# TEMAS 3 Y 4:
# CONJUNTOS, FUNCIONES Y RELACIONES.
# TERCERA PARTE

David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

Las funciones son un tipo especial de relaciones en las que a cada elemento de una cierta colección se le pone en correspondencia con un **único** objeto de la misma u otra colección. al que se conoce como su imagen. El hecho de que la imagen de cada objeto sea única es esencial.

DEF:

*Una relación $n+1$-ádica $f \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$ es una* **función parcial** *($n$-ádica, $n$-aria o de $n$ argumentos) de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ en $B$, si para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in dom(f)$ existe un único $y \in B$ tal que $(x_1, \cdots, x_n, y) \in f$. En tal caso se dice que $f(x_1, \cdots, x_n)$ está definido, se escribe $f(x_1, \cdots, x_n) = y$, y se llama imagen o valor de $f$ en $(x_1, \cdots, x_n)$, al valor en cuestión $y$.*

**Ej:** $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad x\mathcal{R}y \equiv_{def} y = x^2$ es una función.
$dom(\mathcal{R}) = \mathbb{Z}$, y para cada $x \in dom(\mathcal{R}) \quad \exists! y \in \mathbb{Z}$ tal que $x\mathcal{R}y$ , a saber el valor (único) de $x^2$.

En cambio, $\mathcal{S} = \mathcal{R}^{-1}$ **no** es una función: $dom(\mathcal{S}) = ran(\mathcal{R})$ es el conjunto de los enteros que son cuadrados perfectos, pero para todo cuadrado perfecto $x \neq 0$, existen dos $y \in \mathbb{Z}$ tales que $x\mathcal{S}y$, a saber $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$.

**DEF:**

*Dada una* **función parcial** $f$ *de* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *en* $B$

- *El* **dominio** *de* $f$ *es*
$$dom(f) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \;/\; f(x_1, \cdots, x_n) \text{ está definida}\}$$
- *El* **rango** *de* $f$ *es*
$$ran(f) = \{f(x_1, \cdots, x_n) \in B \;/ (\, x_1, \cdots, x_n) \in dom(f)\}$$

**DEF:**

- *Se dice que $f$ es una función total de $X$ en $Y$, y se escribe $f : X \to Y$, si $dom(f) = X$ y $ran(f) \subseteq Y$.*
  **$(X \to Y)$** *denota el conjunto de todas las funciones totales de $X$ en $Y$.*
- *Cuando no sepamos si $f$ es total, diremos que es una función parcial de $X$ en $Y$, y escribiremos $f : X - \to Y$,*
  **$(X - \to Y)$** *denota el conjunto de todas las funciones parciales de $X$ en $Y$.*

**Obs:** Las funciones totales son un caso particular de las parciales.

**Ejs:**

1. $g : \mathbb{Z} - \to \mathbb{Q}, \quad g(n) = \frac{1}{n}, \quad dom(g) = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$
2. $d : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ distancia entre los puntos del plano $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, $\quad dom(d) = \mathbb{R}^4$.

**DEF:**

*Dada una función parcial $f$ de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ en $B$*

- *Si $n = 2$, $f$ se llama función binaria. Si $n = 1$, $f$ se llama función unaria.*
- *Si $A_i = B \ \ \forall i \ \ (1 \leq i \leq n)$, se dice que $f$ es una operación n-ádica sobre $B$ o que es una función interna de $B$.*

**Ejs:**

1. $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ operación binaria e interna sobre $\mathbb{R}$.
2. Dado un universo $\mathcal{U}$, la unión de conjuntos $\cup : \wp(\mathcal{U}) \times \wp(\mathcal{U}) \to \wp(\mathcal{U})$ es una operación binaria e interna sobre $\wp(\mathcal{U})$.

## Ley de igualdad entre funciones

Dadas dos funciones $f$ y $g$:

$$f = g \iff (dom(f) = dom(g)) \land (\forall x \in dom(f) \ [f(x) = g(x)])$$

Es decir, ambas están definidas sobre el mismo dominio y a cada objeto de su dominio le asignan la misma imagen, con independencia de cómo hayan sido definidas.

**Ejs:**

1. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = (x+2)(x-2).$
   $f$ y $g$ son funciones iguales.
2. $f, g : \mathbb{R} - \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2, \quad g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}.$
   $f$ y $g$ son funciones distintas: $dom(f) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \setminus \{-2\} = dom(g).$

## FUNCIONES ESPECIALES

1. Se llama función identidad sobre un conjunto $A$ a la relación $id_A$ de identidad sobre $A$.
   Si $A \subseteq B$, $id_A$ vista como relación en $A \times B$ se dice que actúa como aplicación de inclusión o inmersión de $A$ en $B$.
2. La relación vacía $\phi$ (conjunto vacío de pares ordenados) cumple:
   1. $\phi : \phi \to B, \quad dom(\phi) = \phi$
   2. $A \neq \phi, \quad \phi : A - \to B \quad (\phi \subseteq A \times B, dom(\phi) = \phi \subset A, \; ran(\phi) = \phi \subseteq B)$
   3. Si $A \neq \phi, \quad \phi : A - \to \phi \quad (\phi \subseteq A \times \phi, dom(\phi) = ran(\phi) = \phi)$
      En este caso no existe ninguna $f : A \to \phi$

## RESTRICCIÓN DE UNA FUNCIÓN

### DEF:

*Siendo $f$ una función y $A$ un conjunto tal que $A \subseteq dom(f)$, la restricción de $f$ a $A$ es la función $g$ con $dom(g) = A$ y $g(x) = f(x)$ $\forall x \in A$.*

**Notación:** $g = f \upharpoonright A$, *o bien* $g = f\,|_A$.

**Ej.:** $f, g : \mathbb{R} - \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x - 2$, $\quad g(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.

$f\,|_{\mathbb{R}\setminus\{-2\}} = g\,|_{\mathbb{R}\setminus\{-2\}}$, con $f\,|_{\mathbb{R}\setminus\{-2\}}, g\,|_{\mathbb{R}\setminus\{-2\}} : \mathbb{R} \setminus \{-2\} - \to \mathbb{R}$ .

**DEF:**

*Siendo* $f : A \dashrightarrow B$, $g : B \dashrightarrow C$ *, su composición, que denotamos por* $f \circ g$*, es la función* $f \circ g$: $A \dashrightarrow C$*, definida por:*

- $dom(f \circ g) = \{x \in dom(f) \ / \ f(x) \in dom(g)\}$
- $\forall x \in dom(f \circ g) \quad f \circ g(x) = g(f(x))$
- $ran(f \circ g) = ran(g \mid_{ran(f) \cap dom(g)})$

**Prop.** Dadas las funciones $f : A \dashrightarrow B$, $g : B \dashrightarrow C$ y $h : C \dashrightarrow D$, se tiene:

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (Asociatividad)
2. $id_A \circ f = f \circ id_B = f$ (Las funciones identidad son elementos neutros respecto a $\circ$)

**Ej.** $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = x - 2, \;\; g(x) = 2 \cdot x, \;\; h(x) = x^2$

$$f \circ g(x) = g(f(x)) = g(x-2) = 2 \cdot (x-2) = 2 \cdot x - 4$$

$$g \circ f(x) = f(g(x)) = f(2 \cdot x) = 2 \cdot x - 2$$

(La composición de funciones no es conmutativa)

$$g \circ h(x) = h(g(x)) = h(2 \cdot x) = (2 \cdot x)^2 = 4 \cdot x^2$$

$$(f \circ g) \circ h(x) = h(2 \cdot x - 4) = (2 \cdot x - 4)^2 = 4 \cdot x^2 + 16 - 16 \cdot x$$

$$f \circ (g \circ h)(x) = g \circ h(x-2) = 4 \cdot (x-2)^2 = 4 \cdot x^2 + 16 - 16 \cdot x$$

**Def:**

*La **inversa** de una función parcial $f$ de $A$ en $B$, si existe, se denota por $f^{-1}$ y es la función parcial de $B$ en $A$ tal que $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$.*

**Obs.:** Sólo existirá tal función inversa si para cada $y \in ran(f)$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

**Ej.:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 2$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = y + 2$

**Def:**

*Dada una función parcial $f$ de $A$ en $B$, definimos la imagen de un conjunto $S \subseteq A$ mediante la función $f$, como el conjunto $f(S) = \{f(x) \in B / x \in dom(f) \cap S\}$ ;
y la imagen inversa de un conjunto $T \subseteq B$ mediante la función $f$ como el conjunto $f^{-1}(T) = \{x \in dom(f) / f(x) \in T\}$.*

**Ej.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$, $S = \{0, 2, 4\}$

$$f(S) = \{-2, 0, 2\}$$

$$f^{-1}(S) = \{2, 4, 6\}$$

### Def:

*Dada una función parcial $f$ de $A$ en $B$, decimos que es*

- *inyectiva si para todo $x, y \in dom(f)$, si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$, o lo que es lo mismo, si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.*
- *sobreyectiva o suprayectiva si $ran(f) = B$, es decir, si para cada $y \in B$ existe algún $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*
- *biyectiva si y sólo si es* **total**, *inyectiva y suprayectiva.*

**Prop.:** $f$ es inyectiva si y sólo si existe su inversa $f^{-1}$.

**Ejs.**

1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(x) = x^2.$

No es inyectiva: $f(-1) = f(1) = 1$ y por tanto, tampoco es biyectiva.
No es suprayectiva: $\nexists y \in \mathbb{Z}$ tal que $y^2 = 2$.

2) $id_{\mathbb{N}}$ es biyectiva.

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$,

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Es suprayectiva pero no inyectiva, luego no es biyectiva:

No es inyectiva: $f(0) = f(1) = 0$.

Es sobreyectiva: $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = z$.

Para $z \in \mathbb{Z}$ distinguimos dos casos:

- Si $z \geq 0$, entoces $n = 2z$ es un número par perteneciente a $\mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = f(2z) = \frac{2z}{2} = z.$$

- Si $z < 0$, entonces $-2z > 0$ y $n = -2z + 1$ es un número impar perteneciente a $\mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = f(-2z+1) = \frac{1-(-2z+1)}{2} = z.$$

**Prop.**

1. Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces $f^{-1} : B \to A$ también es biyectiva.
2. Sean $f : A \to B, g : B \to C$
   1. Si $f$ y $g$ son inyectivas entonces $f \circ g$ es inyectiva
   2. Si $f$ y $g$ son sobreyectivas entonces $f \circ g$ es sobreyectiva
   3. Si $f$ y $g$ son biyectivas entonces $f \circ g$ es biyectiva

**Dem de 1.:**

- $f{:}A \to B$ biyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva $\Rightarrow f^{-1}$ función.
- $f{:}A \to B$ biyectiva $\Rightarrow f$ sobreyectiva $\Rightarrow dom(f^{-1}){=}ran(f){=}B \Rightarrow f^{-1}$ total
- $f^{-1}$ función total $\Rightarrow \forall y \in B,\ \exists! x \in A / f^{-1}(y){=}x \Rightarrow f^{-1}{:}B \to A$ inyectiva ya que $(f^{-1}(y) = f^{-1}(z) = x) \Rightarrow (y = z = f(x))$, por ser $f$ función
- $f^{-1}$ es sobreyectiva:
  $x \in A \quad \Rightarrow \exists y \in B$ tal que $y = f(x) \qquad (dom(f) = A,$ por ser $f$ total$)$
  $\qquad\quad \Rightarrow \exists y \in B$ tal que $f^{-1}(y) = x.$

**Def:**

*Dado un conjunto $C$ se llaman:*

- *sucesiones de elementos de $C$ a las funciones con perfil $s : \mathbb{N} \longrightarrow C$ y se suele escribir $s_i$ en lugar de $s(i)$, para denotar la imagen de $i$ por $s$.*
- *sucesiones finitas de elementos de $C$ de longitud $n$ a las funciones con perfil $s : \mathbf{n} \longrightarrow C$ donde $\mathbf{n} = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$.*
  *(En particular, $\mathbf{0} = \phi$).*

## Def:

*Dado un alfabeto $A$, que simplemente es un conjunto cualquiera, a cuyos elementos en este contexto se les suele llamar símbolos, definimos:*

- $A^* = \{$*sucesiones finitas de elementos de A de cualesquiera longitudes*$\}$.
  *A los elementos de* $A^*$ *se les llama palabras sobre el alfabeto A.*
  *Cada palabra* $u \in A^*$ *es una sucesión finita* $u = \langle u_0, u_1, \cdots, u_{n-1} \rangle$ *de una cierta longitud n y habitualmente se escribe* $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$.
  *Si la longitud es 0 tenemos la palabra vacía que denotamos por* $\epsilon$ *y se corresponde con la única función* $\epsilon : \mathbf{0} \longrightarrow A$.
- $A^+ = A^* \setminus \{\epsilon\}$ *(conjunto de todas las palabras no vacías sobre el alfabeto A)*