1. Hallar una curva parametrizada α cuya traza es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con $\alpha(t)$ recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj y con $\alpha(0) = (0, 1)$.

2. Sea $\alpha(t)$ una curva que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demostrar que el vector de posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector dado. Si $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$, y si $\alpha(0)$ también lo es, desuestre que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

4. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, demuestre que $|\alpha(t)|$ es constante (diferente de cero) si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

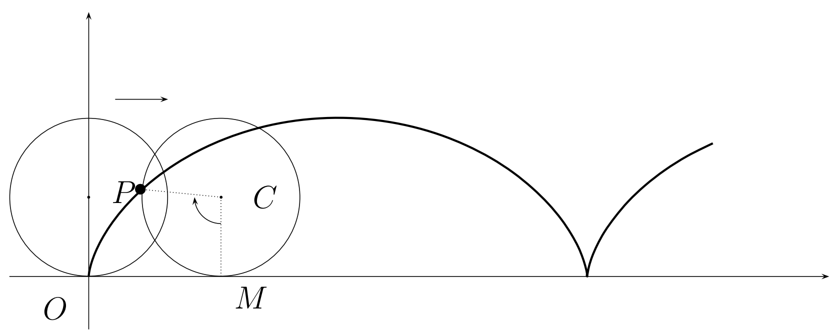
5. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva y $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido, demostrar que las longitudes de α y de $M \circ \alpha$ entre a y b coinciden.

6. Demuestre que las líneas tangentes a la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0$, $z = x$.

7. La curva engendrada por un punto P de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por una recta fija se llama **cicloide**. Tomando dicha recta como eje de las X, y como parámetro t el ángulo orientado $\widehat{MCP}$ (C es el centro de la circunferencia, y M el punto de contacto con el eje), probar que la posición de P para cada t es

$$\alpha(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$$

Se ha supuesto que en $t = 0$, P coincide con M, y con el origen de coordenadas. Determine los puntos t donde $\alpha'(t) = 0$ (llamados de retroceso). (Nota: "sin deslizar" significa a efectos prácticos que la longitud del arco MP coicide con la longitud del segmento OM)



8. Pruebe que la recta tangente a la cicloide por un punto P regular cualquiera viene determinada por los puntos P y M', siendo M' el simétrico de M respecto a C.

9. Determine la longitud del arco de cicloide entre dos puntos consecutivos de retroceso, en función del radio de la circunferencia rodante.

10. La *espiral logarítmica* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada como

$$\alpha(t) = (a \exp bt \cos t, a \exp bt \sin t)$$

donde $a > 0$, $b < 0$. Demuestre que cuando $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se acerca al origen. Calcule, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, la longitud de arco de α entre t_0 y t_1. Halle las ecuaciones de la reparametrización de la curva por el arco, y dibuje la traza.

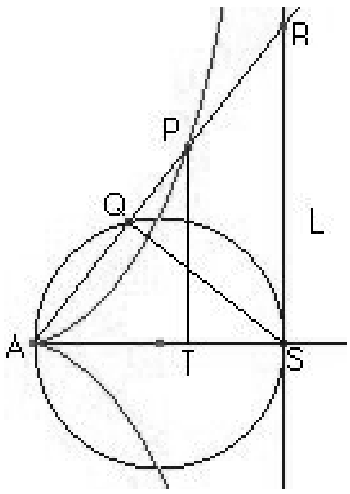
11. Sea $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right), \quad a > 0$$

Se pide demostrar:

- La tangente a α en $t = 0$ es el eje OX.
- Cuando $t \to \infty$, $\alpha(t) \to (0,0)$ y $\alpha'(t) \to (0,0)$.
- Si se toma la curva con la orientación opuesta, demuestre que cuando $t \to -1$, $\alpha(t)$ y su tangente se acercan a la recta $x + y + a = 0$.

12. En la descripción que sigue, ayuda bastante ir trazando el dibujo correspondiente. Consideramos una circunferencia C de radio r, y una recta L tangente a ella. Denotamos como S el punto de tangencia, y como A al punto diametralmente opuesto. Para cada punto R en L, trazamos la recta AR y llamamos Q a la intersección de ésta con la circunferencia C. En AR, hay un único P con $d(A,P) = d(Q,R)$; a la unión de tales P se le llama la *cisoide*.



Tomando un sistema de coordenadas centrado en A y en el que la recta L tenga ecuación $x = 2r$, determinar la ecuación implicita de la cisoide y demostrar que

$$\alpha(t) = \left(\frac{2rt^2}{1+t^2}, \frac{2rt^3}{1+t^2} \right)$$

son ecuaciones paramétricas de la cisoide. Determine el intervalo máximo donde la curva es regular.

13. Sea $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2} \right)$$

donde t es el ángulo que el eje OY forma con el vector $\alpha'(t)$. La traza de α se llama la *tractriz.* Demuestre que α es una curva parametrizada regular excepto en $t = \pi/2$, y que la logitud del segmento de la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje OY es constante e igual a 1.

14. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y $[a, b] \subset I$. Demuestre que la longitud de α entre a y b es mayor o igual que la distancia entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. Dé la interpretación geométrica de este resultado.

15. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función C^∞, parametrice el grafo de f y calcule su longitud de arco.

16. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA y $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento de $\mathbb{R}^2$ (esto es, una aplicación afín que preserva distancias). Si $\beta = M \circ \alpha$, demuestre que β también está parametrizada por longitud de arco, y halle la relación entre las curvaturas de α y β.

17. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA. Demuestre que α es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si la curvatura de α es constante.

18. Si $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ es una curva PPA, definimos $\beta(s) = \alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Demuestre que β está parametrizada por arco, y halle su función de curvatura.

19. Si $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ es una curva PPA con $k_\alpha(-s) = k_\alpha(s)$ para cada $s \in (-a, a)$, demuestre que la traza de α es simétrica respecto a la recta normal de α en 0.

20. Si $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ es una curva PPA con $k_\alpha(-s) = -k_\alpha(s)$ para todo $s \in (-a, a)$, demuestre que la traza de α es simétrica con respecto al punto $\alpha(0)$.

21. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PPA, demuestre que:

1. α es un segmento de recta si y sólo si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ por el cual pasan todas sus rectas tangentes;

2. α es un arco de circunferencia si y sólo si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ por el cual pasan todas sus rectas normales.

22. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PPA, demuestre que todas las rectas normales de α equidistan de un punto si y sólo si existen $a, b \in R$ tales que

$$k(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as + b}}$$

para cada $s \in I$.

23. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA, y $s_o \in I$. Definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle$$

f mide la *distancia orientada* del punto $\alpha(s)$ a la recta tangente a α en s_0. Demuestre que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$ y que $f''(s_0) = k(s_0)$. Como consecuencia, demuestre que:

1. Si $k(s_0) > 0$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$.

2. Si existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$, entonces $k(s_0) \geq 0$.

24. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, donde t no es necesariamente el parámetro de arco, demostrar que la curvatura está dada por la fórmula

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}$$

25. Demostrar que la curvatura de una curva plana que en coordenadas polares se escribe como $\rho = \rho(\theta)$ es

$$k(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

26. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular PPA. Supongamos que $k(s) \neq 0$, $s \in I$. La curva

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$$

se llama *la evoluta de* α.

1. Demuestre que la recta tangente a la evoluta de α en s coincide con la normal de α en s.

2. Demuestre que el punto de intersección de las rectas normales a α en $\alpha(t)$ y en $\alpha(t+h)$ converge a un punto en la evoluta de α cuando $h \to 0$ (nota: asuma que el punto de intersección depende diferenciablemente de h).

27. La *catenaria* es la traza de la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- Demuestre que la curvatura de α es $k(t) = 1/(\cosh t)^2$.

- Demuestre que la evoluta de la catenaria es la curva

$$\beta(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2\cosh t).$$

28. Se tiene la hélice

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c} \right)$$

con $c^2 = a^2 + b^2$.

- Demuestre que s es el parámetro de arco.
- Halle la curvatura y la torsión de α.
- Halle el plano osculador en $\alpha(s)$.
- Demuestre asimismo que las rectas normales a α cortan al eje OZ en un ángulo recto.
- Demuestre que las rectas tangentes a α forman ángulo constante con el eje z.

29. Demuestre que la torsión de una curva biregular PPA $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ se puede calcular con la fórmula

$$\tau(s) = -\frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \cdot \alpha'''(s)}{|k(s)|^2}$$

30. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregular PPA. Supongamos que todas sus rectas normales pasan por el mismo punto. Demuestre que la traza de α está contenida en una circunferencia.

31. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

- Demuestre que α es una curva diferenciable regular.
- Demuestre que su curvatura es diferente de cero si y sólo si $t \neq \pm\sqrt{2/3}$, $t \neq 0$.
- Pruebe que el límite de los planos osculadores cuando $t \to 0$, $t > 0$ es el plano $y = 0$, pero cuando $t \to 0$, $t < 0$ es el plano $z = 0$.
- Observe que α no es una curva plana. Observe asimismo que tiene torsión definida en cada $s \neq 0$, y que esta es constante e igual a cero.

32. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha = \alpha(t)$, una curva regular no necesariamente parametrizada por arco, y sea $\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $\beta = \beta(s)$, una reparametrización por arco, donde $s = s(t)$ se calcula desde t_0. Sea $t = t(s)$ la función inversa, y sean α', α'', etc, derivadas con respecto a t. Demuestre que

- $dt/ds = 1/|\alpha'|, \quad d^2t/ds^2 = -(\alpha' \cdot \alpha''/|\alpha'|^4)$.
- La curvatura de α en $t \in I$ es
$$k(t) = \frac{|\alpha' \wedge \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

- La torsión de α en $t \in I$ es

$$\tau(t) = -\frac{(\alpha' \wedge \alpha'') \cdot \alpha'''}{|\alpha' \wedge \alpha''|^2}.$$

33. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA con curvatura positiva. Entonces la traza de α es un arco de circunferencia si y sólo si tiene curvatura constante y su traza está contenida en una esfera.

34. Se dice que una curva PPA $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con curvatura positiva es una hélice cuando todas sus rectas normales son perpendiculares a una dirección dada. Probar que α es una hélice si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}$ con $\tau(s) = ak(s)$ para cada $s \in I$ (teorema de Lancret).

35. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA con $\tau(s) \neq 0$, $k'(s) \neq 0$ en I. Demostrar que la traza de α está contenida en una esfera si y solo si

$$\frac{1}{k^2} + \frac{k'^2}{k^4\tau^2}$$

es constante.

36. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva biregular PPA. Supongamos que para un $s \in I$ existe un plano (afín) Π que contiene la recta tangente a α en s y tal que para cualquier $\varepsilon > 0$, hay puntos de $\alpha(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ a ambos lados de Π. Demostrar que Π es el plano osculador de α en s.

37. Demostrar que si α, $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ son dos curvas biregulares con las mismas funciones de torsión, curvatura, y con $\|\alpha'\| = \|\beta'\|$, entonces son congruentes (esto es, hay un movimiento directo de $\mathbb{R}^3$ que lleva una en la otra).

38. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA. Definimos $\beta(s) = \alpha(-s)$. Demostrar que β está parametrizada por arco y hallar las funciones de curvatura y torsión de β. Demostrar que si $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ y $\tau_\alpha(-s) = -\tau_\alpha(s)$, entonces la traza de α es simétrica respecto al plano normal a α en $\alpha(0)$.

39. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA biregular. Demostrar que α es plana si y solo si todos los planos osculadores de α son concurrentes.

40. Demostrar que el cilindro $\{\,(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 = 1\,\}$ es una superficie y hallar una parametrización en cada punto.

41. Decida si el conjunto $\{\,(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\,\}$ es una superficie. Idem para $\{\,(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\,\}$.

42. Sea P el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x = y$. Definimos $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ como $\phi(u, v) = (u + v, u + v, uv)$ donde $U = \{\,(u, v) \,:\, u > v\,\}$. Decida si ϕ es una parametrización de P.

43. Sea $f(x,y,z)=(x+y+z-1)^2$. Halle los puntos y valores críticos de f. Decida para que valores c, $f^{-1}(c)$ es una superficie regular. Conteste las mismas preguntas cuando f se reemplaza por $f(x,y,z)=xyz^2$.

44. Sea $U=\{\,(\theta,\psi)\,:\,0<\theta<\pi, 0<\psi<2\pi\,\}$. Demuestre que $\phi\,:\,U\to\mathbb{R}^3$ dada por $\phi(\theta,\psi)=(\sin\theta\cos\psi,\sin\theta\sin\psi,\cos\theta)$ es una parametrización de S^2, y determine el entorno coordenado correspondiente. Una vez hecho esto, modifique ϕ para obtener una parametrización del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

45. Demuestre que $S=\{(x,y,z)\,:\,z=x^2-y^2\}$ es una superficie. Compruebe si $\phi_1(u,v)=(u+v,u-v,4uv)$ donde $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ y $\phi_2(u,v)=(u\cosh v,u\sinh v,u^2)$, donde $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ con $u\neq 0$ son parametrizaciones de S.

46. Halle una parametrización en cada punto del hiperboloide de dos hojas $-x^2-y^2+z^2=1$.

47. Dos puntos $p(t)$ y $q(t)$ se mueven a la misma velocidad. p empieza a moverse en $(0,0,0)$ a lo largo del eje z, mientras que q arranca de $(a,0,0)$ (donde $a\neq 0$) y se mueve en la dirección paralela al eje y. Demuestre que el conjunto unión de las líneas que pasan por $p(t)$ y $q(t)$ coincide con $\{\,(x,y,z)\,:\,y(x-a)+zx=0\,\}$. Decida si esto es una superficie regular.

48. Se considera la aplicación $\phi\,:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma: $\phi(u,v)$ es la intersección de la recta definida por los puntos $(u,v,0)$ y el polo norte $p^+=(0,0,1)$, con la esfera $S^2=\{\,(x,y,z)\,:\,x^2+y^2+z^2=1\,\}$. Se denomina a ϕ la proyección estereográfica desde el polo norte p^+.

1. Determine las ecuaciones de ϕ y pruebe que define una parametrización de la esfera con imagen S^2-p^+.
2. Encuentre una aplicación diferenciable $\psi:\mathbb{R}^3-\{(x,y,1)\,:\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\}\to R^2$ cuya restricción a S^2-p^+ coincide con ϕ^{-1}.
3. Si se define de forma similar la proyección estereográfica de polo sur $\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ (esto es, reemplazando p_+ por $p_-=(0,0,-1)$), halle las ecuaciones de $\theta^{-1}\circ\phi$, su dominio de definición, y compruebe que es un difeomorfismo.

49. Sean $r,R>0$ con $r<R$. Llamamos toro T al conjunto de puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ obtenido al hacer girar alrededor del eje $0Z$ la circunferencia C de centro $(0,R,0)$, radio r, y situada en el plano $x=0$. Demuestre que $T=F^{-1}(0)$, donde $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es

$$F(x,y,z)=\left(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2\right)^2-4R^2(r^2-z^2)$$

Deduzca como consecuencia que T es una superficie regular.

50. Demuestre que la aplicación $\phi(\Phi,\theta) = ((R + r\cos\Phi)\cos\theta, (R + r\cos\Phi)\sin\theta, r\sin\Phi)$ define una parametrización local del toro del ejercicio anterior cuando $(\Phi,\theta) \in (-\pi,\pi)$.

51. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable y biyectiva con $\det dF_p \neq 0$ en todo $p \in \mathbb{R}^3$. Si S es una superficie, demuestre que $F(S)$ también lo es.

52. Sea S una superficie de revolución obtenida al hacer girar la curva regular simple (i.e, sin autointersecciones) del plano XZ, $\alpha(t) = (\rho(t), 0, h(t))$, alrededor del eje OZ. Se supone que $\rho(t) > 0$ para todo t. Encontrar una parametrización local de S en los puntos donde $y \neq 0$. Idem en aquellos donde $x \neq 0$.

53. Construya un difeomorfismo entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

54. Demuestre que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano $z = 0$. Halle el plano tangente en cada uno de sus puntos.

55. Sean $S_1 = S^2 - \{(0,0,1),(0,0,-1)\}$, y $S_2 = \{\,(x,y,z)\ :\ x^2 + y^2 = 1\,\}$. A través de cada $p \in S_1$, tomamos la intersección de la semirrecta $0p$ con S_2. Demostrar que esto define una aplicación diferenciable $F : S_1 \to S_2$. Hallar la imagen mediante $dF_{(1,0,0)}$ de los vectores $(0,1,0)$ y de $(0,0,1)$.

56. Demuestre que un subconjunto $A \subset S$ de una superficie regular es a su vez una superficie si y sólo si es un abierto de S, i.e, hay un abierto U de $\mathbb{R}^3$ con $A = S \cap U$.

57. Demostrar que si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, y a es un valor regular, entonces el plano tangente a un punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $S = F^{-1}(a)$ coincide con el núcleo de dF_{p_0}. Usar esto para determinar en que puntos de $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ el plano tangente contiene el vector $(0,0,1)$. Compruébelo gráficamente.

58. Demuestre que los planos tangentes a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en puntos de la forma $(x,y,0)$ son paralelos al eje z.

59. Sea S el grafo de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Demuestre que la ecuación del plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ tiene por ecuación

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

60. Demuestre que los planos (afines) tangentes a una superficie de ecuación $z = xf(y/x)$, donde $x \neq 0$ y f es C^∞, pasan por el punto $(0,0,0)$.

61. Supongamos que $\phi : U \to S$ es una parametrización de una superficie de la forma $\phi(u,v) = \alpha_1(u) + \alpha_2(v)$, donde α_1 y α_2 son curvas regulares. Demuestre que los planos tangentes afines a lo largo de una curva coordenada dada son paralelos a una recta fija.

62. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con curvatura no nula. Supongamos que $S = \{\, \alpha(t) + v\alpha'(t) \,:\, t \in I, v \neq 0 \,\}$ es una superficie (llamada la superficie tangente de α). Demuestre que los planos tangentes a lo largo de la curva $v \to \alpha(t_0) + v\alpha'(t_0)$ coinciden.

63. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$. La unión de todas sus rectas normales se llama *helicoide*. Hallar una parametrización global. Hallar las ecuaciones del plano tangente a los puntos del helicoide.

64. Mostrar que todos los planos tangentes a la superficie $z = x^3 + y^3$ en los puntos con $z = 0$ forman un haz de planos.

65. Demostrar que si $f : S \to \mathbb{R}$ es la función $f(p) = u \cdot p$, entonces $df_p = 0$ si y solo si u es un vector normal a T_pS.

66. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|^2$, donde $p \in S$. Demuestre que $df_p(w) = 2w \cdot (p - p_0)$, $w \in T_pS$.

67. Un punto crítico de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ es un $p \in S$ tal que $df_p = 0$. Si $f : S \to \mathbb{R}$ está dada por $f(p) = |p - p_0|$, $p_0 \notin S$, demuestre que p es un punto crítico de S si y sólo si el segmento que une p con p_0 es normal a S en p.

68. Sea $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, y S una superficie tal que $L(S) \subset S$. Demuestre que $L|_S : S \to S$ es una aplicación diferenciable, y que $d(L|_S)_p(w) = L(w)$, donde $p \in S$ y $w \in T_pS$.

69. Demuestre que si todas las rectas normales a una superficie conexa pasan por el mismo punto, entonces la superficie está contenida en una esfera.

70. Halle la primera forma fundamental (los coeficientes) de las siguientes superficies con las parametrizaciones dadas:

- $\phi(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$ (elipsoide);
- $\phi(u,v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$ (paraboloide elíptico);
- $\phi(u,v) = (au \cosh v, bu \sinh v, u^2)$ (paraboloide hiperbólico);
- $\phi(u,v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u)$ (hiperboloide de dos hojas).

71. Sea S una superficie de revolución obtenida al hacer girar una curva regular simple en el plano YZ, $\alpha(t) = (0, \rho(t), h(t))$ con $\rho > 0$, $t \in (a,b)$ alrededor del eje Z. Halle parametrizaciones en cada uno de sus puntos, escribir los coeficientes de la primera forma fundamental en ellas, y usarlas para demostrar que el área de S está dada por $2\pi \int_a^b \rho(t)dt$ cuando α está parametrizada con respecto al arco.

72. Sea $\phi(\Phi, \theta) = ((R + r\cos\Phi)\cos\theta, (R + r\cos\Phi)\sin\theta, r\sin\Phi)$, $(\Phi, \theta) \in (-\pi, \pi)$, la parametrización local del toro estudiada en un ejercicio anterior. Halle la primera forma fundamental y el área del toro.

73. Si $\phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \log\cos v + u)$ con $u \in \mathbb{R}$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es una parametrización de la superficie S, demostrar que el par de curvas $\phi(u_1, v)$, $\phi(u_2, v)$ cortan a cada curva $\phi(u, v_0)$ (con v_0 constante) en segmentos con igual longitud.

74. Demostrar que $\phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(u, v) = (u\sin\alpha\cos v, u\sin\alpha\sin v, u\cos\alpha)$ es una parametrización de un cono con ángulo 2α en el vértice (obviamente, $\alpha < \pi/2$). Demostrar que la curva dada por $u(t) = c\exp(t\sin\alpha\cot\beta)$, $v(t) = t$ (con c, β constantes) interseca cada generatriz del cono con ángulo β.

75. Demuestre que el área de la región R de la superficie $z = f(x, y)$ está dada por

$$A = \int\int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy\,,$$

donde Q es la proyección de R sobre el plano xy.

76. Supongamos que S es una superficie regular que puede cubrirse mediante dos cartas (V_1, c_1), (V_2, c_2) tal que cada V_i es conexo, $V_1 \bigcap V_2 = W_1 \bigcup W_2$ donde W_1, W_2 son abiertos conexos disjuntos, y tal que el jacobiano del cambio de coordenadas en W_1 y en W_2 es de signos diferentes. Demostrar que S no es orientable.

77. Tomamos la circunferencia $C = \{\, (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = r^2 \,\}$ y el segmento abierto $L = (r, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -l < z < l \,\}$, donde $0 < l < r$. Traslademos el centro c de L a lo largo de C rotando al mismo tiempo L (en torno a dicho centro) en el plano determinado por c y el eje z, de forma que, cuando c ha recorrido un ángulo ψ, L haya rotado un ángulo $\psi/2$. El subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ barrido por el segmento L se llama *banda de Moebius*. Admitido que M es una superficie, demostrar que la aplicación

$$\phi(u, v) = \Big((r - v\sin\frac{u}{2})\cos u, (r - v\sin\frac{u}{2})\sin u, v\cos\frac{u}{2}\Big) \qquad u \in (-\pi, \pi), v \in (-l, l)$$

es una parametrización de M. Demostrar que la banda de Moebius es no orientable.

78. Si S_2 es una superficie orientable y $F : S_1 \to S_2$ es un difeomorfismo local, demostrar que S_1 es orientable. Use esto para demostrar que una superficie orientable no puede contener un abierto difeomorfo a una cinta de Moebius.

79. Si $f : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el *gradiente de* f se define como una aplicación $\operatorname{grad} f : S \to \mathbb{R}^3$ tal que

(i) $\operatorname{grad} f(p) \in T_pS$,

(ii) $\langle \operatorname{grad} f(p), v\rangle_p = df_p(v)$

para todo $p \in S$ $v \in T_pS$. Se pide:

1. Si $\phi : U \to S$ es una parametrización, halle las coordenadas de $\operatorname{grad} f_p$ en la base de vectores coordenados ϕ_u, ϕ_v de T_pS.

2. Use el apartado anterior para hallar el gradiente de una función $f : S = \{(x, y, 0)\} \to \mathbb{R}$ cuando se toma la parametrización natural en S.

3. Demuestre que sobre el círculo $\|v\| = 1$ en T_pS, $df_p(v)$ alcanza su máximo sobre el vector $v = \operatorname{grad} f/\|\operatorname{grad} f\|$ (siempre que $/\|\operatorname{grad} f\| \neq 0$).

80. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^2$ que contiene al origen, y $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, con $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Si S es el grafo de f, hallar su plano tangente en $(0,0,0)$. Después de elegir una normal unitaria N, determine $dN_{(0,0,0)}(\vec{w})$ donde $\vec{w} \in T_{(0,0,0)}S$ es un vector arbitrario.

81. Se considera el grafo de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. De todas las curvas diferenciables $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = (0,0,0)$, determine una con curvatura mínima en p. ¿Existe alguna con curvatura máxima?

82. Sea α una curva regular contenida en una superficie S. Si S tiene curvatura Gaussiana positiva $K > 0$, demuestre que la curvatura k_α de α en un punto p satisface $k_\alpha \geq \min(|k_1|, |k_2|)$ donde k_1, k_2 son las curvaturas principales de S en p.

83. Demuestre que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisecan a las asintóticas.

84. Demostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de tangencia son o bien parabólicos, o bien planos.

85. Supongamos que una superficie tiene la propiedad de que $|k_1| \leq 1$ y $|k_2| \leq 1$ en todos sus puntos. ¿Es cierto que la curvatura k de una curva cualquiera α en S cumple asimismo que $|k| \leq 1$?

86. Demuestre que la curvatura media en un punto $p \in S$ puede calcularse como

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi k_n(\theta)\, d\theta,$$

donde $k_n(\theta)$ es la curvatura normal en p a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ medido desde una dirección fija.

87. Demostrar que la suma de las curvaturas normales correspondientes a dos direcciones unitarias ortogonales en un punto $p \in S$ es una constante.

88. Demuestre que si la curvatura media se anula en un $p \in S$ y p no es un punto plano, entonces existen dos direcciones asintóticas ortogonales en p.

89. Sean $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con $DF_p \neq (0,0)$ en todo punto $p \in F^{-1}(0)$. Demuestre que $S = F^{-1}(0) \times \mathbb{R}$ es una superficie que tiene todos sus puntos parabólicos o planos, y un punto (x,y,z) es plano si y sólo si la curvatura de la curva plana $F^{-1}(0)$ en (x,y) es nula.

90. Pruebe que la superficie $z = \cos x + \cos y + xy - 2$ tiene un punto parabólico aislado.

91. Demuestre que una superficie conexa con todos sus puntos planos es necesariamente un abierto del plano.

92. Considérese la superficie parametrizada

$$\phi(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$

Determine los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental. Determine las curvaturas principales. Demuestre que las curvas coordenadas son líneas de curvatura. Pruebe que las curvas $u + v = a_0$, y las curvas $u - v = a_0$ son asintóticas.

93. Sea S una superficie orientada con aplicación de Gauss N. Si $\alpha : I \to S$ es una curva PPA biregular que no contiene puntos planos o parabólicos, demuestre que $\beta = N \circ \alpha$ es una curva regular (β se llama imagen esférica de α). Demuestre asimismo que si α es una línea de curvatura de S y k_α es su curvatura en p, entonces

$$k_\alpha = |k_n| k_\beta$$

donde k_n es la curvatura normal de α y k_β la curvatura de su imagen esférica.

94. Sean S_1 y S_2 dos superficies que se intersecan *transversalmente* a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : \mathbb{R} \to S_i$, $i = 1, 2$. Esto quiere decir que $S_1 \bigcap S_2 = \alpha(\mathbb{R})$, y que para todo $t \in \mathbb{R}$, $T_{\alpha(t)}S_1$ y $T_{\alpha(t)}S_2$ se intersecan en un subespacio de dimensión 1. Denotemos por $\theta : I \to \mathbb{R}$ el ángulo que S_1 forma con S_2 a lo largo de α (i.e, θ es el ángulo que forma la normal a S_1 con la normal a S_2). Supongamos además que α es una línea de curvatura en S_1. Demuestre que el ángulo θ es constante a lo largo de α si y sólo si α es una línea de curvatura en S_2.

95. Demuestre que una curva biregular es asintótica si y sólo si su plano osculador es tangente a la superficie en cada punto.

96. Demuestre que cualquier línea recta contenida en una superficie es una curva asintótica.

97. Demuestre que toda superficie compacta contiene al menos un punto elíptico.