

Fundamentos de los Lenguajes Informáticos

Grado en Ingeniería Informática

Hoja de ejercicios 4

EJERCICIOS SOBRE GRAMÁTICAS INDEPENDIENTES DEL CONTEXTO

Ejercicio 1 Diseña una gramática independiente del contexto para el lenguaje de las palabras con un número par de a 's sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Ejercicio 2 La siguiente gramática independiente del contexto genera el lenguaje representado por la expresión regular $0^*1(0+1)^*$:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow A1B \\ A &\longrightarrow 0A \mid \epsilon \\ B &\longrightarrow 0B \mid 1B \mid \epsilon \end{aligned}$$

Obtén las derivaciones más a la izquierda y más a la derecha de las siguientes cadenas:

$$(a) \ 00101 \qquad (b) \ 1001 \qquad (c) \ 00011$$

Obtén los árboles de derivación correspondientes a las derivaciones anteriores.

Ejercicio 3 Describe el lenguaje generado por la siguiente gramática independiente del contexto

$$S \longrightarrow aSb \mid aSa \mid \epsilon \mid bSb \mid bSa$$

Ejercicio 4 Una cadena x formada por paréntesis se dice equilibrada si tiene el mismo número de paréntesis abiertos que de paréntesis cerrados, y cualquier prefijo y de x tiene un número de paréntesis abiertos mayor o igual que de paréntesis cerrados, es decir, los paréntesis cerrados tienen que aparecer después de los abiertos; por ejemplo, $x = (()())()$ es equilibrada.

Construye una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje de las cadenas equilibradas formadas exclusivamente por paréntesis, i.e. pertenecientes a $\{(,)\}^*$.

Ejercicio 5 Considera la siguiente gramática independiente del contexto

$$S \longrightarrow aS \mid aSbS \mid \epsilon$$

Esta gramática es ambigua. Demuestra en particular que la cadena $aabab$ tiene:

1. Dos árboles de derivación.
2. Dos derivaciones más a la izquierda.
3. Dos derivaciones más a la derecha.

Sabiendo que $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{cada prefijo de } w \text{ tiene al menos tantas } a\text{'s como } b\text{'s}\}$, encuentra una gramática independiente del contexto no ambigua equivalente.

Ejercicio 6 Sea $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ la gramática independiente del contexto con producciones:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aB \mid bA \\ A &\longrightarrow a \mid aS \mid bAA \\ B &\longrightarrow b \mid bS \mid aBB \end{aligned}$$

1. Construye un árbol de derivación, una derivación por la izquierda y una derivación por la derecha para la palabra $aababb$.

2. ¿Es G ambigua? Razona la respuesta.
3. Razona que $L(G) = \{w \in \{a, b\}^+ \mid |w|_a = |w|_b\}$.

Ejercicio 7 Sea G la gramática independiente del contexto cuyas producciones son:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow ABS \mid AB \\ A &\longrightarrow aA \mid a \\ B &\longrightarrow bA \end{aligned}$$

¿Cuáles de las siguientes cadenas están en $L(G)$ y cuáles no? Escribe derivaciones para las que estén en $L(G)$ y da razones que justifiquen la no pertenencia de las demás.

- (a) $aabaab$ (b) $aaaaba$ (c) $aabbaa$ (d) $abaaba$

Ejercicio 8 Construye razonadamente gramáticas independientes del contexto que generen los siguientes lenguajes:

1. $\{\alpha \in \{a, b, \emptyset, \epsilon, +, \cdot, *, (,)\}^* \mid \alpha \text{ es una expresión regular sobre } \{a, b\}\}$
2. $\{x\#x^R\# \mid x \in \{0, 1\}^+\}^*$

Piensa en la estructura sintáctica de las cadenas y/o en una definición recursiva de las cadenas del lenguaje (o de parte del lenguaje).

Ejercicio 9 Construye razonadamente gramáticas independientes del contexto que generen los siguientes lenguajes:

1. $\{a^n b^m \mid m, n \geq 0, m = n \vee m = 2n\}$
2. $\{a^m b^n \mid m, n > 0, (n \text{ par} \wedge m \text{ impar}) \vee (n \text{ impar} \wedge m \text{ par})\}$
3. $\{0^m 1^n \mid m > n \geq 0\}$
4. $\{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\}$

Para trabajar con estos lenguajes resulta aconsejable expresarlos como unión (a ser posible disjunta) de otros dos lenguajes. Esta técnica simplifica la tarea de encontrar gramáticas, puesto que tratas con lenguajes más sencillos. Finalmente, tienes que conseguir juntar esas gramáticas para encontrar una que genere el lenguaje de partida.

Ejercicio 10 Construye razonadamente gramáticas independientes del contexto que generen los siguientes lenguajes:

1. $\{w c w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
2. $\{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N}, n \leq m \leq 2n\}$
3. $\{u a w b \mid u, w \in \{a, b\}^*, |u| = |w|\}$
4. $\{a^m b^n c^p d^q \mid m, n, p, q \in \mathbb{N}, m + n = p + q\}$
5. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_b = 2|w|_a\}$
6. $\{a^m b^m a^n b^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i \neq j\}$

Ejercicio 11 Describe el lenguaje generado por la gramática independiente del contexto con producciones:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow AS \mid \epsilon \\ A &\longrightarrow 0A1 \mid 01 \mid A1 \end{aligned}$$