Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

HOJA 2.3. - EJERCICIOS DE DIVISIBILIDAD Y PRIMALIDAD Curso 2018/2019

---

1. Demuestra que si a, b son números naturales impares se verifica que $2 \mid (a^2 + b^2)$.
2. Demuestra por inducción, indicando qué tipo de inducción utilizas, que para todo número natural n se cumple:
   a) $n^2 + 3n$ es múltiplo de 2
   b) $n^3 + 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6
3. Refuta la siguiente afirmación: *para todo par a, b de números naturales impares* $4 \mid (a^2 + b^2)$.
4. Sea $a \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $3 \mid a(2a^2 + 7)$.
5. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que al menos uno de ellos es distinto de 0. Demuestra que todo divisor común positivo de a y b es divisor del $mcd(a, b)$.
6. Calcula el mcd de 966 y 686 y exprésalo en la forma $966m + 686n$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, utilizando el algoritmo de Euclides extendido.
7. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_1$ y $d = mcd(a, b)$. Demuestra que la ecuación $ax + by = c$ (donde c es una constante entera) tiene solución entera para x, y, si y sólo si $d \mid c$.
8. Apoyándote en la demostración del ejercicio anterior, encuentra una solución entera para la ecuación $966x + 686y = 70$.
9. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $c \neq 0$. Probar que $c \mid ab$ implica $c \mid (mcd(a, c) * mcd(b, c))$.
10. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $mcd(a, b) = 1$. Demuestra que también $mcd(a + b, a) = 1$
11. Demuestra que $\forall n \in \mathbb{Z}$ los enteros $5n + 2$ y $7n + 3$ son primos entre sí.
12. Demuestra que si $n \geq 2$ y n no es primo, entonces debe existir un primo p tal que $p \mid n$ y $p^2 \leq n$.
13. Usa el resultado del ejercicio 12 para demostrar que si 467 no fuese primo, tendría un divisor primo $p \leq 19$. Concluye de ello que 467 es en efecto primo.
14. Demuestra que si $p, q \in \mathbb{Z}$ son primos distintos entonces $mcd(p, q) = 1$.
15. Recuerda que si p es primo y $x_1, x_2, \cdots x_n$ son enteros tales que $p \mid x_1 x_2 \cdots x_n$, entonces $p \mid x_i$ para algún $x_i (1 \leq i \leq n)$. ¿Sigue siendo esto cierto aunque p no sea primo?
16. Demuestra que si m, n, k son enteros que verifican $m \geq 2$, $n \geq 2$ y $m^2 = kn^2$, entonces k debe ser el cuadrado de un entero.
17. Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional, aplicando la unicidad de la descomposición en factores primos de cualquier número natural mayor que 1.
18. Calcula $a \in \mathbb{Z}$ tal que $m.c.m(8, a) = 56$ y $m.c.d(4, a) = 2$
19. Si el producto de dos enteros es $2^7 3^8 5^2 7^{11}$ y su mcd es $2^3 3^4 5$, calcula su mcm.