El lenguaje While

David de Frutos Escrig

versión original elaborada por

Yolanda Ortega Mallén

Dpto. de Sistemas Informáticos y Computación

Universidad Complutense de Madrid

Sumario

- Sintaxis.
- Semántica de expresiones.
- Propiedades.

Bibliografía

- Hanne Riis Nielson & Flemming Nielson,
  Semantics with Applications. An Appetizer, Springer, 2007.
  Secciones 1.2, 1.3 y 1.4.

Sintaxis

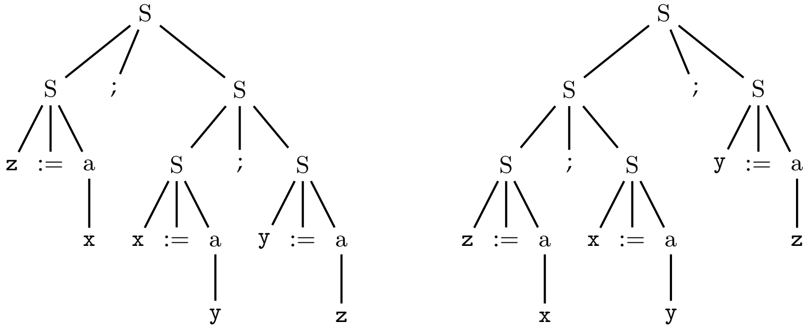
- Categorías sintácticas:

  Numerales $\mathrm{n} \in \mathrm{Num}$,
  Variables $\mathrm{x} \in \mathrm{Var}$,
  Expresiones aritméticas $\mathrm{a} \in \mathrm{Aexp}$,
  Expresiones booleanas $\mathrm{b} \in \mathrm{Bexp}$,
  Sentencias $\mathrm{S} \in \mathrm{Stm}$.
- Notación BNF (Backus-Naur form)

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{a} & ::= & \mathrm{n} \mid \mathrm{x} \mid \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 \times \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 \\
\mathrm{b} & ::= & \mathtt{true} \mid \mathtt{false} \mid \mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 \leq \mathrm{a}_2 \mid \neg \mathrm{b} \mid \mathrm{b}_1 \wedge \mathrm{b}_2 \\
\mathrm{S} & ::= & \mathrm{x} := \mathrm{a} \mid \mathtt{skip} \mid \mathrm{S}_1 \ ; \ \mathrm{S}_2 \mid \mathtt{if}\ \mathrm{b}\ \mathtt{then}\ \mathrm{S}_1\ \mathtt{else}\ \mathrm{S}_2 \mid \mathtt{while}\ \mathrm{b}\ \mathtt{do}\ \mathrm{S}
\end{array}
$$

Árboles de sintaxis abstracta

`z := x ; x := y ; y := z`



Semántica de numerales

$$\mathrm{n} \quad ::= \quad \mathsf{0} \mid \mathsf{1} \mid \mathrm{n}\ \mathsf{0} \mid \mathrm{n}\ \mathsf{1}$$

Función semántica $\mathcal{N} : \mathrm{Num} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}[\![\mathsf{0}]\!] &= 0\\
\mathcal{N}[\![\mathsf{1}]\!] &= 1\\
\mathcal{N}[\![\mathrm{n}\ \mathsf{0}]\!] &= 2 \otimes \mathcal{N}[\![\mathrm{n}]\!]\\
\mathcal{N}[\![\mathrm{n}\ \mathsf{1}]\!] &= 2 \otimes \mathcal{N}[\![\mathrm{n}]\!] \ \oplus\ 1
\end{aligned}$$

Ejercicio

Siendo la sintaxis para n

$$\mathrm{n} \quad ::= \quad \mathsf{0} \mid \mathsf{1} \mid \mathsf{0}\ \mathrm{n} \mid \mathsf{1}\ \mathrm{n}$$

¿Se puede definir $\mathcal{N}$ correctamente?

Técnicas generales

Definiciones composicionales

1. Cada categoría sintáctica se especifica mediante su sintaxis abstracta: elementos básicos + elementos compuestos.
   Descomposición única en los constituyentes inmediatos.
2. Funciones semánticas composicionales para cada categoría sintáctica: una cláusula semántica para cada elemento básico y para cada método de construcción de elementos compuestos.
   Las cláusulas para los elementos compuestos se definen en términos de la semántica de los elementos constituyentes.

Inducción estructural

1. Demostrar que la propiedad se verifica para los elementos básicos.
2. Asumiendo que la propiedad es cierta para todos los constituyentes inmediatos (hipótesis de inducción),
   demostrar que la propiedad se verifica para los elementos compuestos.

Semántica de expresiones aritméticas

- Estados $\mathrm{State} : \mathrm{Var} \longrightarrow \mathbb{Z}$
- Función semántica $\mathcal{A} : \mathrm{Aexp} \longrightarrow (\mathrm{State} \longrightarrow \mathbb{Z})$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}[\![\mathrm{n}]\!]\mathrm{s} & = & \mathcal{N}[\![\mathrm{n}]\!] \\
\mathcal{A}[\![\mathrm{x}]\!]\mathrm{s} & = & \mathrm{s\ x} \\
\mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} & = & \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \oplus \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \\
\mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1 \times \mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} & = & \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \otimes \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \\
\mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} & = & \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \ominus \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s}
\end{array}
$$

Semántica de expresiones aritméticas

Ejemplo 1: Sea $s\ \mathtt{x} = 3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\![\mathtt{x}+\mathtt{1}]\!]s &= \mathcal{A}[\![\mathtt{x}]\!]s \oplus \mathcal{A}[\![\mathtt{1}]\!]s\\ &= (s\ \mathtt{x}) \oplus \mathcal{N}[\![\mathtt{1}]\!]\\ &= 3 \oplus 1\\ &= 4\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Añadimos $-a$

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]s = 0 \ominus \mathcal{A}[\![a]\!]s$$

$$\mathcal{A}[\![-a]\!]s = \mathcal{A}[\![\mathsf{0}-a]\!]s\ !$$

Ejercicio

Demostrar que las ecuaciones para $\mathcal{A}$ definen una función total.

Semántica de expresiones booleanas

- Función semántica $\mathcal{B} : \mathrm{Bexp} \longrightarrow (\mathrm{State} \longrightarrow \mathrm{T})$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{B}[\![\texttt{true}]\!]\mathrm{s} & = & \mathrm{tt} \\
\mathcal{B}[\![\texttt{false}]\!]\mathrm{s} & = & \mathrm{ff} \\
\mathcal{B}[\![\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} & = & \begin{cases} \mathrm{tt} & \text{si } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \text{ y } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \text{ son iguales} \\ \mathrm{ff} & \text{si } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \text{ y } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \text{ son distintos} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\mathrm{a}_1 \leq \mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} & = & \begin{cases} \mathrm{tt} & \text{si } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \text{ es menor o igual que } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \\ \mathrm{ff} & \text{si } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_1]\!]\mathrm{s} \text{ es mayor que } \mathcal{A}[\![\mathrm{a}_2]\!]\mathrm{s} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\neg \mathrm{b}]\!]\mathrm{s} & = & \begin{cases} \mathrm{tt} & \text{si } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}]\!]\mathrm{s} = \mathrm{ff} \\ \mathrm{ff} & \text{si } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}]\!]\mathrm{s} = \mathrm{tt} \end{cases} \\
\mathcal{B}[\![\mathrm{b}_1 \wedge \mathrm{b}_2]\!]\mathrm{s} & = & \begin{cases} \mathrm{tt} & \text{si } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}_1]\!]\mathrm{s} = \mathrm{tt} \text{ y } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}_2]\!]\mathrm{s} = \mathrm{tt} \\ \mathrm{ff} & \text{si } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}_1]\!]\mathrm{s} = \mathrm{ff} \text{ o } \mathcal{B}[\![\mathrm{b}_2]\!]\mathrm{s} = \mathrm{ff} \end{cases}
\end{array}
$$

Semántica de expresiones booleanas

Ejercicio

Demostrar que las ecuaciones para $\mathcal{B}$ definen una función total.

Ejercicio

Se extiende Bexp a Bexp':

$$\begin{array}{lll} \mathrm{b} & ::= & \texttt{true} \mid \texttt{false} \\ & \mid & \mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 \neq \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 \leq \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 \geq \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 < \mathrm{a}_2 \mid \mathrm{a}_1 > \mathrm{a}_2 \\ & \mid & \neg \mathrm{b} \mid \mathrm{b}_1 \wedge \mathrm{b}_2 \mid \mathrm{b}_1 \vee \mathrm{b}_2 \mid \mathrm{b}_1 \Rightarrow \mathrm{b}_2 \mid \mathrm{b}_1 \Leftrightarrow \mathrm{b}_2 \end{array}$$

- Extender la función semántica $\mathcal{B}$.
- Las expresiones b_1 y b_2 son equivalentes si para todo estado s

$$\mathcal{B}[\![\mathrm{b}_1]\!]\mathrm{s} = \mathcal{B}[\![\mathrm{b}_2]\!]\mathrm{s}$$

  Demostrar que para cada $\mathrm{b}' \in \mathrm{Bexp}'$ existe $\mathrm{b} \in \mathrm{Bexp}$ tal que b' y b son equivalentes.

Variables libres

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{FV}(\mathrm{n}) & = & \emptyset \\
\mathrm{FV}(\mathrm{x}) & = & \{\mathrm{x}\} \\
\mathrm{FV}(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2) & = & \mathrm{FV}(\mathrm{a}_1) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{a}_2) \\
\mathrm{FV}(\mathrm{a}_1 \times \mathrm{a}_2) & = & \mathrm{FV}(\mathrm{a}_1) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{a}_2) \\
\mathrm{FV}(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2) & = & \mathrm{FV}(\mathrm{a}_1) \cup \mathrm{FV}(\mathrm{a}_2)
\end{array}
$$

Lema 1:
Sean $\mathrm{s}, \mathrm{s}' \in \mathrm{State}$ tales que $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{FV}(\mathrm{a}).\mathrm{s}\ \mathrm{x} = \mathrm{s}'\ \mathrm{x}$, entonces $\mathcal{A}[\![\mathrm{a}]\!]\mathrm{s} = \mathcal{A}[\![\mathrm{a}]\!]\mathrm{s}'$.

Ejercicio

Definir el conjunto de variables libres para una expresión booleana y demostrar un resultado similar al Lema 1.

Substituciones

$$\begin{array}{rcl} n[y \mapsto a_0] & = & n \\ x[y \mapsto a_0] & = & \begin{cases} a_0 & \text{si } x = y \\ x & \text{si } x \neq y \end{cases} \\ (a_1 + a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) + (a_2[y \mapsto a_0]) \\ (a_1 \times a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) \times (a_2[y \mapsto a_0]) \\ (a_1 - a_2)[y \mapsto a_0] & = & (a_1[y \mapsto a_0]) - (a_2[y \mapsto a_0]) \end{array}$$

Actualización de estados:

$$(s[y \mapsto v])x = \begin{cases} v & \text{si } x = y \\ s\ x & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que $\mathcal{A}[\![a[y \mapsto a_0]]\!]s = \mathcal{A}[\![a]\!](s[y \mapsto \mathcal{A}[\![a_0]\!]s])$ para cualquier estado s.

Ejercicio

Definir la substitución para expresiones booleanas $b[y \mapsto a_0]$ y demostrar un resultado similar al del ejercicio anterior.