Ejercicios repaso. Sacados de exámenes anteriores

Ejercicio 1. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación Lipschitz. Si $K \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida cero, probar que $g(K)$ también tiene medida cero.

Ejercicio 2. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación Lipschitz. Si $K \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, probar que $g(K)$ tiene volumen cero.

Ejercicio 3. La función Γ de Euler se define por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$$

1. Demostrar que está bien definida (es decir que la integral impropia es convergente) para todo $t > 0$.
2. Demostrar que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$.
3. Calcular $\Gamma(1)$ y deducir el valor de $\Gamma(n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4. Demostrar que el siguiente conjunto tiene volumen bien definido y calcularlo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$$

Ejercicio 5. Demostrar que el siguiente conjunto tiene volumen bien definido y calcularlo:

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\}$$

Ejercicio 6.

(a) Calcular la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-y^3}\, dy\, dx.$$

(b) Calcular $\int_D f$, con

$$f(x,y) = \frac{y^2 e^{x^2+y^2}}{x^2+y^2},$$

$$D = \{(x,y) \in^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, x \geq 0\}.$$