Ejercicio 5.2.- Determina la F asociada a while $\neg(x=0)$ do $x:=x-1$.

Considera las siguientes funciones parciales de State $\hookrightarrow$ State:

$g_1\, s = \text{undef} \quad \forall s$

$$g_2\, s = \begin{cases} s[x\to 0] & \text{si } sx \geq 0 \\ \text{undef} & \text{si } sx<0 \end{cases}$$

$$g_3\, s = \begin{cases} s[x\to 0] & \text{si } sx \geq 0 \\ s & \text{si } sx<0 \end{cases} \qquad g_4\, s = s[x\to 0] \quad \forall s.$$

$g_5\, s = s \quad \forall s.$

Determina cuales de estas funciones son puntos fijos de F.

En primer lugar

$Fg = \text{cond}(\mathcal{B}[\![\neg(x=0)]\!], g\circ S[\![x:=x-1]\!], S[\![\text{skip}]\!])$, luego g_i es punto fijo de $F \Leftrightarrow Fg_i = g_i \Leftrightarrow Fg_i\, s = g_i\, s \quad \forall s.$

$Fg_i\, s = \text{cond}(\mathcal{B}[\![\neg(x=0)]\!], g\circ S[\![x:=x-1]\!], S[\![\text{skip}]\!])\, s =$

$$= \begin{cases} (g_i\circ S[\![x:=x-1]\!])(s) & \text{si } \mathcal{B}[\![\neg(x=0)]\!]\, s = tt \\ S[\![\text{skip}]\!]\, s & \text{si } \mathcal{B}[\![\neg(x=0)]\!]\, s = ff \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i(S[\![x:=x-1]\!]\, s) & \text{si } sx\neq 0 \\ id(s) & \text{si } sx=0 \end{cases} = \begin{cases} g_i(s[x\mapsto (sx)-1]) & \text{si } sx\neq 0 \\ s & \text{si } sx=0. \end{cases}$$

Por tanto, para g_1, dado un s tal que $sx=0$ se tiene que

$$Fg_1\, s = \begin{cases} g_1(s[x\mapsto (sx)-1]) & \text{si } sx\neq 0 \\ s & \text{si } sx=0 \end{cases} = s \neq \text{undefined} = g_1\, s.$$

$\Rightarrow g_1$ no es un punto fijo de F.

Para g_2. Sea $s \in State$.

Si $sx>0$

$$F g_2\, s = \begin{cases} g_2(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} \overset{sx>0}{=} g_2(\overbrace{s[x\to(sx)-1]}^{s'}) \underset{s'x \,=\, sx-1\geq 0}{=}$$

$$= s'[x\to 0] = s[x\to(sx)-1][x\to 0] \overset{\text{Se prueba}}{=} s[x\to 0] \overset{sx\geq 0}{=} g_2 s$$

Si $sx=0$

$$F g_2\, s = \begin{cases} g_2(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} \overset{sx=0}{=} s \overset{sx=0}{=} s[x\to 0] \overset{sx\geq 0}{=} g_2\, s$$

Si $sx<0$

$$F g_2\, s = \begin{cases} g_2(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} \overset{sx\neq 0}{=} g_2(\overbrace{s[x\mapsto(sx)-1]}^{s'}) \overset{s'x = sx-1<-1<0}{=} \text{undefined} =$$

$$\underset{sx<0}{=} g_2\, s$$

Por tanto $F g_2 = g_2$ y g_2 es un punto fijo de F.

Para g_3: Sea s, $sx<0$.

$$F g_3\, s = \begin{cases} g_3(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} = g_3(\overbrace{s[x\mapsto(sx)-1]}^{s'}) \overset{s'x = (sx)-1<-1<0}{=} s' =$$

$$= s[x\mapsto (sx)-1] \neq s \underset{sx<0}{=} g_3\, s$$

Obviamente $s' = s[x\to(sx)-1]$ y s no son iguales porque $s'x = s[x\to(sx)-1]\,x = sx-1 < sx$. Por tanto g_3 no es punto fijo de F.

Para g_4: Sea $s\in State$.

Si $sx\neq 0$

$$F g_4\, s = \begin{cases} g_4(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} \overset{sx\neq 0}{=} g_4(s[x\mapsto(sx)-1]) = s[x\mapsto sx-1][x\to 0] = s[x\to 0] = g_4\, s.$$

Si $sx=0$

$$F g_4\, s = \begin{cases} g_4(s[x\mapsto (sx)-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0\end{cases} = s \overset{sx=0}{=} s[x\to 0] = g_4\, s.$$

Por tanto g_4 es un punto fijo de F.

Para g_5 Sea s / $sx \neq 0$.

$$Fg_5\, s = \begin{cases} g_5(s[x \mapsto (sx)-1]) & si\ sx \neq 0 \\ s & si\ sx = 0 \end{cases} \overset{sx\neq 0}{\downarrow}{=} g_5(s[x \mapsto (sx)-1]) =$$

$$= s[x \longmapsto (sx)-1] \neq s = g_5\, s.$$

Esto es así porque $s[x \mapsto sx-1]\, x = sx - 1 \neq sx$

Por tanto g_5 no es un punto fijo de F.

Ejercicio 5.3.- Considera el siguiente fragmento del código del factorial while $\neg(x=1)$ do $(y:=y*x,\ x:=x-1)$: Determina la función F asociada y al menos dos puntos fijos de F distintos.

La función F es $Fg = cond(\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!], g \circ \mathcal{S}[\![y:=y*x;\ x:=x-1]\!], id)$.

Vamos a encontrar g_1 y g_2 tales que $Fg_i = g_i$, es decir, $Fg_i\, s = g_i\, s \quad \forall s \in State$.

$$Fg_i\, s = cond(\mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!], g_i \circ \mathcal{S}[\![y:=y*x;\ x:=x-1]\!], id)\, s =$$

$$= \begin{cases} (g_i \circ \mathcal{S}[\![y:=y*x;\ x:=x-1]\!])(s) & si\ \mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]\, s = tt \\ id(s) & si\ \mathcal{B}[\![\neg(x=1)]\!]\, s = ff \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i(\mathcal{S}[\![y:=y*x;\ x:=x-1]\!]\, s) & si\ sx \neq 1 \\ s & si\ sx = 1. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i\left(\left(S[\![x:=x-1]\!] \circ S[\![y:=y*x]\!]\right)(s) \right) & \text{si} \quad sx \neq 1 \\ s & \text{si} \quad sx = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i\left(S[\![x:=x-1]\!] \left(S[\![y:=y*x]\!]\, s \right) \right) & \text{si} \quad sx \neq 1 \\ s & \text{si} \quad sx = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i\left(S[\![x:=x-1]\!] \left(\overbrace{s[y \mapsto (sy)*(sx)]}^{s'} \right) \right) & \text{si} \quad sx \neq 1 \\ s & \text{si} \quad sx = 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} g_i\left(s'[x \mapsto s'x - 1] \right) & \text{si} \quad sx \neq 1 \\ s & \text{si} \quad sx = 1 \end{cases} .$$

Como $s'x = s[y \mapsto (sy)*(sx)]\, x \overset{x \neq y}{=} sx$ esto queda como.

$$F\, g_i\, s = \begin{cases} g_i\left(s[y \to (sy)*(sx)][x \mapsto sx-1] \right) & \text{si} \quad sx \neq 1 \\ s & \text{si} \quad sx = 1. \end{cases}$$

Sea $g_1\, s = \begin{cases} s[x \to 1][y \mapsto (sy)*(sx)!] & \text{si} \quad sx \geq 1 \\ \text{undefined} & \text{si} \quad sx < 1. \end{cases}$

Sea $s \in State$.

$\boxed{\text{Si } sx > 1}$

$$F\, g_1\, s = \begin{cases} g_1\left(s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1] \right) & \text{si } sx \geq 1 \\ s & \text{si } sx < 1 \end{cases} \overset{sx > 1}{=} g_1\left(\underbrace{s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]}_{s'} \right) =$$

(Como $s'x = s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]\, x = sx - 1 \overset{sx>1}{\geq} 1 \Rightarrow g_1(s') = s'[x \to 1][y \to (s'y)*(s'x)!]$)

$$= s'[x \to 1][y \to (s'y)*(s'x)!] \overset{\ast}{=} s'[x \to 1][y \to (sy)*(sx)*(sx-1)!] =$$

$s'y = s[y \to (sy)*(sx)][x \to (sx)-1]\, y = (sy)*(sx)$

$= s'[x \to 1][y \to (sy) * (sx)!] = s[y \to (sy) * (sx)][x \to sx - 1][x \to 1][y \to (sy)*(sx)!] =$

$= s[x \to 1][y \to (sy) * (sx)!] \underset{sx>1}{\overset{\uparrow}{=}} g_1\, s$

Si $sx = 1$

$$F g_1 s = \begin{cases} g_1(s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1] & \text{si } sx \neq 1 \\ s & \text{si } sx = 1 \end{cases} \overset{sx=1}{\underset{\downarrow}{=}} s$$

$$s \overset{?}{=} g_1\, s \overset{sx\neq 1}{\underset{\downarrow}{=}} s[x-1][y \to (sy)*(sx)!] \underset{sx=1}{\overset{\uparrow}{=}} s[x \to 1][y \to sy] = s[x \to 1] \underset{s}{\overset{\| \leftarrow sx=1}{}}$$

Luego $F g_1 s = g_1\, s$ cuando $sx = 1$.

Si $sx < 1$

$$F g_1 s = \begin{cases} g_1(s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]) & \text{si } sx \neq 1 \\ s & \text{si } sx = 1. \end{cases} \overset{sx<1}{\underset{\downarrow}{=}}$$

$$= g_1(\underbrace{s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]}_{s'}) = \text{undefined} \underset{sx<1}{\overset{\uparrow}{=}} g_1\, s$$

$s'x = s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]x = sx - 1 \underset{sx<1}{<} 1$

Por tanto $\forall s \in State$, $F g_1 s = g_1\, s$, es decir $F g_1 = g_1$ y g_1 es un punto fijo de F.

Sea $g_2\, s = s[x \to 1][y \to (sy) * (sx)!]$ $\forall s$.

Veamos que g_2 también es un punto fijo de F.

Sea $s \in State$

Si $sx \neq 1$|

$$F\, g_2\, s = \begin{cases} g_2\,(s[y \mapsto (sy)*(sx)][x \mapsto sx-1]) & si\ sx \neq 1 \\ s & si\ sx = 1 \end{cases} \overset{sx\neq 1}{=} g_2(\underbrace{s[y\mapsto (sy)*(sx)][x\mapsto sx-1]}_{s'})$$

$$= s'[x \to 1][y \to (s'y) * (s'x)!] = s'[x \to 1][y \to (sy)*(sx)*(sx-1)!] =$$

$$s'x = s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]\, x = sx - 1$$
$$s'y = s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1]\, y = (sy)*(sx)$$

$$= s'[x \to 1][y \to (sy)*(sx)!] = s[y \to (sy)*(sx)][x \to sx-1][x \to 1][y \to (sy)*(sx)!] =$$

$$= s[x \to 1][y \to (sy)*(sx)!] = g_2\, s$$

Si $sx = 1$|

$$F\, g_2\, s = \begin{cases} g_2\,(s[y \to (sy)*(sx)][x \mapsto sx-1]) & si\ sx \neq 1 \\ s & si\ sx = 1 \end{cases} \overset{sx=1}{=} s \overset{?}{=} g_2\, s.$$

$$g_2\, s = s[x \to 1][y \to (sy) * (sx)!] \underset{sx=1}{=} s[x \to 1][y \to sy] = s[x \to 1] \underset{sx=1}{=} s \quad \checkmark$$

Por tanto $F g_2 s = g_2 s$ $\forall s \in State$, es decir, $F g_2 = g_2$ y g_2 es un punto fijo de F.

Ejercicio 5.7.- Sean g_1, g_2 y g_3:

$$g_1\, s = \begin{cases} s & \text{si } sx \text{ es par} \\ \text{undef.} & \text{c.c.} \end{cases} \qquad g_2\, s = \begin{cases} s & \text{si } sx \text{ es primo} \\ \text{undef.} & \text{c.c.} \end{cases} \qquad g_3\, s = s.$$

a) Determina el orden de estas funciones.

Se tiene que $g_1 \sqsubseteq g_3$ y $g_2 \sqsubseteq g_3$ pero $g_1 \not\sqsubseteq g_2$ ni $g_2 \not\sqsubseteq g_1$ ya que $g_1\, s = s$ si $sx = 4$ pero como 4 no es primo $g_2\, s = \text{undef.}$ y $g_2\, s = s$ si $sx = 5$, pero como 5 no es par $g_1\, s = \text{undef.}$

b) Encuentra g_4 tal que $g_4 \sqsubseteq g_1$, $g_4 \sqsubseteq g_2$ y $g_4 \sqsubseteq g_3$.

Sea $g_4 = \perp$ que cumple trivialmente todas las propiedades anteriores.

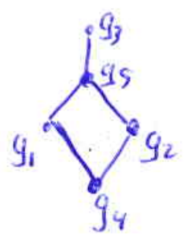
c) Encuentra g_5 tal que $g_1 \sqsubseteq g_5$, $g_2 \sqsubseteq g_5$ y $g_5 \sqsubseteq g_3$ con $g_5 \neq g_i$, $i = 1,2,3$.

Sea $g_5\, s = \begin{cases} s & \text{si } sx \text{ es primo o par} \\ \text{undef.} & \text{en c.c.} \end{cases}$

Se tiene que $g_1 \sqsubseteq g_5$ ya que si $g_1\, s = s'$ entonces $s' = s$ y sx es par. Por tanto, $g_5\, s = s = s'$. Lo mismo pasa en el caso $g_2 \sqsubseteq g_5$.

Por último $g_5 \sqsubseteq g_3$ porque si $g_5\, s = s' \Rightarrow s' = s$ y sx es primo o par y $g_3\, s = s = s'$ ✓.

Obviamente $g_1 \neq g_5$, $g_2 \neq g_5$ y $g_3 \neq g_5$.



Ejercicio 5.8.- Probar que $g_1 \sqsubseteq g_2 \iff grafo(g_1) \subset grafo(g_2)$.

Nótese que $grafo(g) = \{(s,s') : gs = s'\}$

$\Rightarrow]$ Sea $(s,s') \in grafo(g_1)$, entonces $g_1 s = s'$. Como $g_1 \sqsubseteq g_2$ entonces $g_2 s = s'$, luego $(s,s') \in grafo(g_2)$.

$\Leftarrow]$ Sean s y s' tales $g_1 s = s'$. Entonces $(s,s') \in grafo(g_1) \subset grafo(g_2)$ Por tanto $g_2 s = s'$.

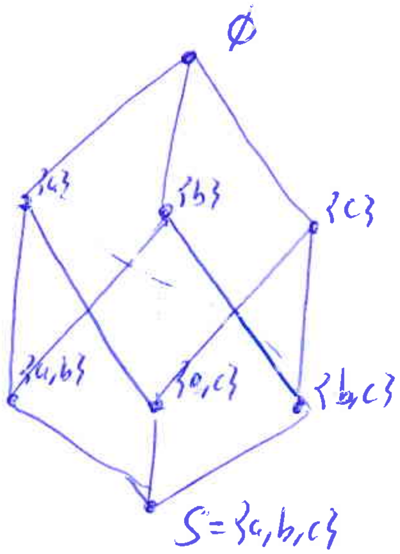
Ejercicio 5.11.- Probar que $(\wp(S), \supseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y determinar el elemento mínimo. Dibujar el diagrama de orden para $S=\{a,b,c\}$

$\supseteq$ es reflexiva porque $K \supseteq K \quad \forall K \subset S$.

$\supseteq$ es transitiva porque si $K_1 \supseteq K_2$ y $K_2 \supseteq K_3$, $K_1, K_2, K_3 \subset S \Rightarrow K_1 \supseteq K_3$.

$\supseteq$ es antisimétrica porque si $K_1 \supseteq K_2$ y $K_2 \supseteq K_1 \Rightarrow K_2 = K_1 \quad \forall K_1, K_2 \subset S$.

El elemento mínimo del conjunto es S ya que si $X \in \wp(S) \Rightarrow X \subset S$, luego $S \supseteq X \quad \forall X \in \wp(S)$.



(Es el diagrama del ejemplo 5.10 puesto "del revés", es decir, "boca abajo").

Ejercicio 5.12: Sea $S \neq \emptyset$ y definimos $\mathcal{P}_{fin}(S) = \{K \mid K \text{ es finito y } K \subseteq S\}$. Probar que $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}_{fin}(S), \supseteq)$ son conjuntos parcialmente ordenados. ¿Tienen ambos un elemento mínimo para cualquier elección de S?

- $\subseteq$ ~~es~~ $\supseteq$ son reflexivas ya que si $K \in \mathcal{P}_{fin}(S)$, es decir, es finito y $K \subseteq S$ entonces $K \subseteq K$ y $K \supseteq K$.
- $\subseteq$ y $\supseteq$ son transitivas. Si $K_1 \subseteq K_2$ y $K_2 \subseteq K_3$ con $K_1, K_2, K_3 \subseteq S$ y finitos entonces $K_1 \subseteq K_3$. (Análogo para $\supseteq$).
- $\subseteq$ y $\supseteq$ son antisimétricas. Si $K_1 \subseteq K_2$ y $K_2 \subseteq K_1$ con $K_1, K_2 \in \mathcal{P}_{fin}(S)$ entonces $K_1 = K_2$ (Igual para $\supseteq$).

Para $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$, el elemento mínimo es $\emptyset$ ya que $\emptyset \in \mathcal{P}_{fin}(S)$ ($\emptyset$ es finito y $\emptyset \subseteq S$ $\forall S$) y $\forall K \subseteq S$ finito, $\emptyset \subseteq K$.

Para $(\mathcal{P}_{fin}(S), \supseteq)$ no siempre hay elemento mínimo. Cuando S es finito será S ya que $S \in \mathcal{P}_{fin}(S)$ y $\forall K$ finito con $K \subseteq S$ entonces $S \supseteq K$. Cuando S es infinito no lo habrá. Si existiera M mínimo se tendría que $M \supseteq K$ $\forall K$ finito $\subseteq S$, con $M \subseteq S$ y finito. Pero por ser M finito y S infinito $\exists x \in S \setminus M$. Se tiene que $M' = M \cup \{x\} \subseteq S$ es finito pero $M \not\supseteq M'$. !!!

Ejercicio 5.14.- Probar que si F tiene un punto fijo que es mínimo, entonces es único.

Supongamos que hay dos g_1 y g_2. Por definición se tiene que

$Fg_1 = g_1$ y $\forall g$ tal que $Fg = g \Rightarrow g_1 E g$ (En particular si $g = g_2$ $g_1 E g_2$)

$Fg_2 = g_2$ y $\forall g$ tal que $Fg = g \Rightarrow g_2 E g$ (En particular si $g = g_1$ $g_2 E g_1$).

Como E es antisimétrica $g_1 = g_2$.

Ejercicio 5.16.- Probar que si Y tiene supremo entonces es único.

Supongamos que d_1 y d_2 son supremos de Y. Entonces

d_1 es cota superior de Y y $\forall d'$ cota superior de $Y \Rightarrow d_1 E d'$
(En particular, para $d' = d_2 \Rightarrow d_1 E d_2$)

d_2 es cota superior de Y y $\forall d'$ cota superior de $Y \Rightarrow d_2 E d'$
(En particular, para $d' = d_1 \Rightarrow d_2 E d_1$).

Como E es antisimétrica $d_1 = d_2$.

Ejercicio 5.18.- Sea $S \neq \emptyset$ y consideramos $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Probar que todo subconjunto de $\mathcal{P}(S)$ tiene supremo. Repetir el ejercicio para $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$.

Sea $X \subseteq \mathcal{P}(S)$ y afirmamos que $\sqcup X = \bigcup_{A \in X} A$

En primer lugar $\bigcup_{A \in X} A \in \mathcal{P}(S) \iff \bigcup_{A \in X} A \subseteq S$

Sea $y \in \bigcup_{A \in X} A$ y veamos que $y \in S$.

Como $y \in \bigcup_{A \in X} A$ $\exists A \in \underset{\mathcal{P}(S)}{\underset{\cap}{X}}$ tal que $y \in A$. Como $A \in \mathcal{P}(S)$ $A \subseteq S$ y
$y \in A \subseteq S \Rightarrow y \in S$ OK.

Veamos que $\bigcup_{A\in X} A$ es cota superior de X.

Sea $B\in X$ y hay que ver que $B\subseteq \bigcup_{A\in X} A$. Pero esto es claro porque B es uno de los elementos de dicha unión

Sea C otra cota superior de X y veamos que $\bigcup_{A\in X} A \subseteq C$.

Como C es cota superior $\forall A\in X$ $A\subseteq C$, y por tanto la unión de los A's estará, es decir $\bigcup_{A\in X} A \subseteq C$.

Esto prueba que $\bigsqcup X = \bigcup_{A\in X} A$.

Si el orden parcial es $(\mathcal{P}(S), \supseteq)$, dado $X\subseteq \mathcal{P}(S)$ veamos que

$$\bigsqcup X = \bigcap_{A\in X} A.$$

En primer lugar $\bigcap_{A\in X} A \in \mathcal{P}(S) \Leftrightarrow \bigcap_{A\in X} A \subseteq S$.

Sea $y\in \bigcap_{A\in X} A$ entonces $\forall A\in X$, $y\in A \in X\subseteq \mathcal{P}(S)$

$$\Rightarrow y\in A\subseteq S \Rightarrow y\in S.$$

Veamos que $\bigcap_{A\in X} A$ es cota superior de X.

Sea $B\in X$ y veamos que $B\supseteq \bigcap_{A\in X} A$.

Dado $y\in \bigcap_{A\in X} A$, pertenece a todos los conjuntos de la intersección y en particular a B luego $y\in B$ ✓.

Por último sea C otra cota superior y veamos que $\bigcap_{A\in B} A \supseteq C$

Por ser C cota superior $\forall A \in \cancel{X}$ $A \supseteq C$. Por tanto $\bigcap_{A\in B} A \supseteq C$.

Ejercicio 5.19.- Sea $S \neq \emptyset$ y consideremos $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$. ~~Dar~~ un ejemplo de que existen elecciones de S para las que $(\mathcal{P}_{fin}(S), \subseteq)$ tiene una cadena que no esta acotada y por tanto que no tiene supremo.

Sea $S = \mathbb{N}$ y consideremos la cadena

$$\mathcal{C} = \{\{1, \dots n\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$$

Se tiene que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ ya que los conjuntos $\{1, \dots n\}$ son finitos y están contenidos en $\mathbb{N}$ para todo $\mathbb{N}$.

Sin embargo, no existe una cota superior de la cadena. Si existiera un $X \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ tal que $\{1, \dots n\} \subseteq X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Basta considerar $n = \overset{\text{finito}}{|X|} + 1 \in \mathbb{N}$ luego $|\{1 \dots n\}| = |X|+1$ y X no puede contener a un conjunto de cardinal finito mayor que el suyo. !!!

Ejercicio 5.21.- Construir un subconjunto Y de $State \hookrightarrow State$. tal que Y no esté acotado superiormente (y por tanto no tenga supremo).

Sea $Y = \{g_1, g_2\}$ con $g_1\, s = s[x \mapsto 1]$ y $g_2\, s = s[x \mapsto 2]$.

Supongamos que g es una cota superior de Y, es decir,

$g_1 \sqsubseteq g$ y $g_2 \sqsubseteq g$. Por tanto $\forall s \in State$ $g\, s = s[x \mapsto 1]$ porque $g_1 \sqsubseteq g$

y $g\, s = s[x \mapsto 2]$ porque $g_2 \sqsubseteq g$.

Pero $s[x \mapsto 1] \neq s[x \mapsto 2]$ $\quad (s[x \mapsto 1]\, x = 1 \neq 2 = s[x \mapsto 2]\, x)$

Ejercicio 5.22. Sea g_n la función

$$g_n\, s = \begin{cases} s[y \to (sx)!][x \to 1] & \text{si } 0 < sx \leq n \\ \text{undef} & \text{si } 0 \geq sx \text{ o } sx > n. \end{cases}$$

Sea $Y_0 = \{g_n \mid n \geq 0\}$. Probar que Y_0 es una cadena, caracterizar las cotas superiores de Y_0 y determinar el supremo.

Sea $n < m$ y veamos que $g_n \sqsubseteq g_m$.

Si $g_n\, s = s'$ entonces $s' = s[y \to (sx)!][x \to 1]$ y $0 < sx \leq n$

Como $n < m$, entonces $0 < sx \leq n < m \Rightarrow 0 < sx \leq m$

luego $g_m\, s = s[y \to (sx)!][x \to 1] = s'$. Por tanto Y_0 es una cadena

Sea g una cota superior de Y_0. Entonces $g_n \sqsubseteq g \; \forall n \geq 0$.

Por tanto si $g_n\, s = s'$ entonces $g\, s = s'$, pero $g_n\, s = s'$ cuando $0 < sx \leq n$ y $s' = s[y \to (sx)!][x \to 1]$. Es decir, que g tiene que verificar que $\forall n \geq 0$ $g\, s = s[y \to (sx)!][x \to 1]$ cuando $0 < sx \leq n$

Por tanto g tiene que verificar $g\, s = s[y \to (sx)!][x \to 1]$ si $0 < sx$.

Las cotas superiores de Y_0 son $\{g \mid g\, s = s[y \to (sx)!][x \to 1] \text{ si } 0 < sx\}$

El supremo de Y_0 es $g\, s = \begin{cases} s[y \to (sx)!][x \to 1] & \text{si } 0 < sx \\ \text{undefined} & \text{si } 0 \geq sx. \end{cases}$

ya que $g \sqsubseteq g'$ para toda g' cota superior de Y_0.

Ejercicio 5.27.- Consideramos el ccpo $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Determinar cuáles de las funciones son monótonas.

a) $f_1 X = \mathbb{N} \setminus X$ No es monótona. $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ pero $f_1 \emptyset = \mathbb{N} \not\subseteq \emptyset = f_1 \mathbb{N}$.

b) $f_2 X = X \cup \{27\}$ Sí es monótona. Sean X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$

Entonces $f_2 X_1 = X_1 \cup \{27\}$ y $f_2 X_2 = X_2 \cup \{27\}$. Como $X_1 \subseteq X_2$ entonces

$X_1 \cup \{27\} \subseteq X_2 \cup \{27\} \Leftrightarrow f_2 X_1 \subseteq f_2 X_2$

c) $f_3 X = X \cap \{7,9,13\}$. Sí es monótona Sean X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$.

$\Rightarrow f_3 X_1 = X_1 \cap \{7,9,13\}$, $f_3 X_2 = X_2 \cap \{7,9,13\}$.

Sea $x \in X_1 \cap \{7,9,13\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in X_1 \overset{X_1 \subseteq X_2}{\Rightarrow} x \in X_2 \\ \text{y} \\ x \in \{7,9,13\} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in X_2 \cap \{7,9,13\}$

$\Rightarrow f_3 X_1 \subseteq f_3 X_2$.

d) $f_4 X = \{n \in X \mid n \text{ es primo}\}$. Sí es monótona. Sean X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$.

Veamos que $f_4 X_1 \subseteq f_4 X_2$. Si $x \in f_4 X_1 \Rightarrow x \in X_1$ y es primo.

Como $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow x \in X_2$ (y es primo) $\Rightarrow x \in f_4 X_2$.

e) $f_5 X = \{2 \cdot n \mid n \in X\}$. Sí es monótona. Sean X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$

y veamos que $f_5 X_1 \subseteq f_5 X_2$.

Sea $x \in f_5 X_1$, entonces $\exists n \in X_1$ tal que $x = 2 \cdot n$. Como $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow n \in X_2$

y x es de la forma $x = 2 \cdot n$ con $n \in X_2$, luego $x \in f_5 X_2$.

Ejercicio 5.28.- Determinar cuáles de las funciones de $(State \hookrightarrow State) \longrightarrow (State \hookrightarrow State)$. son monótonas:

a) $F_0\, g = g$. Evidentemente. Si $g_1 \sqsubseteq g_2 \Rightarrow F_0 g_1 = g_1 \sqsubseteq g_2 = F_0 g_2$.

b) $F_1\, g = \begin{cases} g_1 & \text{si } g = g_2 \\ g_2 & \text{c.c.} \end{cases}$ con $g_1 \neq g_2$. No es monótona para cualquier elección de g_1 y g_2 en estas condiciones. Como $g_1 \neq g_2$ se tiene que

A) $g_1 \sqsubseteq g_2$ y $g_2 \not\sqsubseteq g_1$. Entonces $F_1 g_1 = g_2 \not\sqsubseteq g_1 = F_1 g_2$.

B) $g_2 \sqsubseteq g_1$ y $g_1 \not\sqsubseteq g_2$. Entonces $F_1 g_2 = g_1 \not\sqsubseteq g_2 = F_1 g_1$

C) $g_1 \not\sqsubseteq g_2$ y $g_2 \not\sqsubseteq g_1$. $g_2 \neq \perp$ porque $\perp \sqsubseteq g \ \forall g$, en particular para g_1.

Por tanto $\perp \sqsubseteq g_2$ y $F_1 \perp \underset{\substack{\uparrow \\ g_2 \neq \perp}}{=} g_2 \not\sqsubseteq g_1 = F_1 g_2$

(Nótese que no se ha utilizado que $g_1 \not\sqsubseteq g_2$ luego este mismo argumento valdría para A)

c) $(F'g)\, s = \begin{cases} g\,s & \text{si } sx \neq 0 \\ s & \text{si } sx = 0. \end{cases}$ Es monótona.

Sean g_1 y g_2 con $g_1 \sqsubseteq g_2$ y veamos que $F'g_1 \sqsubseteq F'g_2$.

Supongamos entonces que $F'g_1\, s = s'$ y hay que ver que $F'g_2\, s = s'$.

$\underline{\text{Si } sx \neq 0}$ $\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ s'}}{F'g_1\, s} \overset{sx\neq 0}{=} g_1 s \Rightarrow g_1 s = s' \overset{g_1 \sqsubseteq g_2}{\Longrightarrow} g_2 s = s'$

Entonces $F'g_2\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sx \neq 0}}{=} g_2 s = s'$ ✓.

Si $sx=0$ $\Rightarrow$ $F'g_1 s = s$ y $F' g_2 s = s = s'$
$\overset{\|}{s'}$

Ejercicio 5.33. Probar que

$$F'gs = \begin{cases} gs & \text{si } sx \neq 0 \\ s & \text{si } sx = 0 \end{cases}$$ es continua.

Vimos en el ejercicio 5.28 que era monótona así que basta ver que para cualquier cadena Y no vacía

$$\bigsqcup\{Fg \mid g\in Y\} = F(\bigsqcup Y)$$

El Lema 5.30 da que $\sqsubseteq$ (por que $\longrightarrow$ $((State \to State), \sqsubseteq)$ es cpo (Lema 5.25)).

Para ver que $F(\bigsqcup Y) \sqsupseteq \bigsqcup\{Fg \mid g\in Y\}$ hay que ver que si g_0 es una cota superior de $\{Fg \mid g\in Y\}$ ($Fg \sqsubseteq g_0$ $\forall g\in Y$) entonces $F(\bigsqcup Y) \sqsubseteq g_0$

Sean s, s' tales que $F(\bigsqcup Y)s = s'$ y hay que ver que $g_0 s = s'$

Si $sx=0$

Entonces $F(\bigsqcup Y)s = s \Rightarrow s = s'$ y basta ver que $g_0 s = s$.

Tiene que existir un $g_1 \in Y$ porque Y es no vacía y se tiene que $Fg_1 \sqsubseteq g_0$ por ser g_0 cota superior. Entonces, como $Fg_1 s = s \Rightarrow g_0 s = s$.

Si $sx \neq 0$ Se tiene que $F(\bigsqcup Y)s = (\bigsqcup Y)s \Leftrightarrow (\bigsqcup Y)s = s'$

Tiene que existir un $g_1 \in Y$ tal que $g_1 s = s'$. Supongamos que no existe ese g_1. No se puede dar que $\exists g\in Y$ tal que $gs = s'' \neq s'$ ya que $g \sqsubseteq \bigsqcup Y$ y en tal caso $\bigsqcup Y s = s'' \neq s'$!!! Por tanto gs debe estar indefinido para todo $g\in Y$.

Pero esto también nos lleva a contradicción ya que $Gs = \begin{cases} \sqcup Ys & \text{si } s\,x=0 \\ \text{undefined} & cc \end{cases}$
verifica que es una cota superior de Y y $G \sqsubseteq \sqcup Y$ lo cual lleva a contradicción.

Por tanto $\exists g_1 \in Y$ tal que $g_1 s = s'$. Como $Fg_1 s = g_1 s' = s'$ y

$$Fg_1 \sqsubseteq g_0 \Rightarrow g_0 s = s' \checkmark$$

Ejercicio 5.34.- Supongamos que $(D, \sqsubseteq)$ y $(D', \sqsubseteq')$ son ccpo's y supongamos que $f: D \to D'$ verifica que $\sqcup'\{fd \mid d \in Y\} = f(\sqcup Y)$ para cualquier cadena no vacía en D. Probar que f es monótona.

Sean $d_1, d_2 \in D$ con $d_1 \sqsubseteq d_2$ y veamos que $fd_1 \sqsubseteq fd_2$.
Consideramos la cadena $Y = \{d_1, d_2\}$ que tiene como supremo $\sqcup Y = d_2$ (Obviamente es cota superior y por pertenecer al conjunto supremo).
Se tiene que $f(\sqcup Y) = fd_2 = \sqcup'\{fd \mid d \in Y\}$.
En particular fd_2 es cota superior de $\{fd \mid d \in Y\} = \{fd_1, fd_2\}$ luego $fd_1 \sqsubseteq fd_2$.

Ejercicio 5.36.- Probar que si f y f' son estrictas, entonces $f' \circ f$ también lo es.
$f: D \to D'$ $\quad f': D' \to D''$ $\quad$ y $f\perp = \perp'$ y $f'\perp' = \perp''$

Obviamente $f' \circ f : D \to D''$ verifica que $(f' \circ f)(\perp) = f'(f\perp) = f'\perp' = \perp''$, luego es estricta.

Ejercicio 5.39.- Encontrar FIXF de las funciones F asociadas a los bucles while de los ejercicios 5.2 y 5.3.

a) while $\neg(x=0)$ do $x:=x-1$. Teníamos que F era

$$F\,g\,s = \begin{cases} g(s[x\mapsto sx-1]) & si\ sx\neq 0\\ s & si\ sx=0.\end{cases}$$

$$F^0\bot=\bot \Rightarrow F^0\bot\, s = \text{undef.}\ \forall s.$$

$$F^1\bot = F\bot \Rightarrow F\bot\, s = \begin{cases}\bot(\quad) & si\ sx\neq0\\ s & si\ sx=0\end{cases} = \begin{cases} \text{undef} & si\ sx\neq 0\\ s & si\ sx=0.\end{cases}$$

$$F^2\bot = F(F\bot) \Rightarrow F^2\bot\, s = \begin{cases} F\bot(\overbrace{s[x\mapsto sx-1]}^{s'}) & si\ sx\neq0 \\ s & si\ sx=0.\end{cases} \underset{s'x=sx-1}{=} \begin{cases} \text{undefined} & si\ s'x\neq0\ y\ sx\neq0\\ s[x\mapsto sx-1] & si\ s'x=0\ y\ sx\neq0\\ s & si\ sx=0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{undefined} & si\ sx\neq1, sx\neq0\\ s[x\mapsto sx-1] & si\ sx=1\\ s & si\ sx=0.\end{cases}$$

$$F^3\bot = F(F^2\bot) \Rightarrow F^3\bot\, s = \begin{cases} F^2\bot(\overbrace{s[x\mapsto sx-1]}^{s'}) & si\ sx\neq0\\ s & si\ sx=0\end{cases} \underset{s'x=sx-1}{=} \begin{cases} \text{undefined} & si\ s'x\neq1, s'x\neq0,\ sx\neq0\\ s'[x\mapsto s'x-1] & si\ s'x=1, sx\neq0\\ s' & si\ s'x=0, sx\neq0\\ s & si\ sx\neq0\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{undefined} & si\ sx\neq2, sx\neq1, sx\neq0\\ s'[x\mapsto sx-2] & si\ sx=2\\ s' & si\ sx=1\\ s & si\ sx=0\end{cases} = \begin{cases} \text{undefined} & cc.\\ s[x\to sx-2] & si\ sx=2\\ s[x\to sx-1] & si\ sx=1\\ s & si\ sx=0\end{cases}$$

Afirmamos que $F^n\bot\, s = \begin{cases} s[x\to sx-m] & si\ sx=m \quad con\ m=0,1,2,\dots,n-1\\ \text{undefined} & en\ cc.\end{cases}$

Lo probamos por inducción.

Caso base| Es cierto para $n=0, 1, 2$ y 3.

Paso inductivo| Supongámoslo probado para $n\geq 0$ y veamos que se cumple para $n+1$.

$F^{n+1}\bot = F(F^n\bot)$.

$$\Rightarrow F^{n+1}\bot\, s = \begin{cases} F^n\bot(s[x\mapsto sx-1]) & si\ sx\neq 0 \\ s & si\ sx=0. \end{cases}$$

Si $sx=m$ con $m=1,\dots n$

Entonces $s'=s[x\mapsto sx-1]$ verifica que $s'x=sx-1=m-1\in\{0,1,\dots n-1\}$.
Por hipótesis de inducción.

$$F^{n+1}\bot s = F^n\bot(s') \overset{HI}{=} s'[x\to s'x-(m-1)] = s'[x\mapsto sx-1-m+1] =$$
$$= s'[x\mapsto sx-m] = s[x\mapsto sx-m] \ \underline{OK}.$$

Si $sx=0$ $\Rightarrow F^{n+1}\bot s = s = s[x\mapsto sx-0]$ $\underline{OK}$.

Si $sx<0$ o $sx>n$

$$\Rightarrow F^{n+1}\bot s = F^n\bot(\underbrace{s[x\mapsto sx-1]}_{s'}) \overset{HI.}{=} \text{undefined}.$$

$s'x=sx-1<sx<0$
o
$s'x=sx-1>n-1$; $(s'x\geq n)$

En resumen

$$F^{n+1}\bot s = \begin{cases} s[x\to sx-m] & si\ sx=m \text{ con } m=1\dots n \\ s & si\ sx=0 \\ \text{undef} & cc \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} s[x\to sx-m] & si\ sx=m \text{ con } m=0,1,\dots n \\ \text{undef} & cc. \end{cases}$$

✓

Por tanto, hemos probado que

$$F^n \bot\, s = \begin{cases} s[x \mapsto \overset{0}{\overset{\shortparallel}{sx-m}}] & \text{si } sx = m \quad \text{con } m = 0, 1, 2 \cdots n-1. \\ \text{undefined} & \text{en cc.} \end{cases}$$

Por el teorema 5.37, $FIX\, F = \bigsqcup \{F^n \bot \mid n \geq 0\}$. (Asumimos que hemos probado que F es continua)

Veamos que $\bigsqcup \{F^n \bot \mid n \geq 0\} = G$

donde $G\, s = \begin{cases} s[x \to 0] & \text{si } sx \geq 0 \\ \text{undefined} & \text{cc} \end{cases}$

- G es cota superior de $\{F^n \bot \mid n \geq 0\}$ porque si

  $F^n \bot\, s = s'$, entonces $s' = s[x \mapsto 0]$ y $sx = m$ con $m = 0, 1, \cdots n-1$

  Por tanto $G\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sx \geq 0}}{=} s[x \to 0] = s'$.

- G es el supremo de $\{F^n \bot \mid n \geq 0\}$. Si G' es cota superior de G

  $\Rightarrow F^n \bot \sqsubseteq G' \quad \forall n \geq 0$.

  Si $G\, s = s' \Rightarrow s' = s[x \mapsto 0]$ y $sx \geq 0$.

  Como $sx \geq 0$, $sx = m$ con $m \geq 0$. Como $F^n \bot \sqsubseteq G' \quad \forall n \geq 0$, en particular lo cumple para $n = m+1 \Rightarrow F^{m+1} \bot \sqsubseteq G'$.

  Pero $F^{m+1} \bot\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sx = m \text{ con } m \in \{0, \cdots, \underbrace{m+1-1}_{m}\}}}{=} s[x \mapsto 0] \overset{F^{m+1}\bot \sqsubseteq G'}{\Longrightarrow} G' s = s[x \to 0] = s'$.

  Por tanto $G \sqsubseteq G'$. y $G = FIX\, F = \bigsqcup \{F^n \bot \mid n \geq 0\}$.

b) while $(\neg x=1)$ do$(y:=y*x;\ x:=x-1)$. Teníamos que F era:

$$F_g\, s = \begin{cases} g(s[y\mapsto(sy)*(sx)][x\mapsto sx-1]) & \text{si } sx\neq 1 \\ s & \text{si } sx=1. \end{cases}$$

Entonces $F^0\bot=\bot \Rightarrow \bot s=\text{undef}\ \ \forall s.$

$$F^1\bot=F\bot \Rightarrow F\bot s=\begin{cases}\text{undef} & \text{si } sx\neq 1\\ s & \text{si } sx=1.\end{cases}$$

$$F^2\bot=F(F\bot)\Rightarrow F^2\bot\, s=\begin{cases}F\bot(\overbrace{s[y\mapsto sy\, sx][x\to sx-1]}^{s'}) & \text{si } sx\neq 1\\ s & \text{si } sx=1\end{cases} \underset{s'x=sx-1}{=}$$

$$=\begin{cases}\text{undef} & \text{si } s'x\neq 1 \text{ y } sx\neq 1\\ s' & \text{si } s'x=1 \text{ y } sx\neq 1\\ s & \text{si } sx=1\end{cases} = \begin{cases}\text{undef} & \text{si } sx\neq 2,\ sx\neq 1.\\ s[y\mapsto sy\cdot sx][x\mapsto sx-1] & \text{si } sx=2\\ s & \text{si } sx=1.\end{cases}$$

$$F^3\bot=F(F^2\bot)\Rightarrow F^3\bot\, s=\begin{cases}F^2\bot(s') & \text{si } sx\neq 1\\ s & \text{si } sx=1\end{cases} = \begin{cases}\text{undef} & s'x\neq 2, s'x\neq 1, sx\neq 1\\ s'[y\to s'y\, s'x][x\to s'x-1] & s'x=2,\ sx\neq 1\\ s' & s'x=1,\ sx\neq 1\\ s & \text{si } sx=1\end{cases}$$

$$\underset{\substack{s'x=sx-1\\ s'y=sy\cdot sx}}{=} \begin{cases}\text{undef} & cc\\ s'[y\to sy\cdot sx\cdot(sx-1)][x\to sx-1-1] & sx=3\\ s[y\mapsto sy\cdot sx][x\to sx-1] & sx=2\\ s & sx=1.\end{cases} = \begin{cases}\text{undef} & cc\\ s[y\to sy\cdot sx\cdot(sx-1)][x\to sx-2] & sx=3\\ s[y\to sy\cdot sx][x\to sx-1]. & sx=2\\ s & sx=1\end{cases}$$

Afirmamos que $F^n \bot\, s = \begin{cases} s[y \mapsto sy \cdot \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i)][x \to 1] & \text{si } sx = m, \text{ con } m \in \{1, \ldots n\} \\ \text{undef.} & cc \end{cases}$

Por inducción

Casos base| Se cumplen para $n = 0, 1, 2$ y 3.

Paso inductivo| Supongámoslo probado para $n \neq 1$ y lo vemos para $n+1$.

$$F^{n+1}\bot = F(F^n \bot) \Rightarrow F^{n+1} \bot\, s = \begin{cases} F^n \bot\, (s[y \mapsto sy \cdot sx][x \mapsto sx-1]) & \text{si } sx \neq 1 \\ s & \text{si } sx = 1 \end{cases}$$

Si $sx = m$ con $m \in \{2, 3, \cdots n+1\}$|

$$\Rightarrow F^{n+1}\bot\, s = F^n \bot\, s' \underset{\substack{\uparrow \\ HI \text{ y } s'x = sx-1 = m-1 \in \{1 \cdots n\} \\ (s'y = sy \cdot sx)}}{=} s'[y \mapsto s'y \cdot \prod_{i=0}^{m-2}(s'x - i)][x \to 1] =$$

$$= s'[y \mapsto sy \cdot sx \cdot \prod_{i=0}^{m-2}(sx-1-i)][x \to 1] = s'[y \mapsto sy \cdot \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i)][x \to 1] =$$

$$= s[y \mapsto sy \cdot \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i)][x \to 1]. \quad \text{OK}.$$

Si $sx = 1$|

$$F^{n+1}\bot\, s = s = s[y \mapsto sy][x \to sx] = s[y \mapsto sy \cdot 1][x \to 1] =$$

$$= s[y \mapsto sy \cdot \prod_{i=0}^{1-2}(sx-i)][x \to 1] \quad \text{OK}.$$

Si $sx < 1$ o $sx > n+1$.|

$$F^{n+1}\bot\, s = F^n \bot\, s' \underset{\substack{\uparrow \\ s'x = sx - 1}}{\overset{HI}{=}} \text{undefined}.$$

$s'x = sx-1 \begin{cases} \text{si } sx < 1 \Rightarrow s'x < 0 < 1 \\ \text{si } sx > n+1 \Rightarrow s'x > n \end{cases}$

Luego

$$F^{n+1}\bot\, s = \begin{cases} s[y \mapsto sy \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i)][x\to 1] & sx = m \text{ con } m\in\{1,\dots n+1\} \\ \text{undef.} & \text{c.c} \end{cases}$$

Por tanto hemos probado por inducción que

$$F^{n}\bot\, s = \begin{cases} s[y \to sy\cdot \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i)][x\to 1] & \text{si } sx = m \text{ con } m\in\{1\cdots n\} \\ \text{undef.} & \text{cc.} \end{cases}$$

Nótese que si $sx = m \Rightarrow \prod_{i=0}^{m-2}(sx-i) = \prod_{i=0}^{m-2}(m-i) \underset{\uparrow}{=} \prod_{l=2}^{m} l = \prod_{l=1}^{m} l = m! = (sx)!$

$m-i=l$

$i=0 \Rightarrow l=m$

$i=m-2 \Rightarrow l=2$

Por tanto $F^{n}\bot\, s = \begin{cases} s[y\to sy\cdot(sx)!][x\to 1] & \text{si } sx\in\{1\cdots n\} \\ \text{undef} & \text{cc.} \end{cases}$

Por el Teorema 5.37 $\text{FIX } F = \sqcup\{F^n\bot \mid n\geq 0\}$. (Asumimos probado que F es continua)

Veamos que $G = \sqcup\{F^n\bot \mid n\geq 0\}$ donde $G\,s = \begin{cases} s[y\to sy(sx)!][x\to 1] & sx\geq 1 \\ \text{undef} & \text{cc.} \end{cases}$

- G es cota superior ($F^n\bot \sqsubseteq G \;\; \forall n\geq 0$).

  En efecto, si $F^n\bot\, s = s' \Rightarrow s' = s[y\to sy(sx)!][x\to 1]$ y $sx\in\{1\cdots n\}$.

  Como $sx\geq 1 \Rightarrow G\, s = s[y\to (sx)!][x\to 1] = s'$

- Para toda otra cota superior G', se tiene que $G\sqsubseteq G'$.

Efectivamente, si $Gs = s' \Rightarrow s' = s[y \mapsto sy \cdot (sx)!][x \mapsto 1]$ y $sx \geq 1$.

Como $sx = n$ con $n \geq 1$ y G' es cota superior de $\{F^n \bot \mid n \geq 0\}$ en particular $F^n \bot \sqsubseteq G'$.

$$\text{Por tanto } F^n \bot\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sx = n \in \{1 \dots n\}}}{=} s[y \mapsto sy \cdot (sx)!][x \mapsto 1] \overset{\substack{F^n\bot \sqsubseteq G' \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} G's = s[y \mapsto sy(sx)!][x \mapsto 1] = s'$$

Ejercicio 5.40.- Sea $f: D \to D$ una función continua en un ccpo $(D, \sqsubseteq)$ y un $d \in D$ tal que $fd \sqsubseteq d$. Probar que $FIX\, f \sqsubseteq d$.

Como f es continua y D es un ccpo, podemos aplicar el Teorema 5.37, que nos dice que $FIX\, f = \bigsqcup \{f^n \bot \mid n \geq 0\}$. Para probar que $FIX\, f \sqsubseteq d$, basta ver que d es cota superior de $\{f^n \bot \mid n \geq 0\}$ y entonces se tendrá $\underbrace{\bigsqcup \{f^n \bot \mid n \geq 0\}}_{FIX\, f.} \sqsubseteq d$.

Sea $n \geq 0$. Entonces $\bot \sqsubseteq d$ y por la monotonía de f $f^n \bot \sqsubseteq f^n d$. Usando la propiedad de que $fd \sqsubseteq d$ y por inducción se llega a que $f^n \bot \sqsubseteq f^n d \sqsubseteq d$. Por transitividad $f^n \bot \sqsubseteq d$, luego d es cota superior, como queríamos probar.

Ejercicio 5.41.- Sea $(D, \sqsubseteq)$ un ccpo y definimos $(D\to D, \sqsubseteq')$ con $f_1 \sqsubseteq' f_2$ sii $f_1 d \sqsubseteq f_2 d \ \forall d \in D$. Probar que $(D\to D, \sqsubseteq')$ es un ccpo y que FIX es "continua" en el sentido de que

$$FIX(\sqcup' \mathcal{F}) = \sqcup \{FIX f \mid f \in \mathcal{F}\} \quad \forall \mathcal{F} \subset D\to D \text{ cadena no vacía}$$

de funciones continuas.

Para lo primero, sea $Y \subset D \to D$ una cadena no vacía de funciones y tenemos que probar que tiene supremo, es decir, $\exists \sqcup' Y$.

El candidato a supremo debe ser g, con $g\, d = \sqcup \{f d \mid f \in Y\} \ \forall d \in D$, es decir, para cada $d_0 \in D$, consideramos el conjunto $Z_{d_0} \{f d_0 \mid f \in Y\}$. Este conjunto es una cadena ya que dados $f_1, f_2 \in Y$ se tiene que, sin pérdida de generalidad, $f_1 \sqsubseteq' f_2$ (por ser Y cadena). luego $f_1 d \sqsubseteq f_2 d \ \forall d \in D$, en particular $f_1 d_0 \sqsubseteq f_2 d_0$. Por tanto el conjunto Z es una cadena (no vacía porque Y es no vacía) y como $Z_{d_0} \subset D$ y $(D, \sqsubseteq)$ es un ccpo, $\exists \sqcup Z_{d_0}$ y hacemos $g\, d_0 = \sqcup Z_{d_0}$ para cada $d_0 \in D$. Por tanto g está bien definida.

Para probar que g es efectivamente $\sqcup' Y$ procedemos de forma estándar.

• g es cota superior de Y.

En efecto, dado $f \in Y$ hay que ver que $f \sqsubseteq' g$. Y para esto último sea $d \in D$ y veamos que $fd \sqsubseteq gd$. Pero esto último es claro ya que, al ser $gd = \sqcup\{fd \mid f \in Y\}$ se tiene que $fd \sqsubseteq gd$.

• Si g' es cota superior de $Y \Rightarrow g \sqsubseteq' g'$.

Para verlo, sea $d \in D$ y veamos que $gd \sqsubseteq g'd \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqcup\{fd \mid f \in Y\} \sqsubseteq g'd$. Basta ver que $g'd$ es cota superior de $\{fd \mid f \in Y\}$, pero esto es claro ya que, como $f \sqsubseteq' g \; \forall f \in Y$ se tiene que $fd \sqsubseteq g'd$. !!

Queda probado que $\sqcup' Y = g$, es decir, que $(D \to D, \sqsubseteq')$ es un cpo.

Para la segunda parte nos será útil que

$\sqcup' \mathcal{F} d = \sqcup\{fd \mid f \in \mathcal{F}\}$ cuando $\mathcal{F}$ es una cadena de funciones no vacía y $d \in D$.

En primer lugar veamos que $\sqcup' \mathcal{F}$ es continua cuando $\mathcal{F}$ es una cadena no vacía de funciones continuas.

• Es monótona: Sean $d_1, d_2 \in D$ con $d_1 \sqsubseteq d_2$ y queremos ver que

$\sqcup' \mathcal{F} d_1 \overset{?}{\sqsubseteq} \sqcup' \mathcal{F} d_2 \Leftrightarrow \sqcup\{fd_1 \mid f \in \mathcal{F}\} \sqsubseteq \sqcup\{fd_2 \mid f \in \mathcal{F}\}$

Como $\forall f \in \mathcal{F}$ f es continua $\Rightarrow fd_1 \sqsubseteq fd_2 \; \forall f \in \mathcal{F}$

Además $f \sqsubseteq \sqcup' \mathcal{F} \; \forall f \in \mathcal{F}$ luego $fd_2 \sqsubseteq \sqcup' \mathcal{F} d_2 = \sqcup\{fd_2 \mid f \in \mathcal{F}\} \; \forall f \in \mathcal{F}$

Por transitividad $fd_1 \sqsubseteq \sqcup' \mathcal{F} d_2 \; \forall f \in \mathcal{F}$ luego $\sqcup\{fd_1 \mid f \in \mathcal{F}\} \sqsubseteq \sqcup' \mathcal{F} d_2$, como queríamos ver.

• Verifica que $\sqcup\{\sqcup'\mathcal{F} d \mid d\in Y\} = \sqcup'\mathcal{F}(\sqcup Y)$ $\forall Y$ cadena no vacía de D.

Sabemos que $\sqcup'\mathcal{F}(\sqcup Y)$ es cota superior de $\{\sqcup'\mathcal{F} d \mid d\in Y\}$ y para ver que es el supremo sea d_1 tal que $\sqcup'\mathcal{F} d \sqsubseteq d_1$ $\forall d\in Y$ y veamos que $\sqcup'\mathcal{F}(\sqcup Y)\sqsubseteq d_1$.

$\sqcup'\mathcal{F}(\sqcup Y) = \sqcup\{f(\sqcup Y) \mid f\in\mathcal{F}\} \overset{?}{\sqsubseteq} d_1$. Basta ver que d_1 es cota superior de $\{f(\sqcup Y)\mid f\in\mathcal{F}\}$ es decir, que $f(\sqcup Y)\sqsubseteq d_1$ $\forall f\in\mathcal{F}$

Pero sabemos que $\sqcup'\mathcal{F} d\sqsubseteq d_1$ $\forall d\in Y \Leftrightarrow \sqcup\{f(d)\mid f\in\mathcal{F}\}\sqsubseteq d_1$ $\forall d\in Y$.

Como d_1 es cota superior de $\{f(d)\mid f\in\mathcal{F}\}$ $\forall d$, $f(d)\sqsubseteq d_1$ $\forall d\in Y$ y $\forall f\in\mathcal{F}$.

Tomando el supremo en $d\in Y$ se tiene que $\sqcup\{f(d)\mid d\in Y\}\sqsubseteq d_1$ $\forall f\in\mathcal{F}$, pero como las f's son continuas $\sqcup\{f(d)\mid d\in Y\} = f(\sqcup Y)\sqsubseteq d_1$ $\forall f\in\mathcal{F}$, que es lo que había que demostrar.

Una vez visto que $\sqcup'\mathcal{F}$ es continua, probamos que $FIX(\sqcup'\mathcal{F}) = \sqcup\{FIX\, f\mid f\in\mathcal{F}\}$
Como tanto $\sqcup'\mathcal{F}$ como f's son continuas, por el T^a 5.37, esto es equivalente a ver que:

$$\sqcup\{\sqcup\{f^n\bot\mid n\geq 0\}\mid f\in\mathcal{F}\} = \sqcup\{(\sqcup'\mathcal{F})^n\bot\mid n\geq 0\}$$

Vemos primero que $d_0 = \sqcup\{(\sqcup'\mathcal{F})^n\bot\mid n\geq0\}$ es cota superior de $\{\sqcup\{f^n\bot\mid n\geq 0\}\mid f\in\mathcal{F}\}$, luego se tendrá $\sqsubseteq$..

Hay que ver que $\sqcup\{f^n\bot\mid n\geq0\}\sqsubseteq d_0$ $\forall f\in\mathcal{F}$. Pero nuevamente, para ver esto probamos que d_0 es cota superior de $\{f^n\bot\mid n\geq 0\}$, es decir, $f^n\bot\sqsubseteq d_0$ $\forall n\geq 0$

Veamos que efectivamente $f^n\bot \sqsubseteq \bigsqcup\{(\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot \mid n\geq 0\} = d_0$ $\forall f\in\mathcal{F}$ y $\forall n\geq 0$.

Se tiene, por definición que $f \sqsubseteq' \bigsqcup'\mathcal{F}$ $\forall f\in\mathcal{F}$, luego $f\bot \sqsubseteq \bigsqcup'\mathcal{F}\bot$.

Al aplicar f en ambos lados, como f es continua $\Rightarrow$ monótona.

$$f^2\bot \sqsubseteq f(\bigsqcup'\mathcal{F}\bot) \underset{f\sqsubseteq'\bigsqcup'\mathcal{F}}{\sqsubseteq} \bigsqcup'\mathcal{F}(\bigsqcup'\mathcal{F}\bot) = (\bigsqcup'\mathcal{F})^2\bot$$

Por inducción se tiene que $f^n\bot \sqsubseteq (\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot$ $\forall n\geq 0$. y $\forall f\in\mathcal{F}$.

$\Longrightarrow$ $f^n\bot \sqsubseteq (\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot \sqsubseteq \bigsqcup\{(\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot \mid n\geq 0\} = d_0$ $\forall f\in\mathcal{F}$ y $\forall n\geq 0$.

Esto termina de demostrar $\boxed{\sqsubseteq}$

Veamos que si d_1 es cota superior de $\{\bigsqcup\{f^n\bot \mid n\geq 0\} \mid f\in\mathcal{F}\}$ entonces $d_0\sqsubseteq d_1 \Leftrightarrow \bigsqcup\{(\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot \mid n\geq 0\} \sqsubseteq d_1$ (Esto prueba que d_0 es, además de cota superior, supremo de $\{\bigsqcup\{f^n\bot \mid n\geq 0\} \mid f\in\mathcal{F}\}$.

Para esto último basta ver que $(\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot \sqsubseteq d_1$ $\forall n\geq 0$.

Veamos que $(\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot = \bigsqcup\{f^n\bot \mid f\in\mathcal{F}\}$ y se tendría el resultado.

Por inducción sobre $n\geq 0$.

<u>Caso base $n=0$</u>| $\Rightarrow (\bigsqcup'\mathcal{F})^0\bot = \bot = \bigsqcup\{\bot \mid f\in\mathcal{F}\} = \bigsqcup\{f^0\bot \mid f\in\mathcal{F}\}$

<u>Paso inductivo</u>| Supongámoslo probado para $n\geq 0$ y lo vemos para $n+1$.

$$(\bigsqcup'\mathcal{F})^{n+1}\bot = \bigsqcup'\mathcal{F}((\bigsqcup'\mathcal{F})^n\bot) = \bigsqcup\{g(\bigsqcup'\mathcal{F}^n\bot) \mid g\in\mathcal{F}\} \overset{HI}{=}$$

$$= \bigsqcup\{g(\bigsqcup\{f^n\bot \mid f\in\mathcal{F}\}) \mid g\in\mathcal{F}\}.$$

Hacemos notar que f y g NO son en principio iguales.

Como g es continua $g(\bigsqcup Y) = \bigsqcup\{g d \mid d \in Y\}$ $\forall Y$ cadena no vacía.

Tomando $Y = \{f^n \bot \mid f \in \mathcal{F}\}$ (luego probamos que es una cadena)

Se tiene que

$$(\bigsqcup' \mathcal{F})^{n+1} \bot = \bigsqcup\{g(\bigsqcup\{f^n \bot \mid f \in \mathcal{F}\}) \mid g \in \mathcal{F}\} = \bigsqcup\{\bigsqcup\{g(f^n \bot) \mid f \in \mathcal{F}\} \mid g \in \mathcal{F}\}$$

Veamos que $\underbrace{\bigsqcup\{\bigsqcup\{g(f^n \bot) \mid f \in \mathcal{F}\} \mid g \in \mathcal{F}\}}_{d_2} = \bigsqcup\{f^{n+1} \bot \mid f \in \mathcal{F}\}$. $\forall n \geq 0$.

d_2 es cota superior de $\{f^{n+1} \bot \mid f \in \mathcal{F}\}$ ya que

$$\forall f \in \mathcal{F} \qquad f^{n+1} \bot = f(f^n \bot) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ cont (monótona)}}}{\sqsubseteq} f(\bigsqcup\{(g^n \bot) \mid g \in \mathcal{F}\}) \sqsubseteq \underbrace{\bigsqcup\{f(\bigsqcup\{g^n \bot \mid g \in \mathcal{F}\}) \mid f \in \mathcal{F}\}}_{\substack{\| \leftarrow \text{renombrando} \\ d_2}}$$

Si d_3 es cota superior de $\{f^{n+1} \bot \mid f \in \mathcal{F}\}$

$\Rightarrow$ $f^{n+1} \bot \sqsubseteq d_3$ $\forall f \in \mathcal{F}$ veamos que $d_2 \sqsubseteq d_3$.

Sean $f, g \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es una cadena $f \sqsubseteq g$ o $g \sqsubseteq f$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $g \sqsubseteq f$. Entonces

$$g(f^n \bot) \sqsubseteq f(f^n \bot) = f^{n+1} \bot \sqsubseteq d_3 \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ y } \forall g \in \mathcal{F}.$$

Por tanto $d_2 \sqsubseteq d_3$.

Esto prueba que $(\bigsqcup' \mathcal{F})^{n+1} \bot = \bigsqcup\{f^{n+1} \bot \mid f \in \mathcal{F}\}$ y completa el paso inductivo y la demostración.

Ejercicio 5.46.- Probar que $Fg = g_0 \circ g$ es continua.

- F es monótona.

Si $g_1 \sqsubseteq g_2 \Rightarrow Fg_1 \overset{?}{\sqsubseteq} Fg_2$.

$g_1(s)$ no es undef porque la composición está bien def. si ambos lo están.

$Fg_1\, s = s'$
$\shortparallel$
$(g_0 \circ g_1)(s) = g_0(g_1(s))$

Si $g_1(s) = s'' \overset{g_1 \sqsubseteq g_2}{\Longrightarrow} g_2(s) = s''$

$\Rightarrow Fg_2\, s = (g_0 \circ g_2)(s) = g_0(g_2(s)) = g_0(s'') = g_0(g_1(s)) \underset{s'}{=}$

- F verifica que $F(\sqcup Y) \sqsubseteq \sqcup\{Fg \mid g \in Y\}$ $\forall Y$ cadena novacía.

$F(\sqcup Y)\, s = s'$
$\shortparallel$
$g_0((\sqcup Y) s)$

Si $\sqcup Y s \overset{\sqcup Ys \neq \text{undef.}}{=} s'' \Rightarrow \forall g \in Y$ tal que $gs = \tilde{s} \Rightarrow \tilde{s} = s''$

Por tanto $Fg\, s = \begin{cases} \text{undef} & \text{si } gs = \text{undef.} \\ (g_0 \circ g)(s) & \text{si } gs = \tilde{s} = s'' \end{cases}$

$(g_0 \circ g)(s) = g_0(s'') = s'$.

Como $\exists g_i \in Y$ tal que $g_i s = s'' \Rightarrow Fg_i\, s = s' \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \sqcup\{Fg \mid g \in Y\} s = s'$

$Fg_i \sqsubseteq \sqcup\{Fg \mid g \in Y\}$

Ejercicio 5.50.- Probar que [illegible]

$S_{ds}[\![\text{while true do skip}]\!] = \bot$

Se tiene que $S_{ds}[\![\text{while true do skip}]\!] = FIX\ F$ donde

$Fg = \text{cond}(\mathcal{B}[\![\text{true}]\!], g \circ S_{ds}[\![\text{skip}]\!], id) = \text{cond}(\mathcal{B}[\![\text{true}]\!], g, id)$.

Calculamos $FIX\ F = \sqcup\{F^n \bot \mid n \geq 0\}$.

$F^0 \bot = \bot$.

$F^1 \bot = F \bot$

$F\bot\, s = \text{cond}(\mathcal{B}[\![\text{true}]\!], \bot, id)\, s = \begin{cases} \bot s & \text{si } \mathcal{B}[\![\text{true}]\!]s = tt \\ id(s) & \text{si } \mathcal{B}[\![\text{False}]\!]s = ff \end{cases}$

$= \bot s \Rightarrow F\bot = \bot \overset{\text{Inducción}}{\Longrightarrow} F^n \bot = \bot\ \forall n \geq 0$.

$\Rightarrow FIX\ F = \sqcup\{F^n \bot \mid n \geq 0\} = \sqcup\{\bot\} = \bot \Rightarrow S_{ds}[\![\text{while true do skip}]\!] = \bot$.

Ejercicio 5.49.- Desarrollar la semántica de

$z:=0;$ while $y\le x$ do $(z:=z+1; x:=x-y)$.

Sea $F_g = cond(\mathcal{B}[\![y\le x]\!], g\circ S_d[\![z:=z+1; x:=x-y]\!], id)$.

Veamos que $g_0\, s = \begin{cases} s & \text{si } sy > sx \\ \text{undefined} & \text{si } sy\le sx \text{ y } sy\le 0 \\ s[z\to sz+(sx \text{ div } sy)][x\to sx \text{ mod } sy] & \text{si } sy\le sx \text{ y } sy>0 \end{cases}$

es un punto fijo de F.

Para que esto pase se tiene que dar $F\,g_0\, s = g_0\, s \quad \forall s$.

$F\,g_0\, s = cond(\mathcal{B}[\![y\le x]\!], g\circ S_d[\![z:=z+1; x:=x-y]\!], id)\; s =$

$= \begin{cases} (g_0\circ S_d[\![z:=z+1; x:=x-y]\!])\, s & \text{si } \mathcal{B}[\![y\le x]\!]s = tt \\ id\,(s) & \text{si } \mathcal{B}[\![y\le x]\!]s = ff \end{cases} =$

$= \begin{cases} g_0(S_d[\![x:=x-y]\!] (S_d[\![z:=z+1]\!]\, s)) & \text{si } sy\le sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} =$

$= \begin{cases} g_0(s[z\mapsto sz+1][x\mapsto sx-sy]) & \text{si } sy\le sx \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$

Si $sy > sx$ $\Rightarrow F\,g_0\, s = s = g_0\, s$. ✓

Si $sy\le sx$ $\Rightarrow F\,g_0\, s = g_0(\underbrace{s[z\mapsto sz+1][x\mapsto sx-sy]}_{s'}) = g_0(s')$

Para conocer el valor de $g_0(s')$ necesitamos saber cuanto es

$s'x$ y $s'y$.

$s'x = s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]\ x = sx - sy.$

$s'y = s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]\ y = sy.$

Si $s'y > s'x \iff sy > sx - sy \iff 2\cdot(sy) > sx$ $\quad (sy \leq sx < 2\cdot(sy))$

$\Rightarrow F\, g_0\, s = g_0(s') = s'$

Estamos en el caso $sy \leq sx$ y $2\cdot(sy) > sx \Rightarrow sy \leq sx < 2\cdot(sy) \Rightarrow sy < 2\cdot(sy)$

$\Updownarrow$

$0 < sy.$

Por tanto, $sy > 0$ y $sy \leq sx$ luego

$g_0\ s = s[z \to sz + (sx\ div\ sy)][x \mapsto sx\ mod\ sy] \overset{?}{=} s'.$

$\overset{?}{\Vert}$

$s' = s[z \to sz+1][x \to sx - sy]$

Basta ver que $(sx)\ div (sy) = 1$ y $sx\ mod\ sy = sx - sy.$, pero

como $sy \leq sx < 2\cdot(sy)$ se tienen ambas cosas.

Si $s'y \leq s'x$ y $s'y \leq 0 \iff sy \leq sx - sy$ y $sy \leq 0 \iff 2(sy) \leq sx$ y $sy \leq 0$

$(sy \leq sx).$

$\Rightarrow F_{g_0}\, s = g_0(s') = \text{undefined}. \underset{\substack{\uparrow \\ sy \leq 0,\ sy \leq sx}}{=} g_0\ s$

Si $s'y \leq s'x$ y $s'y > 0 \iff sy \leq sx - sy$ y $sy > 0 \iff 2(sy) \leq sx$ y $sy > 0$

$(sy \leq sx).$

$\Rightarrow F_{g_0}\, s = g_0(s') = s'[z \to s'z + (s'x\ div\ s'y)][x \to s'x\ mod\ s'y]$

Como $s'z = s[z \to sz+1][x \to sx - sy]\ z = sz+1$, sustituyendo $s'x$, $s'y$ y $s'z$,

$F_{g_0}\, s = s'[z \to sz + 1 + ((sx - sy)\, div (sy))][x \to (sx - sy)\, mod\, (sy)]$

Ahora $(\underset{\text{"}sy}{sx \overset{\shortparallel sy}{-} sy}) \text{ div } sy = (sx \text{ div } sy) - 1$ y

$(sx - sy) \bmod sy = sx \bmod sy$

$\Rightarrow F g_0\, s = s'[z \to sz + \cancel{1} + (sx \text{ div } sy) - \cancel{1}][x \to sx \bmod sy] =$

$= s[z \to sz+1][x \to sx-sy][z \to sz + (sx \text{ div } sy)][x \to sx \bmod sy] =$

$= s[z \to sz + (sx \text{ div } sy)][x \to sx \bmod sy] \underset{\substack{\uparrow \\ sy \le sx \text{ y } sy > 0}}{=} g_0\, s$

Por tanto, g_0 es un punto fijo de F.

Calculamos $F^n \bot$.

$\underline{n=0}$ | $(F^0 \bot)s = (\bot)s = \text{undefined}$

$\underline{n=1}$ | $(F \bot)s = \begin{cases} \bot(s[z \to sz+1][x \to sx-sy]) & \text{si } sy \le sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} =$

$= \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \le sx \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$

$\underline{n=2}$ | $(F^2 \bot)s = F(F \bot s) = \begin{cases} (F\bot)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx-sy]}_{s'}) & \text{si } sy \le sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} s'x = sx - sy \\ s'y = sy \end{array}\right\}$ $s'y \le s'x \Leftrightarrow sy \le sx - sy \Leftrightarrow 2 \cdot sy \le sx.$

$\Rightarrow (F^2 \bot)s = \begin{cases} (F\bot)\, s' & \text{si } sy \le sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } 2sy \le sx \text{ y } sy \le sx \\ s' & \text{si } 2 \cdot sy > sx \ge sy \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad F^2 \bot\, s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } 2sy \leq sx \text{ y } sy \leq sx \\ s[z \to sz+1][x \to sx - sy] & \text{si } 2sy > sx \geq sy \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$n=3)$ $$F^3 \bot\, s = F(F^2 \bot)s = \begin{cases} (F^2 \bot)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx - sy]}_{s'}) & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} s'x = sx - sy \\ s'y = sy \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2(s'y) \leq s'x \iff 2sy \leq sx - sy \iff 3sy \leq sx. \\ s'y \leq s'x \iff sy \leq sx - sy \iff 2sy \leq sx. \end{array}$$

Si $(2s'y \leq s'x$ y $s'y \leq s'x) \iff 3sy \leq sx$ y $2sy \leq sx$ y $sy \leq sx \overset{(*)}{\iff} sy \leq sx$ y $3sy \leq sx$

$$\Rightarrow F^3 \bot\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sy \leq sx}}{=} (F^2 \bot)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx - sy]}_{s'}) \underset{\substack{\uparrow \\ s'y \leq s'x}}{=} \text{undefined.}$$

Si $2s'y > s'x \geq s'y \iff 3sy > sx \geq 2sy\,(\geq sy).$

$$F^3 \bot\, s \underset{\substack{\uparrow \\ sy \leq sx}}{=} (F^2 \bot)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx - sy]}_{s'}) \underset{\substack{\uparrow \\ 2s'y > s'x \geq s'y}}{=} s'[z \to s'z+1][x \to s'x - s'y] =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ s'z = sz+1}}{=} s'[z \to sz+2][x \to sx - 2sy] = s[z \to sz+2][x \to sx - 2sy]$$

Si $s'y > s'x$ y $sy \leq sx$ $\iff 2sy > sx \geq sy$

$$F^3 \bot\, s = (F^2 \bot)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx - sy]}_{s'}) \underset{\substack{\uparrow \\ s'y > s'x}}{=} s' = s[z \to sz+1][x \to sx - sy].$$

Si $sy > sx$

$F^3 \bot\, s = s.$

Por tanto

$$F^3 \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ \text{y } 3sy \leq sx \\ s[z \to sz+2][x \to sx-2sy] & \text{si } 2sy \leq sx < 3sy \\ s[z \to sz+1][x \to sx-sy] & \text{si } sy \leq sx < 2sy \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ \text{y } 3sy \leq sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx-m\cdot sy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1)\cdot sy \quad \forall m \in \{1,2\}. \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

Afirmamos que $\forall n \geq 1$.

$$F^n \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ \text{y } n sy \leq sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx-m\cdot sy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1)\cdot sy \quad \forall m \in \{1,2,\dots n-1\} \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

Lo probamos por inducción sobre n.

Caso base | Ya hemos visto que esto es cierto para los casos base, es lo que nos ha llevado a proponer este resultado.

Paso inductivo | Sea $n \geq 1$, supongamos la propiedad cierta para n y probémosla para $n+1$.

$$F^{n+1} \perp s = F(F^n \perp)\, s = \begin{cases} (F^n \perp)(s[z \to sz+1][x \to sx-sy]) & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

$\boxed{Si\ sy > sx}$

$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = s$ OK

$\boxed{Si\ sy \leq sx}$

$$F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(\underbrace{s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]}_{s'})$$

Se tiene que $\begin{cases} s'x = sx - sy \\ s'y = sy \\ s'z = sz + 1 \end{cases}$

- $\boxed{Si\ s'y > s'x} \Leftrightarrow sy > sx - sy \Leftrightarrow 2 \cdot sy > sx$

  $\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ s'y > s'x}}{=} s' = s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]$, es decir,

  $F^{n+1} \perp s = s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]$ si $sy \leq sx < 2 \cdot sy$. OK.

- $\boxed{Si\ s'y \leq s'x\ y\ n \cdot s'y \leq s'x} \Leftrightarrow sy \leq sx - sy\ y\ n\,sy \leq sx - sy \Leftrightarrow 2sy \leq sx\ y\ (n+1)sy \leq sx$

  $(*) \Updownarrow \leftarrow sy \leq sx$

  $(n+1)sy \leq sx$

  $\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ s'y \leq s'x\ y\ n(s'y) \leq s'x}}{=}$ undefined, es decir,

  $F^{n+1} \perp s =$ undefined si $sy \leq sx$ y $(n+1)(sy) \leq sx$

- $\boxed{Si\ m(s'y) \leq s'x < (m+1) \cdot (s'y)\ \text{para cierto}\ m = 1 \cdots n-1}$

  $\Updownarrow$

  $m(sy) \leq sx - sy < (m+1)(sy)$ para cierto $m = 1 \cdots n-1$

  $\Updownarrow$

  $(m+1)\,sy \leq sx < (m+2)(sy)$ para cierto $m = 1 \cdots n-1$.

  $\Updownarrow$

  $m'\,sy \leq sx < (m'+1)(sy)$ para cierto $m = 2 \cdots n$.

  ($m' = m+1$)

  $\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ m(s'y) \leq s'x < (m+1)(s'y)}}{=} s'[z \to s'z + m][x \to s'x - m \cdot s'y] =$

  $= s'[z \to sz + m + 1][x \to sx - sy - m\,sy] =$

$$= s'[z \to sz+m'][x \to sx - m'sy] = s[z \to sz+m'][x \to sx - m'sy]$$

$$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = s[z \to sz+m'][x \to sx - m'sy] \quad \text{si } m'sy \le sx < (m'+1)(sy) \text{ con } m' = 2, \cdots n.$$

En resumen:

$$F^{n+1} \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \le sx \text{ y } (n+1)(sy) \le sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx - msy] & \text{si } m(sy) \le sx < (m+1)sy \quad \forall m \in \{1, 2, \cdots n\} \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

y se completa el paso inductivo.

Por tanto

$$F^{n} \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \le sx \text{ y } n \cdot sy \le sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx - m \cdot sy] & \text{si } m(sy) \le sx < (m+1)sy \quad \forall m \in \{1 \cdots n-1\} \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

Tenemos los conjuntos $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x,\ ny \le x\}$

$B_n = \bigcup_{m=1}^{n} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid my \le x < (m+1)y\}$.

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x,\ y \le 0\} = A$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid my \le x < (m+1)y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge y > 0\} = B$$

$$\Rightarrow F^n \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } (sx, sy) \in A_n \cap \mathbb{N}^2 \\ s[z \to sz+m][x \to sx - m \cdot sy] & \text{si } (sx, sy) \in B_n \cap \mathbb{N}^2 \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigsqcup\{F^n\bot \mid n\geq 0\}\, s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } (sx,sy)\in A\cap\mathbb{N}^2 \\ s[z\mapsto sz+m][x\to sx-m\,sy] & \text{si } (sx,sy)\in B\cap\mathbb{N}^2 \\ s & \text{si } sy>sx. \end{cases}$$

$$\| $$

$$g_0$$

(*) Veamos que si $n\geq 1$

$$\begin{cases} 2y\leq x \\ (n+1)\,y\leq x \\ y\leq x \end{cases} \iff \begin{cases} (n+1)\,y\leq x \\ y\leq x. \end{cases}$$

$\Rightarrow$) Trivial

$\Leftarrow$) - Si $y\geq 0 \Rightarrow (n+1)y\leq x$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(n+1)y-(n-1)y}_{2y}\leq x-\overset{0}{\overset{\wedge\!|}{(n-1)}}\,\overset{0}{\overset{\wedge\!|}{y}}\leq x \iff 2y\leq x.$$

- Si $y<0$

• Si $x\geq 0 \Rightarrow 2y<0\leq x$ OK.

• Si $x<0 \Rightarrow y\leq x$

$$\Updownarrow$$

$$2y\leq x+\overset{0}{y}\leq x \quad \checkmark$$

Ejercicio 5.53: Probar que las siguientes parejas de instrucciones son semánticamente equivalentes:

a) S; skip y S.

$$S_{ds}[\![S;\text{skip}]\!] = S_{ds}[\![\text{skip}]\!] \circ S_{ds}[\![S]\!] = id \circ S_{ds}[\![S]\!] = S_{ds}[\![S]\!].$$

b) $S_1;(S_2;S_3)$ y $(S_1;S_2);S_3$.

$$S_{ds}[\![S_1;(S_2;S_3)]\!] = S_{ds}[\![S_2;S_3]\!] \circ S_{ds}[\![S_1]\!] = \left(S_{ds}[\![S_3]\!] \circ S_{ds}[\![S_2]\!]\right) \circ S_{ds}[\![S_1]\!].$$

$$\parallel$$

$$S_{ds}[\![(S_1;S_2);S_3]\!] = S_{ds}[\![S_3]\!] \circ S_{ds}[\![S_1;S_2]\!] = S_{ds}[\![S_3]\!] \circ \left(S_{ds}[\![S_2]\!] \circ S_{ds}[\![S_1]\!]\right)$$

c) while b do S y if b then (S; while b do S) else skip.

$$S_{ds}[\![\text{while } b \text{ do } S]\!] = FIX\ F \quad \text{donde} \quad F\,g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], g \circ S_{d}[\![S]\!], id).$$

$$S_{ds}[\![\text{if } b \text{ then } (S;\text{while } b \text{ do } S) \text{ else skip}]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], S_d[\![S;\text{while } b \text{ do } S]\!], S_d[\![\text{skip}]\!]) =$$

$$= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], S_d[\![\text{while } b \text{ do } S]\!] \circ S_d[\![S]\!], id) = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], FIX F \circ S_d[\![S]\!], id) =$$

$$= F(FIX F) = FIX F = S_{ds}[\![\text{while } b \text{ do } S]\!].$$

Ejercicio 5.51.- Extender el lenguaje con repeat S until b dándole una semántica denotacional y verifica que está bien definido.

Proponemos $S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\ G$ donde

$$G\,g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, g) \circ S_d[\![S]\!]$$

Continuando la demostración de la proposición 5.47.

The case until b do S

Para ver que está bien definida hay que argumentar que G lo está.

Pero $Gg = (F_2 \circ F_1)\, g$ donde $F_2\, g = g \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bien def por HI}}}{S_d[\![S]\!]}$ y $F_1 = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, g)$.

y tanto F_1 como F_2 son funciones continuas, según lo visto en el ejercicio 5.44 y en el Lema 5.45.

Ejercicio 5.54.- Probar que repeat S until b y S; while ¬b do S son semánticamente equivalentes:

Tenemos que $S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\, G$ donde

$$G g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, g) \circ S_d[\![S]\!]$$

y que $S_d[\![S;\ \text{while } \neg b \text{ do } S]\!] = S_d[\![\text{while } \neg b \text{ do } S]\!] \circ S_d[\![S]\!] = FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]$

donde $F g = cond(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], g \circ S_d[\![S]\!], id)$.

La pregunta es $FIX\, G \overset{?}{=} FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]$.

El ejercicio 5.40 dice que si $G(FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]) \sqsubseteq FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]$ entonces $FIX\, G \sqsubseteq FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]$.

$$G(FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]) = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]) \circ S_d[\![S]\!] \overset{(*)}{=}$$

$$= cond(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], FIX\, F \circ S_d[\![S]\!], id) \circ S_d[\![S]\!] = F(FIX\, F) \circ S_d[\![S]\!] =$$

$$= FIX\, F \circ S_d[\![S]\!].$$

Por tanto $FIX\, G \sqsubseteq FIX\, F \circ S_d[\![S]\!]$

(Para probar (*) tenemos que ver que $cond(\mathcal{B}[\![b]\!], p, q) = cond(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], q, p)$

$$cond(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], q, p)\, s = \begin{cases} q & \text{si } \mathcal{B}[\![\neg b]\!]s = tt \\ p & \text{si } \mathcal{B}[\![\neg b]\!]s = ff \end{cases} = \begin{cases} q & \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = ff \\ p & \text{si } \mathcal{B}[\![b]\!]s = tt \end{cases} = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], p, q).)$$

Falta ver que $FIX\, F \circ S_d[\![S]\!] \sqsubseteq FIX\, G$.

Veamos que $F(\mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!]), id, FIX\,G)) \sqsubseteq \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G)$, en cuyo caso se tendrá que $FIX\,F \sqsubseteq \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G)$ en virtud del ejercicio 5.40.

$$F(\mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G)) = \mathrm{cond}\big(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], \underbrace{\mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G) \circ S_{ds}[\![S]\!]}_{G(FIX\,G)}, id\big) =$$

$$= \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], G(FIX\,G), id) = \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![\neg b]\!], FIX\,G, id) =$$

$$= \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G).$$

Por tanto $FIX\,F \sqsubseteq \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G)$. Como la función $H\,g = g \circ S_{ds}[\![S]\!]$ es continua según lo visto en el lema 5.45,

$$H(FIX\,F) \sqsubseteq H(\mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G)) \iff$$

$$\iff FIX\,F \circ S_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq \mathrm{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\,G) \circ S_{ds}[\![S]\!] = G(FIX\,G) = FIX\,G.$$

Por tanto hemos probado que $FIX\,G \sqsubseteq FIX\,F \circ S_{ds}[\![S]\!]$ y que $FIX\,F \circ S_{ds}[\![S]\!] \sqsubseteq FIX\,G$, luego

$$FIX\,F \circ S_{ds}[\![S]\!] = FIX\,G = S_{ds}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]$$

$$\|$$

$$S_{ds}[\![S; \text{while } \neg b \text{ do } S]\!]$$

Ejercicio 5.59.- Extender la prueba del teorema 5.55 para repeat S until b.

Para completar el lema 5.56.

Caso [repeat_{sos}]

Asumimos que $\langle \text{repeat } S \text{ until } b \rangle \Rightarrow \langle S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b), s \rangle$

Se tiene que $S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\, G$ donde

$$G g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, g) \circ S_d[\![S]\!].$$

Por tanto $S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\, G = G(FIX\, G) =$

$= cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, FIX\, G) \circ S_d[\![S]\!] = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], S_d[\![\text{skip}]\!], S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) \circ S_d[\![S]\!]$

$= S_d[\![\text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!] \circ S_d[\![S]\!] =$

$= S_d[\![S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!].$

Esto completaría el lema 5.56.

Para completar el lema 5.57.

Caso repeat S until b:

Nuevamente. $S_d[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\, G$ con $G g = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, g) \circ S_d[\![S]\!]$.

Veamos que $G(S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) \sqsubseteq S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]$ y en virtud del ejercicio 5.40, tendremos que $FIX\, G \sqsubseteq S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]$, es decir, lo buscado.

$G(S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) = cond(\mathcal{B}[\![b]\!], id, S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) \circ S_d[\![S]\!]$

En algún ejercicio del tema 2 se probó que.

$S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = S_{sos}[\![S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!]$

(Igual no se provó eso en concreto pero sí que se probó

$$S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] \underset{\text{Ej } 2.29}{=} S_{ns}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] \underset{\text{Ej } 2.7}{=} S_{ns}[\![\text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!] \underset{\text{Ej } 2.29 + \text{Teorema } 2.26}{=}$$

$$= S_{sos}[\![\text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!].$$)

Por tanto

$$S_{sos}[\![S; \text{if } b \text{ then skip else (repeat } S \text{ until } b)]\!] = \text{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] \circ S_{sos}[\![S]\!]$$

y como por HI $S_{sos}[\![S]\!] \sqsupseteq S_{ds}[\![S]\!]$, se sigue que.

$$G(S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) = \text{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]) \circ S_{ds}[\![S]\!]$$

$$\sqcap$$

$$S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = \text{cond}(\mathcal{B}[\![b]\!], id, S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] \circ S_{sos}[\![S]\!]$$

donde hemos usado que $\circ$ es continua en el segundo argumento.

Por tanto $S_{ds}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!] = FIX\, G \sqsubseteq S_{sos}[\![\text{repeat } S \text{ until } b]\!]$