Ahora vamos a calcular el estimador de máxima verosimilitud para θ^2. La función de verosimilitud de θ^2 es:

$$L(\theta^2) = f(x_1 \dots x_n | \theta) = \frac{1}{(\theta^2)^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \; e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}}.$$

Por simplicidad hacemos el cambio $\lambda = \theta^2$ y calculamos la función soporte.

$$\ell(\lambda) = Ln(L(\lambda)) = -n\, Ln\, \lambda + Ln\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) - \frac{\sum x_i^2}{2\lambda}$$

$$\ell'(\lambda) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\lambda^2} \; ; \quad \ell'(\lambda) = 0 \iff -\frac{2\lambda n}{2\lambda^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\lambda^2} = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}.$$ Comprobamos que se trata de un máximo con la segunda derivada:

Obs: $\frac{\sum x_i^2}{2n} \in (0, \infty) = H$

$$\ell''(\lambda) = +\frac{n}{\lambda^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2}\left(n - \frac{\sum x_i^2}{\lambda}\right)$$

$$\ell''\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}\right) = \left(\frac{2n}{\sum x_i^2}\right)^2 \cdot \left(n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 / 2n}\right) = \left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^2 \cdot (-n) < 0$$

Por tanto la función de verosimilitud de $\lambda = \theta^2$ alcanza el máximo en $\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}$. Por tanto el estimador de máxima verosimilitud para θ^2 es $T(X_1 \dots X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$

Para probar si es eficiente para θ^2 calculamos la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Ln(f(x_1 \dots x_n | \theta)) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-n\, Ln\, \theta^2 + Ln\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) - \Big(\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}\Big)\right) =$$

$$= -\frac{n\,2}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^3} = \frac{2n}{\theta^3}\left(\frac{\sum x_i^2}{2n} - \theta^2\right)$$