Hoja 3. Estimadores de máxima verosimilitud

Estadística. Grupo m3

Ejercicio 1. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria. En los siguientes casos, encontrar el estimador de máxima verosimilitud para θ :

1. $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}$ si $x = 1, 2, \ldots, \theta$ (θ es entero y $1 \leq \theta \leq \theta_0$)

   La función de verosimilitud es

   $$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} I_{\{x_{(n)}, \ldots, \theta_0\}}(\theta).$$

   Como $\frac{1}{\theta^n}$ es decreciente, el máximo se alcanza en $x_{(n)}$ y $\hat{\theta}_{MV} = x_{(n)} \in \{1, \ldots, \theta_0\} = \Theta$.

2. $f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$ si $\theta \leq x < \infty$ y $\theta > 0$
   La función de verosimilitud es

   $$L(\theta) = \exp\{-\sum_{j=1}^{n} x_j + n\theta\} I_{(0, x_{(1)}]}(\theta).$$

   Como $\exp\{n\theta\}$ es creciente, el máximo de la verosimilitud se alcanza en $x_{(1)}$ y entonces $\hat{\theta}_{MV} = x_{(1)} > 0$.

3. $f_\theta(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}$ para $x > 0$ ($\alpha > 0$ conocido)
   La función de verosimilitud es

   $$L(\theta) = \theta^n \alpha^n \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha-1} \exp\{-\theta \sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha\}$$

   y la función soporte es

   $$l(\theta) = n \ln\theta + n \ln\alpha + \sum_{j=1}^{n} (\alpha - 1) \ln x_j - \theta \sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha.$$

   Derivando e igualando a cero

   $$\begin{aligned} l'(\theta) &= \frac{n}{\theta} - \sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha = 0, \\ \hat{\theta} &= \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j^\alpha}, \end{aligned}$$

y como $l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$, entonces $\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{\alpha}} > 0$.

4. $f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}$ si $0 \le x \le 1$ y $\theta \ge 1$

   La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \theta^n \prod_{j=1}^{n} (1-x_j)^{\theta-1}$$

   y la función soporte es

$$l(\theta) = n \ln\theta + (\theta - 1) \sum_{j=1}^{n} \ln(1-x_j).$$

   Derivando e igualando a cero

$$\begin{aligned} l'(\theta) &= \frac{n}{\theta} + \sum_{j=1}^{n} \ln(1-x_j) = 0, \\ \hat{\theta} &= \left(-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(1-x_j) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

   y como $l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$, entonces se alcanza un valor máximo en

$$\hat{\theta} = \left(-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(1-x_j) \right)^{-1}.$$

   Pero, cuando $\hat{\theta} < 1$, la función soporte es decreciente en todo $\theta \ge 1$, y en este caso se alcanza el máximo en $\hat{\theta} = 1$.

   Es decir, el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\theta}_{MV} = \max \left\{ \left(-\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln(1-x_j) \right)^{-1}, 1 \right\}.$$

   Pero, si $x_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$; entonces $\hat{\theta}_{MV}$ no existe.

5. $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^{-1} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}$ si $0 < x \le 1$ y $1/2 \le \theta < 1$

   La función de verosimilitud es

$$L(\theta) = \theta^n (1-\theta)^{-n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}$$

y la función soporte es

$$l(\theta) = n \ln \theta - n \ln(1-\theta) + \frac{2\theta - 1}{1-\theta} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j .$$

Derivando e igualando a cero

$$\begin{aligned} l'(\theta) &= \frac{n}{\theta} + \frac{n}{1-\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j = 0, \\ \hat{\theta} &= \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \right)^{-1}, \end{aligned}$$

y como $l''(\hat{\theta}) < 0$, entonces se alcanza un valor máximo en

$$\hat{\theta} = \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \right)^{-1} < 1 \text{ siempre que } 0 < x < 1.$$

Pero, cuando $\hat{\theta} < 1/2$, la función soporte es decreciente en todo $\theta \geq 1/2$, y en este caso se alcanza el máximo en $\hat{\theta} = 1/2$.

Es decir, el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\theta}_{MV} = \max \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \right)^{-1}, 1/2 \right\}.$$

Pero, si $x_j = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$; entonces $\hat{\theta}_{MV}$ no existe.