EL PRODUCTO VECTORIAL EN $\mathbb{R}^3$.

1. Orientación de un espacio vectorial.

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Se dice que dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V definen la misma *orientación* si el matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ tiene determinante positivo, en este caso escribimos $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$.

Observación 1.2. Dadas dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ denotamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ por $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Recordemos que

(i) $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, en particular, $\det(P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y la relación de definir la misma orientación está bien definida.
(ii) $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3} P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$, para cualesquiera bases $\mathcal{B}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Deducimos de las propiedades de las matrices de cambio de base que la relación de definir la misma orientación satisface las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ para cualquier base $\mathcal{B}$ de V (*propiedad reflexiva*).
(ii) Si $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ entonces $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_1$ para cualesquiera $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V (*propiedad simétrica*).
(iii) Si $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_2 \sim \mathcal{B}_3$ entonces $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_3$ para cualesquiera bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ de V (*propiedad transitiva).*

Es decir, la relación $\sim$ de definir la misma orientación es una *relación de equivalencia* en el espacio $Bases(V)$ de bases de V y define una partición del mismo. El determinante de una matriz de cambio de base es o bien positivo o bien negativo así que dicha partición consiste en *dos* subconjuntos disjuntos de $Bases(V)$.

Definición 1.3. (i) El conjunto de orientaciones de V, denotado por $Or(V)$, como el conjunto de clases de equivalencia de la relación $\sim$ de definir la misma orientación. Es decir,

$$Or(V) = Bases(V)/\sim = \{o, \tilde{o}\}.$$

(ii) Un *espacio vectorial orientado* es un par (V, o) donde V es un espacio vectorial real de dimensión finita y $o \in Or(V)$.
(iii) Una base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial orientado (V, o) se dice *positiva* (*negativa*) si induce la misma (distinta) orientación que o, es decir, si $\mathcal{B} \in o$ ($\mathcal{B} \notin o$).

Ejemplo 1.4. (i) Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio vectorial real V de dimensión n. Usemos $\mathcal{B}$ para orientar V. La base $\mathcal{B}$ nos permite realizar una identificación

$$\varphi_{\mathcal{B}} : Bases(V) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}), \widetilde{\mathcal{B}} \mapsto P_{\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Donde $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ denote el grupo *general lineal real de orden* n, i.e. el grupo de matrices reales cuadradas de orden n con determinante no nulo. Usando esta identificación tenemos que

$$Or(V) = Bases(V)/\sim \simeq_{\varphi_{\mathcal{B}}} \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})/\sim = \{\mathrm{GL}^+(n;\mathbb{R}), \mathrm{GL}^-(n;\mathbb{R})\},$$

donde $\mathrm{GL}^{\pm}(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) : \pm\det(A) > 0\}$.

(ii) En el caso $V = \mathbb{R}^n$ fijamos, por convenio, la orientación determinada por la base canónica $\mathcal{B}_{CAN} = \{e_1, \dots, e_n\}$, donde $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i)}{1}, 0, \dots, 0)$ para $i\{1, \dots, n\}$. Asumiremos siempre que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial orientado (sin explicitarlo) y que la orientación es la inducida por la base canónica. Por ejemplo, se tiene que al permutar dos vectores de la base la orientación cambia. Por lo tanto, $\{e_1, e_3, e_2\}$ es una base negativa de $\mathbb{R}^3$ mientras que $\{e_3, e_1, e_2\}$ es una base positiva.

(iii) En $\mathbb{R}^2$ una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es positiva si y solo si el ángulo que forman v_1 y v_2 (medido en sentido antihorario) que forman v_1 y v_2 es menor que π.

Para comprobar esto basta observar que la base $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{|v_1|}v_1, \frac{1}{|v_2|}v_2\}$ define la misma orientación que $\mathcal{B}$ ya que $\det(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = \frac{1}{|v_1||v_2|} > 0$. Por último, las rotaciones, i.e. matrices de $\mathrm{SO}(2;\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R}) : AA^t = \mathrm{Id}, \det(A) = 1\}$, preservan la orientación luego tras aplicar una rotación tenemos que $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}'' = \{e_1, w_2\}$. Es decir, $w_2 = (\cos\theta, \sin\theta)$. Se tiene que la base $\mathcal{B}''$ es positiva si y solo si

$$\det(e_1, w_2) = \sin\theta > 0$$

y esto ocurre si y solo si $0 < \theta < \pi$. Para concluir basta observar que el ángulo medido en sentido antihorario entre v_1 y v_2 coincide con θ ya que las dilatación que hemos usado y las rotaciones preservan dicho ángulo.

2. El producto vectorial

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Recordemos que un producto escalar $\cdot$ en V define un isomorfismo

$$h : V \to V^*, v \mapsto h(v) = v \cdot -;$$

donde $h(v) : V \to \mathbb{R}, w \mapsto v \cdot w$.

En efecto, claramente h es lineal e inyectiva. Para probar la sobreyectividad fijemos una base ortonormal $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$, con lo que en las coordenadas determinadas por $\mathcal{B}$ se tiene que $\cdot$ es el producto euclídeo usual. Sea $f \in V^*$ un funcional lineal y $x = \sum x_i w_i \in V$ un vector cualquiera, se cumple que

$$f(x) = f(\sum x_i w_i) = \sum x_i f(w_i) = v \cdot x$$

donde $v = (f(w_1), \dots, f(w_n))$. Es decir, $f = h(v)$.

Definición 2.1. (Producto vectorial) Sean v y w dos vectores de $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial de v y w es el único vector $v \times w = v \wedge w \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(v \times w) \cdot u = \det(v, w, u)$$

para todo $u \in \mathbb{R}^3$.

Observación 2.2. Nótese que $\det(v, w, -) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, u \mapsto \det(v, w, u)$; es una aplicación lineal. Es decir, $\det(v, w, -) \in (\mathbb{R}^3)^*$ luego usando el isomorfismo h explicado anteriormente (que define el producto euclídeo usual) vemos que la definición anterior tiene sentido. Es más, la comprobación de ver que es un isomorfismo que hemos realizado nos da un método efectivo para calcular el producto vectorial. Ya que,

$$v \times w = \det(v, w, e_1)e_1 + \det(v, w, e_2)e_2 + \det(v, w, e_3)e_3.$$

Es decir,

$$v \times w = v \wedge w = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Proposición 2.3 (Propiedades básicas del producto vectorial)**.** (1) $v \times w = -w \times v$.

(2) La aplicación $- \times w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto v \times w$; es lineal.
(3) $v \times w = 0$ si y solo si v y w son linealmente dependientes.
(4) El vector $v \times w$ es ortogonal a v y a w.
(5) Si v y w son linealmente independientes entonces $\{v, w, v \times w\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$.
(6) $(v \times w) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} v \cdot x & w \cdot x \\ v \cdot y & w \cdot y \end{vmatrix}$.
(7) $|v \times w| = A$, donde A es el área del paralelogramo generado por v y w.
(8) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.
(9) Si $u, v : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ son curvas diferenciables entonces

$$\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = (\frac{d}{dt}u(t)) \times v(t) + u(t) \times (\frac{d}{dt}v(t)).$$

Proof. $(1), (2)$ y (3) se siguen inmediatamente de la definición y las propiedades de los determinantes.

(4) Por definición se cumple que $(v \times w) \cdot v = \det(v, w, v) = 0$ y $(v \times w) \cdot w = \det(v, w, w) = 0$, luego (4) es cierto.
(5) Sean v y w dos vectores linealmente independientes. Por (3) sabemos que $v \times w \neq 0$. Se tiene que $\det(v, w, v \times w) = (v \times w) \cdot (v \times w) = |v \times w|^2 > 0$ puesto que $v \times w$ es un vector no nulo. Se sigue que $\{v, w, v \times w\}$ es una base positiva.
(6) Consideramos las aplicaciones

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (v, w, x, y) \mapsto (v \times w) \cdot (x \times y);$$

y

$$G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (v, w, x, y) \mapsto \begin{vmatrix} v \cdot x & w \cdot x \\ v \cdot y & w \cdot y \end{vmatrix}.$$

Debemos comprobar que $F = G$. Se sigue de las propiedades de los determinantes y el producto escalar que G es lineal en cada una de sus variables. Por otro lado, se sigue de la propiedad (2) que F también es lineal en cada una de sus variables.

Para comprobar que dos aplicaciones lineales (en cada variable) son iguales basta comprobar la igualdad en una base. Luego si $\mathcal{B}_{CAN} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canñica debemos estudiar la veracidad de la igualdad

$$F(e_i, e_j, e_k, e_l) = G(e_i, e_j, e_k, e_l), i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}.$$

Recordemos que la base canñonica es una base ortonormal y que se cumplen las igualdades $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_1 \times e_3 = -e_2$ y $e_2 \times e_3 = e_1$. Sea

$$\mathcal{Z} = \{(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4 : i = j \text{ o } k = l \text{ o } i \neq k, l \text{ o } j \neq k, l\},$$

es una comprobación rutinaria ver que

$$F(e_i, e_j, e_k, e_l) = G(e_i, e_j, e_k, e_l) = 0,$$

si $(i, j, k, l) \in \mathcal{Z}$. Para concluir faltaría estudiar la igualdad para (e_i, e_j, e_i, e_j) y (e_i, e_j, e_j, e_i), $j \neq i$. Ahora bien, como $F(e_i, e_j, e_i, e_j) = -F(e_i, e_j, e_j, e_i)$ y $G(e_i, e_j, e_i, e_j) = -G(e_i, e_j, e_j, e_i)$ bastaría estudiar el caso (e_i, e_j, e_i, e_j), $i \neq j$. Este caso es también una comprobación rutinaria.

Concluimos que $F = G$ o, lo que es lo mismo, que (6) es cierto.

(7) Sea θ el ángulo formado entre v y w[1]. Usando (6) se tiene que $|v \times w|^2 = (v \times w) \cdot (v \times w) = |v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2 = |v|^2|w|^2 - |v|^2|w|^2 \cos^2 \theta = |v|^2|w|^2(1 - \cos^2 \theta) = |v|^2|w|^2 \sin^2 \theta = A^2$ de donde se sigue (5).

(8) Se comprueba de forma análoga a (6) usando linealidad.

(9) Se sigue de forma inmediata de la definición de producto vectorial y de la regla de la derivada del producto.

$\square$

Observación 2.4. Como consecuencia directa de $(3), (4), (5)$ y (7) tenemos la siguiente caracterización del producto vectorial.

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$ dos vectores cualesquiera. El producto vectorial de v y w se puede definir como

(i) $v \times w = 0$ si v y w son linealmente dependientes.

(ii) El único vector $(v \times w)$ tal que
- $v \times w$ es ortogonal a v y a w,
- $\{v, w, v \times w\}$ es una base positiva de $\mathbb{R}^3$ y
- $|v \times w| = A$;

si v y w son linealmente independientes.

En particular, si v y w son ortonormales entonces $v \times w$ es el único vector tal que $\{v, w, v \times w\}$ es una base ortonormal positiva, equivalentemente, la matriz $(v, w, v \times w)$ pertenece al grupo $\mathrm{SO}(3; \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(3; \mathbb{R}) : AA^t = \mathrm{Id}, \det(A) = 1\}$ especial ortogonal de orden 3.

[1] Deberíamos especificar a cuál de los dos ángulos nos referimos pero la comprobación que vamos a realizar es válida para ambos!