Hoja 4 de problemas

Ejercicio 1.
Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

$$(a)\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}, \quad (b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para el caso (b) resolver el problema de valor inicial asociado a $x(0) = (1, 0, 1, 0)$.

Ejercicio 2. Calcula la forma de Jordan B compleja y real de las siguientes matrices A (solo la forma de Jordan, no la matriz de paso) y la correspondiente matriz exponencial e^{Bt}.

$$(a)\begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b)\begin{pmatrix} -16 & -2 & 22 \\ -9 & -3 & 13 \\ -17 & -4 & 24 \end{pmatrix}, \quad (c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Sea A una matriz $n \times n$ cualquiera. Si $x(t)$ e $y(t)$ son las soluciones de $x' = Ax$ que satisfacen, respectivamente, $x(0) = x^0$, $y(0) = y^0$, probar que existen constantes $M \geq 0$ y k tales que

$$|x(t) - y(t)| \leq Me^{kt}|x^0 - y^0|$$

para todo $t \geq 0$ (hay dependencia continua de las soluciones con respecto a los datos iniciales).

Ejercicio 4. Un cuerpo de masa m es lanzado hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial V_0. Tomar como eje y la dirección vertical siendo y positiva hacia arriba y situar el origen en la superficie de la Tierra. Suponiendo que no hay resistencia al aire, pero tomando en cuenta las variaciones del campo gravitacional debidas a las diferentes altitudes, se obtiene

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{mgR^2}{(y+R)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra.

1. Considerar $V(t) = v(y(t))$. Encontrar una ecuación diferencial que se cumpla para $v(y)$.

2. Determinar la velocidad inicial mínima V_0 para la cual el cuerpo no regresa a la Tierra. Esta se llama velocidad de escape.

Ejercicio 5. Se propone la ecuación $p' = ap^{\alpha}$, con $\alpha > 1$ como modelo para el crecimiento poblacional de una cierta especie. Demostrar que $p(t) \to \infty$ en tiempo finito. Concluir que, por lo tanto, este modelo no es exacto para intervalos de tiempo de magnitud razonable.

Ejercicio 6. Se inyecta una *dosis trazadora o señaladora* de yodo radiativo I^{131} en el flujo sanguíneo en el tiempo $t = 0$. Supongamos que la cantidad inicial Q_0 de yodo se distribuye homogéneamente en el flujo antes de cualquier pérdida. Sea $Q(t)$ la cantidad de yodo en sangre en el tiempo $t > 0$. Una parte del yodo es eliminado de la sangre y pasa a la orina a una tasa de k_1Q. Otra parte del yodo es retenido en la glándula tiroides a una tasa de k_2Q. Calcular $Q(t)$.

Ejercicio 7. La presencia de toxinas en un cierto medio destruye una capa de bacterias a una tasa proporcional al número de bacterias presentes y a la cantidad de toxina. Sea a la constante de proporcionalidad. Si no hubiera toxinas, las bacterias se reproducirían con una tasa proporcional al número de las que están presentes. Sea b esa constante de proporcionalidad. Supongamos que la cantidad de toxina T se incrementa a una tasa constante c; es decir, $\frac{dT}{dy} = c$, y que su producción se inicia en el tiempo $t = 0$. Si $y(t)$ es el número de bacterias vivas que están presentes en el tiempo t:

1. Obtener una ecuación diferencial para $y(t)$.

2. Resolver dicha ecuación para evaluar $y(t)$. ¿Qué ocurre con $y(t)$ cuando t tiende a infinito?