Inducción respecto de reglas e invariantes

En general, la inducción sobre reglas (o derivaciones) nos permite probar propiedades "universales" de todos o de todos los objetos "derivables" de una determinada "clase".

Ejercicio: Demostrar que toda instrucción de la forma

$$S_{(b_1,b_2)} = \text{while } b_1 \text{ do if } b_2 \text{ then } x := x+2 \text{ else } y := y-4$$

cumple que en todo estado s que cumpla el predicado $Par_{\{x,y\}}$, donde $Par_V\, s := \forall z \in V .\ Par\,(s\,z)$ se tiene $\left[(S_{(b_1,b_2)}\, s) \rightarrow s' \right] \Rightarrow Par_{\{x,y\}}\, s'$

Solución: Lo importante del enunciado es que no se nos pide en absoluto probar la existencia de s', o sea la terminación de $S_{(b_1,b_2)}$ sobre s. "Por el contrario", si no termina "mejor", pues se tendría lo que ha de probarse trivialmente. Y "menos mal" que es así, pues sin hipótesis sobre b_1 y b_2 no sabemos nada sobre la terminación de $S_{(b_1,b_2)}$. Por contra, la aplicación de la inducción sobre reglas permite comprobar que $S'_{b_2} = \text{if } b_2 \text{ then } x := x+2 \text{ else } y := y-4$ cumple que $(S'_{b_2}\, s) \rightarrow s''$, con $Par_{\{x,y\}}\, s''$ cuando $Par_{\{x,y\}}\, s$, ya que tanto $x := x+2$ como $y := y-4$ lo cumplen. Y de ello deducimos el resultado deseado por preservar las dos reglas del while el "invariante" $Par_{\{x,y\}}$.