Estadística. Grupo m3

Hoja 3. Estimadores ECUMV y eficientes

Mayte Rodríguez

Ejercicio 5

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $X \sim B(1, \theta)$ para $\theta \in (0, 1)$. Encontrar el ECUMV para estimar θ y $\theta(1-\theta)$.

El estadístico $W = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es suficiente y completo.

El estadístico $T = \frac{1}{n} W = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \bar{X}$ es insesgado para $Z(\theta) = \theta$ ya que $E(\bar{X}) = E(X) = \theta$.

Como T es insesgado y función de un estadístico suficiente y completo, por el teorema de Lehmann-Scheffe, T es el ECUMV para $Z(\theta) = \theta$.

Ejercicio 5

Si queremos estimar $Z(\theta) = \theta(1-\theta)$ utilizamos el estadístico $T_1 = X_1(1-X_2)$, que es un estimador insesgado porque $E(T_1) = E(X_1)(1-E(X_2)) = \theta(1-\theta)$.
Entonces, por el teorema de Lehmann-Scheffe, $\phi = E(T_1|W)$ es el ECUMV para $Z(\theta) = \theta(1-\theta)$.

Los posibles valores de T_1 son

$$T_1 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X_1 = 1 \ \text{ y } \ X_2 = 0 \\ 0 & \text{si} \quad X_1 = 0 \ \text{ o } \ X_2 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 5

Entonces

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= E(T_1|W=t) = P(T_1=1|W=t) = \frac{P(W=t|T_1=1)P(T_1=1)}{P(W=t)} \\
&= \frac{P\left(\sum_{j=3}^{n} X_j = t-1 | X_1=1, X_2=0\right)\theta(1-\theta)}{P(W=t)} \\
&= \frac{\binom{n-2}{t-1}\theta^{t-1}(1-\theta)^{n-2-(t-1)}\theta(1-\theta)}{\binom{n}{t}\theta^t(1-\theta)^{n-t}} = \frac{\binom{n-2}{t-1}}{\binom{n}{t}} = \frac{t(n-t)}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

si $1 \leq t \leq n-1$. Además $\phi(t) = 0$ si $t = 0, n$.

Por tanto

$$\phi = \begin{cases} \frac{W(n-W)}{n(n-1)} & \text{si} \quad W = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{si} \quad W = 0, n \end{cases}$$

es el ECUMV para estimar $Z(\theta) = \theta(1-\theta)$.

Ejercicio 6 a

Encontrar la cota de Frechet-Cramer-Rao y el estimador eficiente (si existe) en los siguientes casos:

a) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la densidad $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$ si $x > 0$ y $\theta > 0, (Exp(\frac{1}{\theta}))$ para estimar $Z(\theta) = \theta$.

T es eficiente para $Z(\theta)$ sí y sólo sí

$$T = Z(\theta) + \frac{Z'(\theta)}{I_n(\theta)} l'(\theta)$$

no depende de θ, donde $I_n(\theta)$ es la cantidad de información de Fisher de la muestra y $l(\theta)$ es la función soporte.

Ejercicio 6 a

La cantidad de información de Fisher es

$$
\begin{aligned}
I_n(\theta) &= nI(\theta) = nE\left(\left(\frac{d\ln f_\theta(X)}{d\theta}\right)^2\right) = nE\left(\left(\frac{d(-X/\theta - \ln\theta)}{d\theta}\right)^2\right) \\
&= nE\left(\left(\frac{X}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)^2\right) = \frac{n}{\theta^4}E((X-\theta)^2) = \frac{n}{\theta^4}V(X) \\
&= \frac{n}{\theta^4}\theta^2 = \frac{n}{\theta^2}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6 a

$$
\begin{aligned}
T &= \theta + \frac{\theta^2}{n}\frac{d\ln f_\theta(x_1,\ldots,x_n)}{d\theta} = \theta + \frac{\theta^2}{n}\frac{d}{d\theta}\left(-n\ln\theta - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta}\right) \\
&= \theta + \frac{\theta^2}{n}\left(-\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\theta^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}.
\end{aligned}
$$

Entonces $T = \bar{X}$ es eficiente para $Z(\theta) = \theta$ y su varianza alcanza la cota de Frechet-Cramer-Rao, $V(T) = \frac{(Z'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}$.

Ejercicio 6 a

Alternativamente, el modelo pertenece a la familia exponencial

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{j=1}^{n} x_j\right\}$$

con $c(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$, $h(x_1, \ldots, x_n) = 1$, $q(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ y $T_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$.

Entonces, T_1 es eficiente para $Z_1(\theta) = -\frac{c'(\theta)}{c(\theta)q'(\theta)} = -\frac{-n/\theta^{n+1}}{\frac{1}{\theta^n}\frac{1}{\theta^2}} = n\theta$.

Por tanto, $T = \bar{X}$ es eficiente para $Z(\theta) = \theta$.

Ejercicio 6 b

b) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la densidad $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x$ si $x = 0, 1, \ldots$ y $0 < \theta < 1$, para estimar $Z(\theta) = \theta$.

La cantidad de información de Fisher es

$$
\begin{aligned}
I_n(\theta) &= nI(\theta) = -nE\left(\frac{d^2 \ln f_\theta(X)}{d\theta^2}\right) = -nE\left(\frac{d^2(\ln\theta + X\ln(1-\theta))}{d\theta^2}\right) \\
&= -nE\left(\frac{d(1/\theta - X/(1-\theta))}{d\theta}\right) = -nE\left(-\frac{1}{\theta^2} - \frac{X}{(1-\theta)^2}\right) \\
&= \frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{(1-\theta)^2}\frac{1-\theta}{\theta} = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6 b

$$
\begin{aligned}
T &= \theta + \frac{\theta^2(1-\theta)}{n} \frac{d \ln f_\theta(x_1, \ldots, x_n)}{d\theta} \\
&= \theta + \frac{\theta^2(1-\theta)}{n} \frac{d}{d\theta} \left(n \ln \theta + \sum_{j=1}^{n} x_j \ln(1-\theta) \right) \\
&= \theta + \frac{\theta^2(1-\theta)}{n} \left(\frac{n}{\theta} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{(1-\theta)} \right) = 2\theta - \theta^2(1+\bar{x}),
\end{aligned}
$$

que depende de θ. Por tanto, no hay estimador eficiente para $Z(\theta) = \theta$.

Ejercicio 6 b

Vamos a comprobar si hay algún estimador eficiente para otro $Z(\theta)$

$$
\begin{aligned}
T &= Z(\theta) + \frac{Z'(\theta)}{I_n(\theta)} l'(\theta) \\
l'(\theta) &= \frac{I_n(\theta)}{Z'(\theta)} (T - Z(\theta))
\end{aligned}
$$

$$
l'(\theta) = \frac{d \ln f_\theta(x_1, \ldots, x_n)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{n\bar{x}}{(1-\theta)} = -\frac{n}{(1-\theta)} \left(\bar{x} - \frac{(1-\theta)}{\theta} \right),
$$

Ejercicio 6 b

Entonces, $T = \bar{X}$ es eficiente para $Z(\theta) = \frac{(1-\theta)}{\theta}$. Además,

$$\frac{I_n(\theta)}{Z'(\theta)} = -\frac{n}{(1-\theta)}$$

es decir

$$I_n(\theta) = -Z'(\theta)\frac{n}{(1-\theta)} = \frac{1}{\theta^2}\frac{n}{(1-\theta)} = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)}.$$

La varianza del estimador alcanza la cota de Frechet-Cramer-Rao

$$V(T) = \frac{(Z'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{1/\theta^4}{n/(\theta^2(1-\theta))} = \frac{(1-\theta)}{n\theta^2}.$$

Ejercicio 6 b

Alternativamente, el modelo pertenece a la familia exponencial

$$f_\theta(x_1,\ldots,x_n) = \theta^n \exp\left\{\ln(1-\theta)\sum_{j=1}^{n} x_j\right\}$$

con $c(\theta)=\theta^n$, $h(x_1,\ldots,x_n)=1$, $q(\theta)=\ln(1-\theta)$ y $T_1(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n} x_j$.

Entonces, T_1 es eficiente para $Z_1(\theta) = -\frac{c'(\theta)}{c(\theta)q'(\theta)} = -\frac{n\theta^{n-1}}{\theta^n\frac{-1}{1-\theta}} = n\frac{1-\theta}{\theta}$.

Por tanto, $T=\bar{X}$ es eficiente para $Z(\theta)=\frac{1-\theta}{\theta}$.

Ejercicio 6 c

c) $(X_1, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la densidad $N(0, \sigma^2)$, para estimar σ (lo mismo para estimar σ^2)

Vamos a comprobar si hay algún estimador eficiente

$$l'(\sigma) = \frac{I_n(\sigma)}{Z'(\sigma)}(T - Z(\sigma)),$$

$$\begin{aligned} l'(\sigma) &= \frac{d \ln f_\sigma(x_1, \dots, x_n)}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\left(-n \ln \sigma - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\sigma^3} = \frac{n}{\sigma^3}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sigma^2\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 6 c

Entonces $T = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$ es eficiente para estimar $Z(\sigma) = \sigma^2$. Además,

$$\frac{I_n(\sigma)}{Z'(\sigma)} = \frac{n}{\sigma^3}$$

y entonces

$$I_n(\sigma) = Z'(\sigma)\frac{n}{\sigma^3} = 2\sigma\frac{n}{\sigma^3} = \frac{2n}{\sigma^2}.$$

La varianza del estimador alcanza la cota de Frechet-Cramer-Rao

$$V(T) = \frac{(Z'(\sigma))^2}{I_n(\sigma)} = \frac{4\sigma^2}{2n/\sigma^2} = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Ejercicio 6 c

Alternativamente, el modelo pertenece a la familia exponencial

$$f_\sigma(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^n x_j^2\right\}$$

con $c(\sigma) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n$, $h(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$, $q(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma^2}$ y $T_1(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^2$.

Entonces, T_1 es eficiente para $Z_1(\sigma) = -\frac{c'(\sigma)}{c(\sigma)q'(\sigma)} = -\frac{-n/\sigma^{n+1}}{\frac{1}{\sigma^n}\frac{1}{\sigma^3}} = n\sigma^2$.

Por tanto, $T = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^2$ es eficiente para $Z(\sigma) = \sigma^2$.

Ejercicio 7 a

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu, 1)$.

a) Probar que la cota de Frechet-Cramer-Rao para estimar $Z(\mu) = \mu^2$ es $\frac{4\mu^2}{n}$.

La cantidad de información de Fisher es

$$\begin{aligned} I_n(\mu) &= nI(\mu) = -nE\left(\frac{d^2 \ln f_\mu(X)}{d\mu^2}\right) = -nE\left(\frac{d^2(-1/2(X-\mu)^2)}{d\mu^2}\right) \\ &= -nE\left(\frac{d(X-\mu)}{d\mu}\right) = -nE\left(-1\right) = n. \end{aligned}$$

La cota de Frechet-Cramer-Rao es

$$C = \frac{(Z'(\mu))^2}{I_n(\mu)} = \frac{(2\mu)^2}{n} = \frac{4\mu^2}{n}.$$

Ejercicio 7 b

b) Probar que $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}^2 - 1/n$ es el ECUMV para estimar $Z(\mu) = \mu^2$.

Primero se comprueba que T es insesgado

$$\begin{aligned} E(T) &= E(\bar{X}^2 - 1/n) = V(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 - 1/n \\ &= \frac{V(X)}{n} + \mu^2 - 1/n = 1/n + \mu^2 - 1/n = \mu^2. \end{aligned}$$

Además, el estimador $W = \bar{X}$ es suficiente y completo. Entonces, por el teorema de Lehmann-Scheffe, el estimador $\phi = E(T|W)$ es el ECUMV para estimar $Z(\mu) = \mu^2$.

Como ϕ es el único insesgado que es función de W y T es función de W, entonces T es el ECUMV para estimar $Z(\mu) = \mu^2$. Es decir, T es el ECUMV para $Z(\mu) = \mu^2$ porque es insesgado y función de W, que es suficiente y completo.

Ejercicio 8 a

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $Gamma(a, p = 1)$.

a) Probar que $T(X_1, \ldots, X_n) = (n-1)/(n\bar{X})$ es el ECUMV para estimar $Z(a) = a$, con varianza $\frac{a^2}{n-2}$.

El estimador T es función de $W = \bar{X}$, que es suficiente y completo. Entonces, si se demuestra que T es insesgado para $Z(a) = a$, entonces T es el ECUMV para estimar $Z(a) = a$.

Ejercicio 8 a

Vamos a comprobar entonces que es insesgado

$$E(T) = E\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = (n-1)E\left(\frac{1}{Y}\right),$$

donde $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim Gamma(a, p = n)$ y por tanto

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{Y}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{y}\frac{a^n}{\Gamma(n)} e^{-ay} y^{n-1} dy = \int_0^\infty \frac{a^n}{\Gamma(n)} e^{-ay} y^{(n-1)-1} dy \\ &= \frac{a}{n-1}\int_0^\infty \frac{a^{n-1}}{\Gamma(n-1)} e^{-ay} y^{(n-1)-1} dy = \frac{a}{n-1} \end{aligned}$$

y entonces $E(T) = (n-1)E\left(\frac{1}{Y}\right) = a.$

Ejercicio 8 a

Hay que calcular la varianza

$$
\begin{aligned}
V(T) &= V\left(\frac{n-1}{n\bar{X}}\right) = (n-1)^2 V\left(\frac{1}{Y}\right) \\
&= (n-1)^2 \left(E\left(\frac{1}{Y^2}\right) - E\left(\frac{1}{Y}\right)^2\right) \\
&= (n-1)^2 \left(E\left(\frac{1}{Y^2}\right) - \left(\frac{a}{n-1}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8 a

Además

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{Y^2}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{y^2}\frac{a^n}{\Gamma(n)}e^{-ay}y^{n-1}dy = \int_0^\infty \frac{a^n}{\Gamma(n)}e^{-ay}y^{(n-2)-1}dy \\
&= \frac{a^2}{(n-1)(n-2)}\int_0^\infty \frac{a^{n-2}}{\Gamma(n-2)}e^{-ay}y^{(n-2)-1}dy \\
&= \frac{a^2}{(n-1)(n-2)}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
V(T) = (n-1)^2\left(\frac{a^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{a}{n-1}\right)^2\right) = \frac{a^2}{n-2}.
$$

Ejercicio 8 b

b) Probar que la cota de Frechet-Cramer-Rao para estimar $Z(a) = a$ es $\frac{a^2}{n}$.

La cantidad de información de Fisher es

$$\begin{aligned}
I_n(a) &= nI(a) = -nE\left(\frac{d^2 \ln f_a(X)}{da^2}\right) = -nE\left(\frac{d^2(\ln a - aX)}{da^2}\right) \\
&= -nE\left(\frac{d(\frac{1}{a} - X)}{da}\right) = -nE\left(-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{n}{a^2}.
\end{aligned}$$

La cota de Frechet-Cramer-Rao es

$$C = \frac{(Z'(a))^2}{I_n(a)} = \frac{1}{n/a^2} = \frac{a^2}{n}.$$

Ejercicio 9

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $Exp(\theta)$. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ y probar que es consistente.

La verosimilitud de la muestra es

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{j=1}^{n} x_j\right\},$$

y la función soporte es

$$l(\theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Ejercicio 9

Derivando e igualando a cero $\hat{\theta} = 1/\bar{x}$, y como $l''(\hat{\theta}) < 0$, entonces el EMV es $\hat{\theta}_{MV} = 1/\bar{X}$.

Sea $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$ con distribución $Gamma(\theta, n)$. La esperanza y la varianza de $\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{Y}$ son

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_{MV}) &= nE\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n\theta}{n-1} \\
V(\hat{\theta}_{MV}) &= n^2 V\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9

Sus límites son

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_{MV}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\theta}{n-1} = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_{MV}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = 0$$

Entonces $\hat{\theta}_{MV}$ es consistente para θ.

Ejercicio 10

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $U(0, \theta)$, con $\theta > 0$. Sea $M_n = X_{(n)}$. Demostrar que M_n es consistente para θ. ¿Es $Y_n = 2\bar{X}$ consistente para θ?

La densidad de la variable M_n es

$$f_{M_n}(x) = nx^{n-1}\frac{1}{\theta^n}I_{(0,\theta)}(x)$$

y su esperanza y varianza son

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \theta\frac{n}{n+1} \\ V(M_n) &= \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 10

Como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(M_n) &= \lim_{n\to\infty} \theta\frac{n}{n+1} = \theta \\ \lim_{n\to\infty} V(M_n) &= \lim_{n\to\infty} \theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) = 0\end{aligned}$$

M_n es consistente para θ.

Además

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E(Y_n) &= \lim_{n\to\infty} E(2\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} 2\frac{\theta}{2} = \theta \\ \lim_{n\to\infty} V(Y_n) &= \lim_{n\to\infty} V(2\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = 0\end{aligned}$$

y entonces Y_n es consistente para θ.