ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 5

1. Supongamos que f es una función continua en el disco cerrado $\{z : |z| \leqslant R\}$ y holomorfa en su interior. Demuestra que:

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 0.$$

2. Calcula las siguientes integrales usando la fórmula integral de Cauchy:

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}\, dz,\ n \geqslant 0$ b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2}\, dz,\ n \geqslant 0$

c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz$ d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m}\, dz,\ m \in \mathbb{Z}$

e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$ f) $\displaystyle\int_{|z-1|=4} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$

3. Calcula:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^2(z-3)}dz;$ b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{senh} z}{(z^2-1)^2}dz;$ c) $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\cosh e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}dz.$

4. Sea $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ un polinomio. Demuestra que

$$\int_{-1}^{1} |P(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

5. Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto que contiene al triángulo cerrado Δ. Supongamos que 0, 1, y -1 no pertenecen a la frontera de Δ. Calcula todos los valores posibles, según la posición de Δ, de $\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z(z^2-1)}$.

6. Supongamos que f es una función holomorfa con derivada continua en un abierto Ω y que $\gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada simple de clase C^1 a trozos cuyo interior está contenido en Ω. Aplica el teorema de Green para demostrar que

$$\int_\gamma f = 0,$$

obteniendo así una versión del teorema de Cauchy válida para curvas cerradas simples (bajo la suposición adicional de que f' sea continua, la cual puede ser obviada puesto que en teoría se demuestra que las funciones holomorfas son infinitamente derivables).

7. Demuestra que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x d\theta}{x^2 + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}},$$

si $x > 0$.

8. Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ donde $\gamma(\theta) = 2|\cos\theta|e^{i\theta}$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+\pi^2}$ siendo $\gamma(\theta) = \theta e^{i\theta}$ para $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $\gamma(\theta) = 4\pi - \theta$ para $2\pi \leqslant \theta \leqslant 4\pi$.

9. Sea γ la circunferencia de centro cero y radio uno recorrida en sentido directo y sea f una función continua en $\{\gamma\}$. Se define la función:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| = 1 \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw & \text{si } |z| < 1. \end{cases}$$

¿Es F continua en $\overline{D}(0,1)$?