Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDIF) - Doble Grado Ing Inf y Mat - Curso 2021-22

Leyes de Kepler. Hoja 5.

40 Según la ley de la Gravitación universal, el Sol, de masa M (grande y situada en el origen de coordenadas) atrae a un planeta de masa m (más pequeña que M) situada en el punto $\vec{r} = (x, y, z)$ con una fuerza $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, donde $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Asumimos que el Sol no se mueve por acción de la gravedad del planeta. Según la segunda Ley de Newton, el movimiento del planeta viene dado por

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

es decir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -GM\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

i) Probar que $\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}(t)) \equiv 0$, lo que implica que $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r}(t)$ es constante a lo largo de la trayectoria del planeta. Esto implica que la órbita del planeta está en el mismo plano, que supondremos que es el plano (x, y). Esto equivale a suponer que $\vec{r} = (x, y)$ y que las ecuaciones son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -GM\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -GM\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Suponemos las condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ y $(x'(0), y'(0)) = (0, v)$

ii) Transformar el sistema a coordenadas polares con $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ y obtener

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos(\theta) - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\operatorname{sen}(\theta) = -GM\frac{\cos(\theta)}{r^2}$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\operatorname{sen}(\theta) + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\theta) = -GM\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r^2}$$

donde denotamos $\dot{r} = dr/dt$, $\ddot{r} = d^2r/dt^2$, $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

iii) Multiplicar la primera ecuación por $\cos(\theta)$ (resp. $\operatorname{sen}(\theta)$)) y la segunda por $\operatorname{sen}(\theta)$ (resp. $\cos(\theta)$) y sumar (resp. restar) para obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Las condiciones iniciales para las variables (r, θ) son $(r, \theta) = (a, 0)$ y $(\dot{r}, \dot{\theta}) = (0, v/a)$

iv) Multiplicando por r la segunda ecuación, se obtiene $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$, de donde se deduce que $r(t)^2\dot{\theta}(t) = cte$ para todo t y por tanto $r(t)^2\dot{\theta}(t) = av$ para todo t. De aquí se deduce la Ley de las areas de Kepler: el area barrida por el radio vector de un planeta en tiempos iguales es igual.

v) Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos

$$\ddot{r} + \frac{GM}{r^2} - \frac{a^2v^2}{r^3} = 0$$

con $(r(0), \dot{r}(0)) = (a, 0)$. que es un sistema conservativo en $r > 0$. Analizar el plano de fases e interpretar convenientemente las órbitas y en particular la órbita con dato incial $(r(0), \dot{r}(0)) = (a, 0)$ de acuerdo a la energía del dato incial.
vi) Probar que el cambio de variable $z = 1/r$ transforma la ecuación en $\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{GM}{(av)^2}$ y que por tanto $w = z - \frac{GM}{(av)^2}$ satisface:

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = 0$$

con $w(0) = 1/a + GM/(av)^2 \; w'(0) = 0$. Resolviendo esta ecuación y volviendo a la variable r, tenemos

$$r(\theta) = \frac{(av)^2/GM}{1 + e\cos(\theta)}$$

con $e = |av^2/GM - 1|$ que es la ecuación de una cónica de excentricidad e.