Para el cálculo de la varianza de T es preferible calcular primero la distribución de $Y = X^2$ ya que ésta nos va a ser de gran ayuda.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] \underset{X>0}{=} P[X \leq \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{\theta^2} \cdot e^{-\frac{y}{2\theta^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2} \cdot y} \quad \text{con } y>0$$

Por tanto $X^2 = Y \sim Gamma\left(a = \frac{1}{2\theta^2}, p = 1\right)$.

De esta manera $E[X^2] = E[Y] = \frac{1}{\frac{1}{2\theta^2}} = 2\theta^2$ como antes habíamos anticipado. Además $Var(Y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2\theta^2}\right)^2} = 4\theta^4$

Por tanto, y volviendo al cálculo de la varianza de T,

$$Var(T) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}\right) = \frac{1}{4} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{4} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) =$$

$$= \frac{1}{4} Var(\bar{Y}) = \frac{1}{4} \frac{Var(Y)}{n} = \frac{1}{4} \frac{4\theta^4}{n} = \frac{\theta^4}{n}$$ que es el valor que habíamos obtenido antes para la cota de FCR.

En conclusión, $T(X_1 \ldots X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$ es un estimador eficiente.