I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.................... Nº...........

Apellidos Nombre

Calificación

12.- Halla el orden del cero $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

a) $f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^3 z}{z} & \text{si } z \neq 0. \end{cases}$ $\quad f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Haciendo el desarrollo de Taylor del sen z en $z_0 = 0$ obtenemos que

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n \quad \text{donde } \varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm 1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} z^n$ y sen z tiene un cero en 0 de multiplicidad 1 por lo que $\operatorname{sen} z = z \cdot h(z)$ con $h(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $h(0) \neq 0$.

$$\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^3 z}{z} = \frac{z^3 \cdot h^3(z)}{z} = z^2 \cdot h^3(z) \quad \text{con } h^3(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } h^3(0) \neq 0.$$

Por tanto $f(z)$ tiene un cero en z de multiplicidad 2.

b) $f(z) = e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}$

$f(0) = e^0 - e^0 = 0$ por lo que f tiene un cero en 0

$$f'(z) = e^{\operatorname{sen} z} \cdot \cos z - e^{\operatorname{tg} z} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 z) = e^{\operatorname{sen} z} \cdot \cos z - e^{\operatorname{tg} z} - e^{\operatorname{tg} z} \operatorname{tg}^2 z$$

$$f'(0) = e^0 \cdot 1 - e^0 (1 + 0) = 0$$

$$f''(z) = e^{\operatorname{sen} z} \cdot \cos^2 z + e^{\operatorname{sen} z} \cdot (-\operatorname{sen} z) - e^{\operatorname{tg} z} (1 + \operatorname{tg}^2 z)^2 - e^{\operatorname{tg} z} \cdot 2 \operatorname{tg} z (1 + \operatorname{tg}^2 z)$$