10

Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Entrega 4

1.- Sean $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \cdots x_{n+1}\} \subset [a,b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son, respectivamente, los polinomios de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, \cdots x_n\}$ y $\{x_1, \cdots x_{n+1}\}$, demostrar que

$$P(x) = \frac{(x-x_0)P_2(x) - (x-x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1} - x_0}$$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \cdots x_{n+1}\}$.

Para probar lo anterior hay que ver que $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n+1$ (porque hay $n+2$ puntos) que verifica que $P(x_i) = f(x_i)$ $\forall i \in \{0 \cdots n+1\}$.

Lo primero es inmediato ya que, por ser $P_1(x)$ y $P_2(x)$ polinomios de interpolación de una función en $n+1$ puntos, el grado de $P_1(x)$ será menor o igual que n y el grado de $P_2(x)$ será menor o igual que n. Al multiplicar un polinomio $Q(x)$ de grado $r \leq n$ por $(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$ se tiene que el polinomio $(x-a)Q(x)$ tiene grado $r+1 \leq n+1$, luego el grado de los polinomios $(x-x_0)P_2(x)$ y $(x-x_{n+1})P_1(x)$ es menor o igual que $n+1$. Como ~~su~~ restar polinomios de grado menor o igual que $n+1$ da como resultado un polinomio de grado menor o igual que $n+1$, y lo mismo sucede al multiplicar un polinomio por un escalar, concluimos que $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n+1$.

Comprobamos ahora que $P(x_i) = f(x_i)$ $\forall i \in \{0, \cdots n+1\}$

$$P(x_0) = \frac{\cancelto{0}{(x_0 - x_0)}\, P_2(x_0) - (x_0 - x_{n+1})\, P_1(x_0)}{x_{n+1} - x_0} = \frac{x_{n+1} - x_0}{x_{n+1} - x_0}\, P_1(x_0) = P_1(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ (*_1)\text{ para } j=0}}{=} f(x_0)$$

$$P(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_0)\, P_2(x_{n+1}) - \cancelto{0}{(x_{n+1} - x_{n+1})}\, P_1(x_{n+1})}{x_{n+1} - x_0} = \frac{x_{n+1} - x_0}{x_{n+1} - x_0}\, P_2(x_{n+1}) = P_2(x_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ (*_2)\text{ para } j=n+1}}{=} f(x_{n+1})$$

Si $i \in \{1, \dots n\}$

$$P(x_i) = \frac{(x_i - x_0)\, P_2(x_i) - (x_i - x_{n+1})\, P_1(x_i)}{x_{n+1} - x_0} \underset{\substack{\uparrow \\ (*_1)\text{ y } (*_2) \\ \text{para } j=i\in\{1,\dots n\}}}{=} \frac{(x_i - x_0)\, f(x_i) - (x_i - x_{n+1})\, f(x_i)}{x_{n+1} - x_0} =$$

$$= \frac{x_{n+1} - x_0}{x_{n+1} - x_0}\, f(x_i) = f(x_i)$$

Donde hemos usado en $(*_1)$ que $P_1(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de f para los nodos $\{x_0, \dots x_n\}$ (luego $P_1(x_j) = f(x_j)$ $\forall j = 0, \dots n$) y en $(*_2)$ que $P_2(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange para la función f y los nodos $\{x_1, \dots x_{n+1}\}$ (luego $P_2(x_j) = f(x_j)$ $\forall j = 1 \dots n+1$).

Con esta comprobación podemos concluir que $P(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1 \dots x_{n+1}\}$ por la unicidad del mismo.

2.- Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a,b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a,b]$. Probar que si, además, se imponen condiciones de tipo I, la función será una recta en todo $[a,b]$.

Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ la partición del intervalo $[a,b]$ asociada a la función spline y como se nos dice que en cada subintervalo la función spline cúbica es un polinomio de grado menor o igual que 2 entonces

$S_\Delta(y,x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$ con $i \in \{0, \dots n-1\}$.

Como la función $S_\Delta \in C^2([a,b])$ se tiene que verificar que

$$\begin{cases} S_\Delta(y, x_i^-) = S_\Delta(y, x_i^+) \\ S_\Delta^{1)}(y, x_i^-) = S_\Delta^{1)}(y, x_i^+) \\ S_\Delta^{2)}(y, x_i^-) = S_\Delta^{2)}(y, x_i^+) \end{cases} \qquad \forall i = 1, \dots n-1$$

Expresando explícitamente quienes son $S_\Delta^{k)}(y, x_i^-)$, $S_\Delta^{k)}(y, x_i^+)$ para $k = 0,1,2$ se tiene que

$$\begin{cases} a_{i-1} x_i^2 + b_{i-1} x_i + c_{i-1} = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i \\ 2a_{i-1} x_i + b_{i-1} = 2a_i x_i + b_i \\ 2a_{i-1} = 2a_i \end{cases} \qquad \forall i = 1 \dots n-1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_i = a_{i-1} \\ b_i = b_{i-1} \\ c_i = c_{i-1} \end{cases} \qquad \forall i = 1 \dots n-1$$

Esto prueba (con una inducción enmascarada que no vamos a hacer explícita) que todos los a_i, b_i, c_i son iguales luego

$S_\Delta(y,x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \forall x \in [a,b]$, que es una parábola en todo $[a,b]$.

Esto prueba la primera parte del problema y para la segunda imponemos las condiciones de tipo I, es decir, $S_\Delta^{2)}(y,a) = S_\Delta^{2)}(y,b) = 0$.

$S_\Delta^{1)}(y,x) = 2\alpha x + \beta$, $S_\Delta^{2)}(y,x) = 2\alpha$ y $S_\Delta^{2)}(y,a) = 2\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

y $S_\Delta(y,x) = \beta x + \gamma$ que es una recta en todo $[a,b]$.

3

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$I_n = \int_0^n e^{\text{sen}(\pi x)}\, dx$$ mediante la fórmula de Newton - Côtes cerrada de $n+1$ puntos.

b) Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral I_{10} mediante la regla de los trapecios sea inferior a una centésima.

---

a) La fórmula de Newton-Côtes sirve para aproximar el valor de la integral de una función por el valor de la integral de su polinomio de interpolación de Lagrange para unos ciertos puntos. En el caso de la fórmula de Newton-Côtes cerrada estos $(n+1)$ puntos son:

$$x_i = x_0 + ih, \quad \text{con} \quad x_0 = a \quad y \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

En nuestro caso $x_0 = 0$, $h = \frac{n-0}{n} = 1$ y $x_i = x_0 + ih = i$.

Por tanto, sea $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de Lagrange para la función $f(x) = e^{\text{sen}(\pi x)}$ en los puntos $\{x_0 = 0, x_1 = 1, \dots x_n = n\}$.

Este polinomio es $P_n(x) \equiv 1 \quad \forall n \geq 1$. Comprobémoslo. Por un lado, el grado del polinomio es menor o igual que n para todo $n \geq 1$ y

$$f(x_i) = f(i) = e^{\text{sen}(\pi i)} = e^0 = 1 = P_n(x_i) \quad \forall i \in \{0, \dots n\}$$

Por tanto $I_n = \int_0^n e^{\text{sen}(\pi x)} dx \simeq \int_0^n 1\, dx = n$

b) Para conseguir que el error al aproximar $I_{10} = \int_0^{10} e^{\operatorname{sen} \pi x}\, dx$ mediante la regla de los trapecios sea menor que 10^{-2} en primer lugar recordamos el Teorema involucrado. Si f es una función $C^2([a,b])$ ($f(x) = e^{\operatorname{sen}\pi x}$ es de clase infinito en $\mathbb{R}$) y $h = \frac{b-a}{m}$, $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots m$, la integral se aproxima como

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(b)\right) \quad \text{con error}$$

$$R_{(a,b)}(f) = -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\theta), \quad \text{con } \theta \in [a,b].$$

En nuestro caso $a=0$, $b=10$, $h = \frac{10}{m}$, $x_i = \frac{10i}{m}$ $i = 0, \dots m$ y $f(x) = e^{\operatorname{sen}\pi x} \in C^2([0,10])$.

Nuestro objetivo es determinar m para que $|R_{(a,b)}(f)| < 10^{-2}$.

Se tiene que $|R_{(a,b)}(f)| = \left|-(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\theta)\right| = 10 \cdot \frac{h^2}{12} \cdot |f''(\theta)| = \frac{10^3}{m^2 12} |f''(\theta)|$ con $\theta \in (0,10)$. Se trata por tanto de acotar $|f''(\theta)|$ en $\theta \in (0,10)$.

$f(x) = e^{\operatorname{sen}\pi x}$; $f'(x) = e^{\operatorname{sen}\pi x} \cos\pi x \cdot \pi = \pi e^{\operatorname{sen}\pi x} \cos\pi x$.

$f''(x) = \pi\left[e^{\operatorname{sen}\pi x} \cdot \cos\pi x \cdot \pi \cdot \cos\pi x - e^{\operatorname{sen}\pi x} \operatorname{sen}\pi x \cdot \pi\right] =$

$= \pi^2 e^{\operatorname{sen}\pi x}\left[\cos^2\pi x - \operatorname{sen}\pi x\right]$

Se puede probar (las cuentas son un poco pesadas) que la mejor cota para la segunda derivada es $\pi^2 e$, es decir,

$|f''(x)| \leq \pi^2 e$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y se da la igualdad cuando $x = \frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Podemos dar una cota algo menos ajustada pero que se obtiene de manera inmediata:

$$|f''(x)| = \pi^2 e^{\operatorname{sen}\pi x} |\cos^2\pi x - \operatorname{sen}\pi x| \leq \pi^2 e(|\cos\pi x|^2 + |\operatorname{sen}\pi x|) \leq$$

$\leq 2\pi^2 e$ donde hemos usado que $|\operatorname{sen}\pi x|, |\cos\pi x| \leq 1$ y que la exponencial es una función creciente.

Con esto y volviendo a la acotación del error se tiene que

$$|R_{(a,b)}(f)| = \frac{10^3}{12m^2} |f''(\theta)| \leq \frac{10^3}{12m^2} 2\pi^2 e = \frac{10^3\pi^2 e}{6m^2} < 10^{-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{10^5\pi^2 e}{6} < m^2$$

$$\Updownarrow$$

$$m > \frac{\sqrt{10^5}\cdot\pi\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$$

Por tanto, basta tomar $m > \frac{\sqrt{10^5}\pi\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$, por ejemplo, $m = 669 > \frac{\sqrt{10^5}\pi\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$

$\left(\text{o} \quad m > \frac{\sqrt{10^5}\pi\sqrt{e}}{\sqrt{12}} \text{ con la otra cota y } m = 473 > \frac{\sqrt{10^5}\pi\sqrt{e}}{\sqrt{12}}\right)$

4.- Determinar, justificando la respuesta, el valor que se obtiene al aproximar las integrales

$$\int_0^{4000} x^{1001}\operatorname{sen}(\pi x)dx \quad \text{y} \quad \int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)\,dx.$$

mediante la fórmula de Newton-Côtes cerrada de 1001 puntos.

Como $n+1 = 1001$ entonces $n = 1000$ y por tratarse de la fórmula cerrada, los puntos de la partición vienen determinados por:

$$x_0 = a = 0, \quad x_i = x_0 + hi = 0 + \left(\frac{4000-0}{1000}\right)i = 4i \quad \forall i = 1, \dots 1000$$

Calculamos los polinomios de interpolación de Lagrange $P_1(x)$ y $P_2(x)$ para las funciones $f(x) = x^{1001}\,\mathrm{sen}(\pi x)$, $g(x) = x^{1001}\cos(\pi x)$ en los puntos

$\{x_0 = 0, x_1 = 4, \dots, x_i = 4i, \dots x_{1000} = 4000\}$.

Afirmamos que $P_1(x) \equiv 0$. Efectivamente, $P_1(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1000 y que verifica que

$P_1(x_i) = 0 = (4i)^{1001}\,\mathrm{sen}(4i\pi) = f(4i) = f(x_i)$, y por unicidad este es el polinomio buscado.

Por tanto $$\int_0^{4000} x^{1001}\,\mathrm{sen}(\pi x)\,dx \simeq \int_0^{4000} 0\,dx = 0$$

Por otro lado, $P_2(x)$ verificará que tiene grado menor o igual que 1000 y que $P_2(x_i) = g(x_i) = g(4i) = (4i)^{1001}\cos(4\pi i) = (4i)^{1001} = h(4i) = h(x_i)$ siendo $h(x) = x^{1001}$. Esto implica que g y h tienen el mismo polinomio de interpolación de Lagrange $P_2(x)$ para los puntos $\{x_0, x_1, \dots x_{1000}\}$.

Por tanto se tiene que

$$\int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)\,dx \simeq \int_0^{4000} P_2(x)\,dx \simeq \int_0^{4000} x^{1001}\,dx.$$

En realidad, podemos afirmar algo más fuerte.

$$\int_0^{4000} P_2(x)\,dx = \int_0^{4000} x^{1001}\,dx.$$

Esto es así porque vimos que si n es par la derivada que aparece en la fórmula del error es la de orden $n+2$, luego la fórmula de Newton-Côtes para $n+1$ puntos es exacta para polinomios de grado menor o igual que $n+1$ cuando n es par. Como $n=1000$ se sigue el resultado y

$$\int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)\,dx \simeq \int_0^{4000} P_2(x)\,dx = \int_0^{4000} x^{1001}\,dx = \left.\frac{x^{1002}}{1002}\right]_0^{4000} = \frac{(4000)^{1002}}{1002}$$