Formulación del problema de Programación Lineal

Se desea determinar los valores de las variables reales $x_1, x_2, \dots, x_n$, (*variables de decisión*), de forma que se minimice una función lineal (*función objetivo*) en un conjunto definido por un número finito de ecuaciones lineales (*restricciones*) y la condición de no negatividad de las variables de decisión. Es decir, se considera el problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Considerando la matriz *A* (*matriz de restricciones*),

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y los vectores *x* (*vector de variables de decisión*), *c* (*vector de costes*) y *b* (*vector de términos independientes*)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

el problema de programación lineal consiste en determinar el vector $x \in R^n$ tal que:

$$\begin{aligned} &\min \quad c^t x \\ &sujeto\ a: \quad Ax = b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

La anterior formulación del problema de programación lineal se denomina *forma estándar*.

Otras formulaciones del problema de programación lineal consideran la maximización de la función objetivo o restricciones definidas por inecuaciones lineales. La *forma canónica* de un problema de minimización es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\min \quad c^t x \\ &sujeto\ a: \quad Ax \geq b \\ &\qquad\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

y la *forma canónica* de un problema de maximización es la siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^t x \\ sujeto\ a: \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Realmente, el único requerimiento que impone el problema de programación lineal es la linealidad de la función objetivo y de las restricciones. El problema puede ser de maximización o de minimización, las restricciones pueden estar definidas por ecuaciones o inecuaciones (lineales) o las variables pueden ser negativas. Todo problema se puede transformar fácilmente en un problema equivalente en forma estándar.

Cuando la función objetivo deba ser maximizada, se puede plantear el problema de programación lineal como un problema de minimización cambiando los coeficientes de la función objetivo por sus valores opuestos, puesto que

$$\max_x f(x) = -\min_x -f(x) \, .$$

Una inecuación ($\leq$, $\geq$) se puede transformar en una ecuación añadiendo (sumando, restando) una variable no negativa adicional, que se denomina *variable de holgura*. Toda variable de holgura se incorpora a la formulación del problema con un coeficiente nulo en la función objetivo.

Cuando una variable de decisión no esté restringida a ser no negativa, se sustituye dicha variable por la diferencia de dos variables no negativas. Si x_j es la variable no restringida, se puede expresar como

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \qquad x_j^+ \geq 0, \; x_j^- \geq 0 \, .$$

Se considera el problema de programación lineal en forma estándar (P):

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ sujeto\ a: \quad & Ax = b \qquad\qquad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Un vector $x \in R^n$ verificando $Ax = b$, se dice que es una *solución de* (P). Si $x \in R^n$ es una solución de (P) y además $x \geq 0$, entonces se dice que x es una *solución factible de* (P). El conjunto de soluciones factibles de (P) se denota por

$$S = \{x \in R^n | \; Ax = b, \; x \geq 0\}.$$

Una *solución óptima* es una solución factible que minimiza la función objetivo. El objetivo de un problema de programación lineal es determinar una solución óptima. Para un problema (P), la solución óptima puede no ser única, puede no existir o incluso puede que no exista ninguna solución factible. Si el problema es factible ($S \neq \phi$) pero no existe solución óptima, se dice que el problema tiene *solución no acotada*.

Una propiedad fundamental del conjunto S es la de ser convexo.

Conjuntos convexos

Definición. Un conjunto $C \subseteq R^n$, $C \neq \phi$, es un *conjunto convexo* si, y sólo si,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in C \qquad \forall x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] .$$

La combinación lineal no negativa cuyos coeficientes suman 1 se denomina *combinación lineal convexa*. Por inducción, se demuestra que la combinación lineal convexa de k puntos de un convexo C pertenece a C, es decir, dados $x^1, \dots, x^k \in C$, para cualquier $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tal que $\lambda_j \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ y $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, se verifica:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, x^j \in C \, .$$

Si $\boldsymbol{F}$ es una familia de conjuntos convexos y la intersección de todos los conjuntos en $\boldsymbol{F}$ es no vacía, entonces dicha intersección es también un conjunto convexo. Por tanto, para todo $C \subseteq R^n$, $C \neq \phi$, existe el menor conjunto convexo, $\bar{C}$, conteniendo C. Más precisamente, para todo $C \subseteq R^n$, $C \neq \phi$, existe un conjunto convexo $\bar{C}$ conteniendo C y contenido en todo conjunto convexo conteniendo C. Sea $\boldsymbol{F}$ la familia de todos los conjuntos convexos conteniendo C y sea $\bar{C}$ la intersección de todos los conjuntos en $\boldsymbol{F}$. Trivialmente, $C \subseteq \bar{C}$ y $\bar{C} \subseteq G$ para todo $G \in \boldsymbol{F}$. Además, $\bar{C}$ es convexo por la observación anterior. El conjunto $\bar{C}$ se denomina la *envoltura convexa* de C (*Conv*(C)).

Es fácil establecer una caracterización más explícita de las envolturas convexas. Sea C un subconjunto arbitrario de R^n, $C \neq \phi$, se denota por $H(C)$ el conjunto de todos los puntos $z \in R^n$ tales que, para algún entero positivo k, algunos puntos $z^1, \dots, z^k \in C$ y algunos números reales positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, se tiene

$$z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, z^j \qquad \text{y} \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$$

es decir,

$$H(C) = \left\{ z \in R^n \,\middle|\, \exists\, z^1, \dots, z^k \in C, \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0 \ \text{ tales que } \ z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, z^j \ \text{ y } \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Teorema. *$H(C)$ es la envoltura convexa de C.*

Definición. Dado un conjunto convexo $C \subseteq R^n$, se dice que $x \in C$ es un *punto extremo* de C si, y sólo si, se verifica la siguiente propiedad:

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z, \quad y, z \in C, \quad 0 < \lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad y = z = x \, .$$

Definición. Dado un conjunto convexo $C \subseteq R^n$, un vector $d \in R^n$, $d \neq 0$, es una *dirección de C* si, y sólo si, se verifica la siguiente propiedad:

$$\forall x \in C, \quad \forall \mu \geq 0, \ \ x + \mu \, d \in C \, .$$

Dos direcciones de C, d^1 y d^2, son *equivalentes*, y se denota por $d^1 \simeq d^2$, cuando sean los vectores proporcionales con una constante positiva, es decir, $d^1 = \alpha \, d^2$, con $\alpha > 0$.

Definición. Dado un conjunto convexo $C \subseteq R^n$, una dirección $d \in R^n$, se dice que es una *dirección extrema de C* si, y sólo si, se verifica la siguiente propiedad:

$$d = \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2, \ \ \mu_1, \mu_2 > 0 \ \text{ y } \ d^1, d^2 \text{ direcciones de } C \quad \Rightarrow \quad d^1 \simeq d^2 \, .$$

Dado un problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{aligned} &\min \ \ c^t x \\ sujeto\ a: \quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

siendo el conjunto de soluciones factibles

$$S = \{x \in R^n | \ Ax = b, \ x \geq 0\}$$

se considera la matriz A de coeficientes de las restricciones (A matriz $m \times n$ con $rg(A)=m$) como un conjunto de n vectores del espacio vectorial R^m:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

donde

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \forall \ j \in \{1, \dots, n\}.$$

Por ser $rg(A)=m$, existe alguna submatriz cuadrada B, matriz $m \times m$, no singular. Dicha submatriz cuadrada se denomina *base*, por identificar un conjunto de m vectores linealmente independientes del espacio vectorial R^m.

Se denota por $B \subseteq A$, la selección de una base B formada por m columnas de la matriz A. Se determina así una partición de la matriz A:

$$A = (B, N)$$

siendo N una matriz $m \times (n-m)$.

Puesto que a cada una de las n columnas de la matriz A se asocia una componente del vector $x \in R^n$, cualquier subconjunto de columnas de la matriz A determina un subconjunto de componentes de x. Por consiguiente, al seleccionar una base $B \subseteq A$, la descomposición $A = (B, N)$ determina una partición del vector $x \in R^n$, de la forma:

$$x = \binom{x_B}{x_N}$$

donde las componentes de $x_B \in R^m$ se denominan *componentes básicas* y las componentes de $x_N \in R^{n-m}$ se denominan *componentes no básicas*.

El número de bases de la matriz A, es a lo sumo

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

A partir de la partición de las columnas de la matriz $A = (B, N)$, tiene sentido definir un tipo especial de soluciones para el problema de Programación Lineal.

Definición. Dado el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\min \ c^t x \\ sujeto\ a: \quad &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

se dice que $x \in R^n$ es una *solución básica* si, y sólo si, existe una base $B \subseteq A$, tal que

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si, además, se verifica que $B^{-1}b \geq 0$, entonces *x* es una solución factible que se denomina *solución básica factible*.

Teorema 1 (Caracterización de puntos extremos)**.**

Sea $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$*, donde A es una matriz m×n (m≤n) con rg(A)=m y b es un vector de dimensión m.* $\bar{x}$ *es un punto extremo de S si, y sólo si, A y* $\bar{x}$ *pueden expresarse de la forma* $A=(B,N)$ *y* $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$*, donde B es una matriz m×m con rg(B)=m, N es una matriz m×(n−m),* $\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ *y* $\bar{x}_N = 0$.

(Las soluciones básicas factibles de un problema de programación lineal son los puntos extremos del conjunto convexo *S* de sus soluciones factibles).

Teorema 2 (Existencia de puntos extremos)**.**

Sea $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$*, donde A es una matriz m×n con rg(A)=m y b es un vector de dimensión m. Si S≠∅, entonces S tiene al menos un punto extremo.*

Teorema 3. *Sea (P) un problema de programación lineal en forma estándar*

$$min\ \{c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

donde A es una matriz m×n con rg(A)=m y b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n. Si (P) tiene solución óptima, entonces existe algún punto extremo de su región factible que es solución óptima de (P).

Lema 4. *Sea* $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$*, donde A es una matriz m×n con rg(A)=m y b es un vector de dimensión m. d es una dirección de S si, y sólo si, Ad=0, d ≥0 y d≠0.*

Teorema 5 (Caracterización de direcciones extremas).

Sea $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$, *donde A es una matriz m×n con rg(A)=m<n y b es un vector de dimensión m.* $\overline{d}$ *es una dirección extrema de S si, y sólo si, A y* $\overline{d}$ *pueden expresarse de la forma A=(B,N) y* $\overline{d} = \alpha d$, *donde B es una matriz m×m con rg(B)=m, N es una matriz m×(n−m),* $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_t \end{pmatrix}$, $k = m + t$, a_k *es la t-ésima columna de la matriz N,* $B^{-1}a_k \leq 0$ *y* $e_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_t$).

Teorema (Teorema de Representación)

Sea S un poliedro no vacío en R^n, *de la forma* $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$, *donde A es una matriz m×n con rg(A)=m y b es un vector de dimensión m. Sean* $x^1,\ldots,x^k$, *los puntos extremos de S y sean* $d^1,\ldots,d^l$, *las direcciones extremas de S.* $x \in S$ *si, y sólo si, x puede expresarse de la siguiente forma*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d^j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad para\ i = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad para\ j = 1, \ldots, l\ .$$

Teorema 6. *Sea (P) el problema de programación lineal en forma estándar*

$$min\left\{c^t x \mid Ax = b,\, x \geq 0\right\}$$

donde A es una matriz m×n (m<n) con rg(A)=m, b es un vector de dimensión m, c es un vector de dimensión n y la región factible de (P) no está acotada. Sean $\bar{d}^1, \ldots, \bar{d}^l$, *las direcciones extremas de la región factible de (P). (P) tiene solución óptima, si y sólo si,* $c^t \overline{d}^j \geq 0 \quad \forall j \in \{1,\ldots,l\}$.

Teorema 7 (Teorema fundamental de la Programación Lineal)**.**

Sea (P) el problema de programación lineal en forma estándar

$$min\left\{ c^t x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$$

donde A es una matriz m×n con rg(A)=m, b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n.

i) Si el problema es factible, entonces existe al menos una solución básica factible.

ii) Si el problema tiene solución óptima, entonces tiene al menos una solución básica factible óptima.

iii) Si el problema no tiene solución óptima, entonces es infactible o es no acotado.

En los siguientes teoremas, se considera el problema (P) de programación lineal en forma estándar:

$$\min\left\{ c^t x \mid Ax = b,\, x \geq 0 \right\}$$

donde A es una matriz m×n con $rg(A)$=m, b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n.

Teorema 8. *Sea* $\bar{x}$ *una solución básica factible de (P) asociada a una base B.* $A = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$ *y* $\bar{c}_j := c_j - c_B^t B^{-1} a_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$*. Si* $\bar{c}_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$*, entonces* $\bar{x}$ *es una solución óptima de (P).*

<u>Nota</u>: Se define, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\bar{c}_j := c_j - c_B^t B^{-1} a_j$, denominándose $\bar{c}_j$ *coste reducido* de la variable x_j respecto de la base considerada.

Teorema 9. *Si (P) es factible y, respecto de alguna base B, asociada a una solución básica factible, existe* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $\bar{c}_k < 0$ *y* $B^{-1} a_k \leq 0$*, entonces* $c^t x$ *no está acotada inferiormente en la región factible de (P).*

Teorema 10. *Sea* $\bar{x}$ *una solución básica factible de (P) asociada a una base B.* $A = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$, $B = \left(a_1, \ldots, a_m\right)$, $Y_j = B^{-1} a_j$ *y* $\bar{c}_j := c_j - c_B^t B^{-1} a_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$*. Si existe* $k \in \{m+1, \ldots, n\}$, $k = m + t$, *tal que* $\bar{c}_k < 0$ *y alguna componente de* Y_k *es positiva, entonces el vector*

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} d^k \text{, donde } \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \middle| i \in \{1, \ldots, m\} \text{ con } y_{ik} > 0 \right\} \quad y \quad d^k = \begin{pmatrix} -Y_k \\ e_t \end{pmatrix},$$

es una solución básica factible tal que $c^t \bar{\bar{x}} \leq c^t \bar{x}$*. Además,* $c^t \bar{\bar{x}} < c^t \bar{x}$ *si, y sólo si,* $\bar{x}_l > 0$*.*

Teorema 1 (Caracterización de puntos extremos)**.**

Sea $S = \{x \in R^n |\ Ax = b,\ x \geq 0\}$, *donde* A *es una matriz* $m \times n$ $(m \leq n)$ *con* $rg(A) = m$ *y b es un vector de dimensión m.* $\bar{x}$ *es un punto extremo de S, si y sólo si, A y* $\bar{x}$ *pueden expresarse de la forma* $A = (B, N)$ *y* $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$, *donde B es una matriz* $m \times m$ *con* $rg(B) = m$, *N es una matriz* $m \times (n - m)$, $\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ y $\bar{x}_N = 0$.

Demostración.

"$\Leftarrow$"

Se supone que A y $\bar{x}$ pueden expresarse de la forma $A = (B, N)$ y $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix}$, donde B es una matriz $m \times m$ con $rg(B) = m$, N *es una matriz* $m \times (n - m)$,

$$\bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0 \quad \text{y} \quad \bar{x}_N = 0.$$

Obviamente $\bar{x} \in S$.

Suponiendo que $\bar{x} = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ donde $x^1, x^2 \in S$ y $0 < \lambda < 1$, se demuestra que $x^1 = x^2$.

Se considera la expresión de los vectores x^1 y x^2 correspondiente a la expresión de la matriz A. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_B^1 \\ x_N^1 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} x_B^2 \\ x_N^2 \end{pmatrix}$$

Por ser $\lambda > 0$, $1 - \lambda > 0$, $x_N^1 \geq 0$, $x_N^2 \geq 0$, se concluye que $x_N^1 = 0$ y $x_N^2 = 0$.

Además, como $x^1, x^2 \in S$, se verifica $Ax^1 = b$ y $Ax^2 = b$, luego $Bx_B^1 = b$ y $Bx_B^2 = b$, así pues,

$$x_B^1 = x_B^2 = B^{-1}b \qquad \text{y} \qquad x^1 = x^2.$$

Por tanto, $\bar{x}$ es un punto extremo de S.

"$\Rightarrow$"

Sea $\bar{x}$ un punto extremo de S. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\bar{x}$ puede expresarse en la forma

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x}_1 > 0, ..., \bar{x}_p > 0$ y $1 \leq p \leq n$ (si $p = 0$, debe ser $b = 0$ y, por tanto, $B^{-1}b = 0$ para toda base B, verificándose la implicación trivialmente).

Se demuestra, en primer lugar, que las columnas $a_1, \dots, a_p$ de la matriz A son vectores linealmente independientes.

En caso contrario, existirían números reales, no todos nulos, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in R$, tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j = 0.$$

Sea

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$$

Existe $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ tal que

$$x^1 = \bar{x} + \alpha\,\lambda \in S \quad \text{y} \quad x^2 = \bar{x} - \alpha\,\lambda \in S$$

eligiéndose α suficientemente pequeño para que se verifique $x^1 \geq 0$ y $x^2 \geq 0$. Por la elección de λ, se tiene $Ax^1 = b$ y $Ax^2 = b$ $(A\lambda = 0)$.

En consecuencia, $x^1, x^2 \in S$ y $x^1 \neq x^2$ $(\alpha > 0$ y $\lambda \neq 0)$. Además,

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\,x^1 + \frac{1}{2}x^2$$

llegando a una contradicción, por ser $\bar{x}$ un punto extremo de S.

Por consiguiente, los vectores $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes, luego $p \leq m$, y por ser $rg(A) = m$, en caso de ser $p < m$, existen $m - p$ columnas de la matriz A que, junto con las columnas $a_1, \dots, a_p$, forman un conjunto de m vectores linealmente independientes. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que dichas columnas son $a_{p+1}, \dots, a_m$.

Por tanto A puede expresarse en la forma $A=(B,N)$, donde $B = (a_1, \dots, a_m)$ y $rg(B) = m$.

Además, puesto que $A\bar{x} = b$, se tiene

$$(B, N)\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = b, \qquad B\bar{x}_B = b, \qquad \bar{x}_B = B^{-1}b \geq 0,$$

$$\text{y} \quad \bar{x}_N = 0.$$

□

Teorema 2 (Existencia de puntos extremos)**.**

Sea $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, *donde* A *es una matriz* $m \times n$ $(m \leq n)$ *con* $rg(A) = m$ *y* b *es un vector de dimensión* m. *Si* $S \neq \emptyset$, *entonces* S *tiene al menos un punto extremo.*

Demostración.

Sea $\bar{x} \in S$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\bar{x}$ puede expresarse en la forma

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x}_1 > 0, ..., \bar{x}_p > 0$ y $1 \leq p \leq n$ (si $p = 0$, $\bar{x} = 0$ es punto extremo).

Si las columnas $a_1, \dots, a_p$ de la matriz A son vectores linealmente independientes, por la demostración del teorema de caracterización de puntos extremos, se concluye que $\bar{x}$ es un punto extremo de S ($\bar{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ para alguna base B y, por tanto, $\bar{x}$ es un punto extremo).

En caso contrario, si $a_1, \dots, a_p$ son vectores linealmente dependientes, existen números reales, no todos nulos, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in R$, tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe $j \in \{1, \dots, p\}$ con $\lambda_j > 0$.

Sea

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$$

y sea l tal que

$$\frac{\bar{x}_l}{\lambda_l} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_j}{\lambda_j} \;\middle|\; j \in \{1, \dots, p\} \text{ con } \lambda_j > 0 \right\}.$$

Sea

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} - \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l}\,\lambda$$

es decir,

$$\bar{\bar{x}} = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_j = \bar{x}_j - \dfrac{\bar{x}_l}{\lambda_l}\,\lambda_j & \text{para todo } \; j \in \{1, \dots, p\} \\[2ex] 0 \qquad \text{para todo} & j \in \{p+1, \dots, n\} \end{cases}$$

Se verifica que $\bar{\bar{x}}_j \geq 0$, para todo $j \in \{1, \dots, p\}$, puesto que si $\lambda_j > 0$,

$$\bar{x}_j - \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l}\,\lambda_j \;\geq\; \bar{x}_j - \frac{\bar{x}_j}{\lambda_j}\,\lambda_j = 0$$

siendo $\bar{\bar{x}}_l = 0$. Si $\lambda_j \leq 0$,

$$\bar{x}_j - \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l}\,\lambda_j \;\geq\; \bar{x}_j \;\geq 0\,.$$

Además,

$$A\bar{\bar{x}} = \sum_{j=1}^{p} a_j\,\bar{\bar{x}}_j = \sum_{j=1}^{p} a_j \left(\bar{x}_j - \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l}\,\lambda_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} a_j\,\bar{x}_j - \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\,a_j = \sum_{j=1}^{p} a_j\,\bar{x}_j = b\,.$$

Por tanto, $\bar{\bar{x}} \in S$, teniendo a lo sumo $p-1$ componentes positivas ($\bar{\bar{x}}_l = 0$). Si las columnas de la matriz *A* asociadas a las componentes positivas de $\bar{\bar{x}}$ son linealmente independientes, $\bar{\bar{x}}$ es un punto extremo de *S*. En caso contrario, se repite el procedimiento anterior (se considera $\bar{x} := \bar{\bar{x}}$) hasta encontrar un vector cuyas componentes positivas se correspondan con un conjunto de columnas de la matriz *A* linealmente independientes.

□

Teorema 3. *Sea (P) un problema de programación lineal en forma estándar*

$$\min \{c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$$

donde A es una matriz $m \times n$ $(m \leq n)$ *con* $rg(A) = m$ *, b es un vector de dimensión* m *y c es un vector de dimensión n. Si (P) tiene solución óptima, entonces existe algún punto extremo de su región factible que es solución óptima de (P).*

Demostración.

Sea $\bar{x}$ solución óptima de (P). Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\bar{x}$ puede expresarse en la forma

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{x}_1 > 0, \ldots, \bar{x}_p > 0$ y $1 \leq p \leq n$ (si $p = 0$, $\bar{x} = 0$ es punto extremo).

Si las columnas $a_1, \ldots, a_p$ de la matriz A son vectores linealmente independientes, se concluye que $\bar{x}$ es un punto extremo de S.

En caso contrario, si $a_1, \ldots, a_p$ son vectores linealmente dependientes, existen números reales, no todos nulos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in R$, tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j = 0.$$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ con $\lambda_j > 0$.

Sea

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$$

Se pueden elegir números reales, suficientemente pequeños, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$, tales que

$$\bar{x}^1 = \bar{x} + \alpha_1 \lambda \geq 0 \quad \text{y} \quad \bar{x}^2 = \bar{x} - \alpha_2 \lambda \geq 0$$

Además, $\bar{x}^1 \in S$ y $\bar{x}^2 \in S$, puesto que

$$A\bar{x}^1 = A\bar{x} + \alpha_1 A\lambda = A\bar{x} = b \quad \text{y} \quad A\bar{x}^2 = A\bar{x} - \alpha_2 A\lambda = A\bar{x} = b$$

Por ser $\bar{x}$ solución óptima de (P), se verifica:

$$c^t\bar{x}^1 \geq c^t\bar{x} \qquad \text{y} \qquad c^t\bar{x}^2 \geq c^t\bar{x}$$

$$c^t\bar{x}^1 = c^t\bar{x} + \alpha_1\, c^t\lambda \;\geq c^t\bar{x} \qquad \Rightarrow \qquad c^t\lambda \;\geq 0$$

$$c^t\bar{x}^2 = c^t\bar{x} - \alpha_2\, c^t\lambda \;\geq c^t\bar{x} \qquad \Rightarrow \qquad c^t\lambda \;\leq 0$$

En consecuencia, $c^t\lambda \;= 0,$ y

$$c^t\bar{x}^1 = c^t\bar{x}^2 = c^t\bar{x}$$

Es decir, $\bar{x}^1$ y $\bar{x}^2$ son soluciones óptimas de (P).

Eligiendo α_2, de la misma forma que en la demostración anterior,

$$\alpha_2 = \frac{\bar{x}_l}{\lambda_l} = \min\; \left\{ \frac{\bar{x}_j}{\lambda_j} \;\middle|\; j\in\{1,\dots,p\} \text{ con } \lambda_j > 0 \right\}$$

se obtiene que el vector $\bar{x}^2$ es una solución óptima de (P) con a lo sumo $p-1$ componentes positivas. Si las columnas de la matriz A asociadas a las componentes positivas de $\bar{x}^2$ son linealmente independientes, $\bar{x}^2$ es un punto extremo de S. En caso contrario, se repite el procedimiento anterior (se considera $\bar{x} := \bar{x}^2$) hasta encontrar un vector cuyas componentes positivas se correspondan con un conjunto de columnas de la matriz A linealmente independientes.

□

Lema 4. *Sea* $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, *donde A es una matriz* $m \times n$ $(m \leq n)$ *con* $rg(A) = m$ *y b es un vector de dimensión m. d es una dirección de S, si y sólo si, Ad=0, d ≥0 y d≠0.*

Demostración.

"⇒" Por ser d una dirección de S, se verifica $d \neq 0$ y

$$x + \mu\, d \in S \quad \forall x \in S \ \ \forall \mu \geq 0$$

Por tanto, considerando $\mu > 0$,

$$A(x + \mu d) = b \ \Leftrightarrow \ Ax + \mu A d = b \ \Leftrightarrow \ b + \mu A d = b \ \Rightarrow \ Ad = 0$$

Además,

$$x + \mu d \geq 0 \quad \forall \mu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d \geq 0$$

"⇐" $\quad x \geq 0,\ d \geq 0,\ \mu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + \mu d \geq 0$

$$A(x + \mu d) = Ax + \mu A d = Ax + 0 = b$$

Por tanto,

$$x + \mu\, d \in S \quad \forall x \in S \ \ \forall \mu \geq 0$$

□

Teorema 5 (Caracterización de direcciones extremas)**.**

Sea $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$, *donde A es una matriz* $m \times n$ *con* $rg(A) = m < n$ *y b es un vector de dimensión m.* $\bar{d}$ *es una dirección extrema de S, si y sólo si, A y* $\bar{d}$ *pueden expresarse de la forma* $A = (B, N)$ *y* $\bar{d} = \alpha\, d$, *donde B es una matriz m×m con* $rg(B) = m$, *N es una matriz m×(n−m),* $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, $d = \begin{pmatrix} -B^{-1} a_k \\ e_t \end{pmatrix}$, $k = m + t$, a_k *es la t-ésima columna de la matriz N,* $B^{-1} a_k \leq 0$ *y*

$$e_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad t).$$

Demostración.

"$\Leftarrow$"

Por ser $B^{-1}a_k \leq 0$, $d = \begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_t \end{pmatrix} \geq 0$. Además,

$$Ad = (B,\ N)\begin{pmatrix} -B^{-1}a_k \\ e_t \end{pmatrix} = -a_k + a_k = 0$$

Luego, por el lema anterior, *d* es una dirección de *S*.

A continuación se demuestra que d es una dirección extrema de *S*. Se supone que

$$d = \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2$$

siendo d^1 y d^2 direcciones de *S*, $\mu_1 > 0$ y $\mu_2 > 0$. Se demuestra a continuación que d^1 y d^2 son direcciones equivalentes.

Puesto que de las *n* componentes de *d*, $n - m - 1$ componentes son nulas y

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad d^1 \geq 0, \quad d^2 \geq 0,$$

las correspondientes componentes de d^1 y d^2 también son nulas. Por tanto, existen $\alpha_1 \in R$, $\alpha_2 \in R$, $d_B^1 \epsilon R^m$, $d_B^2 \epsilon R^m$, tales que

$$d^1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} d_B^1 \\ e_t \end{pmatrix} \qquad d^2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} d_B^2 \\ e_t \end{pmatrix}$$

Por el lema anterior, $Ad^1 = 0$ y $Ad^2 = 0$, por tanto

$$Bd_B^1 + a_k = 0 \quad y \quad Bd_B^2 + a_k = 0\,.$$

En consecuencia,

$$d_B^1 = d_B^2 = -B^{-1}a_k$$

las direcciones d^1 y d^2 son direcciones equivalentes.

Por tanto, *d* es una dirección extrema de *S* y $\bar{d} = \alpha\, d$ (α>0) también es dirección extrema de *S*.

"$\Rightarrow$"

Sea $\bar{d}$ una dirección extrema de *S*. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\bar{d}$ puede expresarse en la forma

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \vdots \\ \bar{d}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{d}_{m+t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\bar{d}_1 > 0, ..., \bar{d}_p > 0, \overline{d}_{m+t} > 0$ y $p \geq 1$ (si $p = 0$, debe ser $\overline{d}_{m+t} a_k = 0$ y, por tanto, $a_k = 0$, luego para toda base *B*, se verifica la implicación trivialmente).

Se demuestra, en primer lugar, que las columnas $a_1, \dots, a_p$ de la matriz *A* son vectores linealmente independientes.

En caso contrario, existirían números reales, no todos nulos, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in R$, tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j = 0.$$

Sea

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$$

Sea $\delta \in R$, $\delta > 0$ y sean

$$d^1 = \bar{d} + \delta\lambda \quad \text{y} \quad d^2 = \bar{d} - \delta\lambda$$

eligiéndose δ suficientemente pequeño para que se verifique $d^1 \geq 0$ y $d^2 \geq 0$.

Por la elección de λ, se tiene $Ad^1 = 0$ y $Ad^2 = 0$ $(A\lambda = 0)$.

En consecuencia, d^1y d^2 son direcciones de S. $d^1 \neq d^2$ $(\delta > 0$ y $\lambda \neq 0)$ y además, d^1 y d^2 tienen la misma componente *k*-ésima ($\overline{d}_{m+t}$). Luego d^1 y d^2 no son equivalentes.

Puesto que

$$\bar{d} = \frac{1}{2}\, d^1 + \frac{1}{2} d^2$$

se llega a una contradicción, por ser $\bar{d}$ dirección extrema de S.

Por consiguiente, los vectores $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes, luego $p \leq m$.

Por ser $rg(A) = m$, en caso de ser $p < m$, existen $m - p$ columnas de la matriz *A* que, junto con las columnas $a_1, \dots, a_p$, forman un conjunto de *m* vectores linealmente independientes.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que dichas columnas son $a_{p+1}, \dots, a_m$.

Por tanto *A* puede expresarse en la forma $A = (B, N)$, donde $B = (a_1, \dots, a_m)$ y $rg(B) = m$.

Además, puesto que $A\bar{d} = 0$, se tiene

$$(B,\ N)\begin{pmatrix} \bar{d}_B \\ \bar{d}_N \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B\bar{d}_B + \bar{d}_k a_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{d}_B = -\bar{d}_k B^{-1} a_k$$

Por tanto,

$$\bar{d} = \alpha\, d, \quad d = \begin{pmatrix} -B^{-1} a_k \\ e_t \end{pmatrix} \qquad \alpha = \bar{d}_k$$

□

Teorema (Teorema de Representación)

Sea S un poliedro no vacío en R^n, *de la forma* $S = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ \ x \geq 0\}$, *donde A es una matriz* $m \times n$ *con* $rg(A) = m$ *y b es un vector de dimensión m. Sean* $x^1, \ldots, x^k$, *los puntos extremos de S y sean* $d^1, \ldots, d^l$, *las direcciones extremas de S.* $x \in S$, *si y sólo si, x puede expresarse de la siguiente forma*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, d^j$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad para\ i = 1, \ldots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad para\ j = 1, \ldots, l\ .$$

Teorema 6. *Sea (P) el problema de programación lineal en forma estándar*

$$min\ \ \{c^t x \mid Ax = b,\ \ x \geq 0\}$$

donde A es una matriz $m \times n$ $(m < n)$ *con* $rg(A) = m$, *b es un vector de dimensión m, c es un vector de dimensión n y la región factible de (P) no está acotada. Sean* $\bar{d}^1, \ldots, \bar{d}^l$, *las direcciones extremas de la región factible de (P). (P) tiene solución óptima, si y sólo si,* $c^t \bar{d}^j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, l\}$.

Demostración.

"$\Rightarrow$"

Se supone que existe algún $r \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $c^t \bar{d}^r < 0$. Sean $x^1, \ldots, x^k$, los puntos extremos de S. Se consideran $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\lambda_i \geq 0\ \ para\ i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\mu_j = 0\ \ para\ \ j = 1, \ldots, l,\ \ j \neq r$ y $\mu_r > 0$.

Sea

$$x(\mu_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, x^i + \mu_r d^r$$

Se tiene

$$c^t x(\mu_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c^t x^i + \mu_r c^t d^r$$

de forma que si $c^t \bar{d}^r < 0$,

$$\mu_r c^t d^r \xrightarrow[\mu_r \to \infty]{} -\infty$$

Por lo que el problema tiene solución no acotada.

"$\Leftarrow$"

Se supone que $c^t \bar{d}^j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}$.

Para todo $x \in S$ se tiene

$$c^t x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c^t x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, c^t d^j$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad para \;\; i = 1, \dots, k$$

$$\mu_j \geq 0 \quad para \;\; j = 1, \dots, l$$

Si $c^t \bar{d}^j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, l\}$, se tiene

$$c^t x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c^t x^i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j\, c^t d^j \geq$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c^t x^i \;\; \geq \;\; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, c^t x^s \;\; = \;\; c^t x^s$$

siendo

$$c^t x^s = \min\left\{ c^t x^i \;\middle|\; i \in \{1, \dots, k\} \right\}$$

Por tanto, x^s es solución óptima de (P).

□

Teorema 7 (Teorema fundamental de la Programación Lineal)**.**

Sea (P) el problema de programación lineal en forma estándar

$$min \ \ \left\{ c^t x \,\middle|\, Ax = b, \ \ x \geq 0 \right\}$$

donde *A es una matriz* $m \times n$ *con* $rg(A) = m$, *b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n.*

i) Si el problema es factible, entonces existe al menos una solución básica factible.

ii) Si el problema tiene solución óptima, entonces tiene al menos una solución básica factible óptima.

iii) Si el problema no tiene solución óptima, entonces es infactible o tiene solución no acotada.

Demostración.

i) Se sigue del teorema **2** y del teorema **1**.
ii) Se sigue del teorema **3** y del teorema **1**.
iii) Se sigue de la demostración del teorema **6**.

□

En los siguientes teoremas, se considera el problema (P) de programación lineal en forma estándar:

$$min \ \ \{c^t x \mid Ax = b, \ x \geq 0\}$$

donde A es una matriz $m \times n$ con $rg(A) = m$, b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n.

Nota: Se define, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\bar{c_j} := c_j - c_B^t B^{-1} a_j$$

denominándose $\bar{c_j}$ el *coste reducido* de la variable x_j respecto de la base considerada.

Teorema 8. *Sea $\bar{x}$ una solución básica factible de (P) asociada a una base B.* $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_1, \dots \mathrm{a}_\mathrm{n})$ *y*

$$\bar{c_j} := c_j - c_B^t B^{-1} a_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Si $\bar{c}_j \geq 0 \ \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$, *entonces $\bar{x}$ es una solución óptima de (P).*

Demostración.

Se considera la partición de la matriz A, $A = (B, N)$ determinada por la base B. Sea

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ una solución factible arbitraria.

El sistema de ecuaciones $Ax = b$ es equivalente a

$$Bx_B + Nx_N = b \quad \Leftrightarrow \quad Bx_B = b - Nx_N \quad \Leftrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

de donde se sigue

$$c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N = c_B^t (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^t x_N =$$

$$c_B^t B^{-1} b \ + \ (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N$$

Por lo tanto, para toda solución factible x, si $\bar{c}_j \geq 0 \ \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene

$$c^t x = c_B^t B^{-1} b \ + \ (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N = c^t \bar{x} + \ (c_N^t - c_B^t B^{-1} N) x_N \geq c^t \bar{x}$$

Por tanto $\bar{x}$ es solución óptima de (P).

□

Observación: Los costes reducidos de las variables básicas son nulos

$$c_B^t - c_B^t B^{-1} B = 0.$$

Teorema 9. *Si (P) es factible y, respecto de alguna base B, asociada a una solución básica factible, existe* $k \in \{1, \dots, n\}$ *tal que* $\bar{c}_k < 0$ *y* $B^{-1} a_k \leq 0$ *, entonces* $c^t x$ *no está acotada inferiormente en la región factible de (P).*

Demostración.

Se consideran las soluciones factibles de (P) tales que todas las variables no básicas (respecto de la base B) son nulas, excepto la variable k-ésima.

Suponiendo $A = (a_1, \dots a_n)$, $B = (a_1, \dots a_m)$, $k \in \{m+1, \dots, n\}$, dichas soluciones son de la forma

$$Bx_B + a_k x_k = b \quad \Leftrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k \quad \Leftrightarrow \quad x_B = B^{-1}b - Y_k x_k$$

Es decir

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y_k \\ e_t \end{pmatrix} x_k$$

($e_t \in R^{n-m}$).

Por ser $Y_k \leq 0$, se verifica $x_B \geq 0$.

El valor de la función objetivo

$$c^t x = c_B^t x_B + c_k x_k = c_B^t (B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k) + c_k x_k =$$

$$c_B^t B^{-1} b \; + \; (c_k - c_B^t B^{-1} a_k) x_k = c_B^t B^{-1} b \; + \; \bar{c}_k x_k$$

(por ser $\bar{c}_k < 0$) se puede hacer arbitrariamente pequeño aumentando el valor de x_k .

□

Teorema 10. *Sea* $\bar{x}$ *una solución básica factible de (P) asociada a una base B.* $A = (a_1, \dots a_n)$, $B = (a_1, \dots a_m)$, $Y_j := B^{-1} a_j$ *y* $\bar{c}_j := c_j - c_B^t B^{-1} a_j$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. *Si existe* $k \in \{m+1, \dots, n\}$, $k = m + t$, *tal que* $\bar{c}_k < 0$ *y alguna componente de* Y_k *es positiva, entonces el vector*

$$\bar{\bar{x}} := \bar{x} + \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} d^k$$

donde

$$\frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} = min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, i \in \{1, \dots, m\} \; con \; y_{ik} > 0 \right\} \quad y \quad d^k = \begin{pmatrix} -Y_k \\ e_t \end{pmatrix}$$

es una solución básica factible tal que $c^t\bar{\bar{x}} \leq c^t\bar{x}$. *Además,* $c^t\bar{\bar{x}} < c^t\bar{x}$, *si y sólo si,* $\bar{x}_l > 0$.

Demostración.

Por ser $\bar{c}_k < 0$, se puede intentar disminuir el valor de la función objetivo aumentando el valor de la variable x_k y manteniendo nulos los valores de las restantes variables no básicas. A continuación se identifica el máximo valor que puede tomar x_k .

Por considerar nulos los valores de las variables no básicas exceptuando x_k , se tiene

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_k x_k = B^{-1}b - Y_k x_k = \bar{x}_B - Y_k x_k$$

Por hipótesis, al menos existe una componente del vector Y_k mayor que cero. Para garantizar que la nueva solución considerada sea factible, se debe verificar

$$\bar{x}_i - y_{ik}x_k \geq 0 \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } y_{ik} > 0 \, .$$

Por tanto,

$$x_k \leq \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \qquad \text{para todo } i \in \{1, \dots, m\} \text{ tal que } y_{ik} > 0 \, .$$

Se determina

$$\frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} = min\left\{\frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, i \in \{1, \dots, m\} \;\; con \; y_{ik} > 0\right\}$$

asignando a x_k el valor anterior,

$$\bar{\bar{x}}_k := \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}}$$

El nuevo valor de x_k identifica una nueva solución factible:

$$\bar{\bar{x}} := \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y_k \\ e_t \end{pmatrix} \bar{\bar{x}}_k$$

En esta nueva solución $\bar{\bar{x}}_l = 0$. El valor de la función objetivo en la nueva solución factible es

$$\bar{\bar{z}} = c^t\bar{\bar{x}} = c^t\bar{x} + \bar{c}_k\bar{\bar{x}}_k \leq c^t\bar{x} = \bar{z}$$

La desigualdad es estricta, si $\bar{\bar{x}}_k > 0$. Si $\bar{\bar{x}}_k = 0$, entonces $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$, siendo ambas soluciones básicas factibles idénticas aunque están asociadas a bases diferentes.
Puesto que

$$a_k = y_{1k}a_1 + \cdots + y_{lk}a_l + \cdots + y_{mk}a_m$$

por ser $y_{lk} \neq 0$, $\bar{B} = (a_1, \dots, a_{l-1}, a_k, a_{l+1}, \dots, a_m)$ es una base de *A*. Las componentes no básicas de $\bar{\bar{x}}$, respecto de la nueva base, son nulas. Por tanto, $\bar{\bar{x}}$ es solución básica factible asociada a la nueva base $\bar{B}$. □