Ejercicio 4.-

Sea $(X_1 \dots X_n)$ una m.a.s. con $X \sim f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$ si $\theta < x < \infty$ y $\theta > 0$. Encontrar un estadístico suficiente e insesgado para estimar θ.

$$f(x_1 \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i+\theta}\, I_{(\theta,\infty)}(x_i) = e^{n\theta}\, e^{-\sum x_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}).$$

Por el Teorema de factorización $T(X_1 \dots X_n) = X_{(1)}$ es un estadístico suficiente.

Vamos a calcular la esperanza de $X_{(1)}$

Su distribución es

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \le x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P\{X_i \le x\} =$$
$$= 1 - (1-F(x))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = -n(1-F(x))^{n-1}(-f(x)) = n(1-F(x))^{n-1} f(x).$$

Si calculamos $F(x)$,

$$F(x) = \int_\theta^x e^{-t+\theta}\,dt = e^\theta\left[-e^{-t}\right]_{t=\theta}^{t=x} = e^\theta\left(e^{-\theta} - e^{-x}\right) = 1 - e^{\theta - x}$$

y sustituimos

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-F(x))^{n-1} f(x) = n\left(1-(1-e^{\theta-x})\right)^{n-1} e^{-x+\theta}\, I_{(\theta,\infty)}(x) =$$
$$= n\left(e^{\theta-x}\right)^{n-1} e^{\theta-x}\, I_{(\theta,\infty)}(x) = n\left(e^{\theta-x}\right)^n I_{(\theta,\infty)}(x).$$

Por tanto,

$$E[X_{(1)}] = \int_\theta^\infty x \cdot f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_\theta^\infty x\, n\left(e^{\theta-x}\right)^n dx = n e^{n\theta}\int_\theta^\infty x\, e^{-nx}\,dx$$

$$= \cancel{n} e^{n\theta}\left(\left[-\frac{x e^{-nx}}{\cancel{n}}\right]_\theta^\infty + \frac{1}{n}\int_\theta^\infty e^{-nx}\,dx\right) =$$

$x = u \quad dx = du$

$e^{-nx}dx = dv \quad -\frac{e^{-nx}}{n} = v$