I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura............ Fecha ....

Alumno/a .... Curso............ Nº............

Apellidos Nombre

Calificación

Por tanto, el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)=6\,\text{sen}^3 z+z^3(z^6-6)$ en 0 es el de la potencia z^5, por lo que 0 es un cero de multiplicidad 5.

d) $f(z)=(e^z-e^{z^2})\log(1-z)$.

$$f(0)=(e^0-e^0)\log 1=0.$$

$$f'(z)=(e^z-e^{z^2}\cdot 2z)\log(1-z)+(e^z-e^{z^2})\cdot\frac{(-1)}{1-z}=$$

$$=e^z\log(1-z)-2z\,e^{z^2}\log(1-z)-e^z(1-z)^{-1}+e^{z^2}(1-z)^{-1} \qquad f'(0)=0$$

$$f''(z)=e^z\log(1-z)-\frac{e^z}{1-z}-2e^{z^2}\log(1-z)-2z\left[e^{z^2}\log(1-z)\cdot 2z-\frac{e^{z^2}}{1-z}\right]$$

$$-e^z(1-z)^{-1}-e^z(1-z)^{-2}+e^{z^2}\cdot 2z(1-z)^{-1}+e^{z^2}\cdot(1-z)^{-2}$$

$$f''(0)=0-1-0-0-1-1+0+1=-2$$

Como el primer término no nulo en el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)=(e^z-e^{z^2})\log(1-z)$ centrada en 0 es el que acompaña a z^2, 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2.

$\boxed{e)}$ $f(z)=\dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{sen}\,z}{2}\right)^2}$

Hemos visto varias veces en esta hoja que $\text{sen}\,z=z\cdot h(z)$ para cierta función $h(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y tal que $h(0)\neq 0$.

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} z}{2}\right)^2} = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z h(z)}{2}\right)^2} = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 (1 - h^2(z))} =$$

$$= \frac{4 z^4}{1 - h^2(z)}.$$

Sabemos que $h(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$

Sea $g(z) = 1 - h^2(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$

Es claro que g tiene un cero en 0 y $g(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos la multiplicidad de dicho 0.

$$g'(z) \overset{z \neq 0}{=} - \frac{2 \operatorname{sen} z \cos z \, z^2 - \operatorname{sen}^2 z \cdot 2z}{z^4} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^3}$$

$$g'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2 - \operatorname{sen}^2 z}{z^3} = \lim_{z \to 0} \frac{(z + \operatorname{sen} z)}{z} \frac{(z - \operatorname{sen} z)}{z^2}$$

$$= 2 \cdot \lim_{z \to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^2} \overset{*_1}{=} 0$$

$$\Longrightarrow g'(z) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^3} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$g''(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{2 \operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^3} - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 z - z \operatorname{sen} 2z}{z^4} \overset{*_2}{=} 2/3$$

Por tanto g tiene un cero en 0 de multiplicidad 2 es decir $\exists\, g_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $g_2(0) \neq 0$ y $g(z) = z^2 \cdot g_2(z)$.

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................................... Fecha ....

Alumno/a.................................... Curso.................... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

$$\Rightarrow f(z) = \frac{4z^4}{1-h^2(z)} = \frac{4z^4}{g(z)} = \frac{4z^4}{z^2 \cdot g_2(z)} = 4z^2 \cdot \frac{1}{g_2(z)}$$

Como $\frac{4}{g_2(z)}$ es entera $\left(g_2(z) \neq 0 \; \forall z\right)^{*_3}$ y $\frac{4}{g_2(z)} \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ podemos asegurar que f tiene un cero de multiplicidad 2.

$*_3$

$$g_2(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z^2} & \text{si } z \neq 0 \\ g_2(0) & \text{si } z = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{z^2 - \operatorname{sen}^2 z}{z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ g_2(0) & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

$$g_2(z) = 0 \overset{z \neq 0}{\Longleftrightarrow} z^2 - \operatorname{sen}^2 z = 0 \Leftrightarrow z^2 = \operatorname{sen}^2 z \Leftrightarrow z = 0 \;\; !!$$

Por tanto $g_2(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$.

Por último los límites $*_1$ y $*_2$ se han calculado cuando $z \in \mathbb{R}$. aplicando L'Hôpital sucesivamente. Podemos hacer esto porque sabemos que $g(z)$ es una función , por tanto, infinitamente derivable y con derivada continua. Por tanto sabemos que $\exists \lim_{z \to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z - 0}$. Como el límite tiene que valer lo mismo , independientemente de por donde nos acerquemos a cero y sabemos que si nos acercamos por reales, el límite es 0, entonces el límite es siempre 0. El mismo argumento sirve para justificar $*_2$.

Hacemos los límites en el caso real

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} \underset{\text{Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x - x\operatorname{sen} 2x}{x^4} \underset{\text{Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot 2\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} 2x - x\cos 2x\cdot 2}{4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x - 2x\cos 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x - 2x\cos 2x}{4x^3} \underset{\text{Regla de L'Hôpital}}{\overset{\text{Indeterminación } 0/0}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos 2x + 2x\operatorname{sen} 2x\cdot 2}{4\cdot 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen} 2x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{3x} \underset{\text{Regla L'Hôpital}}{\overset{\text{Ind. } 0/0}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{3} = 2/3$$