INVESTIGACIÓN OPERATIVA – DOBLES GRADOS – 26/01/2021

1. (1.50 puntos) Se considera el problema (P) de programación lineal en forma estándar:

$$\min\left\{ c^t x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \right\}$$

donde A es una matriz $m \times n$ con rg(A)=m, b es un vector de dimensión m y c es un vector de dimensión n.

Demostrar el siguiente teorema:

Teorema 10. *Sea* $\bar{x}$ *una solución básica factible de (P) asociada a una base B.* $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (a_1, \dots, a_m)$, $Y_j \coloneqq B^{-1}a_j$ *y* $\bar{c}_j \coloneqq c_j - c_B^t B^{-1} a_j$ *para todo* $j \in \{1, \dots, n\}$.

Si existe $k \in \{m+1, \dots, n\}$, $k = m + t$, *tal que* $\bar{c}_k < 0$ *y alguna componente de* Y_k *es positiva, entonces el vector*

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} d^k, \quad \text{donde} \quad \frac{\bar{x}_l}{y_{lk}} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, i \in \{1, \dots, m\} \text{ con } y_{ik} > 0 \right\} \quad y \quad d^k = \begin{pmatrix} -Y_k \\ e_t \end{pmatrix},$$

es una solución básica factible tal que $c^t \bar{\bar{x}} \leq c^t \bar{x}$. *Además,* $c^t \bar{\bar{x}} < c^t \bar{x}$ *si, y sólo si,* $\bar{x}_l > 0$.

2. (1.50 puntos) Se desea resolver el siguiente problema, aplicando el *método de las dos fases*:

$$\begin{aligned} Max \quad & z = 2x_1 + x_2 + 2x_4 - 3x_5 \\ s.a.: \quad & 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 18 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

Debes completar únicamente la **Fase I**, del método de las dos fases. En caso de producirse empate en la aplicación de la regla de la razón mínima, debes aplicar la regla lexicográfica, explicando su aplicación

Solución.

Fase I.

$$\begin{aligned} Min \quad & w = x_7 + x_8 \\ s.a.: \quad & 3x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 4x_4 + x_7 = 18 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_8 = 2 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0,\ x_8 \geq 0. \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_7	3	4	10	–4	0	0	1	0	18
X_8	–1	1	2	1	–1	0	0	1	2
x_6	1	1	2	–1	0	1	0	0	4
	2	1	0	2	–3	0	0	0	Z – 0
	–2	–5	–12	3	1	0	0	0	W – 20

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_7	8	–1	0	–9	5	0	1	–5	8
x_3	–1/2	1/2	1	1/2	–1/2	0	0	1/2	1
x_6	2	0	0	–2	1	1	0	–1	2
	2	1	0	2	–3	0	0	0	Z – 0
	–8	1	0	9	–5	0	0	6	W – 8

Aplicación de la Regla Lexicográfica.

Se produce empate al aplicar la regla de la razón mínima. Se decide, que variable debe salir de la base, mediante la regla lexicográfica. Por tanto, deben considerarse la matriz V_B y el vector Y_1 siguientes:

$$V_B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deben compararse lexicográficamente los vectores:

$$(1 \quad 1/8 \quad -5/8 \quad 0) \qquad \text{y} \qquad (1 \quad 0 \quad -1/2 \quad 1/2).$$

La comparación de las segundas componentes de los dos vectores, decide que debe salir de la base la variable x_6, por ser el segundo de los dos vectores el lexicográficamente menor.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_7	0	–1	0	–1	1	–4	1	–1	0
x_3	0	1/2	1	0	–1/4	1/4	0	1/4	3/2
x_1	1	0	0	–1	1/2	1/2	0	–1/2	1
	0	1	0	4	–4	–1	0	1	Z – 2
	0	1	0	1	–1	4	0	2	W – 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	–1	0	–1	1	–4	1	–1	0
x_3	0	1/4	1	–1/4	0	–3/4	1/4	0	3/2
x_1	1	1/2	0	–1/2	0	5/2	–1/2	0	1
	0	–3	0	0	0	–17	4	–3	Z – 2
	0	0	0	0	0	0	1	1	W – 0

FIN de la **Fase I**

3. (1 punto) Método de la Restricción Artificial.

4. (1 punto) Se considera el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2\,x_1 + x_2 + x_3 \\ s.a.: \ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

cuya solución óptima se presenta en la siguiente tabla (siendo x_4 y x_5 las variables de holgura):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	–1/3	2/3	–1/3	8/3
x_2	0	1	3	–1	1	2
	0	0	–4/3	–1/3	–1/3	*Z* – (22/3)

A partir de la tabla óptima anterior, resolver el problema de post-optimización resultante al modificar el vector de términos independientes, considerando: $\acute{b}^t = (3,\ 10)$.

Solución.

Calculando los nuevos valores de las variables básicas se obtiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	**1**	**0**	**–1/3**	**2/3**	**–1/3**	**–4/3**
x_2	**0**	**1**	**3**	**–1**	**1**	**7**
	0	**0**	**–4/3**	**–1/3**	**–1/3**	***Z* – (13/3)**

Se aplica el algoritmo dual del Simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_5	**−3**	**0**	**1**	**−2**	**1**	**4**
x_2	**3**	**1**	**2**	**1**	**0**	**3**
	−1	**0**	**−1**	**−1**	**0**	***Z* – 3**

Solución óptima única: $\boldsymbol{x_1^* = 0,\ x_2^* = 3,\ x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 4,\ \ z^* = 3.}$

5. (1punto) En una central hidroeléctrica debe decidirse cada 24 horas las turbinas que se pondrán en marcha durante los tres periodos de 8 horas en que se divide la planificación diaria para satisfacer la demanda de la población a la que se atiende. La central dispone de cuatro turbinas, que pueden funcionar parcialmente, cuyas características por periodo de 8 horas se describen en la tabla (los costes se expresan en determinada unidad monetaria)

Turbina	***Coste de puesta en marcha por periodo***	***Coste unitario de MW producido***	***Capacidad máxima por periodo (MW)***
A	**2000**	**0.55**	**3400**
B	**1500**	**0.60**	**2300**
C	**2700**	**0.65**	**4000**
D	**2500**	**0.71**	**3800**

La demanda estimada en ***MW*** en un cierto día para el primer periodo es **5100**, para el segundo **10500** y para el tercero **7000**. Una turbina utilizada en un periodo puede utilizarse también en otros periodos posteriores añadiendo los correspondientes costes de puesta en marcha.
Formular el problema de programación lineal que determine qué turbinas deben conectarse y en qué medida deben utilizarse, durante las 24 horas consideradas.

Solución:

Se consideran las variables de decisión continuas:

x_{ij} denota la cantidad de MW producidos por la turbina *i* en el periodo *j*,

$$i = A, B, C, D, \qquad j = 1, 2, 3.$$

y las variables de decisión binarias:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha la turbina } i \text{ en el periodo } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$i = A, B, C, D, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Se debe resolver el problema:

$$\min \quad 0.55(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3})+0.60(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3})+\ 0.65(x_{C1}+x_{C2}+x_{C3})$$
$$+0.71(x_{D1}+x_{D2}+x_{D3})+2000(y_{A1}+y_{A2}+y_{A3})+1500(y_{B1}+y_{B2}+y_{B3})$$
$$+2700(y_{C1}+y_{C2}+y_{C3})+2500(y_{D1}+y_{D2}+y_{D3})$$

s.a.:

$$x_{A1}+x_{B1}+x_{C1}+x_{D1}\geq 5100$$
$$x_{A2}+x_{B2}+x_{C2}+x_{D2}\geq 10500$$
$$x_{A3}+x_{B3}+x_{C3}+x_{D3}\geq 7000$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{Ai}\leq 3400\,y_{Ai} \\ x_{Bi}\leq 2300\,y_{Bi} \\ x_{Ci}\leq 4000\,y_{Ci} \\ x_{Di}\leq 3800\,y_{Di} \end{array}\right\} \quad i=1,2,3,$$

$$x_{ij}\geq 0 \quad \text{para} \quad i=A,B,C,D, \quad j=1,2,3,$$

$$y_{ij}\in\{0,1\}, \quad \text{para} \quad i=A,B,C,D, \quad j=1,2,3.$$

6. (1 punto) Resolver, aplicando el método de planos de corte, el siguiente problema:

$$\min \ -2x_1+x_2+x_3+2x_5$$
$$s.a.:\ \begin{array}{l} 2x_1+2x_2-x_3+x_4 \qquad = 3 \\ 2x_1-x_2+x_3 \qquad +x_5 = 8 \end{array}$$
$$x_j\geq 0 \quad j=1,\dots,5,$$
$$x_j \ \ entero\ para\ \ j=2,3.$$

La solución óptima del problema de programación lineal correspondiente a la relajación continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	1/4	0	1/4	1/4	11/4
x_3	0	−3/2	1	−1/2	1/2	5/2
	0	3	0	1	2	$Z-(-3)$

Solución.

Considerando como ecuación generatriz del corte: $-\frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{5}{2}$,

se obtiene el corte:

$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

Introduciendo la anterior desigualdad y denotando por x_6 la correspondiente variable de holgura, se obtiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**1/4**	**0**	**11/4**
x_3	**0**	**–3/2**	**1**	**–1/2**	**1/2**	**0**	**5/2**
x_6	**0**	**–1/2**	**0**	**–1/2**	**–1/2**	**1**	**–1/2**
	0	**3**	**0**	**1**	**2**	**0**	$\boldsymbol{Z-(-3)}$

Se ejecuta el algoritmo dual del Simplex.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/2**	**5/2**
x_3	**0**	**–1**	**1**	**0**	**1**	**–1**	**3**
x_4	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**–2**	**1**
	0	**2**	**0**	**0**	**1**	**2**	$\boldsymbol{Z-(-2)}$

Solución óptima única: $\boldsymbol{x_1^*= 5/2}$, $\boldsymbol{x_2^*=0}$, $\boldsymbol{x_3^*=3}$, $\boldsymbol{x_4^*=1}$, $\boldsymbol{x_5^* = 0}$, $\boldsymbol{z^*= -2}$

7. (1 punto) Resolver el siguiente problema de programación no lineal, calculando todos los puntos que sean solución de las ecuaciones de Fritz-John o de Kuhn-Tucker, e identificando adecuadamente el mínimo global.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 4x_2 \\ s.a.: \quad & x_1^2 + x_2^2 - 20 \leq 0 \\ & -x_1^2 + x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Se calculan los gradientes de las siguientes funciones:

$$f(x_1, x_2) = x_1 - 4x_2 \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_1(x_1,\ x_2) = \ x_1^2 + x_2^2 - 20 \qquad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$g_2(x_1,\ x_2) = \ -x_1^2 + x_2 \qquad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar:

$$u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente:

$$u_0 + 2u_1x_1 - 2u_2x_1 = 0$$
$$-4u_0 + 2u_1x_2 + u_2 = 0$$

Se tienen las condiciones de Fritz John:

$$u_0 + 2u_1x_1 - 2u_2x_1 = 0$$
$$-4u_0 + 2u_1x_2 + u_2 = 0$$

$$u_1(x_1^2 + x_2^2 - 20) = 0$$

$$u_2(-x_1^2 + x_2) = 0$$

$u_0 \geq 0,\ u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,$ no todos nulos.

I) Se estudia la posibilidad de que ninguna restricción sea activa.
En este caso $u_0,\ u_1\ y\ \ u_2$ deberían ser nulos.

II) Se estudia la posibilidad de que las dos restricciones sean activas.

$$x_1^2 + x_2^2 - 20 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2 = 0$$

Se deben estudiar $x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ es punto de Kuhn-Tucker con $u_0 = 1,\ u_1 = \frac{17}{36},\ u_2 = \frac{2}{9}$

$x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ es punto de Kuhn-Tucker con $u_0 = 1,\ u_1 = \frac{5}{12},\ u_2 = \frac{2}{3}$

II) Se estudia la posibilidad de que una de las dos restricciones sea activa.

a)

$$x_1^2 + x_2^2 - 20 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$

Debe ser $u_0 = 1$ y deben verificarse las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 1 + 2u_1 x_1 = 0 \\ -4 + 2u_1 x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2\,u_1},\ x_2 = \frac{2}{u_1}$$

La condición de que la primera restricción sea activa implica:

$$u_1 = \sqrt{\frac{17}{80}}\ , \qquad x_1 = -\sqrt{\frac{20}{17}}\ , \qquad x_2 = 4\sqrt{\frac{20}{17}}$$

El punto obtenido no verifica la segunda restricción, siendo, por tanto, infactible.

b)

$$x_1^2 + x_2^2 - 20 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2 = 0$$

Debe ser $u_0 = 1$ y deben verificarse las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 2u_2 x_1 = 0 \\ -4 + u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_2 = 4, \quad x_1 = \frac{1}{8}$$

La condición de que la segunda restricción sea activa implica:

$$x_2 = \frac{1}{64}$$

$x^3 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/64 \end{pmatrix}$ es punto de Kuhn-Tucker con $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 4$

Evaluando la función objetivo ($f(x_1,\ x_2) = x_1 - 4x_2$) en los tres puntos que cumplen las condiciones necesarias, se obtiene:

$$x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f(x^1) = -18$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = -14$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/64 \end{pmatrix} \qquad f(x^3) = \frac{1}{16}$$

Por tanto, la solución óptima es

$$x^* = x^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$