GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES.
E. FERNÁNDEZ.

Problemas extra.

1. Sea $A \in \mathrm{O}(3)$ una matriz ortogonal. Sean v y w dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$. Demostrar la igualdad
$$Av \times Aw = \det(A)A(v \times w).$$
<u>Solución:</u> Sea $u = Av \times Aw \in \mathbb{R}^3$. Por definición, se tiene que u está caracterizado por cumplir la propiedad $u \cdot x = \det(Av, Aw, x)$ para todo vector $x \in \mathbb{R}^3$. Como $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una matriz ortogonal define, en particular, un isomorfismo lineal. En particular, para cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ existe un único $y \in \mathbb{R}^3$ tal que $Ay = x$; luego la propiedad anterior se puede reescribir como $u \cdot Ay = \det(Av, Aw, Ay)$ para todo $y \in \mathbb{R}^3$. Observamos que la matriz $(Av, Aw, Ay) = A(v, w, y)$ luego se tiene que
$u \cdot Ay = \det(A)\det(v, w, y) = \det(A)(v \times w) \cdot y = \det(A)(A(v \times w) \cdot Ay) = (\det(A)A(v \times w)) \cdot Ay$.
Es decir,
$$(Av \times Aw) \cdot Ay = (\det(A)A(v \times w)) \cdot Ay$$
para todo $y \in \mathbb{R}^3$. Luego, $\det(A)A(v \times w) = Av \times Aw$ pues ambos vectores satisfacen la propiedad que caracteriza el producto vectorial.
Esta comprobación también puede realizarse geométricamente, ya que el producto vectorial de dos vectores está unívocamente determinado por el ángulo que forman entre ellos y su norma.
2. Sea $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ aplicaciones diferenciables. Supongamos que existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u' = au + bv$ y $v' = cu - av$. Demostrar que el vector $u(t) \times v(t)$ es constante.
<u>Solución:</u> Usad que $\frac{d}{dt}(u \times v) = u' \times v + u \times v'$.
3. Sea $v, w \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cualesquiera con v no nulo. Demostrar que existe un cierto vector $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $u \times v = w$ si y sólo si w es perpendicular a v. ¿Es único dicho vector?
<u>Solución:</u>
Consideremos la aplicación lineal
$$- \times v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, u \mapsto u \times v.$$
Como $v \neq 0$ sabemos por las propiedades del producto vectorial que $\ker(- \times v) = [v]$ es la recta vectorial generada por v. Por lo tanto, $\mathrm{Imagen}(- \times v)$ es un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, se tiene que $u \times v$ es perpendicular a v para todo $u \in \mathbb{R}^3$. En conclusión el plano vectorial $\mathrm{Imagen}(- \times w)$ esta contenido en el plano $[v]^\perp$ ortogonal a v luego por tener la misma dimensión coinciden. Esto resuelve el ejercicio.
Respecto a la unicidad la respuesta es que no. En efecto, si $u \in \mathbb{R}^3$ cumple que $u \times v = w$ se tiene que todos los vectores $\tilde{u}$ tales que $\tilde{u} - u \in \ker(- \times v)$ cumplen la misma propiedad (de hecho son todos!).
4. Sean $\rho : (0, 1) \to (0, \infty)$ y $\theta : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Consideremos la curva plana
$$\alpha : (0, 1) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \rho(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))).$$

(i) Demostrar que α es regular si y sólo si $(\rho')^{-1}(0) \cap (\theta')^{-1}(0) = \emptyset$.
(ii) Demostrar que $||\alpha'||^2 = (\rho')^2 + (\rho\theta')^2$.
(iii) Asumiendo que α es regular y que los puntos críticos de ρ y θ son aislados, dibujar intuitivamente la curva α en un entorno de un punto crítico de ρ o θ.
(iv) Probar que si $\lim_{t\to 0^+} \rho(t) = 0$ entonces $\alpha(t)$ admite una extensión continua a $[0, 1)$.
(v) Probar que si $\lim_{t\to 0^+} \rho(t) = 0$ y ρ' y θ' convergen cuando t tiende a 0^+ entonces para todo $c \in (0, 1)$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} L_t^c(\alpha) = M < \infty.$$

(vi) Usando los apartados anteriores demostrar que existe una curva regular $\alpha : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ que converge al origen cuando t tiende a 0^+ y tal que

$$\lim_{t\to 0^+} L_t^c(\alpha) = \infty,$$

para todo $c \in (0, 1)$.

Solución:

(i) Denotemos por $c(t) = (\cos t, \sin t)$ a la parametrización positiva de la circunferencia unidad, se tiene que $c'(t) = (-\sin t, \cos t)$. En particular $\langle c(t), c'(t)\rangle$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$. La curva α se escribe como

$$\alpha(t) = \rho(t)c(\theta(t)).$$

Luego,

$$\alpha'(t) = \rho'(t)c(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)c'(\theta(t)).$$

Por definición la curva α será regular si y sólo si su derivada nunca es el vector nulo. Ahora bien, $\alpha'(t)$ se expresa como combinación lineal de dos vectores linealmente independientes $c(t)$ y $c'(t)$. De aquí deducimos que $\alpha'(t_0) = 0$ si y sólo si $\rho'(t_0) = \rho(t_0)\theta'(t_0) = 0$. Por hipótesis se tiene que $\rho(t) > 0$, para todo $t \in (0, 1)$, luego concluimos que $\alpha'(t_0) = 0$ si y sólo si $\rho'(t_0) = \theta'(t_0) = 0$. Esto concluye (i).

(ii) Sabemos que $||\alpha'||^2 = \alpha' \cdot \alpha'$. Usando la expresión obtenida en (i) y el hecho de que $\langle c(t), c'(t)\rangle$ es una base ortonormal el resultado se concluye trivialmente.

(iii) Visto en clase.

(iv) Se tiene que $||\alpha(t)|| = \rho(t)$ pues $c(\theta(t))$ es unitario. Luego si $\lim_{t\to 0^+} \rho(t) = 0$ se tiene que $\lim_{t\to 0^+} ||\alpha(t)|| = 0$, es decir, $\lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = 0$ y α extiende continuamente a 0 (sin más definiendo su extensión en $t = 0$ como $\alpha(0) = 0$).

(v) Se tiene que

$$L_t^c(\alpha) = \int_t^c ||\alpha'(u)||du$$

Por otro lado,

$$F(u) = ||\alpha'(u)|| = \sqrt{\rho'(u)^2 + (\rho(u)\theta'(u))^2}$$

converge cuando u tiende a 0^+ luego admite una extensión continua a $[0, 1)$. Luego $F(u)$ es integrable en todo intervalo de la forma $[0, c]$ y, por lo tanto, $L_t^c(\alpha) = \int_t^c F(u)du$ converge cuando t tiende a 0^+.

(vi) Debemos escoger ρ y θ convenientemente. Si fijamos $\rho(t) = t$ se tiene que $\rho' = 1$ y debemos, forzosamente en virtud del apartado anterior, buscar θ de forma que θ' no converja cuando t tiende a 0^+.

Para esta elección particular de $\rho(t) = t$ se tiene que

$$||\alpha'(t)|| = \sqrt{\rho'(t)^2 + (\rho(t)\theta'(t))^2} = \sqrt{1 + (t\theta'(t))^2} \geq \sqrt{(t\theta'(t))^2} = |t\theta'(t)| = t|\theta'(t)|.$$

Por lo tanto, para todo $0 < t < c < 1$ se cumple que

$$L_t^c(\alpha) = \int_t^c ||\alpha'(u)||du \geq \int_t^c u|\theta'(u)|du.$$

Consideremos para todo entero positivo $n \in \mathbb{N}^+$ la función $\theta_n(t) = \frac{1}{t^n}$ que es diferenciable en $(0,1)$ y cumple que $\theta'_n(t) = \frac{-n}{t^{n+1}}$. Denotemos por $\alpha_n(t) = tc(\theta_n(t))$ a la curva asociada a la elección de funciones $\rho(t) = t$ y $\theta(t) = \theta_n(t)$. Se tiene que para $n \geq 2$

$$L_t^c(\alpha_n) = \int_t^c ||\alpha'(u)||du \geq \int_t^c u|\theta'_n(u)|du = \int_t^c n\theta_n(u)du = \frac{n}{1-n}(\frac{1}{c^{n-1}} - \frac{1}{t^{n-1}});$$

mientras que para $n = 1$

$$L_t^c(\alpha_1) = \int_t^c ||\alpha'(u)||du \geq \int_t^c u|\theta'_1(u)|du = \int_t^c \theta_1(u)du = \log c - \log t = \log c/t.$$

En cualquier caso, concluimos que para todo $0 < t < c < 1$ la longitud de la curva α_n en $[t, c]$ está minorada por una función $F_n(t; c)$ que diverge cuando t tiende a 0^+. Es decir,

$$\lim_{t \to 0^+} L_t^c(\alpha_n) \geq \lim_{t \to 0^+} F_n(t; c) = \infty,$$

como queríamos.