GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES.
E. FERNÁNDEZ.

Problemas extra.

1. Sea $A \in \mathrm{O}(3)$ una matriz ortogonal. Sean v y w dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$. Demostrar la igualdad
$$Av \times Aw = \det(A)A(v \times w).$$
2. Sea $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ aplicaciones diferenciables. Supongamos que existen constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $u' = au + bv$ y $v' = cu - av$. Demostrar que el vector $u(t) \times v(t)$ es constante.
3. Sea $v, w \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cualesquiera con v no nulo. Demostrar que existe un cierto vector $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $u \times v = w$ si y sólo si w es perpendicular a v. ¿Es único dicho vector?
4. Sean $\rho : (0, 1) \to (0, \infty)$ y $\theta : (0, 1) \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Consideremos la curva plana
$$\alpha : (0, 1) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \rho(t)(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))).$$
   (i) Demostrar que α es regular si y sólo si $(\rho')^{-1}(0) \cap (\theta')^{-1}(0) = \emptyset$.
   (ii) Demostrar que $||\alpha'||^2 = (\rho')^2 + (\rho\theta')^2$.
   (iii) Asumiendo que α es regular y que los puntos críticos de ρ y θ son aislados, dibujar intuitivamente la curva α en un entorno de un punto crítico de ρ o θ.
   (iv) Probar que si $\lim_{t\to0^+} \rho(t) = 0$ entonces $\alpha(t)$ admite una extensión continua a $[0, 1)$.
   (v) Probar que si $\lim_{t\to0^+} \rho(t) = 0$ y ρ' y θ' convergen cuando t tiende a 0^+ entonces para todo $c \in (0, 1)$ se tiene que
$$\lim_{t\to0^+} L_t^c(\alpha) = M < \infty.$$
   (vi) Usando los apartados anteriores demostrar que existe una curva regular $\alpha : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ que converge al origen cuando t tiende a 0^+ y tal que
$$\lim_{t\to0^+} L_t^c(\alpha) = \infty,$$
   para todo $c \in (0, 1)$.