ENTREGA 4. EEAA. GRUPO M3 (19-20).
CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.

Fecha límite: 11-XII-2019 (antes de las 13:30 horas[1]).

Entregar en la hora de problemas en mano o enviar por correo: andonide@ucm.es.

Problema 1. Se considera el 4-*grupo de Klein* definido por

$$V = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leq \mathcal{S}_4.$$

(1) Considérese la acción natural de V sobre el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$[2]. Escribir las órbitas de dicha acción, y encontrar los estabilizadores de cada punto dado en V.
(2) Demostrar que este es subgrupo normal de $\mathcal{A}_4$ y $\mathcal{S}_4$ (en particular, hemos probado así que estos dos no pueden ser grupos simples). Hallar los subgrupos normales propios de V y demostrar que, de hecho, estos no pueden ser subgrupos normales en $\mathcal{A}_4$ y $\mathcal{S}_4$.
(3) Concluir a partir de lo anterior que $\mathcal{A}_4$ es resoluble (luego, también lo es $\mathcal{S}_4$).

Problema 2. El objetivo ahora pasa por probar que **el menor grupo no abeliano y simple es, salvo isomorfismo, el grupo alternado** $\mathcal{A}_5$. Para probar este resultado, los pasos que se van a seguir son los siguientes[3]:

(1) Dado G un grupo no abeliano arbitrario, demostrar que este no es simple si
  (i) $|G| = p^r m$ con p primo tal que $r \geq 1$ y $p > m > 1$.
  (ii) $|G| = 2^p q$ con $q = 2^p - 1$ primo (los llamados *primos de Mersenne*).
  (iii) $|G| = p^2 q$ con p y q primos distintos.
(2) Probar que todo grupo G no abeliano que tenga orden 24 ó 48 no puede ser simple.
(3) Concluir usando los apartados anteriores, así como algunos de los resultados vistos tanto en teoría como en la **Hoja de Ejercicios** 5 durante las clases de problemas, que todo grupo no abeliano cuyo orden sea menor que 60 es necesariamente no simple.
(4) Probar que el grupo alternado $\mathcal{A}_5$ es un grupo simple.
(5) Demostrar que todo grupo no abeliano G con orden 60 y simple es isomorfo a $\mathcal{A}_5$. Para probar esto, los pasos que se sugiere seguir son los siguientes:
  (i) Demostrar que todo grupo simple de orden 60 admite un subgrupo que tenga índice 5 (**Sugerencia**: Calcular el número de elementos con órdenes 3 y 5 en el grupo G y llegar, estudiando los posibles elementos de orden 2 que puede haber, a que el normalizador de un 2-subgrupo de Sylow para G tiene índice 5).
  (ii) Utilizando lo anterior, concluir que todo grupo G no abeliano que tenga orden 60 y simple tiene que ser isomorfo a $\mathcal{A}_5$ (**Sugerencia**: Dado $H \leq G$ con índice 5, considerar la **acción transitiva** de G sobre las coclases a izquierda de H que induce un homomorfismo no trivial $\phi\colon G \longrightarrow \mathcal{S}_5$, y concluir que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathcal{A}_5$).

[1]Este límite es **para aquellos que quieran recibir las correcciones de esta entrega antes de Navidades**, a lo más tardar, en la última clase de problemas que será la próxima semana. Para el resto, la entrega puede ampliarse en una semana (en principio, **hasta el miércoles 18-XII-2019 a la misma hora**).

[2]A saber, la acción definida por $\begin{array}{cccc} \cdot\colon & V \times X & \longrightarrow & X \\ & (\sigma, i) & \mapsto & (i)\sigma \end{array}.$

[3]Para la redacción de este problema, me he basado en la última parte sobre **aplicaciones a los Teoremas de Sylow** del artículo *The Sylow Theorems and Their Applications* de **Amin Idelhaj**. Puede ojearse por si alguien se pierde en un momento dado, pero **en ningún caso se debe copiar la resolución dada sin entenderla** (de hecho, no se razonan todos los pasos y el ejercicio propuesto no es exactamente igual).

Problema 3. Resolver los siguientes **problemas de examen**:

(1) (**Examen 16 de Febrero 2018**) Enumerar los distintos grupos abelianos de orden 240 (salvo isomorfismo), señalando sus factores invariantes. Identificar cuál de todos estos se corresponde, en su caso, con el grupo de las unidades del anillo cociente $\mathbb{Z}_{385}$. Decidir, además, cuántos elementos de orden 2 tiene dicho grupo y listarlos.

(2) (**Examen 15 de Septiembre 2007**) Se considera el grupo abeliano G generado por $a, b, c, d \in G$ bajo las relaciones

$$12a + 6b + 6c - 6d = 0 \quad \text{y} \quad 2b - 4c - 12d = 0.$$

(i) Calcular los coeficientes de torsión y el rango de G.
(ii) Encontrar, si existe, un elemento de orden k para $k \in \{2, 4, 6, 12\}$ en algún grupo que sea isomorfo a G.

Problema 4[4]**.** Decidir si las **afirmaciones siguientes** son **verdaderas o falsas**, dando una **prueba completa** o un **contraejemplo** cuando corresponda.

(1) Dado G un grupo de orden par, el número de elementos con orden 2 es impar.
(2) Si $H \trianglelefteq G$ y G/H es cíclico, entonces G es necesariamente abeliano.
(3) Los grupos $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{120}$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{180}$ son isomorfos.
(4) Dados G_1 abeliano y $\varphi\colon G_1 \longrightarrow G_2$ epimorfismo de grupos, entonces G_2 es abeliano.
(5) Si G es un grupo finito tal que $|G : Z(G)|$ divide a 15, entonces G es abeliano.
(6) En cualquier DFU A se tiene que $(a) + (b) = (\operatorname{mcd}(a, b))$ para todo $a, b \in A$.
(7) Los anillos $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2 + 1\right)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/\left(x^2 + x + 2\right)$ son isomorfos.
(8) El anillo $\mathbb{Z}[x] / \left(x^2 - 3\right)$ es un cuerpo.
(9) Se tiene que A es DE si, y sólo si, también lo es B cuando $A \cong B$.
(10) La característica de A anillo divide al entero n si $na = 0$ **para algún** $a \in A$ **no nulo**.

IMPORTANTE: Quienes quieran que les devuelva las soluciones propuestas con correcciones, que me lo hagan saber escribiéndolo al comienzo de la entrega (indicando el método: a mano en la hora de problemas o por correo).

Instrucciones y Aclaraciones NO MATEMÁTICAS

- NO se corregirán anónimos (por favor, nombre visible en al menos una de las hojas a entregar), ni fotografías (si no se quiere/puede escanear en los envíos por correo, pegar las fotos en un word, guardar este como pdf y enviarlo después).
- Es IMPORTANTE respetar la fecha límite (se da tiempo más que suficiente).
- Más importante que hacer bien los ejercicios es **razonar correctamente** cada paso. Es mejor tener un ejercicio mal hecho, pero bien razonado; que tener un ejercicio bien hecho, y mal razonado.
- Es conveniente **intentar todos los ejercicios**. Mejor intentarlos y que estén mal, que no haberlo intentado si quiera. **Siempre se puede pedir ayuda**. La idea de las entregas es que os enfrentéis a los problemas **con ganas** (tampoco seáis vagos y responder a todo lo que se pregunta), no tanto hacerlos bien (para demostrar los conocimientos adquiridos en la asignatura está el examen).
- Antes de lanzarse a escribir la resolución de los problemas, es mejor (**después de leer bien el problema**) pararse a pensar un rato e intentar dar soluciones óptimas.

[4] Optativo para aquellos que, a lo largo de las entregas anteriores, hayan ido dejando algún apartado en los problemas propuestos sin hacer, con el fin de darles la oportunidad de aspirar a obtener la nota máxima en dichos casos, o para quienes quieran subir nota (o, simplemente, practicar de cara al examen).