DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 18–19.
Series numéricas. Hoja 5

110 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es condicionalmente convergente, probar que la serie de los terminos positivos y la serie de los términos negativos de* a_n *son divergentes.*

111 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente y* b_n *es acotada, probar que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge absolutamente.*

112 *i) Si* $a_n \geq 0$ *es monótona decreciente y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge probar que entonces* $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.
ii) Si $a_n \geq 0$ *y existe* $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ *con* $p > 1$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge. Probar que con* $p = 1$ *lo anterior es falso.*

113 *i) Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ *son convergentes probar que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ *converge.*
Indicación: *Usar la desigualdad de Cauchy.*
ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ *converge, probar que* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

114 *Si las sumas parciales de* a_n *son acotadas, probar que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ *es convergente para todo* $t > 0$.

115 Series telescópicas *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica si* $a_n = x_n - x_{n+1}$ *para cierta sucesión de números* x_n.
i) Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1$.
ii) Usar esto para probar que si $a \geq 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{n_0 + a}$$

(observa el caso particular $n_0 = 1$, $a = 0, 1, 2$*).*
iii) Descomponiendo en fracciones simples, prueba que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

116 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{-n}$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2}$, *xii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n)^3}$, *xiii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^p}$, $a, b, p > 0$, *xiv)* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n}$

117 *Aplicar el criterio de Condensación de Cauchy para decidir la convergencia de las siguientes series:*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *para* $p > 0$. *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$ *para* $p > 0$. *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

118 *Aplicar el criterio de Leibnitz para decidir la convergencia de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *ii)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

119 *Determinar la convergencia o no de las siguientes series:*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(n)}}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(\sqrt{2})^n}$ *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

120 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n-\operatorname{sen}(n))^{-1}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos(n)}{n}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n^n)^{-1}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{-1}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n+n^2}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\operatorname{sen}(n)}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!-n!}{4^n}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n))^n}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, *xii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$, *xiii)* $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-1}{n+1})^{2n}x^{2n}$

121 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}(\frac{1}{2^n})$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cos^2(\frac{a}{2^n})}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\operatorname{sen}^3(\frac{a}{3n+1})$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos^3(3^na)}{3^n}$

122 *Probar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n)$ *no converge pero la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)}{n^2}$ *es convergente.*

123 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty}a^{2n+1}+a^{2n}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nn^n}{(n+1)^{n+1}}$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$, $a>0$.
Notación: $k!!=k(k-2)(k-4)\cdots$.

124 *Si es* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *absolutamente convergente, ¿convergen las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ *(supuesto* $a_n\geq 0$*)*, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_{n+1}a_n}$ *(supuesto* $a_n\geq 0$*)*, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *(supuesto* $a_n\geq 0$*)*, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\operatorname{sen}(n)$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n}}$ *(supuesto* $a_n\geq 0$*)*, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n}}a_n$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$*?*
¿Y si la convergencia es condicional?

125 Teorema de Cauchy–Hadamard
Sea $\{a_n\}_n\subset\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ *fijo y consideremos la* **serie de potencias** $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.
Sea $R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.
i) Probar que si $|x|<R$ *entonces la serie converge absolutamente.*
ii) Si $|x|>R$ *probar que la serie no converge.*
iii) si $x_0\in\mathbb{R}$ *fijo, discutir para que* $x\in\mathbb{R}$ *converge la serie de potencias* $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.
iv) Estudia la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^n$.

126 *Consideremos la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. *Se pide,*
i) Probar que la serie es convergente.
ii) Probar que se tiene

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

(**Indicación:** *desarrollar la potencia por el binomio de Newton y comparar término a término con la suma).*
iii) Probar que se verifica: para todo $n\in\mathbb{N}$ *y para todo* $\varepsilon>0$ *existe un* $N\in\mathbb{N}$ *suficientemente grande tal que*

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

(**Indicación:** *desarrollar la potencia por el binomio de Newton, quedándose con los primeros* n *términos y comparar término a término con la suma).*
iv) Concluir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$