Examen de prueba Estadística.

Juan Carlos Llamas Núñez 11867802-D

Juan Carlos

1.- Sea $(X_1 \dots X_n)$ m.a.s. $X \sim Poisson(\lambda)$ con función de masa

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{con } x = 0,1,2 \dots \text{ y } \lambda > 0$$

Construir el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ frente a $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

Para realizar este contraste tenemos que calcular

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \{ f(x_1 \dots x_n | \theta) \}}{\sup_{\theta \in \Theta} \{ f(x_1 \dots x_n | \theta) \}}$$

Para ello vamos a calcular la función de verosimilitud

$$L(\theta | x_1 \dots x_n) = f(x_1 \dots x_n | \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!} =$$

$$= \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Preferimos trabajar con la función soporte que es

$$\ell(\theta | x_1 \dots x_n) = Ln(L(\theta | x_1 \dots x_n)) = -n\lambda + \sum x_i Ln \lambda - Ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)$$

$$\ell'(\theta | x_1 \dots x_n) = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \iff \lambda = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\ell''(\theta | x_1 \dots x_n) = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2} < 0$$ Por tanto $\lambda = \bar{x}$ es el máximo

para la función de verosimilitud y $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \in \Theta = (0, \infty)$

siempre y cuando no todos los x_i sean 0.

En ese caso $L(\theta / x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0) = e^{-n\lambda}$ que no alcanza el máximo cuando $\lambda \in (0, \infty)$.

$$\Rightarrow \sup_{\lambda \in (0,\infty)} L(\theta / x_1 \cdots x_n) = \frac{e^{-n\bar{x}} \, \bar{x}^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Por otro lado, como el máximo se alcanza en $\lambda = \bar{x}$, si $\lambda \leq \lambda_0$, entonces

$$\sup_{\lambda \in (0,\lambda_0]} (L(\theta / x_1 \cdots x_n)) = \begin{cases} L(\lambda_0) & \text{si } \lambda_0 < \bar{x} \\ L(\bar{x}) & \text{si } \lambda_0 \geq \bar{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(x_1 \cdots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_0 \geq \bar{x} \\ \dfrac{\dfrac{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}{\dfrac{e^{-n\bar{x}} \bar{x}^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}} & \text{si } \lambda_0 < \bar{x} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_0 \geq \bar{x} \\ e^{-n(\lambda_0 - \bar{x})} \left(\dfrac{\lambda_0}{\bar{x}}\right)^{\sum x_i} & \lambda_0 < \bar{x} \end{cases}$$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI [redacted]

Juan Carlos

Si denotamos por $y = \bar{x}$ y consideramos la función

$$\lambda(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_0 \geq y \\ e^{-n\lambda_0} \cdot e^{ny} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{y}\right)^{ny} & \text{si } \lambda_0 < y \end{cases}$$

Como solo nos va a interesar el crecimiento de la función

$e^{-n\lambda_0} \cdot e^{ny} \left(\frac{\lambda_0}{y}\right)^{ny}$ podemos estudiar el crecimiento de la función neperiano que es:

$$Ln(\lambda(y))\Big|_{\lambda_0 < y} = -n\lambda_0 + ny + ny\, Ln\left(\frac{\lambda_0}{y}\right) = -n\lambda_0 + ny + ny\, Ln(\lambda_0) - ny\, Ln\, y$$

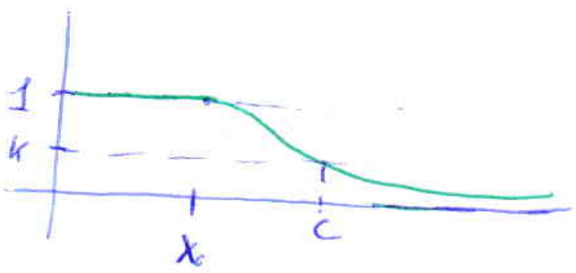
Así la derivada es

$$\frac{\partial\, Ln(\lambda(y))\Big|_{\lambda_0 < y}}{\partial y} = n + n\, Ln(\lambda_0) - n\left(Ln\, y + y/y\right) =$$

$$= \cancel{n} + n\, Ln(\lambda_0) - n\, Ln\, y - \cancel{n} = n\left(Ln(\lambda_0) - Ln\, y\right) < 0$$

porque $y > \lambda_0$

Por tanto la función es decreciente en $T(X_1 - - X_n) = \bar{X}$



Juan Carlos Llamas Núñez

DNI: 11867802-D

Juan Carlos

Como la función es decreciente en $\bar{x}$ y la región de rechazo viene dada por

$$RC = \{(x_1 \ldots x_n) \mid \lambda(x_1 \ldots x_n) \leq k\} = \{(x_1 \ldots x_n) \mid \bar{x} \geq c\}$$

y se tiene que verificar que $\alpha = \sup_{\theta} P\{RC \mid \theta \in \Theta_0\}$

$$\Rightarrow \alpha = \sup_{\lambda \in (0,\lambda_0)} \{P(RC \mid \lambda)\} = P\{\bar{X} \geq c \mid \lambda = \lambda_0\} =$$

$$= P\{n\bar{X} \geq nc \mid \lambda = \lambda_0\} \underset{\uparrow}{=} F_{Poisson(n\lambda_0)}(nc)$$

$\sum X_i \sim Poisson(n\lambda_0)$
porque $X_i \sim Poisson(\lambda_0)$

De aquí podríamos intentar despejar c en función de α con $c = c(\lambda)$ y el contraste quedaría como

$$\phi(x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X} > c(\lambda) \\ a & \text{si } \bar{X} = c(\lambda) \\ 0 & \text{si } \bar{X} < c(\lambda) \end{cases}$$

Con a tras realizar un test aleatorizado por ser la distribución discreta y que dejamos indicado por no conocer el valor de α

Juan Carlos Llamas Núñez   Juan Carlos

DNI 11867802-D