SEMANTICAS OPERACIONALES DE LAS EXPRESIONES ARITMETICAS

1) Semánticas secuenciales de paso fino

Recordemos que Aexp viene definido por $a ::= n \in Num \mid v \in Var \mid a_1 \otimes_i a_2$ con $\otimes_1 = +$, $\otimes_2 = *$ y $\otimes_3 = -$, donde hemos introducido esta notación parametrizada dado que todas las operaciones binarias son tratadas del mismo modo.

Los valores finales de las expresiones pertenecerán exclusivamente a $\mathbb{Z}$. Ello se consigue fácilmente en la semántica composicional $\mathcal{A}[\![a]\!]$ que podemos ver como una semántica operacional de paso grueso. Pero al pensar en una semántica de paso fino nos encontramos con que un planteamiento "directo" de la misma nos llevará a tener que mezclar valores sintácticos y valores semánticos $m \in \mathbb{Z}$. Esto es perfectamente asumible si pasamos a considerar la extensión AexpS que simplemente añade $m \in \mathbb{Z}$ a la definición de Aexp. Definiremos entonces una semántica de AexpS, que "restringida" a Aexp nos da la semántica deseada de sus expresiones.

Def: $\Rightarrow \subseteq (AexpS \times AexpS)$ se define mediante las siguientes reglas:

$[n_{AexpS}]\quad n \Rightarrow \mathcal{N}(n) \qquad [var_{AexpS}]\quad v \Rightarrow s\,v$

$$[\otimes_i{}^{l}{}_{AexpS}]\quad \frac{a_1 \Rightarrow a_1'}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow a_1' \otimes_i a_2} \qquad [\otimes^{r}{}_{AexpS}]\quad \frac{a_2 \Rightarrow a_2'}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow a_1 \otimes_i a_2'}$$

$[\otimes_i{}^{op}{}_{AexpS}]\quad m_1 \otimes_i m_2 \rightarrow m_1 \times_i m_2$ donde $\times_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es la operación que define el significado deseado de $\otimes_i$

Obsérvese que no hay ninguna regla para definir "el significado" de $m \in \mathbb{Z}$, ¡pues simplemente es él mismo!

Por otra parte, y aunque la regla $[var_{AexpS}]$ utiliza el estado en el que se evalúa la expresión, como este será el mismo "todo el ~~tiempo~~ tiempo" y "en todas partes" mientras evaluamos una expresión, hemos prescindido de la repetición constante de s, limitándonos a usarlo cuando tengamos que evaluar una variable.

Manejar expresiones "extendidas" donde "se mezclan" subexpresiones "todavía sintácticas" con "argumentos semánticos" que recogen el valor "ya calculado" de una determinada subexpresión "totalmente sintáctica", es algo totalmente natural que recoge la idea de ir "reduciendo" (u operando, o "simplificando") la expresión original hasta que obtenemos (idealmente) un único valor semántico, i que será justamente "la semántica" (o "el valor") de la expresión. Pero si no nos gustara esta idea bastaría con que "congelásemos" a nivel sintáctico los valores semánticos, pasando a definir

Def : $\Rightarrow' \subseteq (Aexp \times (Aexp \cup \mathbb{Z}))$ se define mediante las reglas

$[n'_{Aexp}] = [n_{Aexp\,S}]$ $\qquad$ $[var'_{Aexp}] = [var_{Aexp\,S}]$

$[\otimes_i^{\ell'}{}_{Aexp}]$ $\dfrac{a_1 \Rightarrow a'_1}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow \mathcal{N}^{-1}(a'_1) \otimes_i a_2}$ $\qquad$ $[\otimes_i^{r'}{}_{Aexp}]$ análoga

$[\otimes_i^{op'}{}_{Aexp}]$ $n_1 \otimes_i n_2 \Rightarrow \mathcal{N}(n_1) \times_i \mathcal{N}(n_2)$

donde $\mathcal{N}^{-1}(m)$ con $m \in \mathbb{Z}$ es la inversa "ordinaria" de $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^{-1}(a)$ con $a \in \mathcal{A}exp$ es simplemente a.

2) Semánticas con posibles pasos en paralelo

Bastaría con añadir las reglas

$[\otimes_i^{par}{}_{Aexp\,S}]$ $\dfrac{a_1 \Rightarrow a'_1 \qquad a_2 \Rightarrow a'_2}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow a'_1 \otimes_i a'_2}$

y, en principio,

$[\otimes_i^{par'}{}_{Aexp}]$ $\dfrac{a_1 \Rightarrow a'_1 \qquad a_2 \Rightarrow a'_2}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow \mathcal{N}^{-1}(a'_1) \otimes_i \mathcal{N}^{-1}(a'_2)}$

3) Semánticas con máximo paralelismo

Evidentemente, ya las semánticas secuenciales son no deterministas, pues en cuanto tengamos $a = a_1 \otimes_i a_2$ donde a_1 y a_2 son no atómicas (o sea, contienen algún operador), para evaluar a tendremos que aplicar tanto $[\otimes^{l}_{i}\, \mathrm{Aexp S}]$ como $[\otimes^{r}_{i}\, \mathrm{Aexp S}]$, en el orden que nos apetezca. Pero al final el número total de pasos será exactamente el mismo, y los cómputos "idénticos" salvo por la entremezcla arbitraria de los pasos de los dos "subcómputos" que evalúan a_1 y a_2.

Obviamente, el no determinismo crece aún más cuando añadimos la posible realización de pasos en paralelo, pero en este caso es también obvio que el numero de pasos <u>decrece</u> en cuanto hayamos podido juntar dos (¡ o más !) pasos en uno. En consecuencia la semántica de máximo paralelimo buscará una reducción <u>máxima</u> del numero total de pasos para evaluar una expresión, lo que se consigue simplemente <u>prohibiendo</u> (o sea, restringiendo su uso) la aplicación de las reglas de evaluación secuencial, cuando resulte aplicable la regla de evaluación paralela.

<u>Def</u>: $\Rightarrow'' \subseteq (\mathrm{Aexp\,S} \times \mathrm{Aexp\,S})$ está definida por las reglas que definen $\Rightarrow$ y $[\otimes^{par}_{i}\, \mathrm{Aexp\,S}]$, pero restringiendo $[\otimes^{l}_{i}\, \mathrm{Aexps}]$ (y análogamente $[\otimes^{r}_{i}\, \mathrm{Aexps}]$), que quedaría como

$$[\otimes^{l\,''}_{i}\, \mathrm{Aexp\,S}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a_1' \qquad a_2 \not\Rightarrow}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow a_1' \otimes_i a_2}.$$

Más tarde veremos con cuantos pasos pasaremos a poder (¡ y tener !) que evaluar cada expresión: ¡ la reducción es brutal !

Pero antes veremos que "el truco" que utilizamos para definir la semántica sin salirnos de Aexp, nos puede pervertir <u>totalmente</u> nuestro nuevo objetivo de "reducir al máximo" el número de pasos para evaluar una expresión. El problema reside en que la aplicación de $[n'_{Aexp}]$ en la premisa de las reglas de evaluación secuencial, ¡ pero también en la de evaluación paralela !, nos genera un paso absolutamente inútil ¡ que nos deja como estábamos ! Por ejemplo, obtenemos $4 \otimes_i 3 \Rightarrow 4 \otimes_i 3$ (con todo expresiones sintácticas), pues pasamos de 4 (y 3) a $\mathcal{N}(4)$ (y $\mathcal{N}(3)$), ¡ pero de inmediato volvemos atrás ! al aplicar $\mathcal{N}^{-1}$.

La solución pasa por sólo aplicar $[n'_{Aexp}]$ en el caso de que la expresión <u>completa</u> a evaluar sea $n \in \mathcal{N}um$. Pero, ¿ cómo lograr esto si nuestra semántica queremos que sea <u>composicional</u> ? ¡ Siempre deberíamos tener $n \Rightarrow \mathcal{N}(n)$! De acuerdo, pero nos podemos limitar a <u>prohibir</u> que las subexpresiones "a reducir" en las premisas de las reglas $[\otimes^{x}_{i\,Aexp}]$ (con $x \in \{r, l, par\}$) sean numerales, ¡ lo que de hecho nos limitaría el uso de $\mathcal{N}^{-1}$ al caso en que hemos evaluado una variable ! Nos quedaría entonces:

$$[\otimes^{l\,'''}_{i\,Aexp}] \quad \frac{a_1 \Rightarrow a_1'}{a_1 \otimes_i a_2 \Rightarrow \mathcal{N}^{-1}(a_1') \otimes_i a_2} \quad \text{si } a_1 \notin \mathcal{N}um$$

(Obsérvese que debemos mantener aún $\mathcal{N}^{-1}$ en algunos casos)

Obsérvese que si $a_1, a_2 \in \mathcal{N}um$, no podremos utilizar ninguna $[\otimes^{x\,'''}_{i\,Aexp}]$, ¡ pero sí la regla $[\otimes^{op\,'''}_{i\,Aexp}]$, con la que "terminamos" la evaluación de $a_1 \otimes_i a_2$! (aunque después tendríamos que "deshacerla un poquito" aplicando $\mathcal{N}^{-1}$, para mantenernos en Aexp, si la susodicha expresión no es todavía la expresión "completa" que estábamos evaluando.

Tras este cambio podemos ver que los pasos de cómputo dejan de poder ser "vacíos", como sucedía antes, y en consecuencia podemos volver a definir una semántica "sensata" con máximo paralelismo que se limita a hacer "el mínimo de pasos" posible para evaluar cada expresión.

Obsérvese que en nuestra primera semántica, a pesar de manejar simultáneamente valores sintácticos y semánticos los pasos "en círculo vicioso" no podían aparecer, pues de hecho la semántica transforma los numerales en números ¡y ya no vuelve nunca atrás! De hecho, si tenemos $[\otimes_i^{par} Aexp\,S]$ ¡podemos transmutar <u>todos</u> los numerales de una expresión <u>arbitrariamente grande</u> en números, <u>en un solo paso</u>!

¡Demostradlo: no es en absoluto difícil!

4 Alcance de la semántica de evaluación con máximo paralelismo

<u>Def</u>: Dada $a \in Aexp\,S$, definimos su <u>altura</u> $h(a)$ mediante

$$h(v) = 1 \qquad h(m \in Num) = 1 \qquad h(m \in \mathbb{Z}) = 0$$

$$h(a_1 \otimes_i a_2) = 1 + \max\{h(a_1), h(a_2)\}.$$

<u>Tma</u>: i) Si contamos con $[\otimes_i^{par} Aexp\,S]$, $\forall a \in Aexp\,S$ existe un cómputo con $h(a)$ pasos $a \Rightarrow^{h(a)} m(a)$ con $m(a) \in \mathbb{Z}$ (donde (a) sólo indica que m "depende de a")

ii) La semántica con maximo paralelismo <u>es determinista</u>, y cada expresión $a \in Aexp\,S$ genera <u>un unico</u> computo de longitud $h(a)$ que calcula un valor (¡su valor!) en $\mathbb{Z}$.

¡Demostrad ambas cosas por inducción estructural, y no lo dudeis, sí, las demostraciones son <u>así</u> de fáciles!