Ejercicio 5.49.- Desarrollar la semántica de

$z:=0;$ while $y \leq x$ do $(z:=z+1; x:=x-y)$.

Sea $F_g = cond(\mathcal{B}[\![y \leq x]\!], g \circ S_{ds}[\![z:=z+1; x:=x-y]\!], id)$.

Veamos que $g_0\, s = \begin{cases} s & si \quad sy > sx \\ \text{undefined} & si \quad sy \leq sx \ \ y \ \ sy \leq 0 \\ s[z \to sz + (sx \text{ div } sy)][x \to sx \text{ mod } sy] & si \ sy \leq sx \ \ y \ \ sy > 0 \end{cases}$

es un punto fijo de F.

Para que esto pase se tiene que dar $F\, g_0\, s = g_0\, s \quad \forall s$.

$F g_0\, s = cond(\mathcal{B}[\![y \leq x]\!], g \circ S_{ds}[\![z:=z+1; x:=x-y]\!], id)\; s =$

$= \begin{cases} (g_0 \circ S_{ds}[\![z:=z+1; x:=x-y]\!])\, s & si \ \mathcal{B}[\![y \leq x]\!]s = tt \\ id(s) & si \ \mathcal{B}[\![y \leq x]\!]s = ff \end{cases} =$

$= \begin{cases} g_0(S_{ds}[\![x:=x-y]\!](S_{ds}[\![z:=z+1]\!]\, s)) & si \ sy \leq sx \\ s & si \ sy > sx \end{cases} =$

$= \begin{cases} g_0(s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]) & si \ sy \leq sx \\ s & si \ sy > sx. \end{cases}$

$\underline{Si \ sy > sx}\ \Rightarrow F g_0\, s = s = g_0\, s$. ✓

$\underline{Si \ sy \leq sx}\ \Rightarrow F g_0\, s = g_0(\underbrace{s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]}_{s'}) = g_0(s')$

Para conocer el valor de $g_0(s')$ necesitamos saber cuanto es $s'x$ y $s'y$.

$$s'x = s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]\ x = sx - sy.$$

$$s'y = s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]\ y = sy.$$

Si $s'y > s'x \iff sy > sx - sy \iff 2\cdot(sy) > sx$ $\quad (sy \leq sx < 2\cdot(sy))$

$\Rightarrow F\, g_0\, s = g_0(s') = s'$

Estamos en el caso $sy \leq sx$ y $2\cdot(sy) > sx \Rightarrow sy \leq sx < 2\cdot(sy) \Rightarrow sy < 2\cdot(sy)$
$\Updownarrow$
$0 < sy$.

Por tanto, $sy > 0$ y $sy \leq sx$ luego

$$g_0\ s = s[z \to sz + (sx\ div\ sy)][x \mapsto sx\ mod\ sy] \overset{?}{=} s'.$$
$$\overset{?}{\|}$$
$$s' = s[z \to sz+1][x \to sx - sy]$$

Basta ver que $(sx)\ div (sy) = 1$ y $sx\ mod\ sy = sx - sy.$, pero como $sy \leq sx < 2\cdot(sy)$ se tienen ambas cosas.

Si $s'y \leq s'x$ y $s'y \leq 0 \iff sy \leq sx - sy$ y $sy \leq 0 \iff 2(sy) \leq sx$ y $sy \leq 0$
$(sy \leq sx)$.

$$\Rightarrow F\, g_0\, s = g_0(s') = \text{undefined}. \underset{\substack{\uparrow \\ sy \leq 0,\ sy \leq sx}}{=} g_0\ s$$

Si $s'y \leq s'x$ y $s'y > 0 \iff sy \leq sx - sy$ y $sy > 0 \iff 2(sy) \leq sx$ y $sy > 0$
$(sy \leq sx)$.

$\Rightarrow F\, g_0\, s = g_0(s') = s'[z \to s'z + (s'x\ div\ s'y)][x \to s'x\ mod\ s'y]$

Como $s'z = s[z \to sz+1][x \to sx - sy]\ z = sz+1$, sustituyendo $s'x$, $s'y$ y $s'z$,

$$F\, g_0\, s = s'[z \to sz+1 + ((sx - sy)\ div (sy))][x \to (sx - sy)\ mod\ (sy)]$$

Ahora $\overset{\geq sy}{(sx - sy)} \text{ div } sy = (sx \text{ div } sy) - 1$ y

$\underset{\geq sy}{(sx - sy)} \text{ mod } sy = sx \text{ mod } sy$

$$\Rightarrow F g_0\, s = s'[z \to sz + \cancel{1} + (sx \text{ div } sy) - \cancel{1}][x \to sx \text{ mod } sy] =$$

$$= s[z \to sz+1][x \to sx - sy][z \to sz + (sx \text{ div } sy)][x \to sx \text{ mod } sy] =$$

$$= s[z \to sz + (sx \text{ div } sy)][x \to sx \text{ mod } sy] \underset{\substack{\uparrow \\ sy \leq sx \text{ y } sy > 0}}{=} g_0\, s$$

Por tanto, g_0 es un punto fijo de F.

Calculamos $F^n \perp$.

$\underline{n=0}$ | $(F^0 \perp)s = (\perp)s =$ undefined

$\underline{n=1}$ | $$(F \perp)s = \begin{cases} \perp(s[z \to sz+1][x \to sx - sy]) & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$\underline{n=2}$ | $$(F^2 \perp)s = F(F\perp s) = \begin{cases} (F\perp)(\underbrace{s[z \to sz+1][x \to sx - sy]}_{s'}) & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} s'x = sx - sy \\ s'y = sy \end{array}\right\}$ $s'y \leq s'x \Leftrightarrow sy \leq sx - sy \Leftrightarrow 2 \cdot sy \leq sx.$

$$\Rightarrow (F^2 \perp)s = \begin{cases} (F\perp)\, s' & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } 2sy \leq sx \text{ y } sy \leq sx \\ s' & \text{si } 2 \cdot sy > sx \geq sy \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F^2 \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } 2sy \le sx \text{ y } sy \le sx \\ s[z\to sz+1][x\to sx-sy] & \text{si } 2sy > sx \ge sy \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$n=3)$

$$F^3 \perp s = F(F^2\perp)s = \begin{cases} (F^2\perp)(\underbrace{s[z\to sz+1][x\to sx-sy]}_{s'}) & \text{si } sy \le sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} s'x = sx-sy \\ s'y = sy \end{array}\right/ \quad \begin{array}{l} 2(s'y) \le s'x \Leftrightarrow 2sy \le sx-sy \Leftrightarrow 3sy \le sx. \\ s'y \le s'x \Leftrightarrow sy \le sx-sy \Leftrightarrow 2sy \le sx. \end{array}$$

Si $2s'y \le s'x$ y $s'y \le s'x \Leftrightarrow 3sy \le sx$ y $2sy \le sx$ y $sy \le sx \overset{(*)}{\Leftrightarrow} sy \le sx$ y $3sy \le sx$

$$\Rightarrow F^3\perp s \underset{sy\le sx}{=} (F^2\perp)(\underbrace{s[z\to sz+1][x\to sx-sy]}_{s'}) \underset{s'y\le s'x}{=} \text{undefined.}$$

Si $2s'y > s'x \ge s'y \Leftrightarrow 3sy > sx \ge 2sy\ (\ge sy).$

$$F^3\perp s \underset{sy\le sx}{=} (F^2\perp)(\underbrace{s[z\to sz+1][x\to sx-sy]}_{s'}) \underset{2s'y > s'x \ge s'y}{=} s'[z\to s'z+1][x\to s'x-s'y] =$$

$$\underset{s'z=sz+1}{=} s'[z\to sz+2][x\to sx-2sy] = s[z\to sz+2][x\to sx-2sy]$$

Si $s'y > s'x$ y $sy \le sx \Leftrightarrow 2sy > sx \ge sy$

$$F^3\perp s = (F^2\perp)(\underbrace{s[z\to sz+1][x\to sx-sy]}_{s'}) \underset{s'y > s'x}{=} s' = s[z\to sz+1][x\to sx-sy].$$

Si $sy > sx$

$$F^3\perp s = s.$$

Por tanto

$$F^3 \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ y \ 3sy \leq sx \\ s[z \to sz+2][x \to sx-2sy] & \text{si } 2sy \leq sx < 3sy \\ s[z \to sz+1][x \to sx-sy] & \text{si } sy \leq sx < 2sy \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ y \ 3sy \leq sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx-m \cdot sy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1) \cdot sy \quad \forall m \in \{1,2\}. \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

Afirmamos que $\forall n \geq 1$.

$$F^n \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \ y \ n sy \leq sx \\ s[z \to sz+m][x \to sx-m \cdot sy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1) \cdot sy \quad \forall m \in \{1,2,\dots n-1\} \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

Lo probamos por inducción sobre n.

Caso base | Ya hemos visto que esto es cierto para los casos base, es lo que nos ha llevado a proponer este resultado.

Paso inductivo | Sea $n \geq 1$, supongamos la propiedad cierta para n y probémosla para $n+1$.

$$F^{n+1} \perp s = F(F^n \perp) s = \begin{cases} (F^n \perp)(s[z \to sz+1][x \to sx-sy]) & \text{si } sy \leq sx \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } sy > sx}$

$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = s$ OK

$\boxed{\text{Si } sy \leq sx}$

$F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(\underbrace{s[z \mapsto sz+1][x \to sx - sy]}_{s'})$

Se tiene que $\begin{cases} s'x = sx - sy \\ s'y = sy \\ s'z = sz+1 \end{cases}$

- $\boxed{\text{Si } s'y > s'x} \Leftrightarrow sy > sx - sy \Leftrightarrow 2 \cdot sy > sx$

$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ s'y > s'x}}{=} s' = s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]$, es decir,

$F^{n+1} \perp s = s[z \mapsto sz+1][x \mapsto sx - sy]$ si $sy \leq sx < 2 \cdot sy$. OK.

- $\boxed{\text{Si } s'y \leq s'x \text{ y } n \cdot s'y \leq s'x} \Leftrightarrow sy \leq sx - sy$ y $n sy \leq sx - sy \Leftrightarrow 2sy \leq sx$ y $(n+1) sy \leq sx$

$\Updownarrow \leftarrow sy \leq sx$

$(n+1) sy \leq sx$

$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ s'y \leq s'x \text{ y } n(s'y) \leq s'x}}{=}$ undefined, es decir,

$F^{n+1} \perp s =$ undefined si $sy \leq sx$ y $(n+1)(sy) \leq sx$

- $\boxed{\text{Si } m(s'y) \leq s'x < (m+1) \cdot (s'y) \text{ para cierto } m = 1 \cdots n-1}$

$\Updownarrow$

$m(sy) \leq sx - sy < (m+1)(sy)$ para cierto $m = 1 \cdots n-1$

$\Updownarrow$

$(m+1) sy \leq sx < (m+2)(sy)$ para cierto $m = 1 \cdots n-1$.

$\Updownarrow$

$\underset{m'}{\overset{\|}{}} sy \leq sx < (m'+1)(sy)$ para cierto $m = 2 \cdots n$.

$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = (F^n \perp)(s') \underset{\substack{\uparrow \\ m(s'y) \leq s'x < (m+1)(s'y)}}{=} s'[z \to s'z + m][x \to s'x - m \cdot s'y] =$

$= s'[z \to sz + m + 1][x \to sx - sy - m sy] =$

$$= s'[z \to sz + m'][x \to sx - m'sy] = s[z \to sz + m'][x \to sx - m'sy]$$

$$\Rightarrow F^{n+1} \perp s = s[z \to sz + m'][x \to sx - m'sy] \quad \text{si } m'sy \leq sx < (m'+1)(sy) \text{ con } m' = 2, \cdots n.$$

En resumen:

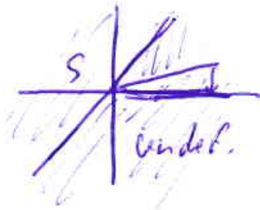
$$F^{n+1} \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } sy \leq sx \text{ y } (n+1)(sy) \leq sx \\ s[z \to sz + m][x \to sx - msy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1)sy \quad \forall m \in \{1, 2, \cdots n\} \\ s & \text{si } sy > sx \end{cases}$$

y se completa el paso inductivo.

$$\text{Por tanto } F^{n} \perp s = \begin{cases} \text{undefined si} & \text{si } sy \leq sx \text{ y } n \cdot sy \leq sx \\ s[z \to sz + m][x \to sx - m \cdot sy] & \text{si } m(sy) \leq sx < (m+1)sy \quad \forall m \in \{1 \cdots n-1\} \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

Tenemos los conjunto $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x, ny \leq x\}$

$$B_n = \bigcup_{m=1}^{n} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid my \leq x < (m+1)y\}.$$



$$\lim_{n \to \infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x, y \leq 0\} = A$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid my \leq x < (m+1)y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y > 0\} = B$$

$$\Rightarrow F^{n} \perp s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } (sx, sy) \in A_n \cap \mathbb{N}^2 \\ s[z \to sz + m][x \to sx - m \cdot sy] & \text{si } (sx, sy) \in B_n \cap \mathbb{N}^2 \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \bigsqcup\{F^n \bot \mid n \geq 0\}\, s = \begin{cases} \text{undefined} & \text{si } (sx, sy) \in A \cap \mathbb{N}^2 \\ s[z \mapsto sz+m][x \to sx - m\,sy] & \text{si } (sx, sy) \in B \cap \mathbb{N}^2 \\ s & \text{si } sy > sx. \end{cases}$$

$$\| \\ g_0$$

(*) Veamos que si $n \geq 1$

$$\begin{cases} 2y \leq x \\ (n+1)\, y \leq x \\ y \leq x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (n+1)\, y \leq x \\ y \leq x. \end{cases}$$

$\Rightarrow$) Trivial

$\Leftarrow$) - Si $y \geq 0 \Rightarrow (n+1)y \leq x$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(n+1)y - (n-1)y}_{2y} \leq x - \underset{\geq 0}{(n-1)}\, \underset{\geq 0}{y} \leq x \Longleftrightarrow 2y \leq x.$$

- Si $y < 0$

- Si $x \geq 0 \Rightarrow 2y < 0 \leq x$ OK.
- Si $x < 0 \Rightarrow y \leq x$

$$\Updownarrow$$

$$2y \leq x + \underset{< 0}{y} \leq x \quad ✓.$$