes:

$$Cov(\xi,\eta) = 0$$

Así:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ej. 12. *Se considera la variable aleatoria bidimensional* (ξ,η) *con función de masa:*

$$P(\text{-}1,\text{-}1) = \tfrac{1}{16} \qquad P(\text{-}1,0) = \tfrac{3}{16} \qquad P(\text{-}1,1) = 0$$

$$P(0,\text{-}1) = \tfrac{1}{16} \qquad P(0,0) = \tfrac{1}{4} \qquad P(0,1) = \tfrac{3}{16}$$

$$P(1,\text{-}1) = \tfrac{1}{8} \qquad P(1,0) = \tfrac{1}{16} \qquad P(1,1) = \tfrac{1}{16}$$

Demostrar que $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\,\varphi_\eta(t)$ *y mostrar que, sin embargo,* ξ *y* η *no son independientes.*

Comencemos tabulando la función de masa conjunta de (ξ,η) y completando la información con el cálculo de sus funciones de masa marginales:

		$\boldsymbol{\eta}$			
		-1	**0**	**1**	
$\boldsymbol{\xi}$	**-1**	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{4}$
	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

A la vista de la tabla queda claro que ξ y η no son independientes, ya que no se verifica que su distribución de masa conjunta sea el producto de sus distribuciones de masa marginales. Por ejemplo:

$$P(\xi = \text{-}1, \eta = 1) = 0 \neq \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(\xi = \text{-}1) \cdot P(\eta = 1)$$

Veamos sin embargo que $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\, \varphi_\eta(t)$. Démonos cuenta de que esto se cumpliría necesariamente si fueran independientes puesto que en tal caso:

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = E\left[e^{it(\xi+\eta)}\right] = E\left[e^{it\xi}\, e^{it\eta}\right] = E\left[e^{it\xi}\right]\, E\left[e^{it\eta}\right] = \varphi_\xi(t)\, \varphi_\eta(t)$$

Para comprobar la relación hemos de calcular:

- $\underline{\varphi_{\xi+\eta}(t)}$
  En primer lugar hemos de obtener la distribución de $\xi + \eta$. Es claro que su suporte será $\mathcal{D}_{\xi+\eta} = \{\text{-}2, \text{-}1, 0, 1, 2\}$, que son los únicos valores posibles de la suma de las variables ξ y η. Sabiendo esto, lo más sencillo es obtener la función de masa de $\xi + \eta$ utilizando que dado $a \in \mathcal{D}_{\xi+\eta}$:

  $$P(\xi + \eta = a) = P_{(\xi,\eta)}(\{(x, y) \in \{\text{-}1, 0, 1\}^2 : x + y = a\})$$

  Por tanto:

$\boldsymbol{\xi+\eta}$				
-2	**-1**	**0**	**1**	**2**
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

  De acuerdo a la definición, a partir de la función de masa de $\xi + \eta$ obtenemos:

  $$\varphi_{\xi+\eta}(t) = E\left[e^{it(\xi+\eta)}\right] = \frac{e^{-2it}}{16} + \frac{e^{-it}}{4} + \frac{3}{8} + \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{2it}}{16}$$

- $\underline{\varphi_\xi(t)}$
  De acuerdo a la definición, a partir de la función de masa marginal de ξ obtenemos:

  $$\varphi_\xi(t) = E\left[e^{it\xi}\right] = \frac{e^{-it}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{4}$$

- $\underline{\varphi_\eta(t)}$
  De forma análoga al caso anterior, a partir de la función de masa marginal de η obtenemos:

  $$\varphi_\eta(t) = E\left[e^{it\eta}\right] = \frac{e^{-it}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{4}$$

La comprobación es inmediata:

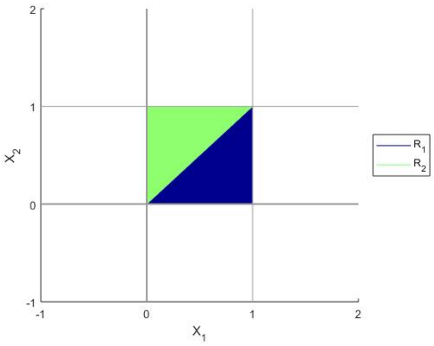
$$\varphi_\xi(t)\, \varphi_\eta(t) = \left(\frac{e^{-it}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{4}\right)^2 = \frac{e^{-2it}}{16} + \frac{e^{-it}}{4} + \frac{3}{8} + \frac{e^{it}}{4} + \frac{e^{2it}}{16} = \varphi_{\xi+\eta}(t)$$

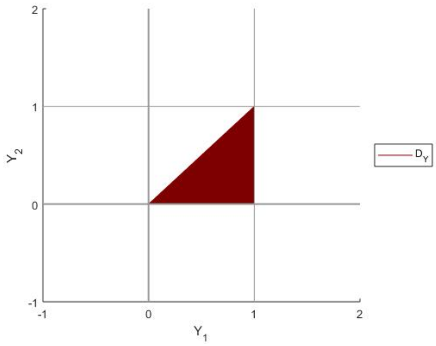
Ej. 13. *Sea* (X_1, X_2) *una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \textit{si } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Se considera la transformación (Y_1, Y_2)*, donde* $Y_1 = \max\{X_1, X_2\}$ *e* $Y_2 = \min\{X_1, X_2\}$*. Calcular la función de densidad de* (Y_1, Y_2)*.*

En primer lugar visualicemos la transformación representando tanto el dominio $\mathcal{D}_X$ de (X_1, X_2) como el dominio transformado $\mathcal{D}_Y$ de (Y_1, Y_2):





El recinto $\mathcal{D}_X$ aparece dividido en dos regiones:

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x_1 \leq 1, \, 0 \leq x_2 \leq x_1\}$$
$$R_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x_1 \leq 1, \, x_1 < x_2 \leq 1\}$$

Cada una de ellas tiene su imagen contenida en $\mathcal{D}_Y$ y es que la transformación en $\mathcal{D}_X$ no es inyectiva, pero sí en cada una de las regiones R_1 y R_2. Estamos pues en condiciones de calcular la función de densidad conjunta de (Y_1, Y_2) como:

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = \sum_{r=1}^{2} f_r(h_{1r}(y_1, y_2), h_{2r}(y_1, y_2)) \, |J_r|$$

Donde:

- $f_r(\cdots)$ es la función de densidad conjunta de (X_1, X_2) restringida al recinto R_r.
- $X_1 = h_{1r}(Y_1, Y_2)$ y $X_2 = h_{2r}(Y_1, Y_2)$ son las transformaciones inversas en R_r.
- J_r es el Jacobiano de las transformaciones inversas (h_{1r}, h_{2r}) en R_r.

Analicemos pues cada región por separado:

- <u>R_1</u>

  Dado $(x_1, x_2) \in R_1$, démonos cuenta de que $x_2 \leq x_1$. Por tanto:

  $$y_1 = \max\{x_1, x_2\} = x_1, \qquad y_2 = \min\{x_1, x_2\} = x_2$$

Las transformaciones inversas serán entonces:

$$x_1 = h_{11}(y_1, y_2) = y_1, \qquad x_2 = h_{21}(y_1, y_2) = y_2$$

Y el Jacobiano:

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_{11}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{11}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_{21}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{21}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- $\underline{R_2}$

  Dado $(x_1, x_2) \in R_2$, démonos cuenta de que $x_1 < x_2$. Por tanto:

  $$y_1 = \max\{x_1, x_2\} = x_2, \qquad y_2 = \min\{x_1, x_2\} = x_1$$

  Las transformaciones inversas serán entonces:

  $$x_1 = h_{12}(y_1, y_2) = y_2, \qquad x_2 = h_{22}(y_1, y_2) = y_1$$

  Y el Jacobiano:

  $$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_{12}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{12}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_{22}}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{22}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{-1}$$

De forma que obtenemos la función de densidad conjunta de (Y_1, Y_2):

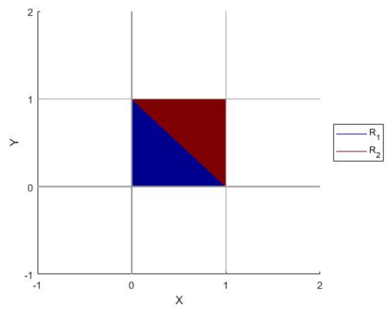
$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = I_{R_1}(y_1, y_2)\,|1| + I_{R_2}(y_2, y_1)\,|\text{-1}| = 2I_{\mathcal{D}_Y}(y_1, y_2)$$

Ej. 14. *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad uniforme en el recinto*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Calcular las distribuciones de Z y (Z, T) donde $Z = X + Y$ y $T = X - Y$.

En primer lugar calculemos la distribución de Z. Si bien podríamos hacerlo después de forma más sencilla con la distribución conjunta de (Z, T), servirá para practicar las transformaciones de una variable aleatoria bidimensional en otra unidimensional. Comencemos por representar el recinto $\mathcal{C}$:



El recinto $\mathcal{C}$ aparece dividido en dos regiones:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq x \leq 1, \, 1 - x < y \leq 1\}$$

Démonos cuenta de que la variable $Z = X + Y$ representa el conjunto de rectas del plano $\mathbb{R}^2$ de la forma $r_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, x + y = z\}$ con $z \in \mathbb{R}$, donde z refleja el punto de corte con los ejes. Así pues, $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$ recogerá la probabilidad del área del cuadrado $\mathcal{C}$ comprendida bajo la recta r_z. Éstas áreas tendrán distinta forma según la recta abarque el recinto R_1 por completo o no. Para calcular la probabilidad de dichas áreas, necesitamos conocer de forma explícita la función de densidad de (X, Y). Dado que ésta es uniforme, tendrá la siguiente forma:

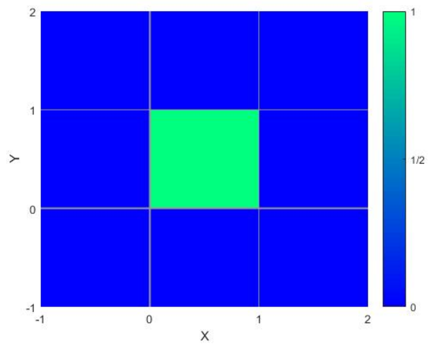
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\text{Área}(\mathcal{C})} \, I_{\mathcal{C}}(x, y)$$

Por tanto nos basta calcular el área del recinto $\mathcal{C}$ para obtener la función de densidad de (X, Y):

$$\text{Área}(\mathcal{C}) = \int_0^1 \int_0^1 1 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^1 v]_{v=0}^{v=1} \, \mathrm{d}u = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}u = u]_{u=0}^{u=1} = 1$$

Dando lugar a la función de densidad conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x, y) = I_{\mathcal{C}}(x, y)$$



Así pues, se tiene:

- $\underline{z < 0}$

  $F_Z(z) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{0 \leq z < 1}$

  $$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_0^z \int_0^{z-u} 1 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^z v]_{v=0}^{v=z-u} \, \mathrm{d}u$$
  $$= \int_0^z (z - u) \, \mathrm{d}u = -\frac{(z-u)^2}{2}\Bigg]_{u=0}^{u=z} = \frac{z^2}{2}$$

- $\underline{1 \leq z < 2}$

  $$F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X + Y > z) = 1 - \int_{z-1}^{1} \int_{z-u}^{1} 1 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$$

  $$= 1 - \int_{z-1}^{1} v\Big]_{v=z-u}^{v=1} \mathrm{d}u = 1 - \int_{z-1}^{1} (1 - z + u) \, \mathrm{d}u = 1 - \left[\frac{(1 - z + u)^2}{2} \right]_{u=z-1}^{u=1}$$

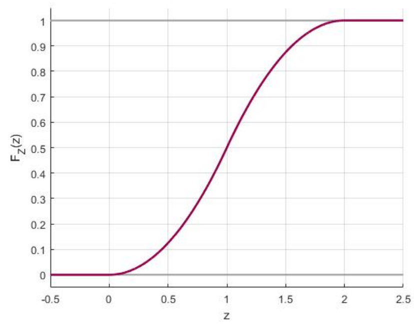
  $$= 1 - \frac{(2 - z)^2}{2}$$

- $\underline{2 \leq z}$

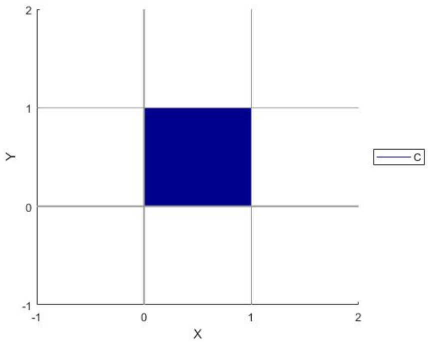
  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = P(\mathcal{C}) = 1$

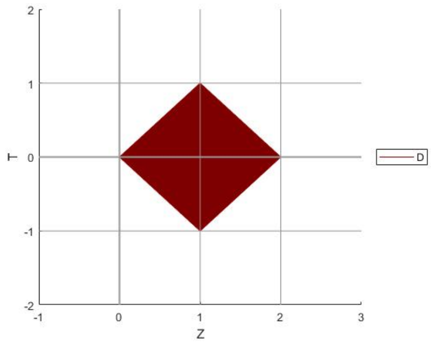
La función de distribución de Z queda entonces:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq z \end{cases}$$



En cuanto a la distribución conjunta de (Z, T), en primer lugar visualicemos la transformación representando tanto el dominio $\mathcal{C}$ de (X, Y) como el dominio transformado $\mathcal{D}$ de (Z, T):





La transformación es inyectiva, por lo que estamos en condiciones de calcular la función de densidad conjunta de (Z, T) como:

$$f_{(Z,T)}(z, t) = f_{(X,Y)}(h_1(z, t), h_2(z, t)) \, |J|$$

Donde:

- $f_{(X,Y)}$ es la función de densidad conjunta de (X, Y).

- $X = h_1(Z,T)$ y $Y = h_2(Z,T)$ son las transformaciones inversas.
- J es el Jacobiano de las transformaciones inversas (h_1, h_2).

Dado $(x,y) \in \mathcal{C}$, por definición:

$$z = x + y, \qquad t = x - y$$

Las transformaciones inversas serán entonces:

$$x = h_1(z,t) = \tfrac{z+t}{2}, \qquad y = h_2(z,t) = \tfrac{z-t}{2}$$

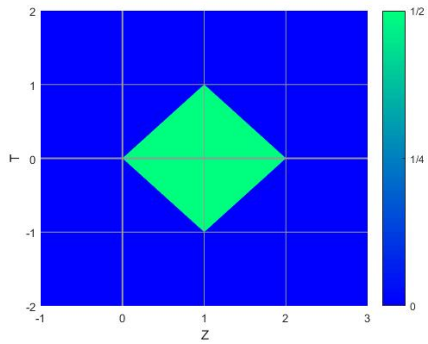
Y el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

De forma que obtenemos la función de densidad conjunta de (Z,T):

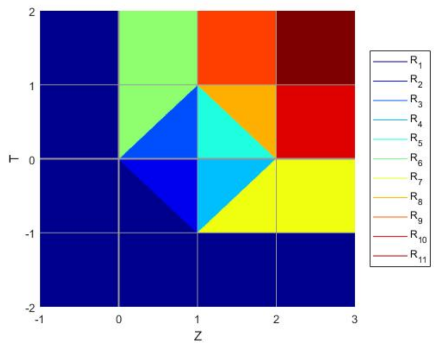
$$f_{(Z,T)}(z,t) = I_{\mathcal{C}}(\tfrac{z+t}{2}, \tfrac{z-t}{2})\, |-\tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}\, I_{\mathcal{D}}(z,t)$$

Cuya representación es:



Para poder calcular la función de distribución conjunta de (Z,T), necesitaremos dividir el plano $\mathbb{R}^2$ en distintas regiones. Sean éstas:

$$R_1 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ (z < 0) \text{ ó } (t < -1) \text{ ó } (t < -z)\}$$
$$R_2 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le z < 1, \ -z \le t < 0\}$$
$$R_3 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le z < 1, \ 0 \le t < z\}$$
$$R_4 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le z < 2, \ z - 2 < t < 0\}$$
$$R_5 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le z < 2, \ 0 \le t < 2 - z\}$$
$$R_6 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le z < 1, \ z \le t\}$$
$$R_7 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ t + 2 \le z, \ -1 \le t < 0\}$$
$$R_8 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le z < 2, \ 2 - z \le t < 1\}$$
$$R_9 = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le z < 2, \ 1 \le t\}$$
$$R_{10} = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \le z, \ 0 \le t < 1\}$$
$$R_{11} = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \le z, \ 1 \le t\}$$



Entonces se tiene que:

- $\underline{(x,t) \in R_1}$

  $F_{(X,Y)}(z,t) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{(z,t) \in R_2}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{-t}^{z} \int_{-u}^{t} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_{-t}^{z} \frac{v}{2}\Big]_{v=-u}^{v=t} \mathrm{d}u = \int_{-t}^{z} \frac{u+t}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{(u+t)^2}{4}\Bigg]_{u=-t}^{u=z}$$

$$= \frac{(z+t)^2}{4}$$

- $\underline{(z,t) \in R_3}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{0}^{t} \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \int_{t}^{z} \int_{-u}^{t} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{t} \frac{v}{2}\Big]_{v=-u}^{v=u} \mathrm{d}u + \int_{t}^{z} \frac{v}{2}\Big]_{v=-u}^{v=t} \mathrm{d}u$$

$$= \int_{0}^{t} u\,\mathrm{d}u + \int_{t}^{z} \frac{u+t}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\Bigg]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{(u+t)^2}{4}\right]_{u=t}^{u=z} = \frac{(z+t)^2}{4} - \frac{t^2}{2}$$

- $\underline{(z,t) \in R_4}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{-1}^{z-2} \int_{-v}^{v+2} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \int_{z-2}^{t} \int_{-v}^{z} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{z-2} \frac{u}{2}\Big]_{u=-v}^{u=v+2} \mathrm{d}v + \int_{z-2}^{t} \frac{u}{2}\Big]_{u=-v}^{u=z} \mathrm{d}v = \int_{-1}^{z-2} (v+1)\,\mathrm{d}v + \int_{z-2}^{t} \frac{v+z}{2}\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{(v+1)^2}{2}\Bigg]_{v=-1}^{v=z-2} + \left[\frac{(v+z)^2}{4}\right]_{v=z-2}^{v=t} = \frac{(z+t)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{2}$$

- $\underline{(z,t) \in R_5}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{0}^{t} \int_{-u}^{u} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \int_{t}^{1} \int_{-u}^{t} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \int_{1}^{z} \int_{u-2}^{t} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{0}^{t} \frac{v}{2}\Big]_{v=-u}^{v=u} \mathrm{d}u + \int_{t}^{1} \frac{v}{2}\Big]_{v=-u}^{v=t} \mathrm{d}u + \int_{1}^{z} \frac{v}{2}\Big]_{v=u-2}^{v=t} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^t u \, \mathrm{d}u + \int_t^1 \frac{u+t}{2} \, \mathrm{d}u + \int_1^z \frac{t+2-u}{2} \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{2}\bigg]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{(u+t)^2}{4}\right]_{u=t}^{u=1} - \left[\frac{(t+2-u)^2}{4}\right]_{u=1}^{u=z}$$

$$= \frac{2t+1}{2} - \frac{(z-t-2)^2}{4}$$

- $\underline{(z,t) \in R_6}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_0^z \int_{-u}^u \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^z \frac{v}{2}\bigg]_{v=-u}^{v=u} \mathrm{d}u = \int_0^z u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\bigg]_{u=0}^{u=z} = \frac{z^2}{2}$$

- $\underline{(z,t) \in R_7}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{-1}^t \int_{-v}^{v+2} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_{-1}^t \frac{u}{2}\bigg]_{u=-v}^{u=v+2} \mathrm{d}v = \int_{-1}^t (v+1) \, \mathrm{d}v = \frac{(v+1)^2}{2}\bigg]_{v=-1}^{v=t}$$

$$= \frac{(t+1)^2}{2}$$

- $\underline{(z,t) \in R_8}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_0^t \int_{-u}^u \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u + \int_t^1 \int_{-u}^t \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u + \int_1^{2-t} \int_{u-2}^t \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u + \int_{2-t}^z \int_{u-2}^{2-u} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^t \frac{v}{2}\bigg]_{v=-u}^{v=u} \mathrm{d}u + \int_t^1 \frac{v}{2}\bigg]_{v=-u}^{v=t} \mathrm{d}u + \int_1^{2-t} \frac{v}{2}\bigg]_{v=u-2}^{v=t} \mathrm{d}u + \int_{2-t}^z \frac{v}{2}\bigg]_{v=u-2}^{v=2-u} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^t u \, \mathrm{d}u + \int_t^1 \frac{u+t}{2} \, \mathrm{d}u + \int_1^{2-t} \frac{t+2-u}{2} \, \mathrm{d}u + \int_{2-t}^z (2-u) \, \mathrm{d}u$$

$$= \frac{u^2}{2}\bigg]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{(u+t)^2}{4}\right]_{u=t}^{u=1} - \left[\frac{(t+2-u)^2}{4}\right]_{u=1}^{u=2-t} - \left[\frac{(2-u)^2}{2}\right]_{u=2-t}^{u=z}$$

$$= \frac{(t+1)^2 - (2-z)^2}{2} - t^2$$

- $\underline{(z,t) \in R_9}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_0^1 \int_{-u}^u \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u + \int_1^z \int_{u-2}^{2-u} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{v}{2}\bigg]_{v=-u}^{v=u} \mathrm{d}u + \int_1^z \frac{v}{2}\bigg]_{v=u-2}^{v=2-u} \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^1 u \, \mathrm{d}u + \int_1^z (2-u) \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2}\bigg]_{u=0}^{u=1} - \left[\frac{(2-u)^2}{2}\right]_{u=1}^{u=z} = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$$

- $\underline{(z,t) \in R_{10}}$

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \int_{-1}^0 \int_{-v}^{v+2} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \int_0^t \int_v^{2-v} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}v = \int_{-1}^0 \frac{v}{2}\bigg]_{u=-v}^{u=v+2} \mathrm{d}v + \int_0^t \frac{v}{2}\bigg]_{u=v}^{u=2-v} \mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{0} (v+1)\,\mathrm{d}v + \int_{0}^{t} (1-v)\,\mathrm{d}v = \left.\frac{(v+1)^2}{2}\right]_{v=-1}^{v=0} - \left[\frac{(1-v)^2}{2}\right]_{v=0}^{v=t}$$

$$= 1 - \frac{(t-1)^2}{2}$$

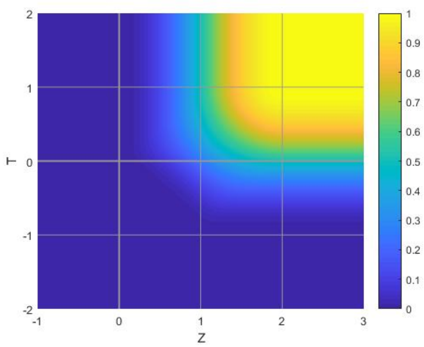
- $\underline{(z,t) \in R_{11}}$

  $$F_{(Z,T)}(z,t) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1$$

La función de distribución de (Z,T) queda entonces:

$$F_{(Z,T)}(z,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (z,t) \in R_1 \\ \frac{(z+t)^2}{4} & \text{si } (z,t) \in R_2 \\ \frac{(z+t)^2}{4} - \frac{t^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_3 \\ \frac{(z+t)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_4 \\ \frac{2t+1}{2} - \frac{(z-t-2)^2}{4} & \text{si } (z,t) \in R_5 \\ \frac{z^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_6 \\ \frac{(t+1)^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_7 \\ \frac{(t+1)^2-(2-z)^2}{2} - t^2 & \text{si } (z,t) \in R_8 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_9 \\ 1 - \frac{(t-1)^2}{2} & \text{si } (z,t) \in R_{10} \\ 1 & \text{si } (z,t) \in R_{11} \end{cases}$$

Con representación:

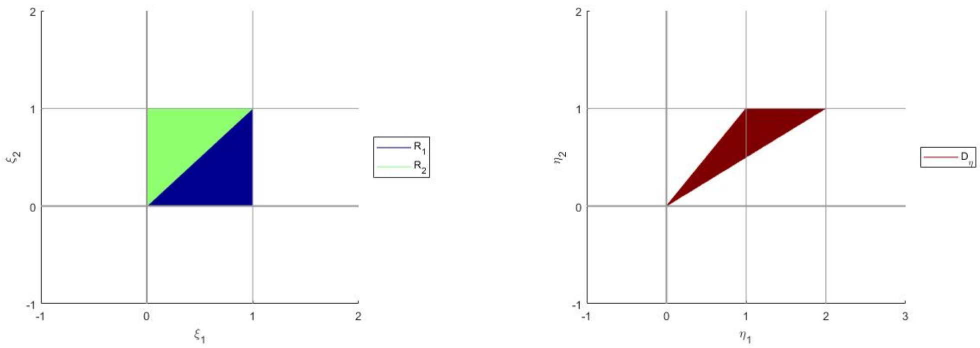


Ej. 15. *Sea* (ξ_1, ξ_2) *una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x\,y & \textit{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar la distribución conjunta de (η_1, η_2)*, donde* $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ *y* $\eta_2 = \max\{\xi_1, \xi_2\}$*.*

En primer lugar visualicemos la transformación representando tanto el dominio $\mathcal{D}_\xi$ de (ξ_1, ξ_2) como el dominio transformado $\mathcal{D}_\eta$ de (η_1, η_2):



El recinto $\mathcal{D}_\xi$ aparece dividido en dos regiones:

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, x < y \leq 1\}$$

Cada una de ellas tiene su imagen contenida en $\mathcal{D}_\eta$ y es que la transformación en $\mathcal{D}_\xi$ no es inyectiva, pero sí en cada una de las regiones R_1 y R_2. Estamos pues en condiciones de calcular la función de densidad conjunta de (η_1, η_2) como:

$$f_{(\eta_1,\eta_2)}(z,t) = \sum_{r=1}^{2} f_r(h_{1r}(z,t), h_{2r}(z,t))\, |J_r|$$

Donde:

- $f_r(\cdots)$ es la función de densidad conjunta de (ξ_1, ξ_2) restringida al recinto R_r.
- $\xi_1 = h_{1r}(\eta_1, \eta_2)$ y $\xi_2 = h_{2r}(\eta_1, \eta_2)$ son las transformaciones inversas en R_r.
- J_r es el Jacobiano de las transformaciones inversas (h_{1r}, h_{2r}) en R_r.

Analicemos pues cada región por separado:

- $\underline{R_1}$
  Dado $(x, y) \in R_1$, démonos cuenta de que $y \leq x$. Por tanto:

  $$z = x + y, \qquad t = \text{máx}\{x, y\} = x$$

  Las transformaciones inversas serán entonces:

  $$x = h_{11}(z,t) = t, \qquad y = h_{21}(z,t) = z - t$$

  Y el Jacobiano:

  $$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_{11}}{\partial z} & \frac{\partial h_{11}}{\partial t} \\ \frac{\partial h_{21}}{\partial z} & \frac{\partial h_{21}}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \text{-}1 \end{vmatrix} = \text{-}1$$

- $\underline{R_2}$

  Dado $(x,y) \in R_2$, démonos cuenta de que $x<y$. Por tanto:

$$z = x+y, \qquad t = \max\{x,y\} = y$$

  Las transformaciones inversas serán entonces:

$$x = h_{12}(z,t) = z-t, \qquad y = h_{22}(z,t) = t$$

  Y el Jacobiano:

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_{12}}{\partial z} & \frac{\partial h_{12}}{\partial t} \\ \frac{\partial h_{22}}{\partial z} & \frac{\partial h_{22}}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{-}1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

De forma que obtenemos la función de densidad conjunta de (η_1,η_2):

$$f_{(\eta_1,\eta_2)}(z,t) = 4t\,(z-t)\ I_{R_1}(z,t)\,|\text{-}1| + 4\,(z-t)\,t\,I_{R_1}(z,t)\,|1| = 8t\,(z-t)\ I_{\mathcal{D}_\eta}(z,t)$$

Ej. 16. *Se consideran las variables aleatorias X e Y independientes, donde $X \sim \mathcal{U}(1,3)$ e Y tiene función de densidad:*

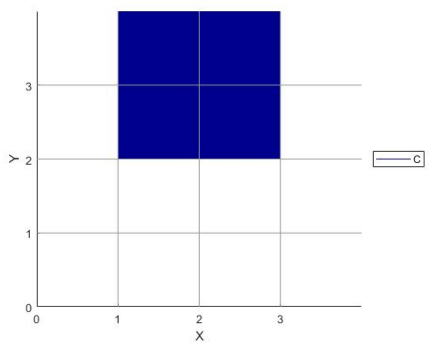
$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{2-y} & \textit{si } 2<y \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

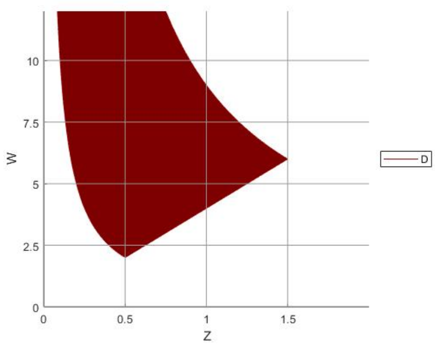
Calcular:

(a) *La distribución conjunta de (Z,W), donde $Z = X/Y$ y $W = XY$.*

(b) *La distribución marginal de Z.*

(a) Primero visualicemos la transformación representando tanto el dominio $\mathcal{C}$ de (X,Y) como el dominio transformado $\mathcal{D}$ de (Z,W):





La transformación es inyectiva, por lo que estamos en condiciones de calcular la función de densidad conjunta de (Z,W) como:

$$f_{(Z,W)}(z,w) = f_{(X,Y)}(h_1(z,w),h_2(z,w))\,|J|$$

Donde:

- $f_{(X,Y)}$ es la función de densidad conjunta de (X,Y).
- $X = h_1(Z,W)$ y $Y = h_2(Z,W)$ son las transformaciones inversas.
- J es el Jacobiano de las transformaciones inversas (h_1, h_2).

Dado que X e Y son variables aleatorias independientes, se verifica:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Por tanto, de acuerdo a los datos del enunciado:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2}\, I_{(1,3)}(x)\, e^{2-y}\, I_{(2,\infty)}(y) = \frac{e^{2-y}}{2}\, I_{(1,3)\times(2,\infty)}(x,y)$$

Dado $(x,y) \in \mathcal{C}$, por definición:

$$z = \frac{x}{y}, \qquad w = x\,y$$

Las transformaciones inversas serán entonces:

$$x = h_1(z,w) = \sqrt{z\,w}, \qquad y = h_2(z,w) = \sqrt{\frac{w}{z}}$$

Y el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{z}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{w}} \\ \text{-}\frac{1}{2z}\sqrt{\frac{w}{z}} & \frac{1}{2\sqrt{z\,w}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2z}$$

De forma que obtenemos la función de densidad conjunta de (Z,W):

$$f_{(Z,W)}(z,w) = \frac{e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}}{2}\, I_{(1,3)\times(2,\infty)}\left(\sqrt{z\,w}, \sqrt{\frac{w}{z}}\right)\left|\frac{1}{2z}\right| = \frac{e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}}{4z}\, I_{\mathcal{D}}(z,w)$$

(b) Sabemos que la función de densidad marginal de Z podemos calcularla como:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,W)}(z,w)\,\mathrm{d}w$$

Así pues, se tiene:

- $\underline{z < 0}$

  $$f_Z(z) = \int_{\emptyset} f_{(Z,W)}(z,w)\,\mathrm{d}w = 0$$

- $\underline{0 \leq z < \frac{1}{2}}$

  $$f_Z(z) = \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{9}{z}} \frac{e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}}{4z}\,\mathrm{d}w = \int_{\frac{1}{\sqrt{z}}}^{\frac{3}{\sqrt{z}}} \frac{t\,e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2z}\,\mathrm{d}t = -\frac{t\,e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2\sqrt{z}}\Bigg]_{t=\frac{1}{\sqrt{z}}}^{t=\frac{3}{\sqrt{z}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{z}}}^{\frac{3}{\sqrt{z}}} \frac{e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}t$$

  $$= \frac{e^{2-\frac{1}{z}} - 3e^{2-\frac{3}{z}}}{2z} - \left[\frac{e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2}\right]_{t=\frac{1}{\sqrt{z}}}^{t=\frac{3}{\sqrt{z}}} = \frac{(z+1)\,e^{2-\frac{1}{z}} - (z+3)\,e^{2-\frac{3}{z}}}{2z}$$

- $\underline{\frac{1}{2} \leq z < \frac{3}{2}}$

$$f_Z(z) = \int_{4z}^{\frac{9}{z}} \frac{e^{2-\sqrt{\frac{w}{z}}}}{4z}\,\mathrm{d}w = \int_{2\sqrt{z}}^{\frac{3}{\sqrt{z}}} \frac{t\,e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2z}\,\mathrm{d}t = -\frac{t\,e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2\sqrt{z}}\Bigg]_{t=2\sqrt{z}}^{t=\frac{3}{\sqrt{z}}} + \int_{2\sqrt{z}}^{\frac{3}{\sqrt{z}}} \frac{e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2z - 3e^{2-\frac{3}{z}}}{2z} - \left[\frac{e^{2-\frac{t}{\sqrt{z}}}}{2}\right]_{t=2\sqrt{z}}^{t=\frac{3}{\sqrt{z}}} = \frac{3z - (z+3)\,e^{2-\frac{3}{z}}}{2z}$$

- $\underline{\frac{3}{2} \leq z}$

$$f_Z(z) = \int_{\emptyset} f_{(Z,W)}(z,w)\,\mathrm{d}w = 0$$

La función de densidad de Z queda entonces:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{(z+1)e^{2-1/z} - (z+3)e^{2-3/z}}{2z} & \text{si } 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ \frac{3z-(z+3)e^{2-3/z}}{2z} & \text{si } \frac{1}{2} \leq z < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{3}{2} \leq z \end{cases}$$

Ej. 17. *Sean $X_1, \ldots, X_{n+1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución Bernoulli de parámetro p. Sean:*

$$V_n = \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad y \qquad V_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} X_i$$

Calcular la distribución conjunta de (V_n, V_{n+1}), su función característica y deducir si V_n y V_{n+1} son o no independientes.

Comencemos por darnos cuenta de que tanto V_n como V_{n+1} sólo pueden tomar los valores 0 ó 1 al ser ambas producto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una distribución Bernoulli de parámetro p. Además, tenemos la siguiente relación:

$$V_{n+1} = V_n\,X_{n+1}$$

Por lo que si $V_n = 0$, entonces necesariamente $V_{n+1} = 0$. Por tanto, la variable aleatoria bidimensional (V_n, V_{n+1}) sólo puede tomar los siguientes valores con la probabilidad indicada:

$$P(V_n = 1, V_{n+1} = 1) = P(X_1 = 1, \ldots, X_{n+1} = 1) = p^{n+1}$$

$$P(V_n = 1, V_{n+1} = 0) = P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = 0) = p^n\,(1-p)$$

$$P(V_n = 0, V_{n+1} = 0) = 1 - P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = 1 - p^n$$

Por tanto, atendiendo a la definición, su función característica resulta:

$$\varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,u) = E\left[e^{i(tV_n+uV_{n+1})}\right] = e^{i(t+u)}\,p^{n+1} + e^{it}\,p^n\,(1-p) + 1 - p^n$$

Resta por comprobar si V_n y V_{n+1} son o no independientes. Para ello obtenemos sus funciones características como:

$$\varphi_{V_n}(t) = \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,0) = e^{it}\,p^n + 1 - p^n$$

$$\varphi_{V_{n+1}}(u) = \varphi_{(V_n,V_{n+1})}(0,u) = e^{iu}\,p^{n+1} + 1 - p^{n+1}$$

En caso de que V_n y V_{n+1} fueran independientes, debería verificarse:

$$\varphi_{(V_n,V_{n+1})}(t,u) = \varphi_{V_n}(t)\,\varphi_{V_{n+1}}(u)$$

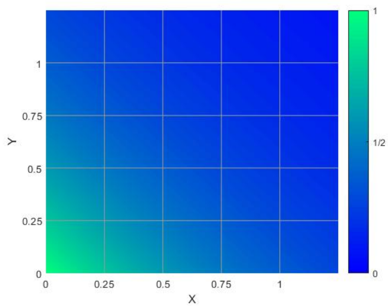
Pero es claro que con las expresiones obtenidas no existe tal relación. Por tanto, V_n y V_{n+1} no son independientes.

Ej. 18. *Sean X e Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Calcular la distribución de $T = |X - Y|$.*

Para poder calcular la función de distribución de T, necesitamos conocer de forma explícita la función de densidad conjunta de (X,Y). Dado que X e Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$, se verifica:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) = e^{-x}\,I_{(0,\infty)}(x)\,e^{-y}\,I_{(0,\infty)}(y) = e^{-(x+y)}\,I_{(0,\infty)^2}(x,y)$$

Cuya representación es:



Démonos cuenta de que la variable $T = |X - Y|$ representa el conjunto de pares de semirrectas del plano $\mathbb{R}^2$ de la forma $r_t = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x - y = t\}$ y $s_t = \{(x,y) \in (0,\infty)^2 : x - y = -t\}$ con $t \geq 0$, donde $(t,0)$ y $(0,t)$ reflejan, respectivamente, los puntos de corte con los semiejes. Así pues, $F_T(t) = P(T \leq t) = P(|X-Y| \leq t) = P(-t \leq X - Y \leq t)$ recogerá la probabilidad de la banda comprendida entre ambas semirrectas r_t y s_t. Por tanto, se tiene:

- $\underline{t < 0}$

  $F_T(t) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{0 \leq t}$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(|X-Y| \leq t) = P(-t \leq X - Y \leq t) \\ &= \int_0^t \int_0^{u+t} e^{-(u+v)}\, dv\, du + \int_t^\infty \int_{u-t}^{u+t} e^{-(u+v)}\, dv\, du \\ &= -\int_0^t e^{-(u+v)}\Big]_{v=0}^{v=u+t} du - \int_t^\infty e^{-(u+v)}\Big]_{v=u-t}^{v=u+t} du \\ &= \int_0^t \left(e^{-u} - e^{-(2u+t)}\right) du + \int_t^\infty \left(e^{-(2u-t)} - e^{-(2u+t)}\right) du \\ &= \frac{e^{-(2u+t)} - 2e^{-u}}{2}\Big]_{u=0}^{u=t} + \left[\frac{e^{-(2u+t)} - e^{-(2u-t)}}{2}\right]_{u=t}^{u=\infty} = 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

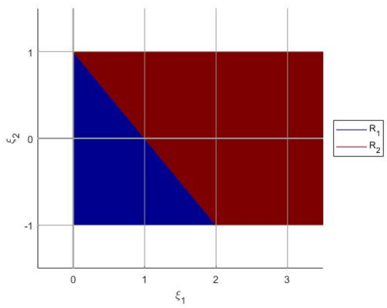
Resulta entonces que T sigue una distribución Exponencial de parámetro $\lambda = 1$ al igual que X e Y.

Ej. 19. *Sea* (ξ_1, ξ_2) *una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:*

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{e^{-x_1}}{2} & \textit{si } 0 < x_1, -1 < x_2 < 1 \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar la distribución de la variable aleatoria $\eta = |\xi_1 + \xi_2|$.

Comencemos por representar el recinto $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1, -1 < x_2 < 1\}$ que da soporte a la función de densidad de (ξ_1, ξ_2):



El recinto $\mathcal{C}$ aparece dividido en dos regiones:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1 - x_2,\ -1 \leq x_2 \leq 1\} \\ R_2 &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x_2 < x_1,\ -1 \leq x_2 \leq 1\} \end{aligned}$$

Démonos cuenta de que la variable $\eta = |\xi_1 + \xi_2|$ representa el conjunto de pares de semirrectas del plano $\mathbb{R}^2$ de la forma $r_y = \{(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : x_1 + x_2 = y\}$ y $s_y = \{(x_1, x_2) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} : x_1 + x_2 = -y\}$ con $y \geq 0$, donde $(0, y)$ y $(0, -y)$ reflejan, respectivamente, los puntos de corte con el eje de ordenadas. Así pues, $F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(|\xi_1 + \xi_2| \leq y) = P(-y \leq \xi_1 + \xi_2 \leq y)$ recogerá la probabilidad de la banda $\mathcal{C}$ comprendida entre ambas semirrectas r_y y s_y. Éstas áreas tendrán distinta forma según se abarque el recinto R_1 por completo o no. Por tanto, se tiene:

- $\underline{y < 0}$

  $F_\eta(y) = P(\emptyset) = 0$

- $\underline{0 \leq y < 1}$

  $F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(|\xi_1 + \xi_2| \leq y) = P(-y \leq \xi_1 + \xi_2 \leq y)$

  $$= \int_{-1}^{-y} \int_{-y-v}^{y-v} \frac{e^{-u}}{2} \, du \, dv + \int_{-y}^{y} \int_{0}^{y-v} \frac{e^{-u}}{2} \, du \, dv$$

  $$= -\int_{-1}^{-y} \left. \frac{e^{-u}}{2} \right]_{u=-y-v}^{u=y-v} du - \int_{-y}^{y} \left. \frac{e^{-u}}{2} \right]_{u=0}^{u=y-v} du$$

  $$= \int_{-1}^{-y} \frac{e^{v+y} - e^{v-y}}{2} \, du + \int_{-y}^{y} \frac{1 - e^{v-y}}{2} \, du = \left. \frac{e^{v+y} - e^{v-y}}{2} \right]_{v=-1}^{v=-y} + \left[\frac{v - e^{v-y}}{2} \right]_{v=-y}^{v=y}$$

  $$= y + \frac{e^{-y-1} - e^{y-1}}{2}$$

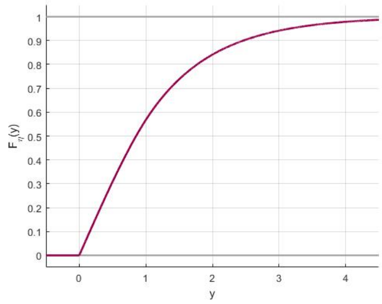
- $\underline{1 \leq y}$

  $$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(|\xi_1 + \xi_2| \leq y) = P(-y \leq \xi_1 + \xi_2 \leq y) = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{y-v} \frac{e^{-u}}{2} \, du \, dv$$

  $$= -\int_{-1}^{1} \left. \frac{e^{-u}}{2} \right]_{u=0}^{u=y-v} du = \int_{-1}^{1} \frac{1 - e^{v-y}}{2} \, du = \left. \frac{v - e^{v-y}}{2} \right]_{v=-1}^{v=1} = 1 + \frac{e^{-y-1} - e^{-y+1}}{2}$$

La función de distribución de η queda entonces:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y + \frac{e^{-y-1} - e^{y-1}}{2} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 + \frac{e^{-y-1} - e^{-y+1}}{2} & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$



Ej. 20. *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:*

$$f(x, y) = \begin{cases} k^2 e^{-ky} & \textit{si } 0 < x < y \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) *Hallar la probabilidad del recinto $[0,1] \times [0,1]$.*

(b) *Determinar los valores de k para que f sea una función de densidad.*

(c) *Demostrar que X e $Y - X$ son independientes.*

(d) *Escribir la curva (general) de regresión y la recta de regresión de Y sobre X.*

(a) Sea $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$ el soporte de la función de densidad conjunta de (X, Y). Para hallar la probabilidad del recinto $[0, 1] \times [0, 1]$, nos basta con intersecarlo con $\mathcal{C}$ obteniendo:

$$[0,1]^2 \cap \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y \leq 1\}$$

E integrar la función de densidad f en el recinto resultante:

$$P\left([0,1]^2\right) = \int_0^1 \int_0^y k^2 e^{-ky}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 k^2 e^{-ky}\,x\Big]_{x=0}^{x=y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 k^2 e^{-ky}\,y\,\mathrm{d}y$$

$$= -ke^{-ky}\,y\Big]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 ke^{-ky}\,\mathrm{d}y = -ke^{-k} - \left[e^{-ky}\right]_{y=0}^{y=1} = 1 - (k+1)\,e^{-k}$$

(b) Por definición f es una función no-negativa (la función exponencial es no-negativa y $k^2 \geq 0$) y Riemann-integrable. Por tanto, únicamente debemos exigirle que:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

Dado $k \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^y k^2 e^{-ky}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty k^2 e^{-ky}\,x\Big]_{x=0}^{x=y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^\infty k^2 e^{-ky}\,y\,\mathrm{d}y = -ke^{-ky}\,y\Big]_{y=0}^{y=\infty} + \int_0^\infty ke^{-ky}\,\mathrm{d}y$$

Llegados a este punto, debemos exigir que $k > 0$ para que el primer sumando sea finito. En tal caso:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty ke^{-ky}\,\mathrm{d}y = -e^{-ky}\Big]_{y=0}^{y=\infty} = 1$$

Por lo que f es una función de densidad $\forall k > 0$.

(c) Definamos la transformación $Z = X$ y $T = Y - X$. La transformación es claramente inyectiva en $\mathbb{R}^2$ (y por tanto en $\mathcal{C}$), por lo que estamos en condiciones de calcular la función de densidad conjunta de (Z, T) como:

$$f_{(Z,T)}(z, t) = f_{(X,Y)}(h_1(z, t), h_2(z, t))\,|J|$$

Donde:

- $f_{(X,Y)}$ es la función de densidad conjunta de (X, Y).
- $X = h_1(Z, T)$ y $Y = h_2(Z, T)$ son las transformaciones inversas.
- J es el Jacobiano de las transformaciones inversas (h_1, h_2).

Dado $(x, y) \in \mathcal{C}$, por definición:

$$z = x, \qquad t = y - x$$

Las transformaciones inversas serán entonces:

$$x = h_1(z,t) = z, \qquad y = h_2(z,t) = z + t$$

Y el Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial t} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

De forma que obtenemos la función de densidad conjunta de (Z, T):

$$f_{(Z,T)}(z,t) = k^2 e^{-k(z+t)}\, I_{(0,\infty)}(z)\, I_{(z,\infty)}(z+t)\, |1| = k^2 e^{-k(z+t)}\, I_{(0,\infty)^2}(z,t)$$

Calculamos la función de densidad marginal de Z como:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,T)}(z,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty k^2 e^{-k(z+t)}\, I_{(0,\infty)}(z)\,\mathrm{d}t = -ke^{-k(z+t)}\, I_{(0,\infty)}(z)\Big]_{t=0}^{t=\infty}$$
$$= ke^{-kz}\, I_{(0,\infty)}(z)$$

Que coincide con la función de densidad marginal de T dado que la función de densidad conjunta de (Z, T) es simétrica. Luego:

$$f_T(t) = ke^{-kt}\, I_{(0,\infty)}(t)$$

Se tiene entonces la siguiente relación:

$$f_Z(z)\, f_T(t) = ke^{-kz}\, I_{(0,\infty)}(z)\, ke^{-kt}\, I_{(0,\infty)}(t) = k^2 e^{-k(z+t)}\, I_{(0,\infty)^2}(z,t) = f_{(Z,T)}(z,t)$$

Por lo que $Z = X$ y $T = Y - X$ son variables aleatorias independientes.

(d) Conocidas $f(x,y)$ y $f_X(x)$ (marginal de $Z = X$), por definición podemos calcular la función de densidad condicionada de Y dado $X = x$ como:

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{k^2 e^{-ky}\, I_{(0,\infty)}(x)\, I_{(x,\infty)}(y)}{ke^{-kx}\, I_{(0,\infty)}(x)} = ke^{k(x-y)}\, I_{(x,\infty)}(y)$$

Así, dado $x > 0$, la curva general de regresión de Y sobre X viene dada por:

$$y = E[Y\,|\,X = x] = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X = x)\,\mathrm{d}y = \int_x^\infty y\, ke^{k(x-y)}\,\mathrm{d}y$$
$$= -y\, e^{k(x-y)}\Big]_{y=x}^{y=\infty} + \int_x^\infty e^{k(x-y)}\,\mathrm{d}y = x - \left[\frac{e^{k(x-y)}}{k}\right]_{y=x}^{y=\infty} = x + \frac{1}{k}$$

La curva general de regresión de Y sobre X es la ecuación de la recta $y = x + \frac{1}{k}$, por lo que coincide con la recta de regresión de Y sobre X.

Ej. 21. *Consideremos la variable aleatoria bidimensional* (X,Y) *con distribución uniforme en el recinto limitado por las rectas* $y=x$, $x=-y$, $y=1$ *e* $y=-1$; *es decir,* $f(x,y)=\frac{1}{2}$ *para* $(x,y)\in\mathcal{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<|y|<1\}$.

(a) *Calcular la curva (general) de regresión de* Y *sobre* X.

(b) *Estudiar si* X *e* Y *son independientes y/o incorreladas.*

(a) En primer lugar, démonos cuenta de que podemos reescribir la función de densidad conjunta de (X,Y) como:

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\,I_{(|x|,1)}(|y|)$$

Por lo que según la definición, calculamos la función de densidad marginal de X de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{-|x|}\frac{1}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}y + \int_{|x|}^{1}\frac{1}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{y}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\Big]_{y=-1}^{y=-|x|} + \left[\frac{y}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\right]_{y=|x|}^{y=1} = (1-|x|)\ I_{(-1,1)}(x) \end{aligned}$$

Podemos entonces obtener la función de densidad condicionada de Y dado $X=x$:

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X=x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{2}\,I_{(-1,1)}(x)\,I_{(|x|,1)}(|y|)}{(1-|x|)\ I_{(-1,1)}(x)}=\frac{1}{2\,(1-|x|)}\,I_{(|x|,1)}(|y|)$$

Así, dado $x\in(-1,1)$, la curva general de regresión de Y sobre X viene dada por:

$$\begin{aligned} y = E[Y\,|\,X=x] &= \int_{\mathbb{R}} y\, f_{Y\,|\,X}(y\,|\,X=x)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{-|x|}\frac{y}{2\,(1-|x|)}\,\mathrm{d}y + \int_{|x|}^{1}\frac{y}{2\,(1-|x|)}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{y^2}{4\,(1-|x|)}\Big]_{y=-1}^{y=-|x|} + \left[\frac{y^2}{4\,(1-|x|)}\right]_{y=|x|}^{y=1} = 0 \end{aligned}$$

La curva general de regresión de Y sobre X es la ecuación de la recta $y=0$, por lo que coincide con la recta de regresión de Y sobre X.

(b) Sabemos que la recta de regresión de Y sobre X es la recta $y=0$. Por tanto, dado que ésta viene dada como

$$y=E[Y]+\rho(X,Y)\,\sqrt{\tfrac{Var(Y)}{Var(X)}}\,(x-E[X])\,,$$

deducimos que el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ entre X e Y es 0. Es decir, X e Y son incorreladas. Por otra parte, si reescribimos la función de densidad conjunta de (X,Y) como:

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2}\,I_{(0,|y|)}(|x|)\,I_{(-1,1)}(y)$$

Según la definición, podemos calcular la función de densidad marginal de Y de la siguiente forma:

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-|y|}^{|y|} \frac{1}{2}\, I_{(-1,1)}(y)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\, I_{(-1,1)}(y)\Big]_{x=-|y|}^{x=|y|} = |y|\, I_{(-1,1)}(y)$$

En caso de que X e Y fueran independientes, debería verificarse:

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Pero es claro que con las expresiones obtenidas no existe tal relación. Por tanto, X e Y no son independientes.

Ej. 22. *Consideremos las variables aleatorias X e Y, con rectas de regresión:*

$$\begin{cases} 3x + 2y - 26 = 0 \\ 6x + y - 31 = 0 \end{cases}$$

Calcular las medias marginales y el coeficiente de correlación. Identificar cuál es la recta de regresión de Y sobre X.

El punto de corte de ambas rectas es el punto $(E[X], E[Y])$ (las medias marginales). Por tanto, resolviendo el sistema obtenemos que:

$$E[X] = 4, \qquad E[Y] = 7$$

Por otra parte, las rectas de regresión de X e Y vienen dadas como:

$$\begin{cases} y = E[Y] + \rho(X,Y)\sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}}\,(x - E[X]) & Y \text{ sobre } X \\ y = E[Y] + \frac{1}{\rho(X,Y)}\sqrt{\frac{Var(Y)}{Var(X)}}\,(x - E[X]) & X \text{ sobre } Y \end{cases}$$

De forma que la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X en términos absolutos es necesariamente menor o igual que la de X sobre Y, puesto que $|\rho(X,Y)| \leq 1$. Si despejamos en y las rectas dadas por el enunciado:

$$\begin{cases} y = -\frac{3x}{2} + 13 \\ y = -6x + 31 \end{cases}$$

Podemos concluir que la primera recta ($3x+2y-26=0$) será la de regresión de Y sobre X y la segunda ($6x+y-31=0$) la de X sobre Y. Además, cocientando las pendientes se tiene:

$$\rho(X,Y)^2 = \frac{-\frac{3}{2}}{-6} = \frac{1}{4}$$

De forma que si atendemos al signo de las pendientes de las rectas de regresión, finalmente deducimos que $\rho(X,Y) = -\frac{1}{2}$ (las rectas tienen correlación negativa).

Ej. 23. *Se considera una variable aleatoria* (X, Y) *con distribución* $Normal_2$. *Se sabe que las rectas de regresión tienen por ecuaciones* $x - y + 2 = 0$, $3x - 10y + 40 = 0$; *y que la suma de las varianzas de* X *e* Y *es* 1,3. *Determinar la correspondiente función de densidad.*

Al seguir una distribución $Normal_2$, la función de densidad de (X, Y) tiene la siguiente estructura:

$$f_{(X,Y)}(\vec{x}) = \frac{\sqrt{|M|}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^t M(\vec{x}-\vec{\mu})}$$

Donde:

- $\vec{x}$ es el vector de variables $(x, y)^t$.
- $\vec{\mu}$ es el vector de medias marginales $(E[X], E[Y])^t$.
- Σ es la matriz de varianza-covarianzas de X e Y.
- M es la matriz inversa de Σ.

Así pues, nos basta con identificar las medias marginales y la matriz de varianza-covarianzas de X e Y para resolver el ejercicio. Comencemos calculando el punto de corte de ambas rectas, ya que éste es el punto $(E[X], E[Y])$ (las medias marginales). Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$E[X] = \tfrac{20}{7}, \qquad E[Y] = \tfrac{34}{7}$$

Por otra parte, las rectas de regresión de X e Y vienen dadas como:

$$\begin{cases} y = E[Y] + \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}(x - E[X]) & Y \text{ sobre } X \\ y = E[Y] + \frac{Var(Y)}{Cov(X,Y)}(x - E[X]) & X \text{ sobre } Y \end{cases}$$

De forma que la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X en términos absolutos es necesariamente menor o igual que la de X sobre Y (ver ejercicio anterior). Si despejamos en y las rectas dadas por el enunciado:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = \frac{3x}{10} + 4 \end{cases}$$

Podemos concluir que la primera recta $(x - y + 2 = 0)$ será la de regresión de X sobre Y y la segunda $(3x - 10y + 40 = 0)$ la de Y sobre X. Se tiene entonces de acuerdo a sus pendientes:

$$\begin{cases} \frac{Var(Y)}{Cov(X,Y)} = 1 \\ \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Multiplicando ambas expresiones, deducimos que:

$$\frac{Var(Y)}{Var(X)} = \frac{3}{10}$$

Ahora bien, el enunciado establece que $Var(X) + Var(Y) = \frac{13}{10}$. Así pues podemos resolver el sistema y obtener:

$$Var(X) = 1, \qquad Var(Y) = \frac{3}{10}$$

Finalmente, despejamos para concluir que $Cov(X, Y) = \frac{3}{10}$. En resumen:

$$\vec{\mu} = (\tfrac{20}{7}, \tfrac{34}{7})^t, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$