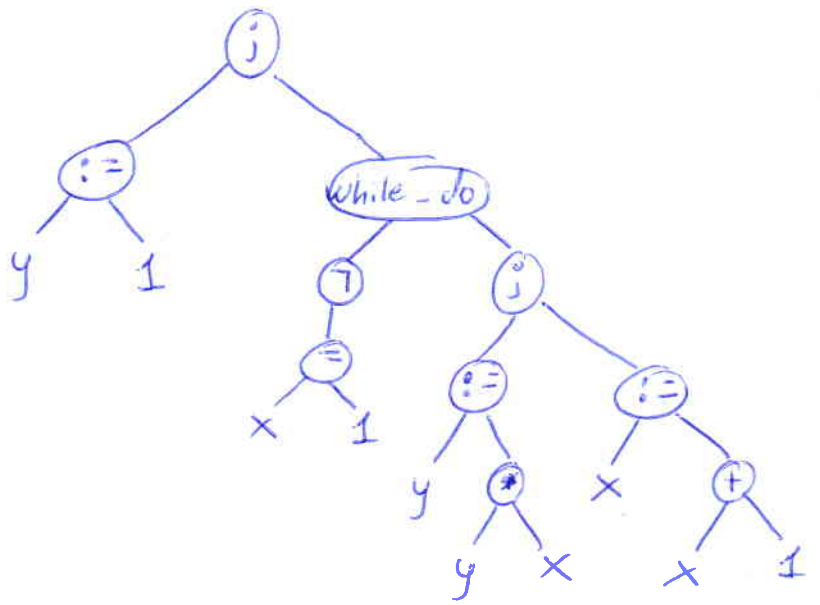
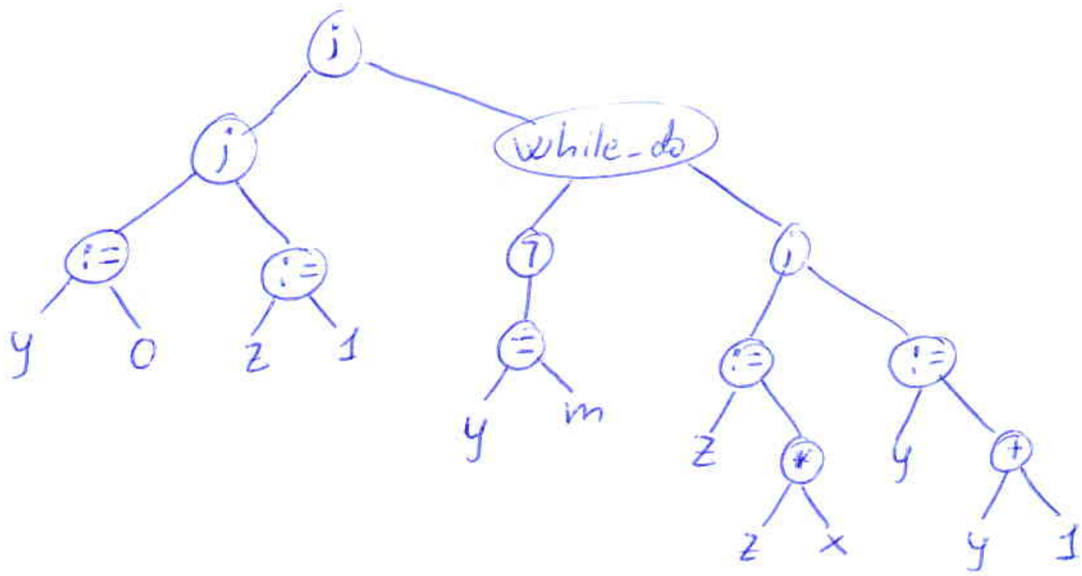
Ejercicio 1.1.-

$y := 1 \; ; \; \text{while} \; \neg(x=1) \; \text{do} \; (y := y * x \; ; \; x := x+1)$



Ejercicio 1.2.- Asumiendo que ya le hemos dado semántica a los símbolos...

$(y := 0 \; ; \; z := 1); \; \text{while} \; \neg(y = m) \; \text{do} \; (z := z * x \; ; \; y := y+1)$



Ejercicio 1.8. Prueba que las ecuaciones definidas en la Tabla 1.1 definen una función total $\mathcal{A} : Aexp \to (State \to \mathbb{Z})$.

En primer lugar comprobamos que es total; es decir, que para cada $a \in Aexp$ $\exists f_a \in (State \to \mathbb{Z})$ tal que $\mathcal{A}[\![a]\!] = f_a$.

Podemos definir f_a como

$$f_a : State \to \mathbb{Z}, \quad s \longmapsto f_a(s) = \begin{cases} \mathcal{N}[\![n]\!] & si\ a = n \\ s\,x & si\ a = x \\ f_{a_1}(s)\ op\ f_{a_2}(s) & si\ a = a_1\ op\ a_2 \end{cases}$$

Por como hemos definido f_a se desprende la igualdad $\mathcal{A}[\![a]\!] = f_a$ ya que, ambas aplicaciones, evaluadas en cada $s \in States$ devuelven el mismo $n \in \mathbb{Z}$.

Esto se prueba por inducción estructural sobre a.

Si $a = n \Rightarrow \mathcal{A}[\![n]\!] \overset{?}{=} f_n$. Dado $s \in States$ $\mathcal{A}[\![n]\!]s = \mathcal{N}[\![n]\!] = f_n(s)$ ✓

Si $a = x \Rightarrow \mathcal{A}[\![x]\!] \overset{?}{=} f_x$. Dado $s \in States$ $\mathcal{A}[\![x]\!]s = s\,x = f_x(s)$ ✓

Si $a = a_1\ op\ a_2 \Rightarrow \mathcal{A}[\![a]\!] \overset{?}{=} f_a$. Dado $s \in States$ $\mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1\ op\ a_2]\!]s = (\mathcal{A}[\![a_1]\!]s)\ op\ (\mathcal{A}[\![a_2]\!]s)$

$$f_a(s) = f_{a_1}(s)\ op\ f_{a_2}(s) \underset{HI}{=} (\mathcal{A}[\![a_1]\!]s)\ op\ (\mathcal{A}[\![a_2]\!]s) \ ✓$$

Para ver que es función hay que comprobar que f_a es única.
Supongamos que $\exists \tilde{f}_a \in (States \to \mathbb{Z})$ tal que $\tilde{f}_a \neq f_a$. Como ambas funciones son distintas entonces $\exists s \in States$ tal que $\tilde{f}_a(s) \neq f_a(s)$.
Pero esto no es posible porque $\tilde{f}_a(s) = \mathcal{A}[\![a]\!]s = f_a(s)$

En el libro se propone hacerlo de otra forma. Se pide que primero se argumente que para probar que $\mathcal{A}$ es total es suficiente probar que $\forall a \in Aexp$ y $\forall s \in State$ entonces $\exists! v \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{A}[\![a]\!]s = v$. Tras ello hay que probar que efectivamente se cumple que $\forall a \in Aexp$ y $\forall s \in State$ $\exists! v \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{A}[\![a]\!]s = v$.

Supongamos probado esto último y veamos que $\mathcal{A}$ es total.

Para ver que es total hay que probar que $\exists f_a \in State \to \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{A}[\![a]\!] = f_a$, es decir, que $\mathcal{A}[\![a]\!]$ es una función de States en $\mathbb{Z}$. Pero por la condición que estamos suponiendo esto es cierto. Además, $\mathcal{A}$ es función ya que la unicidad de v para cada a y cada s la tenemos por hipótesis.

Ahora probamos que $\forall a \in Aexp$ y $\forall s \in State$ entonces $\exists! v \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{A}[\![a]\!]s = v$.

Lo hacemos por inducción estructural sobre a.

Si $a = n \Rightarrow \mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![n]\!]s = \mathcal{N}[\![n]\!]$ que como $\mathcal{N}$ es una función total $\exists! v \in \mathbb{Z}$ $\mathcal{N}[\![n]\!] = v$ y se verifica lo buscado.

Si $a = x \Rightarrow \mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![x]\!]s = s\,x$ y como s es una función total de Var en $\mathbb{Z}$ $\exists! v \in \mathbb{Z}$, $s\,x = v$.

Si $a = a_1 \, op \, a_2 \Rightarrow \mathcal{A}[\![a]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1 \, op \, a_2]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \, op \, \mathcal{A}[\![a_2]\!]s$

Por HI $\exists! v_1, v_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{A}[\![a_1]\!]s = v_1$ y $\mathcal{A}[\![a_2]\!]s = v_2$ y como $op : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ son funciones totales $\exists! v \in \mathbb{Z}$ tal que $v_1 \, op \, v_2 = v$, luego $\mathcal{A}[\![a]\!]s = v_1 \, op \, v_2 = v$.

Ejercicio 1.9.- Asumiendo que $s\,x = 3$ determina $\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]s$

$$\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]\,s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![x=1]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![x=1]\!]s = tt \end{cases}$$

Evaluando $\mathcal{B}[\![x=1]\!]\,s$ por separado,

$$\mathcal{B}[\![x=1]\!]\,s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![x]\!]s = \mathcal{A}[\![1]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![x]\!]s \neq \mathcal{A}[\![1]\!]s \end{cases} = \begin{cases} tt & \text{si } s\,x = \mathcal{N}[\![1]\!] \\ ff & \text{si } s\,x \neq \mathcal{N}[\![1]\!] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } 3 = 1 \\ ff & \text{si } 3 \neq 1 \end{cases} = ff.$$

Por tanto $\mathcal{B}[\![x=1]\!]\,s = ff$ y $\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]\,s = tt$.

Ejercicio 1.10.- Probar que la Tabla 1.2 define una función total $\mathcal{B}$ en $\mathbf{Bexp} \to (\mathbf{State} \to \mathbf{T})$. Totalmente análogo al Ejercicio 1.8.

Ejercicio 1.11.- La categoría sintáctica $\mathbf{Bexp}'$ se define como la siguiente extensión de $\mathbf{Bexp}$:

$$b ::= \text{true} \mid \text{false} \mid a_1 = a_2 \mid a_1 \neq a_2 \mid a_1 \leq a_2 \mid a_1 \geq a_2 \mid a_1 < a_2 \mid a_1 > a_2 \mid \neg b \mid b_1 \wedge b_2 \mid$$
$$b_1 \vee b_2 \mid b_1 \Rightarrow b_2 \mid b_1 \Leftrightarrow b_1 .$$

Da una extensión composicional de la función semántica $\mathcal{B}$ de la tabla 1.2.
Definimos que dos expresiones booleanas son equivalentes (y lo escribimos como $b_1 \equiv b_2$) si $\forall s \in \mathbf{State}$ se cumple $\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_2]\!]s$.

Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia y demostrar que

$$\forall b' \in Bexp' \ \exists b \in Bexp \ (\subset Bexp') \text{ tal que } b' \equiv b.$$

En primer lugar definimos la extensión de la función semántica $\mathcal{B}$ como

$$\mathcal{B}' : Bexp' \longrightarrow (State \longrightarrow T)$$

de tal manera que el valor semántico otorgado sea "el esperado".

$$\mathcal{B}'[\![true]\!]s = tt$$

$$\mathcal{B}'[\![false]\!]s = ff$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 = a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s. \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 \neq a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 \leq a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s. \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 \geq a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] \geq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] < \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 < a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] < \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] \geq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![a_1 > a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si \quad \mathcal{A}[\![a_1]\!] \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![\neg b]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{B}'[\![b]\!] = ff \\ ff & si \quad \mathcal{B}'[\![b]\!] = tt \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![b_1 \wedge b_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = tt \ y \ \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = ff \\ ff & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = ff \ o \ \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = ff \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![b_1 \vee b_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = tt \ o \ \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = tt \\ ff & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = ff \ y \ \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = ff \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![b_1 \Rightarrow b_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = tt \ o \ \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = ff \\ ff & si \quad \mathcal{B}'[\![b_2]\!] = ff \ y \ \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = tt \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![b_1 \Leftrightarrow b_2]\!]s = \begin{cases} tt & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] = \mathcal{B}'[\![b_2]\!] \\ ff & si \quad \mathcal{B}'[\![b_1]\!] \neq \mathcal{B}'[\![b_2]\!] \end{cases}$$

La definición es composicional y además es una extensión porque

$$\mathcal{B}'|_{Bexp} = \mathcal{B}$$

Veamos que $\equiv$ es una relación de equivalencia

1.- Reflexiva $b \overset{?}{\equiv} b \iff \mathcal{B}'[\![b]\!]s = \mathcal{B}'[\![b]\!]s \quad \forall s \in State$ ✓

2.- Simétrica $b_1 \equiv b_2 \overset{?}{\Rightarrow} b_2 \equiv b_1$. $b_2 \equiv b_1 \iff \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s \quad \forall s$ pero como

$b_1 \equiv b_2 \Rightarrow \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s \quad \forall s$

3.- Transitiva $b_1 \equiv b_2$ y $b_2 \equiv b_3 \overset{?}{\Rightarrow} b_1 \equiv b_3$.

Como $b_1 \equiv b_2$ y $b_2 \equiv b_3 \Rightarrow \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s$ y $\forall s$ luego

$\mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s$

$\mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s \quad \forall s$ que no es otra cosa que $b_1 \equiv b_3$.

Entonces queda probado que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

Falta ver que $\forall b' \in Bexp' \ \exists b \in Bexp (\subset Bexp')$ tal que

$b' \equiv b$.

Nuevamente por inducción estructural. Sea $b' \in Bexp'$.

Si $b' = true \Rightarrow b = true$

Si $b' = false \Rightarrow b = false$

Si $b' = a_1 = a_2 \Rightarrow b = a_1 = a_2$

Si $b' = a_1 \neq a_2 \Rightarrow b = \neg(a_1 = a_2)$

Si $b' = a_1 \leq a_2 \Rightarrow b = a_1 \leq a_2$

Si $b' = a_1 \geq a_2 \Rightarrow b = \neg(a_1 \leq a_2 \wedge \neg(a_1 = a_2))$

Si $b' = a_1 < a_2 \Rightarrow b = (a_1 \leq a_2) \wedge (\neg(a_1 = a_2))$

Si $b' = a_1 > a_2 \Rightarrow b = \neg(a_1 \leq a_2)$

Si $b' = \neg b_1 \overset{HI}{\Rightarrow} \exists b_2 \in Bexp_{/\!/}\ b_1 \equiv b_2$ y $b = \neg b_2$

Si $b' = b_1 \wedge b_2 \overset{HI}{\Rightarrow} \exists b_3, b_4 \in Bexp_{/\!/}\ b_1 \equiv b_3,\ b_2 \equiv b_4$ y $b = b_3 \wedge b_4$

Si $b' = b_1 \vee b_2 \overset{HI}{\Rightarrow} \exists b_3, b_4 \in Bexp_{/\!/}\ b_1 \equiv b_3,\ b_2 \equiv b_4$ y $b = \neg((\neg b_3) \wedge (\neg b_4))$

Si $b' = b_1 \Rightarrow b_2 \overset{HI}{\Longrightarrow} \exists b_3, b_4 \in Bexp_{\shortparallel}\ b_1 \equiv b_3$ y $b_2 \equiv b_4$ y $b = \neg(b_3 \wedge \neg b_4)$

Si $b' = b_1 \Leftrightarrow b_2 \overset{HI}{\Longrightarrow} \exists b_3, b_4 \in Bexp_{\shortparallel}\ b_1 \equiv b_3$ y $b_2 \equiv b_4$ y $b = \neg(\neg(b_3 \wedge b_4) \wedge \neg(\neg b_3 \wedge \neg b_4))$

Para todos estos casos afirmamos que $b' \equiv b$.

Lo comprobamos únicamente para $b' = a_1 \geq a_2$ y $b = \neg((a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2))$ y para $b' = b_1 \Rightarrow b_2$ y $b = \neg(b_3 \wedge \neg b_4)$ ya que los demás son completamente análogos.

$$\mathcal{B}'[\![a_1 \geq a_2]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \geq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s < \mathcal{A}[\![a_2]\!]s. \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![\neg((a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2))]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![(a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2)]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![(a_1 \leq a_2) \wedge \neg(a_1 = a_2)]\!]s = tt \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![a_1 \leq a_2]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}'[\![\neg(a_1 = a_2)]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![a_1 \leq a_2]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}'[\![\neg(a_1 = a_2)]\!]s = tt \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ o } \mathcal{B}'[\![a_1 = a_2]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ y } \mathcal{B}'[\![a_1 = a_2]\!]s = ff \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s > \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ o } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \text{ y } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases} = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \geq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!]s < \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![b_1 \Rightarrow b_2]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = ff \end{cases}$$

$$\mathcal{B}'[\![\neg(b_3 \wedge \neg b_4)]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3 \wedge \neg b_4]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3 \wedge \neg b_4]\!]s = tt \end{cases} = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}'[\![\neg b_4]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}'[\![\neg b_4]\!]s = tt \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}'[\![b_4]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}'[\![b_4]\!]s = ff \end{cases} \underset{\uparrow}{=} \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = ff \end{cases}$$

$\mathcal{B}'[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_3]\!]s \quad (b_1 \equiv b_3)$

$\mathcal{B}'[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}'[\![b_4]\!]s \quad (b_2 \equiv b_4)$

Ejercicio 1.13 Sean s y s' dos estados que satisfacen $sx = s'x$ $\forall x \in FV(b)$. Probar que $\mathcal{B}[\![b]\!]s = \mathcal{B}[\![b]\!]s'$

Aplicando inducción estructural sobre b.

Si $b = true$ $\quad \mathcal{B}[\![true]\!]s = tt = \mathcal{B}[\![true]\!]s'$.

Si $b = false$ (Análogo a true).

Si $b = a_1 = a_2$ $\quad \mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!]s = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s \\ ff & si\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!]s. \end{cases}$

$\qquad \| ?$

$\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!]s' = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s' \\ ff & si\ \mathcal{A}[\![a_1]\!]s' = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s'. \end{cases}$

Sabemos que $sx = s'x$ $\forall x \in FV(b) = FV(a_1 = a_2) = FV(a_1) \cup FV(a_2)$.

Entonces $sx = s'x$ $\forall x \in FV(a_1)$ y $sx = s'x$ $\forall x \in FV(a_2)$ luego aplicando el lema anterior se tiene que $\mathcal{A}[\![a_1]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!]s'$ y $\mathcal{A}[\![a_2]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!]s'$

De aquí se deduce la igualdad ?.

Si $b = a_1 \leq a_2$ (Análogo a $a_1 = a_2$).

Si $b = \neg b_1$ $\quad \mathcal{B}[\![\neg b_1]\!]s = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = ff \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = tt \end{cases}$

$\leftarrow \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!]s'$ Por inducción estructural ya que $FV(b) = FV(b_1)$

$\mathcal{B}[\![\neg b_1]\!]s' = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = ff \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = tt \end{cases}$

Si $b = b_1 \wedge b_2$ $\quad \mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = tt\ y\ \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = tt \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s = ff\ o\ \mathcal{B}[\![b_2]\!]s = ff \end{cases}$

$\mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!]s' = \begin{cases} tt & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = tt\ y\ \mathcal{B}[\![b_2]\!]s' = tt \\ ff & si\ \mathcal{B}[\![b_1]\!]s' = ff\ o\ \mathcal{B}[\![b_2]\!]s' = ff \end{cases}$

$\leftarrow$ $\mathcal{B}[\![b_1]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!]s'$ y $\mathcal{B}[\![b_2]\!]s = \mathcal{B}[\![b_2]\!]s'$ porque (HI) $FV(b) = FV(b_1) \cup FV(b_2)$

Ejercicio 1.14.-

Probar que $\mathcal{A}[\![a[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$.

Lo probamos por inducción estructural sobre a.

Si $a = n$ $\quad \mathcal{A}[\![n[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![n]\!]s = \mathcal{N}[\![n]\!] = n$

$$\mathcal{A}[\![n]\!](s[y\mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = \mathcal{N}[\![n]\!] = n$$

Si $a = x$ $\quad \mathcal{A}[\![x[y\to a_0]]\!]s = \begin{cases} \mathcal{A}[\![a_0]\!]s & \text{si } x=y \\ \mathcal{A}[\![x]\!]s & \text{si } x\neq y. \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \mathcal{A}[\![a_0]\!] & \text{si } x=y \\ s\,x & \text{si } x\neq y. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}[\![x]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = (s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])x =$$

$$= \begin{cases} \mathcal{A}[\![a_0]\!]s & \text{si } x=y \\ s\,x & \text{si } x\neq y \end{cases}$$

Si $a = a_1 \,op\, a_2$

$$\mathcal{A}[\![(a_1 \,op\, a_2)[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![(a_1[y\to a_0]) \,op\, (a_2[y\to a_0])]\!]s =$$

$$= (\mathcal{A}[\![a_1[y\to a_0]]\!]s) \,op\, (\mathcal{A}[\![a_2[y\to a_0]]\!]s)$$

$$\mathcal{A}[\![a_1 \,op\, a_2]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) \,op\, \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$$

Por inducción estructural se tiene que

$\mathcal{A}[\![a_1[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$ y

$\mathcal{A}[\![a_2[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$ luego se cumple la igualdad

$$\mathcal{A}[\![(a_1 \,op\, a_2)[y\to a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a_1 \,op\, a_2]\!](s[y\to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$$

Ejercicio 1.15 - Define la sustitución para expresiones booleanas: $b[y \to a_0]$ es la expresión booleana que es como b salvo que las apariciones de la variable y se sustituyen por la expresión aritmética a_0. Probar que esta definición satisface que

$$\mathcal{B}[\![b[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{B}[\![b]\!](s[y \mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \quad \forall s \in State.$$

Definimos $b[y \to a_0]$ por casos según las posibles formas de construir b:

$true[y \to a_0] = true$

$false[y \to a_0] = false$

$(a_1 = a_2)[y \to a_0] = (a_1[y \to a_0]) = (a_2[y \to a_0])$ donde aprovechamos la definición de sustitución en expresiones aritméticas y la igualdad es la igualdad sintáctica entre dos expresiones aritméticas.

$(a_1 \le a_2)[y \to a_0] = (a_1[y \to a_0]) \le (a_2[y \to a_0])$

$(\neg b)[y \to a_0] = \neg(b[y \to a_0])$. Nuevamente, el símbolo de negación es sintáctico y la definición en este caso es recursiva (en la estructura).

$(b_1 \wedge b_2)[y \to a_0] = (b_1[y \to a_0]) \wedge (b_2[y \to a_0])$.

Comprobamos que $\mathcal{B}[\![b[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{B}[\![b]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s])$ por inducción estructural sobre b.

Si $b = \text{true}$ $\quad \mathcal{B}[\![\text{true}[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{B}[\![\text{true}]\!] s = tt$

$$\mathcal{B}[\![\text{true}]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) = tt$$

Si $b = \text{false}$ (Análogo al caso $b = \text{true}$).

Si $b = a_1 = a_2$ $\quad \mathcal{B}[\![(a_1 = a_2)[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{B}[\![(a_1[y \to a_0]) = (a_2[y \to a_0])]\!] s =$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{A}[\![a_2[y \to a_0]]\!] s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y \to a_0]]\!] s \neq \mathcal{A}[\![a_2[y \to a_0]]\!] s. \end{cases}$$

$\overset{(1)}{=}$

$$\mathcal{B}[\![a_1 = a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) = \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \neq \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \end{cases}$$

Para probar (1) solo hay que demostrar que $\mathcal{A}[\![a_i[y \to a_0]]\!] = \mathcal{A}[\![a_i]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s])$ para $i = 1,2$ pero esto se desprende del ejercicio anterior.

Si $b = a_1 \leq a_2$ $\quad \mathcal{B}[\![(a_1 \leq a_2)[y \to a_0]]\!] s = \mathcal{B}[\![(a_1[y \to a_0]) \leq (a_2[y \to a_0])]\!] s =$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y \to a_0]]\!] s \leq \mathcal{A}[\![a_2[y \to a_0]]\!] s \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1[y \to a_0]]\!] s > \mathcal{A}[\![a_2[y \to a_0]]\!] s. \end{cases} \quad \overset{\text{Ej 14}}{=}$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \leq \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \\ ff & \text{si } \mathcal{A}[\![a_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) > \mathcal{A}[\![a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \end{cases} =$$

$$= \mathcal{B}[\![a_1 \leq a_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!] s]) \checkmark$$

Si $b = \neg b_1$

$$\mathcal{B}[\![(\neg b_1)[y \to a_0]]\!]s \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}[\![\neg(b_1[y \to a_0])]\!]s = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y \to a_0]]\!]s = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y \to a_0]]\!]s = tt. \end{cases}$$

$\Vert$?

$$\mathcal{B}[\![\neg b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = ff \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = tt. \end{cases}$$

Para ver que se cumple ? solo basta comprobar que

$\mathcal{B}[\![b_1[y \to a_0]]\!]s = \mathcal{B}[\![b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$, pero esto es cierto por HI.

Si $b = b_1 \wedge b_2$

$$\mathcal{B}[\![(b_1 \wedge b_2)[y \to a_0]]\!]s = \mathcal{B}[\![(b_1[y \to a_0]) \wedge (b_2[y \to a_0])]\!]s =$$

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y \to a_0]]\!]s = tt \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2[y \to a_0]]\!]s = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1[y \to a_0]]\!]s = ff \text{ o } \mathcal{B}[\![b_2[y \to a_0]]\!]s = ff \end{cases}$$

$\Vert \leftarrow$ HI. para b_1 y b_2

$$= \begin{cases} tt & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = tt \text{ y } \mathcal{B}[\![b_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = tt \\ ff & \text{si } \mathcal{B}[\![b_1]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = ff \text{ o } \mathcal{B}[\![b_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) = ff \end{cases} =$$

$$= \mathcal{B}[\![b_1 \wedge b_2]\!](s[y \to \mathcal{A}[\![a_0]\!]s]) \quad ✓$$