Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDIF) - Doble Grado Ing Inf y Mat - Curso 2021-22

Estabilidad. Hoja 2.

14 Analizar las propiedades de estabilidad de los sistemas lineales siguientes :

$$a)\ \begin{cases} x' = -5x + y \\ y' = x - 5y \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = y \\ y' = -2x + 2y \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -y \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 2y \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ z' = 2z \end{cases}$$

15 i) Probar que si $a > 0$ y c es arbitrario, el sistema lineal

$$x'' + (a + \frac{c}{1+t^2})x = 0$$

es estable.

ii) Probar que si $a, b > 0$ y c arbitrario, el sistema lineal:

$$x'' + ax' + (b + ce^{-t}\operatorname{sen}(t))x = 0$$

es asintóticamente estable.

16 Estudiar la estabilidad del origen como punto de equilibrio de cada uno de los siguientes sistemas:

$$a)\ \begin{cases} x' = x - y + xy^2 \\ y' = 3x - 2y - 2xy \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = x + x^2 + y^3 \\ y' = 2y - x^2y^2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x' = -x + y^2 + z^2 \\ y' = -2x - y + xy \\ z' = -y - z - xyz \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = -\alpha y + x^2 \\ y' = e^x - \cos(x) - \operatorname{sen}^2(y) \\ z' = -z + 2\operatorname{sen}(x) \end{cases}$$

17 Hallar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas y estudiar su estabilidad por linealización:

$$a)\ \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 + y \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x^2 + \alpha y^2 \end{cases} \quad (\alpha \neq 0) \qquad c)\ \begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = y - x^3 \end{cases}$$

18 Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrios de las siguientes ecuaciones:

a) Ecuación de Van der Pol: $x'' + \alpha(1 - x^2)x' + x = 0$ con $\alpha \neq 0$

b) Ecuación del péndulo: $x'' + \operatorname{sen}(x) = 0$

c) Ecuación biestable: $x'' + x' + x^3 - x = 0$

19 Probar que el siguiente sistema de Lorenz con $r > 1$ y $b > 0$ tiene tres puntos de equilibrio y analizar su estabilidad

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz. \end{cases}$$

20 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con $f(x_0) = 0$ y $f'(x_0) \neq 0$. Comparar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio x_0 de los dos sistemas siguientes:

$$a) \quad x' = f(x) \qquad\qquad b) \quad x'' = f(x)$$

Estudia en particular los dos sistemas lineales $x' = -x$ y $x'' = -x$.