Segundo examen parcial 2018-2019

Solución de los problemas

Los problemas puntúan lo mismo.

Problema 1 *En un espacio euclidiano* $\mathbb{E}$ *nos dan una base ortonormal* $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$. *Construimos una sucesión de vectores* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *definiendo*

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_1 + u_2, \quad x_3 = u_1 + u_3, \ \ldots, \ x_k = u_1 + u_k \ , \ldots, \ x_n = u_1 + u_n$$

Determinar la sucesión $V = (v_1, \ldots, v_n)$ *que resulta al aplicar el procedimiento de Gram-Schmidt a* X.

Solución. Probaremos que $V = \mathcal{U}$ mostrando por inducción sobre k que $v_1 = u_1, \ldots, v_k = u_k$. Esto es cierto sin duda para $k = 1$ porque en el procedimiento $v_1 = x_1 = u_1$. Supuesto cierto que $v_1 = u_1, \ldots, v_k = u_k$ tenemos

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x_{k+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i = u_1 + u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_1 + u_{k+1}, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \\ &= u_1 + u_{k+1} - \langle u_1 + u_{k+1}, u_1 \rangle u_1 = u_1 + u_{k+1} - u_1 = u_{k+1}, \end{aligned}$$

lo que completa el paso inductivo. ♠

Problema 2 *Nos dan la matriz*

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar, viéndola como matriz real y como matriz compleja (dos problemas), si es o no es diagonalible y, si lo es, determinar una base de vectores propios.

Solución.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} &= (1-X)^2 \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 \left((1-X)^2 + 1 \right) \\ &= (1-X)^2 \left(2 - 2X + X^2 \right) \end{aligned}$$

Las raíces de $2 - 2X + X^2$ son $1 + i$ y $1 - i$ si se le considera como polinomio complejo y no tiene taíces considerado como polinomio real. Por tanto el polinomio característico $C(X)$ no es linealmente factorizable si el cuerpo es $\mathbb{R}$ y a no es diagonalizable. Si el cuerpo es $\mathbb{C}$, hay tres valores propios que son $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - 1$. Para que a sea diagonalizable se necesita que la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ sea 2. Calculamos $\ker(a - 1)$ resolviendo

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da $x^1 = x^4 = 0$ y que es como decir que $\ker(a - 0) = \lg(e_2, e_3)$, teniendo dimensión 2. Los vectores e_2 y e_3 son propios. Calculamos $\ker(a - (1 + i))$ resolviendo

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que nos da que $\ker(a-(1+i))$ está generado por $(i,0,0,1)^{\top}$ y, de modo análogo $\ker(a-(1-i))$ está generado por $(-i,0,0,1)^{\top}$. La base

$$\left(\begin{pmatrix} i\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -i\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

es de vectores propios y diagonaliza a como matriz compleja. ♠

Problema 3 *En el espacio euclidiano $\mathbb{E}$ de dimensión $n=3$ se considera un vector unitario u, tomándose a continuación un parámetro h y definiendo $L:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$ por $L(x)=hx-\langle u,x\rangle u$. Para 2 supondremos $0\le h\le 1$.*

1. *Probar que L es una transformación autoadjunta, calculando además su matriz en una base ortonormal $\mathcal{U}=(u_1,u_2,u_3)$ tal que $u_1=u$.*
2. *Se define $\phi:\mathbb{E}\to\mathbb{R}$ por $\phi(x)=\langle L(x),x\rangle+2\langle u,x\rangle$ y la cuádrica $\mathcal{C}$ de ecuación $\phi(x)=0$. Clasificarla.*

Solución. Para la primera parte es $\langle L(x),y\rangle=\langle x,L(y)\rangle$ como muestra el cálculo

$$\langle L(x),y\rangle=\langle hx-\langle u,x\rangle u,y\rangle=h\langle x,y\rangle-\langle u,x\rangle\langle u,y\rangle,\quad \langle x,L(y)\rangle=\langle x,hy-\langle u,y\rangle u\rangle=h\langle x,y\rangle-\langle u,x\rangle\langle u,y\rangle.$$

En la base $\mathcal{U}$ que se indica,

$$L(u_1)=hu_1-\langle u_1,u_1\rangle u_1=(h-1)u_1,$$

y al ser $0=\langle u,u_2\rangle=\langle u,u_3\rangle$ resulta $L(u_2)=hu_2$ y $L(u_3)=hu_3$. Con todo esto,

$$s=\operatorname{mat}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}(L)=\begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & h\end{pmatrix}.$$

Se puede también probar que L es autoadjunta porque tiene L matriz simétrica en base ortonormal.

Los valores propios de L son h (doble) y $h-1$. Distinguimos varios casos:

1. Si $h=0$, al resolver $L(x)=-u$ para comprobar si hay posibles centros c, vemos que $F=u$ y todo se reduce a $-\langle u,x\rangle u=-u$ con la obvia solución $x=u$. (Se puede hacer también con matrices como más abajo.) Este centro $c=u$ cumple

   $$\phi(c)=\langle L(c),c\rangle+2\langle u,c\rangle=\langle-\langle u,u\rangle u,u\rangle+2\langle u,u\rangle=1$$

   y la ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas adecuadas $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ es

   $$0=(h-1)\bar{x}^2+h\bar{y}^2+h\bar{z}^2+\phi(c)=-\bar{x}^2+1$$

   y $\mathcal{C}$ está formada por dos rectas paralelas.

2. Si $0<h<1$ el sistema

   $$\begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1\\0\\0\end{pmatrix}\text{ con solución }\begin{pmatrix} \frac{1}{1-h}\\0\\0\end{pmatrix}=c$$

   nos dice que si $\mathcal{C}\neq\emptyset$, hay un solo centro c y la ecuación normalizada es

   $$0=(h-1)\bar{x}^2+h\bar{y}^2+h\bar{z}^2+\phi(c)=(h-1)\bar{x}^2+h\bar{y}^2+h\bar{z}^2+\frac{1}{1-h}$$

   puesto que

   $$\phi(c)=\begin{pmatrix} \frac{1}{1-h}\\0\\0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} h-1 & 0 & 0\\ 0 & h & 0\\ 0 & 0 & h\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-h}\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{1-h}\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{1-h}>0$$

De los tres coeficientes $(h-1, h, h)$ de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, vemos que el primero es < 0 y los otros son > 0. La ecuación es

$$(h-1)\,\bar{x}^2 + h\bar{y}^2 + h\bar{z}^2 = \frac{-1}{1-h}$$

La duda es si tenemos un hiperboloide de una o dos hojas, Cortando por el plano $\mathbb{P}_k$ de ecuación $\bar{x} = k$ resulta un conjunto de ecuación

$$h\left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2\right) = \frac{-1}{1-h} - (h-1)\,k^2$$

cuyo lado derecho será < 0 si k es suficientemente pequeño. Por consiguiente $\mathcal{C} \cap \mathbb{P}_k = \emptyset$ y tenemos un hiperboloide de dos hojas.

3. Si $h = 1$, para obtener los posibles centros hay que resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que no tiene solución. La ecuación será de la forma $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2\,\|F_0\|\,\bar{z} = 0$, siendo F_0 la proyección ortogonal de $F = u$ sobre $\ker(L)$. Pero si $h = 1$ se tiene $L(u) = u - \langle u, u\rangle\, u = 0$, de modo que $F = F_0$ y $\|F_0\| = \|u\| = 1$. Nos queda $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2\bar{z} = 0$, que es un paraboloide de revolución. ♠

Problema 4 *Tomamos dos vectores unitarios e independientes u y v en un espacio euclidiano $\mathbb{E}$ de dimensión arbitraria. Tenemos simetrías axiales $U(x) = 2\langle u, x\rangle\, u - x$ y $V(x) = 2\langle v, x\rangle\, v - x$ que fijan las rectas que generan u y v. Dar condiciones necesarias y suficientes sobre u y v para que sea $U \circ V = V \circ U$. Nota: Creemos que se simplifican los cálculos si se estudian por separado las restricciones a $\lg(u,v)$ y $\lg(u,v)^{\perp}$.*

Solución. Si x es ortogonal a u y v; o sea, si $x \in \lg(u,v)^{\perp}$, x queda fijo por U y V (una simetría axial fija los vectores ortogonales a su eje). Por consiguiente, sean como sean u y v se tiene $U \circ V(x) = V \circ U(x)$ para $x \in \lg(u,v)^{\perp}$.

Sea $c = \langle u, v\rangle$. Supongamos que $U \circ V = V \circ U$ para todo x, En particular, si $x = u$,

$$U \circ V(u) = U(2cv - u) = 2\langle u, 2cv - u\rangle\, u - (2cv - u) = \left(4c^2 - 2\right) u - 2cv + u = \left(4c^2 - 1\right) u - 2cv,$$

$$V \circ U(u) = V(u) = 2cv - u,$$

$$0 = U \circ V(u) - V \circ U(u) = \left(4c^2 - 1\right) u - 2cv - (2cv - u) = 4c^2 u - 4cv,$$

y de aquí sale $c = \langle u, v\rangle = 0$ porque (u, v) es independiente.

Recíprocamente, si $c = \langle u, v\rangle = 0$, el cálculo anterior nos da $0 = U \circ V(u) - V \circ U(u)$. En cuanto a v,

$$V \circ U(v) = V(-v) = 2\langle v, -v\rangle\, v - (-v) = -v, \quad U \circ V(v) = U(v) = -v,$$

ya que, por hipótesis v es ortogonal a u. Hemos comprobado que $U \circ V$ y $V \circ U$ coinciden sobre $\lg(u,v)$ y, al coincidir en toda circunstancia sobre $\lg(u,v)^{\perp}$, llegamos a que $\langle u, v\rangle = 0$ implica $U \circ V = V \circ U$.

En resumen, $U \circ V = V \circ U$ *equivale* a $\langle u, v\rangle = 0$.♠