$\boxed{6}$ $\begin{cases} x' = x\ln|x| \\ x(0) = 0 \end{cases}$

- Que la fución $f(x) = x\ln|x|$ no es Lipschitz en ningún entorno que contenga $x=0$ es trivial por $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$

- Vamos a ver que la única solución local de $\begin{cases} x' = x\ln|x| \\ x(0)=0 \end{cases}$ es $x \equiv 0$.

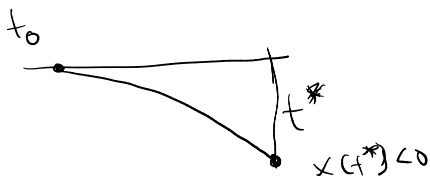
Supongamos que existe un $\delta > 0$ y $x : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ solución del (PVI) con $x \not\equiv 0$. Esto quiere decir que

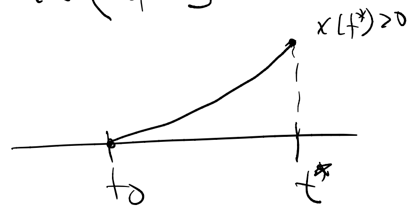
$$\exists\, t^* \in [-\delta, \delta] \text{ con } x(t^*) \not\equiv 0.$$

(1) Si $t^* \in (0, \delta] \Rightarrow$ Sea $t_0 = \min\{\tau \in [0, t^*] : x(t) \neq 0 \ \ t \in (\tau, t^*]\}$

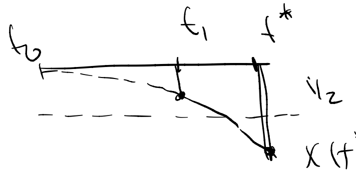
Por definición de mínimo se puede ver que $x(t_0) = 0$
y además se tiene $x(t) \neq 0 \ \ t \in (t_0, t^*]$

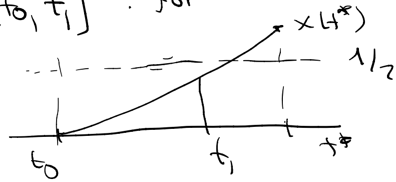
Podemos tener:





Por continuidad de $x(t)$, podemos elegir $t_1 \in (t_0, t^*]$ tal que $|x(t)| \leq 1/2 \ \ t \in [t_0, t_1]$. Por tanto:





Por el TVM $\exists\, \bar{t} \in (t_0, t_1)$:

$$x'(\bar{t}) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1)}{t_1 - t_0} \Rightarrow \text{signo}(x'(\bar{t})) = \text{signo}(x(t_1)) = \text{signo}(x(\bar{t}))$$

Pero $x'(\bar{t}) = x(\bar{t}) \cdot \underbrace{\ln|x(\bar{t})|}_{<0 \leftarrow |x(\bar{t})| \le 1/2}$

y por tanto $\operatorname{sign}(x'(\bar{t})) \neq \operatorname{sign}(x(\bar{t}))$

Contradicción !!

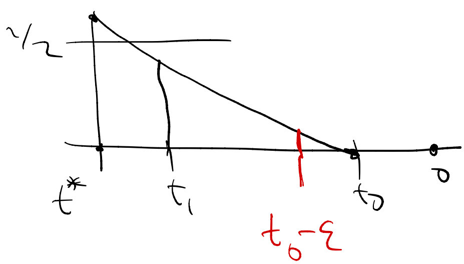
De aquí deducimos que $x(t) \equiv 0 \quad \forall t > 0$.

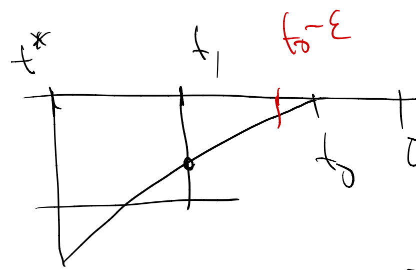
(2) Si $\exists t^* \in [-\delta, 0)$ $x(t^*) \neq 0$

argumentando como en (1). Tenemos que $\exists$ $t_0 \in (t^*, 0]$

tal que $x(t_0) = 0$ $x(t) \neq 0$ $t \in [t^*, t_0)$.

Además $\exists$ $t_1 \in [t^*, t_0)$ tal que $|x(t)| \le 1/2$ $t \in [t_1, t_0)$





La solución $x(t)$ verifica $x(t) \neq 0$ $t \in [t_1, t_0 - \varepsilon]$

$$x(t_0 - \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Por tanto $x'(t) = x(t) \ln|x(t)|$ tenemos

y sabemos que en $[t_1, t_0 - \varepsilon]$

$$\int_{t_1}^{t_0-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln|x|} = \int_{t_1}^{t_0-\varepsilon} dt = t_0 - \varepsilon - t_1 = t_0 - t_1 - \varepsilon$$

Pero $\displaystyle\int_{t_1}^{t_0-\varepsilon} \frac{dx}{x\ln|x|} = \ln|\ln|x(t)||\Big]_{t_1}^{t_0-\varepsilon} =$

$$= \ln|\ln|x(t_0-\varepsilon)|| - \ln|\ln|x(t_1)||$$

Por tanto, se debe verificar:

$$\ln|\ln|x(t_0-\varepsilon)|| = \ln|\ln|x(t_1)|| + t_0 - t_1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in (0, t_0-t_1)$$

haciendo $\varepsilon \to 0$

$$\ln|\ln|x(t_0-\varepsilon)|| \longrightarrow \infty$$

$$\ln|\ln|x(t_1)|| + t_0 - t_1 - \varepsilon \longrightarrow \ln|\ln|x(t_1)|| + t_0 - t_1$$

Contradicción !!

<u>Obs</u>: El argumento de (2) también es valido para el caso (1)