Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Entrega 2

1.- a) Sea $A \in M_n$ una matriz simétrica e inversible que puede factorizarse en la forma $A = BC$ siendo $B \in M_n$ real y triangular inferior, $C \in M_n$ real y triangular superior y verificándose $diag(B) = diag(C)$. Demostrar que $C = B^T$. Deducir que A es simétrica definida positiva.

b) Sea $A \in M_n$ una matriz real con todos sus menores principales estrictamente positivos. Demostrar que existen $B \in M_n$ real y triangular inferior y $C \in M_n$ real y triangular superior, con $diag(B) = diag(C)$, de forma que $A = BC$.

a) En primer lugar, veamos que, en un caso general, si $M \in M_n$ es inversible y se puede descomponer como $M = N \cdot P$ con $N, P \in M_n$ cualesquiera, entonces N y P son inversibles. Este resultado lo vamos a utilizar repetidas veces a lo largo de la entrega y damos dos demostraciones sencillas que lo prueban:

i) Como M es inversible $\det(M) \neq 0$. Si $\det(N) = 0$ o $\det(P) = 0$, entonces $\det(M) = \det(N \cdot P) = \det(N) \cdot \det(P) = 0$, luego $\det(N) \neq 0$ y $\det(P) \neq 0$, es decir, N y P son inversibles.

ii) Si M es inversible $\exists M^{-1} \in M_n$ tal que $M \cdot M^{-1} = M^{-1} M = Id$, lo que escrito en términos de N y P es:

$$(N \cdot P) M^{-1} = M^{-1} (N \cdot P) = Id, \text{ es decir, } \begin{cases} N \cdot (P M^{-1}) = Id \Leftrightarrow N^{-1} = P M^{-1} \\ (M^{-1} N) P = Id \Leftrightarrow P^{-1} = M^{-1} N \end{cases}$$

Por tanto, N y P son inversibles y esas son sus inversas.

Volviendo al ejercicio, esto nos dice que B y C son inversibles, es decir, existen B^{-1} y C^{-1}.

Como además sabemos que B es triangular inferior y C es triangular superior, entonces B^{-1} es triangular inferior y C^{-1} es triangular superior por lo probado en clase. Por ser A simétrica:

$A = B \cdot C = A^T = (B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T$, y como existen las inversas de B y C (y B^T y C^T) podemos multiplicar por ellas resultando

$$B \cdot C = C^T B^T \iff C = B^{-1} C^T B^T \Leftrightarrow C (B^T)^{-1} = B^{-1} C^T \iff C(B^{-1})^T = B^{-1} C^T.$$

Por ser B^{-1} triangular inferior y C^T triangular inferior (C es triangular superior), como el producto de triangulares inferiores es triangular inferior, el miembro de la derecha es triangular inferior. Análogamente, C es triangular superior y $(B^{-1})^T$ es triangular superior (B^{-1} es triangular inferior) y el producto de triangulares superiores es triangular superior, luego el miembro de la izquierda es triangular superior. Por tanto, ambos miembros son iguales a una matriz triangular superior y triangular inferior, es decir, a una matriz diagonal D:

$$C (B^{-1})^T = B^{-1} C^T = D.$$

Queremos probar que $D = Id$ porque entonces $C^T = B \iff C = B^T$.

Nosotros sabemos que el resultado de multiplicar dos matrices triangulares (superiores o inferiores) es otra matriz del mismo tipo, pero, además, sabemos que los elementos de la diagonal de la matriz resultado son el producto de los elementos correspondientes de la diagonal de las matrices triangulares de partida, es decir,

si $N = (n_{ij})_{i,j=1}^n$ es triangular superior (inferior) y $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ es triangular superior (inferior) entonces $N \cdot P = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ es triangular superior (inferior) y

$$m_{ii} = n_{ii} \cdot p_{ii} \quad \forall i = 1 \ldots n. \quad (*_1)$$

También sabemos que si $N = (n_{ij})_{i,j=1}^n$ es triangular superior (inferior) e inversible entonces su inversa $N^{-1} = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ es triangular superior (inferior) y además $m_{ii} = \frac{1}{n_{ii}}$ $\forall i = 1 \ldots n$. (Nótese que como N es inversible y triangular

$(*_2)$

$h_{ii} \neq 0 \ \forall i = 1 \cdots n$).

Por tanto, si $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, $B^{-1} = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, $C^{-1} = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$ y $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ entonces

$$d_{ii} \underset{(*1)}{=} \beta_{ii}\gamma_{ii} \overset{(\gamma_{ij} = c_{ji})}{\underset{(*2)}{=}} \frac{1}{b_{ii}} \cdot c_{ii} = 1 \quad \forall i = 1 \cdots n \text{ porque por hipótesis}$$

$$\mathrm{diag}(B) = \mathrm{diag}(C) \iff b_{ii} = c_{ii} \quad \forall i = 1 \cdots n.$$

Esto prueba que $D = Id$, luego $C^T = B$. Falta ver que A es simétrica definida positiva. A es simétrica por hipótesis y para ver que es definida positiva sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y veamos que

$$x^T A x > 0.$$

$$x^T A x = x^T (BC) x = x^T C^T C x = (Cx)^T (Cx) = y^T y \quad \text{para } y = Cx.$$

$$y^T y = \sum_{i=1}^n y_i^2 > 0 \iff y_i \neq 0 \ \forall i = 1 \cdots n \iff y \neq 0 \iff Cx \neq 0 \iff$$

$x \neq 0$ por ser C inversible.

b) A verifica las hipótesis del Teorema de la factorización LU ya que sus menores son positivos (no nulos) luego existe una única matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y existe una única matriz triangular superior U tal que $A = LU$. A es inversible porque su menor principal de orden n (su determinante) no es cero (es positivo). Por el mismo argumento que antes L y U son inversibles y como U es triangular superior todos los elementos de su diagonal son no nulos.

Consideramos $D = \mathrm{diag}(u_{ii})$ una matriz diagonal que tiene en su diagonal la de U. Por lo dicho anteriormente D no tiene elementos nulos en su diagonal luego existe su inversa D^{-1}. Podemos escribir A como $A = LU = L(DD^{-1})U = LD(D^{-1}U) = LDR$ donde

R es una matriz triangular superior (por ser producto de triangulares superiores) y tiene unos en su diagonal (los elementos de la diagonal de D^{-1} son $\frac{1}{u_{ii}}$ y hemos visto cuáles son los elementos de la diagonal del producto de triangulares superiores). Veamos que $u_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \cdots n$. Realizamos la descomposición por cajas:

(Hasta aquí es el ejercicio 6 de la hoja 3)

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array}\right), \quad L = \left(\begin{array}{c|c} L_k^1 & \mathbf{0}_L \\ \hline E_k & L_k^2 \end{array}\right), \quad U = \left(\begin{array}{c|c} U_k^1 & F_k \\ \hline \mathbf{0}_u & U_k^2 \end{array}\right) \quad \text{donde}$$

A_k, L_k^1 y U_k^1 son las submatrices principales de dimensión $k \times k$ de las matrices A, L y U, respectivamente, L_k^1 y U_k^1, por la forma de L y U son triangular inferior con unos en la diagonal y triangular superior, respectivamente y $B_k, C_k, D_k, E_k, \mathbf{0}_L, \mathbf{0}_u$ y F_k de dimensiones adecuadas. Por el producto por cajas de matrices:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array}\right) = LU = \left(\begin{array}{c|c} L_k^1 & O_L \\ \hline E_k & L_k^2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_k^1 & F_k \\ \hline O_u & U_k^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_k^1 U_k^1 & L_k^1 F_k \\ \hline E_k U_k^1 & E_k F_k + L_k^2 U_k^2 \end{array}\right), \quad \text{luego}$$

$A_k = L_k^1 U_k^1$. Tomando determinantes

$$\det(A_k) = \det(L_k^1 U_k^1) = \det(L_k^1)\det(U_k^1).$$

L_k^1 es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal luego $\det(L_k^1) = 1$.

U_k^1 es una matriz triangular superior luego $\det(U_k^1) = \prod_{i=1}^{k} u_{ii}$.

Por último, $\det(A_k)$ no es otra cosa que un menor principal de A, que por hipótesis son positivos luego tenemos que

$$\prod_{i=1}^{k} u_{ii} > 0 \quad \forall k = 1 \cdots n \iff u_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \cdots n.$$

Ahora que sabemos que $u_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \cdots n$ podemos tomar raíces cuadradas (y asegurar que seguimos en $\mathbb{R}$) y considerar $S = \operatorname{diag}(\sqrt{u_{ii}})$ la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son $s_{ii} = \sqrt{u_{ii}} \quad \forall i = 1 \cdots n$.

Es claro que $D = S \cdot S$ luego

$$A = LDR = L(S \cdot S)R = (LS)(SR) = B \cdot C. \text{ para } B = LS \text{ y } C = SR.$$

Como L, S y R son reales B y C también lo son. Además, B es triangular inferior por ser producto de triangular inferior y diagonal (triangular inferior) y C es triangular superior por ser producto de diagonal (triangular superior) y triangular superior. Además los elementos de la diagonal de B y C coinciden (son $\sqrt{u_{ii}}$) porque L y R tenían unos en sus diagonales luego $\text{diag}(B) = \text{diag}(C)$ y podemos concluir que B y C son las matrices del enunciado.

2.- Sea $A \in M_n$ una matriz inversible

a) Probar que si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores entonces existe una matriz $D \in M_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1 D$ y $U_2 = D^{-1} U_1$.

b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.

c) Demostrar que si, además, A es simétrica y admite factorización LU, cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L.

a) Como A es inversible, por lo visto al principio del ejercicio 1.a) también lo son L_1, L_2, U_1 y U_2. Por tanto, multiplicando por sus inversas:

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \Leftrightarrow U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2 \Leftrightarrow U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2.$$

El miembro de la derecha es una matriz triangular inferior por ser producto de triangulares inferiores (la inversa de una matriz triangular inferior es triangular inferior) y el miembro de la izquierda es una matriz triangular superior por el mismo razonamiento. Por tanto, ambos miembros son iguales a una matriz triangular superior e inferior, es decir, diagonal (D).

$D = U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$. D es inversible por ser producto de matrices inversibles y multiplicando a la izquierda por L_1 o a la izquierda por U_1^{-1} se tiene:

$$L_1 D = L_2 \quad y \quad U_1^{-1} D = U_2^{-1} \iff (U_1^{-1} D)^{-1} = D^{-1} U_1 = U_2$$

que es lo que queríamos probar.

b). Sean B_1 y B_2 matrices reales triangulares inferiores tales que $A = B_1 B_1^T = B_2 B_2^T$. Esto es un caso particular del apartado a) para $L_1 = B_1$, $L_2 = B_2$, $U_1 = B_1^T$, y $U_2 = B_2^T$ luego existe D diagonal tal que $\boxed{B_2 = B_1 D}$ y $B_2^T = D^{-1} B_1^T \iff B_2 = B_1 (D^{-1})^T$

Por tanto $B_2 = B_1 D = B_1 (D^{-1})^T \underset{\substack{B_1 \text{ inversible por serlo } A \\ \text{y el mismo argumento}}}{\iff} D = (D^{-1})^T \iff D^T = D^{-1} \underset{D \text{ diagonal}}{\iff} D = D^{-1}$

$\iff D^2 = Id$. Como $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{n}$ es diagonal $d_{ii}^2 = 1$ $\forall i = 1 \dots n$, es decir, $d_{ii} = \pm 1$ $\forall i = 1 \dots n$.

c) Como A es simétrica y admite factorización LU.

$A = LU = A^T = (LU)^T = U^T L^T$. Esto vuelve a ser un caso particular del apartado a) para $L_1 = L$, $L_2 = U^T$, $U_1 = U$, $U_2 = L^T$ luego existe D diagonal tal que $U^T = LD$ y $L^T = D^{-1} U$. Ambas condiciones son equivalentes:

$$U^T = LD \iff U^T D^{-1} = L \iff (U^T D^{-1})^T = L^T \iff L^T = (D^{-1})^T U \overset{D \text{ diagonal}}{=} D^{-1} U.$$

Vimos en el problema 7 de la hoja 2 que al multiplicar a una matriz por la derecha por una matriz diagonal, sus columnas quedaban multiplicadas por los correspondientes elementos de la matriz diagonal. Por tanto, las columnas de U^T son iguales a las columnas de L multiplicadas por un cierto factor no nulo. Este factor es no nulo ya que la matriz D

no tiene ceros en su diagonal por ser inversible (producto de inversibles porque A lo es y argumento de 1.a)). Esto quiere decir que cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L.

3.- a) Se considera una matriz $A \in M_n$ escrita de la forma

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^T & \alpha \end{array}\right)$ siendo $A_{n-1} \in M_{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A_{n-1} es inversible y admite factorización LU $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$$

b) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si todos los menores principales de la matriz A son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.

a) El resultado se cumple si y solo si $\exists x, y \in \mathbb{R}^{n-1}, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^T & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}y \\ \hline x^T U_{n-1} & x^T y + \beta \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1} \checkmark \\ b = L_{n-1}y \\ a^T = x^T U_{n-1} \\ \alpha = x^T y + \beta \end{array}\right.$$

Por hipótesis A_{n-1} es inversible y $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$, luego L_{n-1} y U_{n-1} son también inversibles (mismo argumento que en 1.a)). Basta entonces tomar

$y = L_{n-1}^{-1} b$, $x = (U_{n-1}^T)^{-1} a$, $\beta = \alpha - a^T U_{n-1}^{-1} L_{n-1}^{-1} b = \alpha - a^T A_{n-1}^{-1} b$.

$\Updownarrow$ $y L_{n-1} = b$

$\Updownarrow$ $x^T = a^T U_{n-1}^{-1}$ $\Updownarrow$ $x^T U_{n-1} = a^T$

$\Updownarrow$ $\alpha = \beta + x^T y$

b) Veamos que $\forall n \geq 1$ se cumple que si A es una matriz de dimensiones $n \times n$ tal que todos sus menores principales son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.

Caso base.

Para $n=1$ $A = (\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y basta tomar $L = (1)$ y $U = (\alpha)$ que verifican trivialmente la propiedad.

Paso inductivo.

Supongamos probado el resultado para las matrices cuadradas de dimensión $(n-1) \times (n-1)$ y veamos que es cierto para las de dimensión $n \times n$.

Sea $A \in M_n$ y que tiene todos sus menores principales no nulos. En particular, su determinante (menor principal de orden n) es no nulo, luego A es inversible.

Escribimos A como $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^T & \alpha \end{array}\right)$ con $A_{n-1} \in M_{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ siendo A_{n-1} la submatriz principal de dimensiones $(n-1) \times (n-1)$. Como todos los menores de A son distintos de 0 entonces todos los menores de A_{n-1} son distintos de 0 ya que el menor de orden k con $k \in \{1 \dots n-1\}$ de A_{n-1} es es menor de orden k de A. Por la hipótesis de inducción, existen L_{n-1} triangular inferior con unos en la diagonal y U_{n-1} triangular inferior tales que $A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$. Por el apartado a) como A_{n-1} es inversible (su determinante es el menor principal de orden $n-1$ de A que no es 0) y se verifican las demás hipótesis existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right).$$

Si llamamos $L = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline x^T & 1 \end{array}\right)$ y $U = \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$ se tiene que L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal (porque L_{n-1} lo es y la estructura de L) y U es una matriz triangular superior (porque U_{n-1} lo es y estructura de U) y tales que $A = LU$. Por tanto queda probado el paso inductivo y la propiedad $\forall n \geq 1$.