Álvaro Pelayo Amado

1)

a) Como A es DED $\Rightarrow |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ para $1\leq i\leq n$

$$m_{ij}\cdot n_{ij}=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_{ij}=0 \Rightarrow |m_{ij}-n_{ij}| = |-n_{ij}| \geq |m_{ij}| \,(=0) \\ \text{ó} \ \text{(B)} \\ n_{ij}=0 \Rightarrow |m_{ij}-n_{ij}| = |m_{ij}| \end{array}\right\} \rightarrow \text{(A)}$$

· A priori puede parecer descontextualizado pero nos valdremos de este resultado a lo largo del ejercicio.

Entonces, como nos sugiere el enunciado, consideremos el método iterativo asociado a $A=M-N$, $\left\{\begin{array}{l} u^0\in V \text{ arbitrario} \\ u^{k+1} = Bu^k + c, \ k\in \mathbb{N}\cup\{0\} \end{array}\right.$
tal que $B=M^{-1}\cdot N$, $c=M^{-1}\cdot b$

Buena Definición

Veamos que M es inversible. De hecho, veamos que M es DED y en consecuencia será inversible. Entonces, el método estará bien definido.

$$|m_{ii}| \underset{\text{Hip}}{=} |a_{ii}| \ \forall i\in\{1,..,n\} \underset{\substack{A \text{ DED} \\ A=M-N}}{\Rightarrow} |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}-n_{ij}| \underset{\text{(A)}}{\geq} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}| \ \forall i\in\{1,..,n\} \Rightarrow |m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}| \ \forall i\in\{1,..,n\} \Rightarrow M \text{ es DED.}$$

Convergencia

Sabemos por Teoría que hay convergencia si $\rho(B)<1$, i.e.: $\rho(M^{-1}N)<1$. Razonemos por Reducción al Absurdo:

Supongamos $\rho(M^{-1}N)\geq 1 \Rightarrow \exists \lambda\in sp(M^{-1}N)$ tq $|\lambda|\geq 1 \Rightarrow det(M^{-1}N-\lambda I)=0 \underset{\cdot det(M)}{\Rightarrow} det(M)\cdot det(M^{-1}N-\lambda I)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow det(N-\lambda M)=0 \Rightarrow N-\lambda M$ No es inversible $\Rightarrow N-\lambda M$ No es DED $\Rightarrow \exists i\in\{1,..,n\}$ tq $|n_{ii}-\lambda m_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}-\lambda m_{ij}|$

Además, por hipótesis $a_{ii}=m_{ii}$ y $A=M-N \Rightarrow n_{ii}=0 \ \forall i\in\{1,..,n\}$

Entonces, $\exists i\in\{1,..,n\}$ tal que $|\lambda m_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}-\lambda m_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}| + |\lambda||m_{ij}| \Rightarrow \exists i\in\{1,..,n\}$ tal que $|m_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{|\lambda|}|n_{ij}| + |m_{ij}| \underset{|\lambda|\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|}\leq 1}{\leq}$

$\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}| + |m_{ij}|$. Es decir, tenemos que $\exists i\in\{1,..,n\}$ tal que $|m_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}| + |m_{ij}|$.

Sin embargo, dijimos que queríamos obtener una contradicción. En efecto:

Por hipótesis se tiene $|m_{ii}| = |a_{ii}|$. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |n_{ij}| + |m_{ij}| \underset{\text{(B)}}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}-n_{ij}| \underset{A=M-N}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Obtendríamos entonces que $\exists i\in\{1,..,n\}$ tq $|a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ↯!!! (Imposible!!! Se supone que A era DED!!!).

b) Para la resolución de este apartado, primero consideremos lo siguiente (visto en Teoría):

Como A es inversible con $a_{ii}\neq 0$ para $i\in\{1,..,n\}$ podemos considerar $A = \begin{pmatrix} & D & -F \\ -E & & \end{pmatrix}$ tal que:

$D = diag(a_{11},\dots,a_{nn})$

$F=(f_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $f_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} -a_{ij} & si \ i<j \\ 0 & si \ i\geq j \end{array}\right.$

$E=(e_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $e_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} -a_{ij} & si \ i>j \\ 0 & si \ i\leq j \end{array}\right.$

Se satisface que $A = D-E-F$

Notemos que esta descomposición es factible, pues A es DED.

Método de Jacobi

$M = D$ y $N = E + F$

Tenemos que $A = M - N$

También, como $M = D$ se tiene que $m_{ii} = a_{ii}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y que $m_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Entonces, $m_{ij} \cdot n_{ij} = 0$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$

Para $i = j$, $a_{ii} = m_{ii} - n_{ii}$, pero como $a_{ii} = m_{ii}$, se tiene que $n_{ii} = 0$. Entonces, también para $i = j$ tenemos que $m_{ij} \cdot n_{ij} = 0$.

Así pues, como estamos bajo las hipótesis del apartado a), hay convergencia en el Método de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

$M = D - E$ y $N = F$

Tenemos que $A = M - N$

Apreciemos que como $M = D - E$ y $e_{ij} = 0$ para $i = j$, tenemos que $m_{ii} = a_{ii}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$

También podemos ver que, en virtud de que $M = D - E$, $N = F$, y el aspecto (definido anteriormente) de dichas matrices, tenemos:

- Para $i \geq j \Rightarrow n_{ij} = f_{ij} = 0 \Rightarrow m_{ij} \cdot n_{ij} = 0$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ tq $i \geq j$
- Para $i < j$, como D es diagonal, $d_{ij} = 0$. Además, si $i < j$ dijimos que $e_{ij} = 0$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto $m_{ij} = 0$ para $i < j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

  Por consiguiente, tenemos que $m_{ij} \cdot n_{ij} = 0$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ tq $i < j$

  Así, de forma global tenemos que $m_{ij} n_{ij} = 0$ $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Razonando como en el método anterior de Jacobi, como nos encontramos bajo las hipótesis del apartado a), tenemos que hay convergencia en el Método de Gauss-Seidel

9)

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+\alpha_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+\alpha_{n-1} & -1 \\ & & & -1 & 2+\alpha_n \end{pmatrix}$$

a) El apartado a) del Problema 7 de la Hoja 3) nos aporta que $\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2}$ para $k = 2,\dots,n$.
En este caso, tenemos lo siguiente: $(2+\alpha_k)\delta_{k-1} - (-1)(-1)\delta_{k-2} = \delta_k = (2+\alpha_k)\delta_{k-1} - \delta_{k-2}$

• Si $k=1$, tenemos $\delta_1 = 2+\alpha_1 > \delta_0 = 1$
$\underset{0}{\vee}$

• Permutremos ahora el paso inductivo: Supongamos el resultado cierto para k y veamos que es cierto para $k+1$.
Supongamos pues que para k, tenemos que $\delta_k > \delta_{k-1} > \dots > \delta_1 > \delta_0 = 1$ (Hipótesis de Inducción)
Entonces resta ver: $\delta_{k+1} > \delta_k$, pues trivialmente se tienen el resto de desigualdades (gracias a la Hipótesis de Inducción).
Tenemos que (gracias al apartado a) del Problema 7 de la Hoja 3) $\delta_{k+1} = (2+\alpha_{k+1})\delta_k - \delta_{k-1} = 2\delta_k + \alpha_{k+1}\delta_k - \delta_{k-1} =$
$= \delta_k + \alpha_{k+1}\delta_k + \underline{\delta_k - \delta_{k-1}} > \delta_k + \alpha_{k+1}\delta_k = \delta_k(1+\alpha_{k+1}) > \delta_k$ ☒
(Hipótesis de Inducción) $\longrightarrow \underset{0}{\vee}$

¿Por qué A es Definida Positiva?
Trivialmente, como acabamos de ver que $\delta_k > \delta_{k-1} > \dots > \delta_1 > \delta_0 = 1$ para $k \in \{1,\dots,n\}$, tenemos en particular que todos los menores principales son positivos, por lo que el Criterio de Sylvester de Caracterización de Matrices definidas positivas que representen a una forma cuadrática (en efecto, pues A es simétrica) nos da el resultado.

b) Para cada $\beta \geq 0$ consideremos la descomposición $A = M_\beta - N_\beta$ donde $N_\beta = \mathrm{diag}(\beta-\alpha_1, \beta-\alpha_2, \dots, \beta-\alpha_n)$
Debemos encontrar valores de β para los que el método iterativo asociado a la descomposición sugerida de A sea convergente.
Tratemos de aplicar el Teorema 5.2 del Libro de Resultados de Convergencia (4ª Edición).
Veamos primeramente que efectivamente se verifican las hipótesis del Teorema:
A es hermítica ($A = A^*$ verificando $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$; $\begin{cases} 0 = \bar{0} \\ -1 = \overline{-1} \end{cases}$. En particular es de hecho simétrica, pues no hay parte imaginaria).
A es def⊕ (visto previamente).
Tenemos la siguiente descomposición $A = M_\beta - N_\beta = \begin{pmatrix} 2+\beta & -1 & & \\ -1 & 2+\beta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta-\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta-\alpha_n \end{pmatrix}$

Ahora bien, también tenemos, aplicando el apartado a) a M_β (pues $\beta \geq 0$), que todos sus menores principales son mayores que cero, y por tanto en particular inversible.
Resta ver cuándo podemos garantizar que la matriz hermítica $M_\beta^* + N_\beta$ sea definida positiva.
Se observa que $M_\beta^* = M_\beta$ (simétrica Real), por lo que $M_\beta^* + N_\beta = \begin{pmatrix} 2+2\beta-\alpha_1 & -1 & & \\ -1 & 2+2\beta-\alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & 2+2\beta-\alpha_{n-1} & -1 \\ & & -1 & 2+2\beta-\alpha_n \end{pmatrix}$
Por consiguiente, si consideramos β satisfaciendo $2\beta - \alpha_i \geq 0$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, entonces podríamos aplicar el apartado a) y concluir. Veámoslo pues:
$2\beta - \alpha_i \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq \frac{\alpha_i}{2}$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$
De esta manera, si consideramos $\beta \geq \frac{\max\{\alpha_i\}}{2}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, tenemos garantía de que habrá convergencia en el sentido en el que se nos pide, en virtud del Teorema citado al principio ☒.