10,75/11 Muy bien

Juan Carlos Llamas Núñez
4º DG Mat-Inf.

Entrega 1

Buena redacción

6/6

Problema 1.- Sea $\alpha:(-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva PPA birregular tal que $K_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ y $\tau_\alpha(s) = \tau_\alpha(-s)$. Demostrar que la traza de α es simétrica respecto a su recta normal en $s=0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha(0)=(0,0,0)$, $t_\alpha(0)=(1,0,0)$, $n_\alpha(0)=(0,1,0)$ y $b_\alpha(0)=(0,0,1)$. Podemos realizar esta afirmación ya que, si α no estuviera en estas condiciones, existe un movimiento rígido directo que lleva $\alpha(0)$ al origen y el triedro de Frenet en 0 a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Una vez probado el resultado en esta situación ventajosa, para trasladarlo a la curva original basta hacer notar que la propiedad se conserva dado que los movimientos rígidos preservan las simetrías (preservan ángulos y distancias).

Una vez realizada esta simplificación, se pide demostrar que, con las hipótesis del enunciado, la traza de α es simétrica respecto a su recta normal en $s=0$, es decir, el eje OY.

A partir de la curva $\alpha: (-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $s \longmapsto \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ definimos la curva

$$\beta: (-a,a) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$s \longmapsto \beta(s) = (-\alpha_1(-s),\ \alpha_2(-s),\ -\alpha_3(-s)).$$

Si probamos que $\beta(s) = \alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$ entonces habremos terminado porque esta condición implica que la traza de α es simétrica respecto al eje OY. En efecto, dado $p \in Tr(\alpha)$ tenemos que probar que si $S(p)$ es el simétrico de p respecto al eje OY entonces $S(p) \in Tr(\alpha)$.

Pero esto es claro ya que si $p \in Tr(\alpha)$ entonces $\exists s_0 \in (a,a)$ tal que $p = \alpha(s_0)$ y basta ver que $S(p) = \alpha(-s_0) \Leftrightarrow S(\alpha(s_0)) = \alpha(-s_0)$

$\Leftrightarrow S((\alpha_1(s_0), \alpha_2(s_0), \alpha_3(s_0))) = \alpha(-s_0) \Leftrightarrow (-\alpha_1(s_0), \alpha_2(s_0), -\alpha_3(s_0)) = \alpha(-s_0)$

y esta igualdad se sigue de que $\beta(s) = \alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$.

En resumen, es suficiente probar que $\beta(s) = \alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$.

Y para probar esto último ~~v~~vamos a utilizar el Teorema Fundamental de Curvas (Espaciales). Comprobaremos que $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$ y $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$ luego por el citado teorema existirá un movimiento rígido directo que lleva α en β. Por último, viendo que $\beta(0) = \alpha(0)$, $t_\alpha(0) = t_\beta(0)$ y $n_\alpha(0) = n_\beta(0)$ se deduce que este movimiento directo es la identidad y, por tanto $\beta(s) = \alpha(s)$.

Resumiendo, hay que probar que:

1) $\beta(0) = \alpha(0)$

2) $t_\beta(0) = t_\alpha(0)$

3) $n_\beta(0) = n_\alpha(0)$

4) $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$

5) $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(s)$ $\forall s \in (-a,a)$.

(*) Versión con matrices en la página 4

Como $\alpha(0) = (0,0,0) \Rightarrow \beta(0) = (-\alpha_1(-0), +\alpha_2(-0), -\alpha_3(-0)) = (0,0,0) = \alpha(0)$.

y esto prueba 1).

Derivando β se tiene que

$$\beta'(s) = t_\beta(s) = (+\alpha_1'(-s), -\alpha_2'(-s), +\alpha_3'(-s)) = (t_{1,\alpha}(-s), -t_{2,\alpha}(-s), t_{3,\alpha}(-s))$$

Por tanto, como $t_\alpha(0) = (1,0,0) \Rightarrow t_\beta(0) = (t_{1,\alpha}(-0), -t_{2,\alpha}(-0), t_{3,\alpha}(-s))$

$$\overset{\|}{(1, 0, 0)} = t_\alpha(0)$$

y obtenemos 2). Además, $|\beta'(s)| = |\alpha'(-s)| = 1$ $\forall s \in (-a,a)$ porque α está parametrizada por arco luego β también lo está y esto nos hace más sencillo el cálculo de $n_\beta(s)$, $b_\beta(s)$, $K_\beta(s)$ y $\tau_\beta(s)$.

Ahora pasamos a calcular β'':

$$\beta''(s) = (-\alpha_1''(-s), +\alpha_2''(-s), -\alpha_3''(-s)). \quad \forall s \in (-a, a).$$

Tomando normas se tiene que $|\beta''(s)| = |\alpha''(-s)|$ luego $K_\beta(s) = K_\alpha(-s) = K_\alpha(s)$ donde la última igualdad es una de las hipótesis de las que partimos. Esto prueba 4).

Para calcular $n_\beta(s)$ simplemente hacemos:

$$n_\beta(s) = \frac{\beta''(s)}{|\beta''(s)|} = \left(-\frac{\alpha_1''(-s)}{|\alpha''(-s)|}, \frac{\alpha_2''(-s)}{|\alpha''(-s)|}, -\frac{\alpha_3''(-s)}{|\alpha''(-s)|}\right) = (-n_{1,\alpha}(-s), n_{2,\alpha}(-s), -n_{3,\alpha}(-s))$$

Como $n_\alpha(0) = (0,1,0)$, sustituyendo en 0, $n_\beta(0) = (0,1,0)$ y se tiene 3).

Finalmente para probar que las torsiones coinciden utilizaremos que $b'(s) = \tau(s)\, n(s)$.

Calculamos $b_\beta(s)$ como el producto vectorial de $t_\beta(s)$ y $n_\beta(s)$:

$$b_\beta(s) = (t_{1,\alpha}(-s), -t_{2,\alpha}(-s), t_{3,\alpha}(-s)) \times (-n_{1,\alpha}(-s), n_{2,\alpha}(-s), -n_{3,\alpha}(-s)) =$$
$$= (b_{1,\alpha}(-s), -b_{2,\alpha}(-s), b_{3,\alpha}(-s))$$

y derivamos:

$$b_\beta'(s) = (-b_{1,\alpha}(-s), b_{2,\alpha}(-s), -b_{3,\alpha}(-s)).$$

Se tiene que $b_\beta'(s) = \tau_\beta(s) \cdot n_\beta(s)$, es decir, $\begin{cases} -b_{1,\alpha}(-s) = \tau_\beta(s)(-n_{1,\alpha}(-s)) \\ b_{2,\alpha}(-s) = \tau_\beta(s)\, n_{2,\alpha}(-s) \\ -b_{3,\alpha}(-s) = \tau_\beta(s)(-n_{3,\alpha}(-s)) \end{cases}$

pero de la igualdad $b_\alpha'(s) = \tau_\alpha(-s) n_\alpha(-s)$ se deduce que $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s)$ $\forall s \in (-a, a)$ y por hipótesis esto último es $\tau_\alpha(s)$.

Con esto último verificamos que se cumple 5) y esto concluye la prueba. Sin embargo, proponemos un método alternativo para comprobar las propiedades 1), 2), 3), 4) y 5) que es trabajar directamente con las matrices de simetría en lugar de trabajar componente a componente. Con esto se pueden aligerar algunos cálculos que pueden resultar pesados.

Simplemente hacemos notar que la definición de β que hemos dado no es otra cosa que $\beta(s) = A\,\alpha(-s)$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es una matriz ortogonal con $\det(A) = 1$ y que representa la simetría respecto al eje OY.

En efecto

1) $\beta(0) = A\,\alpha(-0) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha(0)$

2) $\beta'(s) = -A\,\alpha'(-s) \Rightarrow \underset{t_\beta(0)}{\underset{\parallel}{\beta'(0)}} = -A\,\alpha'(-0) = -A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underset{t_\alpha(0)}{\underset{\parallel}{\alpha'(0)}}$

3 y 4) $\beta''(s) = A\,\alpha''(-s) \Rightarrow \underset{k_\beta(s)}{\underset{\parallel}{|\beta''(s)|}} = |A\,\alpha''(-s)| \overset{A \text{ ortogonal}}{=} |\alpha''(-s)| = k_\alpha(-s) = k_\alpha(s)$

$$n_\beta(s) = \frac{\beta''(s)}{|\beta''(s)|} = \frac{A\,\alpha''(-s)}{|\alpha''(-s)|} = A\,n_\alpha(-s) \Rightarrow n_\beta(0) = A\,n_\alpha(-0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n_\alpha(0)$$

5) $b_\beta(s) = t_\beta(s) \times n_\beta(s) = -A\,t_\alpha(-s) \times A\,n_\alpha(-s) \overset{\text{Ej 1 Hoja Extra}}{=} -\det(A)\cdot A\,(t_\alpha(-s) \times n_\alpha(-s)) =$

$= -A\,b_\alpha(-s)$.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\tau_\beta(s)\,n_\beta(s) \,=\, \tau_\beta(s)\,A\,n_\alpha(-s)}{\underset{\parallel}{b'_\beta(s)}} = +A\,b'_\alpha(-s) = A\,\tau_\alpha(-s)\,n_\alpha(-s) \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s) = \tau_\alpha(s)$$

Insistimos en que las cuentas son exáctamente las mismas pero de esta forma ~~es más cómodo~~ al trabajar con matrices y sus ~~propiedades~~.

Hay SIEMPRE estas las cuentes pueden no ser triviales en un problema general.

Problema 2.- 4.75 73

i) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular. Supongamos que existe $t_0 \in I$ con $|\alpha'(t_0)| = 1$. Probar que $k_\alpha(t_0) = \alpha''(t_0) \cdot n_\alpha(t_0)$.

En el ejercicio 24 vimos que si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ era una curva plana regular (no necesariamente parametrizada por la longitud del arco), entonces su curvatura venía dada por la expresión:

$$k_\alpha(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \det(\alpha'(t) | \alpha''(t)).$$

Por tanto $k_\alpha(t_0) = \frac{1}{|\alpha'(t_0)|^3} \det(\alpha'(t_0) | \alpha''(t_0)) = \det(\alpha'(t_0) | \alpha''(t_0))$ y hay que ver que esto es igual a $\alpha''(t_0) \cdot n_\alpha(t_0)$, donde

$n_\alpha(t_0) = A\, t_\alpha(t_0) = A\,\alpha'(t_0)$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de rotación de ángulo $\pi/2$.

$$\Rightarrow \det(\alpha'(t_0) | \alpha''(t_0)) = x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)$$

$$\alpha''(t_0) \cdot n_\alpha(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0)) \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \right) = (x''(t_0), y''(t_0)) \cdot (-y'(t_0), x'(t_0))^t$$

Luego, efectivamente $k_\alpha(t_0) = \alpha''(t_0) \cdot n_\alpha(t_0)$

ii) Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por la longitud del arco, $t_0 \in I$ un tiempo fijo y $\beta : I \to \Pi^{osc}_{\alpha(t_0)} \subset \mathbb{R}^3$ la curva obtenida al proyectar ortogonalmente α sobre su plano osculador en $\alpha(t_0)$. Demostrar que la curvatura $k_\beta^{\mathbb{R}^2}(t_0)$ de β como curva plana en t_0 coincide con la curvatura $k_\alpha(t_0)$ de α en t_0.

En primer lugar, podemos suponer que $\alpha(t_0) = (0,0,0)$ y que $t_\alpha(t_0) = e_1$, $n_\alpha(t_0) = e_2$ y $b_\alpha(t_0) = e_3$, ya que si no se altera esta propiedad siempre podemos componer con un movimiento rígido directo que lleva α a esta situación y que conserva la curvatura. ~~Además aquí hemos utilizado que el plano osculador está positiv orient.~~ NO ¿Dónde?

Una vez hecha esta reducción es plano osculador es

$\Pi^{osc}_{\alpha(t_0)} \equiv \{z=0\} \subset \mathbb{R}^3$ y la proyección de $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$

sobre $\Pi^{osc}_{\alpha(t_0)}$ es

$$\beta : I \longrightarrow \Pi^{osc}_{\alpha(t_0)}$$
$$s \longmapsto \beta(s) = (x(s), y(s), 0).$$

Nótese que β no tiene que estar parametrizada por longitud de arco necesariamente, ya que $|\beta'(s)| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} \underset{\text{En general}}{\neq} \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} = |\alpha'(s)| = 1.$

Veamos que $K_\alpha(t_0) = K_\beta(t_0)$.

Como α es PPA $K_\alpha(t_0) = t'_\alpha(t_0) \cdot n_\alpha(t_0) = \alpha''(t_0) \cdot (0,1,0) = y''(t_0)$.

Como β no es necesariamente PPA, utilizamos la expresión del ejercicio 32:

$$K_\beta(t_0) = \frac{|\beta'(t_0) \times \beta''(t_0)|}{|\beta'(t_0)|^3}.$$

Derivando se tiene que

$$\beta'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$$
$$\beta''(t) = (x''(t), y''(t), 0)$$

y particularizando en t_0 $\beta'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), 0) = (1, 0, 0)$

ya que $t_\alpha(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = (1, 0, 0)$.

Por tanto $|\beta'(t_0)| = 1$ y

$$K_\beta(t_0) = \frac{|(1,0,0) \times (x''(t_0), y''(t_0), 0)|}{1} = |y''(t_0)|$$

Como $K_\alpha(t_0) > 0$ y $K_\beta(t_0) > 0$ y coinciden en módulo $\Rightarrow K_\alpha(t_0) = K_\beta(t_0)$.

Por tanto solo falta ver que $K_{\beta}^{\mathbb{R}^2}(t_0) = k_{\beta}(t_0)$. Sabemos que ambos números coinciden en módulo y lo hacen también en signo cuando $n_{\beta}^{\mathbb{R}^2}(t_0) = n_{\beta}(t_0)$. Pero esto es cierto debido a que $n_{\beta}(t_0)$ se puede obtener rotando $t_{\beta}(t_0)$ un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

En efecto, $t_{\beta}(t_0) = (1,0,0)$ y $n_{\beta}(t_0) \underset{\substack{\text{Visto en clase} \\ \text{para curvas (No) PPA}}}{=} \dfrac{(\beta'(t_0) \times \beta''(t_0)) \times \beta'(t_0)}{|\beta'(t_0) \times \beta''(t_0)| \, |\beta'(t_0)|} =$

$$= \frac{((1,0,0) \times (x''(t_0), y''(t_0), 0)) \times (1,0,0)}{|(1,0,0) \times (x''(t_0), y''(t_0), 0)| \cdot 1} = \frac{1}{|y''(t_0)|} (0, y''(t_0), 0) \underset{y''(t_0) = k_\alpha(t_0) > 0}{=} (0,1,0)$$

Para aclarar un poco más la idea que estamos utilizando vamos a volver a realizar la prueba pero sin fijar $\{t_\alpha(t_0), n_\alpha(t_0), b_\alpha(t_0)\}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Simplemente asumimos que el plano osculador es $z=0$.

Entonces $\beta(s) = P \cdot \alpha(s)$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la proyección respecto al plano $z=0$.

Entonces $\beta'(s) = P\alpha'(s)$ y $\beta''(s) = P\alpha''(s)$. Evaluando en t_0

$\beta'(t_0) = P\alpha'(t_0) = \alpha'(t_0)$ y $\beta''(t_0) = P\alpha''(t_0) = \alpha''(t_0)$ donde estas las dos última igualdades se dan porque $\alpha'(t_0)$ y $\alpha''(t_0)$ están contenidos en el plano osculador y su proyección sobre el mismo es el propio vector.

Efectivamente $\alpha'(t_0) = t_\alpha(t_0)$, uno de los vectores que genera $\Pi_{\alpha(t_0)}^{osc}$ y $\alpha''(t_0) = t_\alpha'(t_0) = K_\alpha(t_0)\, n_\alpha(t_0)$ es un múltiplo de $n_\alpha(t_0)$, el otro vector que genera $\Pi_{\alpha(t_0)}^{osc}$.

Por tanto, utilizando la expresión del ejercicio 32 que es aplicable a cualquier tipo de curva, ya esté o no parametrizada por arco

$$K_\beta(t_0) = \frac{|\beta'(t_0) \times \beta''(t_0)|}{|\beta'(t_0)|^3} = \frac{|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)|}{|\alpha'(t_0)|^3} = K_\alpha(t_0).$$

Finalmente, para argumentar que $\langle t_\beta(t_0), n_\beta(t_0)\rangle$ tiene la misma orientación que $\{t_\alpha(t_0), n_\alpha(t_0)\}$ se tiene que

$$t_\beta(t_0) = \frac{\beta'(t_0)}{|\beta'(t_0)|} = \frac{\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|} = t_\alpha(t_0)$$ y que

$$n_\beta(t_0) = \frac{(\beta'(t_0)\times\beta''(t_0))\times\beta'(t_0)}{|\beta'(t_0)\times\beta''(t_0)|\cdot|\beta'(t_0)|} = \frac{(\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0))\times\alpha'(t_0)}{|\alpha'(t_0)\times\alpha''(t_0)|\,|\alpha'(t_0)|} = n_\beta(t_0).$$

donde se utilizan las expresiones para calcular los vectores tangentes y normales de curvas no necesariamente parametrizadas por arco y las igualdades $\alpha'(t_0)=\beta'(t_0)$ y $\alpha''(t_0)=\beta''(t_0)$.

Por tanto $k_\beta^{\mathbb{R}^2}(t_0) = k_\beta(t_0) = k_\alpha(t_0)$

Eso es lo que
(tenías que poner y no
está puesto

Lo que hay que argumentar es $\langle t_\beta, n_\beta^{\mathbb{R}^2}\rangle = \langle t_\alpha, n_\alpha\rangle$

Sabes que $t_\beta = t_\alpha$ y $\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle$ 1º positiva luego girar $\pi/2$ t_α en posc. es precisamente $n_\alpha = n_\beta$.

(Podría ser $-n_\beta$ con la or. opuesta!)

Problema 3.- Sean $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA y $\mathbb{D}^2(0,R) \subset \mathbb{R}^2$ el disco cerrado de radio R. Supongamos que la traza de α está contenida en $\mathbb{D}^2(0,R)$ y existe cierto $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) \in \partial \mathbb{D}^2(0,R) = \mathbb{S}^1(0,R)$. Demostrar que $|k_\alpha^{\mathbb{R}^2}(t_0)| \geq \frac{1}{R}$.

Antes de probar nada analizamos el resultado que se nos pide demostrar. Se nos dice que si una curva está contenida en un disco y toca la frontera en un punto, entonces la curvatura en ese punto debe ser mayor o igual que $\frac{1}{R}$, es decir la curva se debe curvar, al menos, lo mismo que la circunferencia (sabemos que una circunferencia de radio R tiene curvatura constante $\pm\frac{1}{R}$). Esto es totalmente razonable porque, por hipótesis, la curva debe estar contenida en el disco.

Procedemos a demostrarlo haciendo uso de la función $f: I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = |\alpha(t)|^2$

que mide el cuadrado de la distancia de cada punto de la curva al origen. Por hipótesis $|\alpha(t_0)|^2 = R^2$ y $|\alpha(t)|^2 \leq R^2 \ \forall t \in I$ luego t_0 es un máximo local de f. Vamos a expresar esto en términos de las derivadas de f:

$$f'(t) = 2\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle \implies f'(t_0) = 0 = 2\langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0)\rangle \iff \alpha(t_0) \perp t_\alpha(t_0)$$

$$f''(t) = 2\left[\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle + \langle \alpha(t), \alpha''(t)\rangle\right] = 2\left[|\alpha'(t)|^2 + \langle \alpha(t), \alpha''(t)\rangle\right].$$

Por ser t_0 máximo local $f''(t_0) = 2\left[|\alpha'(t_0)|^2 + \langle \alpha(t_0), \alpha''(t_0)\rangle\right] \leq 0$.

Como α está parametrizada por arco $|\alpha'(t_0)| = 1$ y podemos escribir lo anterior como $1 \leq -\langle \alpha(t_0), \alpha''(t_0)\rangle = |\langle \alpha(t_0), \alpha''(t_0)\rangle|$.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle \alpha(t_0), \alpha''(t_0)\rangle| \leq |\alpha(t_0)| \cdot |\alpha''(t_0)|$.

Por tanto $|k_\alpha^{\mathbb{R}^2}(t_0)| = k_\alpha(t_0) = |\alpha''(t_0)| \geq \frac{1}{|\alpha(t_0)|} = \frac{1}{R} \iff |k_\alpha^{\mathbb{R}^2}(t_0)| \geq \frac{1}{R}$

Problema extra (b) Sea $A: I \to SO(3)$ un camino diferenciable de matrices, esto es, tal que todas sus entradas son funciones diferenciables.

i) Demostrar que existe un camino $B: I \to M_3(\mathbb{R})$ tal que $A' = AB$ donde A' denota la matriz $\frac{\partial}{\partial s} A(s) = (a'_{ij}(s))_{1\le i,j\le 3}$ si $A = (a_{ij}(s))_{1\le i,j\le 3}$.

Basta considerar
$$\begin{aligned} B: I &\longrightarrow M_3(\mathbb{R}) \\ s &\longrightarrow B(s) = A^t(s)A'(s) \end{aligned}$$
donde $A^t(s)$ denota la matriz traspuesta de $A(s)$.

En efecto
$$A \cdot B = A \cdot A^t \cdot A' \overset{(*)}{=} Id\, A' = A'$$
donde $(*)$ se cumple por ser A una matriz ortogonal. $(AA^t = A^tA = Id)$

ii) Probar que la matriz B de (i) es antisimétrica, es decir, $B + B^t = 0$.

Efectivamente, si derivamos la igualdad $A^t \cdot A = Id$ se tiene que $(A^t)'A + A^t \cdot A' = 0$, pero $B + B^t = A^tA' + (A^tA')^t =$
$$= A^tA' + (A')^tA \overset{}{=} 0.$$

iii) Sea $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular cualquiera. Sabiendo que $t'_\alpha(s) = k_\alpha(s) \cdot n_\alpha(s)$ y que $b'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s) n_\alpha(s)$, usar ii) para deducir el valor de $n'_\alpha(s)$.

Definimos
$$\begin{aligned} A: I &\longrightarrow SO(3) \\ s &\longmapsto \begin{pmatrix} | & | & | \\ t_\alpha(s) & n_\alpha(s) & b_\alpha(s) \\ | & | & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$
que está bien definido porque el triedro de Frenet es una base ortonormal, luego $A(s) \in SO(3)\ \forall s \in I$.

Por el apartado c) $\exists B : I \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A' = AB \iff \begin{pmatrix} t'_\alpha(s) & n'_\alpha(s) & b'_\alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_\alpha(s) & n_\alpha(s) & b_\alpha(s) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_{= B}$$

Por tanto $t'_\alpha(s) = b_1^1\, t_\alpha(s) + b_1^2\, n_\alpha(s) + b_1^3\, b_\alpha(s) = k_\alpha(s)\, n_\alpha(s)$.

$n'_\alpha(s) = b_2^1\, t_\alpha(s) + b_2^2\, n_\alpha(s) + b_2^3\, b_\alpha(s) = ?$

$b'_\alpha(s) = b_3^1\, t_\alpha(s) + b_3^2\, n_\alpha(s) + b_3^3\, b_\alpha(s) = \tau_\alpha(s)\, n_\alpha(s)$.

Como el triedro de Frenet es una base y las coordenadas respecto a una base son únicas entonces $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k_\alpha(s) \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_\alpha(s) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto $B = \begin{pmatrix} 0 & b_2^1 & 0 \\ k_\alpha(s) & b_2^2 & \tau_\alpha(s) \\ 0 & b_2^3 & 0 \end{pmatrix}$, pero como sabemos según lo demostrado en c) que B es antisimétrica:

$$\Rightarrow B + B^t = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_2^1 + k_\alpha(s) = 0 \\ b_2^2 + b_2^2 = 0 \\ b_2^3 + \tau_\alpha(s) \end{cases} \iff \begin{cases} b_2^1 = -k_\alpha(s) \\ b_2^2 = 0 \\ b_2^3 = -\tau_\alpha(s). \end{cases}$$

Por tanto $n'_\alpha(s) = -k_\alpha(s)\, t_\alpha(s) - \tau_\alpha(s)\, b_\alpha(s)$.

muy bien