Problemas de Optimización

1. Obtener los puntos de Karush-Kuhn-Tucker para los siguientes problemas:

   (a)
$$\begin{array}{lll} \min & 2x-y & \\ s.a & -x^2+y & \leq 0 \\ & (x-1)^2+y-5 & \leq 0 \\ & -y & \leq 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{lll} \max & 2x-y & \\ s.a & -x^2+y & \leq 0 \\ & (x-1)^2+y-5 & \leq 0 \\ & -y & \leq 0 \end{array}$$

   (c)
$$\begin{array}{lll} \min & x^2+\frac{1}{2}y^2 & \\ s.a & x-y & \geq 0 \\ & x+y & \leq 0 \\ & x & \leq 0 \end{array}$$

   (d)
$$\begin{array}{lll} \min & x+2y & \\ s.a & 2x+3y & \geq 6 \\ & x & \geq 0 \\ & y & \geq 0 \end{array}$$

2. Sea un problema de programación no lineal con restricciones donde función objetivo y restricciones son diferenciables. Demostrar si es verdadero o encontrar un contraejemplo si es falso para las siguientes afirmaciones:

   (a) Cualquier mínimo local factible es necesariamente un punto de Karush-Kuhn-Tucker.

   (b) Un punto de Karush-Kuhn-Tucker es necesariamente un mínimo local factible.

3. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ s.a & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1,...,m \end{array}$$

   Sea $\mathbf{x}_0$ un mínimo local y sea $I(\mathbf{x}_0)$ el conjunto de restricciones activas para este punto. Supongamos que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, $g_i, i \in I(\mathbf{x}_0)$ son diferenciables y cóncavas en $\mathbf{x}_0$, y que $g_i, i \notin I(\mathbf{x}_0)$ son continuas en $\mathbf{x}_0$. Demostrar que

$$F(\mathbf{x}_0) \cap G'(\mathbf{x}_0) = \emptyset,$$

   donde $G'(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{d} : \nabla g_i \mathbf{x}_0^t \mathbf{d} \leq 0, \forall i \in I(\mathbf{x}_0)\}$.

4. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ s.a & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, ..., m \end{array}$$

Sea $\mathbf{x}_0$ un punto factible y sea $I(\mathbf{x}_0)$ el conjunto de restricciones activas para este punto. Supongamos que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, $g_i, i \in I(\mathbf{x}_0)$ son diferenciables y cóncavas en $\mathbf{x}_0$, y que $g_i, i \notin I(\mathbf{x}_0)$ son continuas en $\mathbf{x}_0$. Consideremos el problema

$$\begin{array}{lll} \min & \nabla f(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{d} & \\ s.a & \nabla g_i(\mathbf{x}_0)^t \mathbf{d} \leq 0, & i \in I(\mathbf{x}_0) \\ & -1 \leq d_j \leq 1 & j = 1, ..., n \end{array}$$

Sea $\mathbf{d}_0$ la solución óptima de este problema y z_0 el correspondiente valor de la función objetivo.

(a) Demostrar que $z_0 \leq 0$.

(b) Demostrar que si $z_0 < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0$ es factible y

$$f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0) < f(\mathbf{x}_0), \lambda \in (0, \delta).$$

(c) Demostrar que si $z_0 = 0$, entonces $\mathbf{x}_0$ cumple las condiciones de Fritz-John.