Hoja 2

Probabilidad

Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Sean Ω un espacio muestral y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Para $A \in \mathcal{A}$ fijado, se define*

$$\mathcal{A}_A = \{B \subset \Omega : B = A \cap C \text{ con } C \in \mathcal{A}\}.$$

Demostrar que $\mathcal{A}_A \subset \mathcal{P}(A)$ es σ-álgebra.

Para demostrar el resultado, comprobemos que $\mathcal{A}_A$ verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una σ-álgebra:

i) $\underline{A \in \mathcal{A}_A}$

$\Omega \in \mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Por tanto, como $A = A \cap \Omega$, se concluye que $A \in \mathcal{A}_A$.

ii) $\underline{\forall B \in \mathcal{A}_A,\ B_A^c \in \mathcal{A}_A}$

Supongamos que $B \in \mathcal{A}_A$, entonces por definición $B = A \cap C$ con $C \in \mathcal{A}$. Siendo así, $B_A^c = A \cap B^c = A \cap (A \cap C)^c = A \cap (A^c \cup C^c) = A \cap C^c$. Como $C \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, se deduce que $C^c \in \mathcal{A}$. Por tanto, $B_A^c = A \cap C^c \in \mathcal{A}_A$.

iii) $\underline{\forall \{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_A,\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_A}$

Supongamos que $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}_A$, entonces podemos encontrar $\{C_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\forall n \geq 1$, $B_n = A \cap C_n$. Siendo así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n) = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Como $\{C_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}$. Por tanto, $B_n = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}_A$.

Ej. 2. *Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión monótona decreciente, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra. Demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.*

Como $\{A_n : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona decreciente ($A_n \downarrow$), entonces $\{A_n^c : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente ($A_n^c \uparrow$). El resultado de este ejercicio se ha probado en las clases de teoría para sucesiones monótonas crecientes, por lo que podemos concluir que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P(\lim_{n\to\infty} A_n^c)$. Por otra parte, ateniéndonos a la probabilidad de los conjuntos complementarios y a los resultados para los límites de sucesiones monótonas vistos en el Tema 1, tenemos que:

- $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$

- $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n^c\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = P\left((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

De donde se concluye que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$ y además que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1 - P(\lim_{n\to\infty} A_n^c) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

Ej. 3. *Sea* $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ *una sucesión convergente, donde* $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *es* σ*-álgebra. Demostrar que existe* $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ *y que* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

Dado que $\{A_n : n \geq 1\}$ es una sucesión convergente, sabemos que existe su límite y que $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \limsup A_n = \liminf A_n$. Atendiendo al ejercicio anterior y a los límites de sucesiones monótonas vistos en el Tema 1, se tiene que:

- $A = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Dado que $\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente:
  - $\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$
  - Existe $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ y $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$

  Y podemos concluir que:

  $$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

- $A = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Dado que $\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona decreciente:
  - $\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
  - Existe $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$ y $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$

  Y podemos concluir que:

  $$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

Observando que $\forall n \geq 1$, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ y sabiendo que las medidas de probabilidad respetan el orden de inclusión, obtenemos que $\forall n \geq 1$, $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) \leq P(A_n) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$. Tomando límites:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P(A)$$

Por lo que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(A)$.

Ej. 4. *Sean $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ y $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ dos σ-álgebras, y sea $E \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Demostrar que $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ para cada $\omega_1 \in \Omega_1$, y que $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$ para cada $\omega_2 \in \Omega_2$.*

Tomemos el conjunto $\mathcal{C} = \{E \subset \Omega_1 \times \Omega_2 : \forall \omega_1 \in \Omega_1,\ E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2; \forall \omega_2 \in \Omega_2,\ E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1\}$. Queremos probar que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}$. Como $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, entonces nos basta probar que $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}$ y que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra.

- $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{C}$

  Sea $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$:

  - Sea $\omega_1 \in \Omega_1$. Si $\omega_1 \in A_1$, entonces $(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = A_2 \in \mathcal{A}_2$. En otro caso, $\omega_1 \notin A_1$ y tenemos que $(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \emptyset \in \mathcal{A}_2$.
  - Sea $\omega_2 \in \Omega_2$. Si $\omega_2 \in A_2$, entonces $(A_1 \times A_2)^{\omega_2} = A_1 \in \mathcal{A}_1$. En otro caso, $\omega_2 \notin A_2$ y tenemos que $(A_1 \times A_2)^{\omega_2} = \emptyset \in \mathcal{A}_1$.

  En cualquier caso, $A_1 \times A_2 \in \mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra

  i) $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{C}$
  Dado $\omega_1 \in \Omega_1$, $(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega_1} = \Omega_2 \in \mathcal{A}_2$ por ser $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ una σ-álgebra. Análogamente, dado $\omega_2 \in \Omega_2$, $(\Omega_1 \times \Omega_2)^{\omega_2} = \Omega_1 \in \mathcal{A}_1$ por ser $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$ una σ-álgebra. Por tanto, $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{C}$.

  ii) $\forall E \in \mathcal{C},\ E^c \in \mathcal{C}$
  Sea $E \in \mathcal{C}$. Dado $\omega_1 \in \Omega_1$, $E_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{A}_2$ es una σ-álgebra, entonces también tenemos $(E^c)_{\omega_1} = (E_{\omega_1})^c \in \mathcal{A}_2$. Análogamente, dado $\omega_2 \in \Omega_2$, $E^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$. Como $\mathcal{A}_1$ es una σ-álgebra, entonces también tenemos $(E^c)^{\omega_2} = (E^{\omega_2})^c \in \mathcal{A}_1$. Por tanto, $E^c \in \mathcal{C}$.

  iii) $\forall \{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$
  Sea $\{E_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C}$. Dado $\omega_1 \in \Omega_1$, $(E_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, $\forall n \geq 1$. Como $\mathcal{A}_2$ es una σ-álgebra, entonces también tenemos $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_{\omega_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Análogamente, dado $\omega_2 \in \Omega_2$, $(E_n)^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$, $\forall n \geq 1$. Como $\mathcal{A}_1$ es una σ-álgebra, entonces también tenemos $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^{\omega_2} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$. Por tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$.

Ej. 5. *Sean $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra y $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión. Demostrar las siguientes desigualdades:*

(a) $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$.

(b) $\limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$.

Además, resolver el ejercicio (3) desde (5a) y (5b).

Empezamos resolviendo el ejercicio (3) asumiendo probados (5a) y (5b). Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ una sucesión convergente, entonces sabemos que existe su límite y que $\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$. Se tiene pues:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\liminf A_n\right) \quad &\leq \quad \liminf P(A_n) \\ &\leq \\ \limsup P(A_n) \quad &\leq \quad P(\limsup A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Por lo que $\liminf P(A_n) = \limsup P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$ y se concluye que existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$.

(a) A partir del ejercicio (2) y los límites de sucesiones monótonas vistos en el Tema 1, dado que $\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente:

- $P\left(\liminf A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$
- $P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \liminf P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$

Y podemos concluir que $P\left(\liminf A_n\right) = \liminf P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Observando que $\forall n \geq 1$, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset A_n$ y sabiendo que las medidas de probabilidad respetan el orden de inclusión, se tiene finalmente que

$$P\left(\liminf A_n\right) = \liminf P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \liminf P(A_n).$$

(b) A partir del ejercicio (2) y los límites de sucesiones monótonas vistos en el Tema 1, dado que $\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona decreciente:

- $P\left(\limsup A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$
- $P\left(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \limsup P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$

Y podemos concluir que $P\left(\limsup A_n\right) = \limsup P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Observando que $\forall n \geq 1$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset A_n$ y sabiendo que las medidas de probabilidad respetan el orden de inclusión, se tiene finalmente que

$$P\left(\limsup A_n\right) = \limsup P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \limsup P(A_n).$$

Ej. 6. *Sean* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio probabilizable y* $\{P_n : n \geq 1\}$ *una sucesión de medidas de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{A})$*. Se define* $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ *por*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, P_n(A),$$

donde $a_n \geq 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$*. Demostrar que* P *es una medida de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{A})$*.*

Para demostrar el resultado, comprobemos que P verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una medida de probabilidad:

i) $\underline{\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \geq 0}$

   Sea $A \in \mathcal{A}$. Fijado $n \geq 1$, P_n es una medida de probabilidad, por lo que $P_n(A) \geq 0$. Además, por hipótesis $a_n \geq 0$, luego $a_n \, P_n(A) \geq 0$. Como cada uno de los sumandos es no negativo, podemos concluir que $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, P_n(A) \geq 0$.

ii) $\underline{P(\Omega) = 1}$

   Fijado $n \geq 1$, P_n es una medida de probabilidad, por lo que $P_n(\Omega) = 1$. Así pues, como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, deducimos que $P(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, P_n(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$.

iii) Aditividad contable

   Sea $\{A_k : k \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Fijado $n \geq 1$, P_n es una medida de probabilidad, por lo que $P_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P_n(A_k)$. De esta forma, $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, P_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} P_n(A_k)$. Aplicando el Teorema de Fubini para series, podemos reordenar los sumatorios y obtener $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, P_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Ej. 7. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *el espacio probabilizable con* $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$*. Demostrar que las funciones de conjunto* P *dadas en (7a) y (7b) son medidas de probabilidad sobre* $(\Omega, \mathcal{A})$ *y determinar las probabilidades de los conjuntos de (7c).*

(a) $P_a(A) = \sum_{x \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, *siendo* $\lambda > 0$.

(b) $P_b(A) = \sum_{x \in A} p \, (1-p)^x$, *siendo* $p \in (0,1)$.

(c) $A = \{x > 2\}$, $B = \{x < 3\}$, $C = \{3 < x < 6\}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $A \cap C^c$ *y* $B \cap C^c$.

(a) En primer lugar, mencionemos que la media de probabilidad dada tiene nombre propio: *distribución de Poisson*. Ésta refleja, a partir de una frecuencia de ocurrencia media $\lambda > 0$, la probabilidad de que ocurra un determinado número x de eventos durante cierto período de tiempo. Comprobamos que P_a verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una medida de probabilidad:

i) $\underline{\forall A \in \mathcal{A},\ P_a(A) \geq 0}$
Sea $A \in \mathcal{A}$. Fijado $x \in A$, se verifica: $e^{-\lambda} > 0$ (función exponencial), $\lambda^x > 0$ ($\lambda > 0$) y $x! > 0$ ($x \in \{0,1,2,\ldots\}$). Por tanto, $\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} > 0$. Como cada uno de los sumandos es positivo, podemos concluir que $P_a(A) = \sum_{x\in A} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} \geq 0$ (démonos cuenta de que si $A = \emptyset$, no hay sumandos y $P_a(A) = 0$).

ii) $\underline{P_a(\Omega) = 1}$
$P_a(\Omega) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$. Recordemos que $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$ a partir del desarrollo como serie de potencias de la función exponencial. Así pues, deducimos que $P_a(\Omega) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$.

iii) Aditividad contable
Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces se tiene que $P_a(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x\in A_n} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = \sum_{k=0}^{\infty} P_a(A_n)$.

(b) En primer lugar, mencionemos que la media de probabilidad dada tiene nombre propio: *distribución geométrica*. Ésta refleja, a partir de una probabilidad de éxito $p \in (0{,}1)$ en un experimento, la probabilidad de obtener un determinado número x de fallos antes del primer éxito. Comprobamos que P_b verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una medida de probabilidad:

i) $\underline{\forall A \in \mathcal{A},\ P_b(A) \geq 0}$
Sea $A \in \mathcal{A}$. Fijado $x \in A$, se verifica: $p > 0$ y $(1-p)^x > 0$ ($p < 1$). Por tanto, $p\,(1-p)^x > 0$. Como cada uno de los sumandos es positivo, podemos concluir que $P_b(A) = \sum_{x\in A} p\,(1-p)^x \geq 0$ (démonos cuenta de que si $A = \emptyset$, no hay sumandos y $P_b(A) = 0$).

ii) $\underline{P_b(\Omega) = 1}$
$P_b(\Omega) = \sum_{x=0}^{\infty} p\,(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x$. Recordemos que $\sum_{x=0}^{\infty}(1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$ a partir del cálculo de series geométricas de razón en el intervalo $(0{,}1)$. Así pues, deducimos que $P_b(\Omega) = p\,\frac{1}{p} = 1$.

iii) Aditividad contable
Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Entonces se tiene que $P_b(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} p\,(1-p)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x\in A_n} p\,(1-p)^x = \sum_{k=0}^{\infty} P_b(A_n)$.

(c) Calculamos para cada conjunto dado ambas probabilidades P_a y P_b:

- $A = \{x > 2\}$
  - $$P_a(A) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} - \frac{\lambda^0}{0!} - \frac{\lambda^1}{1!} - \frac{\lambda^2}{2!}\right)$$
    $$= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$
  - $$P_b(A) = \sum_{x=3}^{\infty} p\,(1-p)^x = p\,(1-p)^3 \sum_{x=3}^{\infty} (1-p)^{x-3} = p\,(1-p)^3 \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x$$
    $$= p\,(1-p)^3\,\frac{1}{p} = (1-p)^3$$

- $\underline{B = \{x < 3\} = A^c}$
  - $P_a(B) = P_a(A^c) = 1 - P_a(A) = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$
  - $P_b(B) = P_b(A^c) = 1 - P_b(A) = 1 - (1-p)^3$

- $\underline{C = \{3 < x < 6\}}$
  - $P_a(C) = \sum_{x=4}^{5} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{4!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^5}{5!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^4}{24}\left(1 + \frac{\lambda}{5}\right)$
  - $P_b(C) = \sum_{x=4}^{5} p\,(1-p)^x = \sum_{x=4}^{\infty} p\,(1-p)^x - \sum_{x=6}^{\infty} p\,(1-p)^x = (1-p)^4 - (1-p)^6$

- $\underline{A \cap B = A \cap A^c = \emptyset}$
  - $P_a(A \cap B) = P_a(\emptyset) = 0$
  - $P_b(A \cap B) = P_b(\emptyset) = 0$

- $\underline{A \cup B = A \cup A^c = \Omega}$
  - $P_a(A \cup B) = P_a(\Omega) = 1$
  - $P_b(A \cup B) = P_b(\Omega) = 1$

- $\underline{B \cap C = \{3 < x < 3\} = \emptyset}$
  - $P_a(B \cap C) = P_a(\emptyset) = 0$
  - $P_b(B \cap C) = P_b(\emptyset) = 0$

- $\underline{A \cap C^c = \{3\} \cup \{x > 5\}}$
  - $$\begin{aligned} P_a(A \cap C^c) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} + \sum_{x=6}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left(\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} - \frac{\lambda^0}{0!} - \frac{\lambda^1}{1!} - \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^4}{4!} - \frac{\lambda^5}{5!}\right) \\ &= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{24} - \frac{\lambda^5}{120}\right) \\ &= 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{22} + \frac{\lambda^5}{120}\right) \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} P_b(A \cap C^c) &= p\,(1-p)^3 + \sum_{x=6}^{\infty} p\,(1-p)^x \\ &= \sum_{x=3}^{\infty} p\,(1-p)^x - \sum_{x=4}^{\infty} p\,(1-p)^x + \sum_{x=6}^{\infty} p\,(1-p)^x \\ &= (1-p)^3 - (1-p)^4 + (1-p)^6 \end{aligned}$$

- $\underline{B \cap C^c = \{x < 3\} = B}$
  - $P_a(B \cap C^c) = P_a(B) = e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$
  - $P_b(B \cap C^c) = P_b(B) = 1 - (1-p)^3$

Ej. 8. *Sean* $\mathbb{N}_P$ *y* $\mathbb{N}_I$ *los conjuntos de números naturales pares e impares, respectivamente. Se define la familia de subconjuntos*

$$\mathcal{C} = \{A \cup \mathbb{N}_I : A \subset \mathbb{N}_P\}.$$

Estudiar si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *tiene estructura de álgebra.*

Consideremos $C \in \mathcal{C}$. Por definición, existe $A \subset \mathbb{N}_P$ tal que $C = A \cup \mathbb{N}_I$. En tal caso, $C^c = (A \cup \mathbb{N}_I)^c = A^c \cap \mathbb{N}_I^c = A^c \cap \mathbb{N}_P \subset \mathbb{N}_P$. Por tanto, C^c no contiene ningún número impar y no puede estar en $\mathcal{C}$. De esto se concluye que la familia $\mathcal{C}$ no es una álgebra, pues los complementarios de los conjuntos de dicha familia no están en ella.

Ej. 9. *Demostrar que* $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ finito ó } A^c \text{ finito}\}$ *tiene estructura de álgebra, pero no es una* σ*-álgebra de* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

En primer lugar, comprobemos que $\mathcal{C}$ verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una álgebra:

i) $\underline{\mathbb{N} \in \mathcal{C}}$

$\mathbb{N} \in \mathcal{C}$ puesto que $\mathbb{N}^c = \emptyset$ es un conjunto finito.

ii) $\underline{\forall A \in \mathcal{C},\ A^c \in \mathcal{C}}$

Supongamos que $A \in \mathcal{C}$, entonces por definición A es finito ó A^c es finito. En tal caso, podemos deducir que A^c es finito ó $(A^c)^c = A$ es finito. Lo cual nos indica que $A^c \in \mathcal{C}$.

iii) $\underline{\forall A, B \in \mathcal{C},\ A \cup B \in \mathcal{C}}$

Sean $A, B \in \mathcal{C}$. Si tanto A como B son finitos, es claro que $A \cup B$ es finito y, por tanto, que $A \cup B \in \mathcal{C}$. Así pues, supongamos sin pérdida de generalidad que A no es finito. Como $A \in \mathcal{C}$, tenemos entonces que A^c es finito. De esta forma, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset A^c$ es finito y concluimos que $A \cup B \in \mathcal{C}$. Razonando de forma análoga si B no es finito, podemos afirmar que en cualquier caso $A \cup B \in \mathcal{C}$.

Ahora bien, $\mathcal{C}$ no es una σ-álgebra. Para ello consideremos $\{A_n : n \geq 1\}$ con $A_n = \{2n\}$, $\forall n \geq 1$. Está claro que $\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{C}$ pues A_n tiene un único elemento y es finito. Sin embargo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}_P \notin \mathcal{C}$ ya que ni $\mathbb{N}_P$ es finito ni $\mathbb{N}_P^c = \mathbb{N}_I$ es finito.

Ej. 10. *Sean* $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y* $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A\}$. *Demostrar que* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *es* σ*-álgebra.*

Para demostrar el resultado, comprobemos que $\mathcal{C}$ verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una σ-álgebra:

i) $\underline{\Omega \in \mathcal{C}}$

Podemos escribir $\Omega = \{2n : n \geq 0\} \cup \{2n+1 : n \geq 0\}$, donde es sencillo apreciar que $\Omega \in \mathcal{C}$. No obstante, démonos cuenta de que esta cuestión no es trivial: $\mathbb{N} \notin \mathcal{C}$ ya que $1 = 2 \cdot 0 + 1 \in \mathbb{N}$ pero $0 = 2 \cdot 0 \notin \mathbb{N}$.

ii) $\underline{\forall A \in \mathcal{C},\ A^c \in \mathcal{C}}$

Sea $A \in \mathcal{C}$. Fijado $n \geq 0$, por definición, $2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A$. Esto es equivalente, negando ambas proposiciones, a que $2n \notin A \Leftrightarrow 2n+1 \notin A$. O lo que es lo mismo, a que $2n \in A^c \Leftrightarrow 2n+1 \in A^c$. Por tanto, $A^c \in \mathcal{C}$.

iii) $\underline{\forall \{A_k : k \geq 1\} \subset \mathcal{C},\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}}$

Sea $\{A_k : k \geq 1\} \subset \mathcal{C}$. Fijado $n \geq 0$, si $2n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, entonces podemos encontrar $k_0 \geq 1$ tal que $2n \in A_{k_0}$. Siendo esto así, como $A_{k_0} \in \mathcal{C}$, tenemos que $2n+1 \in A_{k_0}$ y, por tanto, que $2n+1 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Se puede razonar de forma análoga para concluir que si $2n+1 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ entonces $2n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. De esta forma, $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{C}$.

Ej. 11. *Sean Ω un conjunto no-numerable y $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega : A$ ó A^c es numerable$\}$. Estudiar si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es σ-álgebra.*

Vamos a comprobar que que $\mathcal{C}$ verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una σ-álgebra:

i) $\underline{\Omega \in \mathcal{C}}$

$\Omega \in \mathcal{C}$ puesto que $\Omega^c = \emptyset$ es un conjunto numerable.

ii) $\underline{\forall A \in \mathcal{C},\ A^c \in \mathcal{C}}$

Supongamos que $A \in \mathcal{C}$, entonces por definición A ó A^c es numerable. En tal caso, podemos deducir que A^c ó $(A^c)^c = A$ es numerable. Lo cual nos indica que $A^c \in \mathcal{C}$.

iii) $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}}$

Sea $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{C}$. Si $\forall n \geq 1$, A_n es numerable, es claro que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es numerable por ser unión numerable de conjuntos numerables y, por tanto, que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. En otro caso, sea $n_0 \geq 1$ tal que A_{n_0} no es numerable. Como $A_{n_0} \in \mathcal{C}$, tenemos entonces que $A_{n_0}^c$ es numerable. De esta forma, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subset A_{n_0}^c$ es numerable y concluimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$. Podemos afirmar entonces que en cualquier caso $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$.

Ej. 12. *De los 30 temas de un examen, un alumno conoce 18 temas. Se proponen dos tipos de examen:*

I. Se eligen 3 temas al azar y el alumno debe contestar 2.

II. Se eligen 5 temas al azar y el alumno debe contestar 3.

Determinar el tipo de examen más favorable al alumno.

Para determinar el tipo de examen más favorable al alumno, calcularemos la probabilidad de que el alumno pueda superar cada tipo de examen contestando al número de temas requeridos. Claramente, aquel con mayor probabilidad de ser superado será el más favorable. Definimos los sucesos $E_i :=$ "Superar el examen de tipo i" con $i \in \{I, II\}$ y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

E_I. **CP** El examen escoge 3 temas al azar de 30, luego hay $\binom{30}{3}$ posibilidades.

CF El alumno debe conocer al menos 2 de los 3 temas del examen, luego hay $\binom{18}{2}\binom{12}{1}$ (conoce 2) + $\binom{18}{3}$ (conoce 3) posibilidades.

Pr $P(E_I) = \frac{\binom{18}{2}\binom{12}{1}+\binom{18}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{663}{1015} \approx 0{,}653.$

E_{II}. **CP** El examen escoge 5 temas al azar de 30, luego hay $\binom{30}{5}$ posibilidades.

CF El alumno debe conocer al menos 3 de los 5 temas del examen, luego hay $\binom{18}{3}\binom{12}{2}$ (conoce 3) + $\binom{18}{4}\binom{12}{1}$ (conoce 4) + $\binom{18}{5}$ (conoce 5) posibilidades.

Pr $P(E_{II}) = \frac{\binom{18}{3}\binom{12}{2}+\binom{18}{4}\binom{12}{1}+\binom{18}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{1836}{2639} \approx 0{,}696.$

Por tanto, el examen de tipo II es el más favorable al alumno.

Ej. 13. *Calcular la probabilidad de que, al tirar una moneda n veces, obtengamos la k-ésima cara en la n-ésima tirada.*

Definimos el suceso $A :=$ "Obtener la k-ésima cara en la n-ésima tirada" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Lanzamos la moneda n veces habiendo 2 opciones (cara o cruz) por tirada, luego hay 2^n posibilidades.

CF Queremos que la k-ésima cara se obtenga en la última tirada (la n-ésima), por lo que necesitamos haber obtenido $k-1$ caras en las primeras $n-1$ tiradas. Podemos contar las formas de que ocurra esto viendo en qué $k-1$ tiradas de las $n-1$ primeras se obtuvo una cara, luego hay $\binom{n-1}{k-1}$ posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{2^n}$.

Ej. 14. *Se tiene un manojo de N llaves donde sólo una de ellas abre una puerta. Suponiendo que cada llave probada es retirada del manojo, determinar la probabilidad de que la puerta se abra en el k-ésimo intento. (Nota: todas las llaves deben ser probadas, por lo que es necesario hacer N intentos.) Determinar la probabilidad de este suceso cuando las llaves no se retiran del manojo.*

Definimos el suceso $A :=$ "Abrir la puerta en el k-ésimo intento de entre N" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace para ambos supuestos:

- Se retiran las llaves del manojo

  CP Probamos N llaves en N intentos sin repetición dado que se retiran del manojo, luego hay $N!$ posibilidades.

CF Queremos que la puerta se abra en el k-ésimo intento, por lo que simplemente debemos contar de cuántas maneras podemos probar las $N-1$ llaves restantes en el resto de $N-1$ intentos sin repetición. Esto es análogo al número de casos posibles sólo que con $N-1$ llaves, luego hay $(N-1)!$ posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$.

- Se devuelven las llaves al manojo

CP Probamos N llaves en N intentos con repetición dado que se devuelven al manojo, luego hay N^N posibilidades.

CF Asumimos que queremos que la puerta se abra únicamente en el k-ésimo intento y no en otros, por lo que simplemente debemos contar de cuántas maneras podemos probar las $N-1$ llaves restantes en el resto de $N-1$ intentos con repetición. Esto es análogo al número de casos posibles sólo que con $N-1$ llaves, luego hay $(N-1)^{N-1}$ posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N} = \frac{1}{N}(\frac{N-1}{N})^{N-1}$.

Ej. 15. *En una urna se introducen n bolas, cada una de ellas de color blanco o negro con igual probabilidad. Se extraen k bolas con reemplazamiento desde la urna. Determinar la probabilidad de que la urna sólo contenga bolas blancas si las k bolas extraídas han sido blancas.*

Definimos los sucesos $U_i :=$ "La urna contiene i bolas blancas y $n-i$ bolas negras" con $i \in \{0, \dots, n\}$ y $B :=$ "Extraer con reemplazamiento k bolas blancas". En el caso de que la urna sólo tenga bolas blancas estaremos ante el suceso U_n, por lo que queremos calcular la probabilidad $P(U_n \,|\, B)$. Obtendremos dicha probabilidad mediante el Teorema de Bayes:

$$P(U_n \,|\, B) = \frac{P(B \,|\, U_n)\, P(U_n)}{\sum_{i=0}^{n} P(B \,|\, U_i)\, P(U_i)}$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $P(U_i)$ con $i \in \{0, \dots, n\}$

  Fijado $i \in \{0, \dots, n\}$, $P(U_i)$ es la probabilidad de que la urna contenga i bolas blancas y $n-i$ bolas negras. Calculamos esta probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Introducimos n bolas al azar en la urna habiendo 2 opciones (blanca o negra) por bola, luego hay 2^n posibilidades.

CF Queremos introducir exactamente i bolas blancas (y por tanto $n-i$ bolas negras) en la urna. Basta contar las formas de que ocurra esto viendo qué i bolas de las n fueron blancas, luego hay $\binom{n}{i}$ posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$.

- $\underline{P(B \mid U_i) \text{ con } i \in \{0, \dots, n\}}$

  Fijado $i \in \{0, \dots, n\}$, $P(B \mid U_i)$ es la probabilidad de extraer k bolas blancas con reemplazamiento de la urna que contiene i bolas blancas y $n-i$ bolas negras. Dado que la proporción de bolas blancas en la urna es $\frac{i}{n}$ y debemos realizar k extracciones con reemplazamiento, $P(B \mid U_i) = (\frac{i}{n})^k$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(U_n \mid B) = \frac{(\frac{n}{n})^k \cdot \binom{n}{n}\frac{1}{2^n}}{\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{n})^k \cdot \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}} = \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{i}{n}\right)^k\right)^{-1}$$

Ej. 16. *Se consideran $N+1$ urnas idénticas numeradas desde 0 hasta N, conteniendo N bolas. En concreto, la i-ésima urna contiene i bolas negras y $N-i$ bolas blancas, para $0 \leq i \leq N$. Se escoge una urna al azar y se extraen n bolas una a una con reemplazamiento. Si las n bolas extraídas resultan ser negras, determinar la probabilidad de que, al extraer la $(n+1)$-ésima bola, ésta sea de color negro.*

Definimos los sucesos $U_i :=$ "La urna elegida contiene i bolas negras y $N-i$ bolas blancas" con $i \in \{0, \dots, N\}$, $A :=$ "Extraer con reemplazamiento las n primeras bolas negras" y $B :=$ "Extraer con reemplazamiento la $(n+1)$-ésima bola negra". Queremos calcular la probabilidad $P(B \mid A)$. Obtendremos dicha probabilidad mediante la propia definición de probabilidad condicionada:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Sin embargo, $P(A \cap B)$ y $P(A)$ son probabilidades difíciles de calcular, por lo que usaremos el Teorema de la Probabilidad Total para hacerlo:

$$P(B \mid A) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P(A \cap B \mid U_i)\, P(U_i)}{\sum_{i=0}^{n} P(A \mid U_i)\, P(U_i)}$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(U_i) \text{ con } i \in \{0, \dots, N\}}$

  Fijado $i \in \{0, \dots, N\}$, $P(U_i)$ es la probabilidad de que la urna contenga i bolas negras y $N-i$ bolas blancas. Dado que la elección de la urna se produce al azar y tenemos $N+1$ urnas disponibles, $P(U_i) = \frac{1}{N+1}$.

- $\underline{P(A \cap B \mid U_i) \text{ con } i \in \{0, \dots, N\}}$

  Fijado $i \in \{0, \dots, N\}$, $P(A \cap B \mid U_i)$ es la probabilidad de extraer $n+1$ bolas negras con reemplazamiento de la urna que contiene i bolas negras y $N-i$ bolas blancas. Dado que la proporción de bolas negras en la urna es $\frac{i}{N}$ y debemos realizar $n+1$ extracciones con reemplazamiento, $P(A \cap B \mid U_i) = (\frac{i}{N})^{n+1}$.

- $\underline{P(A \,|\, U_i) \text{ con } i \in \{0, \ldots, N\}}$

  Fijado $i \in \{0, \ldots, N\}$, $P(A \,|\, U_i)$ es la probabilidad de extraer n bolas negras con reemplazamiento de la urna que contiene i bolas negras y $N - i$ bolas blancas. De forma análoga al caso anterior, $P(A \,|\, U_i) = (\frac{i}{N})^n$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(B \,|\, A) = \frac{\sum_{i=0}^{n} (\frac{i}{N})^{n+1} \cdot \frac{1}{N+1}}{\sum_{i=0}^{n} (\frac{i}{N})^{n} \cdot \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=0}^{n} i^{n+1}}{\sum_{i=0}^{n} i^{n}}$$

Ej. 17. *De una urna con a bolas blancas y b bolas negras se extraen k bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las k bolas haya exactamente r bolas blancas?*

Definimos el suceso $A :=$ "Obtener exactamente r bolas blancas al extraer k bolas" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Extraemos k bolas de una urna con $a + b$ bolas, luego hay $\binom{a+b}{k}$ posibilidades.

CF Queremos que de entre las k bolas extraídas exactamente r sean blancas, luego hay $\binom{a}{r}$ (extraer r blancas entre a) $\cdot \binom{b}{k-r}$ (extraer $k - r$ negras entre b) posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{\binom{a}{r}\binom{b}{k-r}}{\binom{a+b}{k}}$.

Ej. 18. *Se lanzan 2 dados n veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6 doble?*

Definimos el suceso $A :=$ "Obtener al menos un 6 doble en n tiradas". Consideremos el suceso complementario $A^c :=$ "No obtener ningún 6 doble en n tiradas". Este segundo suceso es mucho más fácil de estudiar y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Lanzamos los 2 dados n veces habiendo 6 opciones (caras) por dado, luego hay $(6^2)^n$ posibilidades.

CF Queremos no obtener un 6 doble en cada una de las n tiradas, por lo que de los 6^2 resultados posibles en cada lanzamiento debemos descartar el 6 doble (correspondiente a una única combinación de los dados). De esta forma, hay $(6^2 - 1)^n$ posibilidades.

Pr $P(A^c) = \frac{(6^2-1)^n}{(6^2)^n} = (\frac{35}{36})^n$.

Sabiendo esto, podemos calcular $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - (\frac{35}{36})^n$.

Ej. 19. *Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes, 2 amarillas y 4 blancas. Se extraen 8 bolas al azar. Calcular la probabilidad de que:*

(a) *Exactamente sean 2 rojas, 2 verdes, 1 amarilla y 3 blancas.*

(b) *Estén todas las bolas blancas.*

(c) *Haya, al menos, una bola roja.*

(a) Definimos el suceso $A :=$ "Obtener exactamente 2 bolas rojas, 2 verdes, 1 amarilla y 3 blancas" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Extraemos 8 bolas de una urna con $5 + 3 + 2 + 4 = 14$ bolas, luego hay $\binom{14}{8}$ posibilidades.

CF Queremos que de entre las 8 bolas extraídas exactamente 2 bolas sean rojas, 2 verdes, 1 amarilla y 3 blancas, luego hay $\binom{5}{2}$ (extraer 2 rojas entre 5) $\cdot$ $\binom{3}{2}$ (extraer 2 verdes entre 3) $\cdot$ $\binom{2}{1}$ (extraer 1 amarilla entre 2) $\cdot$ $\binom{4}{3}$ (extraer 3 blancas entre 4) posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{14}{8}} = \frac{80}{1001}$.

(b) Definimos el suceso $B :=$ "Incluir todas las bolas blancas en la extracción" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Igual que en (a), hay $\binom{14}{8}$ posibilidades.

CF Queremos que entre las 8 bolas extraídas estén todas las bolas blancas, luego hay $\binom{4}{4}$ (extraer 4 blancas entre 4) $\cdot$ $\binom{10}{4}$ (extraer $8 - 4 = 4$ bolas entre $14 - 4 = 10$ restantes) posibilidades.

Pr $P(B) = \frac{\binom{4}{4}\binom{10}{4}}{\binom{14}{8}} = \frac{10}{143}$.

(c) Definimos el suceso $C :=$ "Incluir al menos una bola roja en la extracción". Consideremos el suceso complementario $C^c :=$ "No incluir bolas rojas en la extracción". Este segundo suceso es mucho más fácil de estudiar y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Igual que en (a) y (b), hay $\binom{14}{8}$ posibilidades.

CF Queremos que las 8 bolas extraídas no sean rojas, luego hay $\binom{9}{8}$ (extraer 8 bolas entre $14 - 5 = 9$ no rojas) posibilidades.

Pr $P(C^c) = \frac{\binom{9}{8}}{\binom{14}{8}} = \frac{3}{1001}$.

Sabiendo esto, podemos calcular $P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{3}{1001} = \frac{998}{1001}$.

Ej. 20. *Con una moneda se juega a cara o cruz. Se suspenden los lanzamientos cuando por primera vez la diferencia entre el número de caras y el número de cruces es, en valor absoluto, igual a 3. Calcular la probabilidad de que los lanzamientos se suspendan en la sexta tirada o antes.*

Definimos los sucesos $A_i :=$ "Suspender los lanzamientos en la i-ésima tirada" con $i \geq 1$. Queremos calcular la probabilidad $P(\bigcup_{i=1}^{6} A_i)$. Dado que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, podemos expresar dicha probabilidad como:

$$P(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i)$$

Para obtenerla, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(A_i) \text{ con } i \in \{1, 2\}}$

  Necesitamos al menos 3 tiradas para poder suspender los lanzamientos. Por tanto, $P(A_1) = P(A_2) = 0$.

- $\underline{P(A_i) \text{ con } i \in \{4, 6\}}$

  La diferencia entre el número de caras y cruces debe ser de 3 para suspender los lanzamientos. Esto implica que tendremos $k + 3$ caras y k cruces o bien k caras y $k + 3$ cruces con $k \geq 0$, haciendo un total de $2k + 3$ lanzamientos. Esto siempre es una cantidad impar, luego es imposible suspender los lanzamientos en una tirada par. Por tanto, $P(A_4) = P(A_6) = 0$.

- $\underline{P(A_3)}$

  Obtenemos la probabilidad usando la regla de Laplace:

  CP Lanzamos la moneda 3 veces habiendo 2 opciones (cara o cruz) por tirada, luego hay 2^3 posibilidades.

  CF Las únicas opciones son haber obtenido sólo caras o sólo cruces, luego hay 2 posibilidades.

  Pr $P(A_3) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$.

- $\underline{P(A_5)}$

  Obtenemos la probabilidad usando la regla de Laplace:

  CP Lanzamos la moneda 5 veces habiendo 2 opciones (cara o cruz) por tirada, luego hay 2^5 posibilidades.

  CF Las únicas opciones son haber obtenido 4 caras y 1 cruz o bien 1 cara y 4 cruces en las 5 tiradas. Ahora bien, no podemos haber obtenido el mismo resultado en las tres primeras tiradas, o habríamos suspendido ya los lanzamientos. Por tanto, basta escoger en cuál de las tres primeras tiradas hemos obtenido el resultado diferente y si ha sido cara o cruz, luego hay $3 \cdot 2$ posibilidades.

  Pr $P(A_3) = \frac{3 \cdot 2}{2^5} = \frac{3}{16}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sumarlas para obtener el resultado:

$$P(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = 0 + 0 + \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{3}{16} + 0 = \tfrac{7}{16}$$

Ej. 21. *Los jugadores A, B y C participan en el siguiente juego: se lanza un dado y A gana si sale 1 ó 3; B gana si sale 4 ó 5; C gana si sale 6; y si sale 2 se vuelve a lanzar el dado. Calcular la probabilidad de que gane A, de que gane C y de que gane B.*

Definimos los sucesos $G_A :=$ "Gana el jugador A" y $A_i :=$ "Gana el jugador A en la i-ésima tirada" con $i \geq 1$. Es claro que $P(G_A) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$. Dado que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, podemos expresar dicha probabilidad como:

$$P(G_A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Para computarla, primero hemos de calcular las probabilidades $P(A_i)$ con $i \geq 1$. Las obtenemos usando la regla de Laplace:

CP Lanzamos el dado i veces habiendo 6 opciones (caras), luego hay 6^i posibilidades.

CF Para que nadie gane en las primeras $i-1$ tiradas, debe salir 2 en todas ellas. Esto cambia en la i-ésima tirada, en la que debe salir 1 ó 3 para que A gane. De esta forma, hay 1^{i-1} (nadie gana en primeras $i-1$ tiradas) $\cdot$ 2 (A gana en tirada i) posibilidades.

Pr $P(A^c) = \frac{1^{i-1} \cdot 2}{6^i} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6})^{i-1}$.

Una vez determinadas dichas probabilidades, basta sumarlas para obtener el resultado:

$$P(G_A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{i} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}$$

Para concluir el ejercicio, definimos los sucesos $G_B :=$ "Gana el jugador B", $G_C :=$ "Gana el jugador C" y $G_N :=$ "Nadie gana". Es sencillo apreciar que el jugador B tiene las mismas opciones de ganar que el jugador A, por lo que:

$$P(G_B) = P(G_A) = \frac{2}{5}$$

Para que nadie gane, debe salir 2 constantemente, por tanto $P(G_N) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{6} = 0$. Así pues, alguno de los jugadores debe ganar el juego y podemos deducir que $P(G_A) + P(G_B) + P(G_C) = 1$. Esto nos lleva a que:

$$P(G_C) = 1 - P(G_A) - P(G_B) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Ej. 22. *Una urna contiene 5 bolas negras y 4 blancas, otra urna contiene 4 bolas negras y 5 blancas. Supongamos que se trasladan 2 bolas de la primera a la segunda urna y, a continuación, se extrae una bola de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

Definimos los sucesos $A :=$ "Extraer una bola blanca" y $B_i :=$ "Trasladar i bolas negras y $2-i$ bolas blancas de la primera a la segunda urna" con $i \in \{0,1,2\}$. Queremos calcular la probabilidad $P(A)$. Ésta es difícil de calcular, por lo que usaremos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $P(B_i)$ con $i \in \{0,1,2\}$

  Fijado $i \in \{0,1,2\}$, $P(B_i)$ es la probabilidad de trasladar i bolas negras y $2-i$ bolas blancas de la primera a la segunda urna. Calculamos esta probabilidad usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos para su traslado 2 bolas de una urna con $5+4=9$ bolas, luego hay $\binom{9}{2}$ posibilidades.

  CF Queremos que de entre las 2 bolas trasladadas exactamente i bolas sean negras y el resto $(2-i)$ sean blancas, luego hay $\binom{5}{i}$ (extraer i negras entre 5) $\cdot \binom{4}{2-i}$ (extraer $2-i$ blancas entre 4) posibilidades.

  Pr $P(B_i) = \frac{\binom{5}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{9}{2}}$.

- $P(A \mid B_i)$ con $i \in \{0,1,2\}$

  Fijado $i \in \{0,1,2\}$, $P(A \mid B_i)$ es la probabilidad de extraer una bola blanca de la segunda urna tras el traslado de bolas, es decir, conteniendo 11 bolas de entre las cuales $4+i$ bolas son negras y $7-i$ blancas. Dado que la proporción de bolas blancas en la segunda urna es $\frac{7-i}{11}$ y debemos realizar una única extracción, $P(A \mid B_i) = \frac{7-i}{11}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} \frac{7-i}{11} \cdot \frac{\binom{5}{i}\binom{4}{2-i}}{\binom{9}{2}} = \frac{53}{99}$$

Ej. 23. *Se sabe que al lanzar cinco monedas aparecieron al menos dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras exacto fuese tres?*

Definimos los sucesos $A_i :=$ "Obtener exactamente i caras al lanzar 5 monedas" con $i \in \{0,\dots,5\}$. Queremos calcular la probabilidad $P(A_3 \mid \bigcup_{i=2}^{5} A_i)$. Obtendremos dicha probabilidad mediante la propia definición de probabilidad condicionada:

$$P\left(A_3 \mid \bigcup_{i=2}^{5} A_i\right) = \frac{P(A_3 \cap \bigcup_{i=2}^{5} A_i)}{P(\bigcup_{i=2}^{5} A_i)}$$

Dado que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, es claro que $P(A_3 \cap \bigcup_{i=2}^{5} A_i) = P(A_3)$ y que $P(\bigcup_{i=2}^{5} A_i) = \sum_{i=2}^{5} P(A_i)$. Por tanto, basta calcular las probabilidades $P(A_i)$ con $i \in \{0,\dots,5\}$. Las obtenemos usando la regla de Laplace:

CP Lanzamos 5 monedas habiendo 2 opciones (cara y cruz) por moneda, luego hay 2^5 posibilidades.

CF Queremos obtener exactamente i caras (y por tanto $5-i$ cruces). Basta contar las formas de que ocurra esto viendo qué i monedas de las 5 sacaron cara, luego hay $\binom{5}{i}$ posibilidades.

Pr $P(A_i) = \frac{\binom{5}{i}}{2^5} = \binom{5}{i}\frac{1}{32}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P\left(A_3 \,|\, \bigcup_{i=2}^{5} A_i\right) = \frac{\binom{5}{3}\frac{1}{32}}{\sum_{i=2}^{5}\binom{5}{i}\frac{1}{32}} = \frac{5}{13}$$

Ej. 24. *Disponemos de una moneda y dos dados A y B. A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, y B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda, si sale cara se lanza repetidas veces el dado A y si sale cruz se hace lo mismo con el dado B.*

(a) *Calcular la probabilidad de que en el primer lanzamiento la cara observada sea roja.*

(b) *Sabiendo que en los dos primeros lanzamientos hemos observado dos caras rojas, ¿cuál es la probabilidad de que el dado lanzado sea el A?*

Definimos los sucesos $C :=$ "Sacar cara en la moneda / Lanzar el dado A", $X :=$ "Sacar cruz en la moneda / Lanzar el dado B" y $R_i :=$ "Observar i caras rojas en los primeros i lanzamientos" con $i \geq 1$.

(a) Queremos calcular la probabilidad $P(R_1)$ y lo haremos mediante el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(R_1) = P(R_1 \,|\, C)\, P(C) + P(R_1 \,|\, X)\, P(X)$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(C) \text{ y } P(X)}$
  Los resultados de una moneda son 2 (cara y cruz) y son equiprobables, por lo que $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$.
- $\underline{P(R_1 \,|\, C) \text{ y } P(R_1 \,|\, X)}$
  La proporción de caras rojas en el dado A es de $\frac{4}{6}$ y en el dado B de $\frac{2}{6}$. Si en la moneda sale cara (C), entonces debemos realizar un único lanzamiento del dado A y se deduce que $P(R_1 \,|\, C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Si por el contrario sale cruz (X), entonces debemos realizar un único lanzamiento del dado B y se deduce que $P(R_1 \,|\, X) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(R_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Queremos calcular la probabilidad $P(C \mid R_2)$ y lo haremos mediante el Teorema de Bayes:

$$P(C \mid R_2) = \frac{P(R_2 \mid C)\, P(C)}{P(R_2 \mid C)\, P(C) + P(R_2 \mid X)\, P(X)}$$

Para ello, aprovechando que $P(C)$ y $P(X)$ ya las calculamos en (a), basta calcular las probabilidades:

- $\underline{P(R_2 \mid C) \text{ y } P(R_2 \mid X)}$

  La proporción de caras rojas en el dado A es de $\frac{4}{6}$ y en el dado B de $\frac{2}{6}$. Si en la moneda sale cara (C), entonces debemos realizar dos lanzamientos del dado A y se deduce que $P(R_2 \mid C) = (\frac{4}{6})^2 = \frac{4}{9}$. Si por el contrario sale cruz (X), entonces debemos realizar dos lanzamientos del dado B y se deduce que $P(R_2 \mid X) = (\frac{2}{6})^2 = \frac{1}{9}$.

Una vez calculadas, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(C \mid R_2) = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

Ej. 25. *Se lanzan dos monedas, si el resultado es CC se extraen dos bolas de una urna U_1 que contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 negras. Si el resultado es CX se extraen de U_2 que contiene 2 rojas, 1 blanca y 5 negras, y si sale XX ó XC las bolas se extraen de U_3 que contiene 6 rojas, 4 blancas y 6 negras. Si las dos bolas extraídas resultaron ser una blanca y otra roja, ¿cuál es la probabilidad de que sean de U_1? ¿Y de U_2?*

Definimos los sucesos $A :=$ "Extraer una bola blanca y una roja" y $B_i :=$ "Realizar extracciones de la urna U_i" con $i \in \{1, 2, 3\}$. Queremos calcular las probabilidades $P(B_i \mid A)$ con $i \in \{1, 2, 3\}$. Obtendremos dichas probabilidades mediante el Teorema de Bayes:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(A \mid B_j)\, P(B_j)}$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(B_i) \text{ con } i \in \{1, 2, 3\}}$

  Fijado $i \in \{1, 2, 3\}$, $P(B_i)$ es la probabilidad de realizar extracciones de la urna U_i. Esta probabilidad viene determinada por el resultado obtenido al lanzar dos monedas que son 4 (CC, CX, XX y XC) y son equiprobables, por lo que atendiendo al enunciado: $P(B_1) = \frac{1}{4}$, $P(B_2) = \frac{1}{4}$ y $P(B_3) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

- $\underline{P(A\,|\,B_1)}$

  Ésta es la probabilidad de extraer una bola blanca y una roja de la urna U_i. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos para su traslado 2 bolas de una urna con $3+2+4=9$ bolas, luego hay $\binom{9}{2}$ posibilidades.

  CF Queremos que de entre las 2 bolas trasladadas exactamente una bola sean roja y la otra blanca, luego hay $\binom{3}{1}$ (extraer 1 roja entre 3) $\cdot$ $\binom{2}{1}$ (extraer 1 blanca entre 2) posibilidades.

  Pr $P(A\,|\,B_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$.

- $\underline{P(A\,|\,B_2)}$

  Ésta es la probabilidad de extraer una bola blanca y una roja de la urna U_2. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos para su traslado 2 bolas de una urna con $2+1+5=8$ bolas, luego hay $\binom{8}{2}$ posibilidades.

  CF Queremos que de entre las 2 bolas trasladadas exactamente una bola sean roja y la otra blanca, luego hay $\binom{2}{1}$ (extraer 1 roja entre 2) $\cdot$ $\binom{1}{1}$ (extraer 1 blanca entre 1) posibilidades.

  Pr $P(A\,|\,B_2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{14}$.

- $\underline{P(A\,|\,B_3)}$

  Ésta es la probabilidad de extraer una bola blanca y una roja de la urna U_3. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos para su traslado 2 bolas de una urna con $6+4+6=16$ bolas, luego hay $\binom{16}{2}$ posibilidades.

  CF Queremos que de entre las 2 bolas trasladadas exactamente una bola sean roja y la otra blanca, luego hay $\binom{6}{1}$ (extraer 1 roja entre 6) $\cdot$ $\binom{4}{1}$ (extraer 1 blanca entre 4) posibilidades.

  Pr $P(A\,|\,B_3) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{16}{2}} = \frac{1}{5}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener los distintos resultados. En primer lugar computamos:

$$\sum_{j=1}^{3} P(A\,|\,B_j)\,P(B_j) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{67}{420}$$

Entonces, para la urna U_1 se obtiene:

$$P(B_1\,|\,A) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{67}{420}} = \frac{35}{134}$$

Y para la urna U_2 se obtiene:

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{\frac{1}{14} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{67}{420}} = \frac{15}{134}$$

Adicionalmente podemos obtener para la urna U_3:

$$P(B_3 \,|\, A) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{67}{420}} = \frac{42}{67}$$

Ej. 26. *Determinada batería antiaérea disparaba sobre un avión. Para derribar el aparato bastaba con alcanzar ambos reactores o la cabina del piloto. Sean p_1 la probabilidad de alcanzar el primer reactor, p_2 la probabilidad de alcanzar el segundo y p_3 la probabilidad de dar en la cabina del piloto. Se supone que estos tres puntos sensibles eran tocados uno independientemente del otro. Determinar la probabilidad de que dicho avión hubiese sido derribado.*

Definimos los sucesos R_1 := "Alcanzar el primer reactor", R_2 := "Alcanzar el segundo reactor", C := "Alcanzar la cabina del piloto" y D := "Derribar el avión". Queremos calcular la probabilidades $P(D)$. Ahora bien, podemos describir el suceso D como $(R_1 \cap R_2) \cup C$. De forma que usando la regla de la adición tenemos:

$$P(D) = P((R_1 \cap R_2) \cup C) = P(R_1 \cap R_2) + P(C) - P(R_1 \cap R_2 \cap C)$$

Dado que R_1, R_2 y C son sucesos independientes, concluimos que:

$$P(D) = P(R_1)\,P(R_2) + P(C) - P(R_1)\,P(R_2)\,P(C)$$

Sustituyendo $P(R_1) = p_1$, $P(R_2) = p_2$ y $P(C) = p_3$ obtenemos el resultado:

$$P(D) = p_1\,p_2 + p_3 - p_1\,p_2\,p_3$$

Ej. 27. *El volumen diario de producción de 3 plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 en la segunda y 2000 en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0,8 % y 2 % respectivamente, determinar la probabilidad de que:*

- **(a)** *Extraída una unidad al azar resulte ser no defectuosa.*
- **(b)** *Habiendo sida extraída una unidad defectuosa, haya sido producida en la primera planta.*

Definimos los sucesos D := "Extraer una unidad defectuosa" y F_i := "Producir una unidad en la planta i-ésima" con $i \in \{1, 2, 3\}$.

(a) Queremos calcular la probabilidad $P(D^c)$, es decir, del suceso $D^c :=$ "Extraer una unidad no defectuosa". Lo haremos mediante el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D^c) = \sum_{i=1}^{3} P(D^c \,|\, F_i)\, P(F_i)$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(F_i) \text{ con } i \in \{1,2,3\}}$
  El total de unidades producidas diariamente en la fábrica es $500 + 1000 + 2000 = 3500$. Por tanto, atendiendo al número de unidades producidas por cada planta, podemos concluir que: $P(F_1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}$, $P(F_2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}$ y $P(F_2) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$.
- $\underline{P(D^c \,|\, F_i) \text{ con } i \in \{1,2,3\}}$
  Fijado $i \in \{1,2,3\}$, $P(D^c \,|\, F_i)$ es la probabilidad de extraer una unidad no defectuosa de la planta i-ésima. Sabiendo que $P(D \,|\, F_1) = \frac{1}{100}$, $P(D \,|\, F_2) = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$ y $P(D \,|\, F_3) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$, y que $P(A) + P(A^c) = 1$ para cualquier suceso A, concluimos que: $P(D^c \,|\, F_1) = \frac{99}{100}$, $P(D^c \,|\, F_2) = \frac{124}{125}$ y $P(D^c \,|\, F_3) = \frac{49}{50}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(D^c) = \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{7} + \frac{124}{125} \cdot \frac{2}{7} + \frac{49}{50} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3447}{3500} \approx 98{,}49\,\%$$

(b) Queremos calcular la probabilidad $P(F_1 \,|\, D)$. Lo haremos mediante el Teorema de Bayes:

$$P(F_1 \,|\, D) = \frac{P(D \,|\, F_1)\, P(F_1)}{P(D)}$$

Para ello, aprovechando que $P(D \,|\, F_1)$ y $P(F_1)$ ya las calculamos en (a), basta calcular la probabilidad:

- $\underline{P(D)}$
  Habiendo calculado $P(D^c)$ en el apartado (a), basta darse cuenta de que $P(D) = 1 - P(D^c) = \frac{53}{3500}$.

Una vez calculada, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(F_1 \,|\, D) = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{53}{3500}} = \frac{5}{53} \approx 9{,}43\,\%$$

Ej. 28. *Se supone que n bolas se colocan al azar en n cajas numeradas. Calcular las probabilidades de que:*

(a) *La caja 1 esté vacía.*

(b) *Alguna caja esté vacía.*

(c) *La caja 1 sea la única vacía.*

(d) *Hay una única caja vacía.*

(a) Definimos el suceso $A :=$ "Dejar vacía la caja 1" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Introducimos cada una de las n bolas en una caja numerada habiendo n cajas disponibles y permitiendo repeticiones. Basta por tanto asignar a cada bola el número de la caja en que la introducimos, luego hay n^n posibilidades.

CF Queremos dejar vacía la caja 1, por lo que introducimos cada una de las n bolas en una caja numerada habiendo $n-1$ cajas disponibles (excluimos la 1) y permitiendo repeticiones. Como antes, asignamos a cada bola el número de la caja en que la introducimos, luego hay $(n-1)^n$ posibilidades.

Pr $P(A) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = (1 - \frac{1}{n})^n$.

(b) Definimos el suceso $B :=$ "Dejar vacía alguna caja". Consideremos el suceso complementario $B^c :=$ "Llenar todas las cajas". Este segundo suceso es mucho más fácil de estudiar y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Igual que en (a), hay n^n posibilidades.

CF Queremos llenar las n cajas disponibles con n bolas, por lo que debemos introducir exactamente una bola por cada caja. De forma análoga a los casos anteriores, asignamos a cada bola el número de la caja en que la introducimos, luego hay $n!$ posibilidades.

Pr $P(B^c) = \frac{n!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.

Sabiendo esto, podemos calcular $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.

(c) Definimos el suceso $C :=$ "Dejar vacía únicamente la caja 1" y obtenemos su probabilidad usando la regla de Laplace:

CP Igual que en (a) y (b), hay n^n posibilidades.

CF Queremos dejar vacía únicamente la caja 1, por lo que debemos introducir exactamente una bola por cada caja excepto en una caja que introduciremos 2 bolas. En primer lugar debemos seleccionar las 2 bolas que irán a una misma caja y qué caja será ésta de entre las $n-1$ disponibles (excluimos la 1), luego hay $\binom{n}{2}$ (escoger 2 bolas entre n) $\cdot \binom{n-1}{1}$ (escoger 1 caja entre $n-1$) posibilidades. El resto de $n-2$ bolas las repartimos sin repetición entre las $n-2$ cajas restantes asignándole a cada bola el número de la caja en que la introducimos, luego hay $(n-2)!$ posibilidades. Así, uniendo ambos procesos, obtenemos que hay $\binom{n}{2} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot (n-2)!$ posibilidades.

Pr $P(C) = \frac{\binom{n}{2}\binom{n-1}{1}(n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)(n-1)!}{2n^{n-1}}$.

(d) Definimos el suceso $D :=$ "Dejar vacía una única caja". Podemos razonar sobre el apartado (c), dado que la única diferencia es que no sabemos qué caja debe quedar vacía. Así pues, en los casos favorables de la regla de Laplace en (c), para cada una de las posibilidades disponemos de n elecciones relativas a qué caja dejar vacía. De esta forma, concluimos que $P(D) = n\,\frac{(n-1)(n-1)!}{2n^{n-1}} = \frac{(n-1)(n-1)!}{2n^{n-2}}$.

Ej. 29. *En un colegio electoral de 42 electores, 15 han votado la lista A y el resto la B. Se seleccionan 10 electores, calcúlese la probabilidad de que, como máximo, 3 de ellos hayan votado la lista A.*

Definimos los sucesos $A_i :=$ "Obtener exactamente i votos para la lista A en una selección de 10 electores" con $i \in \{0, \dots, 10\}$. Queremos calcular la probabilidad $P(\bigcup_{i=0}^{3} A_i)$. Dado que $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, es claro que $P(\bigcup_{i=0}^{3} A_i) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)$. Por tanto, basta calcular las probabilidades $P(A_i)$ con $i \in \{0, \dots, 10\}$. Las obtenemos usando la regla de Laplace:

CP Seleccionamos para la muestra a 10 electores de entre los 42, luego hay $\binom{42}{10}$ posibilidades.

CF Queremos obtener exactamente i votos para la lista A (y $10 - i$ votos para la B), luego hay $\binom{15}{i}$ (obtener i votos para A entre 15) $\cdot$ $\binom{27}{10-i}$ (extraer $10 - i$ votos para B entre $42 - 15 = 27$) posibilidades.

Pr $P(A_i) = \frac{\binom{15}{i}\binom{27}{10-i}}{\binom{42}{10}}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P\left(\bigcup_{i=0}^{3} A_i\right) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\binom{15}{i}\binom{27}{10-i}}{\binom{42}{10}} = \frac{238395}{489991} \approx 0{,}487$$

Ej. 30. *De una baraja española (40 cartas) repartida en su totalidad entre 4 jugadores, hallar la probabilidad de que haya como mínimo un jugador cuya mano sean carta todas del mismo palo.*

Definimos los sucesos $J_i :=$ "Repartir todas las cartas del mismo palo al jugador i-ésimo" con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Queremos calcular la probabilidad $P(\bigcup_{i=1}^{4} J_i)$. Aplicando el principio de inclusión-exclusión obtenemos:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} J_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P(J_i) - \sum_{i_1=1}^{4} \sum_{i_1<i_2}^{4} P(J_{i_1} \cap J_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^{4} \sum_{i_1<i_2}^{4} \sum_{i_2<i_3}^{4} P(J_{i_1} \cap J_{i_2} \cap J_{i_3}) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} J_i\right)$$

Démonos cuenta de que el rol de los jugadores es intercambiable, por lo que podemos reescribir la expresión como:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} J_i\right) = 4P(J_1) - 6P(J_1 \cap J_2) + 4P(J_1 \cap J_2 \cap J_3) - P(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4)$$

Por tanto, basta calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(J_1)}$

  Ésta es la probabilidad de repartirle todas las cartas del mismo palo al jugador 1. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos 10 cartas de entre las 40 para el jugador 1, luego hay $\binom{40}{10}$ posibilidades.

  CF Queremos que las 10 cartas del jugador 1 sean del mismo palo, pero esto es repartirle todas las cartas de dicho palo. Es suficiente entonces seleccionar el palo que le repartimos y hay $\binom{4}{1}$ posibilidades.

  Pr $P(J_1) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{40}{10}} \approx 4{,}719 \cdot 10^{-9}$.

- $\underline{P(J_1 \cap J_2)}$

  Ésta es la probabilidad de repartirle todas las cartas del mismo palo a los jugadores 1 y 2. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos 10 cartas de entre las 40 para el jugador 1 y 10 cartas de entre las $40-10=30$ restantes para el jugador 2, luego hay $\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10}$ posibilidades.

  CF Seleccionamos un palo de entre los 4 para el jugador 1 y uno de entre los 3 restantes para el jugador 2, luego hay $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}$ posibilidades.

  Pr $P(J_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}} \approx 4{,}712 \cdot 10^{-16}$.

- $\underline{P(J_1 \cap J_2 \cap J_3)}$

  Ésta es la probabilidad de repartirle todas las cartas del mismo palo a los jugadores 1, 2 y 3. La calculamos usando la regla de Laplace:

  CP Seleccionamos 10 cartas de entre las 40 para el jugador 1, 10 cartas de entre las $40-10=30$ restantes para el jugador 2 y 10 cartas de entre las $30-10=20$ restantes para el jugador 3, luego hay $\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$ posibilidades.

  CF Seleccionamos un palo de entre los 4 para el jugador 1, uno de entre los 3 restantes para el jugador 2 y uno de entre los 2 restantes para el jugador 3, luego hay $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}$ posibilidades.

  Pr $P(J_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}} \approx 5{,}101 \cdot 10^{-21}$.

- $\underline{P(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4)}$

  Si le repartirmos todas las cartas del mismo palo a los jugadores 1, 2 y 3, también lo hacemos al jugador 4. Por tanto, $P(J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4) = P(J_1 \cap J_2 \cap J_3) \approx 5{,}101 \cdot 10^{-21}$.

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} J_i\right) \approx 4 \cdot 4{,}719 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 4{,}712 \cdot 10^{-16} + 4 \cdot 5{,}101 \cdot 10^{-21} - 5{,}101 \cdot 10^{-21} = 1{,}888 \cdot 10^{-8}$$

Ej. 31. *Se tienen una moneda y una urna. Se lanza la moneda al aire. Si sale cara, se introduce una bola negra en la urna; si sale cruz, la bola introducida es blanca. El proceso se repite 10 veces. A continuación, se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. El procedimiento se repite 10 veces. Finalizado éste, se ha observado que las 10 bolas extraídas eran de color blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna contenga sólo bolas blancas?*

La solución general a este problema se dio en el ejercicio (15). En él se definieron los sucesos $U_i :=$ "La urna contiene i bolas blancas y $n-i$ bolas negras" con $i \in \{0,\ldots,n\}$ y $B :=$ "Extraer con reemplazamiento k bolas blancas", obteniéndose que:

$$P(U_n \,|\, B) = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{i}{n} \right)^k \right)^{-1}$$

Basta tomar $n = k = 10$ para calcular la solución concreta de este problema:

$$P(U_10 \,|\, B) = \left(\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{i}{10} \right)^{10} \right)^{-1} \approx 7{,}019 \cdot 10^{-2}$$

Ej. 32. *Dos de las cuatro válvulas de un aparato, que funcionan independientemente, han fallado. Calcular la probabilidad de que hayan sido la 1 y la 2, si la probabilidad de que falle la válvula i es* $\frac{i}{10}$.

Definimos los sucesos $V_i :=$ "Fallo exclusivamente de la válvula i" con $i \in \{1,2,3,4\}$, $V_{ij} :=$ "Fallo exclusivamente de las válvulas i y j" con $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$ y $F :=$ "Fallo exactamente de dos válvulas". Queremos calcular la probabilidad $P(V_{12} \,|\, F)$. Obtendremos dicha probabilidad mediante la propia definición de probabilidad condicionada:

$$P(V_{12} \,|\, F) = \frac{P(V_{12} \cap F)}{P(F)}$$

Sin embargo, démonos cuenta de que $P(V_{12} \cap F) = P(V_{12})$, por lo que basta calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(V_i) \text{ y } P(V_i^c) \text{ con } i \in \{1,2,3,4\}}$

  Fijado $i \in \{1,2,3,4\}$, de acuerdo con el enunciado se tiene que $P(V_i) = \frac{i}{10}$. Además podemos deducir que $P(V_i^c) = 1 - P(V_i) = \frac{10-i}{10}$.

- $\underline{P(V_{ij}) \text{ con } i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3,4\}}$

  Fijados $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,3,4\}$, dado que el funcionamiento de las válvulas es independiente, concluimos que, siendo $k \neq l$, $k,l \in \{1,2,3,4\} \backslash \{i,j\}$, $P(V_{ij}) = P(V_i)\,P(V_j)\,P(V_k^c)\,P(V_l^c)$. Por tanto:

$$P(V_{12}) = \frac{1}{10}\frac{2}{10}\frac{7}{10}\frac{6}{10} = \frac{21}{2500} \qquad P(V_{13}) = \frac{1}{10}\frac{3}{10}\frac{8}{10}\frac{6}{10} = \frac{9}{625}$$
$$P(V_{14}) = \frac{1}{10}\frac{4}{10}\frac{8}{10}\frac{7}{10} = \frac{14}{625} \qquad P(V_{23}) = \frac{2}{10}\frac{3}{10}\frac{9}{10}\frac{6}{10} = \frac{81}{2500}$$
$$P(V_{24}) = \frac{2}{10}\frac{4}{10}\frac{9}{10}\frac{7}{10} = \frac{63}{1250} \qquad P(V_{34}) = \frac{3}{10}\frac{4}{10}\frac{9}{10}\frac{8}{10} = \frac{54}{625}$$

- $\underline{P(F)}$

  Podemos describir $F = \bigcap_{i=1}^{4} \bigcap_{i<j}^{4} V_{ij}$. Dado que los sucesos V_{ij} con $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ son disjuntos dos a dos, tenemos que:

  $$P(F) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{i<j}^{4} P(V_{ij})$$

  Sustituyendo las probabilidades ya calculadas se obtiene:

  $$P(F) = \frac{21}{2500} + \frac{9}{625} + \frac{14}{625} + \frac{81}{2500} + \frac{63}{1250} + \frac{54}{625} = \frac{134}{625}$$

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(V_{12} \mid F) = \frac{\frac{21}{2500}}{\frac{134}{625}} = \frac{21}{536}$$