# Estadística. Grupo m3

## Hoja 4. Intervalos de confianza

Mayte Rodríguez

# Ejercicio 5a

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \theta\ exp\{-\theta x\} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$. Se pide:

a) Construir un intervalo de confianza al nivel de confianza del $95\%$ para la media de la población.

La esperanza es $E(X) = \frac{1}{\theta}$. Como $X \sim Gamma(\theta, 1)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\theta, n)$ y

$$T(\mathbf{X}, \theta) = 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\theta \frac{1}{2\theta}, n) \equiv Gamma(1/2, n) \equiv \chi^2_{2n}$$

es una cantidad pivotal.

# Ejercicio 5a

Para un nivel de confianza $1-\alpha$, hay que encontrar $a$ y $b$ tales que

$$1-\alpha = P(a < T(\mathbf{X},\theta) < b)$$

Tomando probabilidad de colas iguales $a = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$ y $b = \chi^2_{2n;\alpha/2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< T(\mathbf{X},\theta) < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< 2\theta n\bar{X} < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
2n\bar{X}/\chi^2_{2n;\alpha/2} &< \frac{1}{\theta} < 2n\bar{X}/\chi^2_{2n;1-\alpha/2}
\end{aligned}$$

El intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para $\frac{1}{\theta}$ es

$$IC_{1-\alpha}(\frac{1}{\theta}) = \left(\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n;\alpha/2}}, \frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}\right).$$

b) Construir un intervalo de confianza al nivel de confianza del $95\%$ para la varianza de la población.
Utilizando la misma cantidad pivotal

$$\begin{aligned} 2n\bar{X}/\chi^2_{2n;\alpha/2} &< \frac{1}{\theta} < 2n\bar{X}/\chi^2_{2n;1-\alpha/2} \\ \left(2n\bar{X}/\chi^2_{2n;\alpha/2}\right)^2 &< \frac{1}{\theta^2} < \left(2n\bar{X}/\chi^2_{2n;1-\alpha/2}\right)^2 \end{aligned}$$

El intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para $\frac{1}{\theta^2}$ es

$$IC_{1-\alpha}(\frac{1}{\theta^2}) = \left(\left(\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n;\alpha/2}}\right)^2, \left(\frac{2n\bar{X}}{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}\right)^2\right).$$

c) Construir un intervalo de confianza al nivel de confianza del $95\%$ para $exp\{-\theta\}$.

$$
\begin{aligned}
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< 2\theta n\bar{X} < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2n\bar{X}} &< \theta < \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2n\bar{X}} \\
-\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2n\bar{X}} &< -\theta < -\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2n\bar{X}} \\
\exp\left\{-\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2n\bar{X}}\right\} &< \exp\{-\theta\} < \exp\left\{-\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2n\bar{X}}\right\}
\end{aligned}
$$

El intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para $\exp\{-\theta\}$ es

$$
IC_{1-\alpha}(\exp\{-\theta\}) = \left(\exp\left\{-\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2n\bar{X}}\right\}, \exp\left\{-\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2n\bar{X}}\right\}\right).
$$

# Ejercicio 5d

d) Construir una cantidad pivotal basada en $Y = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$ y utilizarla para hallar un intervalo de confianza al nivel de confianza $1-\alpha$ para $\theta$.

Como $X \sim Exp(\theta)$, entonces $X_{(1)} \sim Exp(n\theta) \equiv Gamma(n\theta, 1)$ y

$$T(\mathbf{X}, \theta) = 2n\theta X_{(1)} \sim Gamma(1/2, 1) \equiv \chi^2_2$$

es una cantidad pivotal.
Para un nivel de confianza $1-\alpha$, hay que encontrar $a$ y $b$ tales que

$$1-\alpha = P(a < T(\mathbf{X}, \theta) < b)$$

# Ejercicio 5d

Tomando probabilidad de colas iguales $a = \chi^2_{2;1-\alpha/2}$ y $b = \chi^2_{2;\alpha/2}$ y entonces

$$\begin{aligned} \chi^2_{2;1-\alpha/2} &< T(\mathbf{X},\theta) < \chi^2_{2;\alpha/2} \\ \chi^2_{2;1-\alpha/2} &< 2n\theta X_{(1)} < \chi^2_{2;\alpha/2} \\ \frac{\chi^2_{2;1-\alpha/2}}{2nX_{(1)}} &< \theta < \frac{\chi^2_{2;\alpha/2}}{2nX_{(1)}} \end{aligned}$$

El intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para $\theta$ es

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{\chi^2_{2;1-\alpha/2}}{2nX_{(1)}}, \frac{\chi^2_{2;\alpha/2}}{2nX_{(1)}} \right).$$

# Ejercicio 6a

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = \frac{2}{\theta} e^{-2x/\theta} \ \ \forall x \geq 0$. Se pide:
a) Calcular un cantidad pivotal de la forma $c(\theta) \sum_{i=1}^n X_i$.

Observamos que $X \sim Gamma(2/\theta, 1)$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma(2/\theta, n)$ y

$$T(\mathbf{X}, \theta) = \frac{4}{\theta} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(\frac{2}{\theta} \frac{\theta}{4}, n) \equiv Gamma(1/2, n) \equiv \chi^2_{2n}$$

es una cantidad pivotal.

# Ejercicio 6b

b) Hallar el intervalo de confianza para $\theta$ al nivel de confianza $1-\alpha$ basado en dicha cantidad pivotal con probabilidades de colas iguales.

Para un nivel de confianza $1-\alpha$, hay que encontrar $a$ y $b$ tales que

$$1-\alpha = P(a < T(\mathbf{X},\theta) < b)$$

Tomando probabilidad de colas iguales $a = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$ y $b = \chi^2_{2n;\alpha/2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< T(\mathbf{X},\theta) < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< \frac{4}{\theta} n\bar{X} < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
4n\bar{X}/\chi^2_{2n;\alpha/2} &< \theta < 4n\bar{X}/\chi^2_{2n;1-\alpha/2}
\end{aligned}$$

# Ejercicio 6b

El intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ para $\theta$ es

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left( \frac{4n\bar{X}}{\chi^2_{2n;\alpha/2}}, \frac{4n\bar{X}}{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}} \right).$$

# Ejercicio 7

Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = (\theta+1)x^\theta I_{(0,1)}(x)$. Construir un intervalo de confianza para $\theta$ al nivel de confianza $1-\alpha$ utilizando el método de la cantidad pivotal con probabilidades de colas iguales.

Partimos de la cantidad pivotal $T(\mathbf{X}, \theta) = -2\sum_{j=1}^{n} \ln F_\theta(X_j) \sim \chi^2_{2n}$. La función de distribución del modelo poblacional es $F_\theta(x) = x^{\theta+1}$ cuando $x \in (0,1)$ y entonces

$$T(\mathbf{X}, \theta) = -2\sum_{j=1}^{n} \ln F_\theta(X_j) = -2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j^{\theta+1} = -2(\theta+1)\sum_{j=1}^{n} \ln X_j \sim \chi^2_{2n}$$

# Ejercicio 7

Para un nivel de confianza $1-\alpha$, hay que encontrar $a$ y $b$ tales que

$$1-\alpha = P(a < T(\mathbf{X},\theta) < b)$$

Tomando probabilidad de colas iguales $a = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$ y $b = \chi^2_{2n;\alpha/2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< T(\mathbf{X},\theta) < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
\chi^2_{2n;1-\alpha/2} &< -2(\theta+1)\sum_{j=1}^{n} \ln X_j < \chi^2_{2n;\alpha/2} \\
\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j} &< \theta+1 < \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j}
\end{aligned}$$

# Ejercicio 7

Como

$$\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j} - 1 < \theta < \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j} - 1$$

el intervalo de confianza al nivel $1-\alpha$ para $\theta$

es

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( \frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j} - 1, \frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{-2\sum_{j=1}^{n} \ln X_j} - 1 \right).$$

# Ejercicio 8

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \sim f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, $x > \theta$. Encontrar el intervalo de confianza para $\theta$ al nivel de confianza $1-\alpha$ de amplitud mínima basado en un estadístico suficiente.

El estadístico $T = X_{(1)}$ es suficiente. La función de distribución es

$$F_T(x) = P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \theta \\ 1 - \exp\{-n(x-\theta)\} & \text{si} \quad x \geq \theta \end{cases}$$

y la densidad es

$$f_T(x) = n \exp\{-n(x-\theta)\} I_{(\theta,\infty)}(x)$$

# Ejercicio 8

Buscamos $a$ y $b$ de forma que

$$P(a < T < b) = 1 - \alpha$$

y tal que la longitud del intervalo sea mínima. Para ello, tomamos $a = \theta$ y se elige $b$ de forma que

$$\begin{aligned} F_T(b) &= 1 - \alpha \\ 1 - \alpha &= 1 - \exp\{-n(b - \theta)\} \\ b &= \theta - \frac{\ln \alpha}{n} \end{aligned}$$

# Ejercicio 8

Entonces, por una parte

$$a = \theta < T = X_{(1)}$$

y por otra

$$\begin{aligned} T = X_{(1)} \quad &< \quad b = \theta - \frac{\ln \alpha}{n} \\ X_{(1)} + \frac{\ln \alpha}{n} \quad &< \quad \theta \end{aligned}$$

# Ejercicio 8

Por tanto

$$X_{(1)} + \frac{\ln \alpha}{n} < \theta < X_{(1)}$$

y el intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ es

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left( X_{(1)} + \frac{\ln \alpha}{n}, X_{(1)} \right)$$