I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura .... Fecha ....

Alumno/a .... Curso........ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

5. Determinar el radio de convergencia de las series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$

$$\frac{(\log(n+1))^2}{\log(n)^2} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right)^2$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$ entonces si $a_n = (\log(n))^2$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Longrightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ y el radio de convergencia de la serie es $R = 1$, Es decir, la serie converge absolutamente $\forall z$, $|z|<1$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$

Sea $a_n = n! \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Por tanto $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ y $R = 0$, es decir, la serie solo es convergente en $z=0$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n+3n} (z-3)^n$

Sea $a_n = \frac{n^2}{4^n+3n} \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}+3(n+1)}}{\frac{n^2}{4^n+3n}} = \frac{(n^2+2n+1)(4^n+3n)}{n^2 4^{n+1} + 3n^3 + 3n^2} =$

$$= \frac{n^2 4^n + 3n^3 + 2n4^n + 6n^2 + 4^n + 3n}{n^2 4^{n+1} + 3n^3 + 3n^2} =$$

$$= \frac{1 + \frac{3n}{4^n} + \frac{2}{n} + \frac{6}{4^n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n4^n}}{4 + \frac{3n}{4^n} + \frac{3}{4^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

Por tanto, como $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4} \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}$ y el radio de convergencia es $R = 4$. La serie converge absolutamente $\forall z$ " $|z-3| < \frac{1}{4}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$

Sea $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^3}{(3n)!}} =$

$$= \frac{((n+1)n!)^3 \cdot (3n)!}{(3n+3)! \cdot (n!)^3} = \frac{(n+1)^3 \cdot \cancel{(n!)^3} \cdot \cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!} \cdot \cancel{(n!)^3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27}$$

Por tanto $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{27}$ y el radio de convergencia es $R = 27$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-2i)^n$

Sea $a_n = 2^n$. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|2^n|} = 2$

Por tanto $R = \frac{1}{2}$ y la serie converge absolutamente para todo z tal que $|z-2i| < \frac{1}{2}$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\operatorname{sen}^n(1+in)}$

Sea $a_n = \frac{1}{\operatorname{sen}^n(1+in)} \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\operatorname{sen}^n(1+in)}\right|}$

$= \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(1+in)}\right|^n} = \limsup \frac{1}{|\operatorname{sen}(1+in)|} =$

$= \limsup \left|\frac{2i}{e^{i(1+in)} - e^{-i(1+in)}}\right| = \limsup \frac{2}{|e^i e^{-n} - e^{-i} e^n|} = 0$

Por tanto $R = \infty$ y $\forall z \in \mathbb{C}$ la serie converge absolutamente

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1+2^n n^n} z^n$

Sea $a_n = \frac{n^n}{1+2^n n^n}$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{1+2^n n^n}\right|} = \frac{1}{2}$$

Por tanto el radio de convergencia de la serie es $R=2$, es decir, $\forall z$, $|z|<2$ la serie converge absolutamente

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{9} z^{2n}$

Consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{9} w^n$ con $a_n = \frac{n}{9}$

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{n}{9}} = 1$$

Por tanto $R=1$ para $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{9} w^n$, es decir,

la serie converge absolutamente $\forall w \in \mathbb{C}$ con $|w|<1$

Como $w = z^2$ la serie original converge $\forall z \in \mathbb{C}$ con

$$|z^2|<1 \iff |z|^2<1 \iff |z|<1$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n z^n$

Sea $a_n = (2+(-1)^n)^n$

$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|(2+(-1)^n)^n|} = \limsup \sqrt[n]{(|2+(-1)^n|)^n} =$

$= \limsup |2+(-1)^n| = 3 \implies R = \frac{1}{3}$

Por tanto la serie converge absolutamente $\forall z$ tal que $|z| < \frac{1}{3}$

$\boxed{6.-}$ El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es igual a R con $R \in (0, \infty)$. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$

$a_n = n^k c_n \implies \frac{1}{R'} = \limsup \sqrt[n]{|n^k c_n|} = \limsup \left((\sqrt[n]{n})^k \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \right) \underset{\uparrow}{=}$

$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k \cdot \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ $\qquad \exists \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$

$\implies R' = R$