Ejercicios. Campos. Divergencia y Rotacional

Ejercicio 1. (Gradiente, divergencia y rotacional)

(a) Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice conservativo si tiene un potencial asociado f. Es decir, si $\vec{F} = \nabla f$ para un cierto campo escalar f. Probar que un campo conservativo es irrotacional. Es decir, que $\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

(b) Probar que el campo gravitatorio es conservativo. Encontrar un potencial para él.

(c) Probar que para cualquier campo $\vec{F}$, $\text{div}(\text{rot}\vec{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$. Es decir la divergencia de un rotacional es cero.

(d) Se define el Laplaciano de un campo escalar f como $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \text{div}(\nabla f)$. Probar que el Laplaciano del potencial gravitatorio es cero.

Ejercicio 2. Sea $\vec{c}(t)$ una línea de flujo de un campo conservativo $\vec{F} = -\nabla V$ para un cierto potencial V. Demostrar que $V(\vec{c}(t))$ es una función decreciente en t. Interpretar el resultado.

Ejercicio 3. Calcular la divergencia de los campos:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (e^{xy}, -e^{xy}, e^{yz})$

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y + \cos x, z + e^{xy})$

Ejercicio 4. Dado el campo $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0)$:

(a) Calcular sus líneas de flujo.

(b) Calcular su rotacional