ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 6

1. Sean f una función entera y A, B, k números positivos tales que
$$|f(z)| \leqslant A + B|z|^k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Demuestra que f debe ser un polinomio.

2. Demuestra que si f es una función entera tal que $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ tiene un punto interior, entonces f es constante.

3. Sea f una función entera tal que $|f(z)| \geqslant |z|$. ¿Qué se puede decir de f?

4. Sea f una función entera. Si $R > 0$, a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, $|a| < R$, $|b| < R$, calcula
$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$
Deduce el Teorema de Liouville.

5. Desarrolla en serie de Taylor:

a) e^z, en $z_0 = 1$; b) $(3z+1)^{-1}$, en $z_0 = -2$; c) $\cos^2 \dfrac{iz}{2}$, en $z_0 = 0$.

6. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω que contiene al disco unidad cerrado $\overline{D}(0,1)$. Si
$$f(e^{i\theta}) = \frac{a - \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}, \qquad (a > 1),$$
halla f.

7. Desarrolla en serie de potencias de $(z - z_0)$ cada una de las siguientes funciones y halla el radio de convergencia de cada una de las series obtenidas:

a) $f(z) = \dfrac{z}{i + z^2}$, $z_0 = 0$ y $z_0 = 1$;

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 + 4z - 5}$, $z_0 = 0$;

c) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+2)^2}$, $z_0 = 0$;

d) $f(z) = \log \dfrac{2+z}{2-z}$, $z_0 = 0$;

e) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-1)^2}$, $z_0 = -1$;

f) $f(z) = \cos(2z - z^2)$, $z_0 = 1$.

8. Desarrolla en serie de potencias de $z + i$ la función $f(z) = \log(4 - iz)$, eligiendo la determinación del logaritmo para la cual $f(0) = \log 4 - 2\pi i$. Determina la región de convergencia.

9. Sea $a \in \mathbb{C}$. Se definen los números combinatorios generalizados por $\binom{a}{0} = 1$ y
$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
Demuestra que
$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n, \qquad |z| < 1,$$
donde se considera la determinación principal de la función potencial del lado izquierdo.

10. Calcula los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en $z = 0$ de la función:

a) $\dfrac{1}{1+e^z}$; b) $e^z \cos z$; c) $\operatorname{tg} z$; d) $\sqrt{z^2-1}$;

e) $e^{\frac{1}{1-z}}$; f) $\log(1+e^{-5})$; g) $\log(1+\cos z)$.

11. Halla los ceros de las siguientes funciones y determina sus ordenes:

a) $z^4 + 2z^2 + 1$; b) $z^3 \cos^2 z$; c) $\left(1 - e^{iz}\right) \operatorname{sen} z$.

12. Halla el orden del cero $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 z}{z}$; b) $e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}$; c) $6 \operatorname{sen}^3 z + z^3(z^6 - 6)$;

d) $\left(e^z - e^{z^2}\right) \log(1-z)$; e) $\dfrac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} z}{2}\right)^2}$.

13. Sea $D = D(0;2)$. ¿Existe alguna función holomorfa en D que verifique $f\left(\frac{i}{n}\right) = -\frac{1}{n^2}$ y $f\left(\frac{n+2}{n}\right) = \frac{1}{n}$, $n = 4, 5, 6, \ldots$?

14. Sean f y g dos funciones holomorfas que no se anulan en $D(0;1)$. Demuestra que si

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

entonces $f = cg$ para alguna constante $c \in \mathbb{C}$ no nula.