35 Probar que el origen es un equilibrio inestable para el sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 + xy \\ y' = -y + y^2 + xy - x^3 \end{cases}$$

Indicación: Considerar una función del tipo $V(x,y) = x^4/4 - y^2/2$

Demostración. Tomando $\Omega = \{(x,y) : x \geq 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}x^2\}$ tenemos que $V(x,y) = 0$ en $\partial\Omega$ y $V(x,y) > 0$ en $\dot{\Omega}$. Calculando $\dot{V}(x,y)$ obtenemos

$$\dot{V}(x,y) = x^3(x^3 + xy) - y(-y + y^2 + xy - x^3) = x^6 + yx^3(1+x) + y^2(1-y-x)$$

Tomando ahora la región abierta $U_\varepsilon = \{(x,y) : x + y < \varepsilon, |x| < \varepsilon\}$ que contiene al origen, entonces si $0 < \varepsilon < 1/3$ tenemos que si $(x,y) \in U_\varepsilon \setminus \{(0,0)\}$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= x^6 + yx^3(1+x) + y^2(1-y-x) \geq |x|^6 - |y||x|^3(1+\varepsilon) + |y|^2(1-\varepsilon) \\ &= \left(|x|^3 - \sqrt{1-\varepsilon}|y|\right)^2 + (2\sqrt{1-\varepsilon} - 1 - \varepsilon)|y||x|^3 > 0 \end{aligned}$$

puesto que $2\sqrt{1-\varepsilon} - 1 - \varepsilon > 0$ si $0 < \varepsilon < 1/3$.

Aplicando el Teorema de Cetaev, se obtiene la inestabilidad del punto de equilibrio $(0,0)$.