I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº.......

Apellidos Nombre

Calificación

Por tanto

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(-1)}{n!}(z+1)^n \overset{f(-1)=1/4}{=} \frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(n+5)\,n!}{2^{n+2}}\frac{1}{n!}(z+1)^n=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

$\boxed{3.-}$ Sea f una función entera tal que $|f(z)|\geq|z|$ $\forall z\in\mathbb{C}$. ¿Qué se puede decir de f?

Si $z\neq 0 \Leftrightarrow |z|>0 \Rightarrow |f(z)|\geq|z|>0 \Rightarrow f(z)\neq 0$

Veamos que $f(0)=0$

Si $f(0)\neq 0$ entonces f no se anula en $\mathbb{C}$

Por tanto la función $g(z)=\dfrac{z}{f(z)}$ es entera, pero

$|g(z)|\leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z}{f(z)}\right|\leq 1 \Leftrightarrow |z|\leq|f(z)|$

Por el Teorema de Liouville $g(z)$ es constante

Pero $g(0)=0$ y $g(1)=\dfrac{1}{f(1)}\neq 0$!!

Por tanto $f(0)=0$. Como f tiene un cero en 0

$\Rightarrow$ $f(z)=z\cdot h(z)$ con $h(z)$ una función entera.

$|f(z)|=|z\cdot h(z)|=|z|\cdot|h(z)|\geq|z| \Rightarrow |h(z)|\geq 1.$

Por tanto h no toma valores en $D(0,1)$ y por lo visto en el ejercicio 2 h tiene que ser constante.

Por tanto $f(z) = \alpha \cdot z$ con $|\alpha| \geq 1$.

2.- Demuestra de si f es una función entera tal que $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ tiene un punto interior entonces f es constante.

Sea $a \in Int(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C}))$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$, $D(a, \delta) \subset \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$ $|f(z) - a| \geq \delta$

Sea $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-a}$ que es una función entera porque $a \notin f(\mathbb{C})$.

Además $|g(z)| = \left| \dfrac{1}{f(z)-a} \right| \leq \dfrac{1}{\delta}$.

Como $g(z)$ es una función entera acotada, por el Teorema de Liouville $g(z)$ es constante $\Rightarrow g(z) = C = \dfrac{1}{f(z)-a}$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{C} + a$ que es una constante