$$\Delta_1 = 4X_{(n)}^2 - 4aX_{(n)}^2 = 4X_{(n)}^2(1-a)$$

$$\Delta_2 = 4X_{(n)}^2 - 4bX_{(n)}^2 = 4X_{(n)}^2(1-b)$$

Como a y b son valores del dominio de la distribución beta, entonces $a, b \in (0,1)$ y $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

Esto quiere decir que la desigualdad (2) es cierta $\forall\theta$ por lo que sólo consideramos la restricción dada por la desigualdad (1) que equivale a que $\theta \in \left(\frac{2X_{(n)} - \sqrt{4X_{(n)}^2(1-a)}}{2a}, \frac{2X_{(n)} + \sqrt{4X_{(n)}^2(1-a)}}{2a} \right)$

o simplificando $\theta \in \left(X_{(n)} \frac{1-\sqrt{1-a}}{a}, X_{(n)} \frac{1+\sqrt{1-a}}{a} \right)$

y sustituyendo a por $\beta_{n,1:1-\alpha/2}$, el intervalo de confianza de probabilidad de colas iguales queda:

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\theta) = \left(X_{(n)} \frac{1-\sqrt{1-\beta_{n,1:1-\alpha/2}}}{\beta_{n,1:1-\alpha/2}}, X_{(n)} \frac{1+\sqrt{1-\beta_{n,1:1-\alpha/2}}}{\beta_{n,1:1-\alpha/2}} \right)}$$

Ejercicio 3.- Sea $(X_1, \ldots X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$ con $\theta > 0$. Encontrar un intervalo de confianza de longitud mínima para θ, al nivel de confianza $1-\alpha$.

La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f_\theta(t)dt & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{y} \int_0^x \theta t^{\theta-1} dt = x^\theta$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^\theta & \text{si } x \in [0,1) \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$