Juan Carlos Llamas Núñez

Tercera entrega

Ejercicio 1.- Sea $(X_1 \dots X_{25})$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu, \sigma = 5)$. Si la región de rechazo para contrastar $H_0: \mu = 12$ frente a $H_1: \mu = 15$ es $R = \{(x_1 \dots x_{25}) \mid \bar{x} \geq 14\}$, determinar

a) La probabilidad de cometer un error de tipo I

b) La probabilidad de cometer un error de tipo II

c) La función de potencia

d) El tamaño del test

e) El p-valor cuando observamos $\bar{x} = 13{,}75$. En función del resultado, ¿debemos rechazar H_0?

---

a) Cometer un error de tipo I es rechazar la hipótesis nula siendo cierta. En un caso más general, si $H_0: \theta \in \Theta_0$, $H_1: \theta \in \Theta_1$ esta probabilidad es

$$P(R \mid \theta \in \Theta_0).$$

En nuestro caso, la probabilidad de cometer un error de tipo I es

$$P\{\bar{X} \geq 14 \mid \mu = 12\} = P\left\{\frac{\bar{X}-12}{5/\sqrt{25}} \geq \frac{14-12}{5/\sqrt{25}} \,\Big|\, \mu = 12\right\} \underset{\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma = \frac{5}{\sqrt{25}}\right)}{=}$$

$$= P\{Z \geq 2\} = \boxed{0{,}0228}$$

b) Cometer un error de tipo II es no rechazar la hipótesis nula siendo esta falsa. La probabilidad de este suceso, en un caso general, es $P(\Omega \setminus R \mid \theta \in \Theta_1)$ siendo Ω el espacio muestral.

En nuestro caso

$$P\{\bar{X} < 14 \mid \mu = 15\} = P\left\{ \frac{\bar{X}-15}{5/\sqrt{25}} < \frac{14-15}{5/\sqrt{25}} \middle| \mu = 15 \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{X} \sim N(\mu, \frac{5}{\sqrt{25}})}}{=}$$

$$= P\{Z < -1\} = P\{Z > 1\} = \boxed{0{,}1587}$$

c) La función de potencia es

$$\boxed{\Pi(\mu)} = P(R \mid \mu) = P_\mu(\bar{X} \geq 14) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{5/\sqrt{25}} \geq \frac{14-\mu}{5/\sqrt{25}} \middle| \mu \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{X} \sim N(\mu, \frac{5}{\sqrt{25}})}}{=}$$

$$= P\{Z \geq 14-\mu\} = \begin{cases} 0{,}028 & \text{si } \mu = 12 \\ 1 - P\{Z < -1\} & \text{si } \mu = 15 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0{,}028 & \text{si } \mu = 12 \\ 1 - 0{,}1587 & \text{si } \mu = 15 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0{,}028 & \text{si } \mu = 12 \\ 0{,}8413 & \text{si } \mu = 15 \end{cases}}$$

Nótese que como se está realizando un contraste de hipótesis nula puntual frente a alternativa puntual ($H_0: \theta = \theta_0$ frente a $H_1: \theta = \theta_0$), la función de potencia es la probabilidad de cometer un error de tipo I si $\theta = \theta_0$ y 1 menos la probabilidad de cometer un error de tipo II si $\theta = \theta_1$.

d) El tamaño del test es α si $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \{P_\theta(R)\}$

En nuestro caso $\Theta_0 = \{12\}$

y $\sup_{\mu=12} \{P_\mu(\bar{X} > 14\} = P(\bar{X} > 14 | \mu = 12) = \boxed{0,0228}$, que es la probabilidad de cometer un error de tipo I.

e) Si tomamos una muestra observada $(x_1 \ldots x_{25})$ con $\bar{x} = 13,75$

$$p(x_1 \ldots x_{25}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \{ P_\theta \{ T(X_1 \ldots X_{25}) \geq T(x_1 \ldots x_n) \} \} =$$

$$= \sup_{\mu=12} \{ P_\mu \{ \bar{X} \geq 13,75 \} \} = P\{ \bar{X} \geq 13,75 | \mu = 12 \} =$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X} - 12}{5/\sqrt{25}} \geq \frac{13,75 - 12}{5/\sqrt{25}} \middle| \mu = 12 \right\} \underset{\bar{X} \sim N(\mu, 5/\sqrt{25})}{=}$$

$$= P\{ Z \geq 1,75 \} = \boxed{0,0401}$$

Como se tiene que el p-valor es mayor que el tamaño del test, la muestra observada $(x_1 \ldots x_{25})$ pertenece a la región de aceptación por lo que no se rechaza la hipótesis nula.

Ejercicio 2: Para contrastar si un instrumento de medida es suficientemente preciso, se supone que el error cometido en la medición es una variable aleatoria $X \sim N(0, \sigma^2)$. El instrumento es aceptable si $\sigma^2 < \sigma_0^2$ donde σ_0^2 es conocido. Como queremos estar seguros de esta afirmación realizamos el contraste $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$. Si $(X_1, X_2, \dots X_n)$ es una m.a.s. de $X \sim N(0, \sigma^2)$, hallar el test UMP de tamaño α. ¿Cuál es el p-valor del contraste?

— × — × — × —

Como realizamos un contraste unilateral de hipótesis nula simple frente a alternativa simple buscamos aplicar el Teorema de Karlin-Rubin, que nos da el test UMP. Para ello, primero necesitamos saber si hay algún estadístico $T(X_1 \dots X_n)$ para el cual el modelo tenga razón de verosimilitudes monótona. Como el modelo es el normal, y sabemos que pertenece a la familia exponencial, basta comprobar si $q(\theta)$ es monótona.

$$f(x_1 \dots x_n | \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - 0)^2}{\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por tanto

$$c(\sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \qquad t_1(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$h(x_1 \dots x_n) = 1 \qquad q_1(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

Como la función $q_1(\sigma^2)$ es creciente en $\sigma^2 > 0$ $\left(q_1'(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4} > 0\right)$ se tiene que el modelo tiene razón de verosimilitudes monótona creciente para el estadístico $T(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

El Teorema de Karlin-Rubin nos dice que el test UMP para contrastar $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ es

$$\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x_1 \cdots x_n) \leq K \\ 0 & \text{si } T(x_1 \cdots x_n) > K \end{cases} \quad \text{con}$$

$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta[\phi(X_1 \dots X_n)]$ el tamaño.

En nuestro caso esto se traduce en

$$\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq K \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 > K \end{cases} \quad \text{con } \alpha = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(X_1 \cdots X_n)]$$

$$\sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{E_{\sigma^2}[\phi(X_1 \cdots X_n)]\} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{P_{\sigma^2}\{\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq K\}\} =$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{P\{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \leq \frac{K}{\sigma^2} \mid \sigma^2\}\} \underset{\uparrow}{=}$$

$\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ por ser $X_i \sim N(0, \sigma)$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \{F_{\chi_n^2}(\frac{K}{\sigma^2})\}.$$

Como $F_{\chi_n^2}$ es una función creciente, alcanza el máximo en un conjunto en el supremo del conjunto, es decir, en el máximo de $\{\frac{K}{\sigma^2} \mid \sigma^2 \geq \sigma_0^2\}$. Este cociente es máximo cuando el denominador es mínimo, es decir, cuando $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Por tanto $\alpha = F_{\chi_n^2}(\frac{K}{\sigma_0^2})$.

En consecuencia, $\frac{K}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n;1-\alpha}$ con $F_{\chi^2_n}(\chi^2_{n;1-\alpha}) = \alpha$

En resumen, el test de hipótesis UMP es:

$$\boxed{\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 > \sigma_0^2 \chi^2_{n;1-\alpha} \end{cases}}$$

El p-valor para una muestra observada $(x_1 \dots x_n)$

$$\boxed{p(x_1 \dots x_n)} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ P_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right\} = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ P_{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \right) \right\}$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} \left\{ F_{\chi^2_n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \right) \right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mismo razonamiento.}}}{=} \boxed{F_{\chi^2_n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma_0^2} \right)}$$

Ejercicio 3.- Sea $(X_1 \dots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Hallar el contraste de razón de verosimilitudes de tamaño α para contrastar $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Para ello, lo primero que tenemos que hacer es calcular

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} \{ f(x_1 \dots x_n | \theta) \}}{\sup_{\theta \in \Theta} \{ f(x_1 \dots x_n | \theta) \}}$$

En nuestro caso $\Theta_0 = [0, \sigma_0^2]$ y $\Theta_1 = (\sigma_0^2, \infty)$ con $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Vamos a calcular la función de verosimilitud

$$L(\sigma^2 | x_1 \dots x_n) = f(x_1 \dots x_n | \sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - 0)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Para maximizar esta función en σ^2 recurrimos a la función soporte

$$\ell(\sigma^2 | x_1 \dots x_n) = Ln(L(\sigma^2|x_1 \dots x_n)) = -\frac{n}{2} Ln(2\pi) - \frac{n}{2} Ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma^2}$$

Ahora

$$\ell'(\sigma^2|x_1 \dots x_n) = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2(\sigma^2)^2} = \frac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2(\sigma^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \geq 0$$

Para comprobar que es un máximo volvemos a derivar.

$$\ell''(\sigma^2|x_1 \dots x_n) = \frac{1}{2}\,\frac{-n(\sigma^2)^2 - \left(-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) 2\sigma^2}{(\sigma^2)^4}$$

$$\ell''\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} \Big| x_1 \dots x_n\right) = \frac{1}{2}\,\frac{-n\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)^2 - \left(\overbrace{\cancel{-\sum x_i^2 + \sum x_i^2}}^{0}\right) 2\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)}{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)^4} =$$

$$= -\frac{n}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)^2} < 0$$

Efectivamente, es un máximo y

$$\sup_{\sigma^2 > 0}\{f(x_1 \dots x_n|\sigma^2)\} = L\left(\frac{\sum x_i^2}{n} \Big| x_1 \dots x_n\right) = \left(\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\frac{\sum x_i^2}{n}}} =$$

$$= \left(\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}$$

Como $L(\sigma^2|x_1 \dots x_n)$ es creciente en $\sigma^2 \in \left(0, \frac{\sum x_i^2}{n}\right)$

se tiene que

$$\sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \{f(x_1 \dots x_n|\sigma^2)\} = \begin{cases} L\left(\frac{\sum x_i^2}{n} \Big| x_1 \dots x_n\right) & \text{si } \sigma_0^2 \geq \frac{\sum x_i^2}{n} \\ L(\sigma_0^2|x_1 \dots x_n) & \text{si } \sigma_0^2 < \frac{\sum x_i^2}{n} \end{cases}$$

Por tanto $\lambda(x_1 \dots x_n)$ queda como

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2}\{f(x_1 \dots x_n|\sigma^2)\}}{\sup_{\sigma^2 > 0}\{f(x_1 \dots x_n|\sigma^2)\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum x_i^2}{n} \leq \sigma_0^2 \\ \dfrac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_0^2}}}{\left(\frac{n}{2\pi \sum_{i=1}^n x_i^2}\right)^{n/2} e^{-n/2}} & \text{si } \frac{\sum x_i^2}{n} > \sigma_0^2 \end{cases}$$

Simplificando

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\sum x_i^2}{n} \leq \sigma_0^2 \\ \left(\frac{\sum x_i^2}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \sigma_0^2\right)} & \text{si } \frac{\sum x_i^2}{n} > \sigma_0^2 \end{cases}$$

Si denotamos por $t(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ nos damos cuenta que

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = f(t(x_1 \dots x_n))$$

$$\text{con } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq n\sigma_0^2 \\ \left(\frac{t}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(t - n\sigma_0^2)} & \text{si } t > n\sigma_0^2 \end{cases}$$

Podemos analizar esta función para ver que está sucediendo

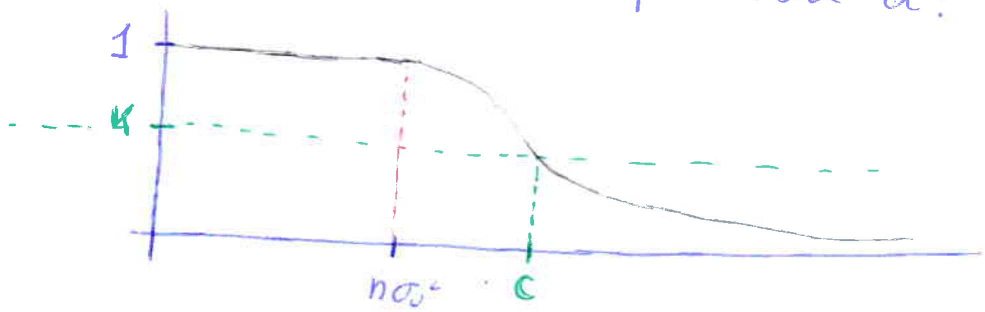
$$f'(t) = \frac{n}{2}\left(\frac{t}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2 - 1} \frac{1}{n\sigma_0^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(t - n\sigma_0^2)} + \left(\frac{t}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(t - n\sigma_0^2)} \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sigma_0^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(t-n\sigma_0^2)} \left(\frac{t}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2-1} \left(1 - \frac{t}{n\sigma_0^2}\right) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t = 0 \text{ o } t = n\sigma_0^2$$

Como estamos en la zona $t > n\sigma_0^2$ se puede comprobar que $t = n\sigma_0^2$ es un máximo y la representación de $f(t)$ es parecida a:



La región de rechazo según el test de razón de verosimilitudes viene dada por $R = \{(x_1 -- x_n) \mid \lambda(x_1 -- x_n) \leq K\}$ lo que equivale a $R = \{(x_1 -- x_n) \mid f(t(x_1 -- x_n)) \leq K\} = \{(x_1 -- x_n) \mid t(x_1 -- x_n) \geq c\}$

Esta última igualdad se da porque, como se puede ver en la figura, f es decreciente en t.

Por tanto, el test de hipótesis resulta ser:

$$\phi(x_1 -- x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum x_i^2 \geq c \\ 0 & \text{si } \sum x_i^2 < c \end{cases}$$ con c tal que

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(X_1 -- X_n)].$$

$$\sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(X_1 -- X_n)] = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 \geq c\right] =$$

$$= \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_1\left\{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2} \geq \frac{c}{\sigma^2} \Big| \sigma^2\right\} \underset{\uparrow}{=} \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} \left(1 - F_{\chi^2_n}\left(\frac{c}{\sigma^2}\right)\right) =$$

$\sum \frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ porque $X_i \sim N(0, \sigma^2)$

$$= 1 - \inf_{\sigma^2 \le \sigma_0^2} F_{\chi_n^2}\left(\frac{c}{\sigma^2}\right)$$

Ahora, como $F_{\chi_n^2}$ es una función creciente el ínfimo se alcanza cuando $\frac{c}{\sigma^2}$ es mínimo en $\sigma^2 \le \sigma_0^2$, es decir, cuando el denominador es máximo $(\sigma^2 = \sigma_0^2)$.

Por tanto

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \le \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(x_1 \dots x_n)] = 1 - F_{\chi_n^2}\left(\frac{c}{\sigma_0^2}\right) \quad \text{luego}$$

$$\frac{c}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n:\alpha} \quad \text{con} \quad F_{\chi_n^2}(\chi^2_{n:\alpha}) = 1 - \alpha$$

El test de hipótesis quedarra como

$$\boxed{\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \chi^2_{n:\alpha}\sigma_0^2 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 < \chi^2_{n:\alpha}\sigma_0^2 \end{cases}}$$

Ejercicio 4.- Dada una observación $X \sim f_\theta(x) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{(0,1)}(x)$ donde $\theta \in \Theta = [-1, 1]$, construir el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \theta = 0$ frente a $H_1 : \theta \neq 0$ de tamaño α

Primero hay que calcular $\lambda(x_1 \dots x_n)$ que será

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\theta = 0}\{f(x|\theta)\}}{\sup_{\theta \in [-1,1]}\{f(x|\theta)\}} = \frac{2 \cdot 0 x + 1 - 0}{\sup_{\theta \in [-1,1]}\{f(x|\theta)\}} I_{(0,1)}(x)$$

Si calculamos la función de verosimilitud,

$$L(\theta|x) = f(x|\theta) = 2\theta x + 1 - \theta$$

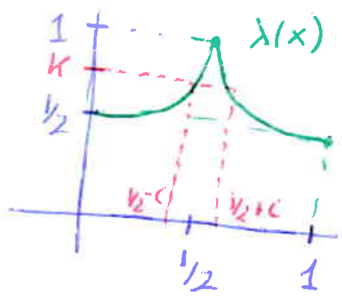
$$L'(\theta|x) = 2x - 1$$

- Si $x \in (0, \frac{1}{2})$ entonces $L'(\theta|x) < 0$ y como la función de verosimilitud es decreciente alcanzará su máximo en $\theta \in [-1,1]$ en el punto $\theta = -1$, con lo que $L(-1|x) = -2x + 2$
- Si $x = \frac{1}{2}$ entonces $L(\theta|x)$ es la función constante 1 que tiene un valor máximo en $\theta \in [-1,1]$ de $L(\theta|x) = 1$.
- Si $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ entonces $L'(\theta|x) > 0$ y como la función de verosimilitud es creciente en $\theta \in [-1,1]$, alcanzará su máximo en $\theta = 1$, con $L(1|x) = 2x$.

Por tanto $$\sup_{\theta \in [-1,1]} f(x|\theta) = \begin{cases} 2-2x & \text{si } x \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{si } x = 1/2 \\ 2x & \text{si } x \in (1/2, 1) \end{cases}$$

Entonces

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta=0} f(x|\theta)}{\sup_{\theta \in [-1,1]} f(x|\theta)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2x} & \text{si } x \in (0, 1/2) \\ 1 & \text{si } x = 1/2 \\ \frac{1}{2x} & \text{si } x \in (1/2, 1) \end{cases}$$



La región de rechazo del test de razón de verosimilitudes viene dada por $R = \{ x \mid \lambda(x) \leq k \} = (0, \frac{1}{2} - c] \cup [\frac{1}{2} + c, 1)$

con c por determinar para que $P(R \mid \theta = 0) = \alpha$.

Ahora $P(R \mid \theta = 0) = \int_0^{\frac{1}{2}-c} (2 \cdot 0x + 1 - 0) dx + \int_{\frac{1}{2}+c}^{1} (2 \cdot 0x + 1 - 0) dx =$

$= \frac{1}{2} - c + 1 - \cancel{\frac{1}{2}} - c = 1 - 2c = \alpha \iff c = \frac{1-\alpha}{2}$

Por tanto el test de hipótesis queda como

$$\boxed{\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \frac{\alpha}{2}] \cup [1 - \frac{\alpha}{2}, 1) \\ 0 & \text{si } x \in (\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}) \end{cases}}$$

Ejercicio 5: Sea $(X_1 \dots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1} I_{(0,1)}(x)$ donde $\theta \in \Theta = \{1, 2\}$. Para contrastar $H_0: \theta = 1$ frente a $H_1: \theta = 2$ se utiliza como distribución a priori la distribución uniforme. Calcular la distribución a posteriori e indicar la región de rechazo.

Como la distribución de θ es discreta se tiene que su distribución a priori es:

$P(\theta = 1) = 1/2$ y $P(\theta = 2) = 1/2$

Por tanto la distribución a posteriori es:

$$\pi(\theta=1 | x_1 \ldots x_n) = \frac{P(\theta=1)\cdot f(x_1 \ldots x_n|\theta=1)}{P(\theta=1)\cdot f(x_1 \ldots x_n|\theta=1) + P(\theta=2)\cdot f(x_1 \ldots x_n|\theta=2)} =$$

$$= \frac{1/2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta=1)}{1/2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta=1) + 1/2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta=2)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} 1\cdot x_i^0}{\prod_{i=1}^{n} 1\cdot x_i^0 + \prod_{i=1}^{n} 2\cdot x_i} =$$

$$= \frac{1}{1+2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Análogamente

$$\pi(\theta=2 | x_1 \ldots x_n) = \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{1+2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}$$

La región de rechazo es

$$R = \{(x_1 \ldots x_n) \mid \pi(\theta=1|x_1 \ldots x_n) < \pi(\theta=2|x_1 \ldots x_n)\}$$

La condición $\pi(\theta=1|x_1 \ldots x_n) < \pi(\theta=2|x_1 \ldots x_n)$ equivale a

$$\frac{1}{1+2^n \prod_{i=1}^{n} x_i} < \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{1+2^n \prod_{i=1}^{n} x_i} \iff 1 < 2^n \prod_{i=1}^{n} x_i \iff$$

$$\iff \frac{1}{2^n} < \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Esto es $\boxed{R = \{(x_1 \ldots x_n) \mid \frac{1}{2^n} < \prod_{i=1}^{n} x_i\}}$

Ejercicio 6.- Sea $(X_1 \dots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\theta, 1)$. Dada la distribución a priori $\pi(\theta) \sim N(0,1)$, contrastar $H_0 : \theta \geq 0$ frente a $H_1 : \theta < 0$.

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la distribución a posteriori de θ.

Sabemos que si $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ y $\theta \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$

entonces $\pi(\theta | x_1 \dots x_n) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

con $\mu_1 = \dfrac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \frac{n\bar{x}}{\sigma^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$ y $\sigma_1^2 = \dfrac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$

Para $\mu_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 1$ y $\sigma^2 = 1$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{n\bar{x}}{n+1} \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{n+1}$$

Ahora la región de rechazo viene dada por

$R = \{(x_1 \dots x_n) \mid P(\theta \geq 0) < P(\theta < 0)\}$ donde estas probabilidades se calculan mediante la distribución a posteriori:

$$P(\theta \geq 0) < P(\theta < 0) \Leftrightarrow P(\theta \geq 0) < \frac{1}{2}$$

$$P(\theta \geq 0) = P\left(\frac{\theta - \frac{n\bar{x}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \geq \frac{\frac{-n\bar{x}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \right) \underset{\theta \sim N\left(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)}{=} P\left(Z \geq \frac{-n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(-\frac{n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \Phi\left(\frac{-n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Esta última expresión equivale a $0 < -\frac{n\bar{x}}{\sqrt{n+1}}$

porque $\Phi = F_{N(0,1)}$ es una función creciente y $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

Por tanto $0 < -\frac{n\bar{x}}{\sqrt{n+1}} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i < 0$

En conclusión, la región de rechazo es:

$$\boxed{R = \{(x_1 \ldots x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i < 0\}}$$