6. Autómatas de pila

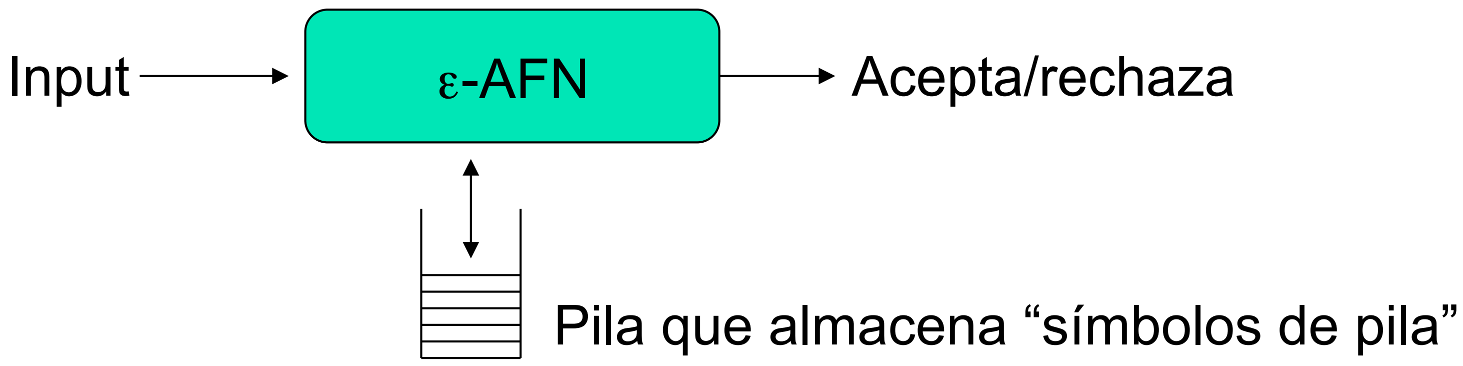
6.1. Autómatas de pila

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman
(http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

Autómatas de pila: los autómatas para los LIC

- ¿Qué es un autómata de pila (AP)?
  - Un AP es a un LIC…
  - …lo que un AF es para un lenguaje regular
- AP == [ε -AFN+ “una pila”]
- ¿Por qué una pila?



Autómata de pila - Definición

- Un AP es $P := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$:
  - Q: conjunto de estados
  - Σ: alfabeto
  - Γ : símbolos de pila
  - δ: función de transición
  - q_0: start state
  - Z_0: símbolo de pila inicial
  - F: estados finales

δ : La función de transición

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow$ conjuntos de $Q \times \Gamma^*$
- $\delta(q,a,X) = \{(p,Y), \ldots\}$ ← No determinismo

1. transición del estado p al estado q
2. a es el símbolo leido de la entrada
3. X el el símbolo en la *cima* de la pila
4. Y está en Γ^* (palabra de símbolos de pila)
   i. Si $Y = \varepsilon$: Desapila(X)
   ii. Si Y=X: la pila se deja como estaba
   iii. Si $Y=Z_1Z_2\ldots Z_k$: X se desapila y se sustituye por Y (Z_1 pasa a ser la cima de la pila)
   iv. Si Y=ZX Apila(Z)

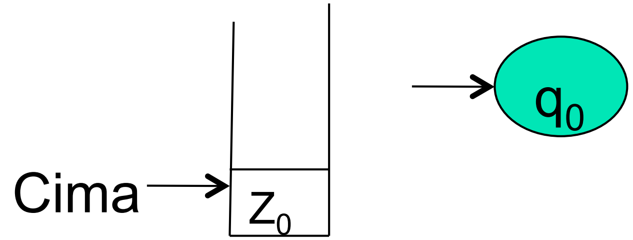
Ejemplo

Sea $L_{wwr} = \{ww^R \mid w \text{ en } (0+1)^*\}$

- GIC para L_{wwr} : $S \rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid \varepsilon$
- AP para L_{wwr} :
- $P := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

$= (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

Configuración inicial del AP:



PDA for L_{wwr}

1. $\delta(q_0,0, Z_0)=\{(q_0,0Z_0)\}$
2. $\delta(q_0,1, Z_0)=\{(q_0,1Z_0)\}$

Se apila el primer símbolo en la pila

3. $\delta(q_0,0, 0)=\{(q_0,00)\}$
4. $\delta(q_0,0, 1)=\{(q_0,01)\}$
5. $\delta(q_0,1, 0)=\{(q_0,10)\}$
6. $\delta(q_0,1, 1)=\{(q_0,11)\}$

La pila crece apilando más símbolos (parte de w)

7. $\delta(q_0, \varepsilon, 0)=\{(q_1, 0)\}$
8. $\delta(q_0, \varepsilon, 1)=\{(q_1, 1)\}$
9. $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0)=\{(q_1, Z_0)\}$

Pasamos al modo de desapilar (frontera entre w y w^R)

10. $\delta(q_1,0, 0)=\{(q_1, \varepsilon)\}$
11. $\delta(q_1,1, 1)=\{(q_1, \varepsilon)\}$

La pila decrece desapilando símbolos (parte de w^R)

12. $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0)=\{(q_2, Z_0)\}$

Entrada al estado de aceptación

Diagrama de estados de un AP

$\delta(q_i, a, X) = \{(q_j, Y)\}$

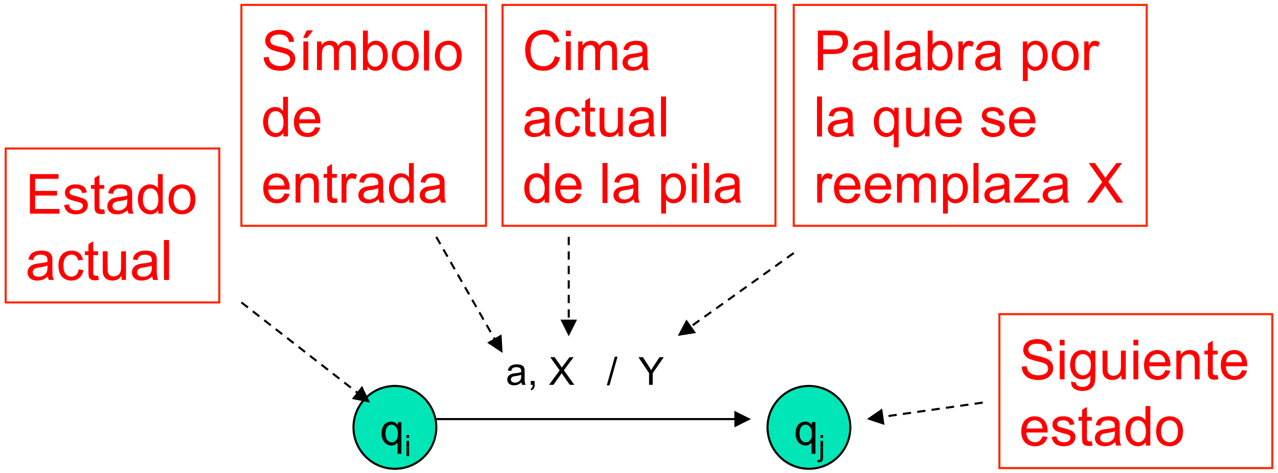
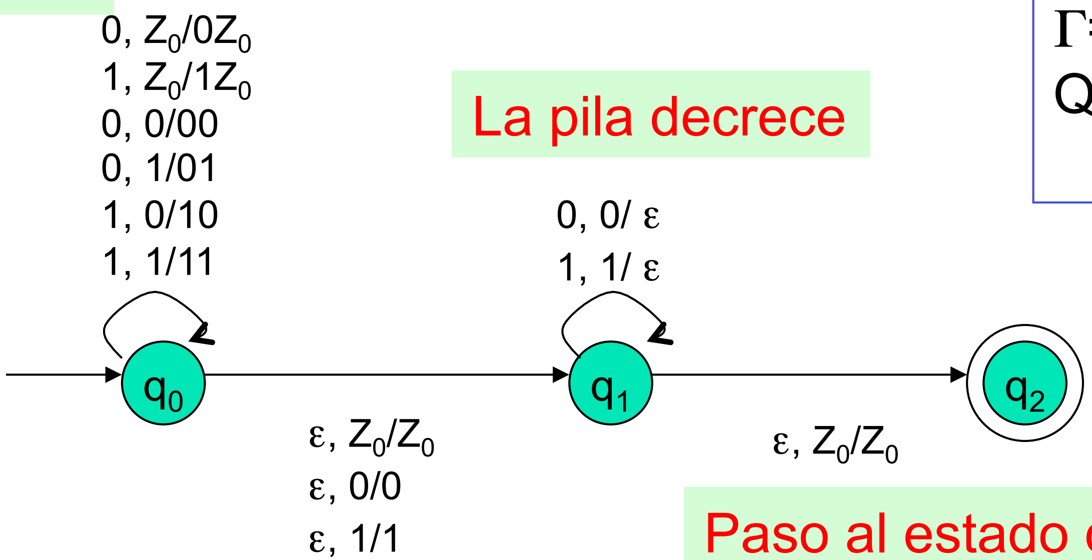


Diagrama de estados de un AP

La pila crece

La pila decrece

$\Sigma = \{0, 1\}$
$\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$



Paso al estado de aceptación

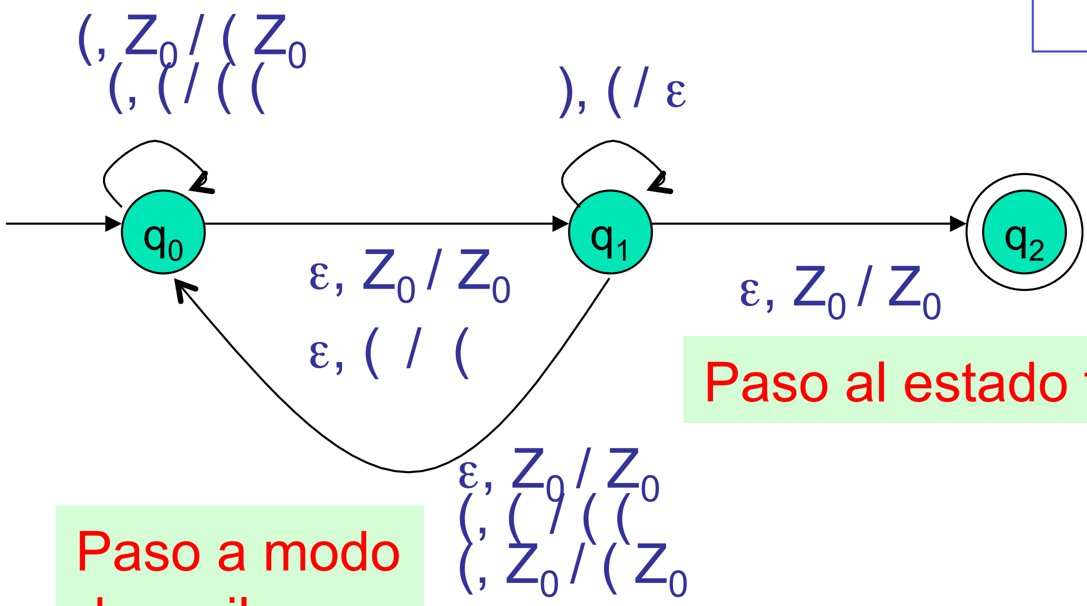
Paso al modo desapilar

Ejemplo 2: paréntesis equilibrados

La pila decrece

$\sum = \{0, 1\}$
$\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

Crece la pila



Paso al estado final

Paso a modo desapilar

Para permitir bloques adyacentes de paréntesis anidados

6. Autómatas de pila

6.2. Lenguajes de un AP: estado final y pila vacía

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman (http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

Descripción Instantánea (ID) de un AP

- La configuración de un AP en cada momento viene dada por: (q,w,y)
  - q – estado actual
  - w – input que falta por leer
  - y – contenido de la pila (de la cima al fondo)
- Si $\delta(q,a, X)=\{(p, A),\ldots\}$ es una transición:
  - (q, aw, XB) |--- (p,w,AB)
- |--- representa un movimiento del AP
- |---* representa 0 o más movimientos del AP

ID del AP para L_{wwr}

Input: 1111

Todos los movimientos son no deterministas

$(q_0,1111,Z_0) \to (q_0,111,1Z_0) \to (q_0,11,11Z_0) \to (q_0,1,111Z_0) \to (q_0,\varepsilon,1111Z_0) \to (q_1,\varepsilon,1111Z_0)$ Se bloquea…

$(q_0,1111,Z_0) \to (q_1,1111,Z_0) \to$ Se bloquea…

$(q_0,111,1Z_0) \to (q_1,111,1Z_0) \to$ Se bloquea…

$(q_0,11,11Z_0) \to (q_1,11,11Z_0) \to (q_1,1,1Z_0) \to (q_1,\varepsilon,Z_0) \to (q_2,\varepsilon,Z_0)$

$(q_0,1,111Z_0) \to (q_1,1,111Z_0) \to (q_1,\varepsilon,11Z_0)$ Se bloquea…

Aceptación por estado final:

= *input vacío*
AND
estado final

Observaciones sobre IDs

- Si (q, x, A) |---* (p, y, B) entonces para cada $w \in \Sigma^*$ y $\gamma \in \Gamma^*$ también se tiene que:
  - (q, x w, A γ) |---* (p, y w, B γ)

- Si (q, x w, A) |---* (p, y w, B) entonces también se tiene que:
  - (q, x, A) |---* (p, y, B)

Hay dos tipos de AP:

los que aceptan por estado final y los que aceptan por pila vacía

Aceptación por…

Comprobar:
- ¿palabra acabada?
- ¿estado final?

- Estado final:
  - Dado un AP P, el lenguaje aceptado por P por *estado final* es:
    - $L(P)=\{w \mid (q_0,w,Z_0) \vdash^* (q,\varepsilon, A) \text{ con } q \in F \}$

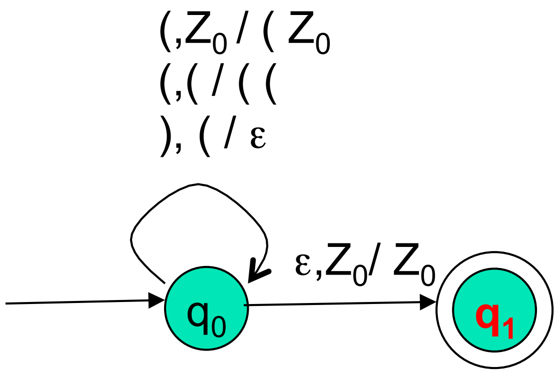
- Pila vacía:
  - Dado un AP P, el lenguaje aceptado por P por *pila vacía* es:
    - $N(P)=\{w \mid (q_0,w,Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q \}$

Comprobar:
- ¿palabra acabada?
- ¿pila vacía?

Ejemplo: paréntesis equilibrados

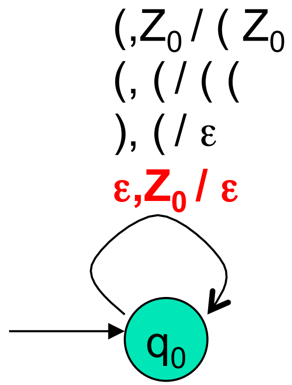
<u>AP que acepta por estado final</u>

P_F:



<u>AP que acepta por pila vacía</u>

P_N:



Corrección del AP para L_{wwr}

- Teorema: El AP para L_{wwr} acepta x por estado final $\Leftrightarrow$ $x=ww^R$.
- Demostración:
  - <= Si $x=ww^R$ existe una secuencia de IDs que llevan a un estado final:

$$(q_0,ww^R,Z_0) \vdash^* (q_0,w^R,wZ_0) \vdash^* (q_1,w^R,wZ_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon,Z_0) \vdash^* (\mathbf{q_2}, \varepsilon,Z_0)$$

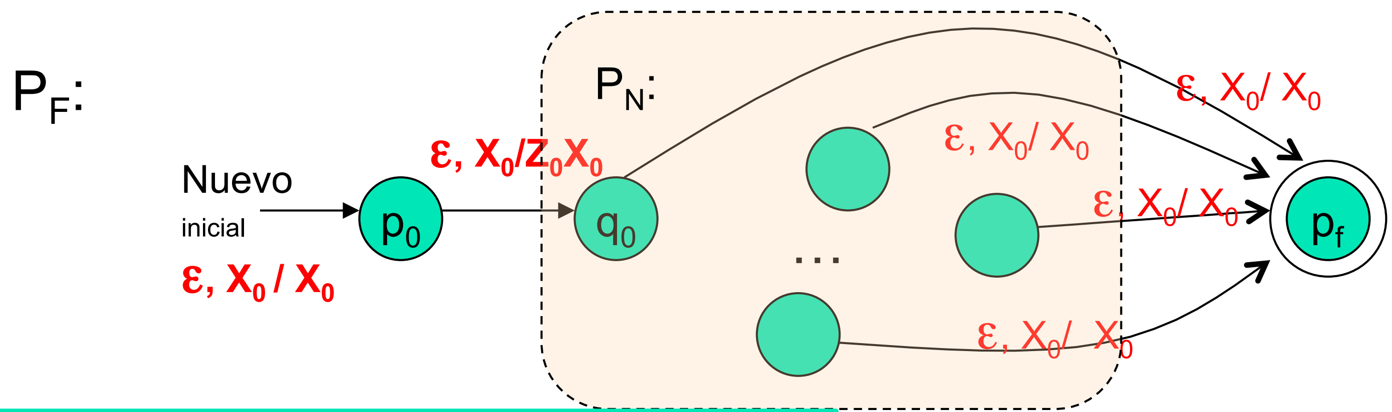
  - =>
    - Por inducción sobre |x|

Los AP que aceptan por estado final y los que aceptan por pila vacía son equivalentes

- P_F : AP que acepta por estado final
  - $P_F = (Q_F, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$
- P_N : AP que acepta por pila vacía
  - $P_N = (Q_N, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$
- Teorema:
  - *(P_N==> P_F)* Para cada P_N existe un P_F t.q. $L(P_F)=N(P_N)$
  - *(P_F==> P_N)* Para cada P_F existe un P_N t.q. $L(P_F)=N(P_N)$

P_N==> P_F

- Cuando se vacía la pila de P_N, hacemos que P_F vaya a un estado final sin consumir ningún símbolo
- Para detectar cuándo se vacía la pila de P_N: P_F apila un nuevo símbolo de pila X_0 antes de simular P_N



P_F = (Q_N U {p_0,p_f}, $\sum$, Γ U {X_0}, δ_F, p_0, X_0, {p_f})

Ejemplo: paréntesis equilibrados

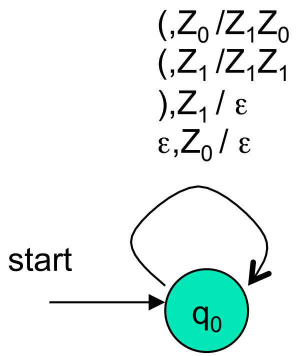
P_N: $(\{q_0\}, \{(,)\}, \{Z_0,Z_1\}, \delta_N, q_0, Z_0)$

δ_N:

$\delta_N(q_0,(,Z_0) = \{ (q_0,Z_1Z_0) \}$
$\delta_N(q_0,(,Z_1) = \{ (q_0, Z_1Z_1) \}$

$\delta_N(q_0,),Z_1) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$

$\delta_N(q_0, \varepsilon,Z_0) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$

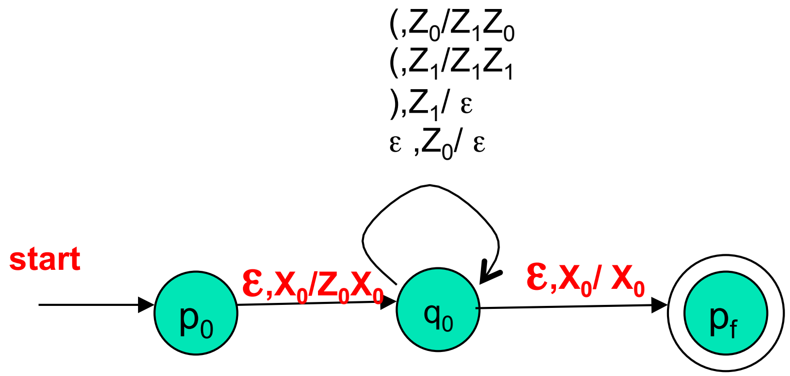


Por pila vacía

P_f: $(\{p_0,q_0,p_f\}, \{(,)\}, \{X_0,Z_0,Z_1\}, \delta_f, p_0, X_0, p_f)$

δ_f:

$\delta_f(p_0, \varepsilon,X_0) = \{ (q_0,Z_0) \}$
$\delta_f(q_0,(,Z_0) = \{ (q_0,Z_1 Z_0) \}$
$\delta_f(q_0,(,Z_1) = \{ (q_0, Z_1Z_1) \}$
$\delta_f(q_0,),Z_1) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$
$\delta_f(q_0, \varepsilon,Z_0) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$
$\delta_f(p_0, \varepsilon,X_0) = \{ (p_f, X_0) \}$



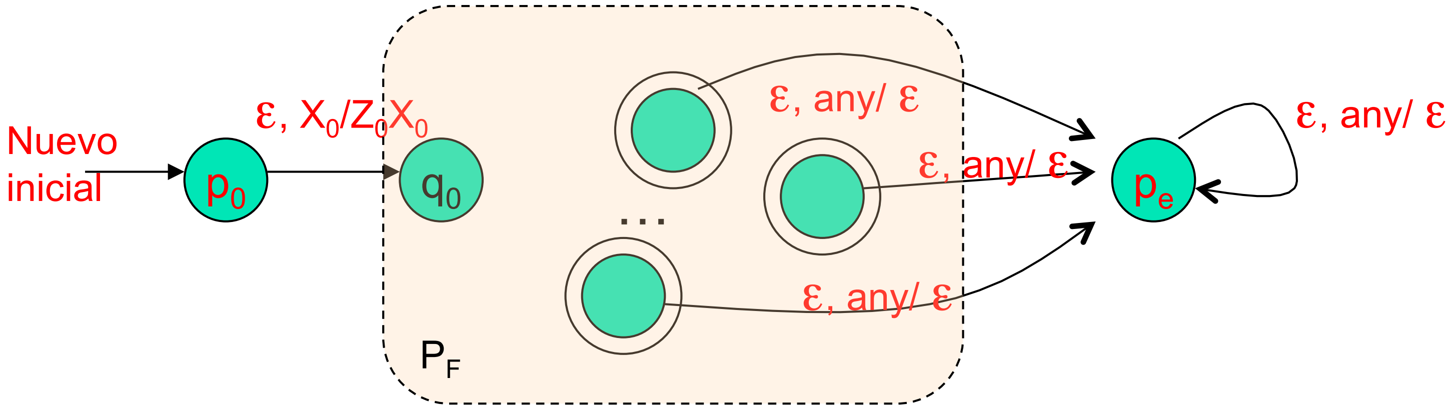
Por estado final

P_F==> P_N

- <u>Idea:</u>
  - Cuando P_F alcanza un estado final pasamos mediante una transición ε a un nuevo estado, que vacía la pila
  - Para evitar que P_F vacíe su pila antes, añadimos un nuevo símbolo de pila X_0

$P_N = (Q \cup \{p_0, p_e\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$

P_N:



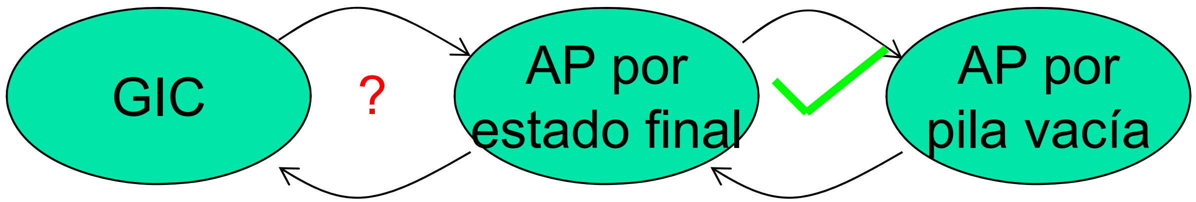
6. Autómatas de pila

6.3. Equivalencia entre las GIC y los autómatas de pila

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman
(http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

GICs == APs ==> LICs



GIC => AP

Idea: El AP simula derivaciones más a la izquierda de la GIC (y acepta por pila vacía)

Pasos:

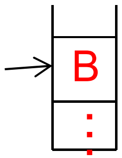
1. Apila el cuerpo de una producción (símbolo más a la izquierda en la cima de la pila)
2. Sustituimos la variable más a la izquierda A (en la cima) por el cuerpo de las A-producciones
3. Si el símbolo de la cima es un terminal que coincide con el próximo símbolo del input, lo desapilamos

- El estado es irrelevante (basta con tener un estado)

Construcción GIC=>AP

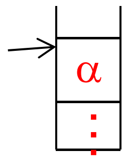
- Entrada: G= (V,T,P,S)
- Salida: A = ({q}, T, V U T, δ, q, S)
- δ:

Antes:



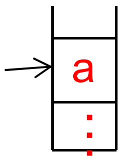
  - Para cada B ∈ V :
    - δ(q, ε ,B) = { (q, α) | “B ==>α” ∈ P}

Después:

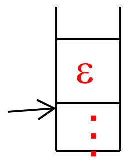


  - Para cada *a* ∈ T:
    - δ(q,*a*,*a*)= { (q, ε) }

Antes:



Después:



Ejemplo: GIC => AP

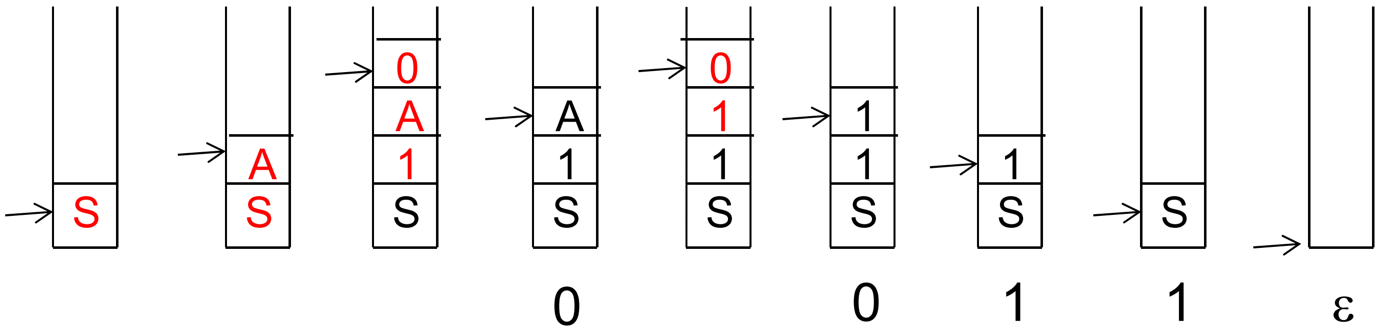
- $G = (\{S,A\}, \{0,1\}, P, S)$
- P:
  - $S \rightarrow AS \mid \varepsilon$
  - $A \rightarrow 0A1 \mid A1 \mid 01$
- $AP = (\{q\}, \{0,1\}, \{0,1,A,S\}, \delta, q, S)$
- δ:
  - $\delta(q, \varepsilon, S) = \{ (q, AS), (q, \varepsilon)\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, A) = \{ (q,0A1), (q,A1), (q,01) \}$
  - $\delta(q, 0, 0) = \{ (q, \varepsilon) \}$
  - $\delta(q, 1, 1) = \{ (q, \varepsilon) \}$

Ejecución del AP con la entrada 0011

AP (δ):

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{ (q, AS), (q, \varepsilon) \}$
$\delta(q, \varepsilon, A) = \{ (q,0A1), (q,A1), (q,01) \}$
$\delta(q, 0, 0) = \{ (q, \varepsilon) \}$
$\delta(q, 1, 1) = \{ (q, \varepsilon) \}$

Contenido de la pila (sólo la ejecución exitosa):



Acepta por pila vacía

Corrección de la construcción GIC ==> AP

- w generada por G ⇔ w es aceptada (por pila vacía) por el AP
- Demostración:
  - =>
    - Por inducción sobre el número de pasos de derivación
  - <=
    - Si (q, wx, S) |--* (q,x,B) entonces $S \Rightarrow^*_{lm} wB$

AP => GIC

- Si $\delta(q,a,X) = \{(p, Y_1Y_2Y_3\ldots Y_k),\ldots\}$:
  1. Se pasa del estado q a p,
  2. Se consume el terminal a,
  3. La cima X se reemplaza por k variables.
- Idea: Consideramos una variable "[qXr]" que genera las palabras que permiten pasar de q a r, consumiendo X de la pila:
  - $[qXr] \rightarrow a[pY_1q_1]\ [q_1Y_2q_2]\ [q_2Y_3q_3]\ldots\ [q_{k-1}Y_kr]$
- Demostración en el libro

Ejemplo: paréntesis

- Para evitar confusiones usamos *b*="(" y *e*=")"

P_N: ($\{q_0\}$, $\{b,e\}$, $\{Z_0,Z_1\}$, δ, q_0, Z_0)

1. $\delta(q_0,b,Z_0) = \{ (q_0,Z_1Z_0) \}$
2. $\delta(q_0,b,Z_1) = \{ (q_0,Z_1Z_1) \}$
3. $\delta(q_0,e,Z_1) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$
4. $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{ (q_0, \varepsilon) \}$

0. $S \rightarrow [q_0Z_0q_0]$
1. $[q_0Z_0q_0] \rightarrow b\ [q_0Z_1q_0]\ [q_0Z_0q_0]$
2. $[q_0Z_1q_0] \rightarrow b\ [q_0Z_1q_0]\ [q_0Z_1q_0]$
3. $[q_0Z_1q_0] \rightarrow e$
4. $[q_0Z_0q_0] \rightarrow \varepsilon$

Sea $A=[q_0Z_0q_0]$
Sea $B=[q_0Z_1q_0]$

0. $S \rightarrow A$
1. $A \rightarrow b\ B\ A$
2. $B \rightarrow b\ B\ B$
3. $B \rightarrow e$
4. $A \rightarrow \varepsilon$

Simplificando,

0. $S \rightarrow b\ B\ S \mid \varepsilon$
1. $B \rightarrow b\ B\ B \mid e$

Al diseñar directamente una GIC:

$S \rightarrow b\ S\ e\ S \mid \varepsilon$

6. Autómatas de pila

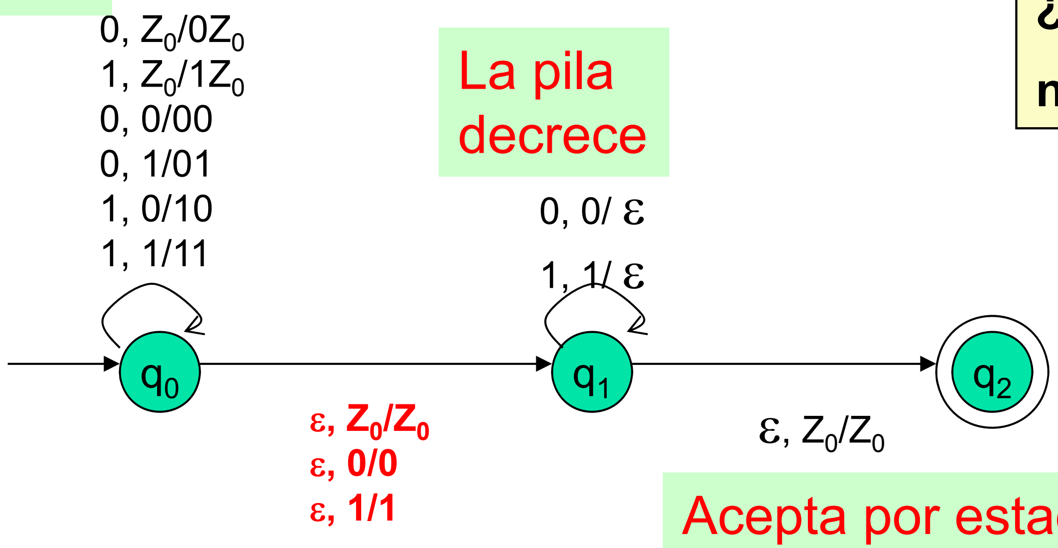
6.4. Autómatas de pila deterministas

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman
(http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

El AP para L_{wwr} es no determinista

La pila crece



La pila decrece

¿Tiene que ser no determinista?

Para no tener que adivinar, insertamos una c en el medio

Paso al modo desapilar

Acepta por estado final

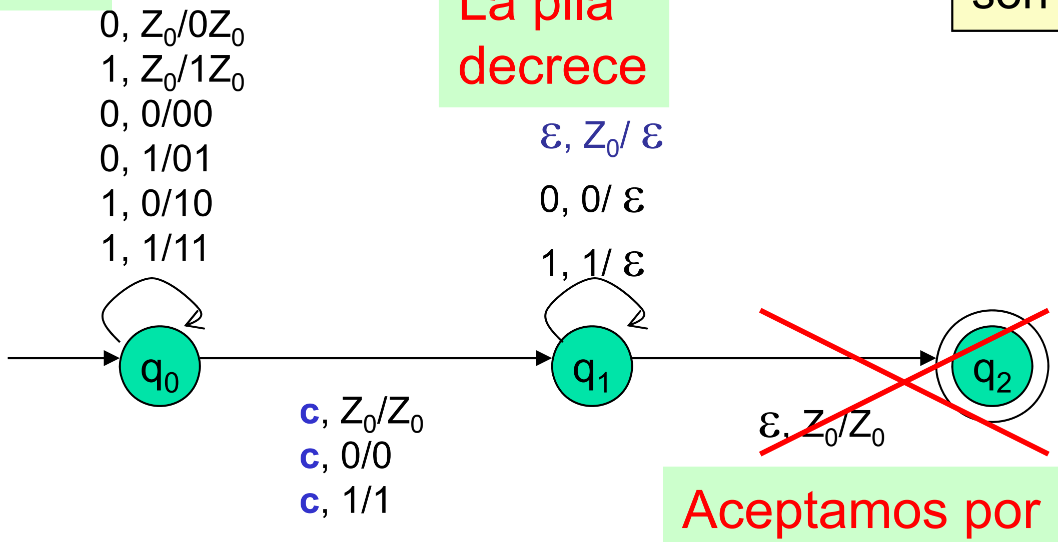
Ejemplo: AP no determinista ≠ AP determinista (APD)

APD para $L_{wcwr} = \{wcw^R \mid c \text{ símbolo especial}\}$

Obs:
- todas las transiciones son deterministas

La pila crece

La pila decrece



Aceptamos por pila vacía

Pasamos a modo de desapilar

¿Y por estado final?

AP determinista: definición

- Un AP es *determinista (APD)* si
  1. $\delta(q,a,X)$ contiene *a lo sumo* un elemento para cada $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

➔ Si $\delta(q,a,X)$ es no vacío para algún $a \in \Sigma$ entonces $\delta(q, \varepsilon, X)$ es vacío.

AP vs APD vs Lenguajes Regulares