Hoja 0

Repaso de Combinatoria

Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Alfabeto:*

(a) *Supongamos un alfabeto de n letras. Determinar cuántas iniciales diferentes se pueden formar con dos letras.*

(b) *Determinar cuántas letras debería tener el alfabeto para que un millón de personas puedan ser identificadas mediante tres iniciales.*

(a) Para cada una de las letras de las iniciales (primera y segunda) disponemos de n letras distintas en nuestro alfabeto. Así, por cada una de las n primeras letras disponemos de n opciones para la segunda letra, haciendo un total de $n \cdot n = n^2$ (variaciones con repetición de n elementos – letras – tomados de 2 en 2).

(b) Siguiendo la argumentación del apartado anterior, si dispusiéramos de n letras en nuestro alfabeto, habría n^3 posibles iniciales distintas con tres letras. Buscamos poder identificar a 10^6 personas (un millón) de forma unívoca, luego necesitamos que $n^3 \geq 10^6$. Esto se verifica si $n \geq 100$.

Ej. 2. *Determinar cuántos números de tres cifras pueden tenerse si se emplean sólo cifras impares. Calcular cuántos de estos números son menores que 500.*

El conjunto de cifras impares es $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, por tanto disponemos de cinco dígitos para cada una de las tres cifras de los números buscados. De esta forma tenemos $5^3 = 125$ números distintos (variaciones con repetición de 5 elementos – cifras – tomados de 3 en 3).
Para que cualquiera de los números descritos anteriormente sea menor que 500 es necesario que la primera de sus cifras sea menor que 5, es decir, 1 ó 3. Así pues, la primera cifra podrá tomar únicamente dos valores frente a los cinco que pueden tomar la segunda y la tercera. De este modo podemos construir $2 \cdot 5^2 = 50$ números distintos.

Ej. 3. *Se eligen cinco bolas entre diez disponibles, siendo ordenadas en cinco cajas. Determinar de cuántas maneras distintas pueden colocarse.*

Es equivalente seleccionar las cinco bolas y luego distribuirlas entre las cajas que ir escogiendo una a una qué bola va a pararna cada caja. Empleando el segundo procedimiento es claro que disponemos de las 10 bolas para la primera elección. Para la segunda, disponemos sólo de 9 puesto que ya hemos usado una de ellas para la primera caja. Razonando de forma inductiva, concluimos que para la n-ésima caja disponemos de $10 - (n - 1)$ bolas. Por tanto, disponemos de un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{5!} = 30240$ posibilidades (variaciones sin repetición de 10 elementos – bolas – tomados de 5 en 5).

Ej. 4. *Calcular en cuántos subconjuntos de tres elementos de cinco posibles aparece un elemento específico.*

Fijado un elemento x de un conjunto de cinco elementos $\{x_1, \ldots, x_5\}$, restan cuatro elementos de entre los que escoger los dos elementos que lo acompañen. De esta forma hay $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ subconjuntos de tres elementos de cinco posibles en los que aparezca un elemento específico (combinaciones de 2 elementos tomados entre 4).

Ej. 5. *Se dispone de dos mesas para tres y seis personas. Calcular de cuántas formas pueden distribuirse nueve invitados.*

Dado que no se especifican las características de las mesas, podemos asumir que la distribución de los invitados en las mismas es irrelevante y que sólo nos interesa ver qué personas van a cada mesa. De esta forma debemos o bien elegir los invitados que irán a la mesa de tres o bien aquéllos que irán a la mesa de seis, dado que son operaciones complementarias. Así, tendremos $\binom{9}{3} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ de distribuir a los invitados (combinaciones de 3 ó 6 elementos – personas – tomados entre 9).

Ej. 6. *Demostrar la identidad* $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Recordemos la fórmula del Binomio de Newton $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i}$. Tomando $a = b = 1$ se obtiene el resultado: $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i\, 1^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Ej. 7. *Calcular de cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra "catarata".*

Disponemos de ocho letras en total, por lo que tenemos 8! maneras de ordenarlas (ordenación de 8 elementos – letras – sin repetición). Sin embargo, dos de las letras aparecen repetidas: cuatro veces la letra A y dos veces la letra T. Si dejamos fijas todas las letras menos las A permutándolas entre sí, obtenemos una y otra vez la misma ordenación de letras. Por tanto, resulta que hay un total de 4! formas equivalentes para cada ordenación a base de reordenar las cuatro letras A. De igual manera, concluimos que por cada ordenación posible hay 2! formas equivalentes reordenando las dos letras T. Resumiendo, existen $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$ ordenaciones posibles de las letras de la palabra "catarata" (ordenación con repetición de 8 elementos – letras – con un elemento repetido 4 veces y otro 2).

Ej. 8. *Calcular cuántas señales diferentes, cada una de seis banderas colocadas en una línea vertical, pueden formarse con cuatro banderas rojas idénticas y dos banderas azules idénticas.*

Razonando de forma análoga al ejercicio anterior, hay 6! maneras de colocar las seis banderas (cuatro rojas y dos azules) considerándolas todas distinguibles. Sin embargo, por cada una de ellas habrá 4! formas equivalentes debido a la repetición de banderas rojas y 2! debido a las azules. En total tendremos $\frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ señales diferentes (ordenación con repetición de 6 elementos – banderas – con un elemento repetido 4 veces y otro 2).

Ej. 9. *Si se dispone de cuatro grupos de individuos (tres americanos, cuatro franceses, cuatro daneses y dos italianos), calcular de cuántas formas posibles pueden sentarse en una fila de sillas cuando aquellos de igual nacionalidad se sientan correlativamente.*

Dado que cada grupo de individuos de igual nacionalidad se sientan correlativamente, podemos considerar en primer lugar calcular el número de ordenaciones posibles de las cuatro nacionalidades disponibles. Éstas serán 4! (ordenación de 4 elementos – nacionalidades – sin repetición). Por cada una de dichas ordenaciones, atendiendo a cada grupo de individuos de igual nacionalidad, tendremos distintas formas de sentar a dichos individuos. En particular, siguiendo el razonamiento anterior: 3! formas para los americanos, 4! para los franceses, 4! para los daneses y 2! para los italianos. Agregando todas estas apreciaciones, obtenemos $4!\cdot(3!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!) = 165888$ formas posibles de sentar a todos los individuos en una fila de sillas con aquellos de igual nacionalidad sentados correlativamente.

Ej. 10. *Calcular cómo pueden distribuirse nueve juguetes entre cuatro niños cuando el menor de éstos recibe tres juguetes y cada uno de los restantes recibe dos juguetes.*

Podemos pensar en ordenar los nueve juguetes y después proceder a ponerles una etiqueta con el nombre de cada niño: tres etiquetas para el menor y dos para los otros tres niños. Atendiendo al número de etiquetas, disponemos de 9! maneras de etiquetar los juguetes (ordenación de 9 elementos – etiquetas – sin repetición). Sin embargo habrá 3! maneras equivalentes de proceder con el etiquetado permutando las tres etiquetas idénticas del menor de los niños y 2! permutando cada grupo de etiquetas del resto de niños. En definitiva, tendremos $\frac{9!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 7560$ formas de distribuir los juguetes entre los niños (ordenación con repetición de 9 elementos – etiquetas – con un elemento repetido 3 veces y tres elementos repetidos 2).

Ej. 11. *Con las vocales "a, e, i, o, u" y las consonantes "b, c, d, f", calcular el número de palabras de nueve letras distintas que pueden formarse. Calcular este número cuando no hay vocales juntas.*

Disponemos únicamente de nueve letras distintas, por lo que para formar palabras de nueve letras debemos emplearlas todas. Así pues, podemos formar $9! = 362880$ palabras distintas (ordenación de 9 elementos – letras – sin repetición). Si nos restringimos a las palabras en que no hay vocales juntas, hemos de darnos cuenta de que necesariamente tendremos que ir intercalando vocales con consonantes de manera que las vocales ocuparán las letras impares de la palabra y las consonantes las letras pares. Sabiendo esto y aplicando el razonamiento anterior, nos basta con considerar de forma independiente la forma de ordenar el grupo de cinco vocales ($5!$) y el grupo de cuatro consonantes ($4!$), obteniendo un total de $5! \cdot 4! = 2880$ palabras distintas sin vocales correlativas.

Ej. 12. *Se rellena un test de doce ítems, donde las respuestas son "verdadero" y "falso". Se ha decidido contestar a seis ítems de forma aleatoria. Determinar el número de formas en que puede hacerse.*

Dividamos el problema en dos pasos. En primer lugar seleccionemos los seis ítems de entre los doce en que contestaremos aleatoriamente. Obtenemos así $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!}$ posibles selecciones (combinaciones de 6 elementos – ítems – tomados entre 12). El segundo paso será contestar dichos ítems arbitrariamente. Tenemos dos opciones para cada pregunta (V ó F), por lo que podemos hacerlo de 2^6 maneras (variaciones con repetición de 2 elementos – V ó F – tomados de 6 en 6). Entonces el cómputo total de posibles respuestas al test respondiendo aleatoriamente a seis ítems será $\frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot 2^6 = 59136$.

Ej. 13. *Calcular cuántos números naturales de cuatro cifras hay con todas las cifras diferentes.*

Puesto que buscamos números naturales de cuatro cifras, la primera de ellas no puede ser 0 y disponemos únicamente de nueve opciones para ésta. A partir de ahí, debemos completar las tres cifras restantes. Dado que recuperamos el 0 pero ya hemos usado uno de los otros dígitos, tenemos nueve dígitos disponibles. Así pues tenemos $\frac{9!}{6!}$ configuraciones para las tres últimas cifras (variaciones sin repetición de 9 elementos – dígitos – tomados de 3 en 3). De esta forma obtenemos $9 \cdot \frac{9!}{6!} = 4536$ números naturales de cuatro cifras con todas sus cifras diferentes.

Ej. 14. *Calcular cuántos números de tres cifras pueden formarse con los dígitos "1, 3, 5, 7 y 9". Calcular cuánto suman todos ellos.*

La primera parte ya se abordó en el ejercicio 2, de forma que ya sabemos que hay 125 números de tres cifras con cifras impares. Para la segunda parte, démonos cuenta de que todos los dígitos aparecerán el mismo número de veces en cada una de las tres cifras. Esto es, $\frac{125}{5} = 25$ veces. Si atendemos a la cifra de las centenas, cada dígito verá multiplicado su valor por $100 = 10^2$ y tendremos que la suma de las centenas de todos los números de tres cifras será $\sum_{i=1}^{5} 25 \cdot 10^2 \cdot (2i-1)$. De la misma forma podemos calcular la suma de las decenas y las unidades, por lo que la suma de todos los números será $\sum_{j=0}^{2} \sum_{i=1}^{5} 25 \cdot 10^j \cdot (2i-1) = 69375$.

Ej. 15. *Supongamos el conjunto de dígitos* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) *Calcular en cuántas ordenaciones de los elementos del conjunto aparecen el "1" y el "2" seguidos.*

(b) *Calcular en cuántas ordenaciones de los elementos del conjunto aparecen el "1" y el "2" ordenados.*

(a) Si los dígitos 1 y 2 aparecen seguidos, se comportan como un único elemento, por lo que habrá 5! formas de ordenarlos (ordenación de 5 elementos sin repetición). Sin embargo, para cada una de dichas ordenaciones debemos distinguir aquéllas en las que el 1 aparece primero de las que el 2 lo hace. Por tanto, el número total de ordenaciones posibles es $5! \cdot 2 = 240$.

(b) Que aparezcan ordenados los dígitos 1 y 2 en el conjunto no es nada más ni nada menos que incluyamos el 1 antes que el 2, pese a elementos intermedios. Esto es una situación dicotómica, o bien están ordenados o bien no lo están, y ocurrirá en la mitad de todas las ordenaciones posibles de los seis elementos, que son 6! de forma análoga al apartado anterior. Así pues, tendremos un total de $\frac{6!}{2} = 360$ ordenaciones posibles.

Ej. 16. *Capicúas:*

(a) *Calcular la cantidad de números de tres cifras que son capicúas.*

(b) *Análogo en el caso de números de cinco cifras.*

(a) Puesto que buscamos números naturales de tres cifras, la primera de ellas no puede ser 0 y disponemos únicamente de nueve opciones para ésta. A partir de ahí, debemos completar las dos cifras restantes, pero está claro que la tercera coincide con la primera y está unívocamente determinada. Así que sólo debemos contemplar cuántas opciones hay para la segunda. Dado que recuperamos el 0, tenemos los diez dígitos disponibles. Así pues tenemos $9 \cdot 10 = 90$ números de tres cifras capicúas.

(b) Razonando de forma análoga al apartado anterior, las últimas dos cifras del número vienen determinadas por las primeras dos y, además, no podemos utilizar el dígito 0 para la primera cifra. Así pues, tenemos $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de cinco cifras capicúas.

Ej. 17. *Determinar cuántas soluciones tiene la ecuación $x + y + z = 8$ con x, y, z enteros mayores que cero. Generalizar el resultado para $x_1 + \ldots + x_k = n$.*

Podemos representar el número 8 como ocho unidades: *uuuuuuuu*. Dar una solución a la ecuación será entonces introducir dos signos + entre dichas unidades u. Por ejemplo, $uuu + uu + uuu$ se reinterpretaría como la solución $x = 3$, $y = 2$, $z = 3$. El número de soluciones se corresponde por tanto con elegir dos de los siete huecos entre las ocho unidades para poner el signo aditivo. En total serán $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ soluciones enteras positivas (combinaciones de 2 elementos tomados entre 7). Generalizando el resultado, debemos colocar $k - 1$ signos + en $n - 1$ huecos disponibles, luego encontramos $\binom{n-1}{k-1}$ soluciones con enteros mayores que cero.

Ej. 18. *Para transmitir señales desde una isla a la costa, se dispone de 6 luces blancas y 6 luces rojas colocadas en los vértices de un hexágono. En cada vértice no puede haber encendida más que una luz (blanca o roja) y el número de luces encendidas es tres. Determinar cuántas señales se pueden realizar.*

Asumiendo que hay k luces encendidas, entonces tenemos 2^k permutaciones posibles de sus colores (variaciones con repetición de 2 elementos – V ó F – tomados de k en k). Además, tenemos $\binom{6}{k}$ selecciones posibles de los vértices del hexágono para dichas luces (combinaciones de k elementos tomados entre 6). Por tanto, hay $\binom{6}{k} 2^k$ señales posibles con k luces encendidas. Dado que mínimo debe haber tres luces encendidas, en total tenemos $\sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 2^k = 656$ señales posibles.