I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura............ Fecha ....

Alumno/a .... Curso........ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

$\boxed{4.-}$ Estudia la convergencia uniforme de las series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{z^n}{1+z^n}$ Vamos a probar que la serie converge uniformemente en los conjuntos $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R < 1 \}$ y $\Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R > 1 \}$

Si $z \in \Omega_1$

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{n^2} \cdot \frac{z^n}{1+z^n} \right| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|^n}{|1+z^n|}$$

Como $|z| < 1 \Rightarrow |z|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

En particular dado $\varepsilon = 1/2$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ $|z^n| < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |1+z^n| = |z^n - (-1)| \geq |-1| - |z^n| = 1 - |z|^n > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|-1| \leq |z^n| + |(-1) - z^n|$$

$$\overset{\shortparallel}{|-1-z^n+z^n|}$$

Por tanto para $n \geq n_0$

$$|f_n(z)| = \frac{1}{n^2} \frac{|z|^n}{|1+z^n|} < \frac{2}{n^2} = M_n$$