Investigación Operativa – Doble Grado (17/12/2020)

1. (0.15 puntos) Se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ s.a.: \quad & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima se presenta en la siguiente tabla (siendo x_4 y x_5 las variables de holgura correspondientes a las restricciones primera y segunda respectivamente):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	**0**	**1**	**5**	**1**	**3**	**24**
x_1	**1**	**0**	**4**	**1**	**2**	**21**
	0	**0**	**–2**	**–1**	**–1**	**Z – 18**

A partir de la tabla óptima anterior, resolver el problema de post-optimización resultante al añadir, al problema original, una nueva variable x_6 ($x_6 \geq 0$) siendo

$$c_6 = -1 \quad \text{y} \quad a_6{}^t = (1, -2).$$

Solución:

$$B^{-1}a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{c}_6 = -1 - (1,1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Conjunto de soluciones óptimas:

$$x(\mu) = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \geq 0.$$

2. (0.25 puntos) Se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -6x_1 + 2x_2 - 10x_3 \\ s.a.: \quad & x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra la solución óptima del problema, siendo x_4 y x_5 las variables de holgura correspondientes a las restricciones primera y segunda respectivamente.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	**0**	**1/2**	**1**	**1/2**	**0**	**5/2**
x_1	**1**	**−1/2**	**0**	**−1/6**	**1/3**	**5/2**
	0	**4**	**0**	**4**	**2**	**Z – (–40)**

A partir de la tabla óptima anterior, resolver el problema de post-optimización resultante de modificar el vector de términos independientes considerando: $\acute{b}^t = (6,\ 1)$.

Solución:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	**0**	**1/2**	**1**	**1/2**	**0**	**3**
x_1	**1**	**−1/2**	**0**	**−1/6**	**1/3**	**–2/3**
	0	**4**	**0**	**4**	**2**	**Z – (–26)**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	**1**	**0**	**1**	**1/3**	**1/3**	**7/3**
x_2	**–2**	**1**	**0**	**1/3**	**−2/3**	**4/3**
	8	**0**	**0**	**8/3**	**14/3**	**Z – (– 62/3)**

Solución óptima única:

$$\boldsymbol{x_1^* = 0\,, \qquad x_2^* = \frac{4}{3}\,, \qquad x_3^* = \frac{7}{3}\,,}$$

$$\boldsymbol{z^* = -\frac{62}{3}}$$

3. (0.35 puntos). Se considera el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ s.a.: \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 45 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra una solución óptima del problema, siendo x_4 y x_5 las variables de holgura correspondientes a las restricciones primera y segunda respectivamente.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	**–1**	**1**	**3**	**1**	**0**	**20**
x_5	**8**	**0**	**–1**	**–2**	**1**	**5**
	0	**0**	**–2**	**–5**	**0**	***Z*–100**

A partir de la tabla óptima anterior, resolver el problema de post-optimización resultante al añadir, al problema original, la restricción: $2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -10$.

Solución:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	**–1**	**1**	**3**	**1**	**0**	**0**	**20**
x_5	**8**	**0**	**–1**	**–2**	**1**	**0**	**5**
x_6	**–1**	**0**	**0**	**–1**	**0**	**1**	**–10**
	0	**0**	**–2**	**–5**	**0**	**0**	***Z*–100**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	**0**	**1**	**3**	**2**	**0**	**–1**	**30**
x_5	**0**	**0**	**–1**	**–10**	**1**	**8**	**–75**
x_1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**–1**	**10**
	0	**0**	**–2**	**–5**	**0**	**0**	***Z*–100**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	**0**	**1**	**14/5**	**0**	**1/5**	**3/5**	**15**
x_4	**0**	**0**	**1/10**	**1**	**–1/10**	**–4/5**	**15/2**
x_1	**1**	**0**	**–1/10**	**0**	**1/10**	**–1/5**	**5/2**
	0	**0**	**–3/2**	**0**	**–1/2**	**–4**	***Z*–(125/2)**

Solución óptima única:

$$x_1^* = \frac{5}{2}\,, \quad x_2^* = 15\,, \quad x_3^* = 0\,, \quad x_4^* = \frac{15}{2}\,, \quad x_5^* = 0\,, \quad x_6^* = 0\,,$$

$$z^* = \frac{125}{2}$$

4. (0.25 puntos) Considerando el siguiente problema, demostrar la optimalidad de la solución propuesta, formulando el problema dual y obteniendo la solución óptima del problema dual.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -6x_1 + 2x_2 - 10x_3 \\ s.a.: \quad & -3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & 6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución propuesta: $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 2.$

Solución:

El anterior problema es equivalente al problema en forma canónica:

$$\begin{aligned} \max \quad & \bar{z} = 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 \\ s.a.: \quad & -3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & 6x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

siendo el dual de este problema el siguiente:

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 5y_1 + 10y_2 \\ s.a.: \quad & -3y_1 + 6y_2 \geq 6 \\ & y_1 - y_2 \geq -2 \\ & 4y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ & y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Para que (y_1, y_2) verifique las condiciones de holgura complementaria respecto de la solución propuesta, se tienen que verificar con igualdad las restricciones primera y tercera del problema dual, por tanto:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 2 \\ \\ 2y_1 + y_2 = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{8}{5}, \ \ y_2 = \frac{9}{5}$$

Puesto que $\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$ es solución factible del problema dual, la solución propuesta es óptima.