Por tanto $|J_g| = \frac{|v|}{u^2}$.

Como la transformación es inyectiva, entonces:

$$f_{(u,v)}(u,v) = f_{(A,B)}(g(u,v)) \cdot |J_g| \cdot I_C(g(u,v))$$ Siendo C el conjunto donde se mueven los parámetros, que en este caso es $C=(0,\infty)\times(0,\infty)$.

Por tanto,

$$f_{(u,v)}(u,v) = f_{(A,B)}\left(v, \frac{v}{u}\right) \cdot \frac{|v|}{u^2} \cdot I_C\left(v, \frac{v}{u}\right) =$$

$$= f_A(v) \cdot f_B\left(\frac{v}{u}\right) \cdot \frac{|v|}{u^2} \cdot I_{C'}(u,v)$$

$\uparrow$ $(X_1 \cdots X_{n_1}), (Y_1 \cdots Y_{n_2})$ poblaciones independientes.

Donde $C'=(0,\infty)\times(0,\infty)$ que es la imagen de C según la transformación planteada.

Como $A \sim Gamma(\lambda_1, n_1)$

$$\Rightarrow f_A(a) = \frac{\lambda_1^{n_1}}{\Gamma(n_1)} \cdot e^{-\lambda_1 a} a^{n_1-1} \quad a>0 \quad \text{(para } B \text{ es análogo)}$$

se tiene que

$$f_{(u,v)}(u,v) = \left(\frac{\lambda_1^{n_1}}{\Gamma(n_1)} e^{-\lambda_1 v} v^{n_1-1}\right) \cdot \left(\frac{\lambda_2^{n_2}}{\Gamma(n_2)} e^{-\lambda_2 \frac{v}{u}} \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^{n_2-1}\right) \cdot \frac{v}{u^2} \quad \text{con } u,v>0.$$

Como nos interesa sólo la distribución de $U = \frac{A}{B}$, marginalizamos:

$$f_u(u) = \int_0^\infty f_{(u,v)}(u,v)\,dv = \int_0^\infty \frac{\lambda_1^{n_1}}{\Gamma(n_1)} e^{-\lambda_1 v} v^{n_1-1} \frac{\lambda_2}{\Gamma(n_2)} e^{-\lambda_2 \frac{v}{u}} \left(\frac{v}{u}\right)^{n_2-1} \frac{v}{u^2}\,dv =$$

$$= \frac{\lambda_1^{n_1}}{\Gamma(n_1)} \cdot \frac{\lambda_2^{n_2}}{\Gamma(n_2)} \cdot \frac{1}{u^{n_2+1}} \cdot \frac{\Gamma(n_2+n_1)}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}\right)^{n_2+n_1}} \int_0^\infty \frac{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}\right)^{n_2+n_1}}{\Gamma(n_2+n_1)} e^{-v\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}\right)} v^{n_1+n_2-1}\,dv =$$

$$= \frac{\lambda_1^{n_1} \lambda_2^{n_1}}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \cdot \frac{1}{u^{n_2+1}} \cdot \frac{\Gamma(n_2+n_1)}{\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}\right)^{n_2+n_1}} \quad \text{con } u>0.$$