Como la serie $\sum \mathrm{Re}(c_n)$ converge y $tg(\alpha)$ es una constante positiva entonces la serie $\sum \mathrm{Im}(c_n)$ converge absolutamente.

Por tanto

$|c_n| = |\mathrm{Re}(c_n) + i\,\mathrm{Im}(c_n)| \leq |\mathrm{Re}(c_n)| + |\mathrm{Im}(c_n)|$. Como $\sum \mathrm{Re}(c_n)$ y $\sum \mathrm{Im}(c_n)$ convergen absolutamente entonces $\sum |c_n|$ converge.

$\boxed{3.-}$ Supongamos que las series $\sum c_n$ y $\sum c_n^2$ convergen. Demuestra que si $\mathrm{Re}(c_n) \geq 0$ entonces la serie $\sum |c_n|^2$ también converge.

Sabemos que una serie de números complejos converge si y solo si la serie de su parte real y la serie de su parte imaginaria converge.

Por tanto $\sum \mathrm{Re}(c_n)$, $\sum \mathrm{Im}(c_n)$, $\sum \mathrm{Re}(c_n^2)$ y $\sum \mathrm{Im}(c_n^2)$ convergen.

Sabemos que si una serie númerica de reales $a_n \geq 0$ converge entonces la serie de sus cuadrados a_n^2 también converge. Esto es claro porque si $\sum a_n$ converge entonces $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y a partir de un n_0 suficientemente grande $a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n < 1$.

Como $\sum a_n$ converge, por el criterio de comparación $\sum a_n^2$ también converge.