De esta forma

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \theta \cdot \cancel{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}(\sqrt{y})^2} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{y}}} = \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\theta}{2}y} \quad \text{con } y > 0$$

es decir $Y \sim \text{Gamma}(a = \frac{\theta}{2}, p = 1) = \text{Exp}(\frac{\theta}{2})$

Por la propiedad reproductiva de la Gamma se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \text{Gamma}\left(a = \frac{\theta}{2}, p = n\right)$$

b) Cantidad pivotal e intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$.

En general, sabemos que si $Z \sim \text{Gamma}(a, p)$ entonces

$kZ \sim \text{Gamma}\left(\frac{a}{k}, p\right)$.

Aplicando esto a nuestro caso $\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \text{Gamma}\left(\frac{\theta}{2\theta}, n\right) = \chi^2_{2n}$

Por tanto, la distribución de $\theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ no depende de θ y nos sirve como cantidad pivotal. Además, su distribución es conocida y está tabulada.

Por tanto $P(a \leq \theta \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq b) = 1-\alpha$ con a y b por determinar.

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D