CI. Grupo A. Hoja 2. Funciones Integrables. Teorema de Fubini.

Problema 1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable Riemann. Probar que su gráfica tiene volumen cero en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Problema 2. Probar que la circunferencia unidad $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ tiene volumen cero.

Problema 3. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$ si $x > y$, y $f(x, y) = y^2$ si $x \leq y$. Probar que f es integrable y calcular su integral.

Problema 4. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ la región comprendida entre las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$. Calcular

$$\int\int_A (x^2 - y)\, dx\, dy\, .$$

Problema 5. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ la región del primer cuadrante encerrada entre las parábolas $y^2 = x$ e $y = x^2$. Hallar

$$\int\int_A xy\, dx\, dy\, .$$

Problema 6. Sea $I = [0, 1] \times [0, 1]$.

(a) Hallar

$$\int\int_I x^y\, dx\, dy.$$

(b) Utilizarlo para demostrar que

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx = \log 2.$$

Problema 7. Demostrar que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}\, , \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}\, .$$

Explicar por qué se tienen resultados distintos.