Investigación Operativa

Hoja 1

Problema 1

Una empresa dedicada a la construcción de estructuras de edificios, tiene patentes de tres tipos de forjados F_1, F_2, F_3. Los beneficios que consigue por metros cuadrado de forjado construido son 100, 90 y 120 unidades monetarias respectivamente. Por razones de almacenamiento y financiación, diariamente sólo se dispone de dos toneladas de acero, 200 metros cúbicos de hormigón y 8 metros cúbicos de madera para encofrado. Las cantidades de acero, hormigón y madera que se necesitan en cada uno de los forjados son las siguientes:

Tipo de Forjado	Materia Prima	Cantidad
F_1	Acero	0.2 Kg/m^2 de forjado
	Hormigón	83 dm^3/m^2 de forjado
	Madera	0.001 m^3/m^2 de forjado
F_2	Acero	0.25 Kg/m^2 de forjado
	Hormigón	37.5 dm^3/m^2 de forjado
	Madera	0.00125 m^3/m^2 de forjado
F_3	Acero	0.225 Kg/m^2 de forjado
	Hormigón	35 dm^3/m^2 de forjado
	Madera	0.0015 m^3/m^2 de forjado

Plantear el correspondiente problema de programación lineal, para determinar los m^2 de forjado de cada tipo, que se deben construir para maximizar la ganancia.

Solución

Se denota por x_j el número de m^2 de forjado del tipo j que se deben construir diariamente ($j = 1,2,3$).

Se debe resolver el siguiente problema:

$$\max \quad z = 100\,x_1 + 90\,x_2 + 120x_3$$

sujeto a:

$$0.2\,x_1 + 0.25\,x_2 + 0.225\,x_3 \leq 2000$$

$$83\,x_1 + 37.5\,x_2 + 35x_3 \leq 200000$$

$$x_1 + 1.25\,x_2 + 1.5\,x_3 \leq 8000$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0$$

Solución óptima:

$$z^* = \frac{115360000}{179} = 6444469{,}300$$

$$x_1^* = \frac{40000}{179} = 223{,}464 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = \frac{928000}{179} = 5184{,}357$$

$$x_4^* = \frac{141200}{179} = 788{,}827 \qquad x_5^* = 0 \qquad x_6^* = 0$$

Siendo x_4, x_5 y x_6 las variables de holgura.

Problema 2

Una empresa tiene dos plantas de producción A y B, y en cada una de ellas se elaboran tres productos P_1, P_2, P_3. La compañía estima que la demanda del producto P_1 para el próximo mes sea de 1800 unidades, la de P_2 de 2200 unidades y la de P_3 de 1600 unidades. La capacidad de producción de la planta A es de 3000 unidades mensuales y la de B es de 6000 unidades.
La materia prima requerida por cada uno de los tres productos en las dos plantas, viene dada en la tabla siguiente:

Planta	Producto	Unidades de materia prima
	P_1	3.2
A	P_2	4.4
	P_3	1.8
	P_1	3.6
B	P_2	4.0
	P_3	4.8

Además, la materia prima disponible en la planta A es de 6400 unidades y en la planta B es de 6000.
Los costes estimados de los distintos productos en las dos plantas son los siguientes:

Planta	Producto	Coste de producción
	P_1	28.3
A	P_2	14
	P_3	14
	P_1	29
B	P_2	13.5
	P_3	13.2

Formular el correspondiente problema de programación lineal, que permita determinar el número de unidades de cada producto que se debe fabricar tanto en A como en B para, satisfacer la demanda, verificando las restricciones de materia prima disponible y capacidad de producción, de forma que se minimicen los costes.

Solución

Se denota por x_{Aj} el número de unidades del producto j que se deben fabricar en la planta A mensualmente ($j = 1,2,3$).

Se denota por x_{Bj} el número de unidades del producto j que se deben fabricar en la planta B mensualmente ($j = 1,2,3$).

Se debe resolver el siguiente problema:

$$\min \quad z = 28.3\, x_{A1} + 14\, x_{A2} + 14 x_{A3} + 29\, x_{B1} + 13.5\, x_{B2} + 13.2\, x_{B3}$$

sujeto a:

$$x_{A1} + x_{B1} \geq 1800$$

$$x_{A2} + x_{B2} \geq 2200$$

$$x_{A3} + x_{B3} \geq 1600$$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 3000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 6000$$

$$3.2\, x_{A1} + 4.4\, x_{A2} + 1.8\, x_{A3} \leq 6400$$

$$3.6\, x_{B1} + 4.0\, x_{B2} + 4.8\, x_{B3} \leq 6000$$

$$x_{A1} \geq 0,\;\; x_{A2} \geq 0,\;\; x_{A3} \geq 0,\;\; x_{B1} \geq 0,\;\; x_{B2} \geq 0,\;\; x_{B3} \geq 0 \quad \text{y } \textbf{enteros}$$

De las restricciones anteriores se sigue:

$$3.2\,(x_{A1} + x_{B1}) + 4.0\,(x_{A2} + x_{B2}) + 1.8\,(x_{A3} + x_{B3}) \leq$$

$$3.2\, x_{A1} + 4.4\, x_{A2} + 1.8\, x_{A3} + 3.6\, x_{B1} + 4.0\, x_{B2} + 4.8\, x_{B3} \leq 12400$$

$$3.2\,(x_{A1} + x_{B1}) + 4.0\,(x_{A2} + x_{B2}) + 1.8\,(x_{A3} + x_{B3}) \geq$$

$$3.2\,(1800) + 4.0\,(2200) + 1.8\,(1600) = 17440$$

Por lo tanto, el problema es **infactible**.

Problema 3

Una empresa ha decidido contratar trabajadores temporales durante las vacaciones de verano que comprenden los meses de junio, julio, agosto y septiembre. Los sindicatos solo permiten trabajadores temporales durante dichos meses y obligan a contratos de 1, 2 o 3 meses. El número de trabajadores que se necesitan de junio a septiembre son respectivamente 90, 140, 130, 80. La empresa consigue trabajadores temporales mediante una empresa de colocación. La siguiente tabla proporciona las cantidades facturadas por la empresa de colocación en cada mes por contratos de 1, 2 o 3 meses.

Mes	Contrato 1 mes	Contrato 2 meses	Contrato 3 meses
Junio	80	70	90
Julio	50	90	60
Agosto	100	80	-
Septiembre	60	-	-

Formular el problema que debe resolverse, para encontrar el plan de contratación adecuado, de forma que se minimice la cantidad a pagar a la empresa de colocación.

Solución

Se denota por x_j el número de trabajadores que se deben contratar en el mes de junio con contrato de j meses $(j = 1, 2, 3)$.

Se denota por x_{3+j} el número de trabajadores que se deben contratar en el mes de julio con contrato de j meses $(j = 1, 2, 3)$.

Se denota por x_{6+j} el número de trabajadores que se deben contratar en el mes de junio con contrato de j meses $(j = 1, 2)$.

Se denota por x_9 el número de trabajadores que se deben contratar en el mes de septiembre con contrato de 1 mes.

Se debe resolver el siguiente problema:

$$\min \quad z = 80\, x_1 + 70\, x_2 + 90 x_3 + 50\, x_4 + 90\, x_5 + 60\, x_6 + 100\, x_7 + 80\, x_8 + 60\, x_9$$

sujeto a:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \geq 90 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 140 \\ x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 130 \\ x_6 + x_8 + x_9 \geq 80 \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ y **enteros**

Solución óptima:

$$z^* = 12100$$

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 40, \quad x_3^* = 50, \quad x_4^* = 0, \quad x_5^* = 0, \quad x_6^* = 80$$

$$x_7^* = 0, \quad x_8^* = 0, \quad x_9^* = 0, \quad x_{10}^* = 0, \quad x_{11}^* = 30, \quad x_{12}^* = 0, \quad x_{13}^* = 0$$

Siendo x_{10}, x_{11}, x_{12} y x_{13} las variables de holgura.