Ejercicio 6.- Sea $(X_1 \cdots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\theta, 1)$. Dada la distribución a priori $\pi(\theta) \sim N(0,1)$, contrastar $H_0 : \theta \geq 0$ frente a $H_1 : \theta < 0$.

— × — × — × —

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la distribución a posteriori de θ.

Sabemos que si $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ y $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

entonces $\pi(\theta | x_1 \cdots x_n) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

con $\mu_1 = \dfrac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$ y $\sigma_1^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$

Para $\mu_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 1$ y $\sigma^2 = 1$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{n\bar{x}}{n+1} \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{n+1}$$

Ahora la región de rechazo viene dada por

$R = \{(x_1 \cdots x_n) \mid P(\theta \geq 0) < P(\theta < 0)\}$ donde estas probabilidades se calculan mediante la distribución a posteriori:

$$P(\theta \geq 0) < P(\theta < 0) \iff P(\theta \geq 0) < \frac{1}{2}$$

$$P(\theta \geq 0) = P\left(\frac{\theta - \frac{n\bar{x}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \geq \frac{\frac{-n\bar{x}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right) \underset{\theta \sim N\left(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)}{=} P\left(Z \geq \frac{-n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right)$$