

Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplos 7.2. (1) Una aplicación de Gauss de la esfera unidad es la identidad. Su derivada en cualquier punto $p \in \mathbb{S}^2$ es por tanto también la identidad en $T_p\mathbb{S}^2$. Obsérvese que aunque sea la identidad para todos los puntos $p \in \mathbb{S}^2$, su dominio (el plano tangente) varía con el punto.

(2) Consideremos ahora el cilindro $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Como vimos en 6.9(2), p. 79,

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

es una aplicación de Gauss de S . Es la restricción de la proyección lineal $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$, luego $d_p N = (d_p \pi)|_{T_p S} = \pi|_{T_p S}$, esto es:

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_p S : \omega = (a, b, c) \mapsto \pi(\omega) = (a, b, 0).$$

Calculemos la matriz L_p de esta aplicación lineal respecto de una base de $T_p S$. Elegimos la formada por los vectores $(-y, x, 0)$ y $(0, 0, 1)$ (3.5(3), p. 35), y tenemos

$$d_p N(-y, x, 0) = (-y, x, 0), \quad d_p N(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

con lo que $L_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vemos que $d_p N$ no es isomorfismo lineal, como ya sabíamos: si lo fuera, el teorema de la función inversa implicaría que la imagen de N tiene interior no vacío en la esfera. ■

Los dos ejemplos que siguen son más elaborados.

Ejemplos 7.3. (1) Estudiemos el paraboloides hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. Una aplicación de Gauss de S es (6.9(3), p. 80)

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, -2y, 1).$$

Para calcular la derivada $d_p N$ podemos calcular la de la extensión $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por la misma fórmula, y restringir a $T_p S$. En lugar de eso vamos a emplear una parametrización para obtener directamente una base de $T_p S$ y la matriz de $d_p N$ respecto de ella. Como grafo, S tiene la parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$, a la que corresponde la base \mathcal{B}_φ de $T_p S$ formada por

las derivadas parciales $\varphi_x = (1, 0, -2x)$ y $\varphi_y = (0, 1, 2y)$. Resulta

$$\begin{aligned} d_p N(\varphi_x) &= (N \circ \varphi)_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4y^2 + 1, 4xy, -2x), \\ d_p N(\varphi_y) &= (N \circ \varphi)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \\ &= \frac{-2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4xy, 4x^2 + 1, 2y). \end{aligned}$$

Calculemos la matriz $L_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $d_p N$ respecto de nuestra base \mathcal{B}_φ . Debe ser

$$d_p N(\varphi_x) = a\varphi_x + b\varphi_y,$$

esto es

$$\frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4y^2 + 1, 4xy, -2x) = a(1, 0, -2x) + b(0, 1, 2y).$$

Mirando las dos primeras componentes se deduce

$$a = \frac{2(4y^2 + 1)}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}}, \quad b = \frac{8xy}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}}.$$

Análogamente se obtienen los otros dos coeficientes c y d , y al final la matriz buscada es

$$L_p = \frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4y^2 + 1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el helicoides, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

con $\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b)$, $\varphi_v = (\cos u, \sin u, 0)$, y con aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}} (-b \sin u, b \cos u, -v)$$

(véase 6.9(4), p.81). Para calcular la matriz de $d_p N$ procedemos como con el paraboloide anterior. Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (N \circ \varphi)_u = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + v^2}} (\cos u, \sin u, 0) = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + v^2}} \varphi_v, \\ d_p N(\varphi_v) = (N \circ \varphi)_v = \frac{-b}{(b^2 + v^2)^{3/2}} (-v \sin u, v \cos u, b) = \frac{-b}{(b^2 + v^2)^{3/2}} \varphi_u, \end{cases}$$

para concluir que la matriz buscada es

$$L_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{b^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2+v^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante no nulo, luego $d_p N$ es un isomorfismo. Deducimos del teorema de la función inversa que N es un difeomorfismo local. ■

Por último analizamos las superficies de revolución.

Ejemplos 7.4. (1) Sea S una superficie de revolución como en 6.10, p. 81. Suponemos su curva generatriz parametrizada mediante $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ con $\zeta(u) > 0$. También suponemos que u es el arco, es decir, que $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$, y por tanto $\zeta'\zeta'' + \xi'\xi'' = 0$. La aplicación

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u))$$

parametriza la superficie, y

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), & \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0), \\ N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)). \end{cases}$$

Tenemos

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (-\xi''(u) \cos v, -\xi''(u) \sin v, \zeta''(u)) = a(u) \varphi_u, \\ d_p N(\varphi_v) = (\xi'(u) \sin v, -\xi'(u) \cos v, 0) = b(u) \varphi_v \end{cases}$$

donde

$$a(u) = \frac{-\xi''(u)}{\zeta'(u)} = \frac{\zeta''(u)}{\xi'(u)}, \quad b(u) = \frac{-\xi'(u)}{\zeta'(u)}.$$

Se concluye que la matriz de $d_p N$ es diagonal

$$L_p = \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & b(u) \end{pmatrix}.$$

(2) Veamos el caso del toro de revolución generado por una circunferencia del plano xz (1.11, p. 10). Parametrizamos esa circunferencia por la longitud del arco mediante

$$\zeta(u) = c + r \cos \frac{1}{r}u, \quad \xi(u) = r \sin \frac{1}{r}u \quad \text{con } (0 < r < c).$$

Escribimos por comodidad $t = \frac{1}{r}u$, y derivamos:

$$\zeta'(u) = -\sin t, \quad \xi'(u) = \cos t, \quad \xi''(u) = -\frac{1}{r} \sin t.$$

En consecuencia, la matriz de la segunda forma fundamental del toro es

$$L_p = \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & -\frac{\cos t}{c+r \cos t} \end{pmatrix}.$$

Se observa que uno de los coeficientes es constante. Más adelante entenderemos el significado de este hecho (9.4(6), p. 119). ■

Volviendo a la situación general, establecemos una propiedad básica de la aplicación de Weingarten:

Proposición 7.5. *Sea S nuestra superficie orientada con aplicación de Gauss N y sea $p \in S$. La aplicación de Weingarten $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$ cumple la identidad*

$$\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle = \langle \omega, d_p N(\omega') \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_p S.$$

La propiedad anterior tiene nombre propio: se dice que $d_p N$ es un *operador autoadjunto de $T_p N$* .

Demostración. Por linealidad, basta comprobar la igualdad para los vectores de una base de $T_p S$. Por tanto, consideramos una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de un entorno W de p , y la base del plano tangente formada por los vectores φ_u y φ_v , y vamos a ver que

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, d_p N(\varphi_v) \rangle.$$

Derivando la identidad $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$ respecto de u tenemos

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle + \langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle = 0,$$

luego

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle.$$

Análogamente, derivando $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$ respecto de v , se deduce que

$$\langle d_p N(\varphi_v), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uv} \rangle.$$

En fin, por la regla de Schwarz $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, y se sigue lo que se quiere. ■

Llegamos por fin a la segunda forma fundamental. Consideremos un punto $p \in S$. Por ser $d_p N$ un *operador autoadjunto*, podemos definir una forma *bilineal simétrica* B_p en el plano tangente mediante

$$B_p(\omega, \omega') = -\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_p S,$$

y tenemos la correspondiente forma cuadrática:

Definición 7.6. La forma cuadrática $\mathbf{II}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle$$

es la *segunda forma fundamental de S en p* .

La introducción de un signo negativo en la definición anterior es de naturaleza técnica, y quedará justificada en la lección siguiente.

Igual que la primera forma fundamental y el producto escalar se determinan mutuamente, también ocurre así con \mathbf{II}_p y B_p , y por la misma relación:

$$B_p(\omega, \omega') = \frac{1}{2}(\mathbf{II}_p(\omega + \omega') - \mathbf{II}_p(\omega) - \mathbf{II}_p(\omega')).$$

Otra consideración que hay que tener presente es que si cambiamos la orientación de S , la segunda forma fundamental cambia de signo (pues como ya hemos dicho, cambia de signo la aplicación de Weingarten).

Ejemplos 7.7. (1) Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto conexo de plano afín, entonces N es constante, su derivada en cualquier punto $p \in S$ es nula, y la segunda forma fundamental también. Recíprocamente, supongamos que una superficie conexa S tiene nulas todas las segundas formas fundamentales $\mathbf{II}_p \equiv 0$. Entonces para todo $p \in S$, la forma bilineal simétrica asociada es también nula, es decir, $\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle = 0$ para cualesquiera $\omega, \omega' \in T_p S$. Eso sólo es posible si $d_p N(\omega) = 0$ para todo $\omega \in T_p S$, es decir, si $d_p N \equiv 0$. Concluimos que todas las derivadas de N son nulas, y como S es conexa, que N es constante. Por 6.8, p. 79, S es un abierto de un plano afín.

(2) La esfera. Tomando como N la identidad, cada derivada $d_p N$ es la identidad, y $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$, de modo que \mathbf{II}_p es definida negativa. Si tomamos como N la aplicación antipodal, $\mathbf{II}_p = \mathbf{I}_p$ es definida positiva. Esto pasa en general: si cambiamos de signo N , cambiamos del mismo modo \mathbf{II}_p , pero no \mathbf{I}_p .

(3) El cilindro $S : x^2 + y^2 = 1$ con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ y derivada $d_p N(a, b, c) = (a, b, 0)$ (7.2(2), p. 88). Tenemos

$$\mathbf{II}_p(a, b, c) = -\langle (a, b, 0), (a, b, c) \rangle = -a^2 - b^2.$$

Vemos que \mathbf{II}_p es muy diferente de \mathbf{I}_p : ésta es definida positiva y aquélla es semidefinida negativa. ■

Los ejemplos anteriores son sencillos, y los hemos analizado con datos globales. En general, hay que utilizar expresiones locales.

(7.8) Expresión en coordenadas locales de la segunda forma fundamental.

Seguimos con nuestra superficie S , orientada con aplicación de Gauss N , y con un punto $p \in S$ dado.

(1) Recordemos la expresión matricial de \mathbf{II}_p respecto de una base $\mathcal{B} = \{\varpi, \varpi'\}$ de $T_p S$. Si $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi' \in T_p S$, entonces

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} B_p(\varpi, \varpi) & B_p(\varpi, \varpi') \\ B_p(\varpi', \varpi) & B_p(\varpi', \varpi') \end{pmatrix}.$$

Esta matriz M_p clasifica \mathbf{II}_p como forma cuadrática: si es definida positiva o negativa, semidefinida positiva o negativa, o indefinida. La orientación influye aquí, pues, al cambiarla cambia de signo la matriz. Sin embargo, por ser una matriz de orden par, *no cambia el signo de su determinante*. Veremos que éste será el invariante más interesante.

(2) Consideremos una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de un abierto W de S , la base \mathcal{B}_φ de $T_p S$ correspondiente. La matriz M_p de \mathbf{II}_p respecto de \mathcal{B}_φ es

$$M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e_p = -\langle d_p N(\varphi_{u,p}), \varphi_{u,p} \rangle, \\ f_p = -\langle d_p N(\varphi_{u,p}), \varphi_{v,p} \rangle = -\langle d_p N(\varphi_{v,p}), \varphi_{u,p} \rangle, \\ g_p = -\langle d_p N(\varphi_{v,p}), \varphi_{v,p} \rangle. \end{cases}$$

Estos *coeficientes* determinan completamente la segunda forma fundamental, pero insistimos en que dependen de la parametrización, aunque \mathbf{II}_p no lo haga.

(3) En la demostración de 7.5, p. 91, derivamos $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$ respecto de u y $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$ respecto de v para obtener

$$\begin{cases} \langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uv} \rangle & \text{y} \\ \langle d_p N(\varphi_v), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle. \end{cases}$$

Análogamente podemos derivar $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$ y $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$ respecto de u la primera y respecto de v la segunda, para obtener

$$\begin{cases} \langle d_p N(\varphi_u), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uu} \rangle & \text{y} \\ \langle d_p N(\varphi_v), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

En consecuencia tenemos (una vez más descargando la notación):

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Para terminar la lección, vemos cómo se aplican estas fórmulas en los ejemplos habituales.

Ejemplos 7.9. (1) El cilindro $S : x^2 + y^2 = 1$, con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ (6.9(2), p. 79). Ya lo hemos considerado antes (7.7(3), p. 93), pero ahora lo parametrizamos mediante $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, de manera que $N(x, y, z) = (x, y, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$. Tenemos:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (-\cos u, -\sin u, 0) \rangle = -1, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0. \end{cases}$$

Así, la matriz de \mathbf{II}_p respecto de la base \mathcal{B}_φ asociada a φ es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Confirmamos que \mathbf{II}_p es semidefinida negativa.

(2) El paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$, con su parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$ y con aplicación de Gauss

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, -2y, 1)$$

(6.9(3), p. 80). Resulta

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{xx} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, -2) \rangle = \frac{-2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{xy} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, 0) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{yy} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, 2) \rangle = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}. \end{cases}$$

y la matriz de \mathbf{II}_p es $M_p = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Así, \mathbf{II}_p es indefinida.

(3) El helicoides $S \subset \mathbb{R}^3$, con $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu)$ y aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}(-b \sin u, b \cos u, -v).$$

(6.9(4), p. 81). Procedemos como en los dos casos anteriores:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (-v \cos u, -v \sin u, 0) \rangle = 0, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}}, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (0, 0, 0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Obtenemos la matriz $M_p = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y vemos que \mathbf{II}_p es indefinida.

(4) Consideramos ahora la superficie de revolución $S \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

donde $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ es una parametrización por el arco de la curva generatriz de la superficie (o sea, $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$) con $\zeta(u) > 0$. La aplicación de Gauss es

$$N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)) \quad (6.10, \text{ p. 81}),$$

y por tanto:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (\zeta'' \cos v, \zeta'' \sin v, \xi'') \rangle = -\zeta'' \xi' + \zeta' \xi'', \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (-\zeta' \sin v, \zeta' \cos v, 0) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (-\zeta \cos v, -\zeta \sin v, 0) \rangle = \zeta \xi'. \end{cases}$$

La matriz de \mathbf{II}_p es pues

$$M_p = \begin{pmatrix} -\zeta'' \xi' + \zeta' \xi'' & 0 \\ 0 & \zeta \xi' \end{pmatrix}.$$

Como se ve, que sea definida, semidefinida o indefinida depende de la curva generatriz de S . ■

Problemas

Número 1. Calcular la segunda forma fundamental del paraboloides elíptico $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = x^2 + y^2$ en un punto $p \in S$. Clasificarla como forma cuadrática.

Curvatura normal

En esta lección se estudian nociones relativas a la curvatura de las superficies o de ciertas curvas de las superficies. Para curvas, la curvatura se definía a partir de la variación del vector tangente, y empezaremos con este punto de vista para definir cierta noción de curvatura de la superficie en una determinada dirección (definida por una recta vectorial del plano tangente en un punto).

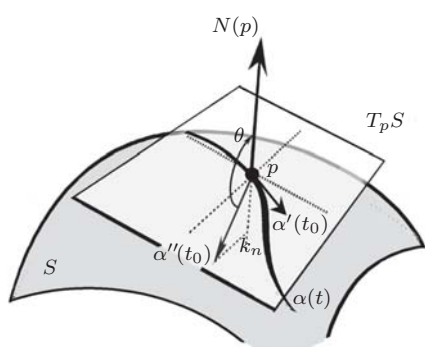
Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable orientada, con aplicación de Gauss N , y consideremos un punto p de S .

(8.1) Curvatura normal de una curva de una superficie. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva regular de la superficie S , parametrizada por el arco, que pasa por p , digamos $\alpha(t_0) = p \in S$. En tal situación $\alpha''(t_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{t}_\alpha(t_0) = \alpha'(t_0)$, y la curvatura de α en t_0 es $\kappa_\alpha(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|$. Como la curva está en S , $\alpha'(t_0)$ es tangente a S en p , es decir, ortogonal al vector normal $N(p)$ en p (lo que no garantiza que $N(p)$ tenga siquiera la dirección de $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$). En fin, la *curvatura normal de α en p* es por definición

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle.$$

Si $\alpha''(t_0) \neq 0$ y θ es el ángulo formado por los vectores $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$ y $N(p)$, entonces $k_n(\alpha) = \kappa_\alpha(t_0) \cos \theta$.

De esta manera, $k_n(\alpha)$ es la longitud *con signo* de la proyección del vector $\alpha''(t_0)$ sobre la dirección normal a la superficie. Ese signo se determina respecto de $N(p)$, de manera que si se cambia la orientación (esto es, el signo de la aplicación de Gauss), se cambia el signo de la curvatura normal. ■



El siguiente es un resultado clásico que da idea de la naturaleza de la no-

ción anterior, trayendo a escena la segunda forma fundamental. Se conoce como *teorema de Meusnier*:

Teorema 8.2. *Sea α una curva regular de S , parametrizada por el arco, que pasa por p , digamos $\alpha(t_0) = p$, y con vector tangente $\alpha'(t_0) = \omega \in T_p S$. Su curvatura normal en p es*

$$k_n(\alpha) = \mathbf{II}_p(\omega).$$

En particular, todas las curvas regulares de S (parametrizadas por el arco) que pasan por p con una dirección tangente dada, tienen la misma curvatura normal en p .

Demostración. Derivando la identidad $\langle N(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$ obtenemos

$$0 = \langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle = \langle d_p N(\omega), \omega \rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle,$$

de modo que

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle = \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle = k_n(\alpha).$$

Visto esto, si dos curvas parametrizadas por el arco tienen en p la misma dirección tangente, su vector tangente está determinado salvo signo, digamos que es $\pm\omega$, y como \mathbf{II}_p es una forma cuadrática, $\mathbf{II}_p(w) = \mathbf{II}_p(-w)$. ■

Para curvas de S cuyo plano osculador en p no coincide con el tangente a la superficie en ese punto, se puede extraer el siguiente corolario.

Corolario 8.3. *Sean α_1 y α_2 curvas de S que pasan por p . Si ambas curvas tienen la misma tangente y los mismos planos osculadores en p y éstos son distintos de $T_p S$, entonces tienen la misma curvatura en p .*

Demostración. Supongamos $p = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$, y denotemos de la manera obvia $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ los vectores tangentes y normales de las curvas en p . Las hipótesis significan que $\mathbf{t}_1 = \pm\mathbf{t}_2$ y $\mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{n}_2$, y que los vectores normales forman con $N(p)$ ángulos $\theta_1, \theta_2 \neq \frac{1}{2}\pi$. Por el teorema de Meusnier, las curvaturas normales de ambas curvas en p coinciden, es decir,

$$\langle \alpha_1''(t_1), N(p) \rangle = \langle \alpha_2''(t_2), N(p) \rangle,$$

y en consecuencia

$$\|\alpha_1''(t_1)\| \cos \theta_1 = \|\alpha_2''(t_2)\| \cos \theta_2.$$

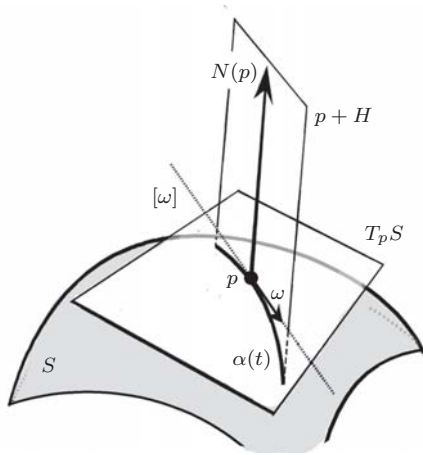
Aquí, sabemos que esos cosenos no son nulos, y puesto que $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{n}_2$ o coinciden o son opuestos. Pero la igualdad muestra que los dos cosenos tienen el mismo signo, luego deben ser iguales. Con ello deducimos $\|\alpha_1''(t_1)\| = \|\alpha_2''(t_2)\|$, esto es, que las curvaturas de las dos curvas son iguales. ■

El teorema de Meusnier muestra que la curva influye poco en el valor de su curvatura normal, lo que sugiere la siguiente definición:

Definición 8.4. Sea $[\omega]$ una dirección tangente a S en p . Se denomina *curvatura normal de S en p en la dirección $[\omega]$* a la curvatura normal en p de todas las curvas de S (parametrizadas por el arco) que pasan por p con dirección tangente $[\omega]$.

Obviamente, para calcular una curvatura normal de S en el punto p se puede elegir cualquier curva tangente a la dirección de que se trate. Hay una manera muy natural de elegir esa curva.

(8.5) Secciones normales. (1) Consideremos una dirección tangente $[\omega]$ de $T_p S$. Entonces tenemos el plano vectorial H generado por ω y el vector normal $N(p)$,



y su trasladado el plano afín $p + H$ paralelo a H que pasa por p ; estos planos vectorial y afín se llaman *normales a S en la dirección $[\omega]$* . Como $H = T_p(p + H)$ es evidentemente transversal a $T_p S$, la intersección $S \cap (p + H)$ es localmente la traza de un arco de Jordan (3.8, p.37). Así, existe una curva regular $\alpha : I \rightarrow S$ parametrizada por el arco que es un homeomorfismo sobre un entorno de p en $H \cap S$; tendremos $p = \alpha(t_0)$ para cierto $t_0 \in I$. Como la traza de α yace en S , $\alpha'(t_0) \in T_p S$, y como también yace en $p + H$, $\alpha'(t_0) \in T_p(p + H) = H$. Así, $\alpha'(t_0) \in [\omega]$, y $[\omega]$ es la dirección tan-

gente de α en p . Esta curva α es una *sección normal de S en el punto p en la dirección $[\omega]$* .

(2) Con las notaciones anteriores, resulta que $k_n(\alpha)$ es la curvatura normal de S en la dirección $[\omega]$. Veamos que ésta es también la curvatura de α como curva plana.

En efecto, orientemos el plano vectorial H mediante la base $\{\omega, N(p)\}$ y la sección normal de modo que $\alpha'(t_0)$ y ω apunten en el mismo sentido. Con estas orientaciones, $N(p)$ es el vector normal a α en p como curva plana, y entonces la curvatura $\kappa(t_0)$ de α en p como curva plana está definida por la relación

$$\alpha''(t_0) = \kappa(t_0)N(p).$$

(es una curvatura con signo). Concluimos que

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = \langle \kappa(t_0)N(p), N(p) \rangle = \kappa(t_0),$$

esto es, la curvatura normal de S en p en la dirección $[\omega]$ es la curvatura con signo de la sección normal de S en esa dirección. ■

Tras las consideraciones geométricas precedentes, volvemos con la segunda forma fundamental \mathbf{II}_p en el punto $p \in S$. Puesto que \mathbf{II}_p expresa las curvaturas normales de S , interesa estudiar cómo se puede calcular. Para ello utilizaremos un resultado básico de la teoría de formas cuadráticas, el denominado *teorema espectral*. Según este teorema, por ser la aplicación de Weingarten $d_p N$ un operador autoadjunto se cumple que:

Teorema 8.6. *El plano tangente $T_p S$ tiene bases ortonormales formadas por autovectores de la aplicación de Weingarten $d_p N$.*

En particular, $d_p N$ tiene dos autovalores reales (posiblemente iguales). Si los autovalores son iguales, entonces $d_p N$ es una homotecia, todos los vectores son autovectores, y cualquier base ortonormal sirve. Si los autovalores son distintos, entonces dos autovectores cualesquiera de uno y otro autovalor son ortogonales, y basta dividirlos por sus normas para obtener la base ortonormal requerida.

Explicado lo anterior, volvemos al cálculo de las curvaturas normales.

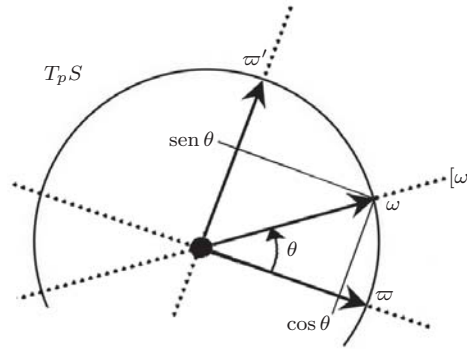
(8.7) Fórmula de Euler. Sean S nuestra superficie y $p \in S$. Como acabamos de decir, $T_p S$ tiene una base ortonormal $\{\varpi, \varpi'\}$ formada por dos autovectores de $d_p N$, digamos $d_p N(\varpi) = \nu\varpi$, $d_p N(\varpi') = \nu'\varpi'$; por conveniencia notacional que será evidente de inmediato, consideramos $k = -\nu$ y $l = -\nu'$.

(1) Una dirección tangente a S en p se representa por uno cualquiera de los dos vectores unitarios que la generan; sea $\omega \in T_p S$ uno de ellos (el otro es su opuesto). Se tiene que $\omega = (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi'$ para cierto ángulo θ entre 0 y

2π . De esta manera la curvatura normal en la dirección de ω es una función de ese ángulo que representaremos $k_n(\theta) = \mathbf{II}_p(\omega)$. Por ejemplo, se tiene

$$k_n(0) = \mathbf{II}_p(\varpi) = k \quad \text{y} \quad k_n(\tfrac{1}{2}\pi) = \mathbf{II}_p(\varpi') = l.$$

Claramente con $0 \leq \theta < \pi$ se representan todas las direcciones tangentes en p .



(2) Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} k_n(\theta) &= \mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N((\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi'), (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= -\langle (\cos \theta)\nu\varpi + (\sin \theta)\nu'\varpi', (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= \langle (\cos \theta)k\varpi + (\sin \theta)l\varpi', (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= (\cos^2 \theta)k\langle \varpi, \varpi \rangle + (\cos \theta \sin \theta)k\langle \varpi, \varpi' \rangle \\ &\quad + (\sin \theta \cos \theta)l\langle \varpi', \varpi \rangle + (\sin^2 \theta)l\langle \varpi', \varpi' \rangle, \end{aligned}$$

y como la base elegida es ortonormal, queda

$$k_n(\theta) = k \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta.$$

Ésta es la denominada *Fórmula de Euler*. También se puede escribir:

$$k_n(\theta) = (k - l) \cos^2 \theta + l = k - (k - l) \sin^2 \theta.$$

(3) Supongamos por ejemplo que $\nu \leq \nu'$, o sea, que $k \geq l$. Resulta:

$$k_n(\theta) = k \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta \quad \begin{cases} \leq k \cos^2 \theta + k \sin^2 \theta = k = k_n(0), \\ \geq l \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta = l = k_n(\tfrac{1}{2}\pi). \end{cases}$$

Por tanto k y l son respectivamente las curvaturas normales máxima y mínima en p .

(4) Ya hemos dicho que el intervalo de ángulos que interesa es entre 0 y π , y de todo lo anterior se sigue fácilmente que la curvatura normal $k_n(\theta)$ es decreciente entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ (de k a l) y creciente entre $\frac{1}{2}\pi$ y π (de l a k). Por continuidad, alcanza todos los valores intermedios entre sus extremos. ■

A la vista de lo anterior, las curvaturas extremas se distinguen de las demás, y reciben nombre propio:

Definición 8.8. Las *curvaturas principales* de S en p son las curvaturas normales extremas en p , y las *direcciones principales* son las direcciones tangentes en que se alcanzan esas curvaturas normales extremas.

Esta noción depende de la orientación, es decir, de la elección de la aplicación de Gauss: si cambiamos de signo de ésta, cambian de signo sus derivadas, sus autovalores y sus curvaturas principales.

Todo lo anterior se resume así: *las curvaturas principales son los valores opuestos de los autovalores de la aplicación de Weingarten, y se alcanzan en direcciones ortogonales, que se corresponden con los autovectores asociados a esos autovalores.*

Revisemos a continuación las superficies S de las que conocemos la aplicación de Gauss N y su aplicación de Weingarten $d_p N$ en un punto p . Empezamos por las dos más sencillas.

Ejemplos 8.9. (1) La esfera, orientada con aplicación de Gauss la identidad. La aplicación de Weingarten en cualquier punto es la identidad, todos los vectores tangentes son autovectores de autovalor $+1$, y cualquier base ortonormal cumple el teorema espectral. En este caso extremo, sólo hay una curvatura principal, que vale -1 , y cualquier dirección es principal. Si pensamos en la segunda forma fundamental, $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$, que vale -1 en cualquier vector unitario.

Razonemos ahora con secciones normales. Es claro que las secciones normales de la esfera son los círculos máximos (de radio 1), cuya curvatura como curvas planas es ± 1 según la orientación. Ahora bien, la curvatura normal es una función continua, luego sólo puede tomar uno de los valores, y es constante $\equiv \pm 1$. Este razonamiento geométrico no permite decidir el signo, pues no hace uso específico de la aplicación de Gauss, es decir, de la orientación, elegida. Esta ambigüedad se evita observando directamente que para cualquier parametrización α de un círculo máximo con $\alpha(0) = p$, los vectores $N(p)$ y $\alpha''(0)$ apuntan en sentidos opuestos, de donde se sigue que $k_n(\alpha) = -1$.

(2) Pasemos al cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. En 7.2(2), p. 88, calculamos la matriz L_p de $d_p N$ respecto de la base de $T_p S$ formada por los vectores $\varpi = (-y, x, 0)$ y $\varpi' = (0, 0, 1)$. Es inmediato comprobar que esa base es ortonormal, y la matriz L_p dice que ϖ es un autovector del autovalor 1 y ϖ' es un autovector del autovalor 0. Por tanto, las curvaturas principales son -1 y 0 , y las direcciones principales corresponden a ϖ y ϖ' . La formula de Euler que se obtiene es

$$k_n(\theta) = -\cos^2 \theta.$$

Utilizando la matriz M_p de \mathbf{II}_p respecto de esa misma base obtenida en 7.9(1), p. 94, se confirma inmediatamente el comportamiento de la curvatura normal. En efecto, si $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$ tenemos

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu)M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -\lambda^2.$$

Pero como la base es ortonormal, $\|\omega\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ (compruébese con los datos de este caso). En consecuencia, si esa norma es 1, el valor de $\mathbf{II}_p(\omega)$ varía entre el máximo 0 y el mínimo -1 .

Utilicemos ahora secciones normales en un punto p . Las dos evidentes son la circunferencia del plano horizontal que pasa por p , y la recta vertical que pasa por el punto. Estas dos secciones tiene curvatura ± 1 (según la orientación) y 0 . Las demás secciones normales son elipses con ejes distintos $e > e' = 1$ y curvatura $\pm 1/e^2$. Así, la curvatura normal empieza valiendo ± 1 en la sección horizontal, varía continuamente hasta 0 en la sección vertical, sigue variando hasta valer otra vez ± 1 en la sección horizontal. En el primer tramo hasta 0 el signo no puede cambiar, pues la curvatura normal no se anula ahí, y en el segundo tampoco por lo mismo. Pero el último valor coincide con el primero, y concluimos que el signo es constante. Por tanto, la curvatura normal varía entre 1 y 0 , o entre -1 y 0 . Concluimos que las curvaturas principales son $+1$ y 0 , o -1 y 0 ; las direcciones principales son las de las secciones normales correspondientes. De nuevo, la indecisión del signo se debe a que en este argumento no interviene la aplicación de Gauss. ■

Veamos otro ejemplo importante.

(8.10) Curvaturas principales de una superficie de revolución Sea S una superficie de revolución con la parametrización habitual

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

(1) En 7.4(1), p. 90, se describe la aplicación de Weingarten con la hipótesis de que la curva generatriz esté parametrizada por el arco (para simplificar cálculos). Con esa hipótesis, respecto de la base del plano tangente asociada a φ la matriz de la aplicación de Weingarten era diagonal, con autovalores $-\xi''/\zeta'$ y $-\xi'/\zeta$. Por tanto las curvaturas principales son $k = \xi''/\zeta'$ y $l = \xi'/\zeta$, y las direcciones principales corresponden al meridiano y al paralelo que pasan por el punto. Dejamos al lector que escriba la fórmula de Euler.

Fijémonos en k y su dirección principal, dada por φ_u , es la del meridiano. La sección normal correspondiente a ella es el meridiano por el punto, cuya curvatura como curva plana es por tanto k . Por otra parte es claro que la curvatura del meridiano como curva plana es la curvatura κ_α de la curva generatriz. Esto lo confirman las fórmulas, pues $\mathbf{t}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ con $\mathbf{t}_\alpha = (\zeta', \xi')$ y $\mathbf{n}_\alpha = (-\xi', \zeta')$ (aquí es cómodo que u sea el arco).

Analicemos la otra curvatura principal l , cuya dirección principal es la de φ_v , es decir la del paralelo. Ahora bien, el paralelo es efectivamente una sección plana, pero no necesariamente una sección normal, y sólo en ése caso sabemos que l coincide con la curvatura como sección plana. Ahora bien, como curva plana la curvatura del paralelo es la de una circunferencia de radio $\zeta(u)$, luego la coincidencia se da sólo si $l = \pm 1/\zeta(u)$, es decir, $\xi'(u) = \pm 1$. Al estar la curva generatriz parametrizada por el arco, deducimos $\zeta'(u) = 0$, y ésa es la tercera componente de $N(\varphi(u, v))$ (6.10, p. 81). Por tanto, el vector normal a la superficie está en el plano xy , y el plano del paralelo es un plano normal a la superficie. En conclusión, si la curvatura principal l coincide con la curvatura del paralelo, éste es una sección normal (y recíprocamente). Además, esto corresponde a que el vector tangente a la curva generatriz en el punto correspondiente al paralelo en cuestión sea vertical.

(2) La información cualitativa de la discusión precedente se puede utilizar para calcular las curvaturas k y l , sin suponer que u sea el arco de la curva generatriz. En efecto, lo que sabemos en todo caso es que las direcciones principales son los meridianos y los paralelos. Por tanto, los vectores tangentes φ_u y φ_v son siempre, sea o no u el arco, autovectores:

$$d_p N(\varphi_{u,p}) = -k\varphi_{u,p}, \quad d_p N(\varphi_{v,p}) = -l\varphi_{v,p}.$$

Estas igualdades permiten obtener k y l . Primero tenemos (aligerando la notación):

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta' \cos v, \zeta' \sin v, \xi'), & \varphi_v = (-\zeta \sin v, \zeta \cos v, 0), \\ N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'). \end{cases}$$

(aquí aparece $\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}$, no necesariamente $\equiv 1$). Ahora basta utilizar las primeras componentes de los vectores involucrados, que son

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{-\xi' \cos v}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} = -k\zeta' \cos v, \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{-\xi' \cos v}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} = l\zeta' \sin v.$$

Operando y despejando las curvaturas se concluye:

$$k = \frac{\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi'}{(\zeta'^2 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta' \sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}}.$$

Por supuesto, si u es el arco obtenemos los valores de (1): para l salta a la vista, y para k nótese que derivando $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ se obtiene $\zeta' \zeta'' + \xi' \xi'' = 0$. ■

Los ejemplos que siguen requieren otro tipo de cálculos, que ilustran el procedimiento general.

Ejemplos 8.11. (1) El paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. En 7.3(1), p. 88, elegimos su parametrización global φ como grafo y calculamos la matriz de $d_p N$ respecto de la correspondiente base \mathcal{B}_φ de $T_p S$. La situación varía según el punto.

(i) Para $p = (0, 0, 0)$ la base es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, que es ortonormal, y la matriz respecto de ella es diagonal, luego los vectores de la base son autovectores con autovalores ± 2 (*loc. cit.*). En consecuencia las curvaturas principales son ∓ 2 y las direcciones principales corresponden a los vectores de la base. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = -2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = -4 \cos^2 \theta + 2.$$

(ii) Para un punto p del tipo $(x, 0, z)$, la base es sólo ortogonal, pero la matriz es diagonal (*loc. cit.*). Por ello, los dos vectores de la base son autovectores, y determinan las direcciones principales: sólo hay que dividirlos por sus normas para tener una base ortonormal en las condiciones del teorema espectral. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = \frac{-2}{(4x^2+1)^{3/2}} \cos^2 \theta + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \sin^2 \theta.$$

Análogamente se trataría un punto del tipo $(0, y, z)$.

(iii) Para un punto p con $xy \neq 0$ hay que buscar una nueva base por aplicación directa del teorema espectral. Es un problema de Álgebra Lineal que resolvemos

para el punto $p = (1, 1, 0)$. Para ese punto la base de $T_p S$ y la matriz de $d_p N$ que tenemos para empezar son

$$\mathcal{B}_\varphi = \{(1, 0, -2), (0, 1, 2)\} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} 10/27 & -8/27 \\ 8/27 & -10/27 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es $P(T) = T^2 - 4/81$, que tiene por raíces $\nu = \pm 2/9$. Estos son los autovalores, y para cada uno encontramos sus autovectores resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 10/27 - \nu & -8/27 \\ 8/27 & -10/27 - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $\nu = +2/9$ resulta $(\lambda, \mu) = (2, 1)$ y para $\nu = -2/9$ resulta $(\lambda, \mu) = (1, 2)$ (soluciones no nulas salvo proporcionalidad, claro). Hay que entender que (λ, μ) son las coordenadas de los autovectores *respecto de la base dada*. Así obtenemos los dos autovectores siguientes

$$\varpi = 2(1, 0, -2) + (0, 1, 2) = (2, 1, -2), \quad \varpi' = (1, 0, -2) + 2(0, 1, 2) = (1, 2, 2).$$

Como predice el teorema espectral, son ortogonales, y basta dividirlos por su norma 3 para obtener una base ortonormal. Las curvaturas principales son $\mp 2/9$ y las direcciones principales corresponden a los dos vectores ϖ y ϖ' . La fórmula de κ es

$$\kappa_n(\theta) = -\frac{2}{9} \cos^2 \theta + \frac{2}{9} \sin^2 \theta = -\frac{4}{9} \cos^2 \theta + \frac{2}{9}.$$

(2) El helicoides $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado por $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$. En 7.3(2), p. 89, la base del plano tangente es ortogonal, pero la matriz no es diagonal. Hay pues que proceder como en el apartado anterior. Hagámoslo para un punto p con $v = 0$. En ese caso, la base de $T_p S$ y la matriz de $d_p N$ con las que empezamos son

$$\mathcal{B}_\varphi = \{(0, 0, b), (\cos u, \sin u, 0)\} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} 0 & -1/b^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $P(T) = T^2 - 1/b^2$, de modo que los autovalores son $\pm 1/b$. Obtenemos como autovectores asociados $(1, -b)$ y $(1, b)$, esto es, obtenemos los autovectores

$$\begin{cases} \varpi = (0, 0, b) - b(\cos u, \sin u, 0) = (-b \cos u, -b \sin u, b), \\ \varpi' = (0, 0, b) + b(\cos u, \sin u, 0) = (b \cos u, b \sin u, b). \end{cases}$$

Son dos autovectores ortogonales con norma $b\sqrt{2}$, luego divididos por ella forman la base ortonormal buscada. Las curvaturas principales son $\mp 1/b$ y las direcciones principales las de los vectores ϖ y ϖ' . La fórmula de Euler queda

$$k_n(\theta) = -\frac{1}{b} \cos^2 \theta + \frac{1}{b} \sin^2 \theta = -\frac{2}{b} \cos^2 \theta + \frac{1}{b}.$$

Las direcciones principales dan lugar al concepto siguiente:

Definición 8.12. Una curva regular en S se llama *línea de curvatura* si su vector tangente en todo punto define una dirección principal en ese punto.

Obsérvese que ésta noción no depende de la parametrización de la curva. El siguiente resultado clásico, conocido como *teorema de Olinde Rodrigues*, proporciona un criterio útil para reconocer las líneas de curvatura.

Teorema 8.13. Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular α de S sea una línea de curvatura es que exista una función diferenciable $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(N \circ \alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t).$$

En tal caso $k(t) = -\nu(t)$ es la curvatura principal a lo largo de $\alpha(t)$.

Demostración. Si $\alpha(t)$ es una línea de curvatura, entonces $\alpha'(t)$ genera una dirección principal y, por tanto, es un autovector de $d_{\alpha(t)}N$, es decir,

$$(N \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) = \nu(t)\alpha'(t),$$

siendo $k(t) = -\nu(t)$ la correspondiente curvatura principal. La función $\nu(t)$ se puede expresar como

$$\nu(t) = \frac{\langle (N \circ \alpha)'(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

y, ya que $\alpha(t)$ es regular, $\nu(t)$ es diferenciable.

Recíprocamente, si se tiene una igualdad $(N \circ \alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t)$, entonces $\alpha'(t)$ es un vector propio de $d_{\alpha(t)}N$ y define una dirección principal correspondiente a la curvatura principal $k(t) = -\nu(t)$. ■

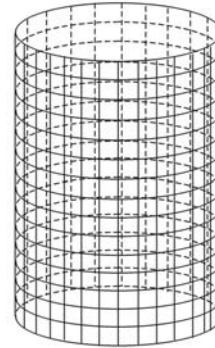
El cálculo de líneas de curvatura no es asunto fácil. Veamos a continuación algunos ejemplos accesibles.

Ejemplos 8.14. (1) La esfera, con aplicación de Gauss la identidad. En este caso, cualquier curva α es línea de curvatura, pues $N \circ \alpha = \alpha$, y la condición del teorema anterior se cumple trivialmente.

(2) El cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. En este caso, las curvaturas principales son -1 y 0 . Ahora bien, una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es línea de curvatura si existe una función diferenciable $\nu(t)$ tal que

$$(N \circ \alpha)'(t) = (x'(t), y'(t), 0) = \nu(t)(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Como $-\nu(t)$ debe ser una curvatura principal, por continuidad sólo puede ser $\nu \equiv 1$ o $\nu \equiv 0$. En el primer caso obtenemos $z'(t) \equiv 0$, es decir la curva tiene constante su tercera coordenada en \mathbb{R}^3 ; esto significa que es la circunferencia intersección del cilindro con un plano horizontal $z = z_0$. En el segundo caso, $x'(t) = y'(t) \equiv 0$, y la curva tiene constantes sus dos primeras coordenadas en \mathbb{R}^3 , es decir, la curva es una recta vertical.



(3) Según 8.10(1), p.105, las direcciones principales en un punto de una superficie de revolución corresponden a los meridianos y los paralelos, luego éstos son las líneas de curvatura de la superficie. Se puede ver una representación de las del toro en la figura de 1.11, p.10. ■

Problemas

Número 1. Sea S el cilindro circular con aplicación de Gauss $N(x, y, z) = (x, y, 0)$. Utilizar la expresión $\mathbf{II}_p(a, b, c) = -a^2 - b^2$ de 7.7(3), p. 93, para deducir la fórmula de Euler $k_n(\theta) = -\cos^2 \theta$ del ejemplo 8.9(2), p. 105. Deducirla también utilizando la curvatura de las elipses obtenidas como secciones normales según se describen en ese ejemplo.

Número 2. Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que para todo $t \in I$ la curva es una sección normal de S en $\alpha(t)$. ¿Es α una línea de curvatura de S ?

Número 3. Sea α una curva regular de una superficie S . Supongamos que α es plana, es decir, que su traza está contenida en un plano P . Probar que α es una línea de curvatura si y sólo si S y P se cortan con ángulo constante a lo largo de α . Enunciar y demostrar un resultado más general válido para la intersección de dos superficies.

Número 4. Sea α una curva regular intersección de dos superficies transversales S_1 y S_2 . Probar que la curvatura $k = \kappa_\alpha(p)$ de α en un punto p cumple $k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta$, donde

Curvatura de Gauss

En su momento dijimos que la clasificación de la segunda forma fundamental es importante para conocer la geometría de una superficie, y explicamos que el determinante sería el invariante más importante. Nos dedicamos a ello aquí. Como es habitual, consideraremos una superficie *orientada*, pero los conceptos que introduzcamos en esta lección *serán independientes de la orientación*.

Sea S una superficie orientada, con aplicación de Gauss N .

(9.1) Clasificación de la segunda forma fundamental. En cada punto $p \in S$ tenemos la segunda forma fundamental \mathbf{II}_p . Como ponen de manifiesto los ejemplos vistos en las lecciones anteriores, las curvaturas principales en el punto p clasifican \mathbf{II}_p . Veamos por qué.

(1) Para simplificar al máximo el argumento, elijamos una base ortonormal $\{\varpi, \varpi'\}$ de $T_p S$ formada por autovectores de $d_p N$, digamos $d_p N(\varpi) = \nu \varpi$ y $d_p N(\varpi') = \nu' \varpi'$. Entonces, como vimos al calcular la fórmula de Euler,

$$B_p(\varpi, \varpi) = \mathbf{II}_p(\varpi) = -\nu = k, \quad B_p(\varpi', \varpi') = \mathbf{II}_p(\varpi') = -\nu' = l,$$

y por ser ϖ y ϖ' ortogonales

$$B_p(\varpi, \varpi') = B_p(\varpi', \varpi) = -\langle d_p N(\varpi'), \varpi \rangle = -\langle \nu' \varpi', \varpi \rangle = 0.$$

De esta manera la matriz de \mathbf{II}_p es diagonal, y en su diagonal aparecen las dos curvaturas principales.

En particular se ve que la matriz de la segunda forma fundamental y la de la aplicación de Weingarten son *diagonales y opuestas* cuando se calculan respecto de una base como esta $\{\varpi, \varpi'\}$.

(2) Según lo anterior la forma cuadrática \mathbf{II}_p se escribe $k\lambda^2 + l\mu^2$ en coordenadas (λ, μ) respecto de la base elegida, y obtenemos inmediatamente la clasificación siguiente según los signos de las curvaturas principales. Suponemos por ejemplo que $k \geq l$:

k	l	\mathbf{II}_p	$k \cdot l$
+	+	definida positiva	+
+	0	semidefinida positiva	0
+	−	indefinida	−
0	0	idénticamente nula	0
0	−	semidefinida negativa	0
−	−	definida negativa	+

Hemos añadido el signo del producto de las curvaturas por la explicación que sigue. ■

Observemos cómo influye la orientación en este resultado. Sabemos que al cambiar la orientación las curvaturas principales cambian de signo, con la consecuencia de que en la clasificación anterior los términos *positiva* y *negativa* se intercambian. Este intercambio corresponde a la elección arbitraria que hagamos de la aplicación de Gauss, elección que no influye en qué forma tenga nuestra superficie. Por tanto los calificativos antedichos no serán esenciales, y debemos fijarnos más bien en que la forma sea definida o indefinida, semidefinida o nula. Resulta que esto queda determinado por el signo del determinante (aparte el caso en que $\mathbf{II}_p \equiv 0$). De hecho, ese determinante es la curvatura con nombre más ilustre:

Definición 9.2. La *curvatura de Gauss* $K(p)$ de S en p es el producto de sus dos curvaturas principales en p .

Tal vez sea ésta la noción de curvatura más importante, que además, por lo explicado anteriormente, *no depende de la orientación*. Como toda superficie es *localmente* orientable, deducimos que la curvatura de Gauss se puede definir para superficies no orientables.

Para recuperar a partir de K las curvaturas principales, hay que conocer también la denominada *curvatura media* $H(p)$ de S en p , que es la semisuma de las curvaturas principales $k(p)$ y $l(p)$. Aquí conviene señalar que esta curvatura media se puede también definir en superficies no orientables, pero sólo *salvo signo* (de nuevo por ser toda superficie localmente orientable).

Obsérvese que si escribimos $\nu(p) = -k(p)$, $\nu'(p) = -l(p)$, el polinomio característico de $d_p N$ se escribe:

$$P(T) = (T - \nu(p))(T - \nu'(p)) = T^2 + 2H(p)T + K(p),$$

y resulta que:

- (i) $K(p) = \det(d_p N)$, $H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(d_p N)$,
- (ii) $k(p), l(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$.

(9.3) Clasificación de los puntos de una superficie. Los puntos de la superficie S se clasifican atendiendo a su curvatura como sigue.

K	H	\mathbf{II}_p	punto
+	\pm	definida	<i>elíptico</i>
0	$\neq 0$	semidefinida	<i>parabólico</i>
0	0	idénticamente nula	<i>planar</i>
-	\pm	indefinida	<i>hiperbólico</i>

Vemos que la curvatura media sólo es relevante para distinguir los puntos parabólicos de los planares, y aún en ese caso sólo interesa si es o no nula, lo que no depende de la orientación.

Adicionalmente, un punto se llama *umbílico* si sus dos curvaturas principales son coincidentes, lo cual es compatible, tan sólo, con el caso elíptico y el caso planar. Obsérvese que la coincidencia de las dos curvaturas principales tampoco depende de la orientación, y la podemos expresar mediante la igualdad $H^2 = K$. ■

El dato interesante en la tabla precedente es el signo de K . Ese signo es el del determinante de la matriz de \mathbf{II}_p respecto de cualquier base de $T_p S$. En efecto, aunque para encontrar k, l y $K = k \cdot l$ haya que cambiar de base, los determinantes de \mathbf{II}_p antes y después del cambio coinciden salvo el cuadrado del determinante del cambio. Por ello, aunque el determinante de \mathbf{II}_p depende de la base, su signo no.

Analicemos ahora las superficies de referencia habituales.

Ejemplos 9.4. (1) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un plano afín. Como la aplicación de Gauss es constante, su derivada es siempre nula, luego su único autovalor es 0 y su determinante 0 también. Así, un plano afín tiene curvatura de Gauss igual a cero, y todos sus puntos son planares.

(2) La esfera $S = \mathbb{S}^2$. Elegimos como aplicación de Gauss la identidad, de modo que su derivada también es la identidad, que tiene 1 por único autovalor,

y el determinante 1. Por tanto la esfera tiene curvatura de Gauss constante igual a 1, y todos sus puntos son umbílicos.

Una esfera de radio $r > 0$ arbitrario tiene curvatura de Gauss constante igual $1/r^2$ (es fácil ver que su aplicación de Weingarten es una homotecia de radio $1/r$). En la lección 11 entenderemos la relación entre las curvaturas de dos esferas de radio diferente.

(3) El cilindro circular $S : x^2 + y^2$, como en 8.9(2), p.105. Allí vimos que sus curvaturas principales eran -1 y 0 . Por tanto, la curvatura de Gauss es constante igual a 0 , y todos sus puntos son parabólicos. La curvatura media con esta orientación es $-\frac{1}{2}$.

(4) El paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. En 8.11(1), p.107, calculamos las curvaturas principales en algunos de sus puntos, pero no en general por la dificultad de las operaciones. Sin embargo, el cálculo de la curvatura de Gauss es más sencillo, pues podemos utilizar la matriz de la aplicación de Weingarten que calculamos en 7.3(1), p.88, a saber:

$$L_p = \frac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4y^2+1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2-1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es la curvatura de Gauss, y vale

$$K = \frac{-4}{(4x^2+4y^2+1)^2} < 0,$$

de manera que todos los puntos de la superficie son hiperbólicos. La curvatura media es la traza de la matriz:

$$H = \frac{8(-x^2+y^2)}{(4x^2+4y^2+1)^2} = \frac{8z}{(4x^2+4y^2+1)^2};$$

el último numerador muestra cómo cambia de signo H según varía la altura z .

(5) El helicoides S parametrizado por $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$. En 7.3(2), p.89, se obtuvo la matriz L_p de la aplicación de Weingarten, y su determinante se calcula inmediatamente: es

$$K = \frac{-b^2}{(b^2+v^2)^2} < 0.$$

Como en el caso anterior, resulta que todos los puntos son hiperbólicos. Por otra parte, al calcular la traza de L_p obtenemos que la curvatura media H del helicoides

es constante igual a 0, o sea que en todo punto las dos curvaturas principales son no nulas y opuestas.

(6) Sea S la superficie de revolución generada por una curva $(\zeta(u), 0, \xi(u))$, $\zeta(u) > 0$, no necesariamente parametrizada por el arco. En 8.10(2), p. 107, vimos que las curvaturas principales de S son

$$k = \frac{\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi'}{(\zeta'^2 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta \sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}},$$

y por tanto, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\xi'(\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

(el lector puede escribir la curvatura media).

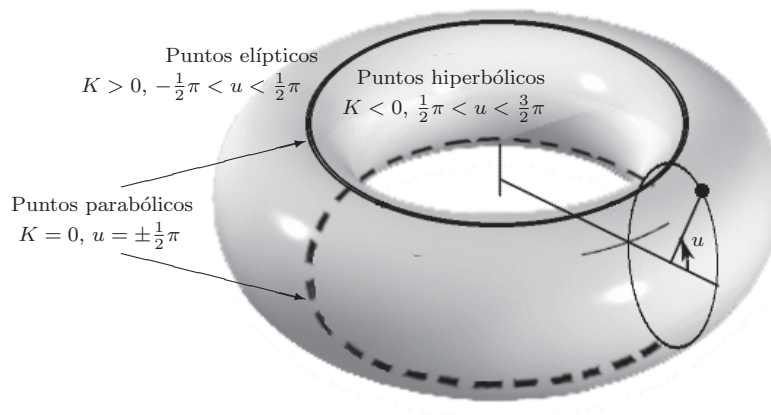
Veamos un ejemplo importante (1.11, p. 10): el toro de revolución generado por una circunferencia del plano xz , parametrizada por

$$\zeta(u) = c + r \cos u, \quad \xi(u) = r \sin u \quad (0 < r < c).$$

Las fórmulas anteriores proporcionan las siguientes curvaturas:

$$k = \frac{1}{r}, \quad l = \frac{\cos u}{c + r \cos u}; \quad K = \frac{\cos u}{r(c + r \cos u)}$$

(comparar con 7.4(2), p. 91). Veamos qué tipos de puntos tiene este toro. En primer lugar, no tiene puntos umbílicos, pues si $k = l$ resulta $c + r \cos t = r \cos t$, esto es, $c = 0$. Como $k > 0$, tampoco hay puntos planares. Por otra parte, el denominador de K siempre es positivo, luego el signo de K es el de su numerador $\cos t$, y obtenemos:



Es decir, los puntos elípticos forman la *cara exterior* del toro, los parabólicos sus *circunferencias superior e inferior*, y los hiperbólicos su *cara interior*. ■

La siguiente proposición se refiere a superficies cuyos puntos son umbílicos en su totalidad.

Proposición 9.5. *Sea S una superficie orientable conexa que tiene todos sus puntos umbílicos, entonces S es un abierto de un plano o de una esfera.*

Demostración. Sea N una aplicación de Gauss de S . Dado $p \in S$ arbitrario, puesto que las dos curvaturas principales coinciden, coinciden los dos autovalores de $d_p N$, que es por tanto una homotecia; digamos $d_p N(\omega) = \nu(p)\omega$ para todo $\omega \in T_p S$. Esto define una aplicación $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Consideremos una parametrización $p = \varphi(u, v)$ cualquiera de S . Entonces

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_u = d_p N(\varphi_u) = (\nu \circ \varphi)\varphi_u, \\ (N \circ \varphi)_v = d_p N(\varphi_v) = (\nu \circ \varphi)\varphi_v. \end{cases}$$

Estas expresiones muestran que $\nu \circ \varphi$ es una función diferenciable, pues de ellas se deduce, por ejemplo, que

$$\nu \circ \varphi = \frac{\langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|^2},$$

y el vector φ_u no se anula nunca. Por tanto, podemos derivar respecto de v y u respectivamente, y obtenemos

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_{vu} = (\nu \circ \varphi)_v \varphi_u + (\nu \circ \varphi)\varphi_{vu}, \\ (N \circ \varphi)_{uv} = (\nu \circ \varphi)_u \varphi_v + (\nu \circ \varphi)\varphi_{uv} \end{cases}$$

Restando ambas expresiones y teniendo en cuenta la regla de Schwarz (de las derivadas cruzadas) deducimos que

$$(\nu \circ \varphi)_v \varphi_u - (\nu \circ \varphi)_u \varphi_v \equiv 0$$

y, ya que los vectores φ_u y φ_v son linealmente independientes, obtenemos que las dos derivadas parciales de $\nu \circ \varphi$ se anulan idénticamente en U , o en otras palabras, que $d_p \nu \equiv 0$.

Lo anterior demuestra que la aplicación $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y tiene todas sus derivadas nulas, y como S es conexo, ν es constante (4.6, p. 47). Si ocurre

que $\nu \equiv 0$, entonces $d_p N \equiv 0$ para todo $p \in S$, luego la aplicación de Gauss N es constante, y ya sabemos que esto implica que S es un abierto de un plano afín (6.8, p. 79). Por tanto, supondremos ν constante no nula, y demostraremos que S es un abierto de una esfera.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación $f(p) = p - \frac{1}{\nu}N$. Es diferenciable, y su derivada en cualquier punto $p \in S$ es nula:

$$d_p f(\omega) = \omega - \frac{1}{\nu}d_p N(\omega) = \omega - \frac{1}{\nu}\nu\omega = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_p S.$$

En consecuencia, f es constante en S , digamos $f \equiv p_0$. Esto significa que todo punto p de S cumple la relación $p - p_0 = \frac{1}{\nu}N(p)$, y por tanto

$$\|p - p_0\| = \frac{1}{\nu}\|N(p)\| = \frac{1}{\nu}.$$

En otras palabras, p está en la esfera S_ν de centro p_0 y radio $\frac{1}{\nu}$. Pero visto así ya que S está contenida en la esfera S_ν , se deduce que S es un abierto de esa esfera (4.11, p. 50). ■

El teorema anterior contiene la caracterización siguiente de la esfera, debida a Meusnier: *una superficie compacta cuyos puntos son todos umbílicos es una esfera.*

A continuación introducimos otro concepto independiente de la orientación. Sea como siempre S nuestra superficie (con una aplicación de Gauss N) y $p \in S$.

Definición 9.6. Se llama *indicatriz de Dupin* el subconjunto del plano tangente $T_p S$ definido por la ecuación $\mathbf{II}_p = \pm 1$.

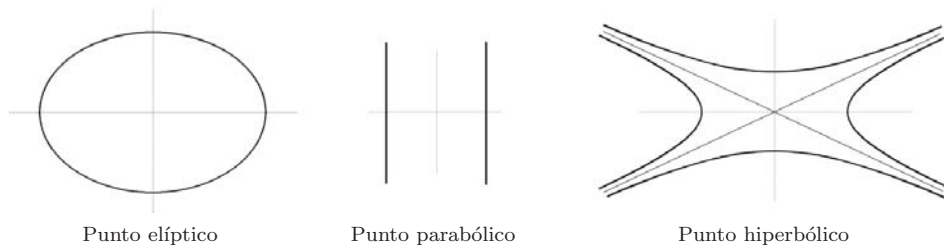
El doble signo en esta definición hace que no dependa de la orientación. Para entender de qué tipo de objeto se trata, consideremos una base ortonormal $\{\varpi, \varpi'\}$ de $T_p S$ formada por autovectores de $d_p N$: $d_p N(\varpi) = \nu\varpi$, $d_p N(\varpi') = \nu'\varpi'$. Las curvaturas principales son $k = -\nu$ y $l = -\nu'$, y como ya hemos calculado otras veces, dado un vector $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$ se tiene

$$\mathbf{II}_p(\omega) = k\lambda^2 + l\mu^2.$$

Por tanto, la indicatriz de Dupin es un par de cónicas del plano tangente. Los posibles casos son los siguientes:

K	indicatriz de Dupin	punto
+	dos elipses, una real y una imaginaria	elíptico
0	dos pares de rectas paralelas, uno real y uno imaginario	parabólico
0	dos cónicas vacías	planar
-	dos hipérbolas con las mismas asíntotas	hiperbólico

El siguiente dibujo representa los casos relevantes.



Veamos cómo la indicatriz de Dupin pone de manifiesto la curvatura de la superficie cerca del punto de que se trate.

(9.7) Interpretaciones geométricas. (1) Supongamos que una determinada dirección del plano tangente está representada por un vector ω de la indicatriz de Dupin (es decir, $\mathbf{II}_p(\omega) = \pm 1$). Puesto que la curvatura normal en esa dirección es $k_n = \mathbf{II}_p(\omega/\|\omega\|) = \pm 1/\|\omega\|^2$, resulta que cuanto mayor es la norma de ω , o sea, cuanto más lejano al origen es el punto de la indicatriz de Dupin en la dirección dada, más pequeña en valor absoluto es la curvatura normal en esa dirección. Distingamos los posibles casos:

(i) En un punto elíptico nos fijamos en la elipse real de la indicatriz. Su excentricidad es el cociente de las curvaturas principales, y determina la relación entre los dos ejes de la elipse. Confirmamos que cuanto mayor sea ese cociente, más varía la curvatura normal alrededor del punto.

(ii) En un punto parabólico tenemos un par de rectas paralelas reales. Todas las direcciones del plano tangente, excepto la del propio par de rectas, cortan a una de ellas. Cuando esas direcciones se aproximan a la del par de rectas, los puntos de corte con el par se alejan del origen, y corresponden a curvaturas normales cada vez menores. En el límite obtenemos que la curvatura normal en la dirección del par de rectas es nula.

(iii) En un punto hiperbólico aparecen un par de hipérbolas con las mismas asíntotas. Arbitariamente próximas a esas asíntotas hay direcciones representadas por puntos de las hipérbolas arbitrariamente lejanos del origen y, por tanto, la curvatura normal en esas direcciones es arbitrariamente pequeña, y nula en el límite. En suma, en las direcciones de las asíntotas la curvatura normal es nula.

(2) Una interpretación clásica de la indicatriz de Dupin, que no desarrollaremos aquí, se basa en la observación de que si se toma el plano tangente $T_p S$ a un punto p de una superficie S entonces la intersección de la superficie con un plano paralelo y cercano a $T_p S$ es “aproximadamente” la indicatriz de Dupin de S en p . El lector puede visualizar fácilmente ejemplos sencillos considerando un elipsoide, un paraboloides hiperbólico y un cilindro circular. ■

A la vista de las consideraciones anteriores, quedan justificadas las siguientes definiciones.

Definición 9.8. Las *direcciones asintóticas* de S en p son las direcciones tangentes en que se anula la curvatura normal. Una curva regular de S se llama *línea asintótica* si su vector tangente en todo punto define una dirección asintótica en ese punto.

Naturalmente, para que haya líneas asintóticas tiene que haber direcciones de curvatura nula, luego debe ser $K \leq 0$. Por ejemplo, como la curvatura de Gauss de una esfera es positiva, no tiene líneas asintóticas. Veamos algunos ejemplos en que sí las hay:

Ejemplos 9.9. (1) En el plano todas las curvaturas normales son 0, luego todas las curvas son líneas asintóticas.

(2) En el cilindro circular una de las curvaturas principales es 0, y la otra siempre es $\neq 0$. La curvatura principal nula corresponde siempre a la dirección vertical $(0, 0, 1)$, luego las líneas asintóticas son las rectas verticales contenidas en el cilindro (todas líneas de curvatura además).

(3) Analicemos el toro de revolución del ejemplo 9.4(6), p. 119. En primer lugar, según se vio allí, la curvatura normal no se anula nunca en puntos de la cara exterior del toro, luego en esa parte del toro no hay ninguna dirección asintótica, luego ninguna línea asintótica. Esa región externa está limitada por las dos circunferencias de puntos parabólicos, que ellas mismas son líneas de curvatura con curvatura nula (8.14(3), p. 110), luego son líneas asintóticas. En fin, en la cara interior del toro habrá direcciones asintóticas, pues las curvaturas principales en

esa cara interior tienen signos contrarios, luego algún valor intermedio nulo. Así en esta parte del toro habrá líneas asintóticas, pero no serán líneas de curvatura. ■

Terminamos la lección mostrando otra manera en que la curvatura de Gauss está ligada a la forma de la superficie. Se trata de un resultado del propio Gauss, y se conoce como *teorema de la curvatura de Gauss*.

Teorema 9.10. *Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss N , y sea p un punto de la superficie en el que la curvatura de Gauss no se anula. Entonces se tiene:*

$$|K(p)| = \lim_{W \rightarrow p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)},$$

donde el límite $W \rightarrow p$ se toma según cualquier base de entornos W de p .

Demostración. Como $K(p)$ es el determinante de la aplicación de Weingarten $d_p N$, resulta del teorema de la función inversa (4.10, p. 50), que $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local en p , esto es, que si W es suficientemente pequeño, su imagen $N(W)$ es abierto en \mathbb{S}^2 , y $N|_W : W \rightarrow N(W)$ es un difeomorfismo. Dicho esto, podemos suponer dada una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ del entorno W , con $p = \varphi(q)$. En nuestra situación, $\psi = N \circ \varphi : U \rightarrow N(W)$ es una parametrización de $N(W)$. Vamos a usar estas parametrizaciones para calcular las áreas de W y $N(W)$.

Según se explicó en 5.11(3), p. 66, esas áreas son

$$\text{área}(W) = \int_U \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du dv, \quad \text{área}(N(W)) = \int_U \|\psi_u \wedge \psi_v\| \, du dv.$$

En nuestra situación $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p S$, luego

$$\psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \quad \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v,$$

para ciertos coeficientes a, b, c, d . Por tanto

$$\|\psi_u \wedge \psi_v\| = \|(a\varphi_u + b\varphi_v) \wedge (c\varphi_u + d\varphi_v)\| = |ad - bc| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|.$$

Ahora bien,

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (N \circ \varphi)_u = \psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \\ d_p N(\varphi_v) = (N \circ \varphi)_v = \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \end{cases}$$

con lo que $K(p) = \det(d_p N) = ad - bc$. Con todo esto el cociente que nos interesa queda

$$\frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \frac{\int_U |K \circ \varphi| h \, dudv}{\int_U h \, dudv},$$

donde $h = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ nunca se anula. El teorema del valor medio del Cálculo Integral dice que el último cociente vale

$$\frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1) \int_U \, dudv}{h(q_2) \int_U \, dudv},$$

con $q_1, q_2 \in U$. Por tanto

$$\lim_{W \rightarrow p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \lim_{U \rightarrow q} \frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1)}{h(q_2)} = |K(p)|,$$

pues $W \rightarrow p$ significa que $U \rightarrow q$ y por tanto $q_1, q_2 \rightarrow q$. ■

Así, el valor absoluto de la curvatura de Gauss en un punto p puede ser interpretado como *el límite de un cociente de áreas*, la de la imagen esférica de un entorno de p y la de dicho entorno, cuando éste se va haciendo más y más pequeño. Obsérvese que cuanto mayor sea el cociente, más superficie esférica se recorrerá en un entorno de p , y para esto más debe curvarse la superficie en ese entorno. Gauss determinó el signo de K en función de la orientación de S .

La demostración anterior contiene el siguiente resultado, que merece ser enunciado separadamente:

Corolario 9.11. *Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss N , y sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de un abierto $W \subset S$ tal que $N \circ \varphi : U \rightarrow N(W)$ sea un difeomorfismo sobre un abierto $N(W)$ de \mathbb{S}^2 . Sea Σ un subconjunto conexo de W . Entonces*

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \left| \int_{\Sigma} K \right|.$$

Demostración. Por la prueba precedente,

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} |K \circ \varphi| \sqrt{\det(Q)} \, dudv,$$

y esta última integral es por definición (5.12, p.67) $\int_{\Sigma} |K|$. Ahora bien, K no puede anularse en W , pues es el determinante de la derivada de N , y $N|_W$ es

difeomorfismo. Como Σ es conexo, se deduce que K tiene signo constante en Σ , y el valor absoluto sale de la integral, como en el enunciado. ■

En otras palabras, *la integral del valor absoluto de la curvatura de Gauss en una región Σ es el área de su imagen esférica* (con ciertas hipótesis sobre Σ).

Problemas

Número 1. Calcular la curvatura de Gauss de los paraboloides elípticos $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 4y^2$.

Número 2. Probar que toda recta contenida en una superficie S es una curva asintótica. Deducir que si por el punto $p \in S$ pasa una recta contenida en S entonces la curvatura de Gauss en p no puede ser positiva.

Número 3. Sea p un punto de una superficie S tal que la curvatura media de S se anula en p . Probar que existen dos direcciones asintóticas ortogonales en el plano tangente en p (que son únicas si p no es planar). ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Número 4. Calcular la curvatura de Gauss de la superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $\cos x + \sin y + \sin z = 0$. Describir qué tipos de puntos tiene S .

Número 5. Calcular la indicatriz de Dupin y las direcciones asintóticas en el origen de la superficie dada por la ecuación $z = x^2 - 2y^2$.

Número 6. Sea p un punto de una superficie S tal que la intersección del plano tangente afín $p + T_p S$ con S contiene una curva regular α . Probar que la recta tangente a α en p define una dirección asintótica en $T_p S$. Un caso particular de uso frecuente es el de un punto hiperbólico: si el plano tangente en él a la superficie la corta en dos curvas transversales, entonces esas curvas definen las dos direcciones asintóticas en el punto.

Número 7. Sea S una superficie y p un punto de S . Supongamos que S contiene tres rectas distintas que pasan por p . Probar que p es un punto planar. Deducir que si S es conexa entonces S es una parte abierta de un plano si y sólo si por cada punto de S pasan tres rectas distintas contenidas en S .

Número 8. Sea S una superficie, no necesariamente orientable, con curvatura de Gauss (definible también en el caso no orientable) positiva en todo punto. Probar que S es orientable y es posible escoger la orientación de modo que las curvaturas principales sean positivas en todo punto.

Número 9. Sea S una superficie, no necesariamente orientable, de manera que su curvatura media se puede definir salvo signo. Probar que si la curvatura media no se anula en ningún punto entonces S es orientable.

Número 10. ¿Cuándo tiene puntos planares una superficie de revolución? Describirlos en ese caso.

Ecuaciones de Weingarten

En las lecciones anteriores hemos utilizado la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental para estudiar la manera en que una superficie se dobla o curva en el espacio. Las mismas definiciones de estos dos objetos expresan la estrecha relación que los une, pero si los cotejamos en los muchos ejemplos analizados, los encontraremos más o menos parecidos según los casos. Dedicamos esta lección a expresar explícitamente con ecuaciones la relación entre la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental. Esas ecuaciones explican esos parecidos, a veces nada aparentes, otras, como en la situación del teorema espectral, verdaderamente evidentes.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, con aplicación de Gauss N .

(10.1) Ecuaciones de Weingarten. Retomamos la expresión local de la segunda forma fundamental tal y como se desarrolló en el párrafo 7.8, p. 93. Teníamos allí una parametrización φ de S compatible con la orientación (esto es, $\eta = N$), y la base \mathcal{B}_φ del plano tangente correspondiente. Consideramos, respecto de esa base, las matrices de \mathbf{I}_p , \mathbf{II}_p y $d_p N$, respectivamente:

$$Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} a_p & c_p \\ b_p & d_p \end{pmatrix}.$$

Si denotamos (λ, μ) las coordenadas respecto de \mathcal{B}_φ de un vector $\omega \in T_p S$ y (λ', μ') las de $\omega' = d_p N(\omega)$, tenemos

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = (\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle_p = -\langle \omega', \omega \rangle_p = -\langle \omega, \omega' \rangle_p,$$

resulta

$$(\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

y en consecuencia,

$$M_p = -Q_p L_p, \quad \text{o mejor,} \quad L_p = -Q_p^{-1} M_p.$$

Así pues, calculamos Q_p^{-1} y multiplicamos por M_p para obtener los siguientes valores de los coeficientes de la matriz L_p (olvidando subíndices):

$$a = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad b = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad c = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad d = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Las expresiones anteriores, que se denominan *ecuaciones de Weingarten*, determinan por completo la aplicación de Weingarten en términos de la primera y la segunda formas fundamentales. ■

La igualdad $M_p = -Q_p L_p$ expresa la dependencia entre las matrices de la segunda forma fundamental y la aplicación de Weingarten. Por ejemplo, si la base de $T_p S$ es ortonormal, entonces $M_p = -L_p$. Y hemos visto aún más: si la base cumple el teorema espectral las dos matrices son *diagonales y opuestas*.

Las ecuaciones de Weingarten dependen por supuesto de la parametrización utilizada pero tienen la ventaja de ser fácilmente calculables a partir de dicha parametrización. Sugerimos al lector que las compruebe en todos los ejemplos habituales vistos en las lecciones anteriores: el cilindro, el paraboloides hiperbólico, el helicoides y las superficies de revolución.

Una vez obtenidas las ecuaciones de Weingarten, podemos utilizarlas para calcular todas las curvaturas.

(10.2) Expresión en coordenadas locales de las curvaturas. (1) Sea φ una parametrización de nuestra superficie S . Usando las ecuaciones de Weingarten que acabamos de obtener, se deducen las siguientes fórmulas con los coeficientes de las dos formas fundamentales (5.2, p.57, y 7.8, p.93):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K &= \det(d_p N) = ad - bc = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ \text{(ii)} \quad H &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(d_p N) = -\frac{1}{2}(a + d) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Destaquemos la circunstancia sobre la que insistimos siempre: todos estos coeficientes con los que operamos dependen de φ , pero el resultado final son las curvaturas K y L , que no dependen.

(2) Las fórmulas anteriores muestran además que K y H son funciones *diferenciables en S* . Se sigue que las curvaturas principales $k, l = H \pm \sqrt{H^2 - K}$ son funciones *continuas*, y son diferenciables en el subconjunto abierto de S definido por la desigualdad $H^2 \neq K$, esto es, son *diferenciables fuera del conjunto de los puntos umbílicos*.

En particular, el conjunto de los puntos elípticos ($K > 0$) es abierto en S , y también lo es el de los puntos hiperbólicos ($K < 0$). Los puntos planares ($K = H^2 = 0$) forman un conjunto cerrado, así como los umbílicos ($H^2 = K$). ■

El lector puede aplicar las fórmulas anteriores para confirmar los resultados de los ejemplos 9.4, p. 117.

En ocasiones es interesante utilizar parametrizaciones locales cuyas curvas coordenadas sean líneas de curvatura, que en particular son coordenadas *ortogonales*. Más adelante veremos cómo se pueden obtener. En la siguiente proposición encontramos una sencilla caracterización cuando la parametrización no cubre puntos umbílicos.

Proposición 10.3. *Sea $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ una parametrización de un abierto W que no contiene puntos umbílicos. Entonces las líneas coordenadas son líneas de curvatura si y sólo si $F = f = 0$ en todo punto de W .*

Demostración. Como en W no hay puntos umbílicos, la aplicación de Weingarten tiene en todo punto de W dos autovalores distintos, y por tanto direcciones principales ortogonales. Por otra parte, la condición $F = 0$ equivale a que los vectores φ_u y φ_v sean ortogonales. En consecuencia, basta probar el resultado con la hipótesis inicial de que $F = 0$, que hacemos a partir de aquí.

Ahora bien, las líneas coordenadas de φ son líneas de curvatura si y sólo si en todo punto φ_u y φ_v definen direcciones principales, es decir, son autovectores de la aplicación de Weingarten. Esto equivale a que sea diagonal la matriz L de esa aplicación respecto de la base \mathcal{B}_φ . Pero L viene dada por las ecuaciones de Weingarten, de las que nos interesan las siguientes

$$L = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{cases} b = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = -\frac{fE}{EG}, \\ c = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = -\frac{fG}{EG} \end{cases}$$

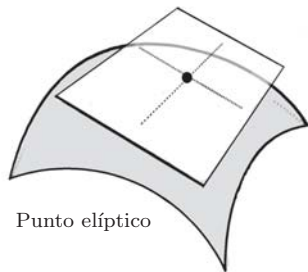
(habida cuenta que $F = 0$). Así que L es diagonal si y sólo si $fE = fG = 0$, si y sólo si $f = 0$, pues $EG > 0$. ■

La siguiente proposición pone de manifiesto cómo el signo de la curvatura de Gauss nos permite obtener información sobre la posición relativa de la superficie y su plano tangente en un punto. Si la curvatura de Gauss en un punto es positiva, entonces todas las curvaturas normales tienen el mismo signo, lo que geoméricamente se traduce en que todas las secciones normales en ese punto se curvan hacia el mismo lado del plano tangente. Si, por el contrario, la curvatura de Gauss es negativa entonces hay curvaturas normales de signos opuestos, lo que se traduce en la existencia de secciones normales que se curvan hacia lados opuestos del plano tangente.

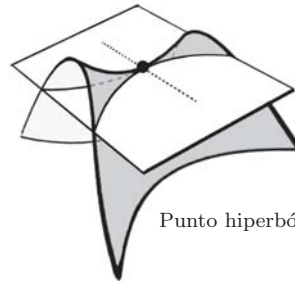
Proposición 10.4. *Sea p un punto de nuestra superficie orientada S .*

(1) *Si p es elíptico, entonces tiene un entorno en S cuyos puntos están todos del mismo lado del plano tangente $T_p S$. Además, p es el único punto de contacto entre el plano tangente y la superficie en ese entorno.*

(2) *Si p es hiperbólico, entonces en todo entorno de p existen puntos de uno y de otro lado del plano tangente $T_p S$.*



Punto elíptico



Punto hiperbólico

Demostración. Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de un entorno W de p en S , compatible con la orientación; por simplificar supondremos que $\varphi(0,0) = p$. Vamos a estudiar la distancia *con signo* al plano afín tangente $p + T_p S$ de los puntos de W . Esa distancia viene dada por la función altura

$$h : U \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto (\varphi(u, v) - p)N(p).$$

(4.2, p.45). La función h es diferenciable, se anula en $(0,0)$ y derivando se ve inmediatamente que $h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$. El enunciado se puede reformular diciendo:

(1) Si p es elíptico, h tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo.

(2) Si p es hiperbólico, h cambia de signo en todo entorno del origen.

De esta manera formulado, se trata de un problema de extremos de una función diferenciable en U . Vamos a explicar cómo lo resuelve el Análisis.

La función h se puede desarrollar, en un entorno del origen, en la forma:

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(0, 0) + h_u(0, 0)u + h_v(0, 0)v \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2) + \text{resto integral} \\ &= \frac{1}{2}(h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2) + \text{resto integral}, \end{aligned}$$

pues $h(0, 0) = h_u(0, 0) = h_v(0, 0) = 0$. Además, por 7.8, p.94,

$$\begin{cases} h_{uu}(0, 0) = \langle \varphi_{uu}(0, 0), N(p) \rangle = e_p, \\ h_{uv}(0, 0) = \langle \varphi_{uv}(0, 0), N(p) \rangle = f_p, \\ h_{vv}(0, 0) = \langle \varphi_{vv}(0, 0), N(p) \rangle = g_p, \end{cases}$$

con lo que

$$h(u, v) = \frac{1}{2}(e_p u^2 + 2f_p uv + g_p v^2) + \text{resto integral}.$$

La forma cuadrática entre paréntesis es la *hessiana* de h en el origen, y el número $e_p g_p - f_p^2$ es su *discriminante*. Es un resultado de Análisis Matemático que:

(1') Si $e_p g_p - f_p^2 > 0$, entonces h tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo. (El origen es extremo local estricto.)

(2') Si $e_p g_p - f_p^2 < 0$, entonces h cambia de signo en todo entorno del origen. (El origen no es extremo local.)

Dicho lo anterior, recordamos la fórmula 10.2(i), p.132:

$$K(p) = \frac{e_p g_p - f_p^2}{E_p G_p - F_p^2},$$

y como $E_p G_p - F_p^2 > 0$, el punto p es:

(1'') Elíptico ($K > 0$) si y sólo si $e_p g_p - f_p^2 > 0$.

(2'') Hiperbólico ($K < 0$) si y sólo si $e_p g_p - f_p^2 < 0$.

En conclusión, de (1') y (1'') resulta (1), y de (2') y (2'') resulta (2). Hemos terminado. ■

Después de describir la forma de una superficie en un punto elíptico y en un punto hiperbólico, hay que analizar cuándo una superficie tiene, si es que los

tiene, puntos de esos tipos. Vemos a continuación una condición global topológica que garantiza la existencia de puntos elípticos.

Proposición 10.5. *Toda superficie orientada compacta tiene algún punto con curvatura de Gauss positiva.*

Demostración. Supongamos que S es una superficie orientada compacta, con aplicación de Gauss N . Para demostrar la proposición elegimos un punto cualquiera $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y consideramos la función diferenciable

$$h : S \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \|p - p_0\|^2 \quad (4.2, \text{ p. 46}).$$

Como S es compacta, esta función h alcanza un máximo absoluto en un punto $q \in S$ que será consecuentemente un punto crítico de h . Por tanto, para todo $\omega \in T_q S$:

$$0 = d_q h(\omega) = 2(q - p_0)\omega.$$

Esto significa que el vector $q - p_0$ es ortogonal a $T_q S$, es decir, $q - p_0 = \lambda N(q)$ para cierto $\lambda \neq 0$. Vamos a demostrar que q es un punto elíptico, es decir, que todas las curvaturas normales en q son no nulas del mismo signo (en este caso será el opuesto al de la constante λ). Sea ahora ω un vector tangente unitario en $T_q S$, y calculemos la curvatura normal $\mathbf{II}_q(\omega)$. Según vimos en la demostración del teorema de Meusnier (8.2, p. 100), se toma cualquier curva α de la superficie parametrizada por el arco, que pase por q , digamos $\alpha(t_0) = q$, con $\alpha'(t_0) = \omega$, y es

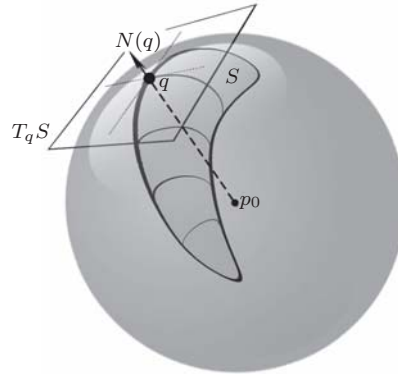
$$\mathbf{II}_q(\omega) = \langle N(q), \alpha''(t_0) \rangle.$$

Ahora bien, en nuestra situación, la función $h \circ \alpha$ tiene un máximo en $t = t_0$, luego $(h \circ \alpha)''(t_0) \leq 0$. Derivando:

$$0 \geq (h \circ \alpha)''(t_0) = 2\|\alpha'(t_0)\|^2 + 2(\alpha(t_0) - p_0)\alpha''(t_0),$$

y puesto que α está parametrizada por el arco y $\alpha(t_0) - p_0 = q - p_0 = \lambda N(q)$ concluimos que

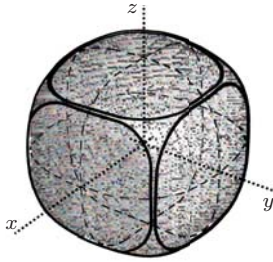
$$0 \geq 2 + 2\lambda N(q)\alpha''(t_0) = 2 + 2\lambda \mathbf{II}_q(\omega).$$



Para esto es necesario que $\lambda \mathbf{II}_p(\omega) < 0$, luego la curvatura normal $\mathbf{II}_q(\omega)$ no se anula, y su signo es siempre opuesto al de λ . Hemos terminado. ■

Así pues, una superficie (orientada) compacta tiene siempre puntos elípticos, y puede que no tenga de otro tipo: la esfera unidad ($K \equiv 1$) es el ejemplo más sencillo de ello. También hay superficies compactas que tienen puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos: el toro (9.4(6), p. 119). Naturalmente, si una superficie compacta conexa tiene puntos hiperbólicos, como los tiene seguro elípticos y la curvatura de Gauss es continua, también tiene puntos parabólicos. Si la superficie no es compacta, puede que tenga solamente puntos parabólicos (cilindro circular, 9.4(3), p. 118) o solamente puntos hiperbólicos (el paraboloides hiperbólico y el helicoides, 9.4(4) y (5), p. 118). Para completar la casuística veamos dos ejemplos más.

Ejemplos 10.6. (1) Una superficie compacta con puntos parabólicos y sin puntos hiperbólicos. Consideremos la superficie de nivel $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 1$, que se parece mucho a la esfera unidad (y de hecho es difeomorfa a ella). Una aplicación de Gauss se obtiene del gradiente de la ecuación:



$$N(x, y, z) = \frac{(x^3, y^3, z^3)}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}.$$

Como aplicación definida en \mathbb{R}^3 esta aplicación tiene la siguiente matriz jacobiana en $p = (x, y, z)$:

$$\frac{1}{(x^6 + y^6 + z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6 + z^6) & -3x^3y^5 & -3x^3z^5 \\ -3x^5y^3 & 3y^2(x^6 + z^6) & -3y^3z^5 \\ -3x^5z^3 & -3y^5z^3 & 3z^2(x^6 + y^6) \end{pmatrix}.$$

Así, la aplicación de Weingarten es la restricción a $T_p S$ de la aplicación lineal definida por la matriz jacobiana anterior. Para calcular una matriz de esa restricción, elegimos en $T_p S$ la base formada por los vectores $\omega = (-z^3, 0, x^3)$, $\omega' = (0, -z^3, y^3)$ (a partir de este momento $z \neq 0$). Operando con cuidado se deduce que la matriz de la aplicación de Weingarten con respecto a esa base es

$$L_p = \frac{1}{(x^6 + y^6 + z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6 + z^6) + 3x^6z^2 & -3x^3y^5 + 3x^3y^3z^2 \\ -3x^5y^3 + 3x^3y^3z^2 & 3y^2(x^6 + z^6) + 3y^6z^2 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante

$$K = \frac{9x^2y^2z^2(x^{10} + y^{10} + z^{10} + x^6(y^4 + z^4) + y^6(x^4 + z^4) + z^6(x^4 + y^4))}{(x^6 + y^6 + z^6)^3}.$$

Como en S se cumple $y^4 + z^4 = 1 - x^4$, $x^4 + z^4 = 1 - y^4$, $x^4 + y^4 = 1 - z^4$, la expresión anterior se simplifica hasta quedar

$$K = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6 + y^6 + z^6)^2} \geq 0.$$

Esta fórmula vale para $S \setminus \{z = 0\}$, que es un subconjunto denso de K , luego por continuidad vale en toda la superficie.

Así resulta que esta superficie no tiene puntos hiperbólicos. Pero sí parabólicos: forman los tres *falsos meridianos* (pues no es una superficie de revolución)

$$S \cap \{x = 0\}, \quad S \cap \{y = 0\}, \quad S \cap \{z = 0\}.$$

(2) Una superficie no compacta con puntos parabólicos y puntos hiperbólicos. Se trata del falso paraboloides hiperbólico S de ecuación $z = -x^4 + y^4$. Con esta imitación se procede como con el paraboloides hiperbólico auténtico (9.4(4), p. 118), y se obtiene la curvatura de Gauss siguiente:

$$K = \frac{-144x^2y^2}{(16x^6 + 16y^6 + 1)^2} \leq 0.$$

Vemos que todos los puntos de S son hiperbólicos, excepto las dos curvas planas $S \cap \{x = 0\}$ y $S \cap \{y = 0\}$, cuyos puntos son puntos parabólicos de S . ■

Terminamos la lección con un ejemplo singular de gran importancia teórica.

(10.7) La pseudoesfera. Existe una superficie no compacta con curvatura constante -1 (luego todos los puntos son hiperbólicos): la *pseudoesfera* (prob. 8, lecc. 3, p. 41). Es la superficie de revolución S que se obtiene a partir de la *tractriz*. Recordemos que una parametrización de esta curva es:

$$u \mapsto (\sin u, \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u).$$

En lo que sigue tomaremos sólo la parte superior de la tractriz, es decir consideramos la parametrización anterior definida en el intervalo $I = (\frac{1}{2}\pi, \pi)$, con lo

que la parametrización es regular. Con la notación habitual para las superficies de revolución, S está parametrizada por

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \\ \zeta(u) = \sin u, \quad \xi(u) = \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u, \end{cases}$$

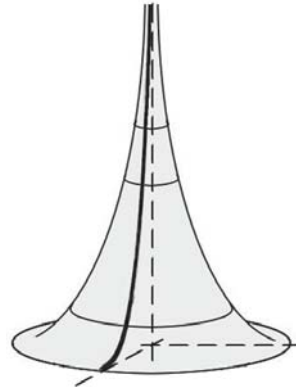
y su curvatura de Gauss es (8.10(2), p. 107):

$$K = \frac{\xi'(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} \zeta = \sin u, \quad \zeta' = \cos u, \quad \zeta'' = -\sin u, \\ \xi' = \frac{\cos^2 u}{\sin u}, \quad \xi'' = \frac{-\cos u(1+\sin^2 u)}{\sin^2 u}, \end{cases}$$

y, sustituyendo en la fórmula de K , obtenemos a la postre que la curvatura K de la pseudoesfera es constante e igual a -1 .



Utilizando en lugar de la tractriz la curva

$$u \mapsto \rho(\sin u, \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u)$$

con $\rho > 0$ se obtiene una superficies de curvatura constante $K = -1/\rho^2 < 0$, que es una *pseudoesfera de curvatura K* . ■

Problemas

Número 1. Se considera la función $h(u, v) = eu^2 + 2fuv + gv^2$ para ciertas constantes $e, f, g \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$, y se escribe $eh(u, v) = (eu + fv)^2 + (eg - f^2)v^2$. Probar que: (i) si $eg - f^2 > 0$, h no cambia de signo en las proximidades del origen, y (ii) si $eg - f^2 < 0$, h cambia de signo arbitrariamente cerca del origen.

Número 2. ¿Es constante la curvatura media de la pseudoesfera? Calcularla.

Número 3. La aplicación $\varphi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2),$$

es una parametrización de una parte de la *superficie de Enneper* (ver prob.6, lecc.7, p.96). Hallar las curvaturas principales en los puntos cubiertos por esta parametrización y probar que las curvas coordenadas son líneas de curvatura.

El teorema egregio de Gauss

Esta lección está dedicada a un teorema central de la teoría de superficies, como tantas otras cosas debido a Gauss: su *teorema egregio*. Ese teorema establece que *la curvatura de Gauss de una superficie es una propiedad intrínseca de la misma*. Para entender esta afirmación, aceptemos que la operación intrínseca por excelencia es la medición de longitudes de curvas de la superficie: según una imagen muy usada, unos hipotéticos habitantes de la superficie que no tengan noción del espacio exterior podrían medir esas longitudes. Consecuentemente, calificamos de intrínseco todo aquello que sólo dependa de esas longitudes. Ahora bien, y ya más rigurosamente, el conocimiento de las longitudes de las curvas de la superficie es equivalente al conocimiento de la primera forma fundamental (5.8, p.62), de manera que *intrínseco será aquello que se pueda calcular en función exclusivamente de la primera forma fundamental*. En estos términos, que la curvatura de Gauss sea intrínseca no se corresponde bien con su definición misma, que involucra la variación de la normal a la superficie en el espacio afín que la contiene; es un resultado, como mínimo, inesperado.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, con aplicación de Gauss N .

(11.1) Triedro de Gauss y símbolos de Christoffel. Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de un abierto W de S . Es claro que $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , que denominamos *triedro de Gauss*. Es la contrapartida, para superficies, del triedro de Frenet de las curvas alabeadas.

La base $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$ es positiva si y sólo si φ es compatible con la orientación, es decir, si

$$N(p) = \frac{\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}}{\|\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}\|}.$$

En ese caso diremos que el triedro de Gauss es *positivo*. Es una forma de decir que la aplicación de Gauss se obtiene mediante el producto vectorial de φ_u y φ_v .

Cualquier vector de \mathbb{R}^3 se puede escribir mediante el triedro de Gauss, y

hacemos esto en particular con las derivadas segundas de la parametrización:

$$(Ch) \begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_{11} N, \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_{12} N, \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_{21} N, \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_{22} N. \end{cases}$$

Los coeficientes Γ_{ij}^k se llaman *símbolos de Christoffel*. Como $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$, se tiene que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \quad L_{12} = L_{21}. \quad \blacksquare$$

Los términos L_{ij} son fáciles de calcular: multiplicando todas las ecuaciones por N , que es ortogonal a φ_u y φ_v , obtenemos

$$L_{11} = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = e, \quad L_{12} = L_{21} = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = f, \quad L_{22} = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = g.$$

(7.8(3), p. 94); en lo sucesivo ya no escribiremos más L_{ij} , sino el valor e, f o g que corresponda. Vemos que los L_{ij} no son más que la segunda forma fundamental, y la definición hacía prever que efectivamente dependieran de ésta. Contrariamente, los símbolos de Christoffel sólo dependen de la primera forma fundamental. Para justificar esta afirmación hacen falta algunos cálculos.

(11.2) Cálculo de los símbolos de Christoffel. Vamos a resolver el sistema (Ch) del párrafo anterior, considerando los símbolos de Christoffel como incógnitas. Para ello se derivan sucesivamente respecto de u y respecto de v los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

y se utilizan las ecuaciones (Ch) para hacer aparecer los Γ_{ij}^k . Por ejemplo, derivando respecto de u el coeficiente E resulta:

$$E_u = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = 2\langle \varphi_u, \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN \rangle = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2.$$

Al final se obtiene el sistema lineal siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_u = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle & = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2, \\ E_v = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle & = 2E\Gamma_{12}^1 + 2F\Gamma_{12}^2, \\ F_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle & = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 + E\Gamma_{21}^1 + F\Gamma_{21}^2, \\ F_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle & = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ G_u = 2\langle \varphi_v, \varphi_{vu} \rangle & = 2F\Gamma_{21}^1 + 2G\Gamma_{21}^2, \\ G_v = 2\langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle & = 2F\Gamma_{22}^1 + 2G\Gamma_{22}^2. \end{array} \right.$$

Las *incógnitas* Γ_{ij}^k están ordenadas teniendo en cuenta las simetrías $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, de modo que en realidad hay seis incógnitas en las seis ecuaciones. La solución es única, y se obtiene operando así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}E_u = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \\ F_u - \frac{1}{2}E_v = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}E_v = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \\ \frac{1}{2}G_u = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F_v - \frac{1}{2}G_u = E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ \frac{1}{2}G_v = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2. \end{array} \right.$$

Observamos que cada uno de estos tres sistemas lineales tiene por matriz la matriz de la primera forma fundamental, que tiene determinante $EG - F^2 > 0$. En consecuencia, los tres sistemas tienen solución única, como anunciamos. Esas soluciones expresan los símbolos de Christoffel en función de los coeficientes E, F, G , y de sus derivadas, como habíamos anunciado. ■

El hecho que acabamos de poner de manifiesto es clave, pues significa que los símbolos de Christoffel son de naturaleza intrínseca. Pero conviene remarcar que por aparecer derivadas, esa naturaleza intrínseca no depende de conocer la primera forma fundamental en el punto, sino *en todo un entorno suyo*. Este matiz es muy importante: se depende de la primera forma fundamental *localmente*, no *puntualmente*.

Antes de revelar el papel que los símbolos de Christoffel juegan en el cálculo de la curvatura de Gauss, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 11.3. (1) En un plano afín, $E, G \equiv 1$ y $F \equiv 0$ (con la identidad por parametrización). Por tanto los tres sistemas de 11.2, p. 147, se reducen a

$$0 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2, \quad 0 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2, \quad 0 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2,$$

es decir, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos.

(2) Para la parametrización del cilindro considerada en 5.4, p.60, tenemos $E, G \equiv 1$, $F \equiv 0$, como para el plano. Así que los símbolos de Christoffel son también nulos.

(3) Consideramos la parametrización de la esfera por la latitud y la longitud:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

Según 5.5, p.60, $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G \equiv \cos^2 u$. Los sistemas para los símbolos de Christoffel son en consecuencia:

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_{11}^1, & 0 = \cos^2 u \Gamma_{11}^2, \\ 0 = \Gamma_{12}^1, & -\sin u \cos u = \cos^2 u \Gamma_{12}^2, \\ \sin u \cos u = \Gamma_{22}^1, & 0 = \cos^2 u \Gamma_{22}^2, \end{cases}$$

de modo que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = -\tan u, \quad \Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u.$$

(4) El helicoides $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$. Según 5.7, p.62, $E = v^2 + b^2$, $F \equiv 0$ y $G \equiv 1$. Resulta que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{11}^2 = -v, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{v}{v^2 + b^2}.$$

(5) Para una superficie de revolución parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

con $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$, tenemos $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G = \zeta^2$ (5.6, p.61), y se deduce fácilmente que los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'. \quad \blacksquare$$

Abordemos ya el hecho de que la curvatura de Gauss es un concepto de naturaleza intrínseca, en el sentido que hemos ido estableciendo previamente. Se trata de demostrar el teorema egregio de Gauss:

Teorema 11.4. *La curvatura de Gauss se expresa mediante la fórmula*

$$K = \frac{1}{E}(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u).$$

En particular, K sólo depende de la primera forma fundamental.

Demostración. Vamos a usar la identidad $\varphi_{uvv} = \varphi_{vvu}$, previo el cálculo de cada uno de sus miembros. Utilizaremos las igualdades de (Ch) y las ecuaciones de Weingarten (10.1, p. 132), que recordamos aquí para facilitar la lectura:

$$\begin{cases} N_u = a\varphi_u + b\varphi_v, & N_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \\ a = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & b = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad c = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad d = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Empezamos por φ_{uvv} . Teniendo en cuenta el valor de φ_{uu} en (Ch) queda:

$$\begin{aligned} \varphi_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN)_v \\ &= \Gamma_{11}^1 \varphi_{uv} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + e_v N. \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta expresión las igualdades adecuadas de (Ch) y el valor de N_v , resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{uvv} &= \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN) + e(c\varphi_u + d\varphi_v) \\ &\quad + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + e_v N \\ &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v) \varphi_u + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v) \varphi_v \\ &\quad + (\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v) N. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \varphi_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN)_u = \dots \\ &= (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u) \varphi_u + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u) \varphi_v \\ &\quad + (\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u) N. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas estas expresiones mediante el triedro de Gauss $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$, como el triedro es una base, la igualdad $\varphi_{uvv} = \varphi_{uvu}$ de las derivadas cruzadas implica que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u, \\ \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u, \\ \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u. \end{cases}$$

Recíprocamente, estas igualdades implican, *sin apelar a que el triedro de Gauss sea una base*, que $\varphi_{uvv} = \varphi_{uvu}$. Dicho esto, de la segunda igualdad deducimos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u = fb - ed.$$

Casi mágicamente, el primer miembro de esta igualdad es el largo numerador del enunciado del teorema egregio, así que bastará ver que el segundo miembro es EK (recuérdese que $E > 0$). Pero por las ecuaciones de Weingarten:

$$fb - ed = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} = E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK$$

(la última igualdad por la expresión local de la fórmula de Gauss, 10.2(i), p. 132). Hemos terminado. ■

El teorema egregio tiene implicaciones profundas, de la que tal vez la más popular es el hecho de que no pueden trazarse mapas fiables de la tierra, es decir, mapas que permitan medir exactamente las distancias. Esta afirmación vale para mapas de cualquier porción de la Tierra, y no sólo para mapamundis. El hecho lo descubrió Gauss, como consecuencia de su teorema egregio, y lo formalizamos a continuación antes de entrar en la exploración más sistemática de su significado.

(11.5) Mapas de la Tierra. Consideramos que la Tierra es una esfera S de cierto radio r , y entendemos por *mapa* cualquier parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de un abierto W de S . Decir que en el mapa se puedan medir distancias con exactitud es decir que la longitud de una curva $\alpha : I \rightarrow S$ es proporcional a la de su correspondiente curva plana del mapa, $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$, con una escala de proporcionalidad $\rho > 0$ fija.

Supongamos por reducción al absurdo que existe tal φ . Fijamos un punto cualquiera $p = \varphi(q) \in W$, $q \in U$. Para $w \in \mathbb{R}^2$ dado, consideramos las curvas $\beta(s) = q + sw$ y $\alpha(s) = \varphi(q + sw)$, ambas definidas para $|s|$ suficientemente pequeño. Por la hipótesis sobre las distancias resulta

$$L_0^t(\alpha) = \rho L_0^t(\beta) = \rho \int_0^t \|\beta'(s)\| ds = \rho \|w\| t,$$

y por 5.8(3), p. 63,

$$\mathbf{I}_p(\alpha'(0)) = \left(\frac{d}{dt} L_0^t(\alpha) \Big|_{t=0} \right)^2 = \rho^2 \|w\|^2.$$

Ahora bien, $\alpha'(0) = d_p \varphi(w)$, luego para $w = (1, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$ obtenemos $\alpha'(0) = \varphi_u, \varphi_v$ y $\varphi_u + \varphi_v$, con lo que

$$\begin{cases} E_p = \mathbf{I}_p(\varphi_u) = \rho^2 \|(1, 0)\|^2 = \rho^2, & G_p = \mathbf{I}_p(\varphi_v) = \rho^2 \|(0, 1)\|^2 = \rho^2, \\ F_p = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_p(\varphi_u + \varphi_v) - \mathbf{I}_p(\varphi_u) - \mathbf{I}_p(\varphi_v)) = \frac{1}{2} \rho^2 (\|(1, 1)\|^2 - \|(1, 0)\|^2 - \|(0, 1)\|^2) = 0. \end{cases}$$

Como esto vale para cualquier $p \in W$, concluimos que $E, G \equiv \rho^2$ y $F \equiv 0$, de donde, por las fórmulas 11.2, p.146, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos en W , y por tanto $K \equiv 0$ en W por el teorema egregio. Pero la curvatura de una esfera no es nunca nula, pues $K \equiv 1/r^2$ (9.4(2), p.117), así que hemos llegado a una contradicción.

Concluimos que ciertamente no puede existir ningún mapa de la Tierra que conserve las distancias. O, en la práctica, que al medir distancias sobre un plano siempre hay un margen de error. ■

Para explorar las ideas que el ejemplo precedente pone en juego, y, en general, para tratar de manera organizada las cuestiones intrínsecas, se introduce el concepto de *isometría de superficies*. El epíteto isometría significa literalmente que se conservan las longitudes de curvas, pero la definición se hace en términos del producto escalar:

Definición 11.6. Un difeomorfismo $h : S \rightarrow S'$ entre dos superficies se llama *isometría* si para todo $p \in S$ y para todo par de vectores $\omega, \omega' \in T_p S$ se tiene $\langle d_p h(\omega), d_p h(\omega') \rangle = \langle \omega, \omega' \rangle$.

Si existe tal h , las superficies se denominan *isométricas*.

Recordemos ahora que el producto escalar determina y es determinado por la primera forma fundamental (p.57), y que el conocimiento de ésta última equivale al de las longitudes de las curvas de la superficie (lo acabamos de utilizar). Por tanto las dos condiciones siguientes son equivalentes a que $h : S \rightarrow S'$ sea una isometría:

$$(1) \mathbf{I}_{h(p)}(d_p h(\omega)) = \mathbf{I}_p(\omega) \text{ para cualesquiera } \omega \in T_p S \text{ y } p \in S.$$

$$(2) L_{t_0}^t(\alpha) = L_{t_0}^t(h \circ \alpha) \text{ para toda curva } \alpha \text{ de } S.$$

En especial destacamos que, según los comentarios iniciales, *las propiedades intrínsecas de las superficies se conservan por isometrías*. Analicemos esto explícitamente.

(11.7) Conservación de la primera forma fundamental. Sean S y S' dos superficies orientadas de \mathbb{R}^3 , y consideremos dos puntos $p \in S$, $p' \in S'$.

(1) Supongamos que los dos puntos tienen entornos isométricos, es decir, tienen dos entornos $W \subset S$ y $W' \subset S'$, entre los que existe una isometría $h : W \rightarrow W'$. Podemos suponer dada una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ del entorno

W de p , y entonces $\psi = h \circ \varphi : U \rightarrow W'$ es una parametrización de W' . De esta manera las coordenadas (u, v) de un punto de $(x, y, z) \in W$ son las mismas que tiene su imagen $h(x, y, z) \in W'$, y se cumple

$$d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) = \psi_u, \quad d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) = \psi_v.$$

Calculemos los coeficientes E, F, G y E', F', G' de las primeras formas fundamentales de S y de S' en las coordenadas (u, v) , teniendo en cuenta que h es isometría:

$$\begin{cases} E' = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E, \\ F' = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = F, \\ G' = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_v), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = G. \end{cases}$$

Esta es la forma explícita en que se presenta la conservación de la primera forma fundamental: para un punto de W y su imagen en W' coinciden todos cálculos que involucren los coeficientes de la primera forma fundamental en entorno de los puntos.

Es esencial que se tenga coincidencia en entornos y no sólo en los puntos. Ciertamente, en los cálculos importantes (símbolos de Christoffel, curvatura de Gauss) intervienen no sólo los coeficientes de la primera forma fundamental, sino también sus derivadas sucesivas: éstas coincidirán *en un punto* si los coeficientes coinciden *en un entorno*.

(2) El argumento anterior es en realidad una equivalencia. Supongamos dadas dos parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow W$, $\psi : U \rightarrow W'$ de entornos W de p en S y W' de p' en S' , definidas en un mismo abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Si los coeficientes de las primeras formas fundamentales de las dos variedades coinciden en U , entonces $h = \psi \circ \varphi^{-1} : W \rightarrow W'$ es una isometría.

En efecto, por hipótesis, en esas coordenadas las matrices Q y Q' de las primeras formas fundamentales \mathbf{I} y \mathbf{I}' coinciden (calculadas en (x, y, z) y $h(x, y, z)$ respectivamente). Ahora, para $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \in T_{(x,y,z)}S$, tenemos

$$d_{(x,y,z)}h(\omega) = \lambda\psi_u + \mu\psi_v,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{I}(\omega) = (\lambda, \mu)Q \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(d_{(x,y,z)}h(\omega)) = (\lambda, \mu)Q' \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como $Q = Q'$, concluimos que h es una isometría.

(3) En particular, una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ es una isometría entre el abierto U del plano y el abierto W de S si y sólo si los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de φ son $E, G \equiv 1$, $F \equiv 0$. ■

El problema global de si dos superficies S y S' son isométricas es un asunto muy delicado. Por supuesto, si no son homeomorfas ni difeomorfas, no pueden ser isométricas. Es el caso de una esfera y el plano, o de una esfera y un cilindro, o de un cilindro circular y el plano: la compacidad distingue la esfera, la contractibilidad distingue al cilindro circular del plano (véase también el prob. 8 de esta lección). Pero por otra parte tenemos las consideraciones anteriores, que en realidad discuten si S y S' son *localmente isométricas*. Obsérvese que dos superficies cualesquiera son siempre localmente difeomorfas, luego estamos utilizando un criterio más riguroso para distinguirlas. Por ejemplo, el hecho de que no haya mapas fiables se traduce en que una esfera y el plano no son localmente isométricos en ningún punto. En cambio, el cilindro circular y el plano lo son en todos sus puntos (por 5.4, p. 60).

Para terminar la lección, vamos a presentar la variante de la noción de isometría que está detrás del concepto de mapa fiable como hemos explicado en 11.5, p. 150. Desde aquel punto de vista, las isometrías son demasiado exigentes, y se introduce la siguiente:

Definición 11.8. Sea $\rho > 0$ un número real positivo. Un difeomorfismo $h : S \rightarrow S'$ entre dos superficies se llama *semejanza de escala ρ* si para todo $p \in S$ y para todo par de vectores $\omega, \omega' \in T_p S$ se tiene $\langle d_p h(\omega), d_p h(\omega') \rangle = \rho^2 \langle \omega, \omega' \rangle$.

Si existe tal h , las superficies se denominan *semejantes*.

No entraremos en detalles, pero es fácil ver que esto equivale a que h multiplica las longitudes de las curvas por la escala ρ , como queríamos para los mapas. También tenemos la correspondiente noción de semejanza local, que no formalizamos. Ahora es claro que la imposibilidad de mapas fiables significa que en ningún punto es una esfera localmente semejante al plano.

Ilustramos las propiedades de las semejanzas con un resultado sencillo (del que ya hemos visto un ejemplo en 10.7, p. 139):

Proposición 11.9. Sea $h : S \rightarrow S'$ una semejanza de escala ρ . Entonces las curvaturas de Gauss K y K' de las superficies cumplen

$$K'(h(p)) = K(p)/\rho^2 \quad \text{para todo } p \in S.$$

Demostración. Que h sea una semejanza de escala ρ implica que

$$\mathbf{I}_{h(p)}(d_p h(\omega)) = \rho^2 \mathbf{I}_p(\omega)$$

para $\omega \in T_p S$ y $p \in S$. Localizando h como en 11.7(1), p.151, el resultado ahora es que los coeficientes de la primera forma fundamental de S' se obtienen multiplicando por ρ^2 los de S . Esto no afecta a los sistemas 11.2, p.147, que proporcionan los símbolos de Christoffel, que en consecuencia son exactamente iguales para las dos superficies. Así que al aplicar la fórmula del teorema egregio para calcular K y K' , tenemos el mismo numerador y denominadores E y $E' = \rho^2 E$ respectivamente. Concluimos que $K' = K/\rho^2$. ■

Digamos para terminar que en realidad las semejanzas no son muy diferentes de las isometrías, y su estudio se puede referir al de éstas (prob. 10 de esta lección).

Problemas

Número 1. Comprobar que los símbolos de Christoffel de una superficie topográfica $z = f(x, y)$ para su parametrización de Monge son

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xx}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xx}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xy}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{yy}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xy}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{yy}. \end{cases}$$

donde $\delta = 1 + \|\nabla f\|^2$.

Número 2. Sean S_1 y S_2 superficies y $h : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable. Se dice que h es una *isometría local* si para todo punto $p \in S_1$ existen un entorno abierto U de p en S_1 y un entorno abierto V de $h(p)$ en S_2 tales que $h|U : U \rightarrow V$ es una isometría. Probar que h es una isometría local si y sólo si conserva la longitud de los vectores tangentes de las curvas $\alpha : I \rightarrow S_1$ o, equivalentemente, si y sólo si conserva las longitudes de tales curvas.

Número 3. La noción anterior puede ser generalizada del siguiente modo: se dice que S_1 es *localmente isométrica* a S_2 si todo punto $p \in S_1$ tiene un entorno abierto U en S_1 isométrico a un abierto de S_2 . Encontrar dos superficies S_1 y S_2 tales que S_1 sea localmente isométrica a S_2 pero S_2 no sea localmente isométrica a S_1 .

Número 4. Mostrar que la parametrización $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ del cilindro $S : x^2 + y^2 = 1$ es una isometría local cuyo efecto es envolver el plano alrededor del cilindro de modo que las líneas horizontales van a las secciones circulares del cilindro y las verticales se transforman en las generatrices del mismo.

Número 5. Sean p y q dos puntos de una superficie conexa S y consideremos la colección de todas las curvas $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Se llama *distancia intrínseca* de p a

Geodésicas (I)

Esta es una lección sobre ciertas curvas de las superficies, las *geodésicas*, que juegan un papel análogo al de las rectas en el plano. La analogía se refiere a diversos aspectos, unos de naturaleza cinemática, otros más geométricos.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable.

Desde un punto de vista cinemático, una recta del plano, recorrida con velocidad constante, puede ser vista como una curva plana regular $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con aceleración β'' idénticamente nula. Podríamos sentirnos tentados de extender esta definición, sin cambios, a las superficies y adoptarla como definición de geodésica. Ahora bien, una curva regular $\beta : \mathbb{R} \rightarrow S$ en una superficie cualquiera S tal que $\beta'' \equiv 0$ es también una recta (de \mathbb{R}^3), por lo que, si adoptásemos esta definición, las geodésicas serían simplemente las rectas contenidas en la superficie. Sin embargo, para un hipotético ser bidimensional que habitase en la superficie, una trayectoria α descrita por un punto material sería percibida como una recta si cumpliera la condición más débil de ser idénticamente nula la componente de α'' que ese ser puede percibir, que es la tangencial. Esta condición equivale a que α'' sea ortogonal al plano tangente, esto es, coincida con su componente normal, que es la responsable de mantener el punto en la superficie. Esta es una motivación para la definición habitual de geodésica, que damos a continuación.

Definición 15.1. Una *geodésica* de la superficie S es una curva regular $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha''(t)$ es perpendicular a $T_p S$ para todo $p = \alpha(t)$.

La primera proposición nos dice que si una curva es geodésica entonces el módulo de su velocidad es constante.

Proposición 15.2. Si α es una geodésica de S entonces $\|\alpha'(t)\| \equiv c$ para cierta constante $c > 0$.

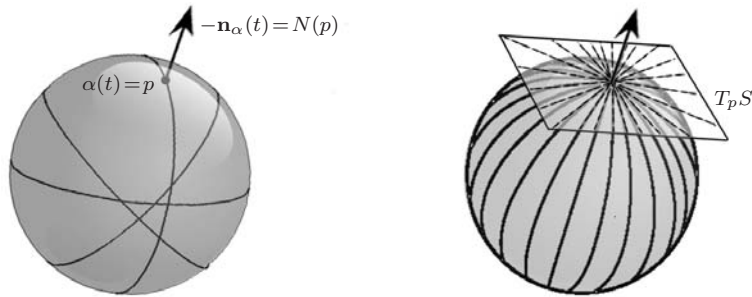
Demostración. La derivada de $\|\alpha'(t)\|^2$ es $2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0$, ya que $\alpha''(t)$ es perpendicular a $T_{\alpha(t)} S$. En consecuencia la función $\|\alpha'(t)\|^2$ es constante, y por tanto también lo es $\|\alpha'(t)\|$. ■

A la vista de este resultado, haciendo el cambio de parámetro $s = ct$ se consigue que α esté parametrizada por la longitud del arco. Nótese que las geodésicas tienen su vector normal proporcional al de la superficie, propiedad que es característica para las curvas parametrizadas por la longitud del arco. Teniendo todo esto en cuenta, *una curva no parametrizada por el arco se considera geodésica si reparametrizada por el arco lo es.*

Ejemplos 15.3. (1) Si $\alpha : I \rightarrow S$ tiene una ecuación $\alpha(t) = c + at$, es decir, si es una recta en la superficie, entonces su segunda derivada es idénticamente nula y la curva es una geodésica. Si S es un plano afín, entonces no hay más geodésicas que las rectas.

En efecto, un plano afín tendrá una ecuación $ax + by + cz = d$, y (a, b, c) es un vector ortogonal a S en todos sus puntos. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva del plano, se cumple $ax(t) + by(t) + cz(t) = d$, y derivando $ax''(t) + by''(t) + cz''(t) = 0$. Pero si la curva es una geodésica, el vector $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$ debe ser ortogonal al plano, luego proporcional a (a, b, c) , digamos $\alpha''(t) = \rho(t)(a, b, c)$. Sustituyendo en la igualdad anterior deducimos que $\rho(t)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$, luego $\rho \equiv 0$ y $\alpha'' \equiv 0$. En consecuencia, $\alpha' \equiv \omega$ para cierto vector $\omega \in \mathbb{R}^3$, y $\alpha(t) = p + \omega t$ para un punto $p \in \mathbb{R}^3$. Es decir, α es una recta.

(2) Cualquier círculo máximo $\alpha : I \rightarrow S$ de una esfera S es una geodésica, pues su vector normal $\mathbf{n}_\alpha(t)$ en $p = \alpha(t)$ es igual u opuesto al normal $N(p)$ de la esfera en ese punto. En particular vemos que por todos los puntos de la esfera pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.



Veamos que no hay otras geodésicas. Denotamos q el centro de S y r su radio. Sea $\alpha(s)$ una geodésica parametrizada por el arco. Por ser α geodésica, α'' es ortogonal a la esfera, es decir, proporcional a $\alpha - q$, digamos $\alpha'' = \rho(\alpha - q)$. Por

tanto el vector normal de la curva es

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\rho(\alpha - q)}{\|\rho(\alpha - q)\|} = \pm \frac{1}{r}(\alpha - q),$$

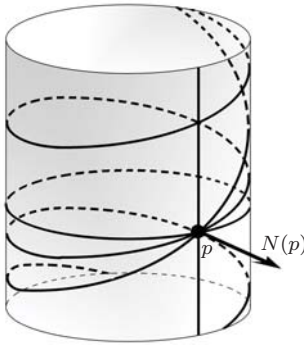
y su derivada

$$\mathbf{n}'_\alpha = \pm \frac{1}{r}\alpha' = \pm \frac{1}{r}\mathbf{t}_\alpha.$$

De la tercera fórmula de Frenet se sigue que α tiene torsión nula, luego es plana, y su curvatura es constante $1/r$. Concluimos que es una circunferencia de radio r , y como está contenida en S , tiene que ser uno de sus círculos máximos.

(3) Consideremos el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. Recordemos que en un punto $p = (x, y, z) \in S$, un vector normal es $N(p) = (x, y, 0)$. Es claro que las rectas verticales son geodésicas, y también que lo son las circunferencias $S \cap \{z = z_0\}$.

Más interesante es señalar que las hélices



$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \sin(c + at), d + bt),$$

(con $a, b \neq 0$), son geodésicas, pues

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (-a^2 \cos(c + at), -a^2 \sin(c + at), 0) \\ &= -a^2(x, y, 0). \end{aligned}$$

Fijemos el punto $p = \alpha(0) = (\cos c, \sin c, d)$. Por ese punto pasan: (i) una recta vertical con tangente $(0, 0, 1)$, (ii) una circunferencia $z = d$ con tangente $(-y, x, 0)$, y (iii) todas las hélices anteriores con tangente $(-ay, ax, b)$. Hemos enumerado así todas las direcciones tangentes al cilindro en p , y podemos concluir que por p pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.

(4) Sea S el paraboloides hiperbólico $z = -x^2 + y^2$. Vamos a enumerar algunas geodésicas de S y algunas curvas que no pueden serlo. El plano tangente a S en el origen (que es un punto de S) es $z = 0$, y su intersección con S es el par de rectas $x = \pm y$, que serán dos geodésicas. Afirmamos que otras dos geodésicas son las parábolas $z + x^2 = y = 0$ y $z - y^2 = x = 0$. Como los cálculos son completamente análogos, los detallamos para la segunda.

La parametrización más sencilla de $z - y^2 = x = 0$ es $\gamma(t) = (0, t, t^2)$, pero no es una parametrización por el arco. Así pues, será $\alpha(s) = \gamma(t)$ con un cambio de parámetro $t = t(s)$. Vamos a calcular $\alpha''(s)$ sin explicitar ese cambio de

parámetro. Entonces,

$$\alpha'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(0, 1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}},$$

y podemos derivar

$$\alpha''(s) = t' \frac{d}{dt} \frac{(0, 1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}} = t' \frac{(0, -4t, 2)}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Ahora bien, un vector ortogonal a S en $p = (x, y, z)$ es $N(p) = (2x, -2y, 1)$ (no hace falta un vector unitario para estudiar ortogonalidades), luego como para nuestro p es $x = 0, y = t$, el vector $\alpha''(s)$ es proporcional a $N(p)$ y hemos terminado.

(5) El helicoides $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado por $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$, contiene las rectas perpendiculares al eje vertical que pasan por el punto (x, y, z) , y por tanto esas rectas son geodésicas. El helicoides también contiene las hélices $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, pero estas curvas *no son geodésicas*. Como $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ tiene norma constante ($\|\alpha'\| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$) no hace falta reparametrizar, y tenemos

$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Este vector es tangente al helicoides, luego la hélice no es geodésica. ■

Volvamos a nuestra superficie S , con aplicación de Gauss N .

(15.4) Curvatura geodésica. Sea $\alpha(s)$ una curva de S , parametrizada por la longitud del arco. Consideremos un punto $p = \alpha(s) \in S$.

(1) El vector unitario $\alpha'(s)$ es tangente a la superficie en p , y también lo es el vector unitario $N(p) \wedge \alpha'(s)$. Este último vector es además ortogonal a la curva en p , se denomina *vector normal intrínseco* de α en p , y se denota $\mathbf{n}_i(s)$.

Así tenemos los tres vectores $\alpha'(s), \mathbf{n}_i(s)$ y $N(p)$, que por construcción son una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 . Por ello,

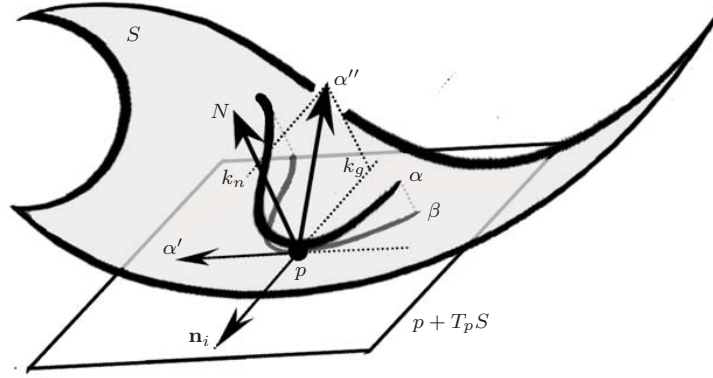
$$\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle \alpha'(s) + \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle \mathbf{n}_i(s) + \langle \alpha''(s), N(p) \rangle N(p).$$

De estos coeficientes sabemos que el primero es 0, por ser s el arco, y el último es la curvatura normal de S según la dirección de α en p . Escribiremos

$$\alpha''(s) = k_g(s) \mathbf{n}_i(s) + k_n(s) N(p)$$

y denominaremos al coeficiente $k_g(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle$ *curvatura geodésica de α en p* .

El vector $k_n(s)N(p)$ es la proyección ortogonal sobre la normal en p , y el vector $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$ es la proyección ortogonal de $\alpha''(s)$ sobre el plano $T_p S$ tangente en p .



(2) Sea ahora β la curva plana obtenida proyectando α sobre el plano afín tangente $p + T_p S$. Como la proyección ortogonal de punto $q \in \mathbb{R}^3$ sobre $p + T_p S$ es

$$\pi_p(q) = q - \langle q - p, N(p) \rangle N(p),$$

la curva plana en cuestión es $\beta = \pi_p \circ \alpha$. De la fórmula de anterior para π_p se deduce que

$$\beta''(s) = \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), N(p) \rangle N(p) = \alpha''(s) - k_n(s)N(p) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s),$$

y en consecuencia, $k_g(s)$ es la curvatura de β en p (para la orientación adecuada).

(3) Puesto que $\mathbf{n}_i(s)$ y $N(p)$ son ortogonales unitarios, la curvatura de α se expresa muy sencillamente:

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{k_g^2(s) + k_n^2(s)}.$$

Insistiendo sobre la interpretación de los conceptos anteriores, analicemos qué dos sumandos aparecen en

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(p).$$

El primero puede ser entendido como la parte del vector curvatura $\alpha''(s)$ que se puede percibir en la superficie, pues yace en el plano tangente a ella. Se entiende que, desde el punto de vista de la superficie, la componente normal de $\alpha''(s)$ no aporta ninguna contribución a la curvatura, pues su función es mantener la curva en S . De este modo, tan sólo la curvatura geodésica se entendería como una verdadera curvatura *en la superficie*.

Si una curva regular no está parametrizada por la longitud del arco, definimos su curvatura geodésica como la de su reparametrización por la longitud del arco *mediante un cambio de parámetro positivo*. Es fácil ver que esta definición es consistente. También es fácil ver que si el cambio es negativo, la curvatura geodésica cambia de signo. Se tiene la siguiente caracterización de las geodésicas.

Proposición 15.5. *Una curva regular α es una geodésica si y sólo cumple una de las dos condiciones equivalentes siguientes:*

- (i) *La curvatura geodésica de α es idénticamente nula.*
- (ii) *La curvatura de α es igual al valor absoluto de su curvatura normal en la superficie.*

Demostración. Una curva es geodésica si y sólo si lo es al reparametrizarla por el arco, y las dos condiciones del enunciado no dependen de la parametrización. Por tanto, podemos suponer que α está parametrizada por el arco, y tenemos

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(\alpha(s)) \quad (15.4(1), \text{ p. 208}).$$

Decir que α es una geodésica equivale a que la componente tangencial $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$ se anule para todo s , o sea, que la curvatura geodésica $k_g(s)$ sea idénticamente nula. Esta es la condición (i), que equivale a la (ii) porque $\kappa_\alpha^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s)$ (15.4(3), p. 209). ■

Ejemplo 15.6. Sea S una superficie de revolución. En 8.10(1), p. 106, se probó que la curvatura normal de un meridiano coincide con su curvatura, luego es una geodésica. En cuanto a los paralelos (*loc. cit.*), curvatura y curvatura normal coinciden si y sólo si corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical: es pues en ese caso exactamente cuando los paralelos son geodésicas. ■

A continuación encontramos una fórmula fácilmente calculable de la curvatura geodésica, válida para el caso general en que la curva no se suponga parametrizada por la longitud del arco.

(15.7) Cálculo de la curvatura geodésica. Sea $\gamma(t)$ una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco y $\alpha(s) = \gamma(t)$ una reparametrización por la longitud del arco s , de modo que $t = t(s)$ es un difeomorfismo entre intervalos de la recta que conserva la orientación. Entonces

$$\alpha'(s) = t'(s)\gamma'(t), \quad \alpha''(s) = t'^2\gamma''(t) + t''\gamma'(t).$$

Resulta que

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t).$$

Ahora calculamos la curvatura geodésica de α , que es la de γ :

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(p) \wedge \alpha'(s) \rangle \\ &= \det(\alpha''(s), N(p), \alpha'(s)) = \det(N(p), \alpha'(s), \alpha''(s)) = \\ &= \langle N(p), \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \rangle = \langle N(p), t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle \\ &= t'^3 \langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Como $1 = \|\alpha'(s)\| = t'\|\gamma'(t)\|$, concluimos:

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det(N(p), \gamma'(t), \gamma''(t)),$$

que es la fórmula buscada. ■

La fórmula anterior es extremadamente útil. Lo ilustramos a continuación.

Ejemplos 15.8. (1) Sea $S : x^2 + y^2 = 1$ el cilindro circular. Vamos a calcular la curvatura geodésica de una curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in S$ parametrizada por el arco. En los cálculos que siguen omitimos el parámetro s . Derivando las identidades $x^2 + y^2 = 1$ y $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 = x x' + y y', \\ 0 = x''x' + y''y' + z''z', \end{cases}$$

con incógnitas (x', y', z') . Si $z'' \neq 0$ o $xy'' - yx'' \neq 0$ el sistema tiene rango 2, y solución

$$(x', y', z') = \rho(yz'', -xz'', xy'' - yx'').$$

Como $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, resulta

$$1 = \rho^2(y^2 z''^2 + x^2 z''^2 + (xy'' - yx'')^2) = \rho^2(z''^2 + (xy'' - yx'')^2),$$

con lo que

$$\rho^2 = \frac{1}{z''^2 + (xy'' - yx'')^2} \neq 0$$

(obsérvese que nuestra hipótesis es que el denominador no se anula). Ahora, con el vector normal $N = (x, y, 0)$, queda:

$$\begin{aligned} k_g &= \det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} = \rho \det \begin{pmatrix} x & yz'' & x'' \\ y & -xz'' & y'' \\ 0 & xy'' - yx'' & z'' \end{pmatrix} \\ &= -\rho(z''^2 + (xy'' - yx'')^2) = -1/\rho. \end{aligned}$$

Esta elegante fórmula nos dice en particular que la curvatura geodésica no se anula, recuérdese, si $z'' \neq 0$ o $xy'' - yx'' \neq 0$. Pero si $z'' = xy'' - yx'' = 0$ debe ser $(x'', y'') = \delta(x, y)$ para cierto δ , y

$$k_g = \det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x' & \delta x \\ y & y' & \delta y \\ 0 & z' & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Una vez completados estos cálculos, supongamos que la curva α es una geodésica. Entonces $k_g \equiv 0$, y por la discusión precedente, $z'' \equiv 0$. En consecuencia, existen dos constantes b, d tales que $\alpha(s) = (x(s), y(s), d + bs)$ y por ser s el arco,

$$1 \equiv \|\alpha'\|^2 = x'^2 + y'^2 + b^2.$$

Deducimos que $x'^2 + y'^2 \equiv 1 - b^2 \geq 0$. Si $b^2 = 1$, entonces $x' = y' \equiv 0$, x e y son constantes, y la curva es una recta vertical. Si $b^2 < 1$, entonces $(x(s), y(s))$ es una parametrización de la circunferencia (recuérdese que $x^2 + y^2 = 1$) por un múltiplo del arco. Es pues del tipo $x = \cos(c + at)$, $y = \sin(c + at)$ para ciertas constantes a, c . Concluimos que la curva es (i) una circunferencia del plano $z = d$ si $b = 0$, o (ii) una hélice como en 15.3(3), p. 207, si $b \neq 0$. Hemos demostrado así que las geodésicas descritas en aquél ejemplo son todas las que tiene el cilindro.

(2) Según vimos en 15.3(4), p. 207, dos geodésicas del paraboloides hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$ son las parábolas $z + x^2 = y = 0$ y $z - y^2 = x = 0$. Entonces tuvimos que razonar por intermedio del arco. Usemos en cambio la fórmula anterior, por ejemplo para la segunda parábola. Una parametrización suya es $\gamma(t) = (0, t, t^2)$, que no es por el arco. Tenemos

$$\gamma' = (0, 1, 2t), \quad \gamma'' = (0, 0, 2) \quad \text{y} \quad \gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0).$$

Un vector ortogonal a S es $\vartheta = (2x, -2y, 1)$, y en nuestro caso $x = 0$, luego $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$, y como N es proporcional a ϑ ,

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle N, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$$

Así que γ tiene curvatura geodésica idénticamente nula, y es por tanto una geodésica (cuando se reparametrice por el arco).

Además, ahora vemos fácilmente que $z - y^2 = x = 0$ es la única geodésica de S obtenida intersecando S con un plano $x = c$. En efecto, si $c \neq 0$, se parametriza una tal intersección con $\gamma(t) = (c, t, -c^2 + t^2)$ y se obtiene como en el caso anterior $\gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0)$, pero ahora $\vartheta = (2c, -2y, 1)$, de modo que $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 4c \neq 0$, y por tanto $k_g \neq 0$. Análogamente se ve que ninguna intersección con un plano $y = c \neq 0$ es geodésica. ■

La fórmula de la curvatura geodésica nos va a permitir encontrar una expresión local que revelará su naturaleza intrínseca, en el sentido que damos a este término al establecer el teorema egregio de Gauss.

(15.9) Expresión local de la curvatura geodésica. Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización local de S , compatible con la aplicación de Gauss N , y sea $\gamma(t)$ una curva de W no necesariamente parametrizada por el arco. Vamos a calcular la curvatura geodésica de γ en función de las coordenadas (u, v) de la parametrización dada. La curva γ vendrá expresada en términos de φ como $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, y para aplicar la fórmula del párrafo 15.7, p. 211, hacemos los cálculos siguientes.

Derivando dos veces respecto de t tenemos

$$\begin{aligned}\gamma' &= u' \varphi_u + v' \varphi_v, \\ \gamma'' &= u'' \varphi_u + v'' \varphi_v + u'^2 \varphi_{uu} + 2u'v' \varphi_{uv} + v'^2 \varphi_{vv},\end{aligned}$$

y expresando las segundas derivadas de φ mediante los símbolos de Christoffel (ecuaciones (Ch) de 11.1, p. 146), queda:

$$\begin{aligned}\gamma'' &= u'' \varphi_u + v'' \varphi_v + u'^2 (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN) \\ &\quad + 2u'v' (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN) + v'^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN) \\ &= (u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1) \varphi_u \\ &\quad + (v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2) \varphi_v + (u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g) N.\end{aligned}$$

Para simplificar el desarrollo, escribimos $\gamma'' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$. Entonces, por las bien conocidas propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned}
 k_g &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \det(N, \gamma', \gamma'') \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \det(N, u'\varphi_u + v'\varphi_v, A\varphi_u + B\varphi_v + CN) \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} (\det(N, u'\varphi_u, B\varphi_v) + \det(N, v'\varphi_v, A\varphi_u)) \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} (u'B - v'A) \det(N, \varphi_u, \varphi_v) \\
 &= \frac{\det(N, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\gamma'\|^3} \det \begin{pmatrix} u' & A \\ v' & B \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, como φ es compatible con la orientación,

$$\begin{aligned}
 \det(N, \varphi_u, \varphi_v) &= \langle N, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \varphi_u \wedge \varphi_v \right\rangle \\
 &= \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}
 \end{aligned}$$

(5.2, p. 57), y

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v \rangle = u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G.$$

Juntando todo obtenemos

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G)^{3/2}} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de que la curva está parametrizada por la longitud del arco (esto es, $\|\gamma'\| \equiv 1$), la expresión de la curvatura geodésica se simplifica algo:

$$k_g = \sqrt{EG - F^2} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

■

Como anunciábamos, la fórmula anterior pone de manifiesto que *la curvatura geodésica sólo depende de la primera forma fundamental*, es decir, es un concepto intrínseco. Este resultado se debe a Minding. Se deduce que:

Corolario 15.10. *La curvatura geodésica se conserva por isometrías locales. En particular, las isometrías locales transforman geodésicas en geodésicas.*

Demostración. Sea $h : S \rightarrow S'$ una isometría local: todo punto $p \in S$ tiene un entorno abierto W tal que $W' = h(W)$ es un entorno abierto de $p' = h(p)$ y la restricción $h|_W : W \rightarrow W'$ es una isometría. Fijemos p y sea $\gamma(t)$ una curva que pasa por p . Podemos suponer que tenemos una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ y entonces $\psi = h \circ \varphi : U \rightarrow W'$ es una parametrización de S' con las mismas coordenadas (u, v) . Por ser $h|_W$ isometría, los coeficientes E, F, G de la primera forma de S respecto de φ coinciden en todo U con los coeficientes E', F', G' de S' respecto de ψ , y en consecuencia al usar la fórmula anterior para calcular las curvaturas geodésicas de γ en $\gamma(t)$ y de $h \circ \gamma$ en $h(\gamma(t))$ obtenemos el mismo resultado. ■

Este hecho proporciona una mejor comprensión de la naturaleza de las geodésicas.

Ejemplo 15.11. (1) El cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$ tiene la parametrización global $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, que es una isometría, pues como vimos en 5.4(2), p. 60, los coeficientes E, F, G respecto de φ son constantes iguales a 1, 0, 1 respectivamente. Por tanto, las geodésicas del cilindro se obtienen transformando por φ las rectas afines $u = c + at, v = d + bt$. Obtenemos las curvas

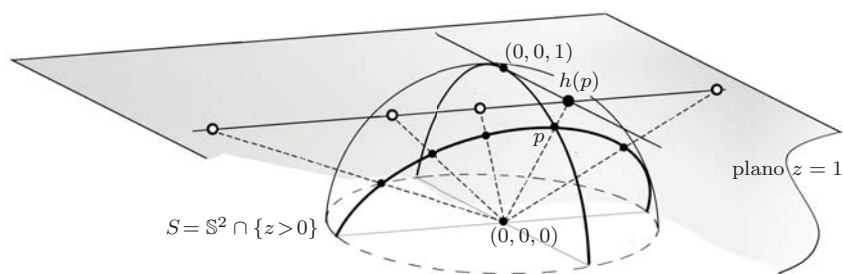
$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \sin(c + at), d + bt).$$

Para $a = 0$ son rectas verticales, para $b = 0$ son circunferencias en $z = d$, y en otro caso son hélices. Naturalmente, la lista coincide con la de 15.3(3), p. 207, y prueba de nuevo (ya lo hicimos en 15.8(1), p. 212) que no hay más.

(2) Las isometrías conservan las geodésicas, pero no es cierto que si un difeomorfismo conserva las geodésicas sea una isometría. Sea S el hemisferio superior de la esfera unidad: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y S' el plano afín $z = 1$, que es tangente a S en el polo norte. La *proyección central*

$$h : S \rightarrow S' : p = (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z, 1)$$

es un difeomorfismo: $h(p)$ es la proyección de p sobre el plano, con centro el origen.



Con esta descripción geométrica es claro que transforma círculos máximos de S en rectas de S' (pues un círculo máximo es la intersección de S con un plano *que pasa por el origen*). Por tanto, h transforma geodésicas en geodésicas. Pero no es una isometría, pues como ya sabemos, no las hay entre abiertos de una esfera y de un plano. ■

Problemas

Número 1. Sea $\alpha(s)$ una curva parametrizada por el arco en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Probar que α es una geodésica plana si y sólo si $\|N'(s)\| = \kappa(s)$ para cada valor del parámetro s .

Número 2. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por la longitud del arco que define un homeomorfismo con su traza (es decir γ es un arco de Jordan). Probar que existe una superficie S tal que γ es una geodésica de S .

Número 3. Sean $p = (x_0, y_0, z_0)$ y $q = (x_1, y_1, z_1)$ puntos del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $z_0 \neq z_1$. Probar que existen infinitas geodésicas del cilindro que pasan por ambos puntos.

Número 4. Sea S una superficie conexa tal que toda geodésica de S es una curva plana. Probar que S es un abierto de un plano o de una esfera.

Número 5. Sea S una superficie de revolución. Probar que la curvatura geodésica es constante a lo largo de los paralelos de S . Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Número 6. Sea S el semicono $z = +\sqrt{x^2 + y^2} > 0$. Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas $z = c$, donde c es una constante positiva. Estudiar si dichas secciones son geodésicas.

Número 7. Sea S la superficie $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Estudiar si alguna sección de S por un plano $z = ay$ es una geodésica.

Número 8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 < z < 1$. Determinar para qué pares de puntos $p, q \in S$ existe una isometría $S \setminus \{p\} \rightarrow S \setminus \{q\}$, y describirla.

Geodésicas (II)

En esta lección describimos las geodésicas como las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales que dependen de los símbolos de Christoffel (luego solamente de la primera forma fundamental). Es esta descripción la que permite establecer localmente la existencia y unicidad de las geodésicas. Después presentamos el concepto de campo paralelo, que proporciona una caracterización alternativa de las geodésicas y está regulado mediante ecuaciones diferenciales similares. Terminamos la lección con otro aspecto de la analogía entre rectas y geodésicas: la minimización de la distancia sobre la superficie.

Sea S una superficie diferenciable.

(16.1) Ecuaciones diferenciales de las geodésicas. Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de un abierto W de S . Sea $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva de W . Es posible sacar aún más partido de los cálculos realizados en la lección anterior, y, en concreto, de la siguiente expresión encontrada en 15.9, p. 213,

$$\begin{aligned} \gamma''(t) = & (u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1) \varphi_u \\ & + (v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2) \varphi_v + (u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g) N. \end{aligned}$$

La curva $\gamma(t)$ será una geodésica si y sólo si la proyección de $\gamma''(t)$ sobre el plano tangente es nula, es decir, si en la anterior fórmula los coeficientes de φ_u y φ_v se anulan:

$$(EDG) \quad \begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Éstas son las denominadas *ecuaciones diferenciales de las geodésicas*. ■

Como aplicación de estas ecuaciones vamos a estudiar el comportamiento de las geodésicas de las superficies de revolución.

Ejemplo 16.2. Consideremos una superficie de revolución S parametrizada mediante

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)) \quad (\zeta(u) > 0),$$

donde u es el arco de la curva generatriz $(\zeta(u), 0, \xi(u))$, es decir, se cumple $\zeta'^2 + \xi'^2 \equiv 1$. Los coeficientes de la primera forma fundamental de esta parametrización son $E \equiv 1$, $F \equiv 0$ y $G = \zeta^2$ (5.6, p. 61), y los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'$$

(11.3(5), p. 148). Por tanto las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son, en este caso

$$\begin{cases} u'' - \zeta(u)\zeta'(u)v'^2 = 0, \\ v'' + 2\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}u'v' = 0. \end{cases}$$

Utilizando estas ecuaciones podemos discutir ciertas geodésicas de S .

(1) Ya sabemos (15.6, p. 210) que los meridianos son siempre geodésicas, y los paralelos cuando corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical. Vamos a obtener esto otra vez usando las ecuaciones diferenciales anteriores.

Un meridiano se parametriza mediante $\gamma(t) = \varphi(u(t), v_0)$, luego $v' = v'' \equiv 0$ y su vector tangente es

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = u'\varphi_u, \quad \|\gamma'\|^2 = u'^2 E = u'^2.$$

Si t es múltiplo del arco, $\|\gamma'\|$ es constante, luego u' lo es también, y $u'' = 0$. Así pues, las ecuaciones diferenciales se satisfacen trivialmente, y el meridiano es una geodésica.

Consideremos un paralelo $\gamma(t) = \varphi(u_0, v(t))$. En este caso es $u' = u'' \equiv 0$,

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = v'\varphi_v \quad \text{y} \quad \|\gamma'\|^2 = v'^2 G = v'^2 \zeta^2(u_0).$$

Si $\|\gamma'\|$ es constante, v' lo es también, y $v'' \equiv 0$. Las ecuaciones diferenciales se reducen a la primera que queda

$$\zeta(u_0)\zeta'(u_0)v'^2 = 0.$$

Como v no puede ser constante y $\zeta(u_0) > 0$, concluimos que esta ecuación se satisface, y el paralelo es geodésica, si y sólo si $\zeta'(u_0) = 0$, que es la condición de que la tangente a la curva en $u = u_0$ sea vertical.

(2) Volviendo al sistema en general, reescribimos la segunda ecuación como sigue

$$0 = \zeta^2(u)v'' + 2\zeta(u)\zeta'(u)u'v' = \frac{d}{dt}(\zeta^2(u)v'),$$

luego para cada geodésica existe una constante c tal que a lo largo de la geodésica se tiene que $\zeta^2(u)v' = c$. Si la geodésica está parametrizada por la longitud del arco s y llamamos θ al (menor) ángulo que forma $\gamma'(s)$ con φ_v , es decir con el paralelo que pasa por $\alpha(s)$, tenemos que

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma'(s), \varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\|} = \frac{\langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\|} = v'\sqrt{G} = \zeta(u)v',$$

luego $\zeta(u)\cos \theta = \zeta^2(u)v' = c$. Teniendo en cuenta que $\zeta(u)$ es el radio del paralelo correspondiente, obtenemos que para cada geodésica parametrizada por la longitud del arco $\gamma(s)$ existe una constante c (que depende sólo de la geodésica) tal que se verifica la llamada *relación de Clairaut*

$$r \cos \theta = c,$$

donde θ es el ángulo entre $\gamma'(s)$ y φ_v en cualquier punto de la curva y r es el radio del paralelo que pasa por ese punto. Obsérvese que el signo de c cambia con la orientación de la geodésica. Esta relación es muy útil para visualizar la forma de las geodésicas en las superficies de revolución cuando no somos capaces de encontrar la expresión analítica de las mismas. Si, por ejemplo, $c \geq 0$, la geodésica no puede abandonar la región de la superficie en que $r \geq c$. Además, se deduce que si $c > 0$ el ángulo θ aumenta en sentido creciente de los radios de los paralelos. ■

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas sirven para probar un teorema de existencia local. La idea geométrica es que la situación que hemos comprobado en el caso de la esfera y el cilindro se cumple siempre: fijado un punto $p \in S$ y una dirección tangente en él, existe una única geodésica de S que pasa por p con esa dirección. Dado el papel que juegan las parametrizaciones, conviene detallar bien el sentido de esta afirmación.

(16.3) Reparametrización de geodésicas y condiciones iniciales. (1) Una curva de nuestra superficie S es una geodésica si y sólo si su curvatura geodésica es idénticamente nula. La curvatura geodésica se calcula sin necesidad de reparametrizar por el arco, de modo que su anulación no depende de la parametrización. Sin embargo la condición que inicialmente define las geodésicas es que su vector curvatura no tenga componente tangencial, es decir, sea ortogonal a la superficie, y esta condición sí depende de la parametrización.

(2) Si una curva es una geodésica, cualquier parametrización suya, $\gamma(t)$, respecto de un múltiplo del arco cumple el requisito del vector curvatura, y, en

coordenadas locales, esas parametrizaciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales (EDG). Las condiciones iniciales que distinguen entre esas soluciones son las siguientes.

En primer lugar, es claro que las traslaciones del parámetro son irrelevantes, luego se conviene que el origen $t = 0$ es siempre un punto del intervalo de definición de γ . En segundo lugar, sabemos cuales son todas las otras reparametrizaciones que cumplen el requisito del vector curvatura, o más explícitamente, que son soluciones de las ecuaciones diferenciales: exactamente las del tipo $\alpha(s) = \gamma(cs)$ para constantes $c \neq 0$. Obsérvese que esta reparametrización no altera el origen $t = 0$ y que $\alpha'(0) = c\gamma'(0)$, de modo y manera que las parametrizaciones se distinguen por sus vectores tangentes. Así, caracterizamos las parametrizaciones por su *origen* $p = \alpha(0)$ y su *velocidad inicial* $\omega = \alpha'(0)$.

(3) Si fijamos un punto $p \in S$, una geodésica que pase por p determina una dirección tangente en ese punto, y las reparametrizaciones de la curva con origen en p que cumplen las ecuaciones diferenciales se corresponden biyectivamente con los vectores no nulos ω en esa dirección. ■

Tras las explicaciones precedentes, enunciamos el *teorema de existencia y unicidad de geodésicas*:

Teorema 16.4. *Fijemos un punto $p \in S$ y un vector tangente no nulo $\omega \in T_p S$. Existe una geodésica $\alpha : I \rightarrow S$ definida en un intervalo abierto que contiene el origen tal que:*

$$(1) \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \omega.$$

(2) Si $\gamma : J \rightarrow S$ es otra geodésica con $0 \in J$, $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = w$, entonces $J \subset I$ y $\gamma(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in J$.

En otras palabras, dados un punto y un vector tangente en él, existe una única *geodésica máxima* con origen ese punto y velocidad inicial ese vector tangente.

Demostración. Es una aplicación directa del *teorema de Picard* de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para hacerlo evidente reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas (EDG) utilizando más variables de la manera bien conocida. Denotamos

$$\mathbf{x}_1 = u, \mathbf{x}_2 = v, \mathbf{x}_3 = u', \mathbf{x}_4 = v',$$

y (EDG) se convierte en

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_3, \\ \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_4, \\ \mathbf{x}'_3 = -\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_3^2 - 2\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 - \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_4^2, \\ \mathbf{x}'_4 = -\Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_3^2 - \Gamma_{12}^2 2\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 - \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_4^2. \end{cases}$$

Así que tenemos efectivamente una ecuación diferencial $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$. Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{x}_1(0) = u(0), \mathbf{x}_2(0) = v(0), \mathbf{x}_3(0) = u'(0), \mathbf{x}_4(0) = v'(0),$$

es decir, el punto $p \in S$ y el vector tangente $\omega \in T_p S$ cuyas coordenadas son respectivamente $(u(0), v(0))$ y $(u'(0), v'(0))$. Así pues, se aplica el teorema de Picard a la ecuación $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ y se obtiene lo que se quiere. ■

Revisemos a la luz de este resultado los ejemplos que hemos analizado previamente.

Ejemplos 16.5. (1) Para la esfera y para el cilindro, encontramos geodésicas para cada punto y cada dirección, y probamos además que esas eran todas las geodésicas (15.3(2), p. 206, y 15.3(3), p. 207, 15.8(1), p. 212). Esto último no era realmente necesario, pues lo garantiza la unicidad del teorema anterior.

(2) Del toro de revolución S sabemos por las propiedades generales de las superficies de revolución (16.2(1), p. 221) que los meridianos son geodésicas y de los paralelos sólo los máximos, que están en el plano $z = 0$. Se puede obtener alguna información sobre las restantes geodésicas utilizando la relación de Clairaut (*loc. cit.*(2)). Si consideramos la parametrización habitual del toro

$$\varphi(u, v) = ((c + r \cos u) \cos v, (c + r \cos u) \sin v, r \sin u) \quad (c > r > 0),$$

la relación de Clairaut dice que $(c + r \cos u) \cos \theta$ es constante, donde θ es el ángulo entre γ' y φ_v . Si γ es, en un punto dado, tangente al paralelo superior $u = \pi/2$ (es decir, si $\theta = 0$), vemos que c es precisamente la constante anterior. Como $c + r \cos u > 0$, resulta que $0 \leq \cos \theta \leq 1$, y tenemos que $r \cos u + c \geq c$ y $\cos u \geq 0$. Esto significa que la geodésica está confinada a la cara externa del toro (de hecho, se sigue de la relación de Clairaut que la geodésica oscila entre el paralelo superior y el inferior). ■

Las geodésicas se han definido imitando en la superficie en la que yacen el comportamiento de las rectas en el plano. Vamos ahora utilizar el mismo punto

de vista intrínseco para desarrollar otro concepto relacionado con la geometría de las rectas del plano: el paralelismo.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. A continuación utilizamos una noción curvilínea de campo tangente. Si $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva de S , un *campo (vectorial) tangente a lo largo de α* es una aplicación diferenciable $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. El primer ejemplo es el campo $\Phi(t) = \alpha'(t)$.

Definición 16.6. Un campo tangente Φ a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$ se llama *paralelo* si $\Phi'(t)$ es ortogonal a $T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$.

La motivación de la definición anterior parte, como en el caso de las geodésicas, del supuesto de que los hipotéticos habitantes de la superficie sólo perciben la componente tangencial de los vectores, es decir su proyección sobre el plano tangente a la superficie en un punto dado. Si $\Phi'(t)$ es ortogonal a S (esto es, a $T_{\alpha(t)}S$), $\Phi'(t)$ se anula para esos habitantes que, por tanto, no percibirían variación alguna de Φ . Es decir, verían dos vectores $\Phi(t_1)$ y $\Phi(t_2)$ iguales con distintos orígenes $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_2)$, o sea, los verían *paralelos*.

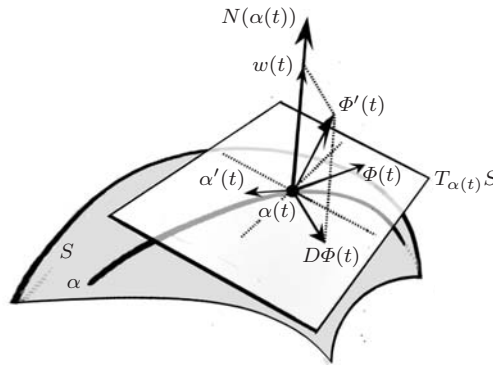
Por otra parte, es claro que las geodésicas no son otra cosa que *las curvas cuyo campo tangente es paralelo*.

Para entender mejor la definición que acabamos de dar, es conveniente introducir el concepto siguiente.

Definición 16.7. Dado un campo tangente Φ a lo largo de la curva $\alpha : I \rightarrow S$, se llama *derivada covariante* de Φ al campo tangente $D\Phi$ definido por

$$D\Phi(t) = \pi_{\alpha(t)}(\Phi'(t)),$$

donde $\pi_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\alpha(t)}S$ es la proyección lineal ortogonal sobre el plano tangente a S en $\alpha(t)$.



Mediante la derivada covariante, se puede reformular la noción de campo paralelo Φ como aquél que verifica $D\Phi = 0$. En particular, las geodésicas se caracterizan como *las curvas cuyo campo tangente tiene derivada covariante nula*.

Se sigue de la definición que $\Phi'(t) = D\Phi(t) + w(t)$, donde $w(t)$ es un vector ortogonal a S en $\alpha(t)$. Si Ψ es un segundo campo tangente a lo largo de la curva α , es útil la relación

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi, \Psi\rangle = \langle D\Phi, \Psi\rangle + \langle\Phi, D\Psi\rangle,$$

que se prueba inmediatamente haciendo uso de la expresión anterior. Se deduce la siguiente propiedad:

Corolario 16.8. *Sea Φ paralelo a lo largo de la curva regular α . Entonces $\|\Phi(t)\|$ es constante. Si Ψ es otro campo paralelo a lo largo de α entonces el ángulo entre $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ es constante.*

Demostración. Si tenemos dos campos paralelos Φ y Ψ , sus derivadas covariantes se anulan idénticamente, y por tanto

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi, \Psi\rangle = \langle D\Phi, \Psi\rangle + \langle\Phi, D\Psi\rangle = 0.$$

En consecuencia, la función $\langle\Phi, \Psi\rangle$ es constante. Para $\Phi = \Psi$, obtenemos que las normas de Φ y de Ψ son constantes. Se sigue que el ángulo θ que forman los campos, que tiene coseno

$$\cos \theta = \frac{\langle\Phi, \Psi\rangle}{\|\Phi\| \|\Psi\|},$$

es también constante. ■

Añadimos a esta sucinta presentación del paralelismo en superficies el teorema de existencia y unicidad de campos paralelos.

Teorema 16.9. *Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$ una curva regular y ω un vector tangente a S en $\alpha(a)$. Entonces existe un único campo tangente paralelo Φ a lo largo de α con $\Phi(a) = \omega$.*

Demostración. La demostración es parecida a la de existencia y unicidad de geodésicas, de manera que la describimos a grandes rasgos. En primer lugar se observa que la traza de la curva α , por ser compacta, se puede cubrir con una cantidad finita de parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow W$. Esas parametrizaciones se pueden ordenar para tener una partición finita de subintervalos $[a', b']$ de $[a, b]$ de

manera que para una cierta amplitud $\varepsilon > 0$ sea $\alpha([a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]) \subset W$. Entonces, si sabemos resolver el problema en cada $[a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]$, es fácil unir soluciones para obtener la que está definida en todo $[a, b]$. Aquí es importante la unicidad, y para poder usarla es para lo que se ha especificado el pequeño solapamiento de amplitud ε . Todo esto significa que podemos suponer simplemente que $\alpha([a, b]) \subset W$.

Eso supuesto, se procede a reformular el problema mediante ecuaciones diferenciales. El campo que buscamos será

$$\Phi(t) = X(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + Y(t)\varphi_v(u(t), v(t)),$$

y derivando

$$\Phi' = X'\varphi_u + Y\varphi_v + Xu'\varphi_{uu} + (Xv' + Yu')\varphi_{uv} + Yv'\varphi_{vv}.$$

Reemplazando las segundas derivadas por sus expresiones con los símbolos de Christoffel obtenemos $\Phi' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$, y para que el campo sea paralelo debe cumplirse $A = B = 0$. En nuestro caso resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$(CP) \begin{cases} X' = -(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)X - (u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1)Y, \\ Y' = -(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)X - (u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2)Y. \end{cases}$$

La existencia y unicidad de las soluciones X, Y de este sistema de ecuaciones lineales proporciona la existencia y unicidad del campo tangente Φ . Las condiciones iniciales de una solución son $X(a), Y(a)$, esto es, las coordenadas de ω en la parametrización φ . ■

Para terminar la lección, volvemos a nuestro tema principal, que son las geodésicas. Ya que se han definido a imitación de las rectas, es importante ver en qué medida las emulan, siendo las curvas de longitud mínima de la superficie. El siguiente resultado trata esta propiedad. Para enunciarlo recordemos que una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una *curva diferenciable a trozos* si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que la restricción de γ a cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es una curva diferenciable en el sentido usual. La longitud de γ se define como la suma de las longitudes de las restricciones $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$.

Proposición 16.10. *Sea $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$ una curva parametrizada por la longitud del arco cuya longitud $L_a^b(\alpha)$ es menor o igual que la de cualquier curva diferenciable a trozos que une los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Entonces α es una geodésica.*

Demostración. La demostración por reducción al absurdo utiliza ideas que pertenecen al Cálculo de Variaciones. Supongamos que α no es una geodésica y que, por tanto, existe un valor s_0 del parámetro tal que $k_g(s_0) \neq 0$, por ejemplo $k_g(s_0) > 0$. Entonces existen a' y b' con $a < a' < b' < b$, tales que $k_g(s) > 0$ para todo $s \in [a', b']$. Podemos suponer que $\alpha([a', b'])$ está cubierto por una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$. La curva $\alpha|_{[a', b']}$ debe ser la curva más corta entre los puntos $\alpha(a')$ y $\alpha(b')$. En efecto, en caso contrario, reemplazando α entre a' y b' por otra curva sería posible obtener una curva diferenciable a trozos que une los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ que fuera más corta que α .

Así pues, en lo que sigue podemos suponer simplemente $a = a'$ y $b = b'$, esto es, que toda la traza de α está cubierta por una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ y que $k_g(s) > 0$ para todo s . La curva se expresa en coordenadas locales en la forma $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$.

Tomemos una función diferenciable $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\zeta(s) > 0$ para todo $s \in (a, b)$ y $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$. Sea $n_i(s)$ la normal intrínseca de α y expresemos analíticamente el campo tangente $\zeta(s)n_i(s)$ en términos de φ_u y φ_v . Resulta que

$$\zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v,$$

para ciertas funciones diferenciables X, Y (13.3(2), p. 180). Consideramos la aplicación

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)),$$

para $|t| < \varepsilon$ y ε suficientemente pequeño para que la expresión anterior tenga sentido. Para cada t fijo, la aplicación $s \mapsto \gamma(s, t)$ es una curva de la superficie definida en el intervalo $[a, b]$ que une $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Por tanto, la longitud de esa curva es mayor o igual que la de $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$. En términos analíticos, la función

$$L(t) = \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \right\| ds = \int_a^b \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| ds$$

tiene un mínimo para $t = 0$. Ahora bien,

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle} ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle} ds = \int_a^b \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|^{-1} \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Evaluable en $t = 0$, y como $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$ está parametrizada por la longitud del arco se tiene $\|\frac{\partial \gamma}{\partial s}\| = 1$ para $t = 0$, con lo que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle ds = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0} - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} \right) ds \\ &= \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0, s=a}^{t=0, s=b} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} ds \end{aligned}$$

Computemos separadamente los últimos dos sumandos.

De las expresiones

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)), \quad \zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v$$

deducimos que $\frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} = \zeta(s)n_i(s)$, y, teniendo en cuenta que $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$, resulta

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0, s=a}^{t=0, s=b} = \zeta(s)n_i(s) \Big|_{s=a}^{s=b} = 0,$$

con lo que el primero de los dos sumandos es nulo. Pasemos al segundo. Como $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$, es

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \Big|_{t=0} = \alpha''(s) = k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N,$$

y deducimos

$$\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} = \langle \zeta(s)n_i(s), k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N \rangle = \zeta(s)k_g(s).$$

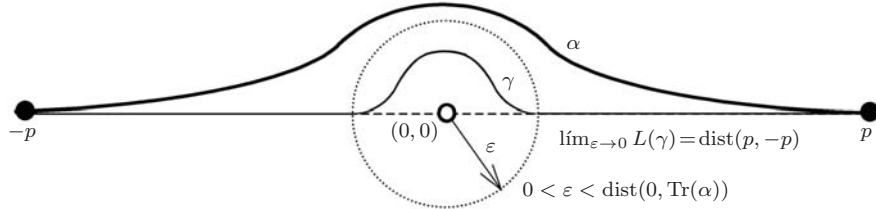
En consecuencia:

$$L'(0) = - \int_a^b \zeta(s)k_g(s) < 0,$$

pues tenemos la condición $k_g(s) > 0$ para todo s . Esto es imposible, pues L tiene un mínimo en $t = 0$.

De esta contradicción se sigue que no existe s_0 con $k_g(s_0) \neq 0$ y, por tanto, α es una geodésica. ■

Es conveniente observar que no siempre existe la curva más corta entre dos puntos. Por ejemplo, si $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $p \in S$ es un punto arbitrario, dada cualquier curva α de S que una p y $-p$ siempre existe otra γ estrictamente más corta que los une.



La superficie de este ejemplo, sin embargo, no es cerrada en \mathbb{R}^3 y es posible probar que en una superficie cerrada de \mathbb{R}^3 todo par de puntos puede ser unido por una curva de longitud mínima. Las superficies cerradas también tienen la propiedad de que toda geodésica $\alpha : I \rightarrow S$ se extiende indefinidamente, es decir, se extiende a una geodésica $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow S$ definida en toda la recta real. Ambas propiedades anteriores son consecuencia del llamado *teorema de Hopf-Rinow*. Por otra parte, tampoco es siempre cierto que una geodésica defina la distancia más corta entre dos puntos. Por ejemplo, un segmento de círculo máximo de la esfera unidad de longitud mayor que π (que, como sabemos, es una geodésica) no define la mínima distancia entre sus extremos (que es definida a través del segmento complementario). Sin embargo, es posible probar que una curva parametrizada por el arco $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$ es una geodésica si y sólo si minimiza distancias localmente, es decir, si y sólo si para todo $c \in I$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la restricción $\alpha|_{[c+\varepsilon, c-\varepsilon] \cap I}$ es la curva de mínima longitud en S entre sus extremos.

Problemas

Número 1. Se considera la parametrización de la esfera unitaria dada por

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Fijado u_0 consideremos la correspondiente curva de latitud, $\alpha(v) = \varphi(u_0, v)$, y el campo tangente $X = \varphi_u$ a lo largo de ella (es decir, $X(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v)$). Determinar para qué valores de u_0 el campo X es paralelo.

Número 2. Sea S una superficie de revolución parametrizada como es usual por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

Mostrar que si φ transforma en una geodésica alguna recta $v = mu + n$, $m \neq 0$, la superficie es un cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. ¿Es entonces φ una isometría?, ¿y una semejanza?

Número 3. Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie S . Probar las siguientes *fórmulas de Frenet para la curvatura geodésica*:

$$D\gamma'(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s), \quad D\mathbf{n}_i(s) = -k_g(s)\gamma'(s).$$