Estadística. Grupo m3

Hoja 5. Contrastes de hipótesis

Mayte Rodríguez

Ejercicio 1

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu, 1)$, donde $\mu \in \Theta = \{\mu_0, \mu_1\}$, con $\mu_0 < \mu_1$. Para contrastar $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu = \mu_1$ se considera el test

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{x} \geq k \\ 0 & \text{si } \bar{x} < k \end{cases}$$

Ejercicio 1

a) Hallar k para que el test tenga nivel α.
El nivel de significación del test de hipótesis es

$$\alpha = E_{\mu_0}(\phi(X_1, \ldots, X_n)) = P_{\mu_0}(R) = P_{\mu_0}(\bar{X} \geq k).$$

Como $\bar{X} \sim N(\mu, 1/n)$, entonces

$$\alpha = P_{\mu_0}(\bar{X} \geq k) = P_{\mu_0}(Z \geq \sqrt{n}(k - \mu_0))$$

y entonces

$$\sqrt{n}(k - \mu_0) = z_\alpha$$

$$k = \mu_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

Ejercicio 1

b) Hallar la función de potencia.

Como hemos visto anteriormente

$$\beta(\mu_0) = P_{\mu_0}(R) = \alpha$$

En la hipótesis alternativa

$$\begin{aligned}
\beta(\mu_1) &= P_{\mu_1}(R) = P_{\mu_1}(\bar{X} \geq k) = P_{\mu_1}\left(\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \\
&= P_{\mu_1}\left(Z \geq \sqrt{n}\left(\mu_0 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu_1\right)\right) \\
&= P_{\mu_1}\left(Z \geq z_\alpha + \sqrt{n}\,(\mu_0 - \mu_1)\right) \\
&= 1 - \Phi(z_\alpha + \sqrt{n}\,(\mu_0 - \mu_1))
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sea $(X_1, \ldots, X_{12})$ una muestra aleatoria de una distribución $Poisson(\theta)$, donde $\theta \in \Theta = (0, 1/2]$. Si la región de rechazo, para contrastar $H_0 : \theta = 1/2$ frente a $H_1 : \theta < 1/2$, es $R = \{(x_1, \ldots, x_{12}) : 12\bar{x} \leq 2\}$, hallar la potencia del test en $\theta = 1/2$, $\theta = 1/4$ y $\theta = 1/12$.

Si $X \sim Poisson(\theta)$, entonces $T = \sum_{j=1}^{12} X_j \sim Poisson(12\theta)$

Si $\theta = 1/2$, entonces $T \sim Poisson(6)$

$$\beta(1/2) = P_{\theta=1/2}(R) = P_{\theta=1/2}(T \leq 2) = 0.062$$

Ejercicio 2

Si $\theta = 1/4$, entonces $T \sim Poisson(3)$

$$\beta(1/4) = P_{\theta=1/4}(R) = P_{\theta=1/4}(T \leq 2) = 0.4232$$

Si $\theta = 1/12$, entonces $T \sim Poisson(1)$

$$\beta(1/12) = P_{\theta=1/12}(R) = P_{\theta=1/12}(T \leq 2) = 0.9197$$

Ejercicio 3

Sea $(X_1, \ldots, X_5)$ una muestra aleatoria de una distribución $B(1, p)$ con $0 \leq p \leq 1$. Para contrastar $H_0 : p = 1/2$ frente a $H_1 : p \neq 1/2$, decidimos aceptar la hipótesis nula si $|\bar{x} - 1/2| \leq c$.

a) ¿Se puede construir un test no aleatorizado de esta forma, tal que su nivel de significación sea 0.1?

La región de rechazo es

$$\begin{aligned} R &= \{(X_1, \ldots, X_5) : |T/5 - 1/2| > c\} \\ &= \{-5c + 5/2 > T > 5c + 5/2\} \\ &= \{-5c + 5/2 > T > 5c + 5/2\} \\ &= \{-k + 5/2 > T > k + 5/2\} \end{aligned}$$

donde $T = \sum_{j=1}^{5} X_j \sim B(5, p)$, que bajo $H_0 : p = 1/2, \ T \sim B(5, 1/2)$.

Ejercicio 3

Si $R=\{(X_1,\ldots,X_5):T=0,5\}$, entonces

$$\alpha=P_{p=1/2}(R)=P_{p=1/2}(T=0)+P_{p=1/2}(T=5)=0.0624<0.1.$$

Si $R=\{(X_1,\ldots,X_5):T=0,1,4,5\}$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{p=1/2}(R)\\ \alpha &= P_{p=1/2}(T=0)+P_{p=1/2}(T=1)+P_{p=1/2}(T=4)+P_{p=1/2}(T=5)=0.3748>0.1.\end{aligned}$$

No se puede construir un test no aleatorizado al nivel 0.1.

Ejercicio 3

b) Construir el test correspondiente a ese nivel de significación (aleatorizado o no aleatorizado) y hallar su función de potencia.

El test de hipótesis aleatorizado es del tipo

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T = 0, 5 \\ a & \text{si} \quad T = 1, 4 \\ 0 & \text{si} \quad T = 2, 3 \end{cases}$$

Además

$$\begin{aligned}\alpha &= E_{p=1/2}(\phi(X_1,\ldots,X_n)) \\ &= 1P_{p=1/2}(T=\{0,5\}) + aP_{p=1/2}(T=\{1,4\}) = 0.0624 + a0.3748 = 0.1\end{aligned}$$

y entonces $a = 0.12$ y el test de hipótesis es

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T = 0,5 \\ 0.12 & \text{si} \quad T = 1,4 \\ 0 & \text{si} \quad T = 2,3 \end{cases}$$

Ejercicio 3

La función de potencia es, para la hipótesis nula

$$\beta(1/2) = E_{p=1/2}(\phi(X_1, \ldots, X_n)) = \alpha = 0.1$$

y para la alternativa

$$\begin{aligned} \beta(p) &= E_{p\neq 1/2}(\phi(X_1, \ldots, X_n)) = P_{p\neq 1/2}(T = \{0,5\}) + 0.12 P_{p\neq 1/2}(T = \{1,4\}) \\ &= (1-p)^5 + p^5 + 0.12\binom{5}{1} p(1-p)^4 + 0.12\binom{5}{4} p^4(1-p) \end{aligned}$$

para $p \neq 1/2$.