Ejercicio 5.- Sea $(X_1 - X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Construir un intervalo de confianza de longitud mínima al nivel de confianza $1-\alpha$ para la media poblacional.

Como $X \sim Exp(\theta) = Gamma(\theta, 1) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\theta}$.

Vamos a construir una cantidad pivotal.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\theta, n) \quad y \quad 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2n}{2}\right) = \chi^2_{2n}$$

Así, $P\{a \leq 2\theta n \bar{X} \leq b\} = 1-\alpha$

$$a \leq 2\theta n \bar{X} \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{2\theta n \bar{X}} \geq \frac{1}{b} \iff$$

$$\iff \frac{2n\bar{X}}{b} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{2n\bar{X}}{a}$$

Como nos piden que la longitud del intervalo sea mínima, hay que minimizar la función $L(a,b) = \frac{2n\bar{X}}{a} - \frac{2n\bar{X}}{b}$ con la restricción $g(a,b) = 0$ siendo $g(a,b) = F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) - 1 + \alpha$ ya que la condición $g(a,b) = 0$ equivale a $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1-\alpha$.

$$L(a,b) = 2n\bar{X}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\nabla L(a,b) = \left(-\frac{2n\bar{X}}{a^2}, \frac{2n\bar{X}}{b^2}\right) \quad y \quad \nabla g(a,b) = \left(-f_{\chi^2_{2n}}(a), f_{\chi^2_{2n}}(b)\right)$$

que es linealmente independiente.

Podemos aplicar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange

$$\Rightarrow \nabla L(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$$