ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. GRUPO M3 (19-20).
CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.

Grupos de Permutaciones (o Simétricos).

1. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_{11}$ una permutación de orden 21. Determinar los puntos fijos de σ.
2. Sea p un número primo.
   (i) Dada $\alpha = (1, 2, \ldots, p) \in \mathcal{S}_p$ una **permutación concreta**, estudiar si existe $\sigma \in \mathcal{S}_p$ otra cierta permutación tal que $\sigma^p = \alpha$.
   (ii) Estudiar si existe algún elemento de orden $2p$ en $\mathcal{S}_{p+1}$.
3. Demostrar que el conjugado de un k-ciclo en $\mathcal{S}_n$ con $n \in \mathbb{N}$ es de nuevo un k-ciclo.
4. Este ejercicio tiene como objetivo encontrar familias de generadores para los grupos simétrico $\mathcal{S}_n$ (con $n \geq 2$) y el alternado $\mathcal{A}_n$ (con $n \geq 3$).
   (i) Probar que todo elemento de $\mathcal{S}_n$ se escribe como producto de transposiciones, y que, además, la paridad del número de transposiciones en dicha descomposición es un invariante.
   (ii) Demostrar que los siguientes conjuntos generan $\mathcal{S}_n$:
      – $\{(1, k) : k \leq 2 \leq n\} \equiv \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots, (1, n)\}$;
      – $\{(k, k + 1) : 1 \leq k \leq n - 1\} \equiv \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), \ldots, (n - 1, n)\}$;
      – $\{(1, 2), (1, \ldots, n)\}$.
   (iii) Demostrar que $\mathcal{A}_n$ está generado por todos los 3-ciclos de $\mathcal{S}_n$. Más aún, probar que la familia
   $$\{(1, 2, k) : k \leq 3 \leq n\} \equiv \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), \ldots, (1, 2, n)\}$$
   genera el grupo alternado $\mathcal{A}_n$.
5. Sea
   $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 2 & 3 & 1 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{12}.$$
   Calcular el orden y la paridad de σ. Descomponer σ como producto de ciclos disjuntos.
6. Sea $\sigma \in \mathcal{S}_7$ una permutación tal que satisface la identidad
   $$(7, 2, 3)\sigma(1, 2, 4, 6) = (1, 2, 5).$$
   Calcular el orden de σ y estudiar si $\sigma \in \mathcal{A}_7$. ¿Tiene σ una raíz cuadrada en $\mathcal{S}_7$?
7. Determinar el número de elementos que tengan orden 10 del grupo simétrico $\mathcal{S}_9$ y estudiar si estos son conjugados entre ellos.
8. Responder a las siguientes cuestiones sobre potencias en el grupo simétrico:
   (i) Encontrar todas las raíces séptimas de $(1, 2, 4)$ en $\mathcal{S}_5$.
   (ii) Estudiar si existe una permutación en $\mathcal{S}_5$ de forma que su cubo sea $(1, 2, 4)$.
9. Demostrar que
   (i) $\mathcal{S}_5$ no posee elementos de orden 20. ¿Es posible que tenga algún elemento de orden 10? Dar uno en caso afirmativo.
   (ii) $\mathcal{S}_8$ no posee elementos de orden 22. ¿Es posible que tenga algún elemento de orden 15? Dar uno en caso afirmativo.
10. Estudiar si las permutaciones siguientes generan los grupos simétricos dados:
   (i) ¿$(1, 2, 3)$ y $(1, 4, 5)$ generan $\mathcal{S}_5$?
   (ii) ¿$(1, 2, 3, 4)$ y $(1, 4, 2)$ generan $\mathcal{S}_4$?

Acciones. Grupos Simples. Los Teoremas de Sylow.

11. Sean G un p-grupo y H un subgrupo normal, no trivial, de G.
    (i) Usar la acción por conjugación de G en $H\backslash\{1_G\}$ para probar que la intersección de H con el centro de G es no trivial. En particular, demostrar que el centro de un p-grupo es no trivial. Concluir que G no es simple, salvo si $|G| = p$.
    (ii) Probar que $|Z(G)| = p$ si G es no abeliano de orden p^3.
12. Sean G un grupo simple y H un subgrupo con $|G : H| = p$. Probar que G es un grupo finito de orden no múltiplo de p^2 siendo p el mayor divisor primo de $|G|$.
13. Sea G un grupo de orden 50 **con un único subgrupo de orden** 2. ¿Es G abeliano?
14. Sea G un grupo no abeliano de orden 385.
    (i) Determinar el número de p-subgrupos de Sylow que tiene G para cada factor primo p del orden de G.
    (ii) Determinar el número de subgrupos que tengan orden 5 y deducir de ello el número de elementos que tengan orden 5 de G.
15. Estudiar si existen grupos simples de órdenes:

    (i) 30
    (ii) 312
    (iii) 108
    (iv) 60
    (v) 100
    (vi) 5625
    (vii) 356
    (viii) 36
    (ix) 520
    (x) 40
    (xi) 616
    (xii) 114

16. Clasificar todos los grupos de orden $2p$ con p primo. ¿Es alguno simple?
17. Sea G un **grupo de orden impar** que contiene un subgrupo normal H de orden 5. Demostrar que en la acción por conjugación de G en H todas las órbitas son unitarias. Concluir que H está contenido en el centro de G
18. Sea G un grupo de orden 805.
    (i) Probar que para cada divisor positivo de $|G|$ existe un subgrupo que tenga por orden dicho divisor.
    (ii) Demostrar que G posee dos subgrupos normales H_{23} y H_{161} de órdenes 23 y 161 respectivamente, con $H_{23} \subseteq H_{161}$. Probar que el cociente G/H_{23} contiene un **único** subgrupo normal de orden 5 y otro (que **también** es **único**) de orden 7.
    (iii) Probar que para cada divisor positivo de $|G|$ existe un **único** subgrupo que tenga por orden dicho divisor (la existencia se ha probado en el apartado (i)).
    (iv) Concluir que G es cíclico.
19. Sean p y q dos números primos distintos.
    (i) Demostrar que todo grupo de orden pq no puede ser simple. ¿Es cíclico?
    (ii) Probar que todo grupo de orden pq es cíclico suponiendo que $p < q$ y $q - 1 \notin p\mathbb{Z}$.
20. Sea G un grupo finito de orden $p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ donde cada p_i es un número primo y se tiene que $\alpha_i > 0$ para cualquier índice $i \in \{1, \dots, m\}$; siendo p_i distinto de p_j cuando $i \neq j$. Supongamos que para cada índice $i \in \{1, \dots, m\}$ fijo y para cada $j_i \in \{1, \dots, \alpha_i\}$ dado, existe un único subgrupo

    $$H_{p_i^{j_i}}$$

    de orden $p_i^{j_i}$.
    (i) Demostrar que

    $$H_{p_i^{\alpha_i}}$$

    es normal para cada $i \in \{1, \dots, m\}$.

(ii) Usar los **Teoremas de Sylow** para concluir que se tiene una cadena (única)
$$\{1_G\} \lhd H_{p_i} \lhd \cdots \lhd H_{p_i^{\alpha_i - 1}} \lhd H_{p_i^{\alpha_i}} \lhd G, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, m\}.$$
(iii) Demostrar que cualquier elemento de
$$H_{p_i^{\alpha_i}} \backslash H_{p_i^{\alpha_i - 1}}$$
tiene orden $p_i^{\alpha_i}$. Dicho de otra forma, demostrar que $H_{p_i^{\alpha_i}}$ es cíclico.
(iv) Probar que si $i, j \in \{1, \dots, m\}$ son índices distintos, entonces los elementos de
$$H_{p_i^{\alpha_i}}$$
conmutan con los de
$$H_{p_j^{\alpha_j}}.$$
(v) Demostrar que G es cíclico.
(vi) Concluir que un grupo finito G es cíclico si, y sólo si, para cada divisor positivo del orden de G existe un único subgrupo de orden dicho divisor[1].

Grupos Resolubles. Clasificación en Grupos Abelianos Finitamente Generados. Presentaciones en Grupos. Teorema Inverso de Lagrange.

21. Estudiar si $\mathcal{S}_9$ tiene algún subgrupo abeliano de orden 21.
22. Sea G el grupo abeliano con presentación
$$G = \left\langle x, y, z, w : \begin{array}{r} 6y - 9z - 3w = 0 \\ 12x + 24y + 9z + 9w = 0 \\ 30x + 42y + 45z + 27w = 0 \end{array} \right\rangle.$$
Determinar el grupo G.
23. Sea G un grupo abeliano con la siguiente presentación
$$G = \langle x, y, z : 2x + 4y + 6z = 0, 4x + 4y + 8z = 0, 4x + 2y + 16z = 0 \rangle.$$
Determinar
(i) el grupo G. (ii) el rango de G.
(iii) los factores invariantes de G.
(iv) si G contienen algún subgrupo cíclico de orden 8.
24. Probar que todo grupo de orden $1892 = 2^2 \cdot 11 \cdot 43$ es resoluble.
25. Clasificar los **grupos abelianos finitos** de órdenes 360 y 1008. Dar además sus coeficientes de torsión.
26. Decidir si los grupos $\mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{10}$ son isomorfos.
27. Sea G con $|G| = 20$. Probar que G tiene subgrupos de todos los órdenes posibles.
28. Sea G un grupo de orden $297 = 3^3 \cdot 11$. Se pide lo siguiente:
(i) Demostrar que G es resoluble.
(ii) Estudiar si G posee subgrupos de órdenes todos los divisores que tiene 297.
29. Sea G un grupo de orden $p^r q$ tal que p y q son números primos distintos entre sí tales que $r \geq 1$ y $p^r < q$. Demostrar que
(i) G no es simple.
(ii) G tiene subgrupos de todos los órdenes posibles.
(iii) G es resoluble.
30. Sean m y n enteros positivos. Calcular los coeficientes de torsión para $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

[1]En realidad, el ejercicio concluye que G es cíclico si, y sólo si, para cada potencia de un primo en la descomposición del orden de G se tiene que existe un único subgrupo de G con orden dicha potencia. Por ejemplo, si G es un grupo de orden $p_1 \cdots p_m$ con $p_i \neq p_j$ para cada $i \neq j$ y el número n_{p_i} de p_i-subgrupos de Sylow que tiene G es 1 para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ fija, entonces G es cíclico.