Lección 1

Definiciones básicas y ejemplos

En esta lección se introducen algunas de las definiciones y propiedades básicas de la teoría de las superficies en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$. El punto de vista adoptado es esencialmente diferente del empleado en el caso de las curvas: si las curvas han sido definidas como *aplicaciones,* las superficies son *subconjuntos* del espacio euclídeo, que se pueden *parametrizar localmente* mediante aplicaciones diferenciables definidas en abiertos del plano, es decir mediante dos parámetros independientes. Las parametrizaciones nos permiten trasladar conceptos y objetos geométricos del plano a las superfices y recíprocamente. La teoría que se establece así es *local,* en el sentido de que se estudian propiedades de la superficie en el entorno de un punto de la misma. Las parametrizaciones utilizadas cubren, en general, sólo una parte de la superficie y a menudo no es posible encontrar una parametrización que describa la superficie total. La esfera es el ejemplo más inmediato de esta situación.

Definición 1.1. Un subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ recibe el nombre de *superficie (diferenciable)* si para cada punto $p \in S$ existe una aplicación $\varphi : U \to S$ definida en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, tal que:

(1) φ es un homeomorfismo de U sobre un entorno abierto $W = \varphi(U)$ de p en S (es decir, $W = V \cap S$ para cierto entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$),

(2) φ es diferenciable, es decir, tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes (como aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$),

(3) la aplicación lineal derivada $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

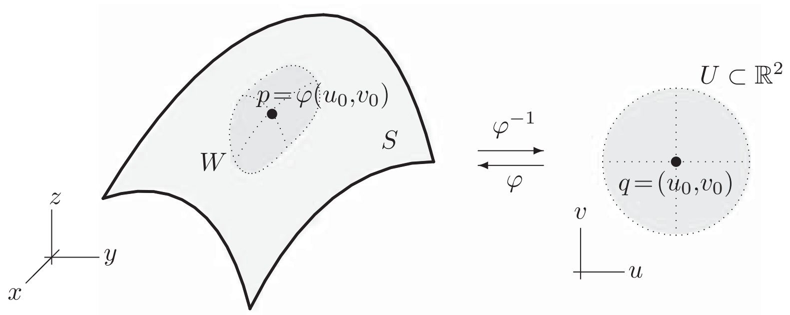
En lo que sigue emplearemos la notación $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $x(u, v), y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones reales de las variables u, v. A su vez, u y v reciben el nombre de *coordenadas locales* del punto $\varphi(u, v)$ de S. Estas coordenadas desempeñan un papel semejante al de las coordenadas cartesianas en la geometría del plano. La aplicación lineal $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está representada por la *matriz jacobiana*

$$J_\varphi(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix},$$

y la condición (3) de la definición anterior equivale a que $J_\varphi(q)$ tenga rango 2.

Advertimos ahora ya que en este texto indicaremos casi siempre las derivadas parciales mediante subíndices: x_u por $\frac{\partial x}{\partial u}$, x_v por $\frac{\partial x}{\partial v}$, etcétera. Es una notación muy sencilla que mejora enormemente la legibilidad, aunque algunas veces convenga utilizar también la notación estándar.

La aplicación $\varphi : U \to S$ recibe el nombre de *parametrización (local) de* S. De hecho, φ parametriza el entorno W de p que, en consecuencia, recibe el nombre de *entorno coordenado de* p.



La condición (1) de la definición significa que el plano y S son *localmente homeomorfos,* y las dos condiciones adicionales (2) y (3) que son lo que más tarde denominaremos *localmente difeomorfos.* Hay aquí una importante distinción entre lo puramente topológico y lo diferencial. Por otra parte, la condición (1) no es consecuencia de (2) y (3), pero se tiene una implicación más débil que es útil para construir superficies:

Proposición 1.2. *Sea V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y sea $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable con derivada $d_q\varphi$ inyectiva en un punto $q \in V$. Entonces ese punto tiene un entorno abierto $U \subset V$ cuya imagen $S = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\varphi|U$ una parametrización de S.*

Demostración. En primer lugar, $J_\varphi(q)$ tendrá un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo el correspondiente a (x, y), y reduciendo V podemos suponer que es no nulo en todo punto de V. Así, es la condición (1) de la definición de superficie la que deseamos conseguir. Para ello definimos $\widetilde{\varphi} : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ por $\widetilde{\varphi}(u, v, w) = \varphi(u, v) + (0, 0, w)$. Claramente, el determinante jacobiano de $\widetilde{\varphi}$ en $(q, 0)$ es el menor de orden 2 de $J_\varphi(q)$ que hemos seleccionado antes, y por tanto es no nulo. En consecuencia, por el teorema de inversión local $\widetilde{\varphi}$ es un difeomorfismo local en $(q, 0)$, es decir, existen entornos abiertos $U \subset V$ de q y $W \subset \mathbb{R}$ de 0 tales que $\widetilde{\varphi}(U \times W)$ es abierto en $\mathbb{R}^3$ y $\widetilde{\varphi}$ induce por restricción un difeomorfismo de $U \times W$ sobre $\widetilde{\varphi}(U \times W)$. En particular, induce un homeomorfismo de $U \times \{0\}$ sobre $\widetilde{\varphi}(U \times \{0\}) = \varphi(U)$ y por ello $\varphi : U \to \varphi(U)$ es homeomorfismo. Ésta es la condición (1) deseada. ∎

Observación 1.3. (1) Si $h : U' \to U$ es un difeomorfismo entre dos abiertos del plano, la composición $\psi = \varphi \circ h : U' \to S$ es otra parametrización local.

(2) Si $\varphi : U \to S$ es una parametrización local entonces para todo abierto no vacío $U_0 \subset U$ la restricción $\varphi|U_0 : U_0 \to S$ es también una parametrización local. Esto se aplica por ejemplo a cualquier imagen inversa $U_0 = \varphi^{-1}(W_0)$ de un subconjunto abierto W_0 de $W = \varphi(U)$. También sirve para conseguir entornos U_0 de q especiales (por ejemplo un disco).

(3) Dada la naturaleza local de las definiciones, cualquier subconjunto abierto de una superficie diferenciable es a su vez una superficie diferenciable. De hecho, un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable si y sólo si es unión de subconjuntos abiertos suyos que son superficies diferenciables. ∎

En relación con la última observación, en ocasiones interesa trabajar con familias de parametrizaciones locales que conjuntamente recubren la totalidad de la superficie. En la siguiente definición fijamos este concepto.

Definición 1.4. Se llama *atlas* de una superficie S a una familia $\mathcal{A}$ de parametrizaciones locales $\varphi_i : U_i \to S$ tal que

$$S = \bigcup\nolimits_i \varphi_i(U_i).$$

(1.5) Cambios de coordenadas. Como una superficie admite muchas parametrizaciones locales diferentes es necesario conocer la expresión que relaciona las coordenadas en aquellas regiones de la superficie en que dos parametrizaciones se solapan. Usaremos la siguiente terminología.

Sean $\varphi : U \to S$ y $\psi : U' \to S$ dos parametrizaciones de una superficie diferenciable S. Si se cumple $\varphi(U)\cap\psi(U')\neq\varnothing$ entonces la aplicación

$$\varphi^{-1}\circ\psi:\psi^{-1}(\varphi(U))\to\varphi^{-1}(\psi(U'))$$

es un homeomorfismo entre dos abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^2$. Este homeomorfismo se denomina *cambio de coordenadas,* pues expresa las coordenadas (u,v) definidas por la parametrización φ como funciones de las coordenadas (s,t) definidas por la parametrización ψ. De manera análoga se tiene el cambio inverso $\psi^{-1}\circ\varphi$. Más adelante volveremos sobre estos homeomorfismos. ▮

(1.6) Líneas coordenadas. Consideremos de nuevo una parametrización local $\varphi:U\to S$ de una superficie $S\subset\mathbb{R}^3$. Si fijamos un punto $q=(u_0,v_0)\in U$, tenemos que existe $\varepsilon>0$ tal que

$$(u_0-\varepsilon,u_0+\varepsilon)\times(v_0-\varepsilon,v_0+\varepsilon)\subset U,$$

de modo que la aplicación $\Gamma:u\mapsto\varphi(u,v_0)$ define una curva parametrizada en el intervalo $(u_0-\varepsilon,u_0+\varepsilon)$, cuya traza está contenida en $W=\varphi(U)\subset S$ y pasa por el punto $p=\varphi(u_0,v_0)$. Esta curva recibe el nombre de *línea coordenada* $v=v_0$, y tiene como vector tangente en p el vector

$$\Gamma'(u_0)=\lim_{u\to u_0}\frac{\varphi(u,v_0)-\varphi(u_0,v_0)}{u-u_0}=\varphi_u(q)=(x_u(q),y_u(q),z_u(q));$$

denotaremos $\varphi_{u,p}$, o si no hay riesgo de confusión φ_u, este vector. Análogamente se define la línea coordenada $u=u_0$, cuyo vector tangente $\varphi_v(q)=(x_v(q),y_v(q),z_v(q))$ denotamos $\varphi_{v,p}$ o φ_v. Obsérvese que los vectores tangentes $\varphi_{u,p}$ y $\varphi_{v,p}$ son precisamente las columnas de la matriz de $d_q\varphi$:

$$\varphi_{u,p}=d_q\varphi(1,0),\quad \varphi_{v,p}=d_q\varphi(0,1).$$

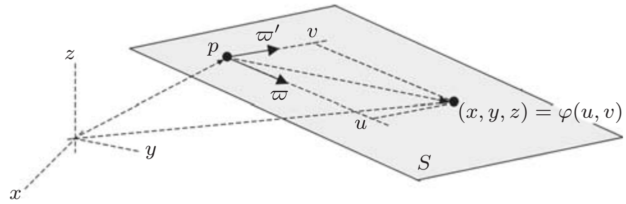
Esto implica que los dos vectores son independientes y en particular ninguno es nulo, de modo que las dos curvas coordenadas son regulares. ▮

A continuación se presentan algunos ejemplos importantes de superficies.

Ejemplos 1.7. (1) Los planos son superficies diferenciables.

En efecto, sea $S\subset\mathbb{R}^3$ el plano afín que pasa por el punto $p\in\mathbb{R}^3$ con dirección $\overrightarrow{S}$. Sean $\varpi=(\varpi_1,\varpi_2,\varpi_3)$ y $\varpi'=(\varpi_1',\varpi_2',\varpi_3')$ dos vectores unitarios perpendiculares entre sí que generan $\overrightarrow{S}$ (una base ortonormal de $\overrightarrow{S}$). El plano S se parametriza linealmente de la manera habitual mediante

$$\varphi:\mathbb{R}^2\to S\subset\mathbb{R}^3:(u,v)\mapsto p+u\varpi+v\varpi'.$$



Ésta es de hecho una parametrización global de S en el sentido de la definición de superficie diferenciable. Para verlo conviene observar que por ser ϖ y ϖ' unitarios y perpendiculares, las coordenadas u y v se expresan mediante productos escalares como sigue:

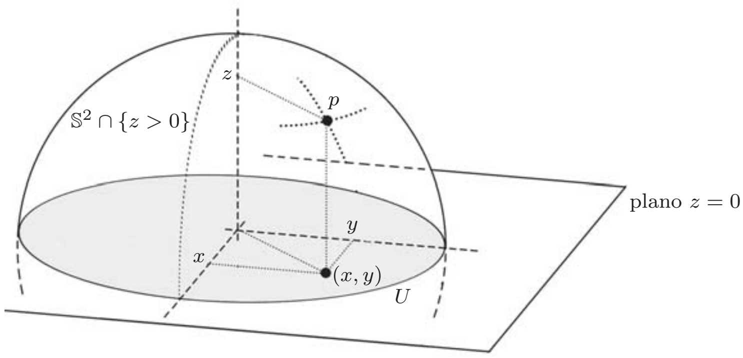
$$u = (x - p)\varpi, \quad v = (x - p)\varpi'.$$

lo que muestra que $\varphi^{-1} : x \mapsto (u, v)$ es continua. La parametrización es diferenciable por ser lineal, y su matriz jacobiana tiene por columnas los vectores ϖ y ϖ' que son independientes, luego el rango es 2.

(2) La *esfera unidad* de $\mathbb{R}^3$ es el subconjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Este es un ejemplo importante de superficie. Una manera de justificar esta afirmación es proyectar la esfera sobre planos ecuatoriales. Por ejemplo, el hemisferio abierto superior $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$ de la esfera se proyecta sobre el disco abierto $U : x^2 + y^2 < 1$ del plano $z = 0$.



Esta proyección es un homeomorfismo cuyo inverso es la aplicación diferenciable $\varphi(x, y) = \big(x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2}\big)$. La matriz jacobiana de esta aplicación es del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

luego tiene siempre rango 2. La esfera se puede recubrir en su totalidad mediante seis parametrizaciones análogas a la anterior (¿por qué tantas?) y, por 1.3(3), p. 3, es una superficie.

(3) Otra superficie familiar es el *cilindro circular* $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. En este caso podemos proyectar sobre planos que contengan al eje de las z's. Por ejemplo, sobre dos planos, desde los dos lados de cada uno, cuatro proyecciones; o mejor sobre tres planos, desde un lado de cada uno, tres proyecciones.

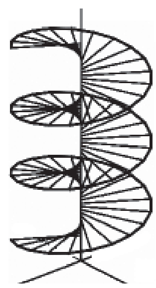
(4) Si partimos de una hélice circular

$$\zeta(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, bu), \quad b > 0,$$

y consideramos la unión S de todas las rectas que pasan por puntos de esta hélice e intersecan ortogonalmente el eje z, es fácil ver que S es la imagen de la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (v \cos u, v \operatorname{sen} u, bu).$$

El conjunto S recibe el nombre de *helicoide* y es una superficie diferenciable. De hecho, φ es una parametrización de S. La aplicación φ es diferenciable y su matriz jacobiana en un punto dado es



$$\begin{pmatrix} -v \operatorname{sen} u & \cos u \\ v \cos u & \operatorname{sen} u \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

que como se comprueba inmediatamente, tiene siempre rango 2. En fin, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S$ es biyectiva, con inversa dada por:

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{z}{b}, \frac{x}{\cos(z/b)}\right) & \text{si} \cos(z/b) \neq 0, \\ \left(\frac{z}{b}, \frac{y}{\operatorname{sen}(z/b)}\right) & \text{si} \operatorname{sen}(z/b) \neq 0. \end{cases}$$

Esta misma expresión muestra que φ^{-1} es continua y φ es un homeomorfismo sobre S. Por tanto φ es una parametrización como se pretendía. ∎

Observación 1.8. Para establecer que un conjunto S es una superficie diferenciable, se procede a recubrir con las parametrizaciones que hagan falta. En ocasiones basta con una sola, que se califica de *global*. A este respecto hay que entender que minimizar el número de parametrizaciones depende en realidad de nuestra habilidad. Pero en última instancia, el número mínimo de parametrizaciones necesario tiene significado topológico, fuera del alcance en este texto, pero que puede ilustrarse en algunos ejemplos.

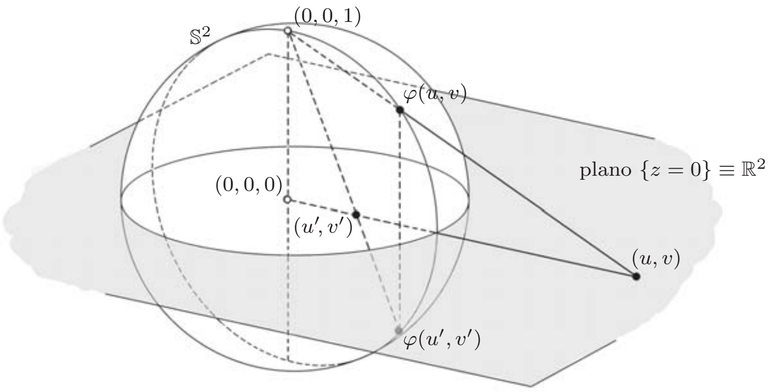
(1) La esfera puede cubrirse con dos parametrizaciones. En efecto, toda la esfera menos un punto puede parametrizarse mediante una *proyección estereográfica* desde el punto en cuestión. Por ejemplo, la proyección estereográfica desde el polo norte es la aplicación

$$W = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$

cuya inversa es la parametrización

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to W : (u,v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$

La figura siguiente ilustra estas aplicaciones.



Esta parametrización junto con cualquier otra que contenga el polo norte $(0,0,1)$ cubren la esfera. Y nunca basta una parametrización, pues, si bastara, la esfera sería homeomorfa a un abierto del plano, lo que es imposible por ser la esfera compacta.

(2) Un cilindro puede cubrirse con una parametrización global, de nuevo recurriendo a una proyección estereográfica. Por ejemplo, proyectando el tronco de cilindro $x^2+y^2=1$, $z<1$, desde el punto $(0,0,1)$ se obtiene un difeomorfismo

sobre el abierto del plano $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Obsérvese que el abierto U no es homeomorfo a un disco, de modo que aquí de nuevo interviene la topología. (Véase el prob. 7 de esta lección.) ∎

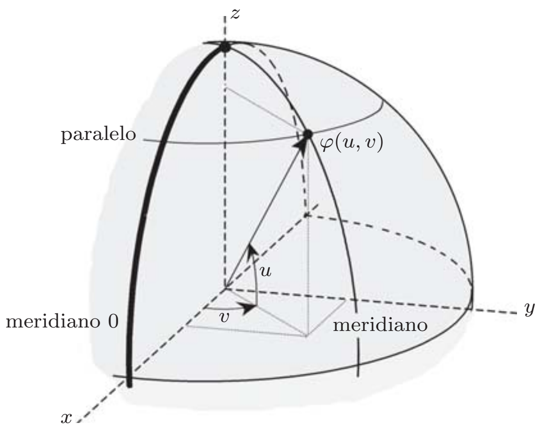
De la esfera conviene describir otra parametrización más, que apela a una terminología bien conocida.

Ejemplo 1.9. Vamos a formalizar en nuestro contexto los conceptos de *latitud* y *longitud*. Consideramos la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y definimos la aplicación siguiente:

$$\varphi : U = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2 : (u,v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u).$$

La imagen $W = \varphi(U)$ se identifica fácilmente: es el complementario en $\mathbb{S}^2$ del *meridiano cero,* formado por los puntos $(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2$ tales que $x \geq 0$.

Según vemos en la figura, u es la latitud y v la longitud del punto $p = \varphi(u,v)$, en el sentido habitual que conocemos en cartografía:



La aplicación φ es inyectiva, y que $\varphi : U \to W$ es abierta, y por tanto homeomorfismo, es un ejercicio sencillo que dejamos al lector. En fin, φ es diferenciable, y su matriz jacobiana

$$J_\varphi(q) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} u \cos v & -\cos u \operatorname{sen} v \\ -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 ($\cos u \neq 0$ en U). Por tanto, φ es una parametrización de la esfera.

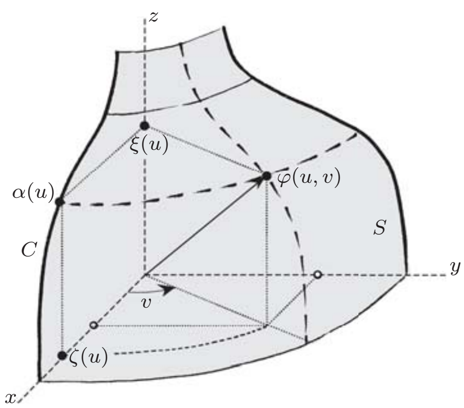
Las líneas coordenadas $u = u_0$ (curvas de latitud constante) son por supuesto los *paralelos,* y las $v = v_0$ (curvas de longitud constante) son los *meridianos.* ▮

Los conceptos de meridiano y paralelo corresponden en realidad a la siguiente construcción general, que presentamos con alguna restricción técnica que no la limita sustancialmente.

(1.10) Superficies de revolución. (1) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular cuya traza C está contenida en el semiplano xz con $x > 0$, y tal que $\alpha : I \to C$ es un homeomorfismo (en otras palabras, α es un arco de Jordan). En consecuencia, la curva se expresará como $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$ con $\zeta(u) > 0$. Efectuemos una rotación alrededor del eje z, y designemos por v el ángulo de esa rotación (medido a partir del semieje positivo x). Al variar el ángulo v obtenemos un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ descrito por las ecuaciones

$$x = \zeta(u)\cos v, \quad y = \zeta(u)\operatorname{sen} v, \quad z = \xi(u),$$

según ilustramos a continuación:



Decimos que S es la *superficie de revolución* generada por la curva C. Resulta que S es una superficie diferenciable.

En efecto, la aplicación

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)).$$

es, claramente, diferenciable, con matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \zeta'(u)\cos v & -\zeta(u)\operatorname{sen} v \\ \zeta'(u)\operatorname{sen} v & \zeta(u)\cos v \\ \xi'(u) & 0 \end{pmatrix};$$

esta matriz tiene rango 2 (como se comprueba fácilmente por ser $\zeta(u) > 0$ y $\alpha'(u) \neq 0$). En consecuencia, φ induce parametrizaciones locales en todos los abiertos $U \subset \mathbb{R}^2$ en que induzca un homeomorfismo sobre la imagen, y ésta sea un subconjunto abierto de S. Afirmamos que esto pasa para los del tipo $U = I\times(\theta, \theta+2\pi)$, para los que $\varphi(U)$ es toda S salvo el corte con el plano vertical que forma un ángulo θ con el plano coordenado $y = 0$.

Para verlo utilizaremos las parametrizaciones $\alpha(t)$ de C y $\Gamma(v) = (\cos v, \operatorname{sen} v)$, $\theta < v < \theta + 2\pi$, de la circunferencia menos el punto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; ambas parametrizaciones son homeomorfismos sobre su imagen. Ahora bien, para $(x, y, z) = \varphi(u, v) \in \varphi(U)$ se tiene $\zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que

$$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z), \qquad v = \Gamma^{-1}\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big).$$

Esto muestra que $\varphi|U : U \to \varphi(U)$ es inyectiva y que su inversa es continua.

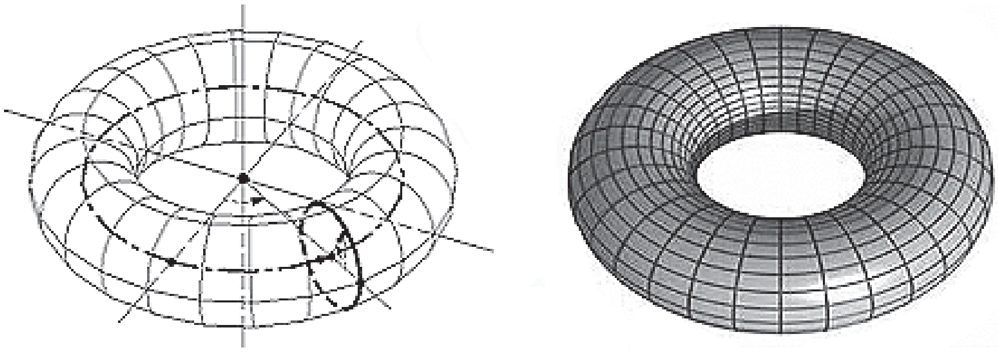
(2) Las curvas $v = v_0$: las intersecciones de S con los semiplanos verticales que contienen al eje de rotación y forman un ángulo v_0 con el plano xz. Sus vectores tangentes φ_u son los vectores tangentes a la curva obtenida al rotar C hasta ese plano, que se obtienen rotando los vectores $\alpha'(u)$. Naturalmente estas curvas son los *meridianos*. Por ejemplo, la imagen $W = \varphi(U)$ es toda la superficie S salvo el meridiano $v = \theta$.

(3) Las curvas $u = u_0$: las intersecciones de S con los planos horizontales $z = \xi(u)$. Sus vectores tangentes son $\varphi_v = \zeta(u)(-\operatorname{sen} v, \cos v, 0)$, tangentes a la circunferencia en ese plano. Estas curvas se llaman, claro, *paralelos*. ▮

Claramente la esfera *salvo los polos* es una superficie de revolución, y los paralelos y los meridianos son quienes deben ser. El cilindro circular es otro ejemplo sencillo de superficie de revolución. Pero, tal vez, la superficie de revolución más célebre es la siguiente:

Ejemplo 1.11. Se denomina *toro de revolución* la superficie generada por una circunferencia C contenida en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$ que gira alrededor del eje z. Por ejemplo, si C tiene centro $(c, 0, 0)$ y radio $r < c$, el conjunto S se puede describir mediante las fórmulas

$$x = (c + r\cos u)\cos v, \quad y = (c + r\cos u)\,\mathrm{sen}\, v, \quad z = r\,\mathrm{sen}\, u.$$

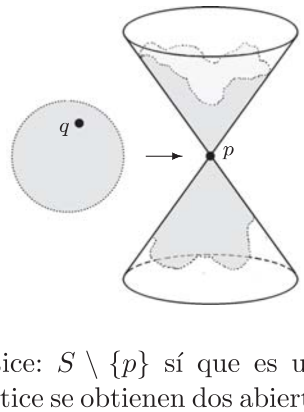


En la figura precedente se ve cómo se genera el toro, con sus meridianos y sus paralelos. El lector estudiará entre qué extremos deben variar las coordenadas u, v para definir auténticas parametrizaciones. ∎

También hay que conocer ejemplos de subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que *no son* superficies diferenciables, y por qué no lo son. Terminamos con esto la lección.

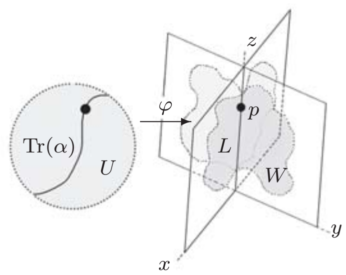
Contraejemplos 1.12. (1) Consideremos el *cono doble* $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x^2+y^2 = z^2$. Este conjunto no es una superficie por una razón topológica: *no es localmente homeomorfo al plano.*

En efecto, si lo fuese, existiría un disco $U \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a un entorno abierto $W \subset S$ del vértice del cono $p = (0, 0, 0)$. Si denotamos q el punto del disco que corresponde a p por el homeomorfismo que se tenga, los conjuntos $U \setminus \{q\}$ y $W \setminus \{p\}$ serían homeomorfos. Como p desconecta a W (pues desconecta a todo el cono), q debería desconectar al disco U, lo que es imposible (el lector debería dar una justificación de esta afirmación).



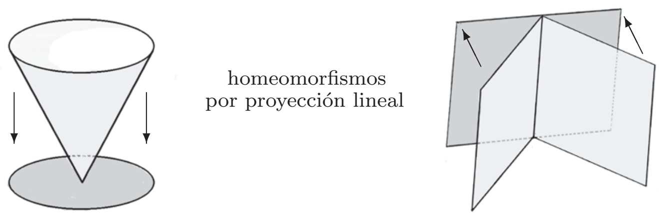
La única obstrucción en este ejemplo es el vértice: $S \setminus \{p\}$ sí que es una superficie diferenciable. En efecto, al prescindir del vértice se obtienen dos abiertos disjuntos cada uno de los cuales admite una parametrización global por proyección sobre el plano $z = 0$. Este ejemplo pone de manifiesto que las superficies no son necesariamente conexas, aunque no es difícil probar que cada componente conexa de una superficie es una superficie.

(2) Un contraejemplo más delicado es el caso de dos planos que se cortan en una recta, que tienen la obstrucción en los puntos de esa recta de intersección. Para fijar ideas, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la unión de los dos planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Que $S : xy = 0$ no es una superficie es otra vez una cuestión topológica: S no es localmente homeomorfo al plano. El argumento es más delicado que para el doble cono, y sólo lo esquematizamos, dejando los detalles al cuidado del lector.



Sea p un punto del eje z, y supongamos que existe una parametrización $\varphi : U \to \varphi(U) \subset S$ con $p \in W = \varphi(U)$. La restricción $\alpha = \varphi^{-1}|L : L = W \cap \{x = y = 0\} \to U$ es una curva diferenciable *regular* de U. Por hipótesis el par $W \supset L$ es homeomorfo al par $U \supset \mathrm{Tr}(\alpha)$ vía φ, y por tanto las propiedades topológicas de ambos pares deben ser las mismas. Pero sabemos que una curva regular separa U localmente en 2 componentes (teorema del entorno tubular) mientras que L separa W localmente en al menos 4 componentes. Contradicción.

(3) Por último, proponemos dos contraejemplos que *no son de naturaleza topológica*. Si consideramos el semicono $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, tenemos un conjunto homeomorfo al plano, pero *no localmente difeomorfo a él*. Lo mismo pasa si consideramos dos semiplanos $xy = 0, x+y > 0$: tenemos un conjunto homeomorfo, pero no localmente difeomorfo, a un plano.



Sin embargo debemos esperar hasta el párrafo 3.10, p. 40, para probar rigurosamente que ninguno de estos dos ejemplos es localmente difeomorfo al plano. Utilizaremos el plano tangente, que se habrá introducido en la lección 3. ∎

Lección 2

Ecuaciones locales de superficies

En la lección anterior hemos ilustrado la noción de superficie con diversos ejemplos que se han analizado con argumentos específicos. En ésta vamos a describir dos construcciones generales de superficies: las *superficies topográficas* y las *superficies de nivel*. Ambas son en realidad modelos locales universales: localmente cualquier superficie es topográfica y es de nivel. Esto se puede reformular de una manera más intuitiva diciendo que toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede describir localmente: (i) mediante una ecuación explícita $z = f(x, y)$ (salvo reordenar las letras) y (ii) mediante una ecuación implícita $g(x, y, z) = 0$ (la primera es la solución de la segunda). En última instancia, esto no es sino el teorema de la funcion implícita.

Los ejemplos anteriores ilustran cómo se decide si un conjunto es una superficie diferenciable. En particular, la proyección sobre los planos coordenados es un muy buen método, que formalizamos a continuación.

(2.1) Superficies topográficas o grafos. (1) Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Como es bien sabido, el grafo de f es el conjunto

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

y resulta que este conjunto (descrito abreviadamente por la ecuación $z = f(x, y)$) es una superficie diferenciable.

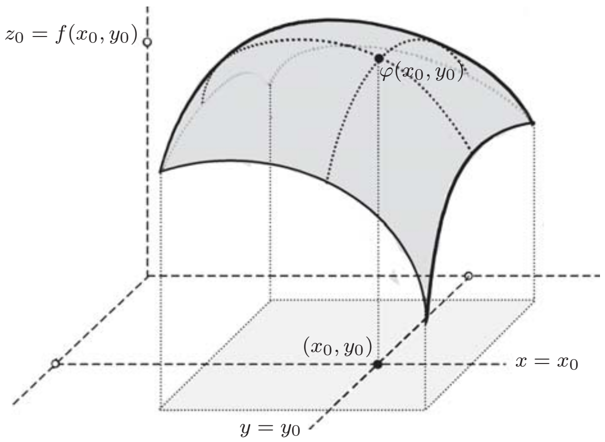
Para verlo basta una parametrización. En efecto, consideremos la aplicación biyectiva

$$\varphi : D \to S : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

En primer lugar esta aplicación es un homeomorfismo: su inversa es la restricción a S de la proyección lineal $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, obviamente continua. Por otra parte, φ diferenciable, por serlo f. En fin, la matriz jacobiana de φ es

$$J_\varphi(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix},$$

que tiene rango 2, de modo que $d_q\varphi$ es inyectiva para todo $q \in D$.



(2) La parametrización anterior recibe el nombre de *parametrización de Monge*. Es una parametrización global.

(3) Las líneas coordenadas de la parametrización de Monge son las secciones de S por los planos paralelos a los dos planos $y = 0$ y $x = 0$:

$$\varphi(y = y_0) = S \cap \pi^{-1}(y = y_0), \quad \varphi(x = x_0) = S \cap \pi^{-1}(x = x_0),$$

con vectores tangentes en $p = \varphi(q), q = (x_0, y_0)$:

$$\varphi_x = \big(1, 0, f_x(q)\big), \quad \varphi_y = \big(0, 1, f_y(q)\big).$$

∎

En la práctica es importante trabajar con parametrizaciones simples, y las parametrizaciones de Monge lo son. La proposición siguiente demuestra que todas las superficies se pueden parametrizar localmente de esta manera.

Proposición 2.2. *Sea S una superficie y sea $p \in S$. Entonces existe un entorno abierto W' de p en S que es un grafo. Con precisión, existe un abierto D de $\mathbb{R}^2$ y una función diferenciable $f : D \to \mathbb{R}$ tal que W' es uno de los grafos siguientes:*

$$\begin{aligned}
&\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\},\\
&\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x, z), (x, z) \in D\},\\
&\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = f(y, z), (y, z) \in D\}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, *toda superficie* $S \subset \mathbb{R}^3$ *se puede expresar localmente mediante una ecuación explícita* $z = f(x, y)$ (salvo reordenar las variables).

Demostración. Según la definición de superficie, tenemos una parametrización local $\varphi : U \to W = \varphi(U) \subset S$ de S con $p \in W$; sea $q = \varphi^{-1}(p)$. Ya que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} = 2,$$

existe un menor de orden 2 no nulo; supongamos, sin perdida de generalidad, que es el determinante de la submatriz:

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix}.$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección sobre el plano xy. La matriz jacobiana en el punto $q \in U$ de la aplicación diferenciable

$$\pi \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

es la matriz 2×2 anterior. Como esa matriz tiene determinante no nulo, el teorema de la función inversa dice que existen un entorno abierto $U' \subset U$ de q en $\mathbb{R}^2$ y un entorno abierto D de $d = \pi\varphi(q)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $\pi \circ \varphi|U' : U' \to D$ es un difeomorfismo.

Sea $W' = \varphi(U')$. Puesto que $\varphi : U \to W$ es un homeomorfismo, se tiene que W' es abierto en S. Por la construcción $D = \pi\varphi(U') = \pi(W')$ y $\pi|W' = (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}|W'$ es un homeomorfismo de W' sobre D. El homeomorfismo inverso es

$$F = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : D \to W' : (x, y) \mapsto (h(x, y), g(x, y), f(x, y))$$

que es una aplicación diferenciable, y sus componentes $h, g, f : D \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. El siguiente diagrama conmutativo resume la situación:

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi \circ \varphi"'] & W' \subset S & \subset \mathbb{R}^3 \arrow[dl, "\pi"] \\
& D \subset \mathbb{R}^2 \arrow[u, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\pi F(x, y) = (x, y)$ concluimos que $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y, por tanto, $W' = F(D)$ es el grafo de f. Como $p \in W'$ la proposición queda probada. ∎

La construcción utilizada en la demostración anterior tiene otras consecuencias que que señalamos a continuación.

Observaciones 2.3. Sea S una superficie diferenciable y $\varphi : U \to S$ una parametrización local suya. Consideremos un punto $p \in \varphi(U) = W \subset S$.

(1) Con las notaciones de la demostración última consideremos el entorno abierto $V' \subset \pi^{-1}(D)$ de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $V' \cap S = W'$, y la aplicación diferenciable

$$\Upsilon = (\pi \circ \varphi|U')^{-1} \circ \pi : V' \to U'.$$

Así, la restricción de Υ a $V' \cap S = W'$ coincide con la de φ^{-1}. En otras palabras el homeomorfismo $\varphi^{-1}|W' : W' \to U'$ es la restricción de una aplicación diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$, a saber, Υ. El diagrama conmutativo de la última demostración se convierte en el siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & W' \arrow[dl, shift right, "\Upsilon|W'=\varphi^{-1}"'] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \subset & S \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
U' \arrow[ur, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi\circ\varphi"'] & V' \arrow[l, "\Upsilon"] & \subset & \mathbb{R}^3 \arrow[dlll, "\pi"] \\
D \subset \mathbb{R}^2 & & &
\end{tikzcd}$$

(2) Supongamos ahora que tenemos otras coordenadas en p, es decir, otra parametrización $\psi : E \to S$ con $p \in \psi(E)$. Consideramos el cambio de coordenadas

$$\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \to \varphi^{-1}(\psi(E)),$$

Denotamos $E' = \psi^{-1}(W')$, y el diagrama conmutativo que tenemos ahora es

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\Upsilon\circ\psi=\varphi^{-1}\circ\psi"'] & & & \\
 & W' \arrow[d, phantom, "\cap"] & \subset & S \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
U' \arrow[ur, "\varphi"] & V' \arrow[l, "\Upsilon"] & \subset & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

En él aparece la composición de aplicaciones diferenciables

$$\Upsilon \circ \psi : E' \xrightarrow{\psi} W' \subset V' \xrightarrow{\Upsilon} U',$$

que coincide con el cambio $\varphi^{-1} \circ \psi$ en el entorno abierto E' de $\psi^{-1}(p)$. En suma, el cambio de coordenadas es una aplicación diferenciable.

(3) Lo anterior vale también para el cambio inverso, que será también una aplicación diferenciable. Concluimos así que un cambio de coordenadas no es sólo un homeomorfismo sino un *difeomorfismo*. ∎

Insistimos en que la discusión anterior es necesaria porque la noción de aplicación diferenciable sólo vale, de momento, para aplicaciones definidas en abiertos de un espacio afín. La extensión del cálculo diferencial a superficies será el tema de la lección 4.

El resultado siguiente supone una notable simplificación en la comprobación de que una determinada aplicación $\varphi : U \to S$ sea una parametrización local de una superficie S. En efecto, resulta que si sabemos *a priori* que S es una superficie, entonces la condición de que φ sea un homeomorfismo sobre un abierto de S, se reduce a que φ sea inyectiva:

Proposición 2.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $\varphi : U \to S$, U abierto en $\mathbb{R}^2$, una aplicación que satisface las condiciones* (2) *y* (3) *de la definición* 1.1*, p.* 1*. Si φ es inyectiva entonces φ es una parametrización.*

Demostración. Sea $p \in W = \varphi(U)$. Puesto que S es una superficie, por 2.2, p. 18, existe un entorno abierto W' de p en S que es el grafo de una aplicación diferenciable $f : D \to \mathbb{R}$ definida en un abierto D de $\mathbb{R}^2$; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$.

Sea $U' = \varphi^{-1}(W') \subset U$. Obviamente U' es un subconjunto abierto de U y $q = \varphi^{-1}(p) \in U'$. Consideremos la aplicación $\pi \circ \varphi|U' : U' \to D$, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la proyección sobre el plano xy. Entonces su matriz jacobiana

$$J_{\pi\circ\varphi} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo en q. La justificación de este hecho es la siguiente. En W' se cumple $z = f(x, y)$, de modo que la matriz jacobiana de $\varphi|U'$ es

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ f_x(x,y)x_u + f_y(x,y)y_u & f_x(x,y)x_v + f_y(x,y)y_v \end{pmatrix}$$

La tercera fila de esta matriz es combinación lineal de las dos primeras, de modo que si la primera matriz mencionada no tuviese determinante distinto de 0 en q, sucedería que la matriz jacobiana de φ tendría rango < 2 en q, contra la condición (3) de la definición de parametrización. Por otra parte, la matriz $J_{\pi\circ\varphi}(q)$ es la matriz de la derivada de $\pi \circ \varphi|U' : U' \to D$ en el punto q y, por lo anterior, el teorema de la función inversa nos dice que $\pi \circ \varphi$ induce por restricción un difeomorfismo de un entorno abierto $U'' \subset U'$ de q sobre un entorno abierto $E \subset$

D de $\pi\varphi(q)$. Denotemos $W'' = \varphi(U'') \subset W'$. Como $\pi(W'') = E$ y $\pi|W' : W' \to D$ es un homeomorfismo, se sigue fácilmente que W'' es un entorno abierto de $p = \varphi(q)$ en S y que φ induce por restricción un homeomorfismo de U'' sobre W''. Puesto que p es cualquier punto de $\varphi(U)$, se concluye que la aplicación $\varphi : U \to S$ es una aplicación abierta, y por tanto, si es inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen W. Ésta es la propiedad de φ que queriamos demostrar. ∎

Lo anterior es en realidad un teorema de la función inversa para superficies diferenciables. La versión topológica es también cierta: *una aplicación continua inyectiva $\phi : U \to S$ de un abierto U del plano en una superficie S es un homeomorfismo sobre un abierto de S*. Este es el *teorema de invarianza del dominio,* un resultado muy profundo estrechamente ligado al teorema de Jordan para superficies.

Ejemplo 2.5. En 1.12(2), p. 12, explicamos que la unión $S \subset \mathbb{R}^3$ de los dos planos $x = 0$ e $y = 0$ no es una superficie diferenciable. Ahora podemos probar lo mismo más elegantemente. Supongamos que $S : xy = 0$ fuera una superficie diferenciable, y consideremos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S : (u, v) \mapsto (0, u, v)$. Claramente su jacobiano tiene rango 2 en todos los puntos, luego como es inyectiva debería ser un homeomorfismo sobre un abierto de S (por la proposición anterior). Pero la imagen de φ es el plano $x = 0$, que no es abierto en S.

Este argumento es de naturaleza diferenciable, y lo que muestra es que S no es localemente *difeomorfo* al plano. El razonamiento de 1.12(2) era más topológico, y podría refinarse para probar que S no es localmente *homeomorfo* al plano. ∎

En muchas ocasiones las superficies se definen mediante ecuaciones, es decir, como ceros de funciones diferenciables. Para constatar que se trata efectivamente de superficies se utiliza el *teorema de la función implícita.* Enunciamos ahora este teorema, que como se sabe es equivalente al de la función inversa.

Teorema 2.6. *Sea $g : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^3$. Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de A y denotemos $g(p) = a$. Supongamos que $g_z(p) \neq 0$. Entonces existen un entorno abierto U de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de z_0 en $\mathbb{R}$ y una función diferenciable $f : U \to V$ tales que*

(1) *$U \times V \subset A$,*
(2) *$f(x_0, y_0) = z_0$, y*
(3) *$g^{-1}(a) \cap (U \times V)$ es el grafo de f.*

Esto último significa que para cada punto (x, y, z) *de* $U \times V$ *las condiciones* $g(x, y, z) = a$ *y* $z = f(x, y)$ *son equivalentes, o en otras palabras, que para cada* $(x, y) \in U$*, la única solución en* V *de la ecuación* $g(x, y, z) = a$ *es* $z = f(x, y)$*.*

En las condiciones del teorema anterior, se dice que la función f está *implícitamente definida* por la ecuación $g(x, y, z) = a$ o que la la variable z se puede *despejar en función de las otras dos.*

Definición 2.7. Sea $g : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Se dice que a es un *valor regular de* g si $d_p g \neq 0$ para todo $p \in g^{-1}(a)$.

La condición $d_p g \neq 0$ significa que al menos una de las tres derivadas parciales de g en p es distinta de cero; en otras palabras, el *gradiente*

$$\nabla_p g = (g_x(p), g_y(p), g_z(p))$$

es distinto de cero. Los puntos p que verifican esta condición $\nabla_p g \neq 0$ se llaman *puntos regulares.*

Nuestro interés en el teorema de la función implícita y en las nociones anteriores se plasma en el siguiente resultado:

Proposición 2.8. *Sea* $g : A \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable, donde* A *es un abierto de* $\mathbb{R}^3$*. Si* $a \in g(A)$ *es un valor regular de* g*, entonces* $g^{-1}(a)$ *es una superficie.*

Demostración. Si $p \in S = g^{-1}(a)$, se tiene que p es un punto regular. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $g_z(p) \neq 0$. Aplicando el teorema de la función implícita y utilizando la notación de su enunciado, se tiene que $W = g^{-1}(a) \cap (U \times V)$ es un entorno abierto de p en S y el grafo de una función diferenciable. Por 2.1(1), p. 17, S es una superficie. ∎

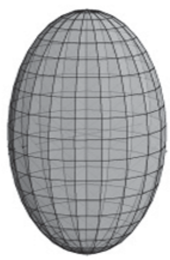
Una superficie definida del modo descrito en la proposición anterior se llama *superficie (diferenciable) de nivel* (de la función que se utilice). A continuación enumeramos algunos ejemplos (entre los que revisamos los de la lección anterior).

Ejemplos 2.9. (1) Un plano afín S es la superficie de nivel de una forma lineal $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ con algún coeficiente no nulo. Por tanto $\nabla_p g = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ para cualquier p, y esto quiere decir que cualquier $a \in \mathbb{R}$ es valor regular, y define la superficie de nivel $S = g^{-1}(a)$.

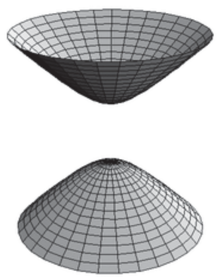
(2) Una esfera $S \subset \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$ tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0$, luego es del tipo $g^{-1}(r^2)$ para la función diferenciable $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como $\nabla_p g = (2x, 2y, 2z)$, este gradiente sólo se anula para $x = y = z = 0$, luego si $p \in S$ es no nulo. Por tanto $a = r^2$ es un valor regular y tenemos la correspondiente superfice de nivel $S = g^{-1}(r^2)$.

(3) Más generalmente consideremos una función diferenciable $g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, con algún coeficiente no nulo. El gradiente $\nabla_p g = (2\alpha x, 2\beta y, 2\gamma z)$ se anula si y sólo si $\alpha x = \beta y = \gamma z = 0$, en cuyo caso $\alpha x^2 = \beta y^2 = \gamma z^2 = 0$ y $g(x, y, z) = 0$. Por tanto $a = 1$ es un valor regular de g, y tenemos la superficie de nivel $S : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ (no todos los coeficientes negativos, para que $S \neq \varnothing$). Estas superficies de nivel son bien conocidas:

(i) Para $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ son los *elipsoides,* que si $\alpha = \beta = \gamma$ son esferas.
(ii) Para $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0$ son los *hiperboloides de dos hojas.*
(iii) Para $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$ son los *hiperboloides de una hoja.*



Elipsoide



Hiperboloide de dos hojas

Hiperboloide de una hoja

(4) Un cilindro circular $S : x^2 + y^2 = r^2 > 0$ es una superficie de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. El gradiente $\nabla_p g = (2x, 2y, 0)$ se anula sólo si $x = y = 0$, cosa que no pasa en ningún punto de S. Por tanto S se describe como la superficie de nivel $g^{-1}(r^2)$ del valor regular $a = r^2$.

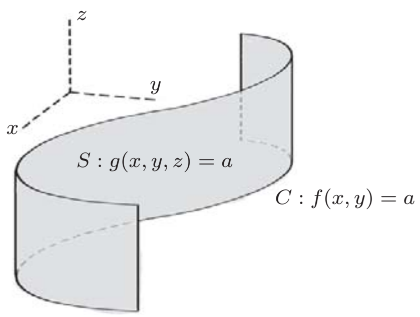
(5) Se pueden considerar cilindros más generales que el circular del ejemplo anterior. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de $\mathbb{R}^2$ y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que en ningún punto $(x, y) \in f^{-1}(a)$ se anulan ambas derivadas parciales f_x, f_y. Entonces a es un valor regular de la función

$$g : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y),$$

y la superficie de nivel

$$S = g^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, f(x, y) = a\}$$

es una superficie diferenciable.



Claramente, todas las secciones planas $S \cap \{z = c\}$ por planos horizontales son copias de la curva $C \subset U$ de ecuación $f(x, y) = a$, y de modo natural, denominamos S *cilindro (generalizado) sobre* C.

(6) Analicemos el cono doble $S : x^2 + y^2 = z^2$. Sabemos que no es superficie diferenciable por su vértice $p_0 = (0, 0, 0)$. Representemos S como imagen inversa $S = g^{-1}(0)$ de la función diferenciable $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ y consideremos el gradiente $\nabla_p g = (2x, 2y, -2z)$. Resulta que el gradiente sólo se anula en el origen p_0. Esto explica que no podamos concluir que S sea superficie diferenciable, mientras que sí lo podemos concluir para $S \setminus \{p_0\}$. ∎

Lo mismo que todas las superficies son localmente grafos (2.2), todas las superficies son localmente superficies de nivel:

Proposición 2.10. *Sea p un punto de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces existe un entorno abierto W' de p en S que es una superficie de nivel. Con precisión, existen un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una función diferenciable $g : V \to \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular de g y $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$.*

Es decir, *toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede expresar localmente mediante una ecuación implícita $g(x, y, z) = 0$.*

Demostración. Por la proposición 2.2, p. 18, existe un entorno abierto W' de p en S tal que W' es el grafo de una función diferenciable $f : D \to \mathbb{R}$ definida en un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Por ejemplo, $W' = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ tal que $A \cap S = W'$ y definamos la función diferenciable

$$g : V = (D \times \mathbb{R}) \cap A \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y).$$

Ya que $g_z \equiv 1$ se tiene que 0 es un valor regular de g y, obviamente, $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$. ▮

En relación con la proposición anterior es posible demostrar que toda superficie conexa S que es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$ es una superficie de nivel. De hecho, existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que tiene al cero como valor regular y tal que $S = g^{-1}(0)$. Este importante y nada sencillo resultado, que excede el alcance de este texto, es en esencia equivalente a la versión para superficies del *teorema de Jordan para curvas planas*.

Terminamos esta lección revisando las superficies de revolución como superficies de nivel.

(2.11) Superficies de revolución como de nivel. Sea C una curva contenida en el semiplano $P = \{x > 0,\, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Supongamos que C viene dada por una ecuación implícita $g(x, z) = 0$, lo que significa que no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales g_x, g_z. Entonces el conjunto S obtenido rotando C alrededor del eje z es la superficie de nivel definida por la ecuación

$$f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

En efecto, esta función f es diferenciable en el abierto $x^2 + y^2 \neq 0$, que contiene al conjunto S (si $p = (x, y, z) \in S$, entonces $q = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in C \subset P$). Para ver que $a = 0$ es un valor regular de f tenemos:

$$\nabla_p f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} g_x\big(\sqrt{x^2+y^2}, z\big), \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} g_x\big(\sqrt{x^2+y^2}, z\big), g_z\big(\sqrt{x^2+y^2}, z\big) \right).$$

Si la derivada parcial g_z no se anula, $\nabla_p f \neq 0$. En otro caso, es la otra parcial g_x la no nula, y como $x^2 + y^2 \neq 0$ también concluimos que $\nabla_p f \neq 0$. En suma, $a = 0$ es un valor regular y S una superficie diferenciable de nivel. ▮

Aplicando lo anterior al toro de revolución S de 1.11, p. 10, lo podemos describir como superficie de nivel mediante la ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 + z^2 = r^2.$$

Es bueno comparar en este ejemplo las ventajas e inconvenientes de esta descripción y la parametrización

$$x = (r\cos u + c)\cos v, \quad y = (r\cos u + c)\operatorname{sen} v, \quad z = r\operatorname{sen} u.$$

Problemas

Número 1. Demostrar que los *paraboloides* $S : ax^2 + by^2 = z$, $a, b \neq 0$, son superficies diferenciables. ¿Tienen alguna parametrización global?

Número 2. Hallar un atlas del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ inspirándose en la parametrización de la esfera del Ejemplo 1.9, p. 8.

Número 3. Demostrar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^3 = 1\}$ es una superficie. Encontrar parametrizaciones locales que definan un atlas.

Número 4. Considérese el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$. Probar que S es una superficie. Encontrar dos parametrizaciones que definan un atlas.

Número 5. Sea $f : V \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable definida en un abierto V de $\mathbb{R}^3$, y sea C el conjunto de sus puntos críticos; sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que $S = f^{-1}(a) \setminus C$ es una superficie (siempre que $S \neq \emptyset$).

Número 6. Probar que las ecuaciones $x^2 + y^2z^2 = 1$ y $x^2 + y^4 + z^6 = 1$ definen superficies. Estudiar su compacidad.

Número 7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Hallar unas ecuaciones de S como superficie de revolución.

Número 8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Mostrar que se puede expresar como imagen de la aplicación

$$\phi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \to (\cos u - v\operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u + v\cos u, v),$$

y que esta aplicación es biyectiva sobre S. Deducir que por cada punto de S pasa una recta totalmente contenida en S, correspondiendo a un valor fijo de u, y que dos cualesquiera de estas rectas tienen intersección vacía.

Número 9. Probar que el hiperboloide de dos hojas $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie que tiene exactamente dos componentes conexas.

Número 10. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable de la que 0 es valor regular. Mostrar que la superficie de nivel $S = g^{-1}(0)$ desconecta el espacio afín. (Recuérdese que en un extremo de una función diferenciable la derivada se debe anular).

Lección 3

Plano tangente

Los vectores tangentes desempeñan, según hemos visto, un papel fundamental en la teoría de curvas. El objetivo de esta lección es desarrollar el concepto completamente para superficies. En realidad, es fácil definir vector tangente:

Definición 3.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ cuya traza está contenida en S se denota simplemente $\alpha : I \to S$, y decimos que $\omega = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ es un vector *tangente a* S *en* $p = \alpha(t)$. Dado $p \in S$, denotamos $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto de todos esos vectores tangentes.

Denominamos: (i) a $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ *plano tangente* a la superficie en p, y (ii) a $p + T_pS$ *plano afín tangente* a S en p.

A continuación justificamos la terminología anterior vía una descripción alternativa de T_pS.

Proposición 3.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y p un punto suyo. Sea $\varphi : U \to S$ una parametrización de un entorno de p, con $p = \varphi(q)$. Entonces T_pS es la imagen de la aplicación lineal $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. En particular, T_pS es verdaderamente un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal.*

Demostración. En primer lugar, observamos que la aplicación lineal $d_q\varphi$ es inyectiva por ser φ una parametrización, luego su imagen es efectivamente un plano vectorial. Comprobemos ahora que $T_pS = d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$.

Supongamos primero que tenemos un vector $\omega \in d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$, es decir, $\omega = d_q\varphi(w)$ para cierto $w \in \mathbb{R}^2$. Para $|t|$ suficientemente pequeño la curva plana $\beta(t) = q + tw$ tiene la traza contenida en U y la composición $\alpha = \varphi \circ \beta$ es una curva de S. Claramente $\alpha(0) = p$, y

$$\alpha'(0) = d_q\varphi(\beta'(0)) = d_q\varphi(w) = \omega.$$

Por tanto ω es un vector tangente a S en p.

Recíprocamente, sea $\alpha : I \to S$ una curva que pasa por p, digamos $\alpha(t_0) = p$. Debemos ver que $\omega = \alpha'(t_0)$ está en $d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$. Para ello, según 2.3(1), p. 20, elegimos un entorno abierto $W' \subset W = \varphi(U)$ de p tal que $\varphi^{-1}|W'$ tiene una extensión diferenciable $\Upsilon : V' \to U$ definida en un entorno abierto V' de p en $\mathbb{R}^3$; reduciendo I podemos suponer que la traza de α está contenida en W'. Entonces $\beta = \Upsilon \circ \alpha : I \to U$ es una curva diferenciable plana con vector tangente $w = \beta'(t_0)$ en $q = \beta(t_0)$. Como por construcción $\alpha = \varphi \circ \beta$, de la regla de la cadena deducimos

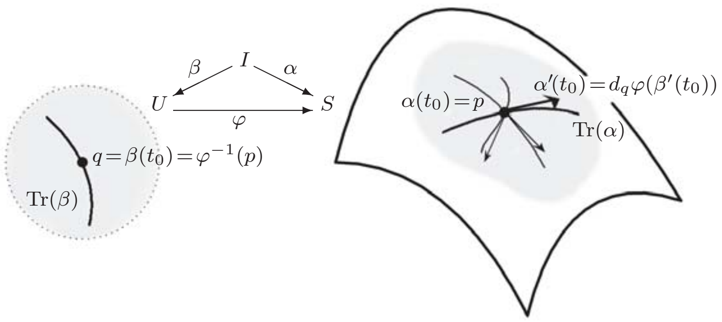
$$\omega = \alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0)) = d_q\varphi(w).$$

Así pues, ω está efectivamente en la imagen de la aplicación lineal $d_q\varphi$. ▮

Observación 3.3. Sean $\varphi : U \to W$ una parametrización de nuestra superficie S, $p \in W$ y $q = \varphi^{-1}(p)$. En la demostración anterior se comparan curvas de U y de W vía φ: *toda curva plana $\beta : I \to U$ corresponde a una única curva de S definida por composición $\alpha = \varphi \circ \beta : I \to W$,* que denotaremos

$$\alpha(t) = \big(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\big).$$

La figura ilustra esta construcción:



Por la regla de la cadena tenemos $\alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0))$, lo que se expresa en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La matriz 3×2 anterior es la matriz jacobiana de la parametrización. ▮

(3.4) Bases del plano tangente. Sea S una superficie diferenciable, y $p \in S$ un punto suyo con plano tangente $T_pS \subset \mathbb{R}^3$. Como T_pS es un plano, es decir, tiene dimensión 2, para determinarlo basta encontrar dos vectores tangentes independientes, es decir, encontrar dos curvas de la superficie con tangentes distintas; esos dos vectores tangentes serán una base del plano tangente. Aunque en casos concretos esto puede hacerse por tanteo muy rápidamente, lo más sencillo en general es tomar las líneas coordenadas de una parametrización de un entorno del punto dado p.

(1) Sea $\varphi : U \to S$ una parametrización de S, y $p = \varphi(q) \in S$ con $q \in U$. Como $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal, transforma la base estándar $\mathcal{E} = \{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ en una base $\mathcal{B}_\varphi$ de T_pS; explícitamente:

$$\begin{cases} d_q\varphi(e_1) = \varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) = \varphi_{u,p}, \\ d_q\varphi(e_2) = \varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q)) = \varphi_{v,p}. \end{cases}$$

Como ya sabemos, estos vectores $\varphi_{u,p}$ y $\varphi_{v,p}$ son los vectores tangentes a las líneas coordenadas en el punto p. Por otra parte, T_pS se determina mediante su *dirección normal,* (o sea, ortogonal) dada por el producto vectorial

$$\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}.$$

Cuando no haya riesgo de confusión omitiremos los subíndices p.

(2) Las coordenadas respecto de esta base $\mathcal{B}_\varphi$ se obtienen muy fácilmente. Todo vector $\omega \in T_p(S)$ se escribe $\omega = d_q\varphi(w)$ para un único $w \in \mathbb{R}^2$, y entonces las coordenadas de w respecto de la base estándar $\mathcal{E}$ son las de ω respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi = d_q\varphi\{e_1, e_2\}$. Con un pequeño abuso de lenguaje podemos decir que $(d_q\varphi)^{-1}(\omega)$ son las coordenadas de ω respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi$.

(3) Sea ψ otra parametrización de un entorno de p, digamos con $p = \psi(r)$, con coordenadas (s,t). Tenemos entonces la base $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$ de T_pS y queremos comparar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_\psi$ y respecto de $\mathcal{B}_\varphi$. Para ello derivamos la composición $\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi) = \psi$ y obtenemos

$$d_q\varphi \circ d_r(\varphi^{-1} \circ \psi) = d_r\psi,$$

lo que significa que para $\omega \in T_pS$ se tiene

$$d_r(\varphi^{-1} \circ \psi)\big((d_r\psi)^{-1}(\omega)\big) = (d_q\varphi)^{-1}(\omega).$$

Teniendo en cuenta (2), esto significa que multiplicando coordenadas respecto de $\mathcal{B}_\psi$ por la matriz jacobiana de $\varphi^{-1} \circ \psi$ obtenemos coordenadas respecto de

$\mathcal{B}_\varphi$. Esto es, la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_\psi$ a $\mathcal{B}_\varphi$ es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$. O aún, las dos columnas de esa matriz jacobiana son respectivamente las coordenadas de ψ_s y de ψ_t respecto de $\mathcal{B}_\varphi$. ▮

Estudiemos ahora los ejemplos 1.7, p. 4, de la primera lección.

Ejemplos 3.5. (1) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un plano afín con dirección $\overrightarrow{S}$. Entonces el plano tangente a S en cualquier punto suyo p es $T_pS = \overrightarrow{S}$.

En efecto, S se puede parametrizar (1.7(1)) mediante

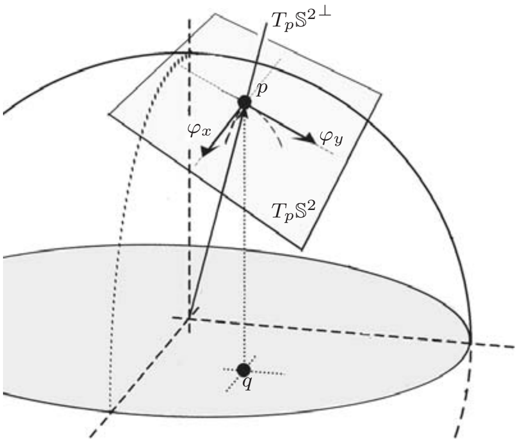
$$\varphi(u, v) = p + u\varpi + v\varpi', \quad \overrightarrow{S} = L[\varpi, \varpi'],$$

de modo que $\varphi_u = \varpi$, $\varphi_v = \varpi'$, y $T_pS = L[\varpi, \varpi']$.

(2) La esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se recubre con parametrizaciones del tipo

$$\varphi(x, y) = \big(x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2}\big)$$

(caso $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} > 0$, 1.7(2)),



de modo que

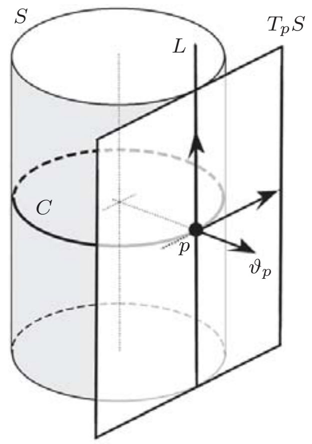
$$\begin{cases} \varphi_x = \big(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\big) = (1, 0, -\frac{x}{z}), \\ \varphi_y = \big(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\big) = (0, 1, -\frac{y}{z}). \end{cases}$$

Estos dos vectores generan el plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ en el punto $p = (x, y, z)$. Ese es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = (\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}, 1),$$

o mejor, al vector (x, y, z). En otras palabras, *el plano tangente a la esfera en p es perpendicular al rayo que une el centro de la esfera con p.*

(3) Estudiemos ahora el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$ con eje de rotación $x = 0, y = 0$. En este caso es fácil encontrar dos curvas de S que pasen por un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ dado y tengan tangentes distintas: la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1, z = z_0$ y la recta $L : x = x_0, y = y_0$.



Los vectores tangentes a esas curvas son $(-y_0, x_0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y forman una base de T_pS. Como

$$\vartheta = (-y_0, x_0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (x_0, y_0, 0),$$

resulta que el plano tangente en cuestión es *perpendicular al rayo ortogonal al eje del cilindro que pasa por p.*

(4) En 1.7(4), p. 6, parametrizamos el helicoide $S \subset \mathbb{R}^3$ mediante

$$x = v \cos u, y = v \operatorname{sen} u, z = bu,$$

de modo que el plano tangente en un punto arbitrario está generado por los vectores

$$\varphi_u = (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0).$$

La dirección normal al plano tangente viene dada por

$$\vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \operatorname{sen} u, b\cos u, -v).$$

Pero como $v^2 = x^2 + y^2$, podemos escribir

$$\vartheta = \left(\frac{by}{\mp\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{bx}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, \mp\sqrt{x^2+y^2} \right)$$

(los signos se deben discutir según las coordenadas de p). Desde el punto de vista geométrico se ve que el plano tangente contiene siempre la dirección ortogonal al eje del cilindro que pasa por p. ∎

A continuación analizamos los planos tangentes a superficies descritas mediante ecuaciones locales según la lección 2.

(3.6) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación explícita. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie definida por una ecuación $z = f(x, y)$, es decir, definida como el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Consideramos su parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, y vemos que el plano tangente en el punto $p = (x, y, f(x, y))$ está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y);$$

es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

∎

(3.7) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación implícita. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida por una ecuación implícita $g(x, y, z) = a$, es decir, como una superficie de nivel de la función diferenciable $g : A \to \mathbb{R}$ según 2.8, p. 23. Para calcular el plano tangente T_pS en un punto $p \in S$ recordamos que en un entorno de p la superficie de nivel tiene una ecuación explícita $z = f(x, y)$ que la define como un grafo (suponemos por ejemplo que $g_z(p) \neq 0$). Entonces sabemos por el apartado anterior que T_pS es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta_p = (-f_x, -f_y, 1),$$

y debemos calcular esas derivadas parciales de f. Para ello derivamos implícitamente la igualdad $g(x, y, f(x, y)) = a$ y obtenemos las dos igualdades siguientes:

$$g_x + g_z f_x = 0, \quad g_y + g_z f_y = 0.$$

Despejando los términos que interesan queda:

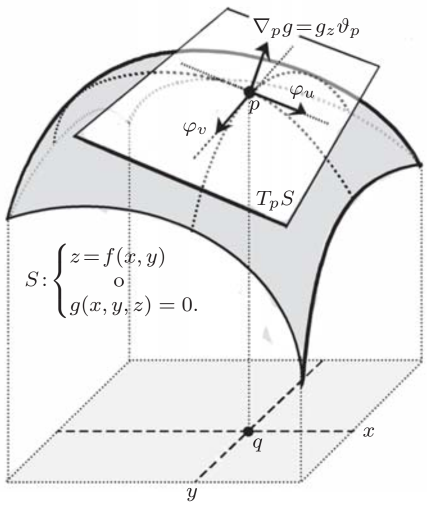
$$f_x = -g_x/g_z, \quad f_y = -g_y/g_z.$$

Por tanto, T_pS es perpendicular al vector

$$g_z\vartheta_p = (g_x, g_y, g_z) = \nabla_p g.$$

Es decir, el plano tangente a una superficie de nivel es *perpendicular al gradiente* de la ecuación implícita de la superficie. Otra forma de decir esto mismo es que *T_pS es el núcleo de la aplicación lineal $d_pg : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.* ▮

A continuación ilustramos la descripción de los dos párrafos anteriores:



El lector puede aplicar lo anterior a los ejemplos 2.9, p. 23. Veamos a continuación una aplicación interesante:

(3.8) Intersección de superficies. Sean $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies diferenciables que se cortan, y $p \in S \cap S'$ un punto de ambas. Si los planos tangentes T_pS y T_pS' son iguales decimos que las superficies *son tangentes* en p, y si son distintos decimos que son *transversales* en p. La noción de transversalidad, que aparece constantemente en campos diversos de la Matemática, permite aquí describir la intersección $S \cap S'$. En efecto, se cumple

Si S y S' son transversales en un punto $p \in S \cap S'$, entonces p tiene un entorno abierto V en $\mathbb{R}^3$ tal que la intersección $S \cap S' \cap V$ es la traza de un arco de Jordan $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$.

En efecto, por 2.10, p. 25, existe una función diferenciable $g : V \to \mathbb{R}$ definida en un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $S' \cap V = g^{-1}(0)$, siendo 0 un valor regular de g. Consideremos ahora una parametrización $\varphi : U \to W$ de un entorno W de p en S, con $q = \varphi^{-1}(p)$. Afirmamos que la función diferenciable $h = g \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ tiene alguna derivada parcial en q no nula.

Para verlo, observamos que

$$\begin{cases} h_u(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_1) = d_p g(\varphi_u), \\ h_v(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_2) = d_p g(\varphi_v). \end{cases}$$

Si estas dos derivadas parciales fueran nulas, entonces la aplicación lineal $d_p g$ se anularía en la base $\mathcal{B}_\varphi$ de T_pS, es decir, se anularía en todo T_pS. Pero el núcleo de $d_p g$ es el plano tangente T_pS', luego $T_pS \subset T_pS'$, en contra de la transversalidad.

Probada la afirmación sobre h, sabemos que $h(u, v) = 0$ es entonces la traza C de un arco de Jordan $\beta : I \to U^q$ en un entorno $U^q \subset U$ de q. Tomamos un entorno abierto V^p de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $S \cap V^p = \varphi(U^q)$ y concluimos que

$$S \cap S' \cap V^p = \varphi(C)$$

es la traza del arco de Jordan $\alpha = \varphi \circ \beta$. ∎

Una consecuencia del resultado anterior es que *si una superficie S y un plano afín H se cortan en un punto aislado p, entonces H es el plano afín tangente a S en el punto p.*

En cuanto a las superfices de revolución, tenemos lo siguiente.

(3.9) Plano tangente a una superficie de revolución. Sea S una superficie de revolución, y $p \in S$. Vamos a calcular T_pS de dos maneras diferentes y ver cómo concuerdan. Deberemos ser cuidadosos con las notaciones.

(1) En primer lugar consideramos S parametrizada como 1.10, p. 9, mediante $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ con

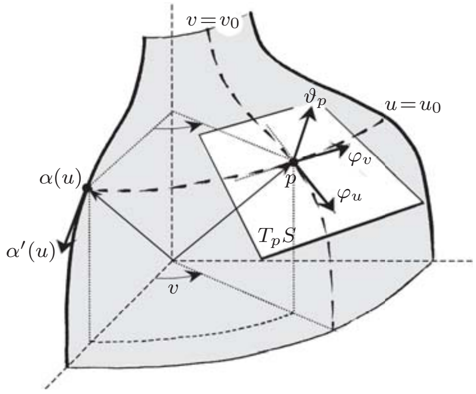
$$x = \zeta(u) \cos v, \ y = \zeta(u) \operatorname{sen} v, \ z = \xi(u); \quad \zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Entonces el plano tangente en un punto arbitrario de coordenadas (u, v) está generado por los vectores

$$\varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \operatorname{sen} v, \xi'(u)), \quad \varphi_v = (-\zeta(u) \operatorname{sen} v, \zeta(u) \cos v, 0),$$

y un vector perpendicular es

$$\vartheta_p = (-\xi'(u)\zeta(u) \cos v, -\xi'(u)\zeta(u) \operatorname{sen} v, \zeta'(u)\zeta(u)).$$



(2) Por otra parte sabemos que S se puede describir como una superficie de nivel (2.11, p. 26). Para ello se considera una ecuación implícita $G(x, z) = 0$ de la curva del plano $y = 0$ que genera la superficie, y resulta que S viene dada por

$$F(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Entonces T_pS es perpendicular al gradiente de esta función F, que es

$$\nabla_p F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} G_x(\sqrt{x^2+y^2}, z), \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} G_x(\sqrt{x^2+y^2}, z), G_z(\sqrt{x^2+y^2}, z) \right).$$

(3) Por supuesto, los vectores ϑ_p y $\nabla_p F$ son proporcionales, pero comprobarlo es educativo. Para hacerlo derivamos la igualdad $G(\zeta(u), \xi(u)) = 0$ y resulta:

$$G_x(\sqrt{x^2+y^2}, z)\zeta'(u) + G_z(\sqrt{x^2+y^2}, z)\xi'(u) = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \xi'(u)\nabla_p F &= G_x(\sqrt{x^2+y^2}, z) \left(\frac{x\xi'(u)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y\xi'(u)}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\zeta'(u) \right) \\ &= G_x(\sqrt{x^2+y^2}, z)\, (\xi'(u) \cos v, \xi'(u) \operatorname{sen} v, -\zeta'(u)), \end{aligned}$$

que es claramente proporcional a ϑ_p. ∎

Una vez explicado abundantemente cómo se calculan planos tangentes, terminamos la lección con una observación importante. En 3.4(1), p. 32, definimos para cada parametrización $\varphi : U \to W$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, tres aplicaciones diferenciables

$$W \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto \varphi_{u,p},\ \varphi_{v,p},\ \vartheta_p$$

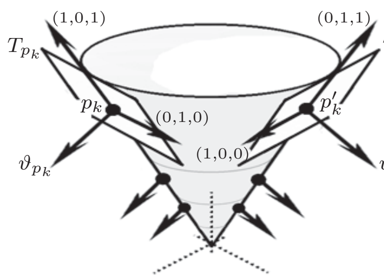
que determinan en cada $p \in W$ el plano tangente (las dos primeras una base y la tercera su dirección normal). Por tanto podemos decir que el plano tangente (y con él su dirección normal) *depende diferenciablemente del punto* $p \in W$. Veamos cómo se usa esto.

Ejemplo 3.10. En 1.12(3), p. 12, mencionamos los dos ejemplos siguientes: el semicono $S : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, y la unión de dos semiplanos $S' : xy = 0, x + y > 0$. Ambos conjuntos son homeomorfos al plano, pero no son superficies diferenciables. Entonces no podíamos probar esto; ahora ya sí.

Si se pudiera parametrizar (en cualquiera de los dos ejemplos) un entorno del origen, se tendría la aplicación diferenciable: $p \mapsto \vartheta_p \neq 0$, y

$$\lim_{p \to 0} \vartheta_p = \vartheta_0 \neq 0.$$

En consecuencia, para todas las sucesiones de puntos $p_k \to 0$ obtendremos ese límite. Intentémoslo para el semicono. Fuera del origen el semicono sí es una superficie diferenciable, y sabemos calcular planos tangentes: (i) en puntos del tipo $p_k = (x_k, 0, z_k), x_k > 0$ es $T_{p_k}S : x = z$, y (ii) en puntos del tipo $p'_k = (0, y_k, z_k), y_k > 0$, es $T_{p'_k}S : y = z$.



Es decir

$$\begin{cases} (1,0,1)\vartheta_{p_k} = (0,1,0)\vartheta_{p_k} = 0 & \text{para los } p_k, \\ (0,1,1)\vartheta_{p'_k} = (1,0,0)\vartheta_{p'_k} = 0 & \text{para los } p'_k. \end{cases}$$

En el límite común se deberá cumplir

$$(1,0,1)\vartheta_0 = (0,1,0)\vartheta_0 = (0,1,1)\vartheta_0 = (1,0,0)\vartheta_0 = 0,$$

que son demasiados productos escalares nulos para que $\vartheta_0 \neq 0$. Contradicción.

El lector imitará el razonamiento con el cono doble y con la unión de dos semiplanos (Ejemplos 1.12(1) y (2), p. 11) para obtener la misma contradicción y concluir así también que esos dos conjuntos no son superficies diferenciables. ∎

Problemas

Número 1. Sea $\mathbb{S}^2 : x^2+y^2+z^2 = 1$ la esfera unidad de $\mathbb{R}^3$ y $p = (0,1,0) \in S$. Calcular el plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ y la base suya asociada a la parametrización por proyección estereográfica desde el polo norte. Calcular también la base asociada a la parametrización por proyección ortogonal sobre el plano xz. Escribir la matriz de cambio de coordenadas en $T_p\mathbb{S}^2$ para las dos bases obtenidas.

Número 2. Sea S el paraboloide hiperbólico de ecuación $z = x^2 - y^2$. Hallar el plano tangente T_pS para un punto arbitrario $p \in S$. Considerar, en particular, el caso $p = (0,0,0)$ y estudiar la intersección $S \cap T_pS$ (observar que en ese caso el plano tangente y el plano afín tangente coinciden). Estudiar la situación en un punto arbitrario de S.

Número 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2+y^2-z^2 = 1$. Hallar el plano tangente en un punto de S del tipo $p = (a,b,0)$. Describir la estructura geométrica de la familia de planos que se obtienen de ese modo.

Número 4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y T_pS el plano tangente en $p \in S$. Probar que para toda base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS existe una parametrización local $\varphi : U \to S$ con $\varphi_{u,p} = w_1,\ \varphi_{v,p} = w_2$.

Número 5. Proponer una definición plausible de recta normal a una superficie en un punto y probar que todas las rectas normales a una superficie de revolución alrededor del eje z cortan dicho eje.

Número 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie que no corta al eje z y tal que todas las rectas normales a S sí cortan a este eje.

(1) Probar que cada punto de S tiene un entorno abierto contenido en una superficie de revolución alrededor del eje z.

(2) Constrúyase una superficie S en las condiciones anteriores, y conexa, que no esté toda contenida en una superficie de revolución (la figura sugiere cómo hacer esto).

Número 7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrizada por $y = x\tan z,\ x \in \mathbb{R},\ z \in (-\pi/2, \pi/2)$. Probar que la unión de las rectas normales a S a lo largo de la recta $y = x,\ z = \pi/4$ es una superficie. Identificar dicha superficie.

Número 8. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto que se obtiene al girar alrededor del eje z el grafo de la *tractriz* $\alpha : (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$, donde $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \log\tan(t/2))$, y sea P el plano $z = 0$.

Lección 4

Cálculo diferencial en superficies

En esta lección generalizamos el cálculo diferencial para aplicarlo en nuestro estudio de las superficies diferenciables. El Análisis Matemático trata la diferenciabilidad de aplicaciones definidas en abiertos del espacio afín, y aquí necesitamos utilizar aplicaciones definidas en superficies.

Definición 4.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

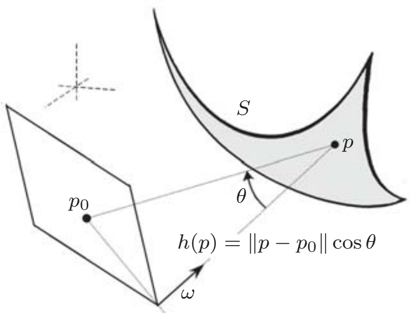
(1) Se dice que una aplicación $f : S \to \mathbb{R}^n$ es *diferenciable* si en cada punto $p \in S$ existe una *extensión local* diferenciable, esto es, una aplicación diferenciable $F : V \to \mathbb{R}^n$ definida en un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ tal que $F|V \cap S = f|V \cap S$.

(2) Se dice que una aplicación $f : S \to S'$ con valores en una segunda superficie $S' \subset \mathbb{R}^3$ es diferenciable si lo es como aplicación $f : S \to \mathbb{R}^3$ con valores en $\mathbb{R}^3$.

Nótese que en un mismo punto puede haber muchas extensiones locales. Por otra parte, (1) es una definición de carácter local: basta encontrar una familia de extensiones locales diferenciables $F : V \to \mathbb{R}^3$ cuyos dominios V cubran X. Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable (la composición de extensiones locales es extensión de la composición). Es claro también que una aplicación diferenciable es continua.

Ejemplos 4.2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

(1) Dados un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}^3$, con $\|\omega\| = 1$, la función $h : S \to \mathbb{R}$ definida por el producto escalar $h(p) = (p - p_0)\omega$ se llama *función altura,* pues mide la altura sobre el plano afín ortogonal a ω que pasa por p_0 (véase la figura). Como la misma fórmula la define una extensión diferenciable de h a todo $\mathbb{R}^3$, h es diferenciable.



(2) Por similar razón es diferenciable la función $h : S \to \mathbb{R}$ definida por $h(p) = \|p - p_0\|^2$, donde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado. (Esta función mide el cuadrado de la distancia al punto en cuestión.)

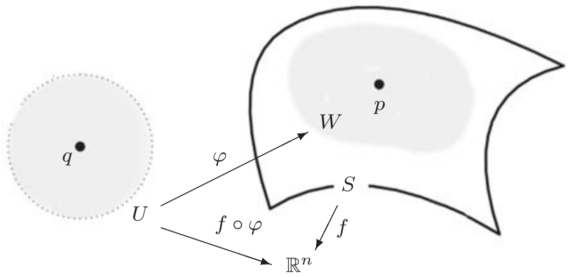
(3) Asimismo, si $p_0 \notin S$, la función $\mathrm{dist} : S \to \mathbb{R}$ definida por $\mathrm{dist}(p) = \|p - p_0\|$ también es diferenciable. ∎

La diferenciabilidad se expresa mediante parametrizaciones de la manera siguiente.

(4.3) Diferenciabilidad por localización. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

(1) Sea $\varphi : U \to W \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de un abierto W de S. La observación 2.3(1), p. 20, dice exactamente que $\varphi^{-1} : W \to \mathbb{R}^2$ tiene extensiones locales diferenciables Υ (cuyos dominios recubren W), luego dice que φ^{-1} *es una aplicación diferenciable*. Este hecho es fundamental.

(2) Una aplicación $f : S \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable si y sólo si lo son todas las *localizaciones* $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$.



La condición necesaria se sigue de que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Y lo mismo la condición suficiente: si todas las localizaciones $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^3$ son diferenciables, lo son las composiciones $f|W = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$.

Nótese además que para comprobar la diferenciabilidad basta considerar las parametrizaciones φ de un atlas de S. ∎

Inmediatamente introducimos la noción de derivada, según la idea de la *derivada direccional* del Análisis.

Definición 4.4. Sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable de una superficie S; sean $p \in S$ y $p' = f(p) \in \mathbb{R}^n$. La *derivada de f en p* es la aplicación lineal

$$d_p f : T_p S \to \mathbb{R}^n : \omega \mapsto (f \circ \alpha)'(t_0),$$

donde $\alpha : I \to S$ es una curva diferenciable con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \omega$.

Veamos que esta definición no depende de la elección de α. Tomamos una extensión local diferenciable $F : V \to \mathbb{R}^n$ de f a un entorno V de p en $\mathbb{R}^3$, y por la regla de la cadena para $F \circ \alpha$ tenemos que

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = (F \circ \alpha)'(t_0) = d_pF(\alpha'(t_0)) = d_pF(\omega).$$

y $d_pF(\omega)$ no depende de α. Esto también muestra que la derivada d_pf es una aplicación lineal, por ser la restricción de $d_pF : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ que lo es. Además, así podemos calcular d_pf utilizando *cualquier* extensión F de f.

Remarquemos por otra parte que d_pf está determinada por la restricción de f a cualquier entorno de p.

Ejemplo 4.5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, y consideremos un punto $p \in S$. La superficie S tendrá una ecuación implícita $g : V \to \mathbb{R}$ en un entorno V de p en $\mathbb{R}^3$ (2.10, p. 25). Entonces $g|S \cap V : S \cap V \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable constante, luego con derivada nula. Pero esa derivada es $d_p(g|S) = d_pg|T_pS$, luego d_pg se anula en T_pS. Como g es una ecuación implícita, la aplicación lineal $d_pg : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ no es nula, luego su núcleo es un plano, y por contener el plano tangente debe coincidir con él. Reencontramos lo que ya vimos en 3.7, p. 36. ▮

El uso de parametrizaciones reduce las cuestiones *locales* sobre aplicaciones diferenciables al caso conocido de abiertos de $\mathbb{R}^2$. Hacemos a continuación una demostración que ilustra este principio.

Proposición 4.6. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie conexa y $f : S \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si la derivada d_pf es nula para todo punto $p \in S$, entonces la aplicación f es constante.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor cualquiera que f alcance y consideremos el conjunto $Q \neq \varnothing$ de los puntos de S cuya imagen es precisamente a. Ya que f es continua, Q es cerrado. Probemos que es también abierto, lo que por la conexión de S implicará $Q = S$ y que f es constante ($\equiv a$).

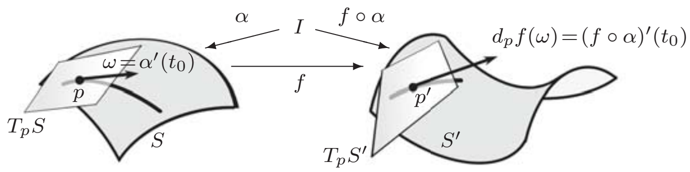
Sea $p \in Q$. Elegimos una extensión local diferenciable $F : V \to \mathbb{R}^n$ de f a un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una parametrización $\varphi : U \to W$ de un entorno abierto W de p. Podemos suponer que φ está definida en un disco abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y que $S \cap V = W$. Entonces $f \circ \varphi = F \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable y, por la regla de la cadena para $F \circ \varphi$, en cada punto $w = (u, v) \in U$ tenemos

$$d_w(f \circ \varphi) = d_w(F \circ \varphi) = d_{\varphi(w)}F \circ d_w\varphi = 0.$$

Por el resultado para abiertos afines, $f \circ \varphi$ es constante en el disco U, y como φ es suprayectiva, f es constante en W y $W \subset Q$. En conclusión, Q es abierto como se quería. ∎

Cuando una derivada d_pf de una aplicación diferenciable $f : S \to \mathbb{R}^n$ es nula se dice que p es un *punto crítico de* f. Esta noción es esencial en el estudio de los extremos locales de las *funciones* diferenciables (21.4, p. 304): véase el prob. 6 de esta lección, p. 53.

Obsérvese ahora que si $f : S \to S' \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable entre superficies, en la misma definición de la derivada, 4.4, p. 46, vemos que $d_pf(\omega) \in T_{p'}S'$, luego tenemos de hecho una aplicación lineal entre los planos tangentes: $d_pf : T_pS \to T_{p'}S'$.



Inmediatamente de la definición se deduce que se cumple la *regla de la cadena:*

Proposición 4.7. *Sean $f : S \to S'$ y $g : S' \to \mathbb{R}^n$ dos aplicaciones diferenciables y $p \in S$; denotamos $p' = f(p)$. Se cumple:*

$$d_p(g \circ f) = d_{p'}g \circ d_pf.$$

En lo sucesivo no necesitaremos distinguir (como en razonamientos anteriores) si las aplicaciones están definidas en abiertos afines para aplicar esta regla de derivación.

Ahora concentramos nuestra atención en las aplicaciones diferenciables *entre superficies*. En primer lugar revisamos la forma de localización descrita en 4.3(2), p. 46.

(4.8) Localización de una aplicación diferenciable entre superficies. Sea $f : S \to S'$ una aplicación *continua* entre dos superficies diferenciables, y sea $p \in S$.

(1) Por la continuidad, existen parametrizaciones $\varphi : U \to W$ de un entorno W de p en S y $\psi : U' \to W'$ de un entorno W' de $p' = f(p)$ en S' tales que $f(W) \subset W'$ y por tanto está bien definida la composición $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to U'$. Ésta es otra forma de *localización de f*.

Si denotamos (u, v) las coordenadas de un punto de $(x, y, z) \in W \subset S$ respecto de φ y (s, t) las de $f(x, y, z)$ respecto de ψ tenemos $(s, t) = g(u, v)$, que son las *ecuaciones de f en coordenadas locales*.

(2) Suponemos $f : S \to S'$ diferenciable y dadas dos parametrizaciones $\varphi : U \to S$ y $\psi : U' \to S'$ como en (1). Denotamos $q = \varphi^{-1}(p)$ y $q' = \psi^{-1}(p')$ y recordamos que $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ y $d_{q'}\psi : \mathbb{R}^2 \to T_{p'}S'$ son isomorfismos lineales. Por la regla de la cadena se tiene

$$d_q g = (d_{q'}\psi)^{-1} \circ d_p f \circ d_q\varphi,$$

igualdad que vamos a usar para expresar d_pf mediante ecuaciones lineales. Elegimos en T_pS y $T_{p'}S'$ las bases $\mathcal{B}_\varphi$ y $\mathcal{B}_\psi$ asociadas a las dos parametrizaciones dadas, y la igualdad anterior se escribe matricialmente así:

$$M(d_q g) = M(d_{q'}\psi)^{-1} M(d_p f) M(d_q\varphi)$$

Por supuesto, en $\mathbb{R}^2$ se considera la base estándar, de modo que por la construcción de $\mathcal{B}_\varphi$ y $\mathcal{B}_\psi$ las dos matrices $M(d_q\varphi)$ y $M(d_{q'}\psi)$ son la identidad. Concluimos que $M(d_q g) = M(d_p f)$, es decir, que $M(d_p f)$ es la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas locales $(s, t) = g(u, v)$:

$$M(d_p f) = \begin{pmatrix} s_u(q) & s_v(q) \\ t_u(q) & t_v(q) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la *matriz jacobiana de f en coordenadas locales*. ▮

En fin, he aquí otra definición fundamental.

Definición 4.9. Una aplicación $f : S \to S'$ entre dos superficies de $\mathbb{R}^3$ se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Si existe tal f, las superficies se denominan *difeomorfas*.

Claramente un difeomorfismo es un homeomorfismo. También es claro que la composición de difeomorfismos es de nuevo un difeomorfismo.

El ejemplo primero de difeomorfismo es cualquier parametrización $\varphi : U \to S$ de una superficie diferenciable S: es un difeomorfismo de U sobre su imagen $\varphi(U)$, que es un abierto de S. En otras palabras todo punto de S tiene un entorno difeomorfo a un abierto U del plano, lo que resumimos diciendo que S es *localmente difeomorfa* al plano.

Sea $f : S \to S'$ un difeomorfismo entre dos superficies de $\mathbb{R}^3$, y sean $p \in S$, $p' = f(p) \in S'$. Aplicando la regla de la cadena a las dos composiciones $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_S$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{S'}$ resulta que $d_pf : T_pS \to T_{p'}S'$ es un isomorfismo lineal, con inversa $d_{p'}(f^{-1})$. Evidentemente, para esta conclusión basta que f sea difeomorfismo *de un entorno de* p *sobre uno de* $f(p')$, caso en el que decimos que f es un *difeomorfismo local en* p. De esta forma llegamos al *teorema de la función inversa:*

Teorema 4.10. *Sea $f : S \to S'$ una aplicación diferenciable entre superficies de $\mathbb{R}^3$. Entonces, f es un difeomorfismo local en un punto $p \in S$ si y sólo si la derivada $d_pf : T_pS \to T_{p'}S'$ es un isomorfismo lineal.*

Demostración. La condición suficiente ya la hemos probado. La necesaria (en realidad la equivalencia toda) se reduce al teorema de la función inversa para abiertos afines del plano mediante una localización:

$$g = \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to U' \quad \text{con } p = \varphi(q),\ q \in U.$$

Baste decir para esa reducción que: (i) por ser φ y φ' difeomorfismos, g es difeomorfismo local en q si y sólo si f lo es en p, y (ii) por ser las derivadas de φ y φ' isomorfismos, d_qg lo es si y sólo si lo es d_pf. ∎

Una consecuencia interesante de naturaleza topológica del resultado anterior es ésta:

Corolario 4.11. *Sean S y S' dos superficies de $\mathbb{R}^3$. Si $S \subset S'$, entonces S es necesariamente una parte abierta de S'.*

Demostración. En efecto, sea $p \in S$. Es claro que, como aplicación diferenciable la inclusión $f : S \subset S'$ tiene por derivada la inclusión $d_pf : T_pS \subset T_{p'}S'$. Como ambos espacios tangentes son planos vectoriales, deben coincidir, de modo que d_pf es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa, p tiene un entorno abierto en S que también es abierto en S'. Como esto vale para todo $p \in S$ concluimos que en efecto S es un abierto de S'. ∎

Hasta aquí hemos considerado la noción de difeomorfismo solamente desde el punto de vista local. El estudio de los difeomorfismos globales entre superficies, y en particular del *grupo* que forman los de una superficie sobre sí misma es de una gran importancia, y aunque no nos ocupa aquí, sí queremos comentar una propiedad interesante.

Ya sabemos que todo punto de una superficie S tiene un entorno difeomorfo a un abierto del plano afín, y reduciendo el entorno podemos suponer que es difeomorfo al disco unidad; en particular, dos puntos distintos de S tienen entornos difeomorfos. La cuestión global es si existe un difeomorfismo $f : S \to S$ de toda la superficie sobre sí misma que trasforme uno de los puntos en el otro. Esta propiedad, conocida como *homogeneidad,* es en efecto cierta, y muestra la riqueza del grupo de difeomorfismos de una superficie. Comprobémoslo en dos ejemplos.

Ejemplo 4.12. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(1) Cualquier aplicación lineal ortogonal $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (esto es, que conserve el producto escalar) induce un difeomorfismo $f = \lambda|\mathbb{S}^2 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$: es biyectiva, es diferenciable por restricción, y su inversa es también diferenciable por ser restricción de la aplicación lineal ortogonal λ^{-1}. En otras palabras *el grupo de difeomorfismos de la esfera contiene al grupo ortogonal.*

Pero advertimos que la esfera tiene muchos otros difeomorfismos.

(2) Un difeomorfismo importante es la aplicación *antipodal:*

$$\lambda : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

(3) Dos puntos de la esfera $p, p' \in \mathbb{R}^3$ son dos vectores de norma 1, y siempre existe una aplicación ortogonal λ que trasforma uno en otro. Entonces $\lambda|\mathbb{S}^2 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ un difeomorfismo de la esfera en sí misma que trasforma p en p'. En otras palabras, $\mathbb{S}^2$ es homogénea. ▮

Ejemplo 4.13. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el toro de revolución de ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$$

Es el toro de 1.11, p. 10, con $r = 1$, $c = 2$.

(1) Para cualesquiera números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos la parametrización $\varphi : (a, a + 2\pi) \times (b, b + 2\pi) \to S$ de ecuaciones

$$x = (\cos u + 2) \cos v, \quad y = (\cos u + 2) \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u.$$

Esta parametrización es un difeomorfismo sobre el abierto del toro obtenido eliminando un paralelo y un meridiano (¿cuáles?).

(2) Fijamos $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ y definimos una aplicación $f : S \to S$ de la siguiente manera. Dado $p \in S$ tomamos una parametrización φ del tipo anterior que cubra un entorno de p. Es decir, $p = \varphi(u, v)$ con $a < u < a + 2\pi$, $b < v < b + 2\pi$. Entonces ponemos

$$f(p) = ((\cos(u+u_0)+2)\cos(v+v_0), (\cos(u+u_0)+2)\operatorname{sen}(v+v_0), \operatorname{sen}(u+u_0)),$$

es decir, $f(p) = \psi(u + u_0, v + v_0)$ donde

$$\psi : (a + u_0, a + u_0 + 2\pi) \times (b + v_0, b + v_0 + 2\pi) \to S$$

está definida por la misma expresión que φ. De la periodicidad de las funciones trigonométricas se sigue inmediatamente que esta definición de f no depende del par de valores a y b.

(3) Visto lo anterior, la diferenciabilidad de f es automática, porque la localización

$$\psi^{-1} f \varphi : (u, v) \mapsto (u + u_0, v + v_0),$$

es simplemente la restricción de una traslación.

(3) Ahora observamos que si repetimos la construcción anterior empezando con $(-u_0, -v_0) \in \mathbb{R}^2$ la aplicación diferenciable $g : S \to S$ que obtenemos cumple $g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}_S$. Por tanto $f : S \to S$ es un difeomorfismo (con inverso g).

(4) Finalmente, dados dos puntos p y p' del toro tendremos

$$\begin{cases} p = ((\cos u + 2)\cos v, (\cos u + 2)\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u), \\ p' = ((\cos u' + 2)\cos v', (\cos u' + 2)\operatorname{sen} v', \operatorname{sen} u'), \end{cases}$$

para ciertos u, v, u', v'. Tomando $u_0 = u' - u$, $v_0 = v' - v$ en la construcción anterior obtenemos un difeomorfismo f de S que transforma p en p'.

En conclusión, el toro es efectivamente homogéneo. ∎

Problemas

Número 1. Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la aplicación antipodal de la esfera en si misma. Calcular la derivada de f en un punto cualquiera. Calcular la matriz jacobiana de f en el polo sur utilizando dos parametrizaciones por proyección estereográfica, una desde el polo norte y otra desde el polo sur.

Lección 5

La primera forma fundamental

En esta lección introducimos algunas nociones de carácter métrico. Hay que empezar por *la primera forma fundamental,* que nos permite medir longitudes, ángulos y áreas en una superficie.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Ya que el plano tangente T_pS a la superficie S en un punto p suyo es un subespacio vectorial del espacio euclídeo, podemos hacer uso del producto escalar de ese espacio euclídeo para medir longitudes y ángulos de los vectores tangentes a la superficie en ese punto. Sea $p \in S$. Consideramos la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ al plano tangente

$$\langle\ ,\ \rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R} : (\omega, \omega') \mapsto \omega\omega',$$

y la forma cuadrática asociada:

Definición 5.1. La forma cuádratica $\mathbf{I}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{I}_p(w) = \langle \omega, \omega \rangle = \|\omega\|^2$$

es la *primera forma fundamental de S en p.*

Como es sabido, el conocimiento de $\mathbf{I}_p$ es equivalente al conocimiento del producto escalar en T_pS, pues

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{I}_p(\omega + \omega') - \mathbf{I}_p(\omega) - \mathbf{I}_p(\omega')\big).$$

Hacemos la observación siguiente sobre la notación. Hasta ahora habíamos denotado como un producto ordinario $\omega\omega'$ el producto escalar de dos elementos de $\mathbb{R}^3$, pues el contexto evita siempre las confusiones. A partir de ahora usaremos la escritura $\langle \omega, \omega' \rangle_p$ para vectores tangentes, precisamente para hacer énfasis en que lo son. Además, normalmente omitiremos el subíndice p.

(5.2) Expresión en coordenadas locales de la primera forma fundamental. En la situación precedente, describamos $\mathbf{I}_p$ mediante parametrizaciones.

(1) Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un entorno W de p en S, a la que corresponde la base del espacio tangente de 3.4(1), p. 32, $\mathcal{B}_\varphi = \{\varphi_u, \varphi_v\}$. Sea $\omega \in T_pS$ un vector de coordenadas (λ, μ) respecto de esa base, es decir, que se tiene $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_p(\omega) = \langle \omega, \omega \rangle &= \langle \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v, \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \mu^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.\end{aligned}$$

En el futuro usaremos la notación

$$\begin{cases} E_p = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \|\varphi_u\|^2, \\ F_p = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \\ G_p = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \|\varphi_v\|^2, \end{cases}$$

con la que escribimos

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 E_p + 2\lambda\mu F_p + \mu^2 G_p,$$

o, en términos matriciales,

$$\mathbf{I}_p(\omega) = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}; \quad \text{denotamos } Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}.$$

La matriz Q_p es *la matriz de la primera forma fundamental* respecto de (la base $\mathcal{B}_\varphi$ asociada a) φ. Como Q_p es la matriz de una forma bilineal simétrica definida positiva, se cumple

$$E_p > 0, \quad G_p > 0, \quad \det(Q_p) = E_p G_p - F_p^2 > 0.$$

Otra manera de escribir el determinante es la siguiente:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 \end{aligned}$$

(el ángulo θ es el que forman los dos vectores tangentes φ_u y φ_v).

(2) Los *coeficientes* E_p, F_p, G_p describen completamente la primera forma fundamental y como veremos son dato suficiente para el tratamiento de los temas métricos relativos a la superficie. Claramente, E, F, G son tres funciones diferenciables cuyo dominio es $U \subset \mathbb{R}^2$ o $W \subset S$, según convenga referirse a las

coordenadas en U o al punto en W; estas imprecisiones en la notación son habituales y no suelen generar confusión. En cualquier caso los coeficientes dependen de la parametrización elegida. La notación que empleamos para designarlos es la clásica de Gauss. Una notación más moderna es la siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 g_{11} + 2\lambda\mu g_{12} + \mu^2 g_{22} = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \\ g_{11} = E,\ g_{12} = g_{21} = F,\ g_{22} = G, \end{cases}$$

(obsérvese que aquí incluso se omiten el punto y sus coordenadas).

(3) Por último, escribamos como afecta un cambio de coordenadas a la expresión local de la primera forma fundamental. Sea ψ otra parametrización de un entorno de p, digamos con $p = \psi(r)$. Tenemos entonces la base $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$ de T_pS y sabemos (3.4(3), p. 33) que la matriz de cambio de $\mathcal{B}_\psi$ a $\mathcal{B}_\varphi$ es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$; denotaremos simplemente J esa matriz. Por otra parte, denotamos Q' la matriz de la primera forma fundamental respecto de ψ, es decir, respecto de $\mathcal{B}_\psi$, y E', F', G' sus coeficientes. Como es bien sabido, $Q' = J^t Q J$, lo que permite expresar los coeficientes E', F', G' en función de los coeficientes E, F, G y las derivadas parciales de las nuevas coordenadas respecto de las anteriores. Dejamos al lector que haga esto explícito, y a cambio observamos que para los determinantes se tiene

$$\det(Q') = \det(J^t Q J) = \det(Q)\det(J)^2.$$

Esta relación será útil más adelante. ▮

A continuación se analizan unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 5.3. Sea S una superficie topográfica definida como el grafo de una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos su parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ (2.1, p. 17); ya hemos visto (3.6, p. 36) que el plano tangente en el punto $(x, y, f(x, y))$ está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y).$$

Por tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1 + f_x^2, \\ F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y\,, \\ G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1 + f_y^2, \end{cases}$$

y, por tanto, si un vector tangente ω tiene coordenadas λ, μ respecto de la base correspondiente a esta parametrización de Monge, se tiene que

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(1 + f_x^2) + 2\lambda\mu f_x f_y + \mu^2(1 + f_y^2).$$

En particular el determinante es $1 + f_x^2 + f_y^2$. ▮

Ejemplo 5.4. Consideremos el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. Como superficie de revolución se parametriza mediante las ecuaciones

$$x = \cos u, \quad y = \operatorname{sen} u, \quad z = v,$$

y la base correspondiente del plano tangente en un punto dado es

$$\varphi_u = (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1).$$

Deducimos que $E = 1, F = 0, G = 1$, y por tanto la primera forma fundamental en estas coordenadas se expresa de la más sencilla manera: $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2$; el determinante es 1. Sugerimos al lector que haga estos cálculos para una parametrización distinta del cilindro. ▮

Una expresión de la primera forma fundamental tan sencilla como en el ejemplo precedente no siempre es posible. De hecho, que esto sea posible es una propiedad muy singular: ya para la esfera no se da. Esta carencia de la esfera es la formulación matemática de que no hay mapas totalmente fidedignos de la tierra: o modifican las distancias, o las áreas, o ambas; Gauss fue quien lo descubrió. Aquí lo podremos demostrar después de desarrollar el concepto de curvatura para superficies.

Ejemplo 5.5. Al hilo del comentario precedente, estudiemos la primera forma fundamental de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Una parametrización viene dada por las ecuaciones:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u.$$

La base asociada del plano tangente viene dada por los vectores

$$\begin{cases} \varphi_u = (-\operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u), \\ \varphi_v = (-\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, 0), \end{cases}$$

y por tanto los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u = 1, \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \operatorname{sen} u \cos v \operatorname{sen} v \cos u - \operatorname{sen} u \cos u \operatorname{sen} v \cos v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \cos^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u, \end{cases}$$

En conclusión, la expresión de la primera forma fundamental de la esfera en estas coordenadas es

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2 \cos^2 u,$$

y el determinante es $\cos^2 u$. Como acababamos de pronosticar, la expresión de la primera forma fundamental no es tan simple como en el ejemplo previo, pero adviértase que de momento sólo podemos decir que no es tan simple *en estas coordenadas particulares,* mientras pretendemos que no lo será en *cualesquiera coordenadas* que se usen. ∎

Tras los dos ejemplos anteriores, consideremos una superficie de revolución general.

Ejemplo 5.6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie de revolución generada por una curva C como en 1.10, p. 9, y 3.9, p. 38. Si C es la traza de $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$, la superficie S tiene la parametrización

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)),$$

de modo que

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u)\cos v, \zeta'(u)\operatorname{sen} v, \xi'(u)), \\ \varphi_v = (-\zeta(u)\operatorname{sen} v, \zeta(u)\cos v, 0). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \zeta'^2(u)\cos^2 v + \zeta'^2(u)\operatorname{sen}^2 v + \xi'^2(u) = \zeta'^2(u) + \xi'^2(u), \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -\zeta(u)\operatorname{sen} v\zeta'(u)\cos v + \zeta(u)\cos v\zeta'(u)\operatorname{sen} v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \zeta^2(u)\operatorname{sen}^2 v + \zeta^2(u)\cos^2 v = \zeta^2(u), \end{cases}$$

y la primera forma fundamental queda

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2) + \mu^2\zeta^2(u),$$

con determinante $(\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2)\zeta^2(u)$. Esta expresión se puede simplificar algo mediante la longitud del arco de α. Si α está parametrizada por la longitud del arco, entonces $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ y obtenemos $\mathbf{I} = \lambda^2 + \mu^2\zeta^2$ con determinante ζ^2. ∎

Veamos un último ejemplo antes de avanzar.

Ejemplo 5.7. Consideremos la parametrización global φ del helicoide estudiada en 1.7(4), p. 6, y 3.5(4), p. 35: $x = v\cos u, y = v\operatorname{sen} u, z = bu$. Como

$$\varphi_u = (-v\operatorname{sen} u, v\cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0),$$

resulta $E = v^2+b^2, F = 0, G = 1$, luego $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(v^2+b^2)+\mu^2$, y el determinante es $v^2 + b^2$. ▮

Expresaremos a continuación dos nociones métricas, la longitud de una curva y el ángulo formado por dos curvas, en términos de la primera forma fundamental.

(5.8) Longitudes y ángulos en una superficie. Como es habitual, $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\varphi : U \to W \subset S$ una parametrización suya.

(1) Dada una curva $\alpha : I \to W \subset S$ consideramos como en 3.3, p. 32, la curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$. Tendremos $\beta(t) = (u(t), v(t))$ y

$$\alpha'(t) = (\varphi \circ \beta)'(t) = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v.$$

Resulta que la longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L_{t_0}^t(\alpha) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\|dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))}\,dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{u'^2E_{\alpha(t)} + 2u'v'F_{\alpha(t)} + v'^2G_{\alpha(t)}}\,dt. \end{aligned}$$

(2) El ángulo θ que forman en un punto $p \in S$ dos curvas α y γ de S que pasan por él, es el ángulo que forman sus vectores tangentes en p. Si es $p = \alpha(t_0) = \gamma(s_0)$. Como

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(s_0)\rangle}{\|\alpha'(t_0)\|\|\gamma'(s_0)\|}$$

este ángulo está determinado por la primera forma fundamental.

Por ejemplo, el ángulo que forman en p las líneas coordenadas de la parametrización φ tiene por coseno

$$\cos\theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v\rangle}{\|\varphi_u\|\|\varphi_v\|} = \frac{F_p}{\sqrt{E_p}\sqrt{G_p}} = \frac{F_p}{\sqrt{E_pG_p}}\,.$$

(3) Acabamos de ver cómo la primera forma fundamental mide longitudes de curvas y ángulos de pares de curvas de la superficie dada. Recíprocamente, *la medida de longitudes de curvas de la superficie determina la primera forma fundamental*. Veámoslo.

Sea ω un vector de T_pS y tomemos una curva en la superficie $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \omega$ para un determinado valor del parámetro $t_0 \in I$; consideremos la función diferenciable

$$L : I \to \mathbb{R} : t \mapsto L(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'\|.$$

Entonces la primera forma fundamental es el cuadrado de la derivada de esta función:

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \|\omega\|^2 = \|\alpha'(t_0)\|^2 = L'(t_0)^2.$$

Considerando la longitud de las curvas un concepto intrínseco de la superficie, llegamos a la conclusión de que la primera forma fundamental es del mismo modo intrínseca. Esta idea es básica en la llamada *Geometría Intrínseca*.

A continuación calculamos como aplicación de los conceptos anteriores las *loxodromas* de la esfera, que son aquellas que forman ángulo constante con los meridianos.

Ejemplo 5.9. Calculemos las loxodromas $\alpha(t)$ de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que forman un ángulo constante θ con los meridianos. Partimos de las ecuaciones paramétricas de la esfera vistas en 1.9, p. 8:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u,$$

en las que $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u$ (5.5, p. 60). En estas cordenadas tendremos $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, con vector tangente $\alpha'(t)$. Por otra parte, un meridiano $v = v_0$ tiene por vector tangente φ_u. Las coordenadas de esos dos vectores tangentes respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi$ son respectivamente $(u'(t), v'(t))$ y $(1, 0)$. Por tanto

$$\begin{cases} \langle \varphi_u, \alpha'(t) \rangle = (1,0) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = u'(t), \\ \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad \|\alpha'(t)\|^2 = u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t). \end{cases}$$

Como los dos vectores tangentes deben formar un ángulo constante θ, obtenemos

$$\cos\theta = \frac{u'(t)}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t)}}.$$

Elevando al cuadrado y operando un poco se obtiene que

$$v'(t)^2 \cos^2 u(t) \cos^2 \theta = u'(t)^2(1 - \cos^2 \theta) = u'(t)^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

Separando las funciones u y v tenemos

$$v'(t)^2 \cot^2 \theta = \frac{u'(t)^2}{\cos^2 u(t)}.$$

Omitimos una pequeña discusión de signos de u' y v', tras la cual se puede escribir

$$v'(t) \cot \theta = \pm \frac{u'(t)}{\cos u(t)}.$$

En esta ecuación ambos miembros tiene primitivas conocidas, y queda

$$(v + c) \cot \theta = \pm \log \Big(\frac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} \Big).$$

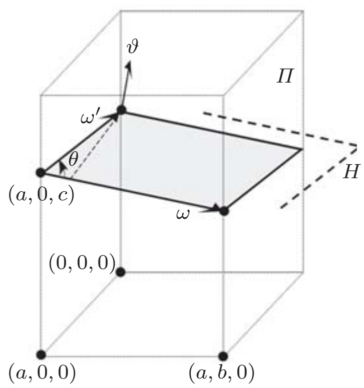
Hemos omitido el parámetro t, pues la anterior se puede ver como una ecuación implicita de la loxodroma α en las coordenadas locales (u, v), que son la latitud y la longitud. ▮

Terminaremos la lección mostrando que el cálculo de áreas depende, como el de longitudes y ángulos, de la primera forma fundamental. Vamos a utilizar una fórmula del Análisis para el cálculo del área de un grafo mediante una integral, pero para facilitar la tarea al lector la justificaremos antes.

(5.10) Área de un grafo. (1) En primer lugar resolvemos un problema de geometría elemental.

Consideremos un plano de $\mathbb{R}^3$ perpendicular al vector $\vartheta = (r, s, 1) \in \mathbb{R}^3$, y sea Π un paralelepípedo cuya base rectangular tiene lados de longitudes a y b. Entonces Π define en el plano un paralelogramo de área

$$\sqrt{1 + r^2 + s^2}\; a\, b.$$

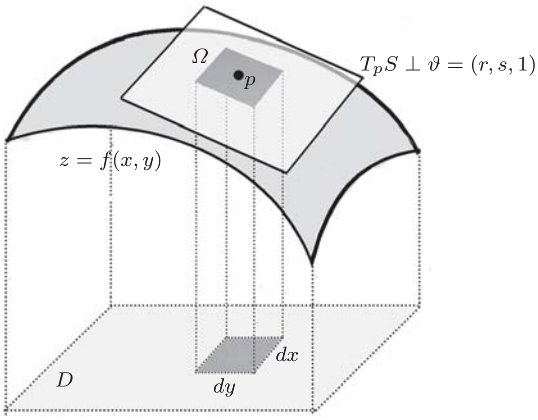


La figura describe la situación, y sirve de guía para la demostración. En efecto, el área buscada es $\|\omega\| \|\omega'\| \operatorname{sen} \theta$, que es el la norma del producto vectorial $\omega \wedge \omega'$. Podemos suponer que el origen de esos vectores ω y ω' es el punto $(a,0,c)$, y obtener sus extremos respectivos intersecando el plano H perpendicular a ϑ que pasa por $(a,0,c)$ con: (i) la recta vertical que pasa por $(a,b,0)$ y (ii) la recta vertical que pasa por $(0,0,0)$. Operando con cuidado se obtiene la fórmula anterior.

(2) Sea ahora $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto D del plano xy de $\mathbb{R}^3$, y consideremos su grafo $T : z = f(x,y)$ en $\mathbb{R}^3$. El área de ese grafo es

$$\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy.$$

En efecto, argumentemos sin formalismos lo que en realidad es un problema de cálculo integral. El elemento de área que hay que integrar es el área Ω de una sección como la del apartado anterior, aquí del plano tangente en un punto $p = (x,y,f(x,y)) \in T$ con el paralelepípedo cuya base tiene lados dx e dy.



Es decir, el área es

$$\int_D \Omega = \int_D \sqrt{1+r^2+s^2}\,dxdy.$$

Pero en nuestro caso, según 3.7, p. 36, tenemos el vector $\vartheta = (-f_x,-f_y,1)$, lo que da la fórmula deseada. ∎

Después de esta preparación volvemos al discurso principal, para expresar mediante la primera forma fundamental el cálculo de áreas.

(5.11) Áreas en una superficie. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : U \to W \subset S$

una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para calcular áreas de subconjuntos de W.

(1) Como φ no tiene por qué ser una parametrización de Monge de un grafo, debemos empezar considerando otra que sí lo sea, que existe por 2.2, p. 18. Sea $p \in W$, y sea $T \subset W$ un entorno suyo que es un grafo. Para facilitar la presentación, suponemos que T es del tipo $z = f(x,y)$. Vimos en 5.3, p. 59, que el determinante de la primera forma fundamental en la parametrización de Monge $\psi(x,y) = (x,y,f(x,y))$ es

$$\det(Q'(x,y)) = 1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2,$$

precisamente el radicando de la fórmula integral de 5.10(2), con lo que:

$$\text{área}(T) = \int_D \sqrt{\det(Q'(x,y))}\, dxdy.$$

(2) La fórmula anterior se cumple también para φ, es decir:

$$\text{área}(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u,v))}\, dudv.$$

En efecto, para comprobar que las dos integrales valen lo mismo, hacemos en la segunda el cambio de variables $h = \varphi^{-1} \circ \psi : D \to U$, y, como nos enseña el Análisis, queda:

$$\int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u,v)}dudv = \int_D \sqrt{\det(Q(h(x,y))}\ \big|\det(J_h(x,y))\big|\, dxdy,$$

donde J_h es el jacobiano del cambio realizado. Pero vimos en 5.2(3), p. 59, que

$$\det(Q'(x,y)) = \det(Q(u,v)) \det(J_h(x,y))^2, \quad (u,v) = h(x,y),$$

luego el último integrando es precisamente $\sqrt{\det(Q'(x,y))}$ y hemos terminado.

(3) Lo anterior muestra que para calcular áreas en un entorno del punto p hay que hacer en la región correspondiente de U la integral de la función $\sqrt{\det(Q(u,v))}$. Como esta función es la misma para todos los puntos $p \in W$, resulta al final que

$$\text{área}(\varSigma) = \int_{\varphi^{-1}(\varSigma)} \sqrt{\det(Q)} = \int_{\varphi^{-1}(\varSigma)} \sqrt{EG - F^2} = \int_{\varphi^{-1}(\varSigma)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$$

para cualquier subconjunto $\varSigma \subset W$. ∎

La discusión del párrafo anterior contiene todo lo necesario para definir el concepto más general de integral de una función.

(5.12) Integral de una función en una superficie. Como antes, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : U \to W \subset S$ una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para definir la integral $\int_\Sigma f$ de una función $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ definida en un subconjunto Σ de W.

Desde un punto de vista geométrico, la integral de la función f debe ser el volumen encerrado entre su grafo y la superficie, entendiendo que sobre cada elemento de área Ω de la superficie en un punto p se eleva un paralelepípedo de altura $f(p)$. El volumen de ese paralelepípedo será $f\Omega$, y éste será el *elemento de volumen* cuya integral denotamos $\int_\Sigma f$. En coordenadas locales

$$\int_\Sigma f = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f(\varphi(u,v))\sqrt{\det(Q(u,v))}\,dudv = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

(con un pequeño abuso de notación al final). Naturalmente, ésta fórmula es la definición, de la que el argumento previo es sólo una motivación. Por tanto, debe comprobarse que el resultado de la integral no depende de la parametrización. Eso resulta por cambio de variables, igual que para el cálculo de áreas en 5.11(2).

En particular, el área de Σ es la integral de la función constante igual a 1: $\text{área}(\Sigma) = \int_\Sigma 1$, es decir, un volumen de altura 1 sobre Σ. ▮

Ejemplos 5.13. (1) Calculemos el área de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2+y^2+z^2 = 1$. Será ocho veces el área de un octante $\Sigma = \mathbb{S}^2 \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Para calcular este área usamos la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u,$$

para la que sabemos que $\det(Q(u,v)) = \cos^2 u$. Como $\varphi^1(\Sigma)$ es el rectángulo $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$, el área del octante es

$$\text{área}(\Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\, dudv = \tfrac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $\text{área}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

(2) Sea S la superficie de revolución parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)),$$

y para la que hemos calculado que $\det(Q(u,v)) = (\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2)\zeta^2(u)$. El dominio de la parametrización será $(a,b) \times (0, 2\pi)$, y por tanto

$$\text{área}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \zeta(u)\sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2}\, dudv = 2\pi \int_a^b \zeta(u)\sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2}\, du.$$

Por ejemplo, aplicando esta fórmula con $\zeta(u) = c + r\cos u$, $\xi(u) = r \operatorname{sen} u$, se obtiene el área del toro de revolución, que es $4\pi^2 rc$.

Si la curva C es un grafo $x = \zeta(z)$, entonces $z = \xi(u) = u$ y la fórmula anterior queda

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b \zeta(z)\sqrt{1 + \zeta'(z)^2}\, dz,$$

seguramente más familiar para el lector. ∎

Problemas

Número 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el plano afín parametrizado por $\varphi(u,v) = p + u\omega + v\omega'$, donde ω y ω' son vectores independientes. Expresar la primera forma fundamental en estas coordenadas y calcular su determinante. Deducir una fórmula para el área de un rectángulo de lados paralelos a ω y ω' con longitudes a y b.

Número 2. Sea S el grafo de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4$ y consideremos la correspondiente parametrización de Monge. Hallar la primera forma fundamental.

Número 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida por la parametrización global $\varphi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to S$ dada por $\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u)$. Hallar la primera forma fundamental y deducir que las curvas coordenadas de esta parametrización son ortogonales en todo punto.

Número 4. Sea φ una parametrización de una superficie S tal que $E \equiv 1$ y $F \equiv 0$. Probar que las curvas coordenadas $u = u_0, u = u_1$ definen sobre las curvas coordenadas $v = v_0, v = v_1$ segmentos de igual longitud.

Número 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Hallar las curvas de S que cortan a las generatrices en un ángulo constante.

Número 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de ecuación $z = axy$.

(1) Hallar el ángulo con que se cortan las curvas coordenadas $x = x_0, y = y_0$.

(2) Encontrar la familia de curvas que intersectan ortogonalmente a las curvas $x =$ constante.

Número 7. Sean $\varphi : U \to S_1$ y $\psi : U \to S_2$ parametrizaciones de dos superficies; sean E, F, G y $\widetilde{E}, \widetilde{F}, \widetilde{G}$ los coeficientes de la primera forma fundamental de φ y ψ respectivamente. Probar que $\psi^{-1} \circ \varphi$ conserva áreas si y sólo si las funciones $EG - F^2$ y $\widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2$ son iguales.

Número 8. Utilizar el problema anterior para demostrar que la aplicación antipodal $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dada por $(x,y,z) \to (-x, -y - z)$ conserva áreas.

Lección 6

La aplicación de Gauss

En esta lección comenzamos el estudio de algunas de las nociones más importantes de la Geometría Diferencial de Superficies, que giran en torno a la denominada *aplicación de Gauss*.

Ya hemos definido anteriormente la dirección normal en un punto de una superficie, pero ahora es el momento de realizar un análisis cuidadoso de este concepto.

(6.1) Vectores normales al plano tangente. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $p \in S$.

(1) Como hemos visto (3.4(1), p. 33), cada parametrización $\varphi : U \to W \subset S$ de un entorno de W de p determina la dirección normal al plano tangente T_pS mediante el producto vectorial $\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}$. El plano tangente determina completamente su dirección normal, pero el vector no nulo ϑ_p sólo está determinado *salvo proporcionalidad.* Para mejorar esa salvedad consideramos el vector *unitario* (esto es, de norma uno)

$$\eta_p = \tfrac{\vartheta_p}{\|\vartheta_p\|}\,.$$

Este vector se denomina *vector normal,* y está determinado *salvo signo.*

(2) Sea ψ otra parametrización con coordenadas (s, t) que cubre p y sea η'_p el correspondiente vector normal. Se tiene $\eta'_p = \pm\eta_p$, y queremos determinar ese signo. Consideramos la matriz jacobiana de cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$:

$$J_{\varphi^{-1}\circ\psi}(\psi^{-1}(p)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Vimos en 3.4(3), p. 33, que

$$\psi_{s,p} = a\,\varphi_{u,p} + b\,\varphi_{v,p}, \quad \psi_{t,p} = c\,\varphi_{u,p} + d\,\varphi_{v,p},$$

luego

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \psi_s\wedge\psi_t = \big(a\varphi_u + b\varphi_v\big)\wedge\big(c\varphi_u + d\varphi_v\big)\\ &= ac\,\varphi_u\wedge\varphi_u + ad\,\varphi_u\wedge\varphi_v + bc\,\varphi_v\wedge\varphi_u + bd\,\varphi_v\wedge\varphi_v\\ &= (ad-bc)\,\varphi_u\wedge\varphi_v = (ad-bc)\,\vartheta,\end{aligned}$$

y nótese que $ad - bc = \det(J_{\varphi^{-1}\circ\psi}(\psi^{-1}(p)))$. Por tanto, al calcular los vectores normales para obtener el signo de la relación $\eta'_p = \pm\eta_p$ resulta que es el *signo del determinante jacobiano del cambio de coordenadas.* ▮

La discusión anterior muestra que dos parametrizaciones de una misma superficie definen los mismos vectores normales si y sólo si el determinante jacobiano del cambio de coordenadas es siempre positivo; en ese caso decimos simplemente que *el cambio de coordenadas es positivo*. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Son equivalentes:*

(1) *Existe una aplicación continua $N : S \to \mathbb{R}^3$ que asigna a cada $p \in S$ un vector no nulo $N(p)$ ortogonal al plano tangente T_pS.*

(2) *Existe un atlas de S cuyos cambios de coordenadas son todos positivos.*

Demostración. Que (2) implica (1) resulta de la discusión precedente, pues al ser todos los cambios de coordenadas positivos, dos parametrizaciones definen los mismos vectores normales en los puntos comunes, y podemos definir consistentemente $p \mapsto \eta_p$, eligiendo para cada p el vector normal asociado a cualquier parametrización $\varphi : U \to W$ del atlas con $p \in W$.

Recíprocamente, supongamos que existe N. Entonces $\|N\|$ es una función continua nunca nula, y podemos dividir N por ella para suponer que cada vector N_p es unitario, esto es, es un vector normal a T_pS. Fijemos un punto $p_0 \in S$, y elijamos una parametrización $\varphi : U \to W \subset S$ de un entorno conexo W de p_0 definida en el disco unidad $U \subset \mathbb{R}^2$. Afirmamos que la aplicación diferenciable $\eta : W \to \mathbb{R}^3 : p \mapsto \eta_p$ coincide con $N|W$ salvo signo.

En efecto, por la continuidad de N y η, los conjuntos disjuntos

$$W^+ = \{p \in W : N_p = \eta_p\} \quad \text{y} \quad W^- = \{p \in W : N_p = -\eta_p\}$$

son cerrados, y por la unicidad salvo signo de los vectores normales, $W = W^+ \cup W^-$, luego son también abiertos. Como W es conexo, uno de ellos es todo W. Esto prueba nuestra afirmación.

Visto lo anterior, si $N|W = \eta$, no hacemos nada. Si por el contrario $N = -\eta$, consideramos la parametrización

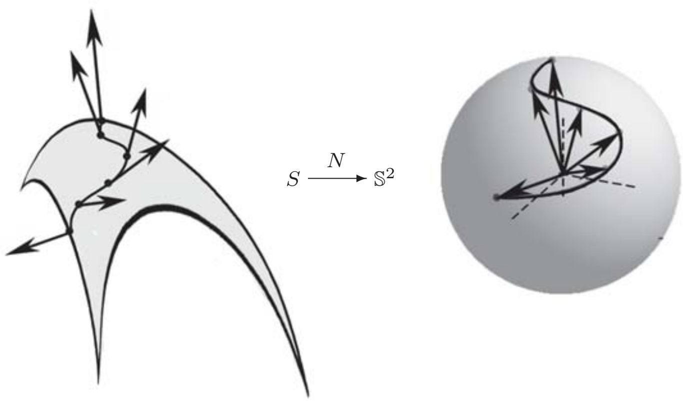
$$\psi : U \to W : (u, v) \mapsto \psi(u, v) = \varphi(v, u),$$

que está bien definida en U porque U es un disco. Claramente $\psi_u = \varphi_v$ y $\psi_v = \varphi_u$, lo que tiene el efecto de que los vectores normales η'_p de ψ son opuestos a los η_p de φ, y por tanto $N|W = \eta'$.

En todo caso, hemos obtenido una parametrización de un entorno W de p_0 que define en él los mismos vectores normales que N. Como esto vale para cada $p_0 \in S$, hemos obtenido un atlas en el que cada par de parametrizaciones definen en los puntos comunes los mismos vectores normales, y por tanto, tienen cambio de coordenadas positivo. Hemos terminado. ∎

Después de establecer el resultado básico anterior definimos ya la aplicación de Gauss:

Definición 6.3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad. Una *aplicación de Gauss* es una aplicación continua $N : S \to \mathbb{S}^2$ que asigna a cada punto $p \in S$ un vector $N(p) \in \mathbb{S}^2$ normal a T_pS.



Una aplicación de Gauss, si existe, es *única salvo signo* en el sentido siguiente. Si $N, N' : S \to \mathbb{S}^2$ son dos aplicaciones de Gauss, S es unión de los puntos donde $N' = N$ y los puntos donde $N' = -N$. Como esas condiciones definen dos conjuntos cerrados disjuntos, cada uno es una unión de componentes conexas de S. En otras palabras, en cada componente conexa hay dos aplicaciones de Gauss, que son opuestas. La demostración del criterio nos dice además que una aplicación de Gauss está definida localmente mediante parametrizaciones adecuadas, luego *es una aplicación diferenciable.*

Observaciones 6.4. (1) Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización local de una superficie S. La aplicación : $p \to \eta_p$ asociada a φ no es más que una aplicación de Gauss de W (que es una superficie diferenciable). Por ello, si S tiene una parametrización global, entonces tiene una aplicación de Gauss. En particular los grafos, que tienen la parametrización global de Monge (véase 3.6, p. 36).

(2) También conviene recordar que toda superficie S es localmente una superficie de nivel: cada punto tiene un entorno V en $\mathbb{R}^3$ en el que está definida una ecuación implícita $g(x, y, z) = a$ cuyo gradiente $\nabla_p g \neq 0$ es ortogonal T_pS para todo $p \in W = S \cap V$. Resulta que la aplicación: $p \mapsto \frac{\nabla_p g}{\|\nabla_p g\|}$ es una aplicación de Gauss de W. Así, si S tiene una ecuación implícita global, entonces tiene una aplicación de Gauss. ∎

Inmediatamente hay que decir que no siempre existen aplicaciones de Gauss. Hemos visto antes el criterio de existencia de un atlas con cambios de coordenadas positivos. Esta condición está directamente relacionada con la noción de orientación del plano y del espacio vectorial. El Álgebra Lineal define la orientación de un espacio vectorial mediante la elección de una base, o, con más precisión, de todas las bases relacionadas con la elegida por matrices de cambio con determinante positivo (lo que recuerda el criterio del atlas). En nuestra superficie S podemos adoptar un punto de vista parecido eligiendo una orientación en cada plano tangente, siempre y cuando las orientaciones así elegidas varíen continuamente en función del punto de tangencia.

(6.5) Orientación de los planos tangentes. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable.

(1) Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización local de S. Para cada punto p del abierto W tenemos la base $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}\}$ de T_pS. Esta base determina una orientación $[\varphi]_p$ del plano T_pS y, ya que los vectores de la base dependen continuamente de p, podemos considerar que también la orientacion tiene esta propiedad. Formalmente, la aplicación $[\varphi] : p \mapsto [\varphi]_p$ es continua en W.

(2) Consideremos otra parametrización $\psi : U' \to W'$, y un punto $p \in W \cap W'$. En T_pS tenemos las dos orientaciones $[\varphi]_p$ y $[\psi]_p$, que coinciden cuando el cambio de base correspondiente tiene determinante positivo. Pero la matriz de ese cambio de base es la jacobiana $J_{\varphi^{-1}\circ\psi}(\psi^{-1}(p))$ del cambio de coordenadas $\varphi^{-1}\circ\psi$ (3.4(3)),

luego φ *y* φ *definen la misma orientación en* $W\cap W'$ *si y sólo si el determinante jacobiano de* $\varphi^{-1}\circ\psi$ *es siempre positivo.*

(3) Resulta de lo anterior que si existe un atlas $\mathcal{A}$ de S cuyos cambios de coordenadas son todos positivos, entonces existe una *elección continua de orientación* en todos los planos tangentes: $p\mapsto[\varphi]_p$, tomando cualquier parametrización φ del atlas que parametrice un entorno de p. ▮

Así, nos hemos encontrado el mismo criterio que para la existencia de aplicación de Gauss, que justifica la siguiente definición:

Definición 6.6. Una superficie S se llama *orientable* si tiene una aplicación de Gauss. En ese caso una *orientación* de S es la elección de una tal aplicación, y hecha esa elección se dice que la superficie está *orientada*.

Tal vez sea bueno recordar aquí la demostración de 6.2, p. 74, donde mediante una aplicación de Gauss N se construía un atlas con todos sus cambios positivos, es decir, una elección continua de orientación en toda la superficie. La clave era elegir parametrizaciones $\varphi:U\to W$ tales que $\eta_p=N(p)$ para todo $p\in W$; decimos en ese caso que φ es *compatible con* N, o que es *compatible con la orientación*.

Presentemos por fin una superficie no orientable, es decir, que no tiene aplicaciones de Gauss:

Ejemplo 6.7. Éste es el ejemplo por excelencia: la *banda de Möbius*. Podemos definirla como la imagen S de la aplicación diferenciable $f:\mathbb{R}\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u,v)=\begin{pmatrix}\cos u\\ \operatorname{sen} u\\ 0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}\cos u & -\operatorname{sen} u & 0\\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{1}{2}u\\ 0\\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}u\end{pmatrix}.$$

Es fácil entender la dinámica de esta definición. Como la matriz 3×3 es la de una rotación de ángulo u alrededor del eje de las z, el segundo sumando traza un cierto segmento I_u de longitud 1 centrado en el punto $(\cos u,\operatorname{sen} u,0)$ de la circunferencia unidad en el plano xy.

(1) Las restricciones de f a dominios del tipo $(a,a+2\pi)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ son parametrizaciones de S, y para tener un atlas de S basta tomar las dos siguientes:

$$\begin{cases}\varphi=f|U:U\to f(U)=W, & U=(0,2\pi)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2});\\ \psi=f|U':U'\to f(U')=W', & U'=\varphi|(\pi,3\pi)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).\end{cases}$$

El abierto W consiste en toda la banda S salvo el segmento I_0, y W' en toda la banda salvo I_π.

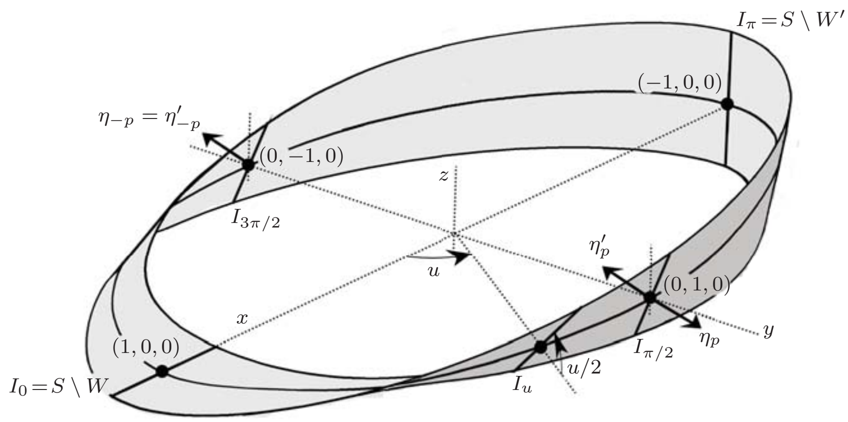
Consideramos ahora los puntos $p = (0,1,0)$ y $-p = (0,-1,0)$, ambos en $W \cap W'$:

$$p = \varphi(\tfrac{\pi}{2}, 0) = \psi(\tfrac{5\pi}{2}, 0), \quad -p = \varphi(\tfrac{3\pi}{2}, 0) = \psi(\tfrac{3\pi}{2}, 0),$$

en los que tenemos los siguientes vectores normales (calcúlense)

$$\begin{cases} \eta_p = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta_{-p} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}); \\ \eta'_p = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta'_{-p} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Lo importante aquí es que $\eta_p = -\eta'_p$ y $\eta_{-p} = \eta'_{-p}$.



(2) Supongamos ahora que existe una aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$. Como W es conexo, $N|W$ y η o bien son iguales o bien son opuestos. Cambiando N por su opuesto $-N$ si es necesario, podemos suponer $N|W = \eta$, luego

$$N_p = \eta_p = -\eta'_p\,, \quad N_{-p} = \eta_{-p} = \eta'_{-p}\,.$$

Ahora, como también W' es conexo, $N|W'$ y η' tienen que ser iguales u opuestos, pero: (i) no pueden ser iguales, pues no coinciden en p, (ii) no pueden ser opuestos, pues coinciden en $-p$.

De esta manera concluimos que la banda de Möbius no tiene aplicación de Gauss, es decir, no es orientable. ∎

Insistimos en que todas las superficies son *localmente* orientables, es decir, todo punto tiene un entorno abierto que es una superficie orientable. Sin embargo, el concepto de orientabilidad es global, pues se refiere a la superficie en su totalidad, como bien se ve con la banda de Möbius.

Volviendo al concepto de aplicación de Gauss, como una tal aplicación recoge la variación de los vectores normales a los planos tangentes de la superficie, recoge la manera en que esos mismos planos varían, y puede dar una idea de la forma de la superficie. El caso extremo es que no haya variación ninguna:

Proposición 6.8. *Una superficie conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto de un plano afín si y sólo si tiene una aplicación de Gauss N constante.*

Demostración. La condición necesaria es evidente, pues un abierto de un plano afín tiene la misma dirección normal en todos sus puntos: la de plano; en consecuencia tiene una aplicación de Gauss constante. El recíproco es un ejercicio ilustrativo de las ventajas de disponer de cálculo differencial en superficies. Supongamos que S tiene una aplicación de Gauss constante, digamos $N \equiv (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$; afirmamos que la aplicación diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = ax + by + cz$ es constante.

En efecto, como S es conexa, basta ver que todas las derivadas d_pf son nulas (4.6, p. 47). Pero f es la restricción de la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por la misma fórmula, luego

$$d_pf(\omega) = (d_pF)(\omega) = F(\omega) = \langle N(p), \omega\rangle = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_pS.$$

En fin, que f sea constante, digamos $f \equiv d$, significa que S está contenida en el plano $ax + by + cz = d$, y por 4.11, p. 50, concluimos que S es un abierto de ese plano. ∎

Analizamos a continuación algunos ejemplos en los que la variación de la aplicación de Gauss es significativa.

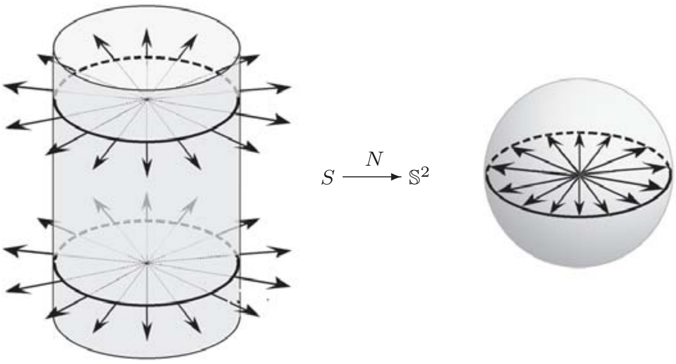
Ejemplos 6.9. (1) Las dos aplicaciones de Gauss de la esfera unidad son la identidad y la aplicación antipodal, que denotamos $\pm N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$. Obviamente son difeomorfismos, lo que señalamos aquí como indicador de la mucha variación del vector normal.

(2) Consideremos ahora el cilindro $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Como tiene ecuación implícita global, obtenemos inmediatamente una aplicación de

Gauss vía el gradiente. En este caso el gradiente es $(2x, 2y, 0)$, que tiene norma $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2$ (pues estamos en puntos del cilindro). Concluimos que

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

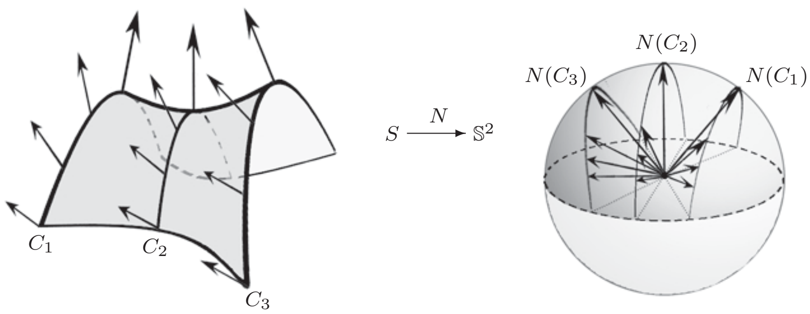
es una aplicación de Gauss.



Esta aplicación transforma todo el cilindro S en el ecuador $z = 0$ de $\mathbb{S}^2$, lo que dista mucho de ser un difeomorfismo. Podemos decir que el vector normal varía muy poco.

(3) Estudiemos el paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. La parametrización de Monge de esta ecuación *explícita* tiene vector normal $\vartheta = (2x, -2y, 1)$ (3.6, p. 36), y dividiendo por la norma se obtiene una aplicación de Gauss. También podemos utilizar el gradiente de la ecuación *implícita* $x^2 - y^2 + z = 0$, que es el mismo $(2x, -2y, 1)$. En cualquier caso, una aplicación de Gauss es

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$



Es fácil comprobar que esta aplicación es un difeomorfismo sobre el abierto $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$. Obsérvese en la figura cuáles son las imágenes de las curvas C_1, C_2 y C_3 por la aplicación de Gauss, y que a lo largo de esas curvas el vector normal nunca apunta hacia el hemisferio sur. Por tanto, el vector normal varía más en este paraboloide que en el cilindro, pero bastante menos que en la esfera.

(4) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el helicoide, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v \cos u, y = v \operatorname{sen} u, z = bu,$$

con

$$\begin{cases} \varphi_u = (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0). \\ \vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \operatorname{sen} u, b \cos u, -v) \end{cases}$$

(véase 3.5(4), p. 35). Como $\|\vartheta\|^2 = b^2 + v^2$, la aplicación de Gauss, en las coordenadas *globales* (u, v), es

$$N(\varphi(u, v)) = \tfrac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}(-b \operatorname{sen} u, b \cos u, -v).$$

En este caso es más costoso obtener una expresión de N en las coordenadas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ (pero es un ejercicio que recomendamos al lector). Para entender cómo se comporta N observamos que $N(\varphi(u, v)) \in \mathbb{S}^2$ es el vector que resulta de dividir por su norma la suma

$$(-b \operatorname{sen} u, b \cos u, 0) + v(0, 0, -1).$$

Fijemos u. El primer sumando es un vector de norma b del plano xy, y se le suman todos los vectores $v(0, 0, -1)$, $v \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene todo el plano generado por el primer sumando y el eje de las z, *salvo precisamente ese eje*. Por tanto, al dividir por la norma obtenemos el corte de ese plano con la esfera (un meridiano), excepto los polos norte y sur. Vemos así que al variar u, obtenemos toda la esfera menos los polos norte y sur. La aplicación no es suprayectiva, pero por dos puntos nada más. Por otra parte, es un aplicación claramente periódica en u, luego no es inyectiva. Se puede ver que es un difeomorfismo local, pero sobre esto volveremos en la lección siguiente. ▮

Terminamos la lección describiendo la aplicación de Gauss de una superficie de revolución.

(6.10) Aplicación de Gauss de una superficie de revolución. Sea S una superficie de revolución como en 3.9, p. 38, de donde tomamos toda la notación. Si $\alpha(u) =$

$(\zeta(u), 0, \xi(u))$, $\zeta(u) > 0$, $u \in I$, es la curva generatriz, la aplicación

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u))$$

porporciona parametrizaciones de la superficie por restricción a dominios del tipo $I \times (a, a+2\pi)$. Es facil ver que los cambios de coordenadas resultantes son traslaciones en $\mathbb{R}^2$, que tienen determinante jacobiano $\equiv 1 > 0$. Por tanto, podemos definir una aplicación de Gauss mediante estas coordenadas (u, v). En primer lugar

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u)\cos v, \zeta'(u)\operatorname{sen} v, \xi'(u)), \quad \varphi_v = (-\zeta(u)\operatorname{sen} v, \zeta(u)\cos v, 0), \\ \vartheta = (-\zeta(u)\xi'(u)\cos v, -\zeta(u)\xi'(u)\operatorname{sen} v, \zeta(u)\zeta'(u)). \end{cases}$$

Como

$$\|\vartheta\| = \zeta(u)\sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} = \zeta(u)\|\alpha'(u)\|$$

supondremos la curva generatriz parametrizada por el arco, para que la aplicación de Gauss sea

$$N(\varphi(u,v)) = (-\xi'(u)\cos v, -\xi'(u)\operatorname{sen} v, \zeta'(u)).$$

Para entender el comportamiento de N, recurrimos a la misma matriz de la banda de Möbius:

$$N(\varphi(u,v)) = \begin{pmatrix} \cos v & -\operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi'(u) \\ 0 \\ \zeta'(u) \end{pmatrix}.$$

Como el vector sobre el que actúa la matriz en cuestión es el vector normal $\mathbf{n}_\alpha(u)$ a la curva generatriz, fijado u, N rota a lo largo del paralelo correspondiente, con un ángulo θ respecto de la vertical dado por

$$\cos\theta = (0,0,1)\mathbf{n}_\alpha(u) = \zeta'(u).$$

La variación de N depende así de la del vector normal a la curva generatriz. ∎

Problemas

Número 1. Estudiar la aplicación de Gauss del paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$, primero como superficie topográfica y luego como superficie de revolución.

Número 2. Determinar una aplicación de Gauss para la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = e^{xy}$. Estudiar para qué valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ el vector $(\lambda, 0, \mu)$ es tangente a S en el punto $(0,0,1)$.

Lección 7

La segunda forma fundamental

En esta lección introducimos otra forma cuadrática en los planos tangentes: la denominada *segunda forma fundamental*. Para ello debemos avanzar en el estudio de la aplicación de Gauss, así que en lo sucesivo limitaremos nuestra atención *exclusivamente a las superficies orientables*.

Sea S una superficie orientable, con una orientación fijada, es decir, con una determinada aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$.

(7.1) Derivada de la aplicación de Gauss. La aplicación de Gauss N es diferenciable y su derivada d_pN en p es una aplicación lineal definida entre los planos tangentes T_pS y $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Ahora bien, ambos planos vectoriales son perpendiculares al vector $N(p)$ (para S por definición de N, para la esfera por 3.5(2), p. 34), y, en consecuencia, los dos planos coinciden. Por tanto, la derivada de la aplicación de Gauss puede ser entendida como una aplicación lineal

$$d_pN : T_pS \to T_pS.$$

Esta aplicación se llama *aplicación de Weingarten*. ▮

Cambiar la orientación de S significa cambiar el signo de su aplicación de Gauss, y entonces el signo de la derivada d_pN cambia de la misma manera. Por tanto, *al cambiar la orientación cambia el signo de la aplicación de Weingarten*. Señalemos que en muchos textos se utiliza $-d_pN$ como aplicación de Weingarten; nosotros hemos preferido no introducir ese signo menos.

Consideremos una curva $\alpha(t)$ en S con $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = \omega \in T_pS$. Resulta que

$$d_pN(\omega) = (N \circ \alpha)'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{N(\alpha(t)) - N(\alpha(t_0))}{t - t_0}.$$

Así, igual que N refleja la variación de los vectores tangentes y con ellos la de los planos tangentes, la derivada d_pN, mide las correspondientes *variaciones infinitesimales* en p (según cualquier dirección tangente ω). Con ello mide cómo se dobla la superficie en las proximidades de p.

Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplos 7.2. (1) Una aplicación de Gauss de la esfera unidad es la identidad. Su derivada en cualquier punto $p \in \mathbb{S}^2$ es por tanto también la identidad en $T_p\mathbb{S}^2$. Obsérvese que aunque sea la identidad para todos los puntos $p \in \mathbb{S}^2$, su dominio (el plano tangente) varía con el punto.

(2) Consideremos ahora el cilindro $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Como vimos en 6.9(2), p. 79,

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

es una aplicación de Gauss de S. Es la restricción de la proyección lineal $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, luego $d_pN = (d_p\pi)|T_pS = \pi|T_pS$, esto es:

$$d_pN : T_pS \to T_pS : \omega = (a, b, c) \mapsto \pi(\omega) = (a, b, 0).$$

Calculemos la matriz L_p de esta aplicación lineal respecto de una base de T_pS. Elegimos la formada por los vectores $(-y, x, 0)$ y $(0, 0, 1)$ (3.5(3), p. 35), y tenemos

$$d_pN(-y, x, 0) = (-y, x, 0), \quad d_pN(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

con lo que $L_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vemos que d_pN no es isomorfismo lineal, como ya sabíamos: si lo fuera, el teorema de la función inversa implicaría que la imagen de N tiene interior no vacío en la esfera. ∎

Los dos ejemplos que siguen son más elaborados.

Ejemplos 7.3. (1) Estudiemos el paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. Una aplicación de Gauss de S es (6.9(3), p. 80)

$$N : S \to \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x, -2y, 1).$$

Para calcular la derivada d_pN podemos calcular la de la extensión $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por la misma fórmula, y restringir a T_pS. En lugar de eso vamos a emplear una parametrización para obtener directamente una base de T_pS y la matriz de d_pN respecto de ella. Como grafo, S tiene la parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$, a la que corresponde la base $\mathcal{B}_\varphi$ de T_pS formada por las derivadas parciales $\varphi_x=(1,0,-2x)$ y $\varphi_y=(0,1,2y)$. Resulta

$$\begin{aligned} d_pN(\varphi_x) &= (N\circ\varphi)_x = \tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{(2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \\ &= \tfrac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}(4y^2+1,4xy,-2x), \\ d_pN(\varphi_y) &= (N\circ\varphi)_y = \tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{(2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \\ &= \tfrac{-2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}(4xy,4x^2+1,2y). \end{aligned}$$

Calculemos la matriz $L_p=\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d\end{smallmatrix}\right)$ de d_pN respecto de nuestra base $\mathcal{B}_\varphi$. Debe ser

$$d_pN(\varphi_x) = a\varphi_x + b\varphi_y,$$

esto es

$$\tfrac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}(4y^2+1,4xy,-2x) = a(1,0,-2x)+b(0,1,2y).$$

Mirando las dos primeras componentes se deduce

$$a = \tfrac{2(4y^2+1)}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}, \quad b = \tfrac{8xy}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}.$$

Análogamente se obtienen los otros dos coeficientes c y d, y al final la matriz buscada es

$$L_p = \tfrac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}}\begin{pmatrix} 4y^2+1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2-1\end{pmatrix}.$$

(2) Sea $S\subset\mathbb{R}^3$ el helicoide, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v\cos u, y = v\,\mathrm{sen}\,u, z = bu,$$

con $\varphi_u=(-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, b)$, $\varphi_v=(\cos u,\mathrm{sen}\,u,0)$, y con aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u,v)) = \tfrac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}(-b\,\mathrm{sen}\,u, b\cos u, -v)$$

(véase 6.9(4), p. 81). Para calcular la matriz de d_pN procedemos como con el paraboloide anterior. Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} d_pN(\varphi_u)=(N\circ\varphi)_u=\tfrac{-b}{\sqrt{b^2+v^2}}(\cos u,\mathrm{sen}\,u,0)=\tfrac{-b}{\sqrt{b^2+v^2}}\varphi_v, \\ d_pN(\varphi_v)=(N\circ\varphi)_v=\tfrac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}}(-v\,\mathrm{sen}\,u,v\cos u,b)=\tfrac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}}\varphi_u,\end{cases}$$

para concluir que la matriz buscada es

$$L_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{b^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2+v^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante no nulo, luego d_pN es un isomorfismo. Deducimos del teorema de la función inversa que N es un difeomorfismo local. ∎

Por último analizamos las superficies de revolución.

Ejemplos 7.4. (1) Sea S una superficie de revolución como en 6.10, p. 81. Suponemos su curva generatriz parametrizada mediante $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ con $\zeta(u) > 0$. También suponemos que u es el arco, es decir, que ${\zeta'}^2 + {\xi'}^2 = 1$, y por tanto $\zeta'\zeta'' + \xi'\xi'' = 0$. La aplicación

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u))$$

parametriza la superficie, y

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u)\cos v, \zeta'(u)\operatorname{sen} v, \xi'(u)), \quad \varphi_v = (-\zeta(u)\operatorname{sen} v, \zeta(u)\cos v, 0), \\ N(\varphi(u,v)) = (-\xi'(u)\cos v, -\xi'(u)\operatorname{sen} v, \zeta'(u)). \end{cases}$$

Tenemos

$$\begin{cases} d_pN(\varphi_u) = (-\xi''(u)\cos v, -\xi''(u)\operatorname{sen} v, \zeta''(u)) = a(u)\varphi_u, \\ d_pN(\varphi_v) = (\xi'(u)\operatorname{sen} v, -\xi'(u)\cos v, 0) = b(u)\varphi_v \end{cases}$$

donde

$$a(u) = \frac{-\xi''(u)}{\zeta'(u)} = \frac{\zeta''(u)}{\xi'(u)}, \quad b(u) = \frac{-\xi'(u)}{\zeta(u)}.$$

Se concluye que la matriz de d_pN es diagonal

$$L_p = \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & b(u) \end{pmatrix}.$$

(2) Veamos el caso del toro de revolución generado por una circunferencia del plano xz (1.11, p. 10). Parametrizamos esa circunferencia por la longitud del arco mediante

$$\zeta(u) = c + r\cos\tfrac{1}{r}u, \quad \xi(u) = r\operatorname{sen}\tfrac{1}{r}u \quad \text{con } (0<r<c).$$

Escribimos por comodidad $t = \frac{1}{r}u$, y derivamos:

$$\zeta'(u) = -\operatorname{sen} t, \quad \xi'(u) = \cos t, \quad \xi''(u) = -\tfrac{1}{r}\operatorname{sen} t.$$

En consecuencia, la matriz de la segunda forma fundamental del toro es

$$L_p = \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & -\frac{\cos t}{c + r\cos t} \end{pmatrix}.$$

Se observa que uno de los coeficientes es constante. Más adelante entenderemos el significado de este hecho (9.4(6), p. 119). ▮

Volviendo a la situación general, establecemos una propiedad básica de la aplicación de Weingarten:

Proposición 7.5. *Sea S nuestra superficie orientada con aplicación de Gauss N y sea $p \in S$. La aplicación de Weingarten $d_pN : T_pS \to T_pS$ cumple la identidad*

$$\langle d_pN(\omega), \omega' \rangle = \langle \omega, d_pN(\omega') \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_pS.$$

La propiedad anterior tiene nombre propio: se dice que d_pN es un *operador autoadjunto de T_pN*.

Demostración. Por linealidad, basta comprobar la igualdad para los vectores de una base de T_pS. Por tanto, consideramos una parametrización $\varphi : U \to W$ de un entorno W de p, y la base del plano tangente formada por los vectores φ_u y φ_v, y vamos a ver que

$$\langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, d_pN(\varphi_v) \rangle.$$

Derivando la identidad $\langle N(\varphi(u,v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$ respecto de u tenemos

$$\langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle + \langle N(\varphi(u,v)), \varphi_{vu} \rangle = 0,$$

luego

$$\langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u,v)), \varphi_{vu} \rangle.$$

Análogamente, derivando $\langle N(\varphi(u,v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$ respecto de v, se deduce que

$$\langle d_pN(\varphi_v), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u,v)), \varphi_{uv} \rangle.$$

En fin, por la regla de Schwarz $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, y se sigue lo que se quiere. ▮

Llegamos por fin a la segunda forma fundamental. Consideremos un punto $p \in S$. Por ser d_pN un *operador autoadjunto,* podemos definir una forma *bilineal simétrica* B_p en el plano tangente mediante

$$B_p(\omega, \omega') = -\langle d_pN(\omega), \omega' \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_pS,$$

y tenemos la correspondiente forma cuadrática:

Definición 7.6. La forma cuadrática $\mathbf{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_pN(\omega), \omega \rangle$$

es la *segunda forma fundamental de S en p.*

La introducción de un signo negativo en la definición anterior es de naturaleza técnica, y quedará justificada en la lección siguiente.

Igual que la primera forma fundamental y el producto escalar se determinan mutuamente, también ocurre así con $\mathbf{II}_p$ y B_p, y por la misma relación:

$$B_p(\omega, \omega') = \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{II}_p(\omega + \omega') - \mathbf{II}_p(\omega) - \mathbf{II}_p(\omega')\big).$$

Otra consideración que hay que tener presente es que si cambiamos la orientación de S, la segunda forma fundamental cambia de signo (pues como ya hemos dicho, cambia de signo la aplicación de Weingarten).

Ejemplos 7.7. (1) Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto conexo de plano afín, entonces N es constante, su derivada en cualquier punto $p \in S$ es nula, y la segunda forma fundamental también. Recíprocamente, supongamos que una superficie conexa S tiene nulas todas las segundas formas fundamentales $\mathbf{II}_p \equiv 0$. Entonces para todo $p \in S$, la forma bilineal simétrica asociada es también nula, es decir, $\langle d_pN(\omega), \omega' \rangle = 0$ para cualesquiera $\omega, \omega' \in T_pS$. Eso sólo es posible si $d_pN(\omega) = 0$ para todo $\omega \in T_pS$, es decir, si $d_pN \equiv 0$. Concluimos que todas las derivadas de N son nulas, y como S es conexa, que N es constante. Por 6.8, p. 79, S es un abierto de un plano afín.

(2) La esfera. Tomando como N la identidad, cada derivada d_pN es la identidad, y $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$, de modo que $\mathbf{II}_p$ es definida negativa. Si tomamos como N la aplicación antipodal, $\mathbf{II}_p = \mathbf{I}_p$ es definida positiva. Esto pasa en general: si cambiamos de signo N, cambiamos del mismo modo $\mathbf{II}_p$, pero no $\mathbf{I}_p$.

(3) El cilindro $S : x^2 + y^2 = 1$ con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ y derivada $d_pN(a, b, c) = (a, b, 0)$ (7.2(2), p. 88). Tenemos

$$\mathbf{II}_p(a, b, c) = -\langle (a, b, 0), (a, b, c)\rangle = -a^2 - b^2.$$

Vemos que $\mathbf{II}_p$ es muy diferente de $\mathbf{I}_p$: ésta es definida positiva y aquélla es semidefinida negativa. ∎

Los ejemplos anteriores son sencillos, y los hemos analizado con datos globales. En general, hay que utilizar expresiones locales.

(7.8) Expresión en coordenadas locales de la segunda forma fundamental. Seguimos con nuestra superficie S, orientada con aplicación de Gauss N, y con un punto $p \in S$ dado.

(1) Recordemos la expresión matricial de $\mathbf{II}_p$ respecto de una base $\mathcal{B} = \{\varpi, \varpi'\}$ de T_pS. Si $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi' \in T_pS$, entonces

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad M_p = \begin{pmatrix} B_p(\varpi, \varpi) & B_p(\varpi, \varpi') \\ B_p(\varpi', \varpi) & B_p(\varpi', \varpi') \end{pmatrix}.$$

Esta matriz M_p clasifica $\mathbf{II}_p$ como forma cuadrática: si es definida positiva o negativa, semidefinida positiva o negativa, o indefinida. La orientación influye aquí, pues, al cambiarla cambia de signo la matriz. Sin embargo, por ser una matriz de orden par, *no cambia el signo de su determinante.* Veremos que éste será el invariante más interesante.

(2) Consideremos una parametrización $\varphi : U \to W$ de un abierto W de S, la base $\mathcal{B}_\varphi$ de T_pS correspondiente. La matriz M_p de $\mathbf{II}_p$ respecto de $\mathcal{B}_\varphi$ es

$$M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e_p = -\langle d_pN(\varphi_{u,p}), \varphi_{u,p}\rangle, \\ f_p = -\langle d_pN(\varphi_{u,p}), \varphi_{v,p}\rangle = -\langle d_pN(\varphi_{v,p}), \varphi_{u,p}\rangle, \\ g_p = -\langle d_pN(\varphi_{v,p}), \varphi_{v,p}\rangle. \end{cases}$$

Estos *coeficientes* determinan completamente la segunda forma fundamental, pero insistimos en que dependen de la parametrización, aunque $\mathbf{II}_p$ no lo haga.

(3) En la demostración de 7.5, p. 91, derivamos $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v\rangle \equiv 0$ respecto de u y $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u\rangle \equiv 0$ respecto de v para obtener

$$\begin{cases} \langle d_pN(\varphi_u), \varphi_v\rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uv}\rangle \quad \text{y} \\ \langle d_pN(\varphi_v), \varphi_u\rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu}\rangle. \end{cases}$$

Análogamente podemos derivar $\langle N(\varphi(u,v)),\varphi_u\rangle\equiv 0$ y $\langle N(\varphi(u,v)),\varphi_v\rangle\equiv 0$ respecto de u la primera y respecto de v la segunda, para obtener

$$\begin{cases}\langle d_pN(\varphi_u),\varphi_u\rangle = -\langle N(\varphi(u,v)),\varphi_{uu}\rangle \quad \text{y}\\ \langle d_pN(\varphi_v),\varphi_v\rangle = -\langle N(\varphi(u,v)),\varphi_{vv}\rangle.\end{cases}$$

En consecuencia tenemos (una vez más descargando la notación):

$$\begin{cases}e=\langle N\circ\varphi,\varphi_{uu}\rangle,\\ f=\langle N\circ\varphi,\varphi_{uv}\rangle=\langle N\circ\varphi,\varphi_{vu}\rangle,\\ g=\langle N\circ\varphi,\varphi_{vv}\rangle.\end{cases}$$

∎

Para terminar la lección, vemos cómo se aplican estas fórmulas en los ejemplos habituales.

Ejemplos 7.9. (1) El cilindro $S: x^2+y^2=1$, con aplicación de Gauss $N(x,y,z)=(x,y,0)$ (6.9(2), p. 79). Ya lo hemos considerado antes (7.7(3), p. 93), pero ahora lo parametrizamos mediante $\varphi(u,v)=(\cos u,\operatorname{sen} u,v)$, de manera que $N(x,y,z)=(x,y,0)=(\cos u,\operatorname{sen} u,0)$. Tenemos:

$$\begin{cases}e=\langle N\circ\varphi,\varphi_{uu}\rangle=\langle(\cos u,\operatorname{sen} u,0),(-\cos u,-\operatorname{sen} u,0)\rangle=-1,\\ f=\langle N\circ\varphi,\varphi_{uv}\rangle=\langle(\cos u,\operatorname{sen} u,0),(0,0,0)\rangle=0,\\ g=\langle N\circ\varphi,\varphi_{vv}\rangle=\langle(\cos u,\operatorname{sen} u,0),(0,0,0)\rangle=0.\end{cases}$$

Así, la matriz de $\mathbf{II}_p$ respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi$ asociada a φ es $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Confirmamos que $\mathbf{II}_p$ es semidefinida negativa.

(2) El paraboloide hiperbólico $S: z=-x^2+y^2$, con su parametrización de Monge $\varphi(x,y)=(x,y,-x^2+y^2)$ y con aplicación de Gauss

$$N(x,y,z)=\tfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(2x,-2y,1)$$

(6.9(3), p. 80). Resulta

$$\begin{cases}e=\langle N\circ\varphi,\varphi_{xx}\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\langle(2x,-2y,1),(0,0,-2)\rangle=\tfrac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\\ f=\langle N\circ\varphi,\varphi_{xy}\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\langle(2x,-2y,1),(0,0,0)\rangle=0,\\ g=\langle N\circ\varphi,\varphi_{yy}\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\langle(2x,-2y,1),(0,0,2)\rangle=\tfrac{2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.\end{cases}$$

y la matriz de $\mathbf{II}_p$ es $M_p = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Así, $\mathbf{II}_p$ es indefinida.

(3) El helicoide $S \subset \mathbb{R}^3$, con $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, bu)$ y aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u,v)) = \tfrac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}(-b\operatorname{sen} u, b\cos u, -v).$$

(6.9(4), p. 81). Procedemos como en los dos casos anteriores:

$$\begin{cases} e = \langle N\circ\varphi, \varphi_{uu}\rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}\langle(-b\operatorname{sen} u, b\cos u, -v), (-v\cos u, -v\operatorname{sen} u, 0)\rangle = 0,\\ f = \langle N\circ\varphi, \varphi_{uv}\rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}\langle(-b\operatorname{sen} u, b\cos u, -v), (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)\rangle = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}},\\ g = \langle N\circ\varphi, \varphi_{vv}\rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}\langle(-b\operatorname{sen} u, b\cos u, -v), (0,0,0)\rangle = 0.\end{cases}$$

Obtenemos la matriz $M_p = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, y vemos que $\mathbf{II}_p$ es indefinida.

(4) Consideramos ahora la superficie de revolución $S \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)),$$

donde $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ es una parametrización por el arco de la curva generatriz de la superficie (o sea, ${\zeta'}^2+{\xi'}^2=1$) con $\zeta(u) > 0$. La aplicación de Gauss es

$$N(\varphi(u,v)) = (-\xi'(u)\cos v, -\xi'(u)\operatorname{sen} v, \zeta'(u)) \quad (6.10, \text{ p. } 81),$$

y por tanto:

$$\begin{cases} e = \langle N\circ\varphi, \varphi_{uu}\rangle = \langle(-\xi'\cos v, -\xi'\operatorname{sen} v, \zeta'), (\zeta''\cos v, \zeta''\operatorname{sen} v, \xi'')\rangle = -\zeta''\xi' + \zeta'\xi'',\\ f = \langle N\circ\varphi, \varphi_{uv}\rangle = \langle(-\xi'\cos v, -\xi'\operatorname{sen} v, \zeta'), (-\zeta'\operatorname{sen} v, \zeta'\cos v, 0)\rangle = 0,\\ g = \langle N\circ\varphi, \varphi_{vv}\rangle = \langle(-\xi'\cos v, -\xi'\operatorname{sen} v, \zeta'), (-\zeta\cos v, -\zeta\operatorname{sen} v, 0)\rangle = \zeta\xi'.\end{cases}$$

La matriz de $\mathbf{II}_p$ es pues

$$M_p = \begin{pmatrix}-\zeta''\xi' + \zeta'\xi'' & 0\\ 0 & \zeta\xi'\end{pmatrix}.$$

Como se ve, que sea definida, semidefinida o indefinida depende de la curva generatriz de S. ▮

Problemas

Número 1. Calcular la segunda forma fundamental del paraboloide elíptico $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = x^2 + y^2$ en un punto $p \in S$. Clasificarla como forma cuadrática.

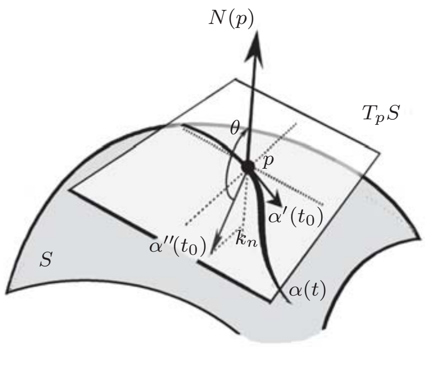
Curvatura normal

En esta lección se estudian nociones relativas a la curvatura de las superficies o de ciertas curvas de las superficies. Para curvas, la curvatura se definía a partir de la variación del vector tangente, y empezaremos con este punto de vista para definir cierta noción de curvatura de la superficie en una determinada dirección (definida por una recta vectorial del plano tangente en un punto).

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable orientada, con aplicación de Gauss N, y consideremos un punto p de S.

(8.1) Curvatura normal de una curva de una superficie. Sea $\alpha : I \to S$ una curva regular de la superficie S, *parametrizada por el arco,* que pasa por p, digamos $\alpha(t_0) = p \in S$. En tal situación $\alpha''(t_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{t}_\alpha(t_0) = \alpha'(t_0)$, y la curvatura de α en t_0 es $\kappa_\alpha(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|$. Como la curva está en S, $\alpha'(t_0)$ es tangente a S en p, es decir, ortogonal al vector normal $N(p)$ en p (lo que no garantiza que $N(p)$ tenga siquiera la dirección de $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$). En fin, la *curvatura normal de α en p* es por definición

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle.$$



Si $\alpha''(t_0) \neq 0$ y θ es el ángulo formado por los vectores $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$ y $N(p)$, entonces $k_n(\alpha) = \kappa_\alpha(t_0) \cos\theta$.

De esta manera, $k_n(\alpha)$ es la longitud *con signo* de la proyección del vector $\alpha''(t_0)$ sobre la dirección normal a la superficie. Ese signo se determina respecto de $N(p)$, de manera que si se cambia la orientación (esto es, el signo de la aplicación de Gauss), se cambia el signo de la curvatura normal. ∎

El siguiente es un resultado clásico que da idea de la naturaleza de la noción anterior, trayendo a escena la segunda forma fundamental. Se conoce como *teorema de Meusnier:*

Teorema 8.2. *Sea α una curva regular de S, parametrizada por el arco, que pasa por p, digamos $\alpha(t_0) = p$, y con vector tangente $\alpha'(t_0) = \omega \in T_pS$. Su curvatura normal en p es*

$$k_n(\alpha) = \mathbf{II}_p(\omega).$$

En particular, todas las curvas regulares de S (parametrizadas por el arco) que pasan por p con una dirección tangente dada, tienen la misma curvatura normal en p.

Demostración. Derivando la identidad $\langle N(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle = 0$ obtenemos

$$0 = \langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0)\rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0)\rangle = \langle d_pN(\omega), \omega\rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0)\rangle,$$

de modo que

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_pN(\omega), \omega\rangle = \langle N(p), \alpha''(t_0)\rangle = k_n(\alpha).$$

Visto esto, si dos curvas parametrizadas por el arco tienen en p la misma dirección tangente, su vector tangente está determinado salvo signo, digamos que es $\pm\omega$, y como $\mathbf{II}_p$ es una forma cuadrática, $\mathbf{II}_p(w) = \mathbf{II}_p(-w)$. ∎

Para curvas de S cuyo plano osculador en p no coincide con el tangente a la superficie en ese punto, se puede extraer el siguiente corolario.

Corolario 8.3. *Sean α_1 y α_2 curvas de S que pasan por p. Si ambas curvas tienen la misma tangente y los mismos planos osculadores en p y éstos son distintos de T_pS, entonces tienen la misma curvatura en p.*

Demostración. Supongamos $p = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$, y denotemos de la manera obvia $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ los vectores tangentes y normales de las curvas en p. Las hipótesis significan que $\mathbf{t}_1 = \pm\mathbf{t}_2$ y $\mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{n}_2$, y que los vectores normales forman con $N(p)$ ángulos $\theta_1, \theta_2 \neq \frac{1}{2}\pi$. Por el teorema de Meusnier, las curvaturas normales de ambas curvas en p coinciden, es decir,

$$\langle \alpha_1''(t_1), N(p)\rangle = \langle \alpha_2''(t_2), N(p)\rangle,$$

y en consecuencia

$$\|\alpha_1''(t_1)\| \cos\theta_1 = \|\alpha_2''(t_2)\| \cos\theta_2.$$

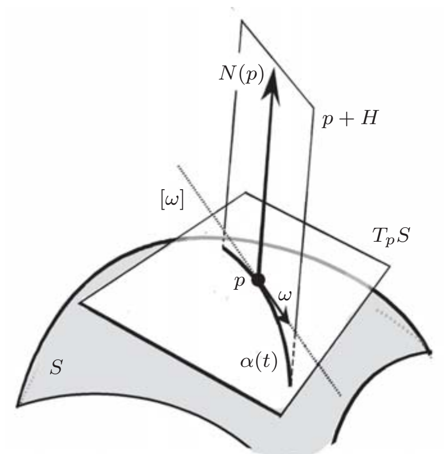
Aquí, sabemos que esos cosenos no son nulos, y puesto que $\mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{n}_2$ o coinciden o son opuestos. Pero la igualdad muestra que los dos cosenos tienen el mismo signo, luego deben ser iguales. Con ello deducimos $\|\alpha_1''(t_1)\| = \|\alpha_2''(t_2)\|$, esto es, que las curvaturas de las dos curvas son iguales. ∎

El teorema de Meusnier muestra que la curva influye poco en el valor de su curvatura normal, lo que sugiere la siguiente definición:

Definición 8.4. Sea $[\omega]$ una dirección tangente a S en p. Se denomina *curvatura normal de S en p en la dirección* $[\omega]$ a la curvatura normal en p de todas las curvas de S (parametrizadas por el arco) que pasan por p con dirección tangente $[\omega]$.

Obviamente, para calcular una curvatura normal de S en el punto p se puede elegir cualquier curva tangente a la dirección de que se trate. Hay una manera muy natural de elegir esa curva.

(8.5) Secciones normales. (1) Consideremos una dirección tangente $[\omega]$ de T_pS. Entonces tenemos el plano vectorial H generado por ω y el vector normal $N(p)$, y su trasladado el plano afín $p + H$ paralelo a H que pasa por p; estos planos vectorial y afín se llaman *normales a S en la dirección* $[\omega]$. Como $H = T_p(p+H)$ es evidentemente transversal a T_pS, la intersección $S \cap (p+H)$ es localmente la traza de un arco de Jordan (3.8, p. 37). Así, existe una curva regular $\alpha : I \to S$ parametrizada por el arco que es un homeomorfismo sobre un entorno de p en $H \cap S$; tendremos $p = \alpha(t_0)$ para cierto $t_0 \in I$. Como la traza de α yace en S, $\alpha'(t_0) \in T_pS$, y como también yace en $p + H$, $\alpha'(t_0) \in T_p(p + H) = H$. Así, $\alpha'(t_0) \in [\omega]$, y $[\omega]$ es la dirección tangente de α en p. Esta curva α es una *sección normal de S en el punto p en la dirección* $[\omega]$.



(2) Con las notaciones anteriores, resulta que $k_n(\alpha)$ es la curvatura normal de S en la dirección $[\omega]$. Veamos que ésta es también la curvatura de α como curva plana.

En efecto, orientemos el plano vectorial H mediante la base $\{\omega, N(p)\}$ y la sección normal de modo que $\alpha'(t_0)$ y ω apunten en el mismo sentido. Con estas orientaciones, $N(p)$ es el vector normal a α en p *como curva plana,* y entonces la curvatura $\kappa(t_0)$ de α en p como curva plana está definida por la relación

$$\alpha''(t_0) = \kappa(t_0)N(p).$$

(es una curvatura con signo). Concluimos que

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p)\rangle = \langle \kappa(t_0)N(p), N(p)\rangle = \kappa(t_0),$$

esto es, *la curvatura normal de S en p en la dirección $[\omega]$ es la curvatura con signo de la sección normal de S en esa dirección.* ∎

Tras las consideraciones geométricas precedentes, volvemos con la segunda forma fundamental $\mathbf{II}_p$ en el punto $p \in S$. Puesto que $\mathbf{II}_p$ expresa las curvaturas normales de S, interesa estudiar cómo se puede calcular. Para ello utilizaremos un resultado básico de la teoría de formas cuadráticas, el denominado *teorema espectral.* Según este teorema, por ser la aplicación de Weingarten d_pN un operador autoadjunto se cumple que:

Teorema 8.6. *El plano tangente T_pS tiene bases ortonormales formadas por autovectores de la aplicación de Weingarten d_pN.*

En particular, d_pN tiene dos autovalores reales (posiblemente iguales). Si los autovalores son iguales, entonces d_pN es una homotecia, todos los vectores son autovectores, y cualquier base ortonormal sirve. Si los autovalores son distintos, entonces dos autovectores cualesquiera de uno y otro autovalor son ortogonales, y basta dividirlos por sus normas para obtener la base ortonormal requerida.

Explicado lo anterior, volvemos al cálculo de las curvaturas normales.

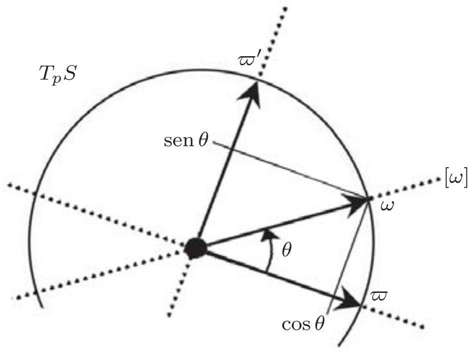
(8.7) Fórmula de Euler. Sean S nuestra superficie y $p \in S$. Como acabamos de decir, T_pS tiene una base *ortonormal* $\{\varpi, \varpi'\}$ formada por dos autovectores de d_pN, digamos $d_pN(\varpi) = \nu\varpi$, $d_pN(\varpi') = \nu'\varpi'$; por conveniencia notacional que será evidente de inmediato, consideramos $k = -\nu$ y $l = -\nu'$.

(1) Una dirección tangente a S en p se representa por uno cualquiera de los dos vectores unitarios que la generan; sea $\omega \in T_pS$ uno de ellos (el otro es su opuesto). Se tiene que $\omega = (\cos\theta)\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\varpi'$ para cierto ángulo θ entre 0 y

2π. De esta manera la curvatura normal en la dirección de ω es una función de ese ángulo que representaremos $k_n(\theta) = \mathbf{II}_p(\omega)$. Por ejemplo, se tiene

$$k_n(0) = \mathbf{II}_p(\varpi) = k \quad \text{y} \quad k_n(\tfrac{1}{2}\pi) = \mathbf{II}_p(\varpi') = l.$$

Claramente con $0 \leq \theta < \pi$ se representan todas las direcciones tangentes en p.



(2) Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} k_n(\theta) = \mathbf{II}_p(\omega) &= -\langle d_pN((\cos\theta)\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\varpi'), (\cos\theta)\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\varpi'\rangle \\ &= -\langle(\cos\theta)\nu\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\nu'\varpi', (\cos\theta)\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\varpi'\rangle \\ &= \langle(\cos\theta)k\varpi + (\operatorname{sen}\theta)l\varpi', (\cos\theta)\varpi + (\operatorname{sen}\theta)\varpi'\rangle \\ &= (\cos^2\theta)k\langle\varpi,\varpi\rangle + (\cos\theta\operatorname{sen}\theta)k\langle\varpi,\varpi'\rangle \\ &\qquad + (\operatorname{sen}\theta\cos\theta)l\langle\varpi',\varpi\rangle + (\operatorname{sen}^2\theta)l\langle\varpi',\varpi'\rangle, \end{aligned}$$

y como la base elegida es ortonormal, queda

$$k_n(\theta) = k\cos^2\theta + l\operatorname{sen}^2\theta.$$

Ésta es la denominada *Fórmula de Euler*. También se puede escribir:

$$k_n(\theta) = (k-l)\cos^2\theta + l = k - (k-l)\operatorname{sen}^2\theta.$$

(3) Supongamos por ejemplo que $\nu \leq \nu'$, o sea, que $k \geq l$. Resulta:

$$k_n(\theta) = k\cos^2\theta + l\operatorname{sen}^2\theta \begin{cases} \leq k\cos^2\theta + k\operatorname{sen}^2\theta = k = k_n(0), \\ \geq l\cos^2\theta + l\operatorname{sen}^2\theta = l = k_n(\tfrac{1}{2}\pi). \end{cases}$$

Por tanto k y l son respectivamente las curvaturas normales máxima y mínima en p.

(4) Ya hemos dicho que el intervalo de ángulos que interesa es entre 0 y π, y de todo lo anterior se sigue fácilmente que la curvatura normal $k_n(\theta)$ es decreciente entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ (de k a l) y creciente entre $\frac{1}{2}\pi$ y π (de l a k). Por continuidad, alcanza todos los valores intermedios entre sus extremos. ∎

A la vista de lo anterior, las curvaturas extremas se distinguen de las demás, y reciben nombre propio:

Definición 8.8. Las *curvaturas principales* de S en p son las curvaturas normales extremas en p, y las *direcciones principales* son las direcciones tangentes en que se alcanzan esas curvaturas normales extremas.

Esta noción depende de la orientación, es decir, de la elección de la aplicación de Gauss: si cambiamos de signo de ésta, cambian de signo sus derivadas, sus autovalores y sus curvaturas principales.

Todo lo anterior se resume así: *las curvaturas principales son los valores opuestos de los autovalores de la aplicación de Weingarten, y se alcanzan en direcciones ortogonales, que se corresponden con los autovectores asociados a esos autovalores.*

Revisemos a continuación las superficies S de las que conocemos la aplicación de Gauss N y su aplicación de Weingarten d_pN en un punto p. Empezamos por las dos más sencillas.

Ejemplos 8.9. (1) La esfera, orientada con aplicación de Gauss la identidad. La aplicación de Weingarten en cualquier punto es la identidad, todos los vectores tangentes son autovectores de autovalor $+1$, y cualquier base ortonormal cumple el teorema espectral. En este caso extremo, sólo hay una curvatura principal, que vale -1, y cualquier dirección es principal. Si pensamos en la segunda forma fundamental, $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$, que vale -1 en cualquier vector unitario.

Razonemos ahora con secciones normales. Es claro que las secciones normales de la esfera son los círculos máximos (de radio 1), cuya curvatura como curvas planas es ± 1 según la orientación. Ahora bien, la curvatura normal es una función continua, luego sólo puede tomar uno de los valores, y es constante $\equiv \pm 1$. Este razonamiento geométrico no permite decidir el signo, pues no hace uso específico de la aplicación de Gauss, es decir, de la orientación, elegida. Esta ambigüedad se evita observando directamente que para cualquier parametrización α de un círculo máximo con $\alpha(0) = p$, los vectores $N(p)$ y $\alpha''(0)$ apuntan en sentidos opuestos, de donde se sigue que $k_n(\alpha) = -1$.

(2) Pasemos al cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. En 7.2(2), p. 88, calculamos la matriz L_p de d_pN respecto de la base de T_pS formada por los vectores $\varpi = (-y, x, 0)$ y $\varpi' = (0, 0, 1)$. Es inmediato comprobar que esa base es ortonormal, y la matriz L_p dice que ϖ es un autovector del autovalor 1 y ϖ' es un autovector del autovalor 0. Por tanto, las curvaturas principales son -1 y 0, y las direcciones principales corresponden a ϖ y ϖ'. La formula de Euler que se obtiene es

$$k_n(\theta) = -\cos^2\theta.$$

Utilizando la matriz M_p de $\mathbf{II}_p$ respecto de esa misma base obtenida en 7.9(1), p. 94, se confirma inmediatamente el comportamiento de la curvatura normal. En efecto, si $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$ tenemos

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu)M_p\binom{\lambda}{\mu} = -\lambda^2.$$

Pero como la base es ortonormal, $\|\omega\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ (compruébese con los datos de este caso). En consecuencia, si esa norma es 1, el valor de $\mathbf{II}_p(\omega)$ varía entre el máximo 0 y el mínimo -1.

Utilicemos ahora secciones normales en un punto p. Las dos evidentes son la circunferencia del plano horizontal que pasa por p, y la recta vertical que pasa por el punto. Estas dos secciones tiene curvatura ±1 (según la orientación) y 0. Las demás secciones normales son elipses con ejes distintos $e > e' = 1$ y curvatura $\pm1/e^2$. Así, la curvatura normal empieza valiendo ±1 en la sección horizontal, varía continuamente hasta 0 en la sección vertical, sigue variando hasta valer otra vez ±1 en la sección horizontal. En el primer tramo hasta 0 el signo no puede cambiar, pues la curvatura normal no se anula ahí, y en el segundo tampoco por lo mismo. Pero el último valor coincide con el primero, y concluimos que el signo es constante. Por tanto, la curvatura normal varía entre 1 y 0, o entre -1 y 0. Concluimos que las curvaturas principales son $+1$ y 0, o -1 y 0; las direcciones principales son las de las secciones normales correspondientes. De nuevo, la indecisión del signo se debe a que en este argumento no interviene la aplicación de Gauss. ∎

Veamos otro ejemplo importante.

(8.10) Curvaturas principales de una superficie de revolución Sea S una superficie de revolución con la parametrización habitual

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\,\mathrm{sen}\, v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

(1) En 7.4(1), p. 90, se describe la aplicación de Weingarten con la hipótesis de que la curva generatriz esté parametrizada por el arco (para simplificar cálculos). Con esa hipótesis, respecto de la base del plano tangente asociada a φ la matriz de la aplicación de Weingarten era diagonal, con autovalores $-\xi''/\zeta'$ y $-\xi'/\zeta$. Por tanto las curvaturas principales son $k = \xi''/\zeta'$ y $l = \xi'/\zeta$, y las direcciones principales corresponden al meridiano y al paralelo que pasan por el punto. Dejamos al lector que escriba la fórmula de Euler.

Fijémonos en k y su dirección principal, dada por φ_u, es la del meridiano. La sección normal correspondiente a ella es el meridiano por el punto, cuya curvatura como curva plana es por tanto k. Por otra parte es claro que la curvatura del meridiano como curva plana es *la curvatura* κ_α *de la curva generatriz*. Esto lo confirman las fórmulas, pues $\mathbf{t}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ con $\mathbf{t}_\alpha = (\zeta', \xi')$ y $\mathbf{n}_\alpha = (-\xi', \zeta')$ (aquí es cómodo que u sea el arco).

Analicemos la otra curvatura principal l, cuya dirección principal es la de φ_v, es decir la del paralelo. Ahora bien, el paralelo es efectivamente una sección plana, pero no necesariamente una sección normal, y sólo en ése caso sabemos que l coincida con la curvatura como sección plana. Ahora bien, como curva plana la curvatura del paralelo es la de una circunferencia de radio $\zeta(u)$, luego la coincidencia se da sólo si $l = \pm 1/\zeta(u)$, es decir, $\xi'(u) = \pm 1$. Al estar la curva generatriz parametrizada por el arco, deducimos $\zeta'(u) = 0$, y ésa es la tercera componente de $N(\varphi(u,v))$ (6.10, p. 81). Por tanto, el vector normal a la superficie está en el plano xy, y el plano del paralelo es un plano normal a la superficie. En conclusión, si la curvatura principal l coincide con la curvatura del paralelo, éste es una sección normal (y recíprocamente). Además, esto corresponde a que el vector tangente a la curva generatriz en el punto correspondiente al paralelo en cuestión sea vertical.

(2) La información cualitativa de la discusión precedente se puede utilizar para calcular las curvaturas k y l, sin suponer que u sea el arco de la curva generatriz. En efecto, lo que sabemos en todo caso es que las direcciones principales son los meridianos y los paralelos. Por tanto, los vectores tangentes φ_u y φ_v son siempre, sea o no u el arco, autovectores:

$$d_pN(\varphi_{u,p}) = -k\varphi_{u,p}, \quad d_pN(\varphi_{v,p}) = -l\varphi_{v,p}.$$

Estas igualdades permiten obtener k y l. Primero tenemos (aligerando la notación):

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta' \cos v, \zeta' \operatorname{sen} v, \xi'), \quad \varphi_v = (-\zeta \operatorname{sen} v, \zeta \cos v, 0), \\ N(\varphi(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}}(-\xi' \cos v, -\xi' \operatorname{sen} v, \zeta'). \end{cases}$$

(aquí aparece $\sqrt{\zeta'^2+\xi'^2}$, no necesariamente $\equiv 1$). Ahora basta utilizar las primeras componentes de los vectores involucrados, que son

$$\tfrac{\partial}{\partial u}\tfrac{-\xi'\cos v}{\sqrt{\zeta'^2+\xi'^2}} = -k\zeta'\cos v, \quad \tfrac{\partial}{\partial v}\tfrac{-\xi'\cos v}{\sqrt{\zeta'^2+\xi'^2}} = l\zeta\operatorname{sen} v.$$

Operando y despejando las curvaturas se concluye:

$$k = \frac{\zeta'\xi''-\zeta''\xi'}{(\zeta'^2+\xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta\sqrt{\zeta'^2+\xi'^2}}.$$

Por supuesto, si u es el arco obtenemos los valores de (1): para l salta a la vista, y para k nótese que derivando $\zeta'^2+\xi'^2=1$ se obtiene $\zeta'\zeta''+\xi'\xi''=0$. ∎

Los ejemplos que siguen requieren otro tipo de cálculos, que ilustran el procedimiento general.

Ejemplos 8.11. (1) El paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2+y^2$. En 7.3(1), p. 88, elegimos su parametrización global φ como grafo y calculamos la matriz de d_pN respecto de la correspondiente base $\mathcal{B}_\varphi$ de T_pS. La situación varía según el punto.

(i) Para $p=(0,0,0)$ la base es $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, que es ortonormal, y la matriz respecto de ella es diagonal, luego los vectores de la base son autovectores con autovalores ± 2 (*loc. cit.*). En consecuencia las curvaturas principales son ∓ 2 y las direcciones principales corresponden a los vectores de la base. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = -2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta = -4\cos^2\theta + 2.$$

(ii) Para un punto p del tipo $(x,0,z)$, la base es sólo ortogonal, pero la matriz es diagonal (*loc.cit.*). Por ello, los dos vectores de la base son autovectores, y determinan las direcciones principales: sólo hay que dividirlos por sus normas para tener una base ortonormal en las condiciones del teorema espectral. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = \tfrac{-2}{(4x^2+1)^{3/2}}\cos^2\theta + \tfrac{2}{\sqrt{4x^2+1}}\operatorname{sen}^2\theta.$$

Análogamente se trataría un punto del tipo $(0,y,z)$.

(iii) Para un punto p con $xy\neq 0$ hay que buscar una nueva base por aplicación directa del teorema espectral. Es un problema de Álgebra Lineal que resolvemos para el punto $p=(1,1,0)$. Para ese punto la base de T_pS y la matriz de d_pN que tenemos para empezar son

$$\mathcal{B}_\varphi=\{(1,0,-2),(0,1,2)\} \qquad \text{y} \qquad L_p=\begin{pmatrix}10/27 & -8/27\\ 8/27 & -10/27\end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es $P(T)=T^2-4/81$, que tiene por raíces $\nu=\pm 2/9$. Estos son los autovalores, y para cada uno encontramos sus autovectores resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix}10/27-\nu & -8/27\\ 8/27 & -10/27-\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Para $\nu=+2/9$ resulta $(\lambda,\mu)=(2,1)$ y para $\nu=-2/9$ resulta $(\lambda,\mu)=(1,2)$ (soluciones no nulas salvo proporcionalidad, claro). Hay que entender que (λ,μ) son las coordenadas de los autovectores *respecto de la base dada*. Así obtenemos los dos autovectores siguientes

$$\varpi=2(1,0,-2)+(0,1,2)=(2,1,-2), \quad \varpi'=(1,0,-2)+2(0,1,2)=(1,2,2).$$

Como predice el teorema espectral, son ortogonales, y basta dividirlos por su norma 3 para obtener una base ortonormal. Las curvaturas principales son $\mp 2/9$ y las direcciones principales corresponden a los dos vectores ϖ y ϖ'. La fórmula de x es

$$k_n(\theta)=-\tfrac{2}{9}\cos^2\theta+\tfrac{2}{9}\operatorname{sen}^2\theta=-\tfrac{4}{9}\cos^2\theta+\tfrac{2}{9}.$$

(2) El helicoide $S\subset\mathbb{R}^3$ parametrizado por $x=v\cos u, y=v\operatorname{sen}u, z=bu$. En 7.3(2), p. 89, la base del plano tangente es ortogonal, pero la matriz no es diagonal. Hay pues que proceder como en el apartado anterior. Hagámoslo para un punto p con $v=0$. En ese caso, la base de T_pS y la matriz de d_pN con las que empezamos son

$$\mathcal{B}_\varphi=\{(0,0,b),(\cos u,\operatorname{sen}u,0)\} \qquad \text{y} \qquad L_p=\begin{pmatrix}0 & -1/b^2\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $P(T)=T^2-1/b^2$, de modo que los autovalores son $\pm 1/b$. Obtenemos como autovectores asociados $(1,-b)$ y $(1,b)$, esto es, obtenemos los autovectores

$$\begin{cases}\varpi=(0,0,b)-b(\cos u,\operatorname{sen}u,0)=(-b\cos u,-b\operatorname{sen}u,b),\\ \varpi'=(0,0,b)+b(\cos u,\operatorname{sen}u,0)=(b\cos u,b\operatorname{sen}u,b).\end{cases}$$

Son dos autovectores ortogonales con norma $b\sqrt{2}$, luego divididos por ella forman la base ortonormal buscada. Las curvaturas principales son $\mp 1/b$ y las direcciones principales las de los vectores ϖ y ϖ'. La fórmula de Euler queda

$$k_n(\theta) = -\tfrac{1}{b}\cos^2\theta + \tfrac{1}{b}\,\mathrm{sen}^2 = -\tfrac{2}{b}\cos^2 + \tfrac{1}{b}.$$ ∎

Las direcciones principales dan lugar al concepto siguiente:

Definición 8.12. Una curva regular en S se llama *línea de curvatura* si su vector tangente en todo punto define una dirección principal en ese punto.

Obsérvese que ésta noción no depende de la parametrización de la curva. El siguiente resultado clásico, conocido como *teorema de Olinde Rodrigues,* proporciona un criterio útil para reconocer las líneas de curvatura.

Teorema 8.13. *Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular α de S sea una línea de curvatura es que exista una función diferenciable $\nu : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$(N \circ \alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t).$$

En tal caso $k(t) = -\nu(t)$ es la curvatura principal a lo largo de $\alpha(t)$.

Demostración. Si $\alpha(t)$ es una línea de curvatura, entonces $\alpha'(t)$ genera una dirección principal y, por tanto, es un autovector de $d_{\alpha(t)}N$, es decir,

$$(N \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) = \nu(t)\alpha'(t),$$

siendo $k(t) = -\nu(t)$ la correspondiente curvatura principal. La función $\nu(t)$ se puede expresar como

$$\nu(t) = \frac{\langle (N \circ \alpha)'(t), \alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

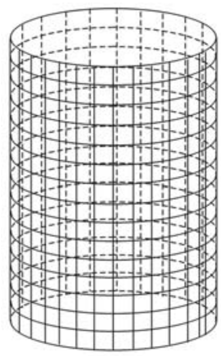
y, ya que $\alpha(t)$ es regular, $\nu(t)$ es diferenciable.

Recíprocamente, si se tiene una igualdad $(N\circ\alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t)$, entonces $\alpha'(t)$ es un vector propio de $d_{\alpha(t)}N$ y define una dirección principal correspondiente a la curvatura principal $k(t) = -\nu(t)$. ∎

El cálculo de líneas de curvatura no es asunto fácil. Veamos a continuación algunos ejemplos accesibles.

Ejemplos 8.14. (1) La esfera, con aplicación de Gauss la identidad. En este caso, cualquier curva α es línea de curvatura, pues $N \circ \alpha = \alpha$, y la condición del teorema anterior se cumple trivialmente.

(2) El cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. En este caso, las curvaturas principales son -1 y 0. Ahora bien, una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es línea de curvatura si existe una función diferenciable $\nu(t)$ tal que



$$(N \circ \alpha)'(t) = (x'(t), y'(t), 0) = \nu(t)(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Como $-\nu(t)$ debe ser una curvatura principal, por continuidad sólo puede ser $\nu \equiv 1$ o $\nu \equiv 0$. En el primer caso obtenemos $z'(t) \equiv 0$, es decir la curva tiene constante su tercera coordenada en $\mathbb{R}^3$; esto significa que es la circunferencia intersección del cilindro con un plano horizontal $z = z_0$. En el segundo caso, $x'(t) = y'(t) \equiv 0$, y la curva tiene constantes sus dos primeras coordenadas en $\mathbb{R}^3$, es decir, la curva es una recta vertical.

(3) Según 8.10(1), p. 105, las direcciones principales en un punto de una superficie de revolución corresponden a los meridianos y los paralelos, luego éstos son las líneas de curvatura de la superficie. Se puede ver una representación de las del toro en la figura de 1.11, p. 10. ▮

Problemas

Número 1. Sea S el cilindro circular con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Utilizar la expresión $\mathbf{II}_p(a, b, c) = -a^2 - b^2$ de 7.7(3), p. 93, para deducir la fórmula de Euler $k_n(\theta) = -\cos^2\theta$ del ejemplo 8.9(2), p. 105. Deducirla también utilizando la curvatura de las elipses obtenidas como secciones normales según se describen en ese ejemplo.

Número 2. Sea $\alpha : I \to S$ una curva de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que para todo $t \in I$ la curva es una sección normal de S en $\alpha(t)$. ¿Es α una línea de curvatura de S?

Número 3. Sea α una curva regular de una superficie S. Supongamos que α es plana, es decir, que su traza está contenida en un plano P. Probar que α es una línea de curvatura si y sólo si S y P se cortan con ángulo constante a lo largo de α. Enunciar y demostrar un resultado más general válido para la intersección de dos superficies.

Número 4. Sea α una curva regular intersección de dos superficies transversales S_1 y S_2. Probar que la curvatura $k = \kappa_\alpha(p)$ de α en un punto p cumple $k^2 \operatorname{sen}^2\theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos\theta$, donde

Lección 9

Curvatura de Gauss

En su momento dijimos que la clasificación de la segunda forma fundamental es importante para conocer la geometría de una superficie, y explicamos que el determinante sería el invariante más importante. Nos dedicamos a ello aquí. Como es habitual, consideraremos una superficie *orientada,* pero los conceptos que introduzcamos en esta lección *serán independientes de la orientación.*

Sea S una superficie orientada, con aplicación de Gauss N.

(9.1) Clasificación de la segunda forma fundamental. En cada punto $p \in S$ tenemos la segunda forma fundamental $\mathbf{II}_p$. Como ponen de manifiesto los ejemplos vistos en las lecciones anteriores, las curvaturas principales en el punto p clasifican $\mathbf{II}_p$. Veamos por qué.

(1) Para simplificar al máximo el argumento, elijamos una base ortonormal $\{\varpi, \varpi'\}$ de T_pS formada por autovectores de d_pN, digamos $d_pN(\varpi) = \nu\varpi$ y $d_pN(\varpi') = \nu'\varpi'$. Entonces, como vimos al calcular la fórmula de Euler,

$$B_p(\varpi, \varpi) = \mathbf{II}_p(\varpi) = -\nu = k,\ B_p(\varpi', \varpi') = \mathbf{II}_p(\varpi') = -\nu' = l,$$

y por ser ϖ y ϖ' ortogonales

$$B_p(\varpi, \varpi') = B_p(\varpi', \varpi) = -\langle d_pN(\varpi'), \varpi\rangle = -\langle \nu'\varpi', \varpi\rangle = 0.$$

De esta manera la matriz de $\mathbf{II}_p$ es diagonal, y en su diagonal aparecen las dos curvaturas principales.

En particular se ve que la matriz de la segunda forma fundamental y la de la aplicación de Weingarten son *diagonales y opuestas* cuando se calculan respecto de una base como esta $\{\varpi, \varpi'\}$.

(2) Según lo anterior la forma cuadrática $\mathbf{II}_p$ se escribe $k\lambda^2 + l\mu^2$ en coordenadas (λ, μ) respecto de la base elegida, y obtenemos inmediatamente la clasificación siguiente según los signos de las curvaturas principales. Suponemos por ejemplo que $k \geq l$:

k	l	$\mathbf{II}_p$	$k \cdot l$
$+$	$+$	definida positiva	$+$
$+$	0	semidefinida positiva	0
$+$	$-$	indefinida	$-$
0	0	idénticamente nula	0
0	$-$	semidefinida negativa	0
$-$	$-$	definida negativa	$+$

Hemos añadido el signo del producto de las curvaturas por la explicación que sigue. ∎

Observemos cómo influye la orientación en este resultado. Sabemos que al cambiar la orientación las curvaturas principales cambian de signo, con la consecuencia de que en la clasificación anterior los términos *positiva* y *negativa* se intercambian. Este intercambio corresponde a la elección arbitraria que hagamos de la aplicación de Gauss, elección que no influye en qué forma tenga nuestra superficie. Por tanto los calificativos antedichos no serán esenciales, y debemos fijarnos más bien en que la forma sea definida o indefinida, semidefinida o nula. Resulta que esto queda determinado por el signo del determinante (aparte el caso en que $\mathbf{II}_p \equiv 0$). De hecho, ese determinante es la curvatura con nombre más ilustre:

Definición 9.2. La *curvatura de Gauss* $K(p)$ de S en p es el producto de sus dos curvaturas principales en p.

Tal vez sea ésta la noción de curvatura más importante, que además, por lo explicado anteriormente, *no depende de la orientación*. Como toda superficie es *localmente* orientable, deducimos que la curvatura de Gauss se puede definir para superficies no orientables.

Para recuperar a partir de K las curvaturas principales, hay que conocer también la denominada *curvatura media* $H(p)$ *de* S *en* p, que es la semisuma de las curvaturas principales $k(p)$ y $l(p)$. Aquí conviene señalar que esta curvatura media se puede también definir en superficies no orientables, pero sólo *salvo signo* (de nuevo por ser toda superficie localmente orientable).

Obsérvese que si escribimos $\nu(p) = -k(p), \nu'(p) = -l(p)$, el polinomio característico de d_pN se escribe:

$$P(T) = (T - \nu(p))(T - \nu'(p)) = T^2 + 2H(p)T + K(p),$$

y resulta que:

(i) $K(p) = \det(d_pN)$, $H(p) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(d_pN)$,

(ii) $k(p), l(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$.

(9.3) Clasificación de los puntos de una superficie. Los puntos de la superficie S se clasifican atendiendo a su curvatura como sigue.

K	H	$\mathbf{II}_p$	**punto**
$+$	$\pm$	definida	*elíptico*
0	$\neq 0$	semidefinida	*parabólico*
0	0	idénticamente nula	*planar*
$-$	$\pm$	indefinida	*hiperbólico*

Vemos que la curvatura media sólo es relevante para distinguir los puntos parabólicos de los planares, y aún en ese caso sólo interesa si es o no nula, lo que no depende de la orientación.

Adicionalmente, un punto se llama *umbílico* si sus dos curvaturas principales son coincidentes, lo cual es compatible, tan sólo, con el caso elíptico y el caso planar. Obsérvese que la coincidencia de las dos curvaturas principales tampoco depende de la orientación, y la podemos expresar mediante la igualdad $H^2 = K$. ▮

El dato interesante en la tabla precedente es el signo de K. Ese signo es el del determinante de la matriz de $\mathbf{II}_p$ respecto de cualquier base de T_pS. En efecto, aunque para encontrar k, l y $K = k \cdot l$ haya que cambiar de base, los determinantes de $\mathbf{II}_p$ antes y después del cambio coinciden salvo el cuadrado del determinante del cambio. Por ello, aunque el determinante de $\mathbf{II}_p$ depende de la base, su signo no.

Analicemos ahora las superficies de referencia habituales.

Ejemplos 9.4. (1) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un plano afín. Como la aplicación de Gauss es constante, su derivada es siempre nula, luego su único autovalor es 0 y su determinante 0 también. Así, un plano afín tiene curvatura de Gauss igual a cero, y todos sus puntos son planares.

(2) La esfera $S = \mathbb{S}^2$. Elegimos como aplicación de Gauss la identidad, de modo que su derivada también es la identidad, que tiene 1 por único autovalor,

y el determinante 1. Por tanto la esfera tiene curvatura de Gauss constante igual a 1, y todos sus puntos son umbílicos.

Una esfera de radio $r > 0$ arbitrario tiene curvatura de Gauss constante igual $1/r^2$ (es fácil ver que su aplicación de Weingarten es una homotecia de radio $1/r$). En la lección 11 entenderemos la relación entre las curvaturas de dos esferas de radio diferente.

(3) El cilindro circular $S : x^2 + y^2$, como en 8.9(2), p. 105. Allí vimos que sus curvaturas principales eran -1 y 0. Por tanto, la curvatura de Gauss es constante igual a 0, y todos sus puntos son parabólicos. La curvatura media con esta orientación es $-\frac{1}{2}$.

(4) El paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2+y^2$. En 8.11(1), p. 107, calculamos las curvaturas principales en algunos de sus puntos, pero no en general por la dificultad de las operaciones. Sin embargo, el cálculo de la curvatura de Gauss es más sencillo, pues podemos utilizar la matriz de la aplicación de Weingarten que calculamos en 7.3(1), p. 88, a saber:

$$L_p = \tfrac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4y^2+1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2-1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es la curvatura de Gauss, y vale

$$K = \frac{-4}{(4x^2+4y^2+1)^2} < 0,$$

de manera que todos los puntos de la superficie son hiperbólicos. La curvatura media es la traza de la matriz:

$$H = \frac{8(-x^2+y^2)}{(4x^2+4y^2+1)^2} = \frac{8z}{(4x^2+4y^2+1)^2};$$

el último numerador muestra cómo cambia de signo H según varía la altura z.

(5) El helicoide S parametrizado por $x = v\cos u, y = v\,\mathrm{sen}\,u, z = bu$. En 7.3(2), p. 89, se obtuvo la matriz L_p de la aplicación de Weingarten, y su determinante se calcula inmediatamente: es

$$K = \frac{-b^2}{(b^2+v^2)^2} < 0.$$

Como en el caso anterior, resulta que todos los puntos son hiperbólicos. Por otra parte, al calcular la traza de L_p obtenemos que la curvatura media H del helicoide es constante igual a 0, o sea que en todo punto las dos curvaturas principales son no nulas y opuestas.

(6) Sea S la superficie de revolución generada por una curva $(\zeta(u), 0, \xi(u))$, $\zeta(u)>0$, no necesariamente parametrizada por el arco. En 8.10(2), p. 107, vimos que las curvaturas principales de S son

$$k = \frac{\zeta'\xi'' - \zeta''\xi'}{(\zeta'^2 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}},$$

y por tanto, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\xi'(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

(el lector puede escribir la curvatura media).

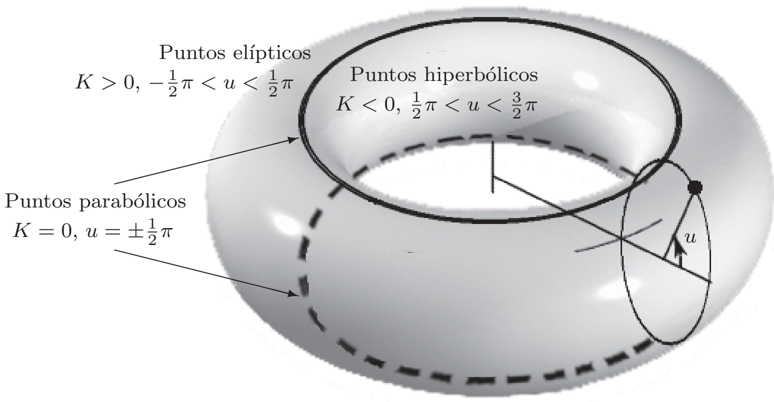
Veamos un ejemplo importante (1.11, p. 10): el toro de revolución generado por una circunferencia del plano xz, parametrizada por

$$\zeta(u) = c + r\cos u, \quad \xi(u) = r \operatorname{sen} u \quad (0<r<c).$$

Las fórmulas anteriores proporcionan las siguientes curvaturas:

$$k = \frac{1}{r}\,, \ l = \frac{\cos u}{c + r\cos u}\,; \quad K = \frac{\cos u}{r(c + r\cos u)}$$

(comparar con 7.4(2), p. 91). Veamos qué tipos de puntos tiene este toro. En primer lugar, no tiene puntos umbílicos, pues si $k = l$ resulta $c + r\cos t = r\cos t$, esto es, $c = 0$. Como $k > 0$, tampoco hay puntos planares. Por otra parte, el denominador de K siempre es positivo, luego el signo de K es el de su numerador $\cos t$, y obtenemos:



Es decir, los puntos elípticos forman la *cara exterior* del toro, los parabólicos sus *circunferencias superior* e *inferior,* y los hiperbólicos su *cara interior.* ∎

La siguiente proposición se refiere a superficies cuyos puntos son umbílicos en su totalidad.

Proposición 9.5. *Sea S una superficie orientable conexa que tiene todos sus puntos umbílicos, entonces S es un abierto de un plano o de una esfera.*

Demostración. Sea N una aplicación de Gauss de S. Dado $p \in S$ arbitrario, puesto que las dos curvaturas principales coinciden, coinciden los dos autovalores de d_pN, que es por tanto una homotecia; digamos $d_pN(\omega) = \nu(p)\omega$ para todo $\omega \in T_pS$. Esto define una aplicación $\nu : S \to \mathbb{R}$.

Consideremos una parametrización $p = \varphi(u, v)$ cualquiera de S. Entonces

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_u = d_pN(\varphi_u) = (\nu \circ \varphi)\varphi_u, \\ (N \circ \varphi)_v = d_pN(\varphi_v) = (\nu \circ \varphi)\varphi_v. \end{cases}$$

Estas expresiones muestran que $\nu \circ \varphi$ es una función diferenciable, pues de ellas se deduce, por ejemplo, que

$$\nu \circ \varphi = \frac{\langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|^2},$$

y el vector φ_u no se anula nunca. Por tanto, podemos derivar respecto de v y u respectivamente, y obtenemos

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_{vu} = (\nu \circ \varphi)_v\varphi_u + (\nu \circ \varphi)\varphi_{vu}, \\ (N \circ \varphi)_{uv} = (\nu \circ \varphi)_u\varphi_v + (\nu \circ \varphi)\varphi_{uv} \end{cases}$$

Restando ambas expresiones y teniendo en cuenta la regla de Schwarz (de las derivadas cruzadas) deducimos que

$$(\nu \circ \varphi)_v\varphi_u - (\nu \circ \varphi)_u\varphi_v \equiv 0$$

y, ya que los vectores φ_u y φ_v son linealmente independientes, obtenemos que las dos derivadas parciales de $\nu \circ \varphi$ se anulan idénticamente en U, o en otras palabras, que $d_p\nu \equiv 0$.

Lo anterior demuestra que la aplicación $\nu : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable y tiene todas sus derivadas nulas, y como S es conexo, ν es constante (4.6, p. 47). Si ocurre que $\nu \equiv 0$, entonces $d_pN \equiv 0$ para todo $p \in S$, luego la aplicación de Gauss N es constante, y ya sabemos que esto implica que S es un abierto de un plano afín (6.8, p. 79). Por tanto, supondremos ν constante no nula, y demostraremos que S es un abierto de una esfera.

Sea $f : S \to \mathbb{R}^3$ la aplicación $f(p) = p - \frac{1}{\nu}N$. Es diferenciable, y su derivada en cualquier punto $p \in S$ es nula:

$$d_pf(\omega) = \omega - \tfrac{1}{\nu}d_pN(\omega) = \omega - \tfrac{1}{\nu}\nu\omega = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_pS.$$

En consecuencia, f es constante en S, digamos $f \equiv p_0$. Esto significa que todo punto p de S cumple la relación $p - p_0 = \frac{1}{\nu}N(p)$, y por tanto

$$\|p - p_0\| = \tfrac{1}{\nu}\|N(p)\| = \tfrac{1}{\nu}.$$

En otras palabras, p está en la esfera S_ν de centro p_0 y radio $\frac{1}{\nu}$. Pero visto así ya que S está contenida en la esfera S_ν, se deduce que S es un abierto de esa esfera (4.11, p. 50). ∎

El teorema anterior contiene la caracterización siguiente de la esfera, debida a Meusnier: *una superficie compacta cuyos puntos son todos umbílicos es una esfera.*

A continuación introducimos otro concepto independiente de la orientación. Sea como siempre S nuestra superficie (con una aplicación de Gauss N) y $p \in S$.

Definición 9.6. Se llama *indicatriz de Dupin* el subconjunto del plano tangente T_pS definido por la ecuación $\mathbf{II}_p = \pm 1$.

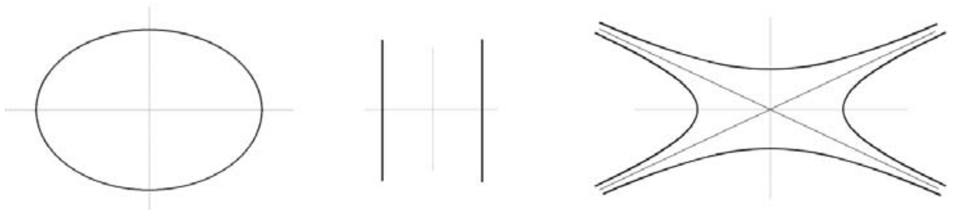
El doble signo en esta definición hace que no dependa de la orientación. Para entender de qué tipo de objeto se trata, consideremos una base ortonormal $\{\varpi, \varpi'\}$ de T_pS formada por autovectores de d_pN: $d_pN(\varpi) = \nu\varpi$, $d_pN(\varpi') = \nu'\varpi'$. Las curvaturas principales son $k = -\nu$ y $l = -\nu'$, y como ya hemos calculado otras veces, dado un vector $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$ se tiene

$$\mathbf{II}_p(\omega) = k\lambda^2 + l\mu^2.$$

Por tanto, la indicatriz de Dupin es un par de cónicas del plano tangente. Los posibles casos son los siguientes:

K	**indicatriz de Dupin**	**punto**
$+$	dos elipses, una real y una imaginaria	elíptico
0	dos pares de rectas paralelas, uno real y uno imaginario	parabólico
0	dos cónicas vacías	planar
$-$	dos hipérbolas con las mismas asíntotas	hiperbólico

El siguiente dibujo representa los casos relevantes.



Punto elíptico Punto parabólico Punto hiperbólico

Veamos cómo la indicatriz de Dupin pone de manifiesto la curvatura de la superficie cerca del punto de que se trate.

(9.7) Interpretaciones geométricas. (1) Supongamos que una determinada dirección del plano tangente está representada por un vector ω de la indicatriz de Dupin (es decir, $\mathbf{II}_p(\omega) = \pm 1$). Puesto que la curvatura normal en esa dirección es $k_n = \mathbf{II}_p(w/\|w\|) = \pm 1/\|w\|^2$, resulta que cuanto mayor es la norma de ω, o sea, cuanto más lejano al origen es el punto de la indicatriz de Dupin en la dirección dada, más pequeña en valor absoluto es la curvatura normal en esa dirección. Distingamos los posibles casos:

(i) En un punto elíptico nos fijamos en la elipse real de la indicatriz. Su excentricidad es el cociente de las curvaturas principales, y determina la relación entre los dos ejes de la elipse. Confirmamos que cuanto mayor sea ese cociente, más varía la curvatura normal alrededor del punto.

(ii) En un punto parabólico tenemos un par de rectas paralelas reales. Todas las direcciones del plano tangente, excepto la del propio par de rectas, cortan a una de ellas. Cuando esas direcciones se aproximan a la del par de rectas, los puntos de corte con el par se alejan del origen, y corresponden a curvaturas normales cada vez menores. En el límite obtenemos que la curvatura normal en la dirección del par de rectas es nula.

(iii) En un punto hiperbólico aparecen un par de hipérbolas con las mismas asíntotas. Arbitariamente próximas a esas asíntotas hay direcciones representadas por puntos de las hipérbolas arbitrariamente lejanos del origen y, por tanto, la curvatura normal en esas direcciones es arbitrariamente pequeña, y nula en el límite. En suma, en las direcciones de las asíntotas la curvatura normal es nula.

(2) Una interpretación clásica de la indicatriz de Dupin, que no desarrollaremos aquí, se basa en la observación de que si se toma el plano tangente T_pS a un punto p de una superficie S entonces la intersección de la superficie con un plano paralelo y cercano a T_pS es "aproximadamente" la indicatriz de Dupin de S en p. El lector puede visualizar fácilmente ejemplos sencillos considerando un elipsoide, un paraboloide hiperbólico y un cilindro circular. ∎

A la vista de las consideraciones anteriores, quedan justificadas las siguientes definiciones.

Definición 9.8. Las *direcciones asintóticas* de S en p son las direcciones tangentes en que se anula la curvatura normal. Una curva regular de S se llama *línea asintótica* si su vector tangente en todo punto define una dirección asintótica en ese punto.

Naturalmente, para que haya líneas asintóticas tiene que haber direcciones de curvatura nula, luego debe ser $K \leq 0$. Por ejemplo, como la curvatura de Gauss de una esfera es positiva, no tiene líneas asintóticas. Veamos algunos ejemplos en que sí las hay:

Ejemplos 9.9. (1) En el plano todas las curvaturas normales son 0, luego todas las curvas son líneas asintóticas.

(2) En el cilindro circular una de las curvaturas principales es 0, y la otra siempre es $\neq 0$. La curvatura principal nula corresponde siempre a la dirección vertical $(0, 0, 1)$, luego las líneas asintóticas son las rectas verticales contenidas en el cilindro (todas líneas de curvatura además).

(3) Analicemos el toro de revolución del ejemplo 9.4(6), p. 119. En primer lugar, según se vio allí, la curvatura normal no se anula nunca en puntos de la cara exterior del toro, luego en esa parte del toro no hay ninguna dirección asintótica, luego ninguna línea asintótica. Esa región externa está limitada por las dos circunferencias de puntos parabólicos, que ellas mismas son líneas de curvatura con curvatura nula (8.14(3), p. 110), luego son líneas asintóticas. En fin, en la cara interior del toro habrá direcciones asintóticas, pues las curvaturas principales en

esa cara interior tienen signos contrarios, luego algún valor intermedio nulo. Así en esta parte del toro habrá líneas asintóticas, pero no serán líneas de curvatura.∎

Terminamos la lección mostrando otra manera en que la curvatura de Gauss está ligada a la forma de la superficie. Se trata de un resultado del propio Gauss, y se conoce como *teorema de la curvatura de Gauss*.

Teorema 9.10. *Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss N, y sea p un punto de la superficie en el que la curvatura de Gauss no se anula. Entonces se tiene:*

$$|K(p)| = \lim_{W\to p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)}\,,$$

donde el límite $W \to p$ se toma según cualquier base de entornos W de p.

Demostración. Como $K(p)$ es el determinante de la aplicación de Weingarten d_pN, resulta del teorema de la función inversa (4.10, p. 50), que $N : S \to \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local en p, esto es, que si W es suficientemente pequeño, su imagen $N(W)$ es abierto en $\mathbb{S}^2$, y $N|W : W \to N(W)$ es un difeomorfismo. Dicho esto, podemos suponer dada una parametrización $\varphi : U \to W$ del entorno W, con $p = \varphi(q)$. En nuestra situación, $\psi = N \circ \varphi : U \to N(W)$ es una parametrización de $N(W)$. Vamos a usar estas parametrizaciones para calcular las áreas de W y $N(W)$.

Según se explicó en 5.11(3), p. 66, esas áreas son

$$\text{área}(W) = \int_U \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, dudv, \quad \text{área}(N(W)) = \int_U \|\psi_u \wedge \psi_v\|\, dudv.$$

En nuestra situación $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$, luego

$$\psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \quad \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v,$$

para ciertos coeficientes $a, b, c.d.$ Por tanto

$$\|\psi_u \wedge \psi_v\| = \|(a\varphi_u + b\varphi_v) \wedge (c\varphi_u + d\varphi_v)\| = |ad - bc|\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|.$$

Ahora bien,

$$\begin{cases} d_pN(\varphi_u) = (N\circ\varphi)_u = \psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \\ d_pN(\varphi_v) = (N\circ\varphi)_v = \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \end{cases}$$

con lo que $K(p) = \det(d_pN) = ad - bc$. Con todo esto el cociente que nos interesa queda

$$\frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \frac{\int_U |K \circ \varphi|\, h\, dudv}{\int_U h\, dudv}, .$$

donde $h = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ nunca se anula. El teorema del valor medio del Cálculo Integral dice que el último cociente vale

$$\frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1) \int_U\, dudv}{h(q_2) \int_U\, dudv},$$

con $q_1, q_2 \in U$. Por tanto

$$\lim_{W \to p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \lim_{U \to q} \frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1)}{h(q_2)} = |K(p)|,$$

pues $W \to p$ significa que $U \to q$ y por tanto $q_1, q_2 \to q$. ∎

Así, el valor absoluto de la curvatura de Gauss en un punto p puede ser interpretado como *el límite de un cociente de áreas,* la de la imagen esférica de un entorno de p y la de dicho entorno, cuando éste se va haciendo más y más pequeño. Obsérvese que cuanto mayor sea el cociente, más superficie esférica se recorrerá en un entorno de p, y para esto más debe curvarse la superficie en ese entorno. Gauss determinó el signo de K en función de la orientación de S.

La demostración anterior contiene el siguiente resultado, que merece ser enunciado separadamente:

Corolario 9.11. *Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss N, y sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un abierto $W \subset S$ tal que $N \circ \varphi : U \to N(W)$ sea un difeomorfismo sobre un abierto $N(W)$ de $\mathbb{S}^2$. Sea Σ un subconjunto conexo de W. Entonces*

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \Big| \int_\Sigma K \Big|.$$

Demostración. Por la prueba precedente,

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} |K \circ \varphi| \sqrt{\det(Q)}\, dudv,$$

y esta última integral es por definición (5.12, p. 67) $\int_\Sigma |K|$. Ahora bien, K no puede anularse en W, pues es el determinante de la derivada de N, y $N|W$ es difeomorfismo. Como Σ es conexo, se deduce que K tiene signo constante en Σ, y el valor absoluto sale de la integral, como en el enunciado. ∎

En otras palabras, *la integral del valor absoluto de la curvatura de Gauss en una región Σ es el área de su imágen esférica* (con ciertas hipótesis sobre Σ).

Problemas

Número 1. Calcular la curvatura de Gauss de los paraboloides elípticos $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 4y^2$.

Número 2. Probar que toda recta contenida en una superficie S es una curva asintótica. Deducir que si por el punto $p \in S$ pasa una recta contenida en S entonces la curvatura de Gauss en p no puede ser positiva.

Número 3. Sea p un punto de una superficie S tal que la curvatura media de S se anula en p. Probar que existen dos direcciones asintóticas ortogonales en el plano tangente en p (que son únicas si p no es planar). ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Número 4. Calcular la curvatura de Gauss de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $\cos x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z = 0$. Describir qué tipos de puntos tiene S.

Número 5. Calcular la indicatriz de Dupin y las direcciones asintóticas en el origen de la superficie dada por la ecuación $z = x^2 - 2y^2$.

Número 6. Sea p un punto de una superficie S tal que la intersección del plano tangente afín $p + T_pS$ con S contiene una curva regular α. Probar que la recta tangente a α en p define una dirección asintótica en T_pS. Un caso particular de uso frecuente es el de un punto hiperbólico: si el plano tangente en él a la superficie la corta en dos curvas transversales, entonces esas curvas definen las dos direcciones asintóticas en el punto.

Número 7. Sea S una superficie y p un punto de S. Supongamos que S contiene tres rectas distintas que pasan por p. Probar que p es un punto planar. Deducir que si S es conexa entonces S es una parte abierta de un plano si y sólo si por cada punto de S pasan tres rectas distintas contenidas en S.

Número 8. Sea S una superficie, no necesariamente orientable, con curvatura de Gauss (definible también en el caso no orientable) positiva en todo punto. Probar que S es orientable y es posible escoger la orientación de modo que las curvaturas principales sean positivas en todo punto.

Número 9. Sea S una superficie, no necesariamente orientable, de manera que su curvatura media se puede definir salvo signo. Probar que si la curvatura media no se anula en ningún punto entonces S es orientable.

Número 10. ¿Cuándo tiene puntos planares una superficie de revolución? Describirlos en ese caso.

Lección 10

Ecuaciones de Weingarten

En las lecciones anteriores hemos utilizado la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental para estudiar la manera en que una superficie se dobla o curva en el espacio. Las mismas definiciones de estos dos objetos expresan la estrecha relación que los une, pero si los cotejamos en los muchos ejemplos analizados, los encontraremos más o menos parecidos según los casos. Dedicamos esta lección a expresar explícitamente con ecuaciones la relación entre la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental. Esas ecuaciones explican esos parecidos, a veces nada aparentes, otras, como en la situación del teorema espectral, verdaderamente evidentes.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, con aplicación de Gauss N.

(10.1) Ecuaciones de Weingarten. Retomamos la expresión local de la segunda forma fundamental tal y como se desarrolló en el párrafo 7.8, p. 93. Teníamos allí una parametrización φ de S compatible con la orientación (esto es, $\eta = N$), y la base $\mathcal{B}_\varphi$ del plano tangente correspondiente. Consideramos, respecto de esa base, las matrices de $\mathbf{I}_p$, $\mathbf{II}_p$ y d_pN, respectivamente:

$$Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} a_p & c_p \\ b_p & d_p \end{pmatrix}.$$

Si denotamos (λ, μ) las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_\varphi$ de un vector $\omega \in T_pS$ y (λ', μ') las de $\omega' = d_pN(\omega)$, tenemos

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = (\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_pN(\omega), \omega \rangle_p = -\langle \omega', \omega \rangle_p = -\langle \omega, \omega' \rangle_p,$$

resulta

$$(\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

y en consecuencia,

$$M_p = -Q_p L_p, \quad \text{o mejor,} \quad L_p = -Q_p^{-1} M_p.$$

Así pues, calculamos Q_p^{-1} y multiplicamos por M_p para obtener los siguientes valores de los coeficientes de la matriz L_p (olvidando subíndices):

$$a = \frac{fF - eG}{EG - F^2}\,, \quad b = \frac{eF - fE}{EG - F^2}\,, \quad c = \frac{gF - fG}{EG - F^2}\,, \quad d = \frac{fF - gE}{EG - F^2}\,.$$

Las expresiones anteriores, que se denominan *ecuaciones de Weingarten,* determinan por completo la aplicación de Weingarten en términos de la la primera y la segunda formas fundamentales. ∎

La igualdad $M_p = -Q_p L_p$ expresa la dependencia entre las matrices de la segunda forma fundamental y la aplicación de Weingarten. Por ejemplo, si la base de T_pS es ortonormal, entonces $M_p = -L_p$. Y hemos visto aún más: si la base cumple el teorema espectral las dos matrices son *diagonales y opuestas.*

Las ecuaciones de Weingarten dependen por supuesto de la parametrización utilizada pero tienen la ventaja de ser fácilmente calculables a partir de dicha parametrización. Sugerimos al lector que las compruebe en todos los ejemplos habituales vistos en las lecciones anteriores: el cilindro, el paraboloide hiperbólico, el helicoide y las superficies de revolución.

Una vez obtenidas las ecuaciones de Weingarten, podemos utilizarlas para calcular todas las curvaturas.

(10.2) Expresión en coordenadas locales de las curvaturas. (1) Sea φ una parametrización de nuestra superficie S. Usando las ecuaciones de Weingarten que acabamos de obtener, se deducen las siguientes fórmulas con los coeficientes de las dos formas fundamentales (5.2, p. 57, y 7.8, p. 93):

(i) $K = \det(d_pN) = ad - bc = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}\,,$

(ii) $H = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(d_pN) = -\frac{1}{2}(a + d) = \dfrac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}\,.$

Destaquemos la circunstancia sobre la que insistimos siempre: todos estos coeficientes con los que operamos dependen de φ, pero el resultado final son las curvaturas K y L, que no dependen.

(2) Las fórmulas anteriores muestran además que K y H son funciones *diferenciables en* S. Se sigue que las curvaturas principales $k, l = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ son funciones *continuas,* y son diferenciables en el subconjunto abierto de S definido por la desigualdad $H^2 \neq K$, esto es, son *diferenciables fuera del conjunto de los puntos umbílicos.*

En particular, el conjunto de los puntos elípticos ($K > 0$) es abierto en S, y también lo es el de los puntos hiperbólicos ($K < 0$). Los puntos planares ($K = H = 0$) forman un conjunto cerrado, así como los umbílicos ($H^2 = K$). ∎

El lector puede aplicar las fórmulas anteriores para confirmar los resultados de los ejemplos 9.4, p. 117.

En ocasiones es interesante utilizar parametrizaciones locales cuyas curvas coordenadas sean líneas de curvatura, que en particular son coordenadas *ortogonales.* Más adelante veremos cómo se pueden obtener. En la siguiente proposición encontramos una sencilla caracterización cuando la parametrización no cubre puntos umbílicos.

Proposición 10.3. *Sea $\varphi : U \to W \subset S$ una parametrización de un abierto W que no contiene puntos umbílicos. Entonces las líneas coordenadas son líneas de curvatura si y sólo si $F = f = 0$ en todo punto de W.*

Demostración. Como en W no hay puntos umbílicos, la aplicación de Weingarten tiene en todo punto de W dos autovalores distintos, y por tanto direcciones principales ortogonales. Por otra parte, la condición $F = 0$ equivale a que los vectores φ_u y φ_v sean ortogonales. En consecuencia, basta probar el resultado con la hipótesis inicial de que $F = 0$, que hacemos a partir de aquí.

Ahora bien, las líneas coordenadas de φ son líneas de curvatura si y sólo si en todo punto φ_u y φ_v definen direcciones principales, es decir, son autovectores de la aplicación de Weingarten. Esto equivale a que sea diagonal la matriz L de esa aplicación respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi$. Pero L viene dada por las ecuaciones de Weingarten, de las que nos interesan las siguientes

$$L = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} b = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = -\frac{fE}{EG}, \\ c = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = -\frac{fG}{EG} \end{cases}$$

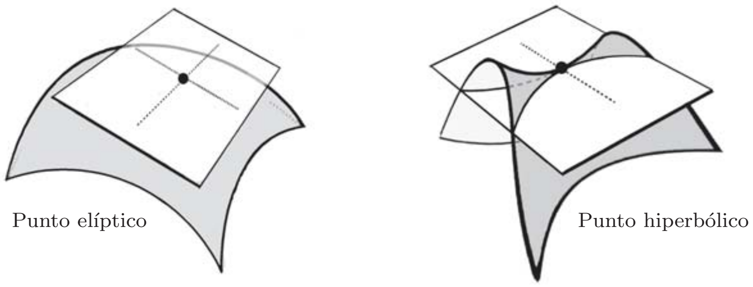
(habida cuenta que $F = 0$). Así que L es diagonal si y sólo $fE = fG = 0$, si y sólo si $f = 0$, pues $EG > 0$. ∎

La siguiente proposición pone de manifiesto cómo el signo de la curvatura de Gauss nos permite obtener información sobre la posición relativa de la superficie y su plano tangente en un punto. Si la curvatura de Gauss en un punto es positiva, entonces todas las curvaturas normales tienen el mismo signo, lo que geométricamente se traduce en que todas las secciones normales en ese punto se curvan hacia el mismo lado del plano tangente. Si, por el contrario, la curvatura de Gauss es negativa entonces hay curvaturas normales de signos opuestos, lo que se traduce en la existencia de secciones normales que se curvan hacia lados opuestos del plano tangente.

Proposición 10.4. *Sea p un punto de nuestra superficie orientada S.*

(1) *Si p es elíptico, entonces tiene un entorno en S cuyos puntos están todos del mismo lado del plano tangente T_pS. Además, p es el único punto de contacto entre el plano tangente y la superficie en ese entorno.*

(2) *Si p es hiperbólico, entonces en todo entorno de p existen puntos de uno y de otro lado del plano tangente T_pS.*



Demostración. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un entorno W de p en S, compatible con la orientación; por simplificar supondremos que $\varphi(0,0) = p$. Vamos a estudiar la distancia *con signo* al plano afín tangente $p + T_pS$ de los puntos de W. Esa distancia viene dada por la función altura

$$h : U \to W \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto (\varphi(u,v) - p)N(p).$$

(4.2, p. 45). La función h es diferenciable, se anula en $(0,0)$ y derivando se ve inmediatamente que $h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$. El enunciado se puede reformular diciendo:

(1) Si p es elíptico, h tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo.

(2) Si p es hiperbólico, h cambia de signo en todo entorno del origen.

De esta manera formulado, se trata de un problema de extremos de una función diferenciable en U. Vamos a explicar cómo lo resuelve el Análisis.

La función h se puede desarrollar, en un entorno del origen, en la forma:

$$\begin{aligned} h(u,v) &= h(0,0) + h_u(0,0)u + h_v(0,0)v \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big(h_{uu}(0,0)u^2 + 2h_{uv}(0,0)uv + h_{vv}(0,0)v^2\big) + \text{resto integral} \\ &= \tfrac{1}{2}\big(h_{uu}(0,0)u^2 + 2h_{uv}(0,0)uv + h_{vv}(0,0)v^2\big) + \text{resto integral}, \end{aligned}$$

pues $h(0,0) = h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$. Además, por 7.8, p. 94,

$$\begin{cases} h_{uu}(0,0) = \langle \varphi_{uu}(0,0), N(p)\rangle = e_p, \\ h_{uv}(0,0) = \langle \varphi_{uv}(0,0), N(p)\rangle = f_p, \\ h_{vv}(0,0) = \langle \varphi_{vv}(0,0), N(p)\rangle = g_p, \end{cases}$$

con lo que

$$h(u,v) = \tfrac{1}{2}(e_p u^2 + 2f_p uv + g_p v^2) + \text{resto integral}.$$

La forma cuadrática entre paréntesis es la *hessiana* de h en el origen, y el número $e_p g_p - f_p^2$ es su *discriminante*. Es un resultado de Análisis Matemático que:

(1') Si $e_p g_p - f_p^2 > 0$, entonces h tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo. (El origen es extremo local estricto.)

(2') Si $e_p g_p - f_p^2 < 0$, entonces h cambia de signo en todo entorno del origen. (El origen no es extremo local.)

Dicho lo anterior, recordamos la fórmula 10.2(i), p. 132:

$$K(p) = \frac{e_p g_p - f_p^2}{E_p G_p - F_p^2},$$

y como $E_p G_p - F_p^2 > 0$, el punto p es:

(1") Elíptico ($K > 0$) si y sólo si $e_p g_p - f_p^2 > 0$.

(2") Hiperbólico ($K < 0$) si y sólo si $e_p g_p - f_p^2 < 0$.

En conclusión, de (1') y (1") resulta (1), y de (2') y (2") resulta (2). Hemos terminado. ∎

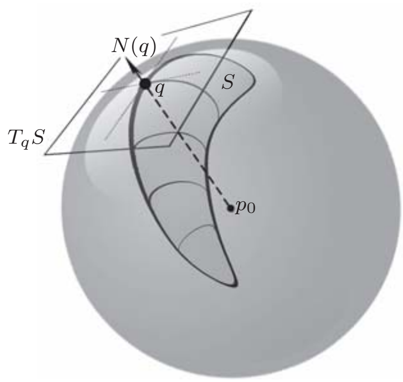
Después de describir la forma de una superficie en un punto elíptico y en un punto hiperbólico, hay que analizar cuándo una superficie tiene, si es que los tiene, puntos de esos tipos. Vemos a continuación una condición global topológica que garantiza la existencia de puntos elípticos.

Proposición 10.5. *Toda superficie orientada compacta tiene algún punto con curvatura de Gauss positiva.*

Demostración. Supongamos que S es una superficie orientada compacta, con aplicación de Gauss N. Para demostrar la proposición elegimos un punto cualquiera $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y consideramos la función diferenciable

$$h : S \to \mathbb{R} : p \mapsto \|p - p_0\|^2 \qquad \text{(4.2, p. 46).}$$

Como S es compacta, esta función h alcanza un máximo absoluto en un punto $q \in S$ que será consecuentemente un punto crítico de h. Por tanto, para todo $\omega \in T_qS$:



$$0 = d_qh(\omega) = 2(q - p_0)\omega.$$

Esto significa que el vector $q - p_0$ es ortogonal a T_qS, es decir, $q - p_0 = \lambda N(q)$ para cierto $\lambda \neq 0$. Vamos a demostrar que q es un punto elíptico, es decir, que todas las curvaturas normales en q son no nulas del mismo signo (en este caso será el opuesto al de la constante λ). Sea ahora ω un vector tangente unitario en T_qS, y calculemos la curvatura normal $\mathbf{II}_q(\omega)$. Según vimos en la demostración del teorema de Meusnier (8.2, p. 100), se toma cualquier curva α de la superficie parametrizada por el arco, que pase por q, digamos $\alpha(t_0) = q$, con $\alpha'(t_0) = \omega$, y es

$$\mathbf{II}_q(\omega) = \langle N(q), \alpha''(t_0)\rangle.$$

Ahora bien, en nuestra situación, la función $h \circ \alpha$ tiene un máximo en $t = t_0$, luego $(h \circ \alpha)''(t_0) \leq 0$. Derivando:

$$0 \geq (h \circ \alpha)''(t_0) = 2\|\alpha'(t_0)\|^2 + 2(\alpha(t_0) - p_0)\alpha''(t_0),$$

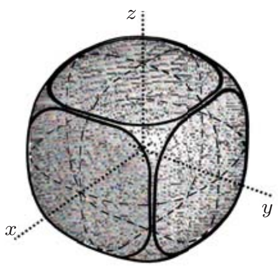
y puesto que α está parametrizada por el arco y $\alpha(t_0) - p_0 = q - p_0 = \lambda N(q)$ concluimos que

$$0 \geq 2 + 2\lambda N(q)\alpha''(t_0) = 2 + 2\lambda\mathbf{II}_q(\omega).$$

Para esto es necesario que $\lambda\mathbf{II}_p(\omega) < 0$, luego la curvatura normal $\mathbf{II}_q(\omega)$ no se anula, y su signo es siempre opuesto al de λ. Hemos terminado. ∎

Así pues, una superficie (orientada) compacta tiene siempre puntos elípticos, y puede que no tenga de otro tipo: la esfera unidad ($K \equiv 1$) es el ejemplo más sencillo de ello. También hay superficies compactas que tienen puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos: el toro (9.4(6), p. 119). Naturalmente, si una superficie compacta conexa tiene puntos hiperbólicos, como los tiene seguro elípticos y la curvatura de Gauss es continua, también tiene puntos parabólicos. Si la superficie no es compacta, puede que tenga solamente puntos parabólicos (clindro circular, 9.4(3), p. 118) o solamente puntos hiperbólicos (el paraboloide hiperbólico y el helicoide, 9.4(4) y (5), p. 118). Para completar la casuística veamos dos ejemplos más.

Ejemplos 10.6. (1) Una superficie compacta con puntos parabólicos y sin puntos hiperbólicos. Consideremos la superficie de nivel $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, que se parece mucho a la esfera unidad (y de hecho es difeomorfa a ella). Una aplicación de Gauss se obtiene del gradiente de la ecuación:



$$N(x,y,z) = \frac{(x^3, y^3, z^3)}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}.$$

Como aplicación definida en $\mathbb{R}^3$ esta aplicación tiene la siguiente matriz jacobiana en $p = (x,y,z)$:

$$\frac{1}{(x^6+y^6+z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6+z^6) & -3x^3y^5 & -3x^3z^5 \\ -3x^5y^3 & 3y^2(x^6+z^6) & -3y^3z^5 \\ -3x^5z^3 & -3y^5z^3 & 3z^2(x^6+y^6) \end{pmatrix}.$$

Así, la aplicación de Weingarten es la restricción a T_pS de la aplicación lineal definida por la matriz jacobiana anterior. Para calcular una matriz de esa restricción, elegimos en T_pS la base formada por los vectores $\omega = (-z^3, 0, x^3), \omega' = (0, -z^3, y^3)$ (a partir de este momento $z \neq 0$). Operando con cuidado se deduce que la matriz de la aplicación de Weingarten con respecto a esa base es

$$L_p = \frac{1}{(x^6+y^6+z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6+z^6) + 3x^6z^2 & -3x^3y^5 + 3x^3y^3z^2 \\ -3x^5y^3 + 3x^3y^3z^2 & 3y^2(x^6+z^6) + 3y^6z^2 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante

$$K = \frac{9x^2y^2z^2\big(x^{10} + y^{10} + z^{10} + x^6(y^4+z^4) + y^6(x^4+z^4) + z^6(x^4+y^4)\big)}{(x^6+y^6+z^6)^3}.$$

Como en S se cumple $y^4+z^4=1-x^4$, $x^4+z^4=1-y^4$, $x^4+y^4=1-z^4$, la expresión anterior se simplifica hasta quedar

$$K = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2} \geq 0.$$

Esta fórmula vale para $S \setminus \{z=0\}$, que es un subconjunto denso de K, luego por continuidad vale en toda la superficie.

Así resulta que esta superficie no tiene puntos hiperbólicos. Pero si parabólicos: forman los tres *falsos meridianos* (pues no es una superficie de revolución)

$$S \cap \{x=0\}, \quad S \cap \{y=0\}, \quad S \cap \{z=0\}.$$

(2) Una superficie no compacta con puntos parabólicos y puntos hiperbólicos. Se trata del falso paraboloide hiperbólico S de ecuación $z = -x^4 + y^4$. Con esta imitación se procede como con el paraboloide hiperbólico auténtico (9.4(4), p. 118), y se obtiene la curvatura de Gauss siguiente:

$$K = \frac{-144x^2y^2}{(16x^6+16y^6+1)^2} \leq 0.$$

Vemos que todos los puntos de S son hiperbólicos, excepto las dos curvas planas $S \cap \{x=0\}$ y $S \cap \{y=0\}$, cuyos puntos son puntos parabólicos de S. ▮

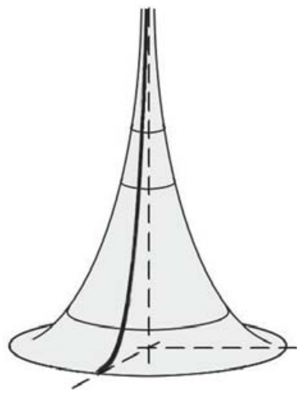
Terminamos la lección con un ejemplo singular de gran importancia teórica.

(10.7) La pseudoesfera. Existe una superficie no compacta con curvatura constante -1 (luego todos los puntos son hiperbólicos): la *pseudoesfera* (prob. 8, lecc. 3, p. 41). Es la superficie de revolución S que se obtiene a partir de la *tractriz*. Recordemos que una parametrización de esta curva es:

$$u \mapsto (\operatorname{sen} u, \cos u + \log\tan\tfrac{1}{2}u).$$

En lo que sigue tomaremos sólo la parte superior de la tractriz, es decir consideramos la parametrización anterior definida en el intervalo $I = (\frac{1}{2}\pi, \pi)$, con lo que la parametrización es regular. Con la notación habitual para las superficies de revolución, S está parametrizada por

$$\begin{cases} \varphi(u,v)=(\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)), \\ \zeta(u)=\operatorname{sen} u, \quad \xi(u)=\cos u+\log\tan\frac{1}{2}u, \end{cases}$$



y su curvatura de Gauss es (8.10(2), p. 107):

$$K = \frac{\xi'(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} \zeta = \operatorname{sen} u, \ \zeta' = \cos u, \ \zeta'' = -\operatorname{sen} u, \\ \xi' = \frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen} u}, \ \xi'' = \frac{-\cos u(1+\operatorname{sen}^2 u)}{\operatorname{sen}^2 u}, \end{cases}$$

y, sustituyendo en la fórmula de K, obtenemos a la postre que la curvatura K de la pseudoesfera es constante e igual a -1.

Utilizando en lugar de la tractriz la curva

$$u \mapsto \rho(\operatorname{sen} u, \cos u + \log\tan\tfrac{1}{2}u)$$

con $\rho > 0$ se obtiene una superficies de curvatura constante $K = -1/\rho^2 < 0$, que es una *pseudoesfera de curvatura* K. ∎

Problemas

Número 1. Se considera la función $h(u,v) = eu^2+2fuv+gv^2$ para ciertas constantes $e,f,g \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$, y se escribe $eh(u,v) = (eu+fv)^2+(eg-f^2)v^2$. Probar que: (i) si $eg-f^2 > 0$, h no cambia de signo en las proximidades del origen, y (ii) si $eg-f^2 < 0$, h cambia de signo arbitrariamente cerca del origen.

Número 2. ¿Es constante la curvatura media de la pseudoesfera? Calcularla.

Número 3. La aplicación $\varphi : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u,v) = \big(u - \tfrac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \tfrac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2\big),$$

es una parametrización de una parte de la *superficie de Enneper* (ver prob. 6, lecc. 7, p. 96). Hallar las curvaturas principales en los puntos cubiertos por esta parametrización y probar que las curvas coordenadas son líneas de curvatura.

Lección 11

El teorema egregio de Gauss

Esta lección está dedicada a un teorema central de la teoría de superficies, como tantas otras cosas debido a Gauss: su *teorema egregio*. Ese teorema establece que *la curvatura de Gauss de una superficie es una propiedad intrínseca de la misma*. Para entender esta afirmación, aceptemos que la operación intrínseca por excelencia es la medición de longitudes de curvas de la superficie: según una imagen muy usada, unos hipotéticos habitantes de la superficie que no tengan noción del espacio exterior podrían medir esas longitudes. Consecuentemente, calificamos de intrínseco todo aquello que sólo dependa de esas longitudes. Ahora bien, y ya más rigurosamente, el conocimiento de las longitudes de las curvas de la superficie es equivalente al conocimiento de la primera forma fundamental (5.8, p. 62), de manera que *intrínseco será aquello que se pueda calcular en función exclusivamente de la primera forma fundamental*. En estos términos, que la curvatura de Gauss sea intrínseca no se corresponde bien con su definición misma, que involucra la variación de la normal a la superficie en el espacio afín que la contiene; es un resultado, como mínimo, inesperado.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, con aplicación de Gauss N.

(11.1) Triedro de Gauss y símbolos de Christoffel. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un abierto W de S. Es claro que $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, que denominamos *triedro de Gauss*. Es la contrapartida, para superficies, del triedro de Frenet de las curvas alabeadas.

La base $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$ es positiva si y sólo si φ es compatible con la orientación, es decir, si

$$N(p) = \frac{\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}}{\|\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}\|}.$$

En ese caso diremos que el triedro de Gauss es *positivo*. Es una forma de decir que la aplicación de Gauss se obtiene mediante el producto vectorial de φ_u y φ_v.

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir mediante el triedro de Gauss, y hacemos esto en particular con las derivadas segundas de la parametrización:

$$
\text{(Ch)} \begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_{11} N, \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_{12} N, \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_{21} N, \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_{22} N. \end{cases}
$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k se llaman *símbolos de Christoffel*. Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, se tiene que

$$
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \quad L_{12} = L_{21}.
$$

▮

Los términos L_{ij} son fáciles de calcular: multiplicando todas las ecuaciones por N, que es ortogonal a φ_u y φ_v, obtenemos

$$
L_{11} = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = e, \quad L_{12} = L_{21} = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = f, \quad L_{22} = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = g.
$$

(7.8(3), p. 94); en lo sucesivo ya no escribiremos más L_{ij}, sino el valor e, f o g que corresponda. Vemos que los L_{ij} no son más que la segunda forma fundamental, y la definición hacía prever que efectivamente dependieran de ésta. Contrariamente, los símbolos de Christoffel sólo dependen de la primera forma fundamental. Para justificar esta afirmación hacen falta algunos cálculos.

(11.2) Cálculo de los símbolos de Christoffel. Vamos a resolver el sistema (Ch) del párrafo anterior, considerando los símbolos de Christoffel como incógnitas. Para ello se derivan sucesivamente respecto de u y respecto de v los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$
E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,
$$

y se utilizan las ecuaciones (Ch) para hacer aparecer los Γ_{ij}^k. Por ejemplo, derivando respecto de u el coeficiente E resulta:

$$
E_u = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = 2\langle \varphi_u, \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN \rangle = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2.
$$

Al final se obtiene el sistema lineal siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} E_u = 2\langle\varphi_u, \varphi_{uu}\rangle & = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2, & & & & & \\ E_v = 2\langle\varphi_u, \varphi_{uv}\rangle & = & & 2E\Gamma_{12}^1 + 2F\Gamma_{12}^2, & & & \\ F_u = \langle\varphi_{uu}, \varphi_v\rangle + \langle\varphi_u, \varphi_{vu}\rangle & = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 + E\Gamma_{21}^1 + F\Gamma_{21}^2, & & & & & \\ F_v = \langle\varphi_{uv}, \varphi_v\rangle + \langle\varphi_u, \varphi_{vv}\rangle & = & & F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, & & & \\ G_u = 2\langle\varphi_v, \varphi_{vu}\rangle & = & & 2F\Gamma_{21}^1 + 2G\Gamma_{21}^2, & & & \\ G_v = 2\langle\varphi_v, \varphi_{vv}\rangle & = & & & & 2F\Gamma_{22}^1 + 2G\Gamma_{22}^2. & \end{array}\right.$$

Las *incógnitas* Γ_{ij}^k están ordenadas teniendo en cuenta las simetrías $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, de modo que en realidad hay seis incógnitas en las seis ecuaciones. La solución es única, y se obtiene operando así:

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{1}{2}E_u = & E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \\ F_u - \frac{1}{2}E_v = & F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{1}{2}E_v = & E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \\ \frac{1}{2}G_u = & F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} F_v - \frac{1}{2}G_u = & E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ \frac{1}{2}G_v = & F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2. \end{array}\right.$$

Observamos que cada uno de estos tres sistemas lineales tiene por matriz la matriz de la primera forma fundamental, que tiene determinante $EG - F^2 > 0$. En consecuencia, los tres sistemas tienen solución única, como anunciamos. Esas soluciones expresan los símbolos de Christoffel en función de los coeficientes E, F, G, y de sus derivadas, como habíamos anunciado. ▮

El hecho que acabamos de poner de manifiesto es clave, pues significa que los símbolos de Christoffel son de naturaleza intrínseca. Pero conviene remarcar que por aparecer derivadas, esa naturaleza intrínseca no depende de conocer la primera forma fundamental en el punto, sino *en todo un entorno suyo*. Este matiz es muy importante: se depende de la primera forma fundamental *localmente, no puntualmente*.

Antes de revelar el papel que los símbolos de Christoffel juegan en el cálculo de la curvatura de Gauss, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 11.3. (1) En un plano afín, $E, G \equiv 1$ y $F \equiv 0$ (con la identidad por parametrización). Por tanto los tres sistemas de 11.2, p. 147, se reducen a

$$0 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2, \quad 0 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2, \quad 0 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2,$$

es decir, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos.

(2) Para la parametrización del cilindro considerada en 5.4, p. 60, tenemos $E, G \equiv 1$, $F \equiv 0$, como para el plano. Así que los símbolos de Christoffel son también nulos.

(3) Consideramos la parametrización de la esfera por la latitud y la longitud:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u.$$

Según 5.5, p. 60, $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G \equiv \cos^2 u$. Los sistemas para los símbolos de Christtofel son en consecuencia:

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_{11}^1, & 0 = \cos^2 u\, \Gamma_{11}^2, \\ 0 = \Gamma_{12}^1, & -\operatorname{sen} u \cos u = \cos^2 u\, \Gamma_{12}^2, \\ \operatorname{sen} u \cos u = \Gamma_{22}^1, & 0 = \cos^2 u\, \Gamma_{22}^2, \end{cases}$$

de modo que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = -\tan u, \quad \Gamma_{22}^1 = \operatorname{sen} u \cos u.$$

(4) El helicoide $x = v \cos u, y = v \operatorname{sen} u, z = bu$. Según 5.7, p. 62, $E = v^2 + b^2$, $F \equiv 0$ y $G \equiv 1$. Resulta que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{11}^2 = -v, \quad \Gamma_{12}^1 = \tfrac{v}{v^2+b^2}.$$

(5) Para una superficie de revolución parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \operatorname{sen} v, \xi(u)),$$

con $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$, tenemos $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G = \zeta^2$ (5.6, p. 61), y se deduce fácilmente que los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'.$$ ▮

Abordemos ya el hecho de que la curvatura de Gauss es un concepto de naturaleza intrínseca, en el sentido que hemos ido estableciendo previamente. Se trata de demostrar el teorema egregio de Gauss:

Teorema 11.4. *La curvatura de Gauss se expresa mediante la fórmula*

$$K = \frac{1}{E}\big(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u\big).$$

En particular, K sólo depende de la primera forma fundamental.

Demostración. Vamos a usar la identidad $\varphi_{uuv} = \varphi_{uvu}$, previo el cálculo de cada uno de sus miembros. Utilizaremos las igualdades de (Ch) y las ecuaciones de Weingarten (10.1, p. 132), que recordamos aquí para facilitar la lectura:

$$\begin{cases} N_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \quad N_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \\ a = \frac{fF-eG}{EG-F^2}, \quad b = \frac{eF-fE}{EG-F^2}, \quad c = \frac{gF-fG}{EG-F^2}, \quad d = \frac{fF-gE}{EG-F^2}. \end{cases}$$

Empezamos por φ_{uuv}. Teniendo en cuenta el valor de φ_{uu} en (Ch) queda:

$$\begin{aligned} \varphi_{uuv} &= (\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN)_v \\ &= \Gamma_{11}^1\varphi_{uv} + \Gamma_{11}^2\varphi_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + e_vN. \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta expresión las igualdades adecuadas de (Ch) y el valor de N_v, resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{uuv} &= \Gamma_{11}^1(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN) + \Gamma_{11}^2(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN) + e(c\varphi_u + d\varphi_v) \\ &\qquad + (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + e_vN \\ &= \big(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v\big)\varphi_u + \big(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v\big)\varphi_v \\ &\qquad + \big(\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v\big)N. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \varphi_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN)_u = \cdots \\ &= \big(\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u\big)\varphi_u + \big(\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u\big)\varphi_v \\ &\qquad + \big(\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u\big)N. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas estas expresiones mediante el triedro de Gauss $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$, como el triedro es una base, la igualdad $\varphi_{uuv} = \varphi_{uvu}$ de las derivadas cruzadas implica que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u, \\ \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u, \\ \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u. \end{cases}$$

Recíprocamente, estas igualdades implican, *sin apelar a que el triedro de Gauss sea una base,* que $\varphi_{uuv} = \varphi_{uvu}$. Dicho esto, de la segunda igualdad deducimos

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u = fb - ed.$$

Casi mágicamente, el primer miembro de esta igualdad es el largo numerador del enunciado del teorema egregio, así que bastará ver que el segundo miembro es EK (recuérdese que $E > 0$). Pero por las ecuaciones de Weingarten:

$$fb - ed = f\frac{eF - fE}{EG - F^2} - e\frac{fF - gE}{EG - F^2} = E\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK$$

(la última igualdad por la expresión local de la fórmula de Gauss, 10.2(i), p. 132). Hemos terminado. ∎

El teorema egregio tiene implicaciones profundas, de la que tal vez la más popular es el hecho de que no pueden trazarse mapas fiables de la tierra, es decir, mapas que permitan medir exactamente las distancias. Esta afirmación vale para mapas de cualquier porción de la Tierra, y no sólo para mapamundis. El hecho lo descubrió Gauss, como consecuencia de su teorema egregio, y lo formalizamos a continuación antes de entrar en la exploración más sistemática de su significado.

(11.5) Mapas de la Tierra. Consideramos que la Tierra es una esfera S de cierto radio r, y entendemos por *mapa* cualquier parametrización $\varphi : U \to W$ de un abierto W de S. Decir que en el mapa se puedan medir distancias con exactitud es decir que la longitud de una curva $\alpha : I \to S$ es proporcional a la de su correspondiente curva plana del mapa, $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$, con una escala de proporcionalidad $\rho > 0$ fija.

Supongamos por reducción al absurdo que existe tal φ. Fijamos un punto cualquiera $p = \varphi(q) \in W$, $q \in U$. Para $w \in \mathbb{R}^2$ dado, consideramos las curvas $\beta(s) = q + sw$ y $\alpha(s) = \varphi(q + sw)$, ambas definidas para $|s|$ suficientemente pequeño. Por la hipótesis sobre las distancias resulta

$$L_0^t(\alpha) = \rho L_0^t(\beta) = \rho \int_0^t \|\beta'(s)\| ds = \rho\|w\|t,$$

y por 5.8(3), p. 63,

$$\mathbf{I}_p(\alpha'(0)) = \Big(\tfrac{d}{dt} L_0^t(\alpha)\big|_{t=0}\Big)^2 = \rho^2\|w\|^2.$$

Ahora bien, $\alpha'(0) = d_p\varphi(w)$, luego para $w = (1,0), (0,1)$ y $(1,1)$ obtenemos $\alpha'(0) = \varphi_u, \varphi_v$ y $\varphi_u + \varphi_v$, con lo que

$$\begin{cases} E_p = \mathbf{I}_p(\varphi_u) = \rho^2\|(1,0)\|^2 = \rho^2, \quad G_p = \mathbf{I}_p(\varphi_v) = \rho^2\|(0,1)\|^2 = \rho^2, \\ F_p = \frac{1}{2}\big(\mathbf{I}_p(\varphi_u + \varphi_v) - \mathbf{I}_p(\varphi_u) - \mathbf{I}_p(\varphi_v)\big) = \frac{1}{2}\rho^2\big(\|(1,1)\|^2 - \|(1,0)\|^2 - \|(0,1)\|^2\big) = 0. \end{cases}$$

Como esto vale para cualquier $p \in W$, concluimos que $E, G \equiv \rho^2$ y $F \equiv 0$, de donde, por las fórmulas 11.2, p. 146, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos en W, y por tanto $K \equiv 0$ en W por el teorema egregio. Pero la curvatura de una esfera no es nunca nula, pues $K \equiv 1/r^2$ (9.4(2), p. 117), así que hemos llegado a una contradicción.

Concluimos que ciertamente no puede existir ningún mapa de la Tierra que conserve las distancias. O, en la práctica, que al medir distancias sobre un plano siempre hay un margen de error. ▮

Para explorar las ideas que el ejemplo precedente pone en juego, y, en general, para tratar de manera organizada las cuestiones intrínsecas, se introduce el concepto de *isometría de superficies*. El epíteto isometría significa literalmente que se conservan las longitudes de curvas, pero la definición se hace en términos del producto escalar:

Definición 11.6. Un difeomorfismo $h : S \to S'$ entre dos superficies se llama *isometría* si para todo $p \in S$ y para todo par de vectores $\omega, \omega' \in T_pS$ se tiene $\langle d_ph(\omega), d_ph(\omega')\rangle = \langle \omega, \omega'\rangle$.

Si existe tal h, las superficies se denominan *isométricas*.

Recordemos ahora que el producto escalar determina y es determinado por la primera forma fundamental (p. 57), y que el conocimiento de ésta última equivale al de las longitudes de las curvas de la superficie (lo acabamos de utilizar). Por tanto las dos condiciones siguientes son equivalentes a que $h : S \to S'$ sea una isometría:

(1) $\mathbf{I}_{h(p)}(d_ph(\omega)) = \mathbf{I}_p(\omega)$ para cualesquiera $\omega \in T_pS$ y $p \in S$.

(2) $L_{t_0}^t(\alpha) = L_{t_0}^t(h \circ \alpha)$ para toda curva α de S.

En especial destacamos que, según los comentarios iniciales, *las propiedades intrínsecas de las superficies se conservan por isometrías*. Analicemos esto explícitamente.

(11.7) Conservación de la primera forma fundamental. Sean S y S' dos superficies orientadas de $\mathbb{R}^3$, y consideremos dos puntos $p \in S$, $p' \in S'$.

(1) Supongamos que los dos puntos tienen entornos isométricos, es decir, tienen dos entornos $W \subset S$ y $W' \subset S'$, entre los que existe una isometría $h : W \to W'$. Podemos suponer dada una parametrización $\varphi : U \to W$ del entorno

W de p, y entonces $\psi = h \circ \varphi : U \to W'$ es una parametrización de W'. De esta manera las coordenadas (u, v) de un punto de $(x, y, z) \in W$ son las mismas que tiene su imagen $h(x, y, z) \in W'$, y se cumple

$$d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) = \psi_u, \quad d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) = \psi_v.$$

Calculemos los coeficientes E, F, G y E', F', G' de las primeras formas fundamentales de S y de S' en las coordenadas (u, v), teniendo en cuenta que h es isometría:

$$\begin{cases} E' = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E, \\ F' = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = F, \\ G' = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_v), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = G. \end{cases}$$

Esta es la forma explícita en que se presenta la conservación de la primera forma fundamental: para un punto de W y su imagen en W' coinciden todos cálculos que involucren los coeficientes de la primera forma fundamental en entorno de los puntos.

Es esencial que se tenga coincidencia en entornos y no sólo en los puntos. Ciertamente, en los cálculos importantes (símbolos de Christoffel, curvatura de Gauss) intervienen no sólo los coeficientes de la primera forma fundamental, sino también sus derivadas sucesivas: éstas coincidirán *en un punto* si los coeficientes coinciden *en un entorno*.

(2) El argumento anterior es en realidad una equivalencia. Supongamos dadas dos parametrizaciones $\varphi : U \to W$, $\psi : U \to W'$ de entornos W de p en S y W' de p' en S', definidas en un mismo abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Si los coeficientes de las primera formas fundamentales de las dos variedades coinciden en U, entonces $h = \psi \circ \varphi^{-1} : W \to W'$ es una isometría.

En efecto, por hipótesis, en esas coordenadas las matrices Q y Q' de las primeras formas fundamentales $\mathbf{I}$ y $\mathbf{I}'$ coinciden (calculadas en (x, y, z) y $h(x, y, z)$ respectivamente). Ahora, para $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \in T_{(x,y,z)}S$, tenemos

$$d_{(x,y,z)}h(\omega) = \lambda\psi_u + \mu\psi_v,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{I}(\omega) = (\lambda, \mu) Q \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(d_{(x,y,z)}h(\omega)) = (\lambda, \mu) Q' \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como $Q = Q'$, concluimos que h es una isometría.

(3) En particular, una parametrización $\varphi : U \to W$ es una isometría entre el abierto U del plano y el abierto W de S si y sólo si los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de φ son $E, G \equiv 1$, $F \equiv 0$. ▮

El problema global de si dos superficies S y S' son isométricas es un asunto muy delicado. Por supuesto, si no son homeomorfas ni difeomorfas, no pueden ser isométricas. Es el caso de una esfera y el plano, o de una esfera y un cilindro, o de un cilindro circular y el plano: la compacidad distingue la esfera, la contractibilidad distingue al cilindro circular del plano (véase también el prob. 8 de esta lección). Pero por otra parte tenemos las consideraciones anteriores, que en realidad discuten si S y S' son *localmente isométricas*. Obsérvese que dos superficies cualesquiera son siempre localmente difeomorfas, luego estamos utilizando un criterio más riguroso para distinguirlas. Por ejemplo, el hecho de que no haya mapas fiables se traduce en que una esfera y el plano no son localmente isométricos en ningún punto. En cambio, el cilindro circular y el plano lo son en todos sus puntos (por 5.4, p. 60).

Para terminar la lección, vamos a presentar la variante de la noción de isometría que está detrás del concepto de mapa fiable como hemos explicado en 11.5, p. 150. Desde aquel punto de vista, las isometrías son demasiado exigentes, y se introduce la siguiente:

Definición 11.8. Sea $\rho > 0$ un número real positivo. Un difeomorfismo $h : S \to S'$ entre dos superficies se llama *semejanza de escala* ρ si para todo $p \in S$ y para todo par de vectores $\omega, \omega' \in T_pS$ se tiene $\langle d_ph(\omega), d_ph(\omega')\rangle = \rho^2\langle \omega, \omega'\rangle$.

Si existe tal h, las superficies se denominan *semejantes*.

No entraremos en detalles, pero es fácil ver que esto equivale a que h multiplica las longitudes de las curvas por la escala ρ, como queríamos para los mapas. También tenemos la correspondiente noción de semejanza local, que no formalizamos. Ahora es claro que la imposibilidad de mapas fiables significa que en ningún punto es una esfera localmente semejante al plano.

Ilustramos las propiedades de las semejanzas con un resultado sencillo (del que ya hemos visto un ejemplo en 10.7, p. 139):

Proposición 11.9. *Sea $h : S \to S'$ una semejanza de escala ρ. Entonces las curvaturas de Gauss K y K' de las superficies cumplen*

$$K'(h(p)) = K(p)/\rho^2 \qquad \textit{para todo } p \in S.$$

Demostración. Que h sea una semejanza de escala ρ implica que

$$\mathbf{I}_{h(p)}(d_p h(\omega)) = \rho^2 \mathbf{I}_p(\omega)$$

para $\omega \in T_pS$ y $p \in S$. Localizando h como en 11.7(1), p. 151, el resultado ahora es que los coeficientes de la primera forma fundamental de S' se obtienen multiplicando por ρ^2 los de S. Esto no afecta a los sistemas 11.2, p. 147, que proporcionan los símbolos de Christoffel, que en consecuencia son exactamente iguales para las dos superficies. Así que al aplicar la fórmula del teorema egregio para calcular K y K', tenemos el mismo numerador y denominadores E y $E' = \rho^2 E$ respectivamente. Concluimos que $K' = K/\rho^2$. ∎

Digamos para terminar que en realidad las semejanzas no son muy diferentes de las isometrías, y su estudio se puede referir al de éstas (prob. 10 de esta lección).

Problemas

Número 1. Comprobar que los símbolos de Christoffel de una superficie topográfica $z = f(x,y)$ para su parametrización de Monge son

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xx}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xx}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xy}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{yy}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xy}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{yy}. \end{cases}$$

donde $\delta = 1 + \|\nabla f\|^2$.

Número 2. Sean S_1 y S_2 superficies y $h : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable. Se dice que h es una *isometría local* si para todo punto $p \in S_1$ existen un entorno abierto U de p en S_1 y un entorno abierto V de $h(p)$ en S_2 tales que $h|U : U \to V$ es una isometría. Probar que h es una isometría local si y sólo si conserva la longitud de los vectores tangentes de las curvas $\alpha : I \to S_1$ o, equivalentemente, si y sólo si conserva las longitudes de tales curvas.

Número 3. La noción anterior puede ser generalizada del siguiente modo: se dice que S_1 es *localmente isométrica* a S_2 si todo punto $p \in S_1$ tiene un entorno abierto U en S_1 isométrico a un abierto de S_2. Encontrar dos superficies S_1 y S_2 tales que S_1 sea localmente isométrica a S_2 pero S_2 no sea localmente isométrica a S_1.

Número 4. Mostrar que la parametrización $\varphi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$ del cilindro $S : x^2 + y^2 = 1$ es una isometría local cuyo efecto es envolver el plano alrededor del cilindro de modo que las líneas horizontales van a las secciones circulares del cilindro y las verticales se transforman en las generatrices del mismo.

Número 5. Sean p y q dos puntos de una superficie conexa S y consideremos la colección de todas las curvas $\alpha : [0,1] \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Se llama *distancia intrínseca* de p a

Lección 15

Geodésicas (I)

Esta es una lección sobre ciertas curvas de las superficies, las *geodésicas,* que juegan un papel análogo al de las rectas en el plano. La analogía se refiere a diversos aspectos, unos de naturaleza cinemática, otros más geométricos.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable.

Desde un punto de vista cinemático, una recta del plano, recorrida con velocidad constante, puede ser vista como una curva plana regular $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con aceleración β'' identicamente nula. Podríamos sentirnos tentados de extender esta definición, sin cambios, a las superficies y adoptarla como definición de geodésica. Ahora bien, una curva regular $\beta : \mathbb{R} \to S$ en una superficie cualquiera S tal que $\beta'' \equiv 0$ es también una recta (de $\mathbb{R}^3$), por lo que, si adoptásemos esta definición, las geodésicas serían simplemente las rectas contenidas en la superficie. Sin embargo, para un hipotético ser bidimensional que habitase en la superficie, una trayectoria α descrita por un punto material sería percibida como una recta si cumpliese la condición más débil de ser idénticamente nula la componente de α'' que ese ser puede percibir, que es la tangencial. Esta condición equivale a que α'' sea ortogonal al plano tangente, esto es, coincida con su componente normal, que es la responsable de mantener el punto en la superficie. Esta es una motivación para la definición habitual de geodésica, que damos a continuación.

Definición 15.1. Una *geodésica* de la superficie S es una curva regular $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha''(t)$ es perpendicular a T_pS para todo $p = \alpha(t)$.

La primera proposición nos dice que si una curva es geodésica entonces el módulo de su velocidad es constante.

Proposición 15.2. *Si α es una geodésica de S entonces $\|\alpha'(t)\| \equiv c$ para cierta constante $c > 0$.*

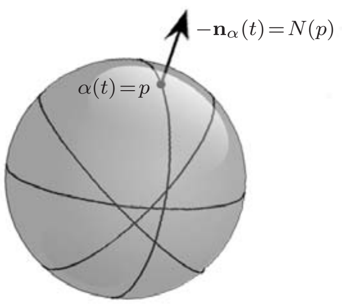
Demostración. La derivada de $\|\alpha'(t)\|^2$ es $2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0$, ya que $\alpha''(t)$ es perpendicular a $T_{\alpha(t)}S$. En consecuencia la función $\|\alpha'(t)\|^2$ es constante, y por tanto también lo es $\|\alpha'(t)\|$. ∎

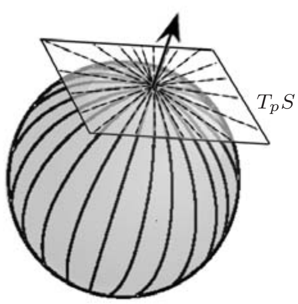
A la vista de este resultado, haciendo el cambio de parámetro $s = ct$ se consigue que α esté parametrizada por la longitud del arco. Nótese que las geodésicas tienen su vector normal proporcional al de la superficie, propiedad que es característica para las curvas parametrizadas por la longitud del arco. Teniendo todo esto en cuenta, *una curva no parametrizada por el arco se considera geodésica si reparametrizada por el arco lo es.*

Ejemplos 15.3. (1) Si $\alpha : I \to S$ tiene una ecuación $\alpha(t) = c + at$, es decir, si es una recta en la superficie, entonces su segunda derivada es idénticamente nula y la curva es una geodésica. Si S es un plano afín, entonces no hay más geodésicas que las rectas.

En efecto, un plano afín tendrá una ecuación $ax+by+cz = d$, y (a, b, c) es un vector ortogonal a S en todos sus puntos. Si $\alpha(t)=(x(t), y(t), z(t))$ es una curva del plano, se cumple $ax(t)+by(t)+cz(t)=d$, y derivando $ax''(t)+by''(t)+cz''(t)=0$. Pero si la curva es una geodésica, el vector $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ debe ser ortogonal al plano, luego proporcional a (a, b, c), digamos $\alpha''(t) = \rho(t)(a, b, c)$. Sustituyendo en la igualdad anterior deducimos que $\rho(t)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$, luego $\rho \equiv 0$ y $\alpha'' \equiv 0$. En consecuencia, $\alpha' \equiv \omega$ para cierto vector $\omega \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha(t) = p+\omega t$ para un punto $p \in \mathbb{R}^3$. Es decir, α es una recta.

(2) Cualquier círculo máximo $\alpha : I \to S$ de una esfera S es una geodésica, pues su vector normal $\mathbf{n}_\alpha(t)$ en $p = \alpha(t)$ es igual u opuesto al normal $N(p)$ de la esfera en ese punto. En particular vemos que por todos los puntos de la esfera pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.





Veamos que no hay otras geodésicas. Denotamos q el centro de S y r su radio. Sea $\alpha(s)$ una geodésica parametrizada por el arco. Por ser α geodésica, α'' es ortogonal a la esfera, es decir, proporcional a $\alpha - q$, digamos $\alpha'' = \rho(\alpha - q)$. Por tanto el vector normal de la curva es

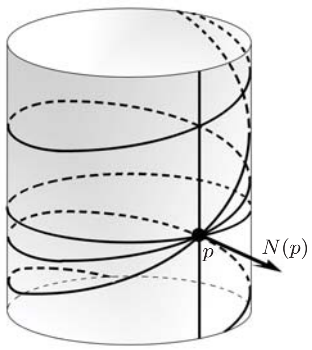
$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\rho(\alpha - q)}{\|\rho(\alpha - q)\|} = \pm\tfrac{1}{r}(\alpha - q),$$

y su derivada

$$\mathbf{n}'_\alpha = \pm\tfrac{1}{r}\alpha' = \pm\tfrac{1}{r}\mathbf{t}_\alpha.$$

De la tercera fórmula de Frenet se sigue que α tiene torsión nula, luego es plana, y su curvatura es constante $1/r$. Concluimos que es una circunferencia de radio r, y como está contenida en S, tiene que ser uno de sus círculos máximos.

(3) Consideremos el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. Recordemos que en un punto $p = (x, y, z) \in S$, un vector normal es $N(p) = (x, y, 0)$. Es claro que las rectas verticales son geodésicas, y también que lo son las circunferencias $S \cap \{z = z_0\}$.



Más interesante es señalar que las hélices

$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \operatorname{sen}(c + at), d + bt),$$

(con $a, b \neq 0$), son geodésicas, pues

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= (-a^2\cos(c + at), -a^2\operatorname{sen}(c + at), 0)\\ &= -a^2(x, y, 0).\end{aligned}$$

Fijemos el punto $p = \alpha(0) = (\cos c, \operatorname{sen} c, d)$. Por ese punto pasan: (i) una recta vertical con tangente $(0, 0, 1)$, (ii) una circunferencia $z = d$ con tangente $(-y, x, 0)$, y (ii) todas las hélices anteriores con tangente $(-ay, ax, b)$. Hemos enumerado así todas las direcciones tangentes al cilindro en p, y podemos concluir que por p pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.

(4) Sea S el paraboloide hiperbólico $z = -x^2 + y^2$. Vamos a enumerar algunas geodésicas de S y algunas curvas que no pueden serlo. El plano tangente a S en el origen (que es un punto de S) es $z = 0$, y su intersección con S es el par de rectas $x = \pm y$, que serán dos geodésicas. Afirmamos que otras dos geodésicas son las parábolas $z + x^2 = y = 0$ y $z - y^2 = x = 0$. Como los cálculos son completamente análogos, los detallamos para la segunda.

La parametrización más sencilla de $z - y^2 = x = 0$ es $\gamma(t) = (0, t, t^2)$, pero no es una parametrización por el arco. Así pues, será $\alpha(s) = \gamma(t)$ con un cambio de parámetro $t = t(s)$. Vamos a calcular $\alpha''(s)$ sin explicitar ese cambio de parámetro. Entonces,

$$\alpha'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(0,1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}},$$

y podemos derivar

$$\alpha''(s) = t' \frac{d}{dt}\frac{(0,1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}} = t' \frac{(0,-4t,2)}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Ahora bien, un vector ortogonal a S en $p = (x,y,z)$ es $N(p) = (2x,-2y,1)$ (no hace falta un vector unitario para estudiar ortogonalidades), luego como para nuestro p es $x = 0, y = t$, el vector $\alpha''(s)$ es proporcional a $N(p)$ y hemos terminado.

(5) El helicoide $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado por $x = v\cos u$, $y = v \operatorname{sen} u$, $z = bu$, contiene las rectas perpendiculares al eje vertical que pasan por el punto (x,y,z), y por tanto esas rectas son geodésicas. El helicoide también contiene las hélices $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$, pero estas curvas *no son geodésicas*. Como $\alpha'(t) = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b)$ tiene norma constante ($\|\alpha'\| \equiv \sqrt{a^2+b^2}$) no hace falta reparametrizar, y tenemos

$$\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0).$$

Este vector es tangente al helicoide, luego la hélice no es geodésica. ∎

Volvamos a nuestra superficie S, con aplicación de Gauss N.

(15.4) Curvatura geodésica. Sea $\alpha(s)$ una curva de S, parametrizada por la longitud del arco. Consideremos un punto $p = \alpha(s) \in S$.

(1) El vector unitario $\alpha'(s)$ es tangente a la superficie en p, y también lo es el vector unitario $N(p) \wedge \alpha'(s)$. Este último vector es además ortogonal a la curva en p, se denomina *vector normal intrínseco* de α en p, y se denota $\mathbf{n}_i(s)$.

Así tenemos los tres vectores $\alpha'(s), \mathbf{n}_i(s)$ y $N(p)$, que por construcción son una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Por ello,

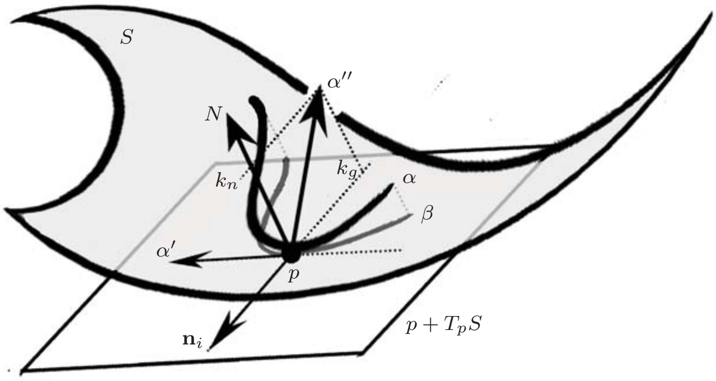
$$\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), \alpha'(s)\rangle \alpha'(s) + \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s)\rangle \mathbf{n}_i(s) + \langle \alpha''(s), N(p)\rangle N(p).$$

De estos coeficientes sabemos que el primero es 0, por ser s el arco, y el último es la curvatura normal de S según la dirección de α en p. Escribiremos

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(p)$$

y denominaremos al coeficiente $k_g(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle$ *curvatura geodésica de* α *en* p.

El vector $k_n(s)N(p)$ es la proyección ortogonal sobre la normal en p, y el vector $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$ es la proyección ortogonal de $\alpha''(s)$ sobre el plano T_pS tangente en p.



(2) Sea ahora β la curva plana obtenida proyectando α sobre el plano afín tangente $p + T_pS$. Como la proyección ortogonal de punto $q \in \mathbb{R}^3$ sobre $p + T_pS$ es

$$\pi_p(q) = q - \langle q - p, N(p) \rangle N(p),$$

la curva plana en cuestión es $\beta = \pi_p \circ \alpha$. De la fórmula de anterior para π_p se deduce que

$$\beta''(s) = \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), N(p) \rangle N(p) = \alpha''(s) - k_n(s)N(p) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s),$$

y en consecuencia, $k_g(s)$ *es la curvatura de* β *en* p(para la orientación adecuada).

(3) Puesto que $\mathbf{n}_i(s)$ y $N(p)$ son ortogonales unitarios, la curvatura de α se expresa muy sencillamente:

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{k_g^2(s) + k_n^2(s)}.$$

∎

Insistiendo sobre la interpretación de los conceptos anteriores, analicemos qué dos sumandos aparecen en

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(p).$$

El primero puede ser entendido como la parte del vector curvatura $\alpha''(s)$ que se puede percibir en la superficie, pues yace en el plano tangente a ella. Se entiende que, desde el punto de vista de la superficie, la componente normal de $\alpha''(s)$ no aporta ninguna contribución a la curvatura, pues su función es mantener la curva en S. De este modo, tan sólo la curvatura geodésica se entendería como una verdadera curvatura *en la superficie*.

Si una curva regular no está parametrizada por la longitud del arco, definimos su curvatura geodésica como la de su reparametrización por la longitud del arco *mediante un cambio de parámetro positivo*. Es fácil ver que esta definición es consistente. También es fácil ver que si el cambio es negativo, la curvatura geodésica cambia de signo. Se tiene la siguiente caracterización de las geodésicas.

Proposición 15.5. *Una curva regular α es una geodésica si y sólo cumple una de las dos condiciones equivalentes siguientes:*

(i) *La curvatura geodésica de α es idénticamente nula.*

(ii) *La curvatura de α es igual al valor absoluto de su curvatura normal en la superficie.*

Demostración. Una curva es geodésica si y sólo si lo es al reparametrizarla por el arco, y las dos condiciones del enunciado no dependen de la parametrización. Por tanto, podemos suponer que α está parametrizada por el arco, y tenemos

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(\alpha(s)) \qquad \text{(15.4(1), p. 208).}$$

Decir que α es una geodésica equivale a que la componente tangencial $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$ se anule para todo s, o sea, que la curvatura geodésica $k_g(s)$ sea idénticamente nula. Esta es la condición (i), que equivale a la (ii) porque $\kappa_\alpha^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s)$ (15.4(3), p. 209). ∎

Ejemplo 15.6. Sea S una superficie de revolución. En 8.10(1), p. 106, se probó que la curvatura normal de un meridiano coincide con su curvatura, luego es una geodésica. En cuanto a los paralelos (*loc. cit.*), curvatura y curvatura normal coinciden si y sólo si corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical: es pues en ese caso exactamente cuando los paralelos son geodésicas. ∎

A continuación encontramos una fórmula fácilmente calculable de la curvatura geodésica, válida para el caso general en que la curva no se suponga parametrizada por la longitud del arco.

(15.7) Cálculo de la curvatura geodésica. Sea $\gamma(t)$ una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco y $\alpha(s) = \gamma(t)$ una reparametrización por la longitud del arco s, de modo que $t = t(s)$ es un difeomorfismo entre intervalos de la recta que conserva la orientación. Entonces

$$\alpha'(s) = t'(s)\gamma'(t), \quad \alpha''(s) = t'^2\gamma''(t) + t''\gamma'(t).$$

Resulta que

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t).$$

Ahora calculamos la curvatura geodésica de α, que es la de γ:

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s)\rangle = \langle \alpha''(s), N(p) \wedge \alpha'(s)\rangle \\ &= \det(\alpha''(s), N(p), \alpha'(s)) = \det(N(p), \alpha'(s), \alpha''(s)) = \\ &= \langle N(p), \alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\rangle = \langle N(p), t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle \\ &= t'^3\langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle. \end{aligned}$$

Como $1 = \|\alpha'(s)\| = t'\|\gamma'(t)\|$, concluimos:

$$k_g(t) = \tfrac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle = \tfrac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\det(N(p), \gamma'(t), \gamma''(t)),$$

que es la fórmula buscada. ∎

La fórmula anterior es extremadamente útil. Lo ilustramos a continuación.

Ejemplos 15.8. (1) Sea $S : x^2 + y^2 = 1$ el cilindro circular. Vamos a calcular la curvatura geodésica de una curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in S$ parametrizada por el arco. En los cálculos que siguen omitimos el parámetro s. Derivando las identidades $x^2 + y^2 = 1$ y $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 = \ x\,x' + y\,y', \\ 0 = x''x' + y''y' + z''z', \end{cases}$$

con incógnitas (x', y', z'). Si $z'' \neq 0$ o $xy''-yx'' \neq 0$ el sistema tiene rango 2, y solución

$$(x', y', z') = \rho(yz'', -xz'', xy''-yx'').$$

Como $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, resulta

$$1 = \rho^2(y^2z''^2 + x^2z''^2 + (xy''-yx'')^2) = \rho^2(z''^2 + (xy''-yx'')^2),$$

con lo que

$$\rho^2 = \frac{1}{z''^2 + (xy'' - yx'')^2} \neq 0$$

(obsérvese que nuestra hipótesis es que el denominador no se anula). Ahora, con el vector normal $N = (x, y, 0)$, queda:

$$\begin{aligned} k_g = \det\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} &= \rho \det\begin{pmatrix} x & yz'' & x'' \\ y & -xz'' & y'' \\ 0 & xy'' - yx'' & z'' \end{pmatrix} \\ &= -\rho\big(z''^2 + (xy'' - yx'')^2\big) = -1/\rho. \end{aligned}$$

Esta elegante fórmula nos dice en particular que la curvatura geodésica no se anula, recuérdese, si $z'' \neq 0$ o $xy'' - yx'' \neq 0$. Pero si $z'' = xy'' - yx'' = 0$ debe ser $(x'', y'') = \delta(x, y)$ para cierto δ, y

$$k_g = \det\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & x' & \delta x \\ y & y' & \delta y \\ 0 & z' & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Una vez completados estos cálculos, supongamos que la curva α es una geodésica. Entonces $k_g \equiv 0$, y por la discusión precedente, $z'' \equiv 0$. En consecuencia, existen dos constantes b, d tales que $\alpha(s) = (x(s), y(s), d + bs)$ y por ser s el arco,

$$1 \equiv \|\alpha'\|^2 = x'^2 + y'^2 + b^2.$$

Deducimos que $x'^2 + y'^2 \equiv 1 - b^2 \geq 0$. Si $b^2 = 1$, entonces $x' = y' \equiv 0$, x e y son constantes, y la curva es una recta vertical. Si $b^2 < 1$, entonces $(x(s), y(s))$ es una parametrización de la circunferencia (recuérdese que $x^2 + y^2 = 1$) por un múltiplo del arco. Es pues del tipo $x = \cos(c + at), y = \operatorname{sen}(c + at)$ para ciertas constantes a, c. Concluimos que la curva es (i) una circunferencia del plano $z = d$ si $b = 0$, o (ii) una hélice como en 15.3(3), p. 207, si $b \neq 0$. Hemos demostrado así que las geodésicas descritas en aquél ejemplo son todas las que tiene el cilindro.

(2) Según vimos en 15.3(4), p. 207, dos geodésicas del paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$ son las parábolas $z + x^2 = y = 0$ y $z - y^2 = x = 0$. Entonces tuvimos que razonar por intermedio del arco. Usemos en cambio la fórmula anterior, por ejemplo para la segunda parábola. Una parametrización suya es $\gamma(t) = (0, t, t^2)$, que no es por el arco. Tenemos

$$\gamma' = (0, 1, 2t), \quad \gamma'' = (0, 0, 2) \quad \text{y} \quad \gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0).$$

Un vector ortogonal a S es $\vartheta = (2x, -2y, 1)$, y en nuestro caso $x = 0$, luego $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$, y como N es proporcional a ϑ,

$$k_g(t) = \tfrac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle N, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$$

Así que γ tiene curvatura geodésica idénticamente nula, y es por tanto una geodésica (cuando se reparametrice por el arco).

Además, ahora vemos fácilmente que $z - y^2 = x = 0$ es la única geodésica de S obtenida intersecando S con un plano $x = c$. En efecto, si $c \neq 0$, se parametriza una tal intersección con $\gamma(t) = (c, t, -c^2 + t^2)$ y se obtiene como en el caso anterior $\gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0)$, pero ahora $\vartheta = (2c, -2y, 1)$, de modo que $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 4c \neq 0$, y por tanto $k_g \neq 0$. Análogamente se ve que ninguna intersección con un plano $y = c \neq 0$ es geodésica. ∎

La fórmula de la curvatura geodésica nos va a permitir encontrar una expresión local que revelará su naturaleza intrínseca, en el sentido que damos a este término al establecer el teorema egregio de Gauss.

(15.9) Expresión local de la curvatura geodésica. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización local de S, compatible con la aplicación de Gauss N, y sea $\gamma(t)$ una curva de W no necesariamente parametrizada por el arco. Vamos a calcular la curvatura geodésica de γ en función de las coordenadas (u, v) de la parametrización dada. La curva γ vendrá expresada en términos de φ como $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, y para aplicar la fórmula del párrafo 15.7, p. 211, hacemos los cálculos siguientes.

Derivando dos veces respecto de t tenemos

$$\begin{aligned}\gamma' &= u'\varphi_u + v'\varphi_v,\\ \gamma'' &= u''\varphi_u + v''\varphi_v + u'^2\varphi_{uu} + 2u'v'\varphi_{uv} + v'^2\varphi_{vv},\end{aligned}$$

y expresando las segundas derivadas de φ mediante los símbolos de Christoffel (ecuaciones (Ch) de 11.1, p. 146), queda:

$$\begin{aligned}\gamma'' &= u''\varphi_u + v''\varphi_v + u'^2\big(\Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN\big)\\ &\quad + 2u'v'\big(\Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN\big) + v'^2\big(\Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN\big)\\ &= \big(u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1\big)\varphi_u\\ &\quad + \big(v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2\big)\varphi_v + \big(u'^2 e + 2u'v'f + v'^2 g\big)N.\end{aligned}$$

Para simplificar el desarrollo, escribimos $\gamma'' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$. Entonces, por las bien conocidas propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned}
k_g &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3}\det(N, \gamma', \gamma'') \\
&= \frac{1}{\|\gamma'\|^3}\det(N, u'\varphi_u + v'\varphi_v, A\varphi_u + B\varphi_v + CN) \\
&= \frac{1}{\|\gamma'\|^3}\big(\det(N, u'\varphi_u, B\varphi_v) + \det(N, v'\varphi_v, A\varphi_u)\big) \\
&= \frac{1}{\|\gamma'\|^3}(u'B - v'A)\det(N, \varphi_u, \varphi_v) \\
&= \frac{\det(N, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\gamma'\|^3}\det\begin{pmatrix} u' & A \\ v' & B \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como φ es compatible con la orientación,

$$\begin{aligned}
\det(N, \varphi_u, \varphi_v) = \langle N, \varphi_u \wedge \varphi_v\rangle &= \langle \tfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \varphi_u \wedge \varphi_v\rangle \\
&= \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}
\end{aligned}$$

(5.2, p. 57), y

$$\langle \gamma', \gamma'\rangle = \langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v\rangle = {u'}^2E + 2u'v'F + {v'}^2G.$$

Juntando todo obtenemos

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{({u'}^2E + 2u'v'F + {v'}^2G)^{3/2}}\det\begin{pmatrix} u' & u'' + {u'}^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + {v'}^2\Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + {u'}^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + {v'}^2\Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de que la curva está parametrizada por la longitud del arco (esto es, $\|\gamma'\| \equiv 1$), la expresión de la curvatura geodésica se simplifica algo:

$$k_g = \sqrt{EG - F^2}\det\begin{pmatrix} u' & u'' + {u'}^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + {v'}^2\Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + {u'}^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + {v'}^2\Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

∎

Como anunciábamos, la fórmula anterior pone de manifiesto que *la curvatura geodésica sólo depende de la primera forma fundamental,* es decir, es un concepto intrínseco. Este resultado se debe a Minding. Se deduce que:

Corolario 15.10. *La curvatura geodésica se conserva por isometrías locales. En particular, las isometrías locales transforman geodésicas en geodésicas.*

Demostración. Sea $h : S \to S'$ una isometría local: todo punto $p \in S$ tiene un entorno abierto W tal que $W' = h(W)$ es un entorno abierto de $p' = h(p)$ y la restricción $h|W : W \to W'$ es una isometría. Fijemos p y sea $\gamma(t)$ una curva que pasa por p. Podemos suponer que tenemos una parametrización $\varphi : U \to W$ y entonces $\psi = h \circ \varphi : U \to W'$ es una parametrización de S' con las mismas coordenadas (u, v). Por ser $h|W$ isometría, los coeficientes E, F, G de la primera forma de S respecto de φ coinciden en todo U con los coeficientes E', F', G' de S' respecto de ψ, y en consecuencia al usar la fórmula anterior para calcular las curvaturas geodésicas de γ en $\gamma(t)$ y de $h \circ \gamma$ en $h(\gamma(t))$ obtenemos el mismo resultado. ∎

Este hecho proporciona una mejor comprensión de la naturaleza de las geodésicas.

Ejemplo 15.11. (1) El cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$ tiene la parametrización global $\varphi(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, que es una isometría, pues como vimos en 5.4(2), p. 60, los coeficientes E, F, G respecto de φ son constantes iguales a $1, 0, 1$ respectivamente. Por tanto, las geodésicas del cilindro se obtienen transformando por φ las rectas afines $u = c + at, v = d + bt$. Obtenemos las curvas

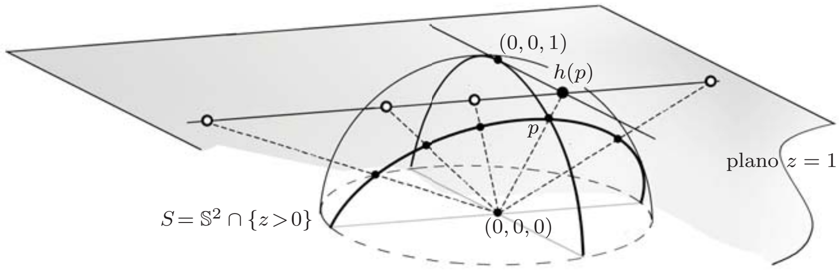
$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \operatorname{sen}(c + at), d + bt).$$

Para $a = 0$ son rectas verticales, para $b = 0$ son circunferencias en $z = d$, y en otro caso son hélices. Naturalmente, la lista coincide con la de 15.3(3), p. 207, y prueba de nuevo (ya lo hicimos en 15.8(1), p. 212) que no hay más.

(2) Las isometrías conservan las geodésicas, pero no es cierto que si un difeomorfisno conserva las geodésicas sea una isometría. Sea S el hemisferio superior de la esfera unidad: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y S' el plano afín $z = 1$, que es tangente a S en el polo norte. La *proyección central*

$$h : S \to S' : p = (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z, 1)$$

es un difeomorfismo: $h(p)$ es la proyección de p sobre el plano, con centro el origen.



Con esta descripción geométrica es claro que transforma círculos máximos de S en rectas de S' (pues un círculo máximo es la intersección de S con un plano *que pasa por el origen*). Por tanto, h transforma geodésicas en geodésicas. Pero no es una isometría, pues como ya sabemos, no las hay entre abiertos de una esfera y de un plano. ∎

Problemas

Número 1. Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada por el arco en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Probar que α es una geodésica plana si y sólo si $\|N'(s)\| = \kappa(s)$ para cada valor del parámetro s.

Número 2. Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por la longitud del arco que define un homeomorfismo con su traza (es decir γ es un arco de Jordan). Probar que existe una superficie S tal que γ es una geodésica de S.

Número 3. Sean $p = (x_0, y_0, z_0)$ y $q = (x_1, y_1, z_1)$ puntos del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $z_0 \neq z_1$. Probar que existen infinitas geodésicas del cilindro que pasan por ambos puntos.

Número 4. Sea S una superficie conexa tal que toda geodésica de S es una curva plana. Probar que S es un abierto de un plano o de una esfera.

Número 5. Sea S una superficie de revolución. Probar que la curvatura geodésica es constante a lo largo de los paralelos de S. Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Número 6. Sea S el semicono $z = +\sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas $z = c$, donde c es una constante positiva. Estudiar si dichas secciones son geodésicas.

Número 7. Sea S la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Estudiar si alguna sección de S por un plano $z = ay$ es una geodésica.

Número 8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 < z < 1$. Determinar para qué pares de puntos $p, q \in S$ existe una isometría $S \setminus \{p\} \to S \setminus \{q\}$, y describirla.

Lección 16

Geodésicas (II)

En esta lección describimos las geodésicas como las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales que dependen de los símbolos de Christoffel (luego solamente de la primera forma fundamental). Es esta descripción la que permite establecer localmente la existencia y unicidad de las geodésicas. Después presentamos el concepto de campo paralelo, que proporciona una caracterización alternativa de las geodésicas y está regulado mediante ecuaciones diferenciales similares. Terminamos la lección con otro aspecto de la analogía entre rectas y geodésicas: la minimización de la distancia sobre la superficie.

Sea S una superficie diferenciable.

(16.1) Ecuaciones diferenciales de las geodésicas. Sea $\varphi : U \to W$ una parametrización de un abierto W de S. Sea $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva de W. Es posible sacar aún más partido de los cálculos realizados en la lección anterior, y, en concreto, de la siguiente expresión encontrada en 15.9, p. 213,

$$\begin{aligned}\gamma''(t) = &\big(u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1\big)\varphi_u \\ &+ \big(v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2\big)\varphi_v + \big(u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g\big)N.\end{aligned}$$

La curva $\gamma(t)$ será una geodésica si y sólo si la proyección de $\gamma''(t)$ sobre el plano tangente es nula, les decir, si en la anterior fórmula los coeficientes de φ_u y φ_v se anulan:

$$\text{(EDG)}\quad \begin{cases} u'' + u'^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + v'^2\Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + u'^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + v'^2\Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Éstas son las denominadas *ecuaciones diferenciales de las geodésicas.* ▮

Como aplicación de estas ecuaciones vamos a estudiar el comportamiento de las geodésicas de las superficies de revolución.

Ejemplo 16.2. Consideremos una superficie de revolución S parametrizada mediante

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)) \quad (\zeta(u) > 0),$$

donde u es el arco de la curva generatriz $(\zeta(u), 0, \xi(u))$, es decir, se cumple $\zeta'^2 + \xi'^2 \equiv 1$. Los coeficientes de la primera forma fundamental de esta parametrización son $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G = \zeta^2$(5.6, p. 61), y los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'$$

(11.3(5), p. 148). Por tanto las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son, en este caso

$$\begin{cases} u'' - \zeta(u)\zeta'(u)v'^2 = 0, \\ v'' + 2\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}u'v' = 0. \end{cases}$$

Utilizando estas ecuaciones podemos discutir ciertas geodésicas de S.

(1) Ya sabemos (15.6, p. 210) que los meridianos son siempre geodésicas, y los paralelos cuando corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical. Vamos a obtener esto otra vez usando las ecuaciones diferenciales anteriores.

Un meridiano se parametriza mediante $\gamma(t) = \varphi(u(t), v_0)$, luego $v' = v'' \equiv 0$ y su vector tangente es

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = u'\varphi_u, \quad \|\gamma'\|^2 = u'^2 E = u'^2.$$

Si t es múltiplo del arco, $\|\gamma'\|$ es constante, luego u' lo es también, y $u'' = 0$. Así pues, las ecuaciones diferenciales se satisfacen trivialmente, y el meridiano es una geodésica.

Consideremos un paralelo $\gamma(t) = \varphi(u_0, v(t))$. En este caso es $u' = u'' \equiv 0$,

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = v'\varphi_v \quad \text{y} \quad \|\gamma'\|^2 = v'^2 G = v'^2\zeta^2(u_0).$$

Si $\|\gamma'\|$ es constante, v' lo es también, y $v'' \equiv 0$. Las ecuaciones diferenciales se reducen a la primera que queda

$$\zeta(u_0)\zeta'(u_0)v'^2 = 0.$$

Como v no puede ser constante y $\zeta(u_0) > 0$, concluimos que esta ecuación se satisface, y el paralelo es geodésica, si y sólo si $\zeta'(u_0) = 0$, que es la condición de que la tangente a la curva en $u = u_0$ sea vertical.

(2) Volviendo al sistema en general, reescribimos la segunda ecuación como sigue

$$0 = \zeta^2(u)v'' + 2\zeta(u)\zeta'(u)u'v' = \tfrac{d}{dt}(\zeta^2(u)v'),$$

luego para cada geodésica existe una constante c tal que a lo largo de la geodésica se tiene que $\zeta^2(u)v' = c$. Si la geodésica está parametrizada por la longitud del arco s y llamamos θ al (menor) ángulo que forma $\gamma'(s)$ con φ_v, es decir con el paralelo que pasa por $\alpha(s)$, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{\langle \gamma'(s), \varphi_v\rangle}{\|\varphi_v\|} = \frac{\langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, \varphi_v\rangle}{\|\varphi_v\|} = v'\sqrt{G} = \zeta(u)v',$$

luego $\zeta(u)\cos\theta = \zeta^2(u)v' = c$. Teniendo en cuenta que $\zeta(u)$ es el radio del paralelo correspondiente, obtenemos que para cada geodésica parametrizada por la longitud del arco $\gamma(s)$ existe una constante c (que depende sólo de la geodésica) tal que se verifica la llamada *relación de Clairaut*

$$r\cos\theta = c,$$

donde θ es el ángulo entre $\gamma'(s)$ y φ_v en cualquier punto de la curva y r es el radio del paralelo que pasa por ese punto. Obsérvese que el signo de c cambia con la orientación de la geodésica. Esta relación es muy útil para visualizar la forma de las geodésicas en las superficies de revolución cuando no somos capaces de encontrar la expresión analítica de las mismas. Si, por ejemplo, $c \geq 0$, la geodésica no puede abandonar la región de la superficie en que $r \geq c$. Además, se deduce que si $c > 0$ el ángulo θ aumenta en sentido creciente de los radios de los paralelos. ∎

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas sirven para probar un teorema de existencia local. La idea geométrica es que la situación que hemos comprobado en el caso de la esfera y el cilindro se cumple siempre: fijado un punto $p \in S$ y una dirección tangente en él, existe una única geodésica de S que pasa por p con esa dirección. Dado el papel que juegan las parametrizaciones, conviene detallar bien el sentido de esta afirmación.

(16.3) Reparametrización de geodésicas y condiciones iniciales. (1) Una curva de nuestra superficie S es una geodésica si y sólo si su curvatura geodésica es idénticamente nula. La curvatura geodésica se cálcula sin necesidad de reparametrizar por el arco, de modo que su anulación no depende de la parametrización. Sin embargo la condición que inicialmente define las geodésicas es que su vector curvatura no tenga componente tangencial, es decir, sea ortogonal a la superficie, y esta condición sí depende de la parametrización.

(2) Si una curva es una geodésica, cualquier parametrización suya, $\gamma(t)$, respecto de un múltiplo del arco cumple el requisito del vector curvatura, y, en

coordenadas locales, esas parametrizaciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales (EDG). Las condiciones iniciales que distinguen entre esas soluciones son las siguientes.

En primer lugar, es claro que las traslaciones del parámetro son irrelevantes, luego se conviene que el origen $t = 0$ es siempre un punto del intervalo de definición de γ. En segundo lugar, sabemos cuales son todas las otras reparametrizaciones que cumplen el requisito del vector curvatura, o más explícitamente, que son soluciones de las ecuaciones diferenciales: exactamente las del tipo $\alpha(s) = \gamma(cs)$ para constantes $c \neq 0$. Obsérvese que esta reparametrización no altera el origen $t = 0$ y que $\alpha'(0) = c\gamma'(0)$, de modo y manera que las parametrizaciones se distinguen por sus vectores tangentes. Así, caracterizamos las parametrizaciones por su *origen* $p = \alpha(0)$ y su *velocidad inicial* $\omega = \alpha'(0)$.

(3) Si fijamos un punto $p \in S$, una geodésica que pase por p determina una dirección tangente en ese punto, y las reparametrizaciones de la curva con origen en p que cumplen las ecuaciones diferenciales se corresponden biyectivamente con los vectores no nulos ω en esa dirección. ∎

Tras las explicaciones precedentes, enunciamos el *teorema de existencia y unicidad de geodésicas:*

Teorema 16.4. *Fijemos un punto $p \in S$ y un vector tangente no nulo $\omega \in T_pS$. Existe una geodésica $\alpha : I \to S$ definida en un intervalo abierto que contiene el origen tal que:*

(1) $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \omega$.

(2) *Si* $\gamma : J \to S$ *es otra geodésica con* $0 \in J$, $\gamma(0) = p$ *y* $\gamma'(0) = w$, *entonces* $J \subset I$ *y* $\gamma(t) = \alpha(t)$ *para todo* $t \in J$.

En otras palabras, dados un punto y un vector tangente en él, existe una única *geodésica máximal* con origen ese punto y velocidad inicial ese vector tangente.

Demostración. Es una aplicación directa del *teorema de Picard* de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para hacerlo evidente reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas (EDG) utilizando más variables de la manera bien conocida. Denotamos

$$\mathtt{x}_1 = u,\ \mathtt{x}_2 = v, \mathtt{x}_3 = u',\ \mathtt{x}_4 = v',$$

y (EDG) se convierte en

$$\begin{cases} \mathtt{x}_1' = \quad \mathtt{x}_3, \\ \mathtt{x}_2' = \quad \mathtt{x}_4, \\ \mathtt{x}_3' = -\Gamma_{11}^1 \mathtt{x}_3^2 - 2\Gamma_{12}^1 \mathtt{x}_3 \mathtt{x}_4 - \Gamma_{22}^1 \mathtt{x}_4^2, \\ \mathtt{x}_4' = -\Gamma_{11}^2 \mathtt{x}_3^2 - \Gamma_{12}^2 2\mathtt{x}_3 \mathtt{x}_4 - \Gamma_{22}^2 \mathtt{x}_4^2. \end{cases}$$

Así que tenemos efectivamente una ecuación diferencial $\mathtt{x}' = f(\mathtt{x})$. Las condiciones iniciales son

$$\mathtt{x}_1(0) = u(0),\ \mathtt{x}_2(0) = v(0),\ \mathtt{x}_3(0) = u'(0),\ \mathtt{x}_3 = v'(0),$$

es decir, el punto $p \in S$ y el vector tangente $\omega \in T_pS$ cuyas coordenadas son respectivamente $(u(0), v(0))$ y $(u'(0), v'(0))$. Así pues, se aplica el teorema de Picard a la ecuación $\mathtt{x}' = f(\mathtt{x})$ y se obtiene lo que se quiere. ∎

Revisemos a la luz de este resultado los ejemplos que hemos analizado previamente.

Ejemplos 16.5. (1) Para la esfera y para el cilindro, encontramos geodésicas para cada punto y cada dirección, y probamos además que esas eran todas las geodésicas (15.3(2), p. 206, y 15.3(3), p. 207,15.8(1), p. 212). Esto último no era realmente necesario, pues lo garantiza la unicidad del teorema anterior.

(2) Del toro de revolución S sabemos por las propiedades generales de las superficies de revolución (16.2(1), p. 221) que los meridianos son geodésicas y de los paralelos sólo los máximos, que están en el plano $z = 0$. Se puede obtener alguna información sobre las restantes geodésicas utilizando la relación de Clairaut (*loc. cit.*(2)). Si consideramos la parametrización habitual del toro

$$\varphi(u, v) = ((c + r\cos u)\cos v, (c + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u) \quad (c > r > 0),$$

la relación de Clairaut dice que $(c + r\cos u)\cos\theta$ es constante, donde θ es el ángulo entre γ' y φ_v. Si γ es, en un punto dado, tangente al paralelo superior $u = \pi/2$ (es decir, si $\theta = 0$), vemos que c es precisamente la constante anterior. Como $c + r\cos u > 0$. resulta que $0 \leq \cos\theta \leq 1$, y tenemos que $r\cos u + c \geq c$ y $\cos u \geq 0$. Esto significa que la geodésica está confinada a la cara externa del toro (de hecho, se sigue de la relación de Clairaut que la geodésica oscila entre el paralelo superior y el inferior). ∎

Las geodésicas se han definido imitando en la superficie en la que yacen el comportamiento de las rectas en el plano. Vamos ahora utilizar el mismo punto de vista intrínseco para desarrollar otro concepto relacionado con la geometría de las rectas del plano: el paralelismo.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. A continuación utilizamos una noción curvilínea de campo tangente. Si $\alpha : I \to S$ es una curva de S, un *campo (vectorial) tangente a lo largo de* α es una aplicación diferenciable $\Phi : I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. El primer ejemplo es el campo $\Phi(t) = \alpha'(t)$.

Definición 16.6. Un campo tangente Φ a lo largo de una curva $\alpha : I \to S$ se llama *paralelo* si $\Phi'(t)$ es ortogonal a $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$.

La motivación de la definición anterior parte, como en el caso de las geodésicas, del supuesto de que los hipotéticos habitantes de la superficie sólo perciben la componente tangencial de los vectores, es decir su proyección sobre el plano tangente a la superficie en un punto dado. Si $\Phi'(t)$ es ortogonal a S (esto es, a $T_{\alpha(t)}S$), $\Phi'(t)$ se anula para esos habitantes que, por tanto, no percibirían variación alguna de Φ. Es decir, verían dos vectores $\Phi(t_1)$ y $\Phi(t_2)$ iguales con distintos orígenes $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$, o sea, los verían *paralelos*.

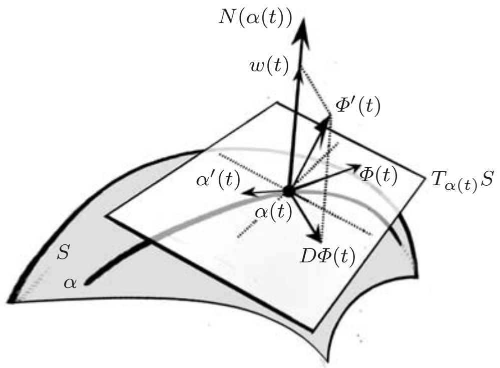
Por otra parte, es claro que las geodésicas no son otra cosa que *las curvas cuyo campo tangente es paralelo*.

Para entender mejor la definición que acabamos de dar, es conveniente introducir el concepto siguiente.

Definición 16.7. Dado un campo tangente Φ a lo largo de la curva $\alpha : I \to S$, se llama *derivada covariante* de Φ al campo tangente $D\Phi$ definido por

$$D\Phi(t) = \pi_{\alpha(t)}(\Phi'(t)),$$

donde $\pi_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \to T_{\alpha(t)}S$ es la proyección lineal ortogonal sobre el plano tangente a S en $\alpha(t)$.



Mediante la derivada covariante, se puede reformular la noción de campo paralelo Φ como aquél que verifica $D\Phi = 0$. En particular, las geodésicas se caracterizan como *las curvas cuyo campo tangente tiene derivada covariante nula*.

Se sigue de la definición que $\Phi'(t) = D\Phi(t) + w(t)$, donde $w(t)$ es un vector ortogonal a S en $\alpha(t)$. Si Ψ es un segundo campo tangente a lo largo de la curva α, es útil la relación

$$\tfrac{d}{dt}\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle D\Phi, \Psi \rangle + \langle \Phi, D\Psi \rangle,$$

que se prueba inmediatamente haciendo uso de la expresión anterior. Se deduce la siguiente propiedad:

Corolario 16.8. *Sea Φ paralelo a lo largo de la curva regular α. Entonces $\|\Phi(t)\|$ es constante. Si Ψ es otro campo paralelo a lo largo de α entonces el ángulo entre $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ es constante.*

Demostración. Si tenemos dos campos paralelos Φ y Ψ, sus derivadas covariantes se anulan idénticamente, y por tanto

$$\tfrac{d}{dt}\langle \Phi, \Psi \rangle = \langle D\Phi, \Psi \rangle + \langle \Phi, D\Psi \rangle = 0.$$

En consecuencia, la función $\langle \Phi, \Psi \rangle$ es constante. Para $\Phi = \Psi$, obtenemos que las normas de Φ y de Ψ son constantes. Se sigue que el ángulo θ que forman los campos, que tiene coseno

$$\cos\theta = \frac{\langle \Phi, \Psi \rangle}{\|\Phi\|\,\|\Psi\|},$$

es también constante. ∎

Añadimos a esta sucinta presentación del paralelismo en superficies el teorema de existencia y unicidad de campos paralelos.

Teorema 16.9. *Sea $\alpha : I = [a, b] \to S$ una curva regular y ω un vector tangente a S en $\alpha(a)$. Entonces existe un único campo tangente paralelo Φ a lo largo de α con $\Phi(a) = \omega$.*

Demostración. La demostración es parecida a la de existencia y unicidad de geodésicas, de manera que la describimos a grandes rasgos. En primer lugar se observa que la traza de la curva α, por ser compacta, se puede cubrir con una cantidad finita de parametrizaciones $\varphi : U \to W$. Esas parametrizaciones se pueden ordenar para tener una partición finita de subintervalos $[a', b']$ de $[a, b]$ de manera que para una cierta amplitud $\varepsilon > 0$ sea $\alpha([a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]) \subset W$. Entonces, si sabemos resolver el problema en cada $[a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]$, es fácil unir soluciones para obtener la que está definida en todo $[a, b]$. Aquí es importante la unicidad, y para poder usarla es para lo que se ha especificado el pequeño solapamiento de amplitud ε. Todo esto significa que podemos suponer simplemente que $\alpha([a, b]) \subset W$.

Eso supuesto, se procede a reformular el problema mediante ecuaciones diferenciales. El campo que buscamos será

$$\Phi(t) = X(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + Y(t)\varphi_v(u(t), v(t)),$$

y derivando

$$\Phi' = X'\varphi_u + Y\varphi_v + Xu'\varphi_{uu} + (Xv' + Yu')\varphi_{uv} + Yv'\varphi_{vv}.$$

Reemplazando las segundas derivadas por sus expresiones con los símbolos de Christoffel obtenemos $\Phi' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$, y para que el campo sea paralelo debe cumplirse $A = B = 0$. En nuestro caso resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\text{(CP)} \begin{cases} X' = -\big(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1\big)X - \big(u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1\big)Y, \\ Y' = -\big(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2\big)X - \big(u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2\big)Y. \end{cases}$$

La existencia y unicidad de las soluciones X, Y de este sistema de ecuaciones lineales proporciona la existencia y unicidad del campo tangente Φ. Las condiciones iniciales de una solución son $X(a), Y(a)$, esto es, las coordenadas de ω en la parametrización φ. ∎

Para terminar la lección, volvemos a nuestro tema principal, que son las geodésicas. Ya que se han definido a imitación de las rectas, es importante ver en qué medida las emulan, siendo las curvas de longitud mínima de la superficie. El siguiente resultado trata esta propiedad. Para enunciarlo recordemos que una aplicación continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una *curva diferenciable a trozos* si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es una curva diferenciable en el sentido usual. La longitud de γ se define como la suma de las longitudes de las restricciones $\gamma|[t_{k-1}, t_k]$.

Proposición 16.10. *Sea $\alpha : I = [a, b] \to S$ una curva parametrizada por la longitud del arco cuya longitud $L_a^b(\alpha)$ es menor o igual que la de cualquier curva diferenciable a trozos que une los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Entonces α es una geodésica.*

Demostración. La demostración por reducción al absurdo utiliza ideas que pertenecen al Cálculo de Variaciones. Supongamos que α no es una geodésica y que, por tanto, existe un valor s_0 del parámetro tal que $k_g(s_0) \neq 0$, por ejemplo $k_g(s_0) > 0$. Entonces existen a' y b' con $a < a' < b' < b$, tales que $k_g(s) > 0$ para todo $s \in [a', b']$. Podemos suponer que $\alpha([a', b'])$ está cubierto por una parametrización $\varphi : U \to W$. La curva $\alpha|[a', b']$ debe ser la curva más corta entre los puntos $\alpha(a')$ y $\alpha(b')$. En efecto, en caso contrario, reemplazando α entre a' y b' por otra curva sería posible obtener una curva diferenciable a trozos que une los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ que fuera más corta que α.

Así pues, en lo que sigue podemos suponer simplemente $a = a'$ y $b = b'$, esto es, que toda la traza de α está cubierta por una parametrización $\varphi : U \to W$ y que $k_g(s) > 0$ para todo s. La curva se expresa en coordenadas locales en la forma $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$.

Tomemos una función diferenciable $\zeta : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\zeta(s) > 0$ para todo $s \in (a, b)$ y $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$. Sea $n_i(s)$ la normal intrínseca de α y expresemos analíticamente el campo tangente $\zeta(s)n_i(s)$ en términos de φ_u y φ_v. Resulta que

$$\zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v,$$

para ciertas funciones diferenciables X, Y (13.3(2), p. 180). Consideramos la aplicación

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)),$$

para $|t| < \varepsilon$ y ε suficientemente pequeño para que la expresión anterior tenga sentido. Para cada t fijo, la aplicación $s \mapsto \gamma(s, t)$ es una curva de la superficie definida en el intervalo $[a, b]$ que une $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Por tanto, la longitud de esa curva es mayor o igual que la de $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$. En términos analíticos, la función

$$L(t) = \int_a^b \left\| \tfrac{\partial}{\partial s}\gamma(s, t) \right\| ds = \int_a^b \left\| \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| ds$$

tiene un mínimo para $t = 0$. Ahora bien,

$$\left\| \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| = \sqrt{\langle \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}, \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} L'(t) &= \tfrac{d}{dt} \int_a^b \sqrt{\langle \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}, \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle}\, ds \\ &= \int_a^b \tfrac{\partial}{\partial t} \sqrt{\langle \tfrac{\partial \gamma}{\partial s}, \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle}\, ds = \int_a^b \left\| \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|^{-1} \langle \tfrac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}, \tfrac{\partial \gamma}{\partial s} \rangle ds. \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$, y como $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$ está parametrizada por la longitud del arco se tiene $\left\|\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\| = 1$ para $t = 0$, con lo que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\rangle ds = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\rangle\Big|_{t=0} - \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\right\rangle\Big|_{t=0}\right) ds \\ &= \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\rangle\Big|_{t=0,s=a}^{t=0,s=b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\right\rangle\Big|_{t=0} ds \end{aligned}$$

Computemos separadamente los últimos dos sumandos.

De las expresiones

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)), \quad \zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v$$

deducimos que $\frac{\partial\gamma}{\partial t}\big|_{t=0} = \zeta(s)n_i(s)$, y, teniendo en cuenta que $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$, resulta

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}\Big|_{t=0,s=a}^{t=0,s=b} = \zeta(s)n_i(s)\big|_{s=a}^{s=b} = 0,$$

con lo que el primero de los dos sumandos es nulo. Pasemos al segundo. Como $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$, es

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\Big|_{t=0} = \alpha''(s) = k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N,$$

y deducimos

$$\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial s^2}\right\rangle\Big|_{t=0} = \langle\zeta(s)n_i(s), k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N\rangle = \zeta(s)k_g(s).$$

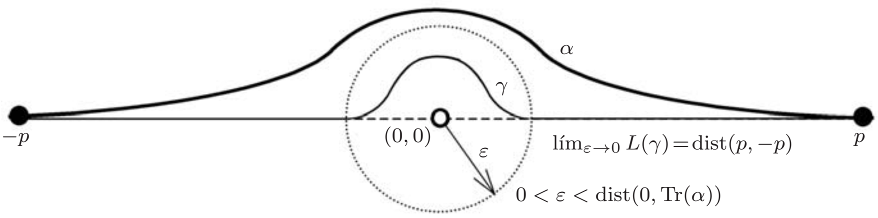
En consecuencia:

$$L'(0) = -\int_a^b \zeta(s)k_g(s) < 0,$$

pues tenemos la condición $k_g(s) > 0$ para todo s. Esto es imposible, pues L tiene un mínimo en $t = 0$.

De esta contradicción se sigue que no existe s_0 con $k_g(s_0) \neq 0$ y, por tanto, α es una geodésica. ∎

Es conveniente observar que no siempre existe la curva más corta entre dos puntos. Por ejemplo, si $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $p \in S$ es un punto arbitrario, dada cualquier curva α de S que una p y $-p$ siempre existe otra γ estrictamente más corta que los une.



La superficie de este ejemplo, sin embargo, no es cerrada en $\mathbb{R}^3$ y es posible probar que en una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ todo par de puntos puede ser unido por una curva de longitud mínima. Las superficies cerradas también tienen la propiedad de que toda geodésica $\alpha : I \to S$ se extiende indefinidamente, es decir, se extiende a una geodésica $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to S$ definida en toda la recta real. Ambas propiedades anteriores son consecuencia del llamado *teorema de Hopf-Rinow*. Por otra parte, tampoco es siempre cierto que una geodésica defina la distancia más corta entre dos puntos. Por ejemplo, un segmento de círculo máximo de la esfera unidad de longitud mayor que π (que, como sabemos, es una geodésica) no define la mínima distancia entre sus extremos (que es definida a través del segmento complementario). Sin embargo, es posible probar que una curva parametrizada por el arco $\alpha : I = [a,b] \to S$ es una geodésica si y sólo si minimiza distancias localmente, es decir, si y sólo si para todo $c \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la restricción $\alpha|[c+\varepsilon, c-\varepsilon] \cap I$ es la curva de mínima longitud en S entre sus extremos.

Problemas

Número 1. Se considera la parametrización de la esfera unitaria dada por

$$\varphi(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u), \quad -\tfrac{\pi}{2} < u < \tfrac{\pi}{2},\ 0 < v < 2\pi.$$

Fijado u_0 consideremos la correspondiente curva de latitud, $\alpha(v) = \varphi(u_0, v)$, y el campo tangente $X = \varphi_u$ a lo largo de ella (es decir, $X(v) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v)$). Determinar para qué valores de u_0 el campo X es paralelo.

Número 2. Sea S una superficie de revolución parametrizada como es usual por

$$\varphi(u,v) = (\zeta(u)\cos v, \zeta(u)\operatorname{sen} v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

Mostrar que si φ transforma en una geodésica alguna recta $v = mu + n$, $m \neq 0$, la superficie es un cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. ¿Es entonces φ una isometría?, ¿y una semejanza?

Número 3. Sea $\gamma : I \to S$ una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie S. Probar las siguientes *fórmulas de Frenet para la curvatura geodésica:*

$$D\gamma'(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s), \quad D\mathbf{n}_i(s) = -k_g(s)\gamma'(s).$$