Por tanto $Y \sim Gamma\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)$

Además, $-\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i) = \sum_{i=1}^{n} Ln\left(\frac{1}{X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Gamma\left(\frac{1}{\beta}, n\right)$

Por n nT

Por último $\frac{2}{\beta} nT \sim Gamma\left(\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\beta}{2}, \frac{2n}{2}\right) = Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2n}{2}\right) = \chi^2_{2n}$

Por tanto $\frac{2}{\beta} nT$ es una cantidad pivotal ya que su distribución es una χ^2_{2n} que no depende de β y, además, la χ^2_{2n} está tabulada.

$$\Rightarrow P\left\{a \leq \frac{2}{\beta} nT \leq b\right\} = 1-\alpha$$

$$a \leq \frac{2}{\beta} nT \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{\beta}{2nT} \geq \frac{1}{b} \iff$$

$$\iff \frac{2nT}{a} \geq \beta \geq \frac{2nT}{b} \iff \frac{2nT}{b} \leq \beta \leq \frac{2nT}{a}.$$

En general, a y b verifican que $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1-\alpha$ pero podemos particularizar para el caso concreto de probabilidad de colas iguales. En este caso

$a = \chi^2_{2n:1-\alpha/2}$ con $F_{\chi^2_{2n}}\left(\chi^2_{2n:1-\alpha/2}\right) = \alpha/2$ y

$b = \chi^2_{2n:\alpha/2}$ con $F_{\chi^2_{2n}}\left(\chi^2_{2n:\alpha/2}\right) = 1-\alpha/2.$

$$\Rightarrow \boxed{IC_{1-\alpha}(\beta) = \left(\frac{2nT}{\chi^2_{2n:\alpha/2}}, \frac{2nT}{\chi^2_{2n:\alpha/2-1}}\right)}$$ donde recordemos que

$T(X_1 \ldots X_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ es el ECUMV.