
Definiciones básicas y ejemplos

En esta lección se introducen algunas de las definiciones y propiedades básicas de la teoría de las superficies en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . El punto de vista adoptado es esencialmente diferente del empleado en el caso de las curvas: si las curvas han sido definidas como *aplicaciones*, las superficies son *subconjuntos* del espacio euclídeo, que se pueden *parametrizar localmente* mediante aplicaciones diferenciables definidas en abiertos del plano, es decir mediante dos parámetros independientes. Las parametrizaciones nos permiten trasladar conceptos y objetos geométricos del plano a las superficies y recíprocamente. La teoría que se establece así es *local*, en el sentido de que se estudian propiedades de la superficie en el entorno de un punto de la misma. Las parametrizaciones utilizadas cubren, en general, sólo una parte de la superficie y a menudo no es posible encontrar una parametrización que describa la superficie total. La esfera es el ejemplo más inmediato de esta situación.

Definición 1.1. Un subconjunto S de \mathbb{R}^3 recibe el nombre de *superficie (diferenciable)* si para cada punto $p \in S$ existe una aplicación $\varphi : U \rightarrow S$ definida en un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , tal que:

- (1) φ es un homeomorfismo de U sobre un entorno abierto $W = \varphi(U)$ de p en S (es decir, $W = V \cap S$ para cierto entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3),
- (2) φ es diferenciable, es decir, tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes (como aplicación $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$),
- (3) la aplicación lineal derivada $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $q \in U$.

En lo que sigue emplearemos la notación $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones reales de las variables u, v . A su vez, u y v reciben el nombre de *coordenadas locales* del punto $\varphi(u, v)$ de S . Estas coordenadas desempeñan un papel semejante al de las coordenadas cartesianas en la geometría del plano. La aplicación lineal $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está representada

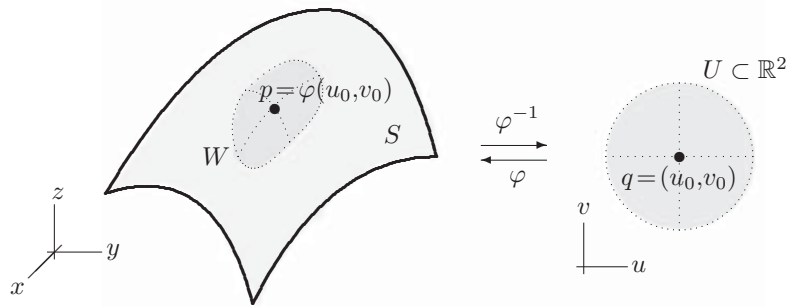
por la *matriz jacobiana*

$$J_\varphi(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix},$$

y la condición (3) de la definición anterior equivale a que $J_\varphi(q)$ tenga rango 2.

Advertimos ahora ya que en este texto indicaremos casi siempre las derivadas parciales mediante subíndices: x_u por $\frac{\partial x}{\partial u}$, x_v por $\frac{\partial x}{\partial v}$, etcétera. Es una notación muy sencilla que mejora enormemente la legibilidad, aunque algunas veces convenga utilizar también la notación estándar.

La aplicación $\varphi : U \rightarrow S$ recibe el nombre de *parametrización (local) de S* . De hecho, φ parametriza el entorno W de p que, en consecuencia, recibe el nombre de *entorno coordinado de p* .



La condición (1) de la definición significa que el plano y S son *localmente homeomorfos*, y las dos condiciones adicionales (2) y (3) que son lo que más tarde denominaremos *localmente difeomorfos*. Hay aquí una importante distinción entre lo puramente topológico y lo diferencial. Por otra parte, la condición (1) no es consecuencia de (2) y (3), pero se tiene una implicación más débil que es útil para construir superficies:

Proposición 1.2. Sea V un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 y sea $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable con derivada $d_q\varphi$ inyectiva en un punto $q \in V$. Entonces ese punto tiene un entorno abierto $U \subset V$ cuya imagen $S = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\varphi|U$ una parametrización de S .

Demostración. En primer lugar, $J_\varphi(q)$ tendrá un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo el correspondiente a (x, y) , y reduciendo V podemos suponer que es no

nulo en todo punto de V . Así, es la condición (1) de la definición de superficie la que deseamos conseguir. Para ello definimos $\tilde{\varphi} : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\tilde{\varphi}(u, v, w) = \varphi(u, v) + (0, 0, w)$. Claramente, el determinante jacobiano de $\tilde{\varphi}$ en $(q, 0)$ es el menor de orden 2 de $J_\varphi(q)$ que hemos seleccionado antes, y por tanto es no nulo. En consecuencia, por el teorema de inversión local $\tilde{\varphi}$ es un difeomorfismo local en $(q, 0)$, es decir, existen entornos abiertos $U \subset V$ de q y $W \subset \mathbb{R}$ de 0 tales que $\tilde{\varphi}(U \times W)$ es abierto en \mathbb{R}^3 y $\tilde{\varphi}$ induce por restricción un difeomorfismo de $U \times W$ sobre $\tilde{\varphi}(U \times W)$. En particular, induce un homeomorfismo de $U \times \{0\}$ sobre $\tilde{\varphi}(U \times \{0\}) = \varphi(U)$ y por ello $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ es homeomorfismo. Ésta es la condición (1) deseada. ■

Observación 1.3. (1) Si $h : U' \rightarrow U$ es un difeomorfismo entre dos abiertos del plano, la composición $\psi = \varphi \circ h : U' \rightarrow S$ es otra parametrización local.

(2) Si $\varphi : U \rightarrow S$ es una parametrización local entonces para todo abierto no vacío $U_0 \subset U$ la restricción $\varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow S$ es también una parametrización local. Esto se aplica por ejemplo a cualquier imagen inversa $U_0 = \varphi^{-1}(W_0)$ de un subconjunto abierto W_0 de $W = \varphi(U)$. También sirve para conseguir entornos U_0 de q especiales (por ejemplo un disco).

(3) Dada la naturaleza local de las definiciones, cualquier subconjunto abierto de una superficie diferenciable es a su vez una superficie diferenciable. De hecho, un subconjunto de \mathbb{R}^3 es una superficie diferenciable si y sólo si es unión de subconjuntos abiertos suyos que son superficies diferenciables. ■

En relación con la última observación, en ocasiones interesa trabajar con familias de parametrizaciones locales que conjuntamente recubren la totalidad de la superficie. En la siguiente definición fijamos este concepto.

Definición 1.4. Se llama *atlas* de una superficie S a una familia \mathcal{A} de parametrizaciones locales $\varphi_i : U_i \rightarrow S$ tal que

$$S = \bigcup_i \varphi_i(U_i).$$

(1.5) Cambios de coordenadas. Como una superficie admite muchas parametrizaciones locales diferentes es necesario conocer la expresión que relaciona las coordenadas en aquellas regiones de la superficie en que dos parametrizaciones se solapan. Usaremos la siguiente terminología.

Sean $\varphi : U \rightarrow S$ y $\psi : U' \rightarrow S$ dos parametrizaciones de una superficie

diferenciable S . Si se cumple $\varphi(U) \cap \psi(U') \neq \emptyset$ entonces la aplicación

$$\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \rightarrow \varphi^{-1}(\psi(U'))$$

es un homeomorfismo entre dos abiertos no vacíos de \mathbb{R}^2 . Este homeomorfismo se denomina *cambio de coordenadas*, pues expresa las coordenadas (u, v) definidas por la parametrización φ como funciones de las coordenadas (s, t) definidas por la parametrización ψ . De manera análoga se tiene el cambio inverso $\psi^{-1} \circ \varphi$. Más adelante volveremos sobre estos homeomorfismos. ■

(1.6) Líneas coordenadas. Consideremos de nuevo una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Si fijamos un punto $q = (u_0, v_0) \in U$, tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \subset U,$$

de modo que la aplicación $\Gamma : u \mapsto \varphi(u, v_0)$ define una curva parametrizada en el intervalo $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$, cuya traza está contenida en $W = \varphi(U) \subset S$ y pasa por el punto $p = \varphi(u_0, v_0)$. Esta curva recibe el nombre de *línea coordenada* $v = v_0$, y tiene como vector tangente en p el vector

$$\Gamma'(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\varphi(u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{u - u_0} = \varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q));$$

denotaremos $\varphi_{u,p}$, o si no hay riesgo de confusión φ_u , este vector. Análogamente se define la línea coordenada $u = u_0$, cuyo vector tangente $\varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$ denotamos $\varphi_{v,p}$ o φ_v . Obsérvese que los vectores tangentes $\varphi_{u,p}$ y $\varphi_{v,p}$ son precisamente las columnas de la matriz de $d_q\varphi$:

$$\varphi_{u,p} = d_q\varphi(1, 0), \quad \varphi_{v,p} = d_q\varphi(0, 1).$$

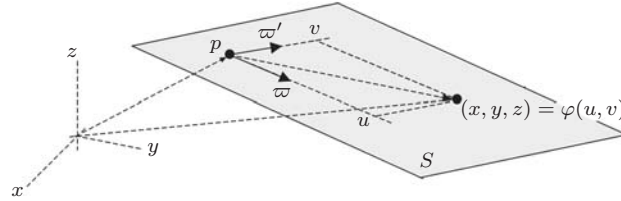
Esto implica que los dos vectores son independientes y en particular ninguno es nulo, de modo que las dos curvas coordenadas son regulares. ■

A continuación se presentan algunos ejemplos importantes de superficies.

Ejemplos 1.7. (1) Los planos son superficies diferenciables.

En efecto, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el plano afín que pasa por el punto $p \in \mathbb{R}^3$ con dirección \vec{S} . Sean $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$ y $\varpi' = (\varpi'_1, \varpi'_2, \varpi'_3)$ dos vectores unitarios perpendiculares entre sí que generan \vec{S} (una base ortonormal de \vec{S}). El plano S se parametriza linealmente de la manera habitual mediante

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto p + u\varpi + v\varpi'.$$



Ésta es de hecho una parametrización global de S en el sentido de la definición de superficie diferenciable. Para verlo conviene observar que por ser ϖ y ϖ' unitarios y perpendiculares, las coordenadas u y v se expresan mediante productos escalares como sigue:

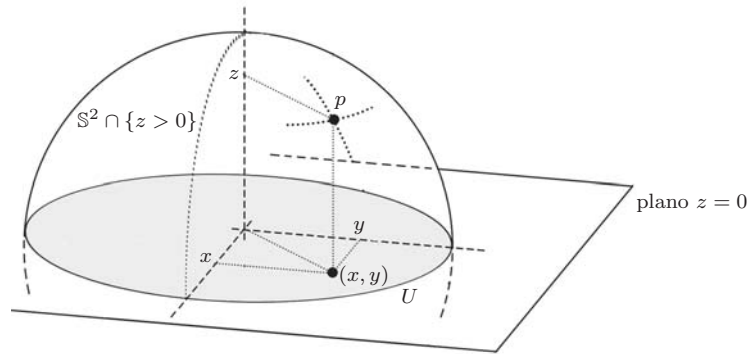
$$u = (x - p)\varpi, \quad v = (x - p)\varpi'.$$

lo que muestra que $\varphi^{-1} : x \mapsto (u, v)$ es continua. La parametrización es diferenciable por ser lineal, y su matriz jacobiana tiene por columnas los vectores ϖ y ϖ' que son independientes, luego el rango es 2.

(2) La *esfera unidad* de \mathbb{R}^3 es el subconjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Este es un ejemplo importante de superficie. Una manera de justificar esta afirmación es proyectar la esfera sobre planos ecuatoriales. Por ejemplo, el hemisferio abierto superior $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$ de la esfera se proyecta sobre el disco abierto $U : x^2 + y^2 < 1$ del plano $z = 0$.



Esta proyección es un homeomorfismo cuyo inverso es la aplicación diferenciable $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. La matriz jacobiana de esta aplicación es del

tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

luego tiene siempre rango 2. La esfera se puede recubrir en su totalidad mediante seis parametrizaciones análogas a la anterior (¿por qué tantas?) y, por 1.3(3), p. 3, es una superficie.

(3) Otra superficie familiar es el *cilindro circular* $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. En este caso podemos proyectar sobre planos que contengan al eje de las z 's. Por ejemplo, sobre dos planos, desde los dos lados de cada uno, cuatro proyecciones; o mejor sobre tres planos, desde un lado de cada uno, tres proyecciones.

(4) Si partimos de una hélice circular

$$\zeta(u) = (\cos u, \sin u, bu), \quad b > 0,$$

y consideramos la unión S de todas las rectas que pasan por puntos de esta hélice e intersecan ortogonalmente el eje z , es fácil ver que S es la imagen de la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, bu).$$

El conjunto S recibe el nombre de *helicoides* y es una superficie diferenciable. De hecho, φ es una parametrización de S . La aplicación φ es diferenciable y su matriz jacobiana en un punto dado es

$$\begin{pmatrix} -v \sin u & \cos u \\ v \cos u & \sin u \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

que como se comprueba inmediatamente, tiene siempre rango 2. En fin, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ es biyectiva, con inversa dada por:

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{z}{b}, \frac{x}{\cos(z/b)} \right) & \text{si } \cos(z/b) \neq 0, \\ \left(\frac{z}{b}, \frac{y}{\sin(z/b)} \right) & \text{si } \sin(z/b) \neq 0. \end{cases}$$

Esta misma expresión muestra que φ^{-1} es continua y φ es un homeomorfismo sobre S . Por tanto φ es una parametrización como se pretendía. ■



Observación 1.8. Para establecer que un conjunto S es una superficie diferenciable, se procede a recubrir con las parametrizaciones que hagan falta. En ocasiones

basta con una sola, que se califica de *global*. A este respecto hay que entender que minimizar el número de parametrizaciones depende en realidad de nuestra habilidad. Pero en última instancia, el número mínimo de parametrizaciones necesario tiene significado topológico, fuera del alcance en este texto, pero que puede ilustrarse en algunos ejemplos.

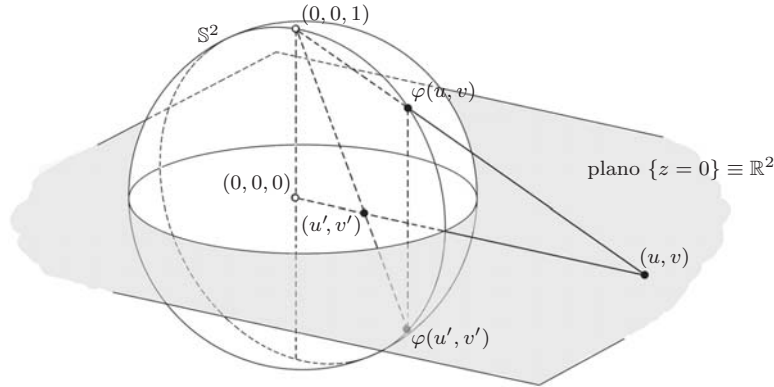
(1) La esfera puede cubrirse con dos parametrizaciones. En efecto, toda la esfera menos un punto puede parametrizarse mediante una *proyección estereográfica* desde el punto en cuestión. Por ejemplo, la proyección estereográfica desde el polo norte es la aplicación

$$W = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

cuya inversa es la parametrización

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow W : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

La figura siguiente ilustra estas aplicaciones.



Esta parametrización junto con cualquier otra que contenga el polo norte $(0, 0, 1)$ cubren la esfera. Y nunca basta una parametrización, pues, si bastara, la esfera sería homeomorfa a un abierto del plano, lo que es imposible por ser la esfera compacta.

(2) Un cilindro puede cubrirse con una parametrización global, de nuevo recurriendo a una proyección estereográfica. Por ejemplo, proyectando el tronco de cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z < 1$, desde el punto $(0, 0, 1)$ se obtiene un difeomorfismo

sobre el abierto del plano $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Obsérvese que el abierto U no es homeomorfo a un disco, de modo que aquí de nuevo interviene la topología. (Véase el prob. 7 de esta lección.) ■

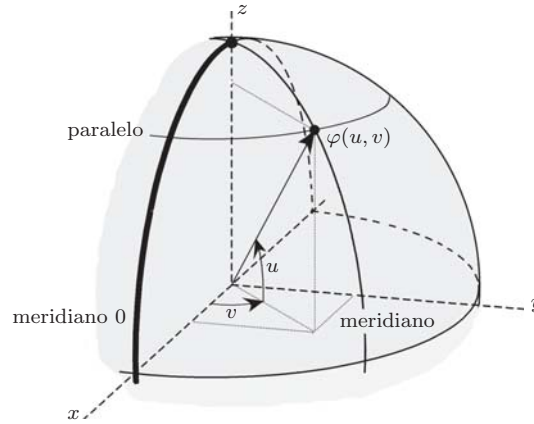
De la esfera conviene describir otra parametrización más, que apela a una terminología bien conocida.

Ejemplo 1.9. Vamos a formalizar en nuestro contexto los conceptos de *latitud* y *longitud*. Consideramos la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y definimos la aplicación siguiente:

$$\varphi : U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

La imagen $W = \varphi(U)$ se identifica fácilmente: es el complementario en \mathbb{S}^2 del *meridiano cero*, formado por los puntos $(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2$ tales que $x \geq 0$.

Según vemos en la figura, u es la latitud y v la longitud del punto $p = \varphi(u, v)$, en el sentido habitual que conocemos en cartografía:



La aplicación φ es inyectiva, y que $\varphi : U \rightarrow W$ es abierta, y por tanto homeomorfismo, es un ejercicio sencillo que dejamos al lector. En fin, φ es diferenciable, y su matriz jacobiana

$$J_{\varphi}(q) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 ($\cos u \neq 0$ en U). Por tanto, φ es una parametrización de la esfera.

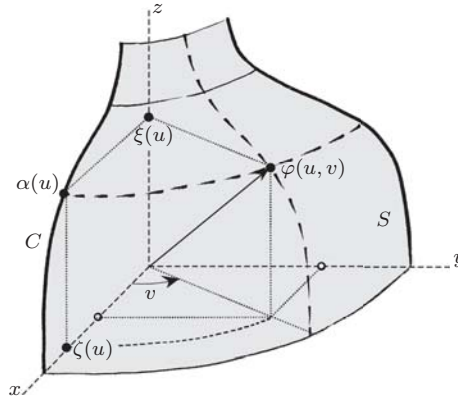
Las líneas coordenadas $u = u_0$ (curvas de latitud constante) son por supuesto los *paralelos*, y las $v = v_0$ (curvas de longitud constante) son los *meridianos*. ■

Los conceptos de meridiano y paralelo corresponden en realidad a la siguiente construcción general, que presentamos con alguna restricción técnica que no la limita sustancialmente.

(1.10) Superficies de revolución. (1) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular cuya traza C está contenida en el semiplano xz con $x > 0$, y tal que $\alpha : I \rightarrow C$ es un homeomorfismo (en otras palabras, α es un arco de Jordan). En consecuencia, la curva se expresará como $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$ con $\zeta(u) > 0$. Efectuemos una rotación alrededor del eje z , y designemos por v el ángulo de esa rotación (medido a partir del semieje positivo x). Al variar el ángulo v obtenemos un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ descrito por las ecuaciones

$$x = \zeta(u) \cos v, \quad y = \zeta(u) \sin v, \quad z = \xi(u),$$

según ilustramos a continuación:



Decimos que S es la *superficie de revolución* generada por la curva C . Resulta que S es una superficie diferenciable.

En efecto, la aplicación

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)).$$

es, claramente, diferenciable, con matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \zeta'(u) \cos v & -\zeta(u) \sin v \\ \zeta'(u) \sin v & \zeta(u) \cos v \\ \xi'(u) & 0 \end{pmatrix};$$

esta matriz tiene rango 2 (como se comprueba fácilmente por ser $\zeta(u) > 0$ y $\alpha'(u) \neq 0$). En consecuencia, φ induce parametrizaciones locales en todos los abiertos $U \subset \mathbb{R}^2$ en que induzca un homeomorfismo sobre la imagen, y ésta sea un subconjunto abierto de S . Afirmamos que esto pasa para los del tipo $U = I \times (\theta, \theta + 2\pi)$, para los que $\varphi(U)$ es toda S salvo el corte con el plano vertical que forma un ángulo θ con el plano coordenado $y = 0$.

Para verlo utilizaremos las parametrizaciones $\alpha(t)$ de C y $\Gamma(v) = (\cos v, \sin v)$, $\theta < v < \theta + 2\pi$, de la circunferencia menos el punto $(\cos \theta, \sin \theta)$; ambas parametrizaciones son homeomorfismos sobre su imagen. Ahora bien, para $(x, y, z) = \varphi(u, v) \in \varphi(U)$ se tiene $\zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$, de modo que

$$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \quad v = \Gamma^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Esto muestra que $\varphi|U : U \rightarrow \varphi(U)$ es inyectiva y que su inversa es continua.

(2) Las curvas $v = v_0$: las intersecciones de S con los semiplanos verticales que contienen al eje de rotación y forman un ángulo v_0 con el plano xz . Sus vectores tangentes φ_u son los vectores tangentes a la curva obtenida al rotar C hasta ese plano, que se obtienen rotando los vectores $\alpha'(u)$. Naturalmente estas curvas son los *meridianos*. Por ejemplo, la imagen $W = \varphi(U)$ es toda la superficie S salvo el meridiano $v = \theta$.

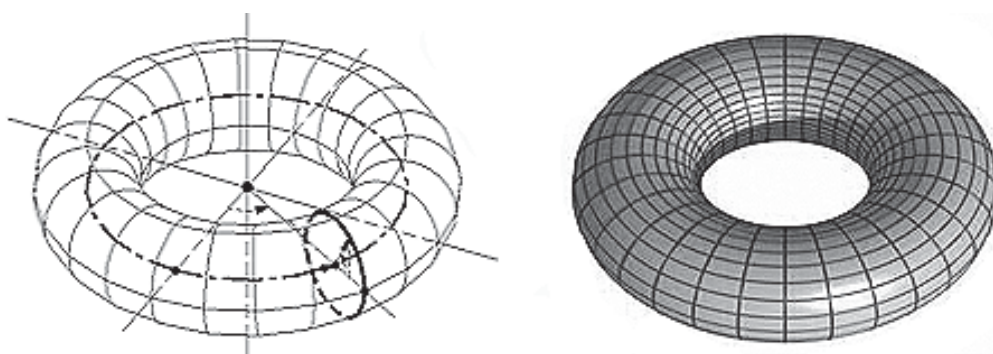
(3) Las curvas $u = u_0$: las intersecciones de S con los planos horizontales $z = \xi(u)$. Sus vectores tangentes son $\varphi_v = \zeta(u)(-\sin v, \cos v, 0)$, tangentes a la circunferencia en ese plano. Estas curvas se llaman, claro, *paralelos*. ■

Claramente la esfera *salvo los polos* es una superficie de revolución, y los paralelos y los meridianos son quienes deben ser. El cilindro circular es otro ejemplo sencillo de superficie de revolución. Pero, tal vez, la superficie de revolución más célebre es la siguiente:

Ejemplo 1.11. Se denomina *toro de revolución* la superficie generada por una circunferencia C contenida en el semiplano $\{x > 0, y = 0\}$ que gira alrededor del

eje z . Por ejemplo, si C tiene centro $(c, 0, 0)$ y radio $r < c$, el conjunto S se puede describir mediante las fórmulas

$$x = (c + r \cos u) \cos v, \quad y = (c + r \cos u) \sin v, \quad z = r \sin u.$$

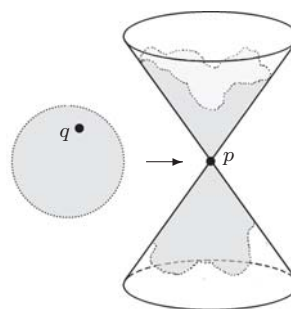


En la figura precedente se ve cómo se genera el toro, con sus meridianos y sus paralelos. El lector estudiará entre qué extremos deben variar las coordenadas u, v para definir auténticas parametrizaciones. ■

También hay que conocer ejemplos de subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ que *no son* superficies diferenciables, y por qué no lo son. Terminamos con esto la lección.

Contraejemplos 1.12. (1) Consideremos el *cono doble* $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Este conjunto no es una superficie por una razón topológica: *no es localmente homeomorfo al plano*.

En efecto, si lo fuese, existiría un disco $U \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a un entorno abierto $W \subset S$ del vértice del cono $p = (0, 0, 0)$. Si denotamos q el punto del disco que corresponde a p por el homeomorfismo que se tenga, los conjuntos $U \setminus \{q\}$ y $W \setminus \{p\}$ serían homeomorfos. Como p desconecta a W (pues desconecta a todo el cono), q debería desconectar al disco U , lo que es imposible (el lector debería dar una justificación de esta afirmación).

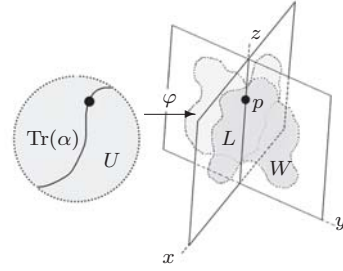


La única obstrucción en este ejemplo es el vértice: $S \setminus \{p\}$ sí que es una superficie diferenciable. En efecto, al prescindir del vértice se obtienen dos abiertos

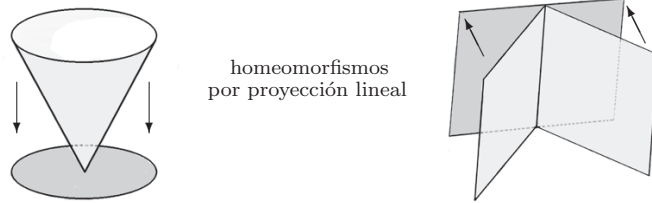
disjuntos cada uno de los cuales admite una parametrización global por proyección sobre el plano $z = 0$. Este ejemplo pone de manifiesto que las superficies no son necesariamente conexas, aunque no es difícil probar que cada componente conexas de una superficie es una superficie.

(2) Un contraejemplo más delicado es el caso de dos planos que se cortan en una recta, que tienen la obstrucción en los puntos de esa recta de intersección. Para fijar ideas, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la unión de los dos planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Que $S : xy = 0$ no es una superficie es otra vez una cuestión topológica: S no es localmente homeomorfo al plano. El argumento es más delicado que para el doble cono, y sólo lo esquematizamos, dejando los detalles al cuidado del lector.

Sea p un punto del eje z , y supongamos que existe una parametrización $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$ con $p \in W = \varphi(U)$. La restricción $\alpha = \varphi^{-1}|_L : L = W \cap \{x = y = 0\} \rightarrow U$ es una curva diferenciable regular de U . Por hipótesis el par $W \supset L$ es homeomorfo al par $U \supset \text{Tr}(\alpha)$ vía φ , y por tanto las propiedades topológicas de ambos pares deben ser las mismas. Pero sabemos que una curva regular separa U localmente en 2 componentes (teorema del entorno tubular) mientras que L separa W localmente en al menos 4 componentes. Contradicción.



(3) Por último, proponemos dos contraejemplos que *no son de naturaleza topológica*. Si consideramos el semicono $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, tenemos un conjunto homeomorfo al plano, pero *no localmente difeomorfo a él*. Lo mismo pasa si consideramos dos semiplanos $xy = 0, x + y > 0$: tenemos un conjunto homeomorfo, pero no localmente difeomorfo, a un plano.



Sin embargo debemos esperar hasta el párrafo 3.10, p.40, para probar rigurosamente que ninguno de estos dos ejemplos es localmente difeomorfo al plano. Utilizaremos el plano tangente, que se habrá introducido en la lección 3. ■

Ecuaciones locales de superficies

En la lección anterior hemos ilustrado la noción de superficie con diversos ejemplos que se han analizado con argumentos específicos. En ésta vamos a describir dos construcciones generales de superficies: las *superficies topográficas* y las *superficies de nivel*. Ambas son en realidad modelos locales universales: localmente cualquier superficie es topográfica y es de nivel. Esto se puede reformular de una manera más intuitiva diciendo que toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede describir localmente: (i) mediante una ecuación explícita $z = f(x, y)$ (salvo reordenar las letras) y (ii) mediante una ecuación implícita $g(x, y, z) = 0$ (la primera es la solución de la segunda). En última instancia, esto no es sino el teorema de la función implícita.

Los ejemplos anteriores ilustran cómo se decide si un conjunto es una superficie diferenciable. En particular, la proyección sobre los planos coordenados es un muy buen método, que formalizamos a continuación.

(2.1) Superficies topográficas o grafos. (1) Sea D un abierto de \mathbb{R}^2 y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Como es bien sabido, el grafo de f es el conjunto

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

y resulta que este conjunto (descrito abreviadamente por la ecuación $z = f(x, y)$) es una superficie diferenciable.

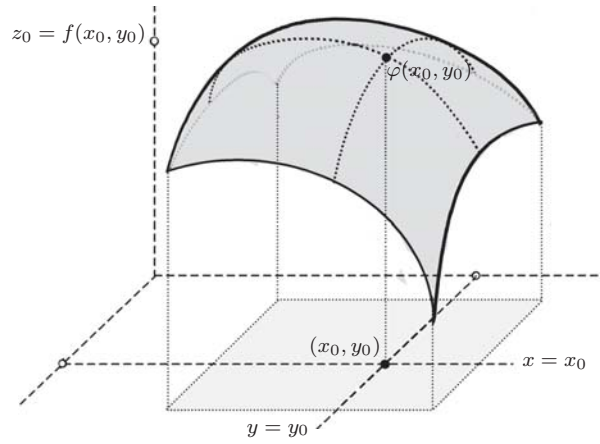
Para verlo basta una parametrización. En efecto, consideremos la aplicación biyectiva

$$\varphi : D \rightarrow S : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

En primer lugar esta aplicación es un homeomorfismo: su inversa es la restricción a S de la proyección lineal $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, obviamente continua. Por otra parte, φ diferenciable, por serlo f . En fin, la matriz jacobiana de φ es

$$J_{\varphi}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix},$$

que tiene rango 2, de modo que $d_q\varphi$ es inyectiva para todo $q \in D$.



(2) La parametrización anterior recibe el nombre de *parametrización de Monge*. Es una parametrización global.

(3) Las líneas coordenadas de la parametrización de Monge son las secciones de S por los planos paralelos a los dos planos $y = 0$ y $x = 0$:

$$\varphi(y = y_0) = S \cap \pi^{-1}(y = y_0), \quad \varphi(x = x_0) = S \cap \pi^{-1}(x = x_0),$$

con vectores tangentes en $p = \varphi(q)$, $q = (x_0, y_0)$:

$$\varphi_x = (1, 0, f_x(q)), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y(q)).$$

■

En la práctica es importante trabajar con parametrizaciones simples, y las parametrizaciones de Monge lo son. La proposición siguiente demuestra que todas las superficies se pueden parametrizar localmente de esta manera.

Proposición 2.2. *Sea S una superficie y sea $p \in S$. Entonces existe un entorno abierto W' de p en S que es un grafo. Con precisión, existe un abierto D de \mathbb{R}^2 y una función diferenciable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que W' es uno de los grafos siguientes:*

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x, z), (x, z) \in D\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = f(y, z), (y, z) \in D\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, *toda superficie* $S \subset \mathbb{R}^3$ *se puede expresar localmente mediante una ecuación explícita* $z = f(x, y)$ (salvo reordenar las variables).

Demostración. Según la definición de superficie, tenemos una parametrización local $\varphi : U \rightarrow W = \varphi(U) \subset S$ de S con $p \in W$; sea $q = \varphi^{-1}(p)$. Ya que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} = 2,$$

existe un menor de orden 2 no nulo; supongamos, sin pérdida de generalidad, que es el determinante de la submatriz:

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix}.$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre el plano xy . La matriz jacobiana en el punto $q \in U$ de la aplicación diferenciable

$$\pi \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

es la matriz 2×2 anterior. Como esa matriz tiene determinante no nulo, el teorema de la función inversa dice que existen un entorno abierto $U' \subset U$ de q en \mathbb{R}^2 y un entorno abierto D de $d = \pi\varphi(q)$ en \mathbb{R}^2 tales que $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$ es un difeomorfismo.

Sea $W' = \varphi(U')$. Puesto que $\varphi : U \rightarrow W$ es un homeomorfismo, se tiene que W' es abierto en S . Por la construcción $D = \pi\varphi(U') = \pi(W')$ y $\pi|_{W'} = (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}|_{W'}$ es un homeomorfismo de W' sobre D . El homeomorfismo inverso es

$$F = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : D \rightarrow W' : (x, y) \mapsto (h(x, y), g(x, y), f(x, y))$$

que es una aplicación diferenciable, y sus componentes $h, g, f : D \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. El siguiente diagrama conmutativo resume la situación:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\varphi} & W' \subset S \subset \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \pi \circ \varphi & \uparrow F \quad \swarrow \pi \\ & & D \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Como $\pi F(x, y) = (x, y)$ concluimos que $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y, por tanto, $W' = F(D)$ es el grafo de f . Como $p \in W'$ la proposición queda probada. ■

La construcción utilizada en la demostración anterior tiene otras consecuencias que que señalamos a continuación.

Observaciones 2.3. Sea S una superficie diferenciable y $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización local suya. Consideremos un punto $p \in \varphi(U) = W \subset S$.

(1) Con las notaciones de la demostración última consideremos el entorno abierto $V' \subset \pi^{-1}(D)$ de p en \mathbb{R}^3 tal que $V' \cap S = W'$, y la aplicación diferenciable

$$\mathcal{Y} = (\pi \circ \varphi|_{U'})^{-1} \circ \pi : V' \rightarrow U'.$$

Así, la restricción de \mathcal{Y} a $V' \cap S = W'$ coincide con la de φ^{-1} . En otras palabras el homeomorfismo $\varphi^{-1}|_{W'} : W' \rightarrow U'$ es la restricción de una aplicación diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^3 , a saber, \mathcal{Y} . El diagrama conmutativo de la última demostración se convierte en el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{Y}|_{W'} = \varphi^{-1} & & W' \subset S \\ & \nearrow & \varphi & \searrow & \cap \\ U' & & & & V' \subset \mathbb{R}^3 \\ \pi \circ \varphi \downarrow & \nearrow & \mathcal{Y} & \searrow & \cap \\ D \subset \mathbb{R}^2 & & & & \pi \end{array}$$

(2) Supongamos ahora que tenemos otras coordenadas en p , es decir, otra parametrización $\psi : E \rightarrow S$ con $p \in \psi(E)$. Consideramos el cambio de coordenadas

$$\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \rightarrow \varphi^{-1}(\psi(E)),$$

Denotamos $E' = \psi^{-1}(W')$, y el diagrama conmutativo que tenemos ahora es

$$\begin{array}{ccccc} & & E' & \xrightarrow{\psi} & W' \subset S \\ & \nearrow & \downarrow \mathcal{Y} \circ \psi = \varphi^{-1} \circ \psi & \searrow \varphi & \cap \\ U' & & & & V' \subset \mathbb{R}^3 \\ & \nearrow & \mathcal{Y} & \searrow & \cap \end{array}$$

En él aparece la composición de aplicaciones diferenciables

$$\mathcal{Y} \circ \psi : E' \xrightarrow{\psi} W' \subset V' \xrightarrow{\mathcal{Y}} U',$$

que coincide con el cambio $\varphi^{-1} \circ \psi$ en el entorno abierto E' de $\psi^{-1}(p)$. En suma, el cambio de coordenadas es una aplicación diferenciable.

(3) Lo anterior vale también para el cambio inverso, que será también una aplicación diferenciable. Concluimos así que un cambio de coordenadas no es sólo un homeomorfismo sino un *difeomorfismo*. ■

Insistimos en que la discusión anterior es necesaria porque la noción de aplicación diferenciable sólo vale, de momento, para aplicaciones definidas en abiertos de un espacio afín. La extensión del cálculo diferencial a superficies será el tema de la lección 4.

El resultado siguiente supone una notable simplificación en la comprobación de que una determinada aplicación $\varphi : U \rightarrow S$ sea una parametrización local de una superficie S . En efecto, resulta que si sabemos *a priori* que S es una superficie, entonces la condición de que φ sea un homeomorfismo sobre un abierto de S , se reduce a que φ sea inyectiva:

Proposición 2.4. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $\varphi : U \rightarrow S$, U abierto en \mathbb{R}^2 , una aplicación que satisface las condiciones (2) y (3) de la definición 1.1, p.1. Si φ es inyectiva entonces φ es una parametrización.*

Demostración. Sea $p \in W = \varphi(U)$. Puesto que S es una superficie, por 2.2, p.18, existe un entorno abierto W' de p en S que es el grafo de una aplicación diferenciable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto D de \mathbb{R}^2 ; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$.

Sea $U' = \varphi^{-1}(W') \subset U$. Obviamente U' es un subconjunto abierto de U y $q = \varphi^{-1}(p) \in U'$. Consideremos la aplicación $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección sobre el plano xy . Entonces su matriz jacobiana

$$J_{\pi \circ \varphi} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo en q . La justificación de este hecho es la siguiente. En W' se cumple $z = f(x, y)$, de modo que la matriz jacobiana de $\varphi|_{U'}$ es

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ f_x(x, y)x_u + f_y(x, y)y_u & f_x(x, y)x_v + f_y(x, y)y_v \end{pmatrix}$$

La tercera fila de esta matriz es combinación lineal de las dos primeras, de modo que si la primera matriz mencionada no tuviese determinante distinto de 0 en q , sucedería que la matriz jacobiana de φ tendría rango < 2 en q , contra la condición (3) de la definición de parametrización. Por otra parte, la matriz $J_{\pi \circ \varphi}(q)$ es la matriz de la derivada de $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$ en el punto q y, por lo anterior, el teorema de la función inversa nos dice que $\pi \circ \varphi$ induce por restricción un difeomorfismo de un entorno abierto $U'' \subset U'$ de q sobre un entorno abierto $E \subset$

D de $\pi\varphi(q)$. Denotemos $W'' = \varphi(U'') \subset W'$. Como $\pi(W'') = E$ y $\pi|_{W'} : W' \rightarrow D$ es un homeomorfismo, se sigue fácilmente que W'' es un entorno abierto de $p = \varphi(q)$ en S y que φ induce por restricción un homeomorfismo de U'' sobre W'' . Puesto que p es cualquier punto de $\varphi(U)$, se concluye que la aplicación $\varphi : U \rightarrow S$ es una aplicación abierta, y por tanto, si es inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen W . Ésta es la propiedad de φ que queríamos demostrar. ■

Lo anterior es en realidad un teorema de la función inversa para superficies diferenciables. La versión topológica es también cierta: *una aplicación continua inyectiva $\phi : U \rightarrow S$ de un abierto U del plano en una superficie S es un homeomorfismo sobre un abierto de S* . Este es el *teorema de invarianza del dominio*, un resultado muy profundo estrechamente ligado al teorema de Jordan para superficies.

Ejemplo 2.5. En 1.12(2), p.12, explicamos que la unión $S \subset \mathbb{R}^3$ de los dos planos $x = 0$ e $y = 0$ no es una superficie diferenciable. Ahora podemos probar lo mismo más elegantemente. Supongamos que $S : xy = 0$ fuera una superficie diferenciable, y consideremos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S : (u, v) \mapsto (0, u, v)$. Claramente su jacobiano tiene rango 2 en todos los puntos, luego como es inyectiva debería ser un homeomorfismo sobre un abierto de S (por la proposición anterior). Pero la imagen de φ es el plano $x = 0$, que no es abierto en S .

Este argumento es de naturaleza diferenciable, y lo que muestra es que S no es localmente *difeomorfo* al plano. El razonamiento de 1.12(2) era más topológico, y podría refinarse para probar que S no es localmente *homeomorfo* al plano. ■

En muchas ocasiones las superficies se definen mediante ecuaciones, es decir, como ceros de funciones diferenciables. Para constatar que se trata efectivamente de superficies se utiliza el *teorema de la función implícita*. Enunciamos ahora este teorema, que como se sabe es equivalente al de la función inversa.

Teorema 2.6. Sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un subconjunto abierto A de \mathbb{R}^3 . Sea $p = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de A y denotemos $g(p) = a$. Supongamos que $g_z(p) \neq 0$. Entonces existen un entorno abierto U de (x_0, y_0) en \mathbb{R}^2 , un entorno abierto V de z_0 en \mathbb{R} y una función diferenciable $f : U \rightarrow V$ tales que

- (1) $U \times V \subset A$,
- (2) $f(x_0, y_0) = z_0$, y
- (3) $g^{-1}(a) \cap (U \times V)$ es el grafo de f .

Esto último significa que para cada punto (x, y, z) de $U \times V$ las condiciones $g(x, y, z) = a$ y $z = f(x, y)$ son equivalentes, o en otras palabras, que para cada $(x, y) \in U$, la única solución en V de la ecuación $g(x, y, z) = a$ es $z = f(x, y)$.

En las condiciones del teorema anterior, se dice que la función f está *implícitamente definida* por la ecuación $g(x, y, z) = a$ o que la variable z se puede despejar en función de las otras dos.

Definición 2.7. Sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto de \mathbb{R}^3 y sea $a \in \mathbb{R}$. Se dice que a es un *valor regular* de g si $d_p g \neq 0$ para todo $p \in g^{-1}(a)$.

La condición $d_p g \neq 0$ significa que al menos una de las tres derivadas parciales de g en p es distinta de cero; en otras palabras, el *gradiente*

$$\nabla_p g = (g_x(p), g_y(p), g_z(p))$$

es distinto de cero. Los puntos p que verifican esta condición $\nabla_p g \neq 0$ se llaman *puntos regulares*.

Nuestro interés en el teorema de la función implícita y en las nociones anteriores se plasma en el siguiente resultado:

Proposición 2.8. Sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, donde A es un abierto de \mathbb{R}^3 . Si $a \in g(A)$ es un valor regular de g , entonces $g^{-1}(a)$ es una superficie.

Demostración. Si $p \in S = g^{-1}(a)$, se tiene que p es un punto regular. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $g_z(p) \neq 0$. Aplicando el teorema de la función implícita y utilizando la notación de su enunciado, se tiene que $W = g^{-1}(a) \cap (U \times V)$ es un entorno abierto de p en S y el grafo de una función diferenciable. Por 2.1(1), p. 17, S es una superficie. ■

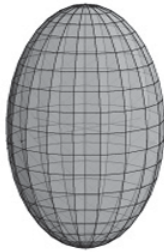
Una superficie definida del modo descrito en la proposición anterior se llama *superficie (diferenciable) de nivel* (de la función que se utilice). A continuación enumeramos algunos ejemplos (entre los que revisamos los de la lección anterior).

Ejemplos 2.9. (1) Un plano afín S es la superficie de nivel de una forma lineal $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ con algún coeficiente no nulo. Por tanto $\nabla_p g = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ para cualquier p , y esto quiere decir que cualquier $a \in \mathbb{R}$ es valor regular, y define la superficie de nivel $S = g^{-1}(a)$.

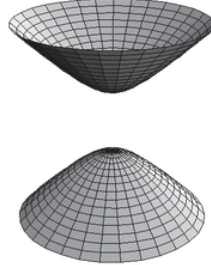
(2) Una esfera $S \subset \mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$ tiene ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0$, luego es del tipo $g^{-1}(r^2)$ para la función diferenciable $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como $\nabla_p g = (2x, 2y, 2z)$, este gradiente sólo se anula para $x = y = z = 0$, luego si $p \in S$ es no nulo. Por tanto $a = r^2$ es un valor regular y tenemos la correspondiente superficie de nivel $S = g^{-1}(r^2)$.

(3) Más generalmente consideremos una función diferenciable $g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, con algún coeficiente no nulo. El gradiente $\nabla_p g = (2\alpha x, 2\beta y, 2\gamma z)$ se anula si y sólo si $\alpha x = \beta y = \gamma z = 0$, en cuyo caso $\alpha x^2 = \beta y^2 = \gamma z^2 = 0$ y $g(x, y, z) = 0$. Por tanto $a = 1$ es un valor regular de g , y tenemos la superficie de nivel $S : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ (no todos los coeficientes negativos, para que $S \neq \emptyset$). Estas superficies de nivel son bien conocidas:

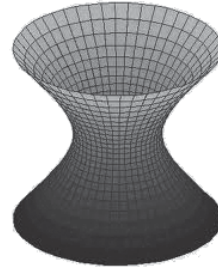
- (i) Para $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ son los *elipsoides*, que si $\alpha = \beta = \gamma$ son esferas.
- (ii) Para $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0$ son los *hiperboloïdes de dos hojas*.
- (iii) Para $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$ son los *hiperboloïdes de una hoja*.



Elipsoide



Hiperboloïde de dos hojas



Hiperboloïde de una hoja

(4) Un cilindro circular $S : x^2 + y^2 = r^2 > 0$ es una superficie de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2$. El gradiente $\nabla_p g = (2x, 2y, 0)$ se anula sólo si $x = y = 0$, cosa que no pasa en ningún punto de S . Por tanto S se describe como la superficie de nivel $g^{-1}(r^2)$ del valor regular $a = r^2$.

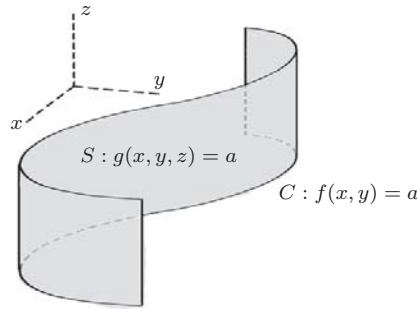
(5) Se pueden considerar cilindros más generales que el circular del ejemplo anterior. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que en ningún punto $(x, y) \in f^{-1}(a)$ se anulan ambas derivadas parciales f_x, f_y . Entonces a es un valor regular de la función

$$g : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y),$$

y la superficie de nivel

$$S = g^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, f(x, y) = a\}$$

es una superficie diferenciable.



Claramente, todas las secciones planas $S \cap \{z = c\}$ por planos horizontales son copias de la curva $C \subset U$ de ecuación $f(x, y) = a$, y de modo natural, denominamos S *cilindro (generalizado) sobre C* .

(6) Analicemos el cono doble $S : x^2 + y^2 = z^2$. Sabemos que no es superficie diferenciable por su vértice $p_0 = (0, 0, 0)$. Representemos S como imagen inversa $S = g^{-1}(0)$ de la función diferenciable $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ y consideremos el gradiente $\nabla_p g = (2x, 2y, -2z)$. Resulta que el gradiente sólo se anula en el origen p_0 . Esto explica que no podamos concluir que S sea superficie diferenciable, mientras que sí lo podemos concluir para $S \setminus \{p_0\}$. ■

Lo mismo que todas las superficies son localmente grafos (2.2), todas las superficies son localmente superficies de nivel:

Proposición 2.10. *Sea p un punto de la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Entonces existe un entorno abierto W' de p en S que es una superficie de nivel. Con precisión, existen un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 y una función diferenciable $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que 0 es un valor regular de g y $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$.*

Es decir, toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede expresar localmente mediante una ecuación implícita $g(x, y, z) = 0$.

Demostración. Por la proposición 2.2, p.18, existe un entorno abierto W' de p en S tal que W' es el grafo de una función diferenciable $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida en

un abierto $D \subset \mathbb{R}^2$. Por ejemplo, $W' = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$. Sea A un abierto de \mathbb{R}^3 tal que $A \cap S = W'$ y definamos la función diferenciable

$$g : V = (D \times \mathbb{R}) \cap A \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y).$$

Ya que $g_z \equiv 1$ se tiene que 0 es un valor regular de g y, obviamente, $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$. ■

En relación con la proposición anterior es posible demostrar que toda superficie conexa S que es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^3 es una superficie de nivel. De hecho, existe una función diferenciable $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que tiene al cero como valor regular y tal que $S = g^{-1}(0)$. Este importante y nada sencillo resultado, que excede el alcance de este texto, es en esencia equivalente a la versión para superficies del *teorema de Jordan para curvas planas*.

Terminamos esta lección revisando las superficies de revolución como superficies de nivel.

(2.11) Superficies de revolución como de nivel. Sea C una curva contenida en el semiplano $P = \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Supongamos que C viene dada por una ecuación implícita $g(x, z) = 0$, lo que significa que no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales g_x, g_z . Entonces el conjunto S obtenido rotando C alrededor del eje z es la superficie de nivel definida por la ecuación

$$f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

En efecto, esta función f es diferenciable en el abierto $x^2 + y^2 \neq 0$, que contiene al conjunto S (si $p = (x, y, z) \in S$, entonces $q = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in C \subset P$). Para ver que $a = 0$ es un valor regular de f tenemos:

$$\nabla_p f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} g_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} g_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), g_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \right).$$

Si la derivada parcial g_z no se anula, $\nabla_p f \neq 0$. En otro caso, es la otra parcial g_x la no nula, y como $x^2 + y^2 \neq 0$ también concluimos que $\nabla_p f \neq 0$. En suma, $a = 0$ es un valor regular y S una superficie diferenciable de nivel. ■

Aplicando lo anterior al toro de revolución S de 1.11, p. 10, lo podemos describir como superficie de nivel mediante la ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 + z^2 = r^2.$$

Es bueno comparar en este ejemplo las ventajas e inconvenientes de esta descripción y la parametrización

$$x = (r \cos u + c) \cos v, \quad y = (r \cos u + c) \sin v, \quad z = r \sin u.$$

Problemas

Número 1. Demostrar que los *paraboloides* $S : ax^2 + by^2 = z$, $a, b \neq 0$, son superficies diferenciables. ¿Tienen alguna parametrización global?

Número 2. Hallar un atlas del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ inspirándose en la parametrización de la esfera del Ejemplo 1.9, p. 8.

Número 3. Demostrar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^3 = 1\}$ es una superficie. Encontrar parametrizaciones locales que definan un atlas.

Número 4. Considérese el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$. Probar que S es una superficie. Encontrar dos parametrizaciones que definan un atlas.

Número 5. Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable definida en un abierto V de \mathbb{R}^3 , y sea C el conjunto de sus puntos críticos; sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que $S = f^{-1}(a) \setminus C$ es una superficie (siempre que $S \neq \emptyset$).

Número 6. Probar que las ecuaciones $x^2 + y^2 z^2 = 1$ y $x^2 + y^4 + z^6 = 1$ definen superficies. Estudiar su compacidad.

Número 7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Hallar unas ecuaciones de S como superficie de revolución.

Número 8. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Mostrar que se puede expresar como imagen de la aplicación

$$\phi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v),$$

y que esta aplicación es biyectiva sobre S . Deducir que por cada punto de S pasa una recta totalmente contenida en S , correspondiendo a un valor fijo de u , y que dos cualesquiera de estas rectas tienen intersección vacía.

Número 9. Probar que el hiperboloide de dos hojas $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie que tiene exactamente dos componentes conexas.

Número 10. Sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable de la que 0 es valor regular. Mostrar que la superficie de nivel $S = g^{-1}(0)$ desconecta el espacio afín. (Recuérdese que en un extremo de una función diferenciable la derivada se debe anular).

Plano tangente

Los vectores tangentes desempeñan, según hemos visto, un papel fundamental en la teoría de curvas. El objetivo de esta lección es desarrollar el concepto completamente para superficies. En realidad, es fácil definir vector tangente:

Definición 3.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya traza está contenida en S se denota simplemente $\alpha : I \rightarrow S$, y decimos que $\omega = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$ es un vector *tangente a S en $p = \alpha(t)$* . Dado $p \in S$, denotamos $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto de todos esos vectores tangentes.

Denominamos: (i) a $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ *plano tangente* a la superficie en p , y (ii) a $p + T_p S$ *plano afín tangente* a S en p .

A continuación justificamos la terminología anterior vía una descripción alternativa de $T_p S$.

Proposición 3.2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y p un punto suyo. Sea $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización de un entorno de p , con $p = \varphi(q)$. Entonces $T_p S$ es la imagen de la aplicación lineal $d_q \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En particular, $T_p S$ es verdaderamente un plano vectorial de \mathbb{R}^3 y $d_q \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$ es un isomorfismo lineal.

Demostración. En primer lugar, observamos que la aplicación lineal $d_q \varphi$ es inyectiva por ser φ una parametrización, luego su imagen es efectivamente un plano vectorial. Comprobemos ahora que $T_p S = d_q \varphi(\mathbb{R}^2)$.

Supongamos primero que tenemos un vector $\omega \in d_q \varphi(\mathbb{R}^2)$, es decir, $\omega = d_q \varphi(w)$ para cierto $w \in \mathbb{R}^2$. Para $|t|$ suficientemente pequeño la curva plana $\beta(t) = q + tw$ tiene la traza contenida en U y la composición $\alpha = \varphi \circ \beta$ es una curva de S . Claramente $\alpha(0) = p$, y

$$\alpha'(0) = d_q \varphi(\beta'(0)) = d_q \varphi(w) = \omega.$$

Por tanto ω es un vector tangente a S en p .

Recíprocamente, sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva que pasa por p , digamos $\alpha(t_0) = p$. Debemos ver que $\omega = \alpha'(t_0)$ está en $d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$. Para ello, según 2.3(1), p.20, elegimos un entorno abierto $W' \subset W = \varphi(U)$ de p tal que $\varphi^{-1}|_{W'}$ tiene una extensión diferenciable $\Upsilon : V' \rightarrow U$ definida en un entorno abierto V' de p en \mathbb{R}^3 ; reduciendo I podemos suponer que la traza de α está contenida en W' . Entonces $\beta = \Upsilon \circ \alpha : I \rightarrow U$ es una curva diferenciable plana con vector tangente $w = \beta'(t_0)$ en $q = \beta(t_0)$. Como por construcción $\alpha = \varphi \circ \beta$, de la regla de la cadena deducimos

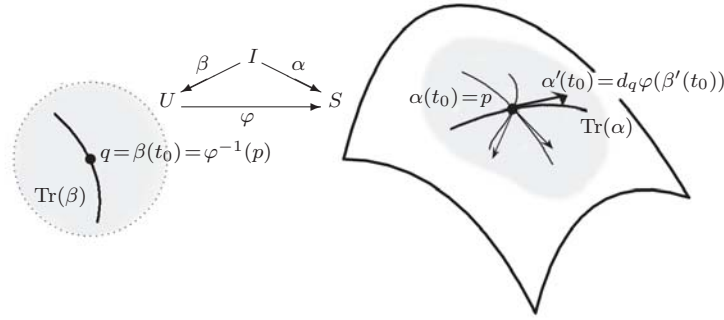
$$\omega = \alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0)) = d_q\varphi(w).$$

Así pues, ω está efectivamente en la imagen de la aplicación lineal $d_q\varphi$. ■

Observación 3.3. Sean $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de nuestra superficie S , $p \in W$ y $q = \varphi^{-1}(p)$. En la demostración anterior se comparan curvas de U y de W vía φ : toda curva plana $\beta : I \rightarrow U$ corresponde a una única curva de S definida por composición $\alpha = \varphi \circ \beta : I \rightarrow W$, que denotaremos

$$\alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

La figura ilustra esta construcción:



Por la regla de la cadena tenemos $\alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0))$, lo que se expresa en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La matriz 3×2 anterior es la matriz jacobiana de la parametrización. ■

(3.4) Bases del plano tangente. Sea S una superficie diferenciable, y $p \in S$ un punto suyo con plano tangente $T_p S \subset \mathbb{R}^3$. Como $T_p S$ es un plano, es decir, tiene

dimensión 2, para determinarlo basta encontrar dos vectores tangentes independientes, es decir, encontrar dos curvas de la superficie con tangentes distintas; esos dos vectores tangentes serán una base del plano tangente. Aunque en casos concretos esto puede hacerse por tanteo muy rápidamente, lo más sencillo en general es tomar las líneas coordenadas de una parametrización de un entorno del punto dado p .

(1) Sea $\varphi : U \rightarrow S$ una parametrización de S , y $p = \varphi(q) \in S$ con $q \in U$. Como $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$ es un isomorfismo lineal, transforma la base estándar $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 en una base \mathcal{B}_φ de T_pS ; explícitamente:

$$\begin{cases} d_q\varphi(e_1) = \varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) = \varphi_{u,p}, \\ d_q\varphi(e_2) = \varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q)) = \varphi_{v,p}. \end{cases}$$

Como ya sabemos, estos vectores $\varphi_{u,p}$ y $\varphi_{v,p}$ son los vectores tangentes a las líneas coordenadas en el punto p . Por otra parte, T_pS se determina mediante su *dirección normal*, (o sea, ortogonal) dada por el producto vectorial

$$\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}.$$

Cuando no haya riesgo de confusión omitiremos los subíndices p .

(2) Las coordenadas respecto de esta base \mathcal{B}_φ se obtienen muy fácilmente. Todo vector $\omega \in T_p(S)$ se escribe $\omega = d_q\varphi(w)$ para un único $w \in \mathbb{R}^2$, y entonces las coordenadas de w respecto de la base estándar \mathcal{E} son las de ω respecto de la base $\mathcal{B}_\varphi = d_q\varphi\{e_1, e_2\}$. Con un pequeño abuso de lenguaje podemos decir que $(d_q\varphi)^{-1}(\omega)$ son las coordenadas de ω respecto de la base \mathcal{B}_φ .

(3) Sea ψ otra parametrización de un entorno de p , digamos con $p = \psi(r)$, con coordenadas (s, t) . Tenemos entonces la base $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$ de T_pS y queremos comparar las coordenadas respecto de \mathcal{B}_ψ y respecto de \mathcal{B}_φ . Para ello derivamos la composición $\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi) = \psi$ y obtenemos

$$d_q\varphi \circ d_r(\varphi^{-1} \circ \psi) = d_r\psi,$$

lo que significa que para $\omega \in T_pS$ se tiene

$$d_r(\varphi^{-1} \circ \psi)((d_r\psi)^{-1}(\omega)) = (d_q\varphi)^{-1}(\omega).$$

Teniendo en cuenta (2), esto significa que multiplicando coordenadas respecto de \mathcal{B}_ψ por la matriz jacobiana de $\varphi^{-1} \circ \psi$ obtenemos coordenadas respecto de

\mathcal{B}_φ . Esto es, la matriz de cambio de base de \mathcal{B}_ψ a \mathcal{B}_φ es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$. O aún, las dos columnas de esa matriz jacobiana son respectivamente las coordenadas de ψ_s y de ψ_t respecto de \mathcal{B}_φ . ■

Estudiemos ahora los ejemplos 1.7, p.4, de la primera lección.

Ejemplos 3.5. (1) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un plano afín con dirección \vec{S} . Entonces el plano tangente a S en cualquier punto suyo p es $T_p S = \vec{S}$.

En efecto, S se puede parametrizar (1.7(1)) mediante

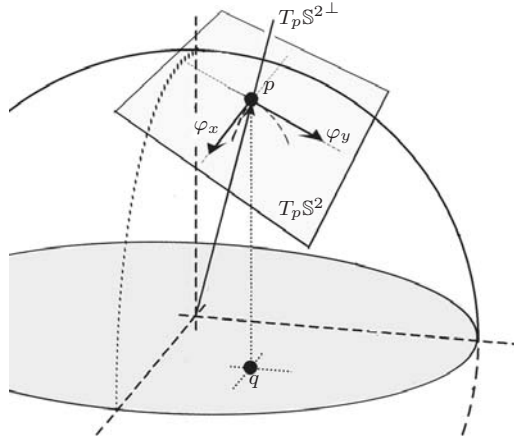
$$\varphi(u, v) = p + u\varpi + v\varpi', \quad \vec{S} = L[\varpi, \varpi'],$$

de modo que $\varphi_u = \varpi$, $\varphi_v = \varpi'$, y $T_p S = L[\varpi, \varpi']$.

(2) La esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se recubre con parametrizaciones del tipo

$$\varphi(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

(caso $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} > 0$, 1.7(2)),



de modo que

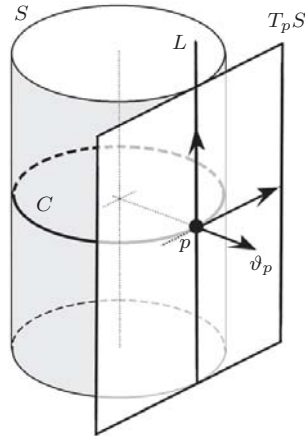
$$\begin{cases} \varphi_x = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = (1, 0, -\frac{x}{z}), \\ \varphi_y = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = (0, 1, -\frac{y}{z}). \end{cases}$$

Estos dos vectores generan el plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ en el punto $p = (x, y, z)$. Ese es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right),$$

o mejor, al vector (x, y, z) . En otras palabras, *el plano tangente a la esfera en p es perpendicular al rayo que une el centro de la esfera con p .*

(3) Estudiemos ahora el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$ con eje de rotación $x = 0, y = 0$. En este caso es fácil encontrar dos curvas de S que pasen por un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ dado y tengan tangentes distintas: la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1, z = z_0$ y la recta $L : x = x_0, y = y_0$.



Los vectores tangentes a esas curvas son $(-y_0, x_0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y forman una base de T_pS . Como

$$\vartheta = (-y_0, x_0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (x_0, y_0, 0),$$

resulta que el plano tangente en cuestión es *perpendicular al rayo ortogonal al eje del cilindro que pasa por p .*

(4) En 1.7(4), p.6, parametrizamos el helicoides $S \subset \mathbb{R}^3$ mediante

$$x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

de modo que el plano tangente en un punto arbitrario está generado por los vectores

$$\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

La dirección normal al plano tangente viene dada por

$$\vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \operatorname{sen} u, b \cos u, -v).$$

Pero como $v^2 = x^2 + y^2$, podemos escribir

$$\vartheta = \left(\frac{by}{\mp \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{bx}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \mp \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

(los signos se deben discutir según las coordenadas de p). Desde el punto de vista geométrico se ve que el plano tangente contiene siempre la dirección ortogonal al eje del cilindro que pasa por p . ■

A continuación analizamos los planos tangentes a superficies descritas mediante ecuaciones locales según la lección 2.

(3.6) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación explícita. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie definida por una ecuación $z = f(x, y)$, es decir, definida como el grafo de una función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Consideramos su parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, y vemos que el plano tangente en el punto $p = (x, y, f(x, y))$ está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y);$$

es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1). \quad \blacksquare$$

(3.7) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación implícita. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida por una ecuación implícita $g(x, y, z) = a$, es decir, como una superficie de nivel de la función diferenciable $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ según 2.8, p.23. Para calcular el plano tangente $T_p S$ en un punto $p \in S$ recordamos que en un entorno de p la superficie de nivel tiene una ecuación explícita $z = f(x, y)$ que la define como un grafo (suponemos por ejemplo que $g_z(p) \neq 0$). Entonces sabemos por el apartado anterior que $T_p S$ es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta_p = (-f_x, -f_y, 1),$$

y debemos calcular esas derivadas parciales de f . Para ello derivamos implícitamente la igualdad $g(x, y, f(x, y)) = a$ y obtenemos las dos igualdades siguientes:

$$g_x + g_z f_x = 0, \quad g_y + g_z f_y = 0.$$

Despejando los términos que interesan queda:

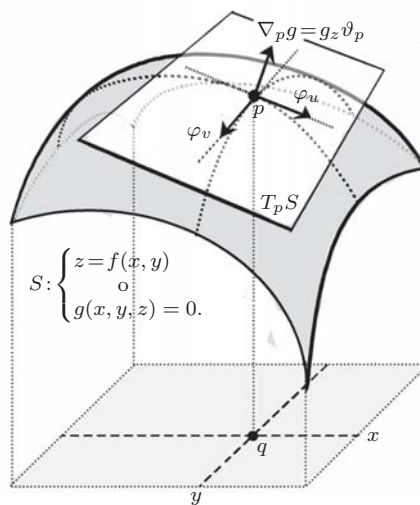
$$f_x = -g_x/g_z, \quad f_y = -g_y/g_z.$$

Por tanto, $T_p S$ es perpendicular al vector

$$g_z \vartheta_p = (g_x, g_y, g_z) = \nabla_p g.$$

Es decir, el plano tangente a una superficie de nivel es *perpendicular al gradiente* de la ecuación implícita de la superficie. Otra forma de decir esto mismo es que $T_p S$ es el núcleo de la aplicación lineal $d_p g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. ■

A continuación ilustramos la descripción de los dos párrafos anteriores:



El lector puede aplicar lo anterior a los ejemplos 2.9, p.23. Veamos a continuación una aplicación interesante:

(3.8) Intersección de superficies. Sean $S, S' \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies diferenciables que se cortan, y $p \in S \cap S'$ un punto de ambas. Si los planos tangentes $T_p S$ y $T_p S'$ son iguales decimos que las superficies *son tangentes* en p , y si son distintos decimos que son *transversales* en p . La noción de transversalidad, que aparece constantemente en campos diversos de la Matemática, permite aquí describir la intersección $S \cap S'$. En efecto, se cumple

Si S y S' son transversales en un punto $p \in S \cap S'$, entonces p tiene un entorno abierto V en \mathbb{R}^3 tal que la intersección $S \cap S' \cap V$ es la traza de un arco de Jordan $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

En efecto, por 2.10, p. 25, existe una función diferenciable $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 tal que $S' \cap V = g^{-1}(0)$, siendo 0 un valor regular de g . Consideremos ahora una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de un entorno W de p en S , con $q = \varphi^{-1}(p)$. Afirmamos que la función diferenciable $h = g \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tiene alguna derivada parcial en q no nula.

Para verlo, observamos que

$$\begin{cases} h_u(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_1) = d_p g(\varphi_u), \\ h_v(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_2) = d_p g(\varphi_v). \end{cases}$$

Si estas dos derivadas parciales fueran nulas, entonces la aplicación lineal $d_p g$ se anularía en la base \mathcal{B}_φ de $T_p S$, es decir, se anularía en todo $T_p S$. Pero el núcleo de $d_p g$ es el plano tangente $T_p S'$, luego $T_p S \subset T_p S'$, en contra de la transversalidad.

Probada la afirmación sobre h , sabemos que $h(u, v) = 0$ es entonces la traza C de un arco de Jordan $\beta : I \rightarrow U^q$ en un entorno $U^q \subset U$ de q . Tomamos un entorno abierto V^p de p en \mathbb{R}^3 tal que $S \cap V^p = \varphi(U^q)$ y concluimos que

$$S \cap S' \cap V^p = \varphi(C)$$

es la traza del arco de Jordan $\alpha = \varphi \circ \beta$. ■

Una consecuencia del resultado anterior es que *si una superficie S y un plano afín H se cortan en un punto aislado p , entonces H es el plano afín tangente a S en el punto p .*

En cuanto a las superficies de revolución, tenemos lo siguiente.

(3.9) Plano tangente a una superficie de revolución. Sea S una superficie de revolución, y $p \in S$. Vamos a calcular $T_p S$ de dos maneras diferentes y ver cómo concuerdan. Debemos ser cuidadosos con las notaciones.

(1) En primer lugar consideramos S parametrizada como 1.10, p. 9, mediante $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ con

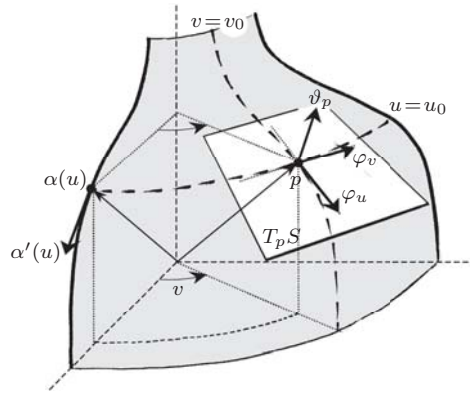
$$x = \zeta(u) \cos v, \quad y = \zeta(u) \sin v, \quad z = \xi(u); \quad \zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Entonces el plano tangente en un punto arbitrario de coordenadas (u, v) está generado por los vectores

$$\varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), \quad \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0),$$

y un vector perpendicular es

$$\vartheta_p = (-\xi'(u)\zeta(u) \cos v, -\xi'(u)\zeta(u) \sin v, \zeta'(u)\zeta(u)).$$



(2) Por otra parte sabemos que S se puede describir como una superficie de nivel (2.11, p.26). Para ello se considera una ecuación implícita $G(x, z) = 0$ de la curva del plano $y = 0$ que genera la superficie, y resulta que S viene dada por

$$F(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Entonces $T_p S$ es perpendicular al gradiente de esta función F , que es

$$\nabla_p F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), G_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \right).$$

(3) Por supuesto, los vectores ϑ_p y $\nabla_p F$ son proporcionales, pero comprobarlo es educativo. Para hacerlo derivamos la igualdad $G(\zeta(u), \xi(u)) = 0$ y resulta:

$$G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \zeta'(u) + G_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \xi'(u) = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \xi'(u) \nabla_p F &= G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \left(\frac{x \xi'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y \xi'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\zeta'(u) \right) \\ &= G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) (\xi'(u) \cos v, \xi'(u) \sin v, -\zeta'(u)), \end{aligned}$$

que es claramente proporcional a ϑ_p . ■

Una vez explicado abundantemente cómo se calculan planos tangentes, terminamos la lección con una observación importante. En 3.4(1), p.32, definimos para cada parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, tres aplicaciones diferenciables

$$W \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, \vartheta_p$$

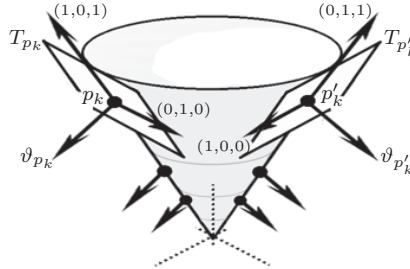
que determinan en cada $p \in W$ el plano tangente (las dos primeras una base y la tercera su dirección normal). Por tanto podemos decir que el plano tangente (y con él su dirección normal) *depende diferenciablemente del punto* $p \in W$. Veamos cómo se usa esto.

Ejemplo 3.10. En 1.12(3), p.12, mencionamos los dos ejemplos siguientes: el semicono $S : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, y la unión de dos semiplanos $S' : xy = 0, x + y > 0$. Ambos conjuntos son homeomorfos al plano, pero no son superficies diferenciables. Entonces no podíamos probar esto; ahora ya sí.

Si se pudiera parametrizar (en cualquiera de los dos ejemplos) un entorno del origen, se tendría la aplicación diferenciable: $p \mapsto \vartheta_p \neq 0$, y

$$\lim_{p \rightarrow 0} \vartheta_p = \vartheta_0 \neq 0.$$

En consecuencia, para todas las sucesiones de puntos $p_k \rightarrow 0$ obtendremos ese límite. Intentémoslo para el semicono. Fuera del origen el semicono sí es una superficie diferenciable, y sabemos calcular planos tangentes: (i) en puntos del tipo $p_k = (x_k, 0, z_k), x_k > 0$ es $T_{p_k}S : x = z$, y (ii) en puntos del tipo $p'_k = (0, y_k, z_k), y_k > 0$, es $T_{p'_k}S : y = z$.



Es decir

$$\begin{cases} (1, 0, 1)\vartheta_{p_k} = (0, 1, 0)\vartheta_{p_k} = 0 & \text{para los } p_k, \\ (0, 1, 1)\vartheta_{p'_k} = (1, 0, 0)\vartheta_{p'_k} = 0 & \text{para los } p'_k. \end{cases}$$

En el límite común se deberá cumplir

$$(1, 0, 1)\vartheta_0 = (0, 1, 0)\vartheta_0 = (0, 1, 1)\vartheta_0 = (1, 0, 0)\vartheta_0 = 0,$$

que son demasiados productos escalares nulos para que $\vartheta_0 \neq 0$. Contradicción.

El lector imitará el razonamiento con el cono doble y con la unión de dos semiplanos (Ejemplos 1.12(1) y (2), p.11) para obtener la misma contradicción y concluir así también que esos dos conjuntos no son superficies diferenciables. ■

Problemas

Número 1. Sea $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ la esfera unidad de \mathbb{R}^3 y $p = (0, 1, 0) \in S$. Calcular el plano tangente $T_p\mathbb{S}^2$ y la base suya asociada a la parametrización por proyección estereográfica desde el polo norte. Calcular también la base asociada a la parametrización por proyección ortogonal sobre el plano xz . Escribir la matriz de cambio de coordenadas en $T_p\mathbb{S}^2$ para las dos bases obtenidas.

Número 2. Sea S el paraboloide hiperbólico de ecuación $z = x^2 - y^2$. Hallar el plano tangente T_pS para un punto arbitrario $p \in S$. Considerar, en particular, el caso $p = (0, 0, 0)$ y estudiar la intersección $S \cap T_pS$ (observar que en ese caso el plano tangente y el plano afín tangente coinciden). Estudiar la situación en un punto arbitrario de S .

Número 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de una hoja de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Hallar el plano tangente en un punto de S del tipo $p = (a, b, 0)$. Describir la estructura geométrica de la familia de planos que se obtienen de ese modo.

Número 4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y T_pS el plano tangente en $p \in S$. Probar que para toda base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS existe una parametrización local $\varphi : U \rightarrow S$ con $\varphi_{u,p} = w_1$, $\varphi_{v,p} = w_2$.

Número 5. Proponer una definición plausible de recta normal a una superficie en un punto y probar que todas las rectas normales a una superficie de revolución alrededor del eje z cortan dicho eje.

Número 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie que no corta al eje z y tal que todas las rectas normales a S sí cortan a este eje.



(1) Probar que cada punto de S tiene un entorno abierto contenido en una superficie de revolución alrededor del eje z .

(2) Constrúyase una superficie S en las condiciones anteriores, y conexa, que no esté toda contenida en una superficie de revolución (la figura sugiere cómo hacer esto).

Número 7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrizada por $y = x \tan z$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in (-\pi/2, \pi/2)$. Probar que la unión de las rectas normales a S a lo largo de la recta $y = x$, $z = \pi/4$ es una superficie. Identificar dicha superficie.

Número 8. Sea $T \subset \mathbb{R}^3$ el conjunto que se obtiene al girar alrededor del eje z el grafo de la tractriz $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t + \log \tan(t/2))$, y sea P el plano $z = 0$.

Cálculo diferencial en superficies

En esta lección generalizamos el cálculo diferencial para aplicarlo en nuestro estudio de las superficies diferenciables. El Análisis Matemático trata la diferenciabilidad de aplicaciones definidas en abiertos del espacio afín, y aquí necesitamos utilizar aplicaciones definidas en superficies.

Definición 4.1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

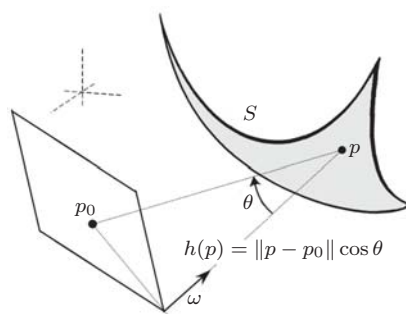
(1) Se dice que una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *diferenciable* si en cada punto $p \in S$ existe una *extensión local* diferenciable, esto es, una aplicación diferenciable $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 tal que $F|_{V \cap S} = f|_{V \cap S}$.

(2) Se dice que una aplicación $f : S \rightarrow S'$ con valores en una segunda superficie $S' \subset \mathbb{R}^3$ es diferenciable si lo es como aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ con valores en \mathbb{R}^3 .

Nótese que en un mismo punto puede haber muchas extensiones locales. Por otra parte, (1) es una definición de carácter local: basta encontrar una familia de extensiones locales diferenciables $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyos dominios V cubran X . Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable (la composición de extensiones locales es extensión de la composición). Es claro también que una aplicación diferenciable es continua.

Ejemplos 4.2. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

(1) Dados un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector $\omega \in \mathbb{R}^3$, con $\|\omega\| = 1$, la función $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por el producto escalar $h(p) = (p - p_0)\omega$ se llama *función altura*, pues mide la altura sobre el plano afín ortogonal a ω que pasa por p_0 (véase la figura). Como la misma fórmula define una extensión diferenciable de h a todo \mathbb{R}^3 , h es diferenciable.



(2) Por similar razón es diferenciable la función $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(p) = \|p - p_0\|^2$, donde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado. (Esta función mide el cuadrado de la distancia al punto en cuestión.)

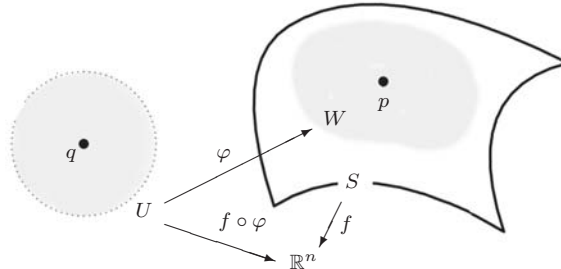
(3) Asimismo, si $p_0 \notin S$, la función $\text{dist} : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\text{dist}(p) = \|p - p_0\|$ también es diferenciable. ■

La diferenciabilidad se expresa mediante parametrizaciones de la manera siguiente.

(4.3) Diferenciabilidad por localización. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie.

(1) Sea $\varphi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de un abierto W de S . La observación 2.3(1), p. 20, dice exactamente que $\varphi^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene extensiones locales diferenciables \mathcal{T} (cuyos dominios recubren W), luego dice que φ^{-1} es una *aplicación diferenciable*. Este hecho es fundamental.

(2) Una aplicación $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable si y sólo si lo son todas las *localizaciones* $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.



La condición necesaria se sigue de que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Y lo mismo la condición suficiente: si todas las localizaciones $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables, lo son las composiciones $f|_W = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$.

Nótese además que para comprobar la diferenciabilidad basta considerar las parametrizaciones φ de un atlas de S . ■

Inmediatamente introducimos la noción de derivada, según la idea de la *derivada direccional* del Análisis.

Definición 4.4. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable de una superficie S ; sean $p \in S$ y $p' = f(p) \in \mathbb{R}^n$. La *derivada de f en p* es la aplicación lineal

$$d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n : \omega \mapsto (f \circ \alpha)'(t_0),$$

donde $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva diferenciable con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \omega$.

Veamos que esta definición no depende de la elección de α . Tomamos una extensión local diferenciable $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de f a un entorno V de p en \mathbb{R}^3 , y por la regla de la cadena para $F \circ \alpha$ tenemos que

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = (F \circ \alpha)'(t_0) = d_p F(\alpha'(t_0)) = d_p F(\omega).$$

y $d_p F(\omega)$ no depende de α . Esto también muestra que la derivada $d_p f$ es una aplicación lineal, por ser la restricción de $d_p F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ que lo es. Además, así podemos calcular $d_p f$ utilizando *cualquier* extensión F de f .

Remarquemos por otra parte que $d_p f$ está determinada por la restricción de f a cualquier entorno de p .

Ejemplo 4.5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable, y consideremos un punto $p \in S$. La superficie S tendrá una ecuación implícita $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ en un entorno V de p en \mathbb{R}^3 (2.10, p. 25). Entonces $g|_{S \cap V} : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable constante, luego con derivada nula. Pero esa derivada es $d_p(g|_S) = d_p g|_{T_p S}$, luego $d_p g$ se anula en $T_p S$. Como g es una ecuación implícita, la aplicación lineal $d_p g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ no es nula, luego su núcleo es un plano, y por contener el plano tangente debe coincidir con él. Reencontramos lo que ya vimos en 3.7, p. 36. ■

El uso de parametrizaciones reduce las cuestiones *locales* sobre aplicaciones diferenciables al caso conocido de abiertos de \mathbb{R}^2 . Hacemos a continuación una demostración que ilustra este principio.

Proposición 4.6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie conexa y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si la derivada $d_p f$ es nula para todo punto $p \in S$, entonces la aplicación f es constante.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor cualquiera que f alcance y consideremos el conjunto $Q \neq \emptyset$ de los puntos de S cuya imagen es precisamente a . Ya que f es continua, Q es cerrado. Probemos que es también abierto, lo que por la conexión de S implicará $Q = S$ y que f es constante ($\equiv a$).

Sea $p \in Q$. Elegimos una extensión local diferenciable $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de f a un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 y una parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ de un entorno abierto W de p . Podemos suponer que φ está definida en un disco abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y que $S \cap V = W$. Entonces $f \circ \varphi = F \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable

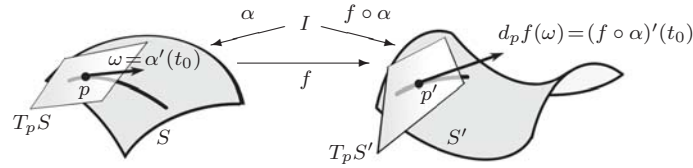
y, por la regla de la cadena para $F \circ \varphi$, en cada punto $w = (u, v) \in U$ tenemos

$$d_w(f \circ \varphi) = d_w(F \circ \varphi) = d_{\varphi(w)}F \circ d_w\varphi = 0.$$

Por el resultado para abiertos afines, $f \circ \varphi$ es constante en el disco U , y como φ es suprayectiva, f es constante en W y $W \subset Q$. En conclusión, Q es abierto como se quería. ■

Cuando una derivada $d_p f$ de una aplicación diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es nula se dice que p es un *punto crítico de f* . Esta noción es esencial en el estudio de los extremos locales de las *funciones* diferenciables (21.4, p.304): véase el prob.6 de esta lección, p.53.

Obsérvese ahora que si $f : S \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable entre superficies, en la misma definición de la derivada, 4.4, p.46, vemos que $d_p f(\omega) \in T_{p'}S'$, luego tenemos de hecho una aplicación lineal entre los planos tangentes: $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$.



Inmediatamente de la definición se deduce que se cumple la *regla de la cadena*:

Proposición 4.7. Sean $f : S \rightarrow S'$ y $g : S' \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos aplicaciones diferenciables y $p \in S$; denotamos $p' = f(p)$. Se cumple:

$$d_p(g \circ f) = d_{p'}g \circ d_p f.$$

En lo sucesivo no necesitaremos distinguir (como en razonamientos anteriores) si las aplicaciones están definidas en abiertos afines para aplicar esta regla de derivación.

Ahora concentramos nuestra atención en las aplicaciones diferenciables *entre superficies*. En primer lugar revisamos la forma de localización descrita en 4.3(2), p.46.

(4.8) Localización de una aplicación diferenciable entre superficies. Sea $f : S \rightarrow S'$ una aplicación *continua* entre dos superficies diferenciables, y sea $p \in S$.

(1) Por la continuidad, existen parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow W$ de un entorno W de p en S y $\psi : U' \rightarrow W'$ de un entorno W' de $p' = f(p)$ en S' tales que $f(W) \subset W'$ y por tanto está bien definida la composición $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow U'$. Ésta es otra forma de *localización de f* .

Si denotamos (u, v) las coordenadas de un punto de $(x, y, z) \in W \subset S$ respecto de φ y (s, t) las de $f(x, y, z)$ respecto de ψ tenemos $(s, t) = g(u, v)$, que son las *ecuaciones de f en coordenadas locales*.

(2) Suponemos $f : S \rightarrow S'$ diferenciable y dadas dos parametrizaciones $\varphi : U \rightarrow S$ y $\psi : U' \rightarrow S'$ como en (1). Denotamos $q = \varphi^{-1}(p)$ y $q' = \psi^{-1}(p')$ y recordamos que $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$ y $d_{q'}\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{p'}S'$ son isomorfismos lineales. Por la regla de la cadena se tiene

$$d_qg = (d_{q'}\psi)^{-1} \circ d_p f \circ d_q\varphi,$$

igualdad que vamos a usar para expresar $d_p f$ mediante ecuaciones lineales. Elegimos en T_pS y $T_{p'}S'$ las bases \mathcal{B}_φ y \mathcal{B}_ψ asociadas a las dos parametrizaciones dadas, y la igualdad anterior se escribe matricialmente así:

$$M(d_qg) = M(d_{q'}\psi)^{-1} M(d_p f) M(d_q\varphi)$$

Por supuesto, en \mathbb{R}^2 se considera la base estándar, de modo que por la construcción de \mathcal{B}_φ y \mathcal{B}_ψ las dos matrices $M(d_q\varphi)$ y $M(d_{q'}\psi)$ son la identidad. Concluimos que $M(d_qg) = M(d_p f)$, es decir, que $M(d_p f)$ es la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas locales $(s, t) = g(u, v)$:

$$M(d_p f) = \begin{pmatrix} s_u(q) & s_v(q) \\ t_u(q) & t_v(q) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la *matriz jacobiana de f en coordenadas locales*. ■

En fin, he aquí otra definición fundamental.

Definición 4.9. Una aplicación $f : S \rightarrow S'$ entre dos superficies de \mathbb{R}^3 se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Si existe tal f , las superficies se denominan *difeomorfas*.

Claramente un difeomorfismo es un homeomorfismo. También es claro que la composición de difeomorfismos es de nuevo un difeomorfismo.

El ejemplo primero de difeomorfismo es cualquier parametrización $\varphi : U \rightarrow S$ de una superficie diferenciable S : es un difeomorfismo de U sobre su imagen $\varphi(U)$,

que es un abierto de S . En otras palabras todo punto de S tiene un entorno difeomorfo a un abierto U del plano, lo que resumimos diciendo que S es *localmente difeomorfa* al plano.

Sea $f : S \rightarrow S'$ un difeomorfismo entre dos superficies de \mathbb{R}^3 , y sean $p \in S$, $p' = f(p) \in S'$. Aplicando la regla de la cadena a las dos composiciones $f^{-1} \circ f = \text{Id}_S$, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{S'}$ resulta que $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$ es un isomorfismo lineal, con inversa $d_{p'}(f^{-1})$. Evidentemente, para esta conclusión basta que f sea difeomorfismo de un entorno de p sobre uno de $f(p')$, caso en el que decimos que f es un *difeomorfismo local en p* . De esta forma llegamos al *teorema de la función inversa*:

Teorema 4.10. *Sea $f : S \rightarrow S'$ una aplicación diferenciable entre superficies de \mathbb{R}^3 . Entonces, f es un difeomorfismo local en un punto $p \in S$ si y sólo si la derivada $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$ es un isomorfismo lineal.*

Demostración. La condición suficiente ya la hemos probado. La necesaria (en realidad la equivalencia toda) se reduce al teorema de la función inversa para abiertos afines del plano mediante una localización:

$$g = \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow U' \quad \text{con } p = \varphi(q), q \in U.$$

Baste decir para esa reducción que: (i) por ser φ y φ' difeomorfismos, g es difeomorfismo local en q si y sólo si f lo es en p , y (ii) por ser las derivadas de φ y φ' isomorfismos, $d_q g$ lo es si y sólo si lo es $d_p f$. ■

Una consecuencia interesante de naturaleza topológica del resultado anterior es ésta:

Corolario 4.11. *Sean S y S' dos superficies de \mathbb{R}^3 . Si $S \subset S'$, entonces S es necesariamente una parte abierta de S' .*

Demostración. En efecto, sea $p \in S$. Es claro que, como aplicación diferenciable la inclusión $f : S \subset S'$ tiene por derivada la inclusión $d_p f : T_p S \subset T_{p'} S'$. Como ambos espacios tangentes son planos vectoriales, deben coincidir, de modo que $d_p f$ es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa, p tiene un entorno abierto en S que también es abierto en S' . Como esto vale para todo $p \in S$ concluimos que en efecto S es un abierto de S' . ■

Hasta aquí hemos considerado la noción de difeomorfismo solamente desde el punto de vista local. El estudio de los difeomorfismos globales entre superficies,

y en particular del *grupo* que forman los de una superficie sobre sí misma es de una gran importancia, y aunque no nos ocupa aquí, sí queremos comentar una propiedad interesante.

Ya sabemos que todo punto de una superficie S tiene un entorno difeomorfo a un abierto del plano afín, y reduciendo el entorno podemos suponer que es difeomorfo al disco unidad; en particular, dos puntos distintos de S tienen entornos difeomorfos. La cuestión global es si existe un difeomorfismo $f : S \rightarrow S$ de toda la superficie sobre sí misma que transforme uno de los puntos en el otro. Esta propiedad, conocida como *homogeneidad*, es en efecto cierta, y muestra la riqueza del grupo de difeomorfismos de una superficie. Comprobémoslo en dos ejemplos.

Ejemplo 4.12. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(1) Cualquier aplicación lineal ortogonal $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (esto es, que conserve el producto escalar) induce un difeomorfismo $f = \lambda|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$: es biyectiva, es diferenciable por restricción, y su inversa es también diferenciable por ser restricción de la aplicación lineal ortogonal λ^{-1} . En otras palabras *el grupo de difeomorfismos de la esfera contiene al grupo ortogonal*.

Pero advertimos que la esfera tiene muchos otros difeomorfismos.

(2) Un difeomorfismo importante es la aplicación *antipodal*:

$$\lambda : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

(3) Dos puntos de la esfera $p, p' \in \mathbb{S}^2$ son dos vectores de norma 1, y siempre existe una aplicación ortogonal λ que transforma uno en otro. Entonces $\lambda|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ un difeomorfismo de la esfera en sí misma que transforma p en p' . En otras palabras, \mathbb{S}^2 es homogénea. ■

Ejemplo 4.13. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el toro de revolución de ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$$

Es el toro de 1.11, p. 10, con $r = 1$, $c = 2$.

(1) Para cualesquiera números reales $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos la parametrización $\varphi : (a, a + 2\pi) \times (b, b + 2\pi) \rightarrow S$ de ecuaciones

$$x = (\cos u + 2) \cos v, \quad y = (\cos u + 2) \sin v, \quad z = \sin u.$$

Esta parametrización es un difeomorfismo sobre el abierto del toro obtenido eliminando un paralelo y un meridiano (¿cuáles?).

(2) Fijamos $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ y definimos una aplicación $f : S \rightarrow S$ de la siguiente manera. Dado $p \in S$ tomamos una parametrización φ del tipo anterior que cubra un entorno de p . Es decir, $p = \varphi(u, v)$ con $a < u < a + 2\pi$, $b < v < b + 2\pi$. Entonces ponemos

$$f(p) = ((\cos(u+u_0)+2) \cos(v+v_0), (\cos(u+u_0)+2) \sin(v+v_0), \sin(u+u_0)),$$

es decir, $f(p) = \psi(u+u_0, v+v_0)$ donde

$$\psi : (a+u_0, a+u_0+2\pi) \times (b+v_0, b+v_0+2\pi) \rightarrow S$$

está definida por la misma expresión que φ . De la periodicidad de las funciones trigonométricas se sigue inmediatamente que esta definición de f no depende del par de valores a y b .

(3) Visto lo anterior, la diferenciabilidad de f es automática, porque la localización

$$\psi^{-1} f \varphi : (u, v) \mapsto (u+u_0, v+v_0),$$

es simplemente la restricción de una traslación.

(3) Ahora observamos que si repetimos la construcción anterior empezando con $(-u_0, -v_0) \in \mathbb{R}^2$ la aplicación diferenciable $g : S \rightarrow S$ que obtenemos cumple $g \circ f = f \circ g = \text{Id}_S$. Por tanto $f : S \rightarrow S$ es un difeomorfismo (con inverso g).

(4) Finalmente, dados dos puntos p y p' del toro tendremos

$$\begin{cases} p = ((\cos u + 2) \cos v, (\cos u + 2) \sin v, \sin u), \\ p' = ((\cos u' + 2) \cos v', (\cos u' + 2) \sin v', \sin u'), \end{cases}$$

para ciertos u, v, u', v' . Tomando $u_0 = u' - u$, $v_0 = v' - v$ en la construcción anterior obtenemos un difeomorfismo f de S que transforma p en p' .

En conclusión, el toro es efectivamente homogéneo. ■

Problemas

Número 1. Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación antipodal de la esfera en si misma. Calcular la derivada de f en un punto cualquiera. Calcular la matriz jacobiana de f en el polo sur utilizando dos parametrizaciones por proyección estereográfica, una desde el polo norte y otra desde el polo sur.

La primera forma fundamental

En esta lección introducimos algunas nociones de carácter métrico. Hay que empezar por *la primera forma fundamental*, que nos permite medir longitudes, ángulos y áreas en una superficie.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Ya que el plano tangente $T_p S$ a la superficie S en un punto p suyo es un subespacio vectorial del espacio euclídeo, podemos hacer uso del producto escalar de ese espacio euclídeo para medir longitudes y ángulos de los vectores tangentes a la superficie en ese punto. Sea $p \in S$. Consideramos la restricción del producto escalar de \mathbb{R}^3 al plano tangente

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R} : (\omega, \omega') \mapsto \omega \omega',$$

y la forma cuadrática asociada:

Definición 5.1. La forma cuadrática $\mathbf{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{I}_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

es la *primera forma fundamental de S en p* .

Como es sabido, el conocimiento de \mathbf{I}_p es equivalente al conocimiento del producto escalar en $T_p S$, pues

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_p(\omega + \omega') - \mathbf{I}_p(\omega) - \mathbf{I}_p(\omega')).$$

Hacemos la observación siguiente sobre la notación. Hasta ahora habíamos denotado como un producto ordinario $\omega \omega'$ el producto escalar de dos elementos de \mathbb{R}^3 , pues el contexto evita siempre las confusiones. A partir de ahora usaremos la escritura $\langle \omega, \omega' \rangle_p$ para vectores tangentes, precisamente para hacer énfasis en que lo son. Además, normalmente omitiremos el subíndice p .

(5.2) Expresión en coordenadas locales de la primera forma fundamental. En la situación precedente, describamos \mathbf{I}_p mediante parametrizaciones.

(1) Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización de un entorno W de p en S , a la que corresponde la base del espacio tangente de 3.4(1), p. 32, $\mathcal{B}_\varphi = \{\varphi_u, \varphi_v\}$. Sea $\omega \in T_p S$ un vector de coordenadas (λ, μ) respecto de esa base, es decir, que se tiene $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_p(\omega) &= \langle \omega, \omega \rangle = \langle \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v, \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \mu^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.\end{aligned}$$

En el futuro usaremos la notación

$$\begin{cases} E_p = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \|\varphi_u\|^2, \\ F_p = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \\ G_p = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \|\varphi_v\|^2, \end{cases}$$

con la que escribimos

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 E_p + 2\lambda\mu F_p + \mu^2 G_p,$$

o, en términos matriciales,

$$\mathbf{I}_p(\omega) = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}; \quad \text{denotamos } Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}.$$

La matriz Q_p es la *matriz de la primera forma fundamental* respecto de (la base \mathcal{B}_φ asociada a) φ . Como Q_p es la matriz de una forma bilineal simétrica definida positiva, se cumple

$$E_p > 0, \quad G_p > 0, \quad \det(Q_p) = E_p G_p - F_p^2 > 0.$$

Otra manera de escribir el determinante es la siguiente:

$$\begin{aligned}EG - F^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \sin^2 \theta = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2\end{aligned}$$

(el ángulo θ es el que forman los dos vectores tangentes φ_u y φ_v).

(2) Los *coeficientes* E_p, F_p, G_p describen completamente la primera forma fundamental y como veremos son dato suficiente para el tratamiento de los temas métricos relativos a la superficie. Claramente, E, F, G son tres funciones diferenciables cuyo dominio es $U \subset \mathbb{R}^2$ o $W \subset S$, según convenga referirse a las

coordenadas en U o al punto en W ; estas imprecisiones en la notación son habituales y no suelen generar confusión. En cualquier caso los coeficientes dependen de la parametrización elegida. La notación que empleamos para designarlos es la clásica de Gauss. Una notación más moderna es la siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 g_{11} + 2\lambda\mu g_{12} + \mu^2 g_{22} = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \\ g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G, \end{cases}$$

(obsérvese que aquí incluso se omiten el punto y sus coordenadas).

(3) Por último, escribamos como afecta un cambio de coordenadas a la expresión local de la primera forma fundamental. Sea ψ otra parametrización de un entorno de p , digamos con $p = \psi(r)$. Tenemos entonces la base $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$ de $T_p S$ y sabemos (3.4(3), p.33) que la matriz de cambio de \mathcal{B}_ψ a \mathcal{B}_φ es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$; denotaremos simplemente J esa matriz. Por otra parte, denotamos Q' la matriz de la primera forma fundamental respecto de ψ , es decir, respecto de \mathcal{B}_ψ , y E', F', G' sus coeficientes. Como es bien sabido, $Q' = J^t Q J$, lo que permite expresar los coeficientes E', F', G' en función de los coeficientes E, F, G y las derivadas parciales de las nuevas coordenadas respecto de las anteriores. Dejamos al lector que haga esto explícito, y a cambio observamos que para los determinantes se tiene

$$\det(Q') = \det(J^t Q J) = \det(Q) \det(J)^2.$$

Esta relación será útil más adelante. ■

A continuación se analizan unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 5.3. Sea S una superficie topográfica definida como el grafo de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos su parametrización de Monge $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ (2.1, p.17); ya hemos visto (3.6, p.36) que el plano tangente en el punto $(x, y, f(x, y))$ está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y).$$

Por tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1 + f_x^2, \\ F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y, \\ G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1 + f_y^2, \end{cases}$$

y, por tanto, si un vector tangente ω tiene coordenadas λ, μ respecto de la base correspondiente a esta parametrización de Monge, se tiene que

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(1 + f_x^2) + 2\lambda\mu f_x f_y + \mu^2(1 + f_y^2).$$

En particular el determinante es $1 + f_x^2 + f_y^2$. ■

Ejemplo 5.4. Consideremos el cilindro circular $S : x^2 + y^2 = 1$. Como superficie de revolución se parametriza mediante las ecuaciones

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v,$$

y la base correspondiente del plano tangente en un punto dado es

$$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1).$$

Deducimos que $E = 1, F = 0, G = 1$, y por tanto la primera forma fundamental en estas coordenadas se expresa de la más sencilla manera: $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2$; el determinante es 1. Sugerimos al lector que haga estos cálculos para una parametrización distinta del cilindro. ■

Una expresión de la primera forma fundamental tan sencilla como en el ejemplo precedente no siempre es posible. De hecho, que esto sea posible es una propiedad muy singular: ya para la esfera no se da. Esta carencia de la esfera es la formulación matemática de que no hay mapas totalmente fidedignos de la tierra: o modifican las distancias, o las áreas, o ambas; Gauss fue quien lo descubrió. Aquí lo podremos demostrar después de desarrollar el concepto de curvatura para superficies.

Ejemplo 5.5. Al hilo del comentario precedente, estudiemos la primera forma fundamental de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Una parametrización viene dada por las ecuaciones:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

La base asociada del plano tangente viene dada por los vectores

$$\begin{cases} \varphi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \\ \varphi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0), \end{cases}$$

y por tanto los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \sen^2 u \cos^2 v + \sen^2 u \sen^2 v + \cos^2 u = 1, \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \sen u \cos v \sen v \cos u - \sen u \cos u \sen v \cos v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \cos^2 u \sen^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u, \end{cases}$$

En conclusión, la expresión de la primera forma fundamental de la esfera en estas coordenadas es

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2 \cos^2 u,$$

y el determinante es $\cos^2 u$. Como acababamos de pronosticar, la expresión de la primera forma fundamental no es tan simple como en el ejemplo previo, pero adviértase que de momento sólo podemos decir que no es tan simple *en estas coordenadas particulares*, mientras pretendemos que no lo será en *cualesquiera coordenadas* que se usen. ■

Tras los dos ejemplos anteriores, consideremos una superficie de revolución general.

Ejemplo 5.6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie de revolución generada por una curva C como en 1.10, p.9, y 3.9, p.38. Si C es la traza de $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$, la superficie S tiene la parametrización

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sen v, \xi(u)),$$

de modo que

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sen v, \xi'(u)), \\ \varphi_v = (-\zeta(u) \sen v, \zeta(u) \cos v, 0). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \zeta'^2(u) \cos^2 v + \zeta'^2(u) \sen^2 v + \xi'^2(u) = \zeta'^2(u) + \xi'^2(u), \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -\zeta(u) \sen v \zeta'(u) \cos v + \zeta(u) \cos v \zeta'(u) \sen v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \zeta^2(u) \sen^2 v + \zeta^2(u) \cos^2 v = \zeta^2(u), \end{cases}$$

y la primera forma fundamental queda

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 (\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2) + \mu^2 \zeta^2(u),$$

con determinante $(\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2) \zeta^2(u)$. Esta expresión se puede simplificar algo mediante la longitud del arco de α . Si α está parametrizada por la longitud del arco, entonces $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ y obtenemos $\mathbf{I} = \lambda^2 + \mu^2 \zeta^2$ con determinante ζ^2 . ■

Veamos un último ejemplo antes de avanzar.

Ejemplo 5.7. Consideremos la parametrización global φ del helicoides estudiada en 1.7(4), p. 6, y 3.5(4), p. 35: $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$. Como

$$\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0),$$

resulta $E = v^2 + b^2, F = 0, G = 1$, luego $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(v^2 + b^2) + \mu^2$, y el determinante es $v^2 + b^2$. ■

Expresaremos a continuación dos nociones métricas, la longitud de una curva y el ángulo formado por dos curvas, en términos de la primera forma fundamental.

(5.8) Longitudes y ángulos en una superficie. Como es habitual, $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie y $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ una parametrización suya.

(1) Dada una curva $\alpha : I \rightarrow W \subset S$ consideramos como en 3.3, p. 32, la curva $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$. Tendremos $\beta(t) = (u(t), v(t))$ y

$$\alpha'(t) = (\varphi \circ \beta)'(t) = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v.$$

Resulta que la longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L_{t_0}^t(\alpha) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{u'^2 E_{\alpha(t)} + 2u'v'F_{\alpha(t)} + v'^2 G_{\alpha(t)}} dt. \end{aligned}$$

(2) El ángulo θ que forman en un punto $p \in S$ dos curvas α y γ de S que pasan por él, es el ángulo que forman sus vectores tangentes en p . Si es $p = \alpha(t_0) = \gamma(s_0)$. Como

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(s_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\gamma'(s_0)\|}$$

este ángulo está determinado por la primera forma fundamental.

Por ejemplo, el ángulo que forman en p las líneas coordenadas de la parametrización φ tiene por coseno

$$\cos \theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F_p}{\sqrt{E_p} \sqrt{G_p}} = \frac{F_p}{\sqrt{E_p G_p}}.$$

(3) Acabamos de ver cómo la primera forma fundamental mide longitudes de curvas y ángulos de pares de curvas de la superficie dada. Recíprocamente, *la medida de longitudes de curvas de la superficie determina la primera forma fundamental*. Veámoslo.

Sea ω un vector de $T_p S$ y tomemos una curva en la superficie $\alpha : I \rightarrow S$ tal que $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha'(t_0) = \omega$ para un determinado valor del parámetro $t_0 \in I$; consideremos la función diferenciable

$$L : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto L(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'\|.$$

Entonces la primera forma fundamental es el cuadrado de la derivada de esta función:

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \|\omega\|^2 = \|\alpha'(t_0)\|^2 = L'(t_0)^2.$$

Considerando la longitud de las curvas un concepto intrínseco de la superficie, llegamos a la conclusión de que la primera forma fundamental es del mismo modo intrínseca. Esta idea es básica en la llamada *Geometría Intrínseca*.

A continuación calculamos como aplicación de los conceptos anteriores las *loxodromas* de la esfera, que son aquellas que forman ángulo constante con los meridianos.

Ejemplo 5.9. Calculemos las loxodromas $\alpha(t)$ de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que forman un ángulo constante θ con los meridianos. Partimos de las ecuaciones paramétricas de la esfera vistas en 1.9, p. 8:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u,$$

en las que $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u$ (5.5, p. 60). En estas coordenadas tendremos $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, con vector tangente $\alpha'(t)$. Por otra parte, un meridiano $v = v_0$ tiene por vector tangente φ_u . Las coordenadas de esos dos vectores tangentes respecto de la base \mathcal{B}_φ son respectivamente $(u'(t), v'(t))$ y $(1, 0)$. Por tanto

$$\begin{cases} \langle \varphi_u, \alpha'(t) \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = u'(t), \\ \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad \|\alpha'(t)\|^2 = u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t). \end{cases}$$

Como los dos vectores tangentes deben formar un ángulo constante θ , obtenemos

$$\cos \theta = \frac{u'(t)}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t)}}.$$

Elevando al cuadrado y operando un poco se obtiene que

$$v'(t)^2 \cos^2 u(t) \cos^2 \theta = u'(t)^2 (1 - \cos^2 \theta) = u'(t)^2 \sin^2 \theta,$$

Separando las funciones u y v tenemos

$$v'(t)^2 \cot^2 \theta = \frac{u'(t)^2}{\cos^2 u(t)}.$$

Omitimos una pequeña discusión de signos de u' y v' , tras la cual se puede escribir

$$v'(t) \cot \theta = \pm \frac{u'(t)}{\cos u(t)}.$$

En esta ecuación ambos miembros tiene primitivas conocidas, y queda

$$(v + c) \cot \theta = \pm \log \left(\frac{1 + \sin u}{\cos u} \right).$$

Hemos omitido el parámetro t , pues la anterior se puede ver como una ecuación implícita de la loxodroma α en las coordenadas locales (u, v) , que son la latitud y la longitud. ■

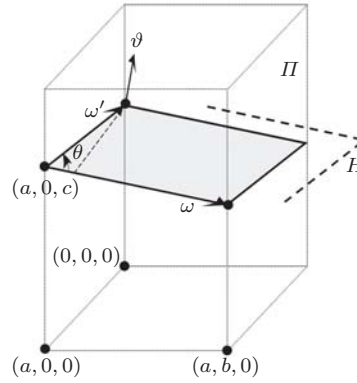
Terminaremos la lección mostrando que el cálculo de áreas depende, como el de longitudes y ángulos, de la primera forma fundamental. Vamos a utilizar una fórmula del Análisis para el cálculo del área de un grafo mediante una integral, pero para facilitar la tarea al lector la justificaremos antes.

(5.10) Área de un grafo. (1) En primer lugar resolvemos un problema de geometría elemental.

Consideremos un plano de \mathbb{R}^3 perpendicular al vector $\vartheta = (r, s, 1) \in \mathbb{R}^3$, y sea Π un paralelepípedo cuya base rectangular tiene lados de longitudes a y b . Entonces Π define en el plano un paralelogramo de área

$$\sqrt{1 + r^2 + s^2} \, a b.$$

La figura describe la situación, y sirve de guía para la demostración. En efecto, el área buscada es $\|\omega\| \|\omega'\| \sin \theta$, que es la norma del

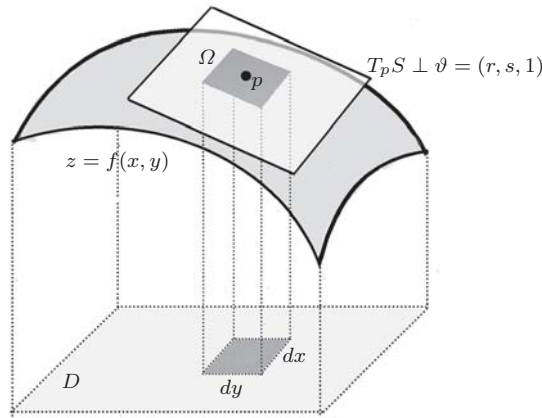


producto vectorial $\omega \wedge \omega'$. Podemos suponer que el origen de esos vectores ω y ω' es el punto $(a, 0, c)$, y obtener sus extremos respectivos intersectando el plano H perpendicular a ϑ que pasa por $(a, 0, c)$ con: (i) la recta vertical que pasa por $(a, b, 0)$ y (ii) la recta vertical que pasa por $(0, 0, 0)$. Operando con cuidado se obtiene la fórmula anterior.

(2) Sea ahora $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto D del plano xy de \mathbb{R}^3 , y consideremos su grafo $T : z = f(x, y)$ en \mathbb{R}^3 . El área de ese grafo es

$$\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

En efecto, argumentemos sin formalismos lo que en realidad es un problema de cálculo integral. El elemento de área que hay que integrar es el área Ω de una sección como la del apartado anterior, aquí del plano tangente en un punto $p = (x, y, f(x, y)) \in T$ con el paralelepípedo cuya base tiene lados dx e dy .



Es decir, el área es

$$\int_D \Omega = \int_D \sqrt{1 + r^2 + s^2} \, dx dy.$$

Pero en nuestro caso, según 3.7, p. 36, tenemos el vector $\vartheta = (-f_x, -f_y, 1)$, lo que da la fórmula deseada. ■

Después de esta preparación volvemos al discurso principal, para expresar mediante la primera forma fundamental el cálculo de áreas.

(5.11) Áreas en una superficie. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : U \rightarrow W \subset S$

una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para calcular áreas de subconjuntos de W .

(1) Como φ no tiene por qué ser una parametrización de Monge de un grafo, debemos empezar considerando otra que sí lo sea, que existe por 2.2, p. 18. Sea $p \in W$, y sea $T \subset W$ un entorno suyo que es un grafo. Para facilitar la presentación, suponemos que T es del tipo $z = f(x, y)$. Vimos en 5.3, p. 59, que el determinante de la primera forma fundamental en la parametrización de Monge $\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es

$$\det(Q'(x, y)) = 1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2,$$

precisamente el radicando de la fórmula integral de 5.10(2), con lo que:

$$\text{área}(T) = \int_D \sqrt{\det(Q'(x, y))} \, dx dy.$$

(2) La fórmula anterior se cumple también para φ , es decir:

$$\text{área}(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u, v))} \, du dv.$$

En efecto, para comprobar que las dos integrales valen lo mismo, hacemos en la segunda el cambio de variables $h = \varphi^{-1} \circ \psi : D \rightarrow U$, y, como nos enseña el Análisis, queda:

$$\int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u, v))} \, du dv = \int_D \sqrt{\det(Q(h(x, y)))} \, |\det(J_h(x, y))| \, dx dy,$$

donde J_h es el jacobiano del cambio realizado. Pero vimos en 5.2(3), p. 59, que

$$\det(Q'(x, y)) = \det(Q(u, v)) \det(J_h(x, y))^2, \quad (u, v) = h(x, y),$$

luego el último integrando es precisamente $\sqrt{\det(Q'(x, y))}$ y hemos terminado.

(3) Lo anterior muestra que para calcular áreas en un entorno del punto p hay que hacer en la región correspondiente de U la integral de la función $\sqrt{\det(Q(u, v))}$. Como esta función es la misma para todos los puntos $p \in W$, resulta al final que

$$\text{área}(\Sigma) = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \sqrt{\det(Q)} = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2} = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$$

para cualquier subconjunto $\Sigma \subset W$. ■

La discusión del párrafo anterior contiene todo lo necesario para definir el concepto más general de integral de una función.

(5.12) Integral de una función en una superficie. Como antes, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para definir la integral $\int_{\Sigma} f$ de una función $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un subconjunto Σ de W .

Desde un punto de vista geométrico, la integral de la función f debe ser el volumen encerrado entre su grafo y la superficie, entendiendo que sobre cada elemento de área Ω de la superficie en un punto p se eleva un paralelepípedo de altura $f(p)$. El volumen de ese paralelepípedo será $f\Omega$, y éste será el *elemento de volumen* cuya integral denotamos $\int_{\Sigma} f$. En coordenadas locales

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f(\varphi(u, v)) \sqrt{\det(Q(u, v))} \, dudv = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

(con un pequeño abuso de notación al final). Naturalmente, ésta fórmula es la definición, de la que el argumento previo es sólo una motivación. Por tanto, debe comprobarse que el resultado de la integral no depende de la parametrización. Eso resulta por cambio de variables, igual que para el cálculo de áreas en 5.11(2).

En particular, el área de Σ es la integral de la función constante igual a 1: $\text{área}(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1$, es decir, un volumen de altura 1 sobre Σ . ■

Ejemplos 5.13. (1) Calculemos el área de la esfera unidad $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Será ocho veces el área de un octante $\Sigma = \mathbb{S}^2 \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Para calcular este área usamos la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u,$$

para la que sabemos que $\det(Q(u, v)) = \cos^2 u$. Como $\varphi^1(\Sigma)$ es el rectángulo $0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \frac{\pi}{2}$, el área del octante es

$$\text{área}(\Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, dudv = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $\text{área}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$.

(2) Sea S la superficie de revolución parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

y para la que hemos calculado que $\det(Q(u, v)) = (\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2)\zeta^2(u)$. El dominio de la parametrización será $(a, b) \times (0, 2\pi)$, y por tanto

$$\text{área}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} du dv = 2\pi \int_a^b \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} du.$$

Por ejemplo, aplicando esta fórmula con $\zeta(u) = c + r \cos u$, $\xi(u) = r \sin u$, se obtiene el área del toro de revolución, que es $4\pi^2 rc$.

Si la curva C es un grafo $x = \zeta(z)$, entonces $z = \xi(u) = u$ y la fórmula anterior queda

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b \zeta(z) \sqrt{1 + \zeta'(z)^2} dz,$$

seguramente más familiar para el lector. ■

Problemas

Número 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el plano afín parametrizado por $\varphi(u, v) = p + u\omega + v\omega'$, donde ω y ω' son vectores independientes. Expresar la primera forma fundamental en estas coordenadas y calcular su determinante. Deducir una fórmula para el área de un rectángulo de lados paralelos a ω y ω' con longitudes a y b .

Número 2. Sea S el grafo de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4$ y consideremos la correspondiente parametrización de Monge. Hallar la primera forma fundamental.

Número 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida por la parametrización global $\varphi: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow S$ dada por $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$. Hallar la primera forma fundamental y deducir que las curvas coordenadas de esta parametrización son ortogonales en todo punto.

Número 4. Sea φ una parametrización de una superficie S tal que $E \equiv 1$ y $F \equiv 0$. Probar que las curvas coordenadas $u = u_0, u = u_1$ definen sobre las curvas coordenadas $v = v_0, v = v_1$ segmentos de igual longitud.

Número 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Hallar las curvas de S que cortan a las generatrices en un ángulo constante.

Número 6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el hiperboloide de ecuación $z = axy$.

- (1) Hallar el ángulo con que se cortan las curvas coordenadas $x = x_0, y = y_0$.
- (2) Encontrar la familia de curvas que intersectan ortogonalmente a las curvas $x = \text{constante}$.

Número 7. Sean $\varphi: U \rightarrow S_1$ y $\psi: U \rightarrow S_2$ parametrizaciones de dos superficies; sean E, F, G y $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ los coeficientes de la primera forma fundamental de φ y ψ respectivamente. Probar que $\psi^{-1} \circ \varphi$ conserva áreas si y sólo si las funciones $EG - F^2$ y $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$ son iguales.

Número 8. Utilizar el problema anterior para demostrar que la aplicación antipodal $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ conserva áreas.

La aplicación de Gauss

En esta lección comenzamos el estudio de algunas de las nociones más importantes de la Geometría Diferencial de Superficies, que giran en torno a la denominada *aplicación de Gauss*.

Ya hemos definido anteriormente la dirección normal en un punto de una superficie, pero ahora es el momento de realizar un análisis cuidadoso de este concepto.

(6.1) Vectores normales al plano tangente. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y $p \in S$.

(1) Como hemos visto (3.4(1), p. 33), cada parametrización $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ de un entorno de W de p determina la dirección normal al plano tangente $T_p S$ mediante el producto vectorial $\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}$. El plano tangente determina completamente su dirección normal, pero el vector no nulo ϑ_p sólo está determinado *salvo proporcionalidad*. Para mejorar esa salvedad consideramos el vector *unitario* (esto es, de norma uno)

$$\eta_p = \frac{\vartheta_p}{\|\vartheta_p\|}.$$

Este vector se denomina *vector normal*, y está determinado *salvo signo*.

(2) Sea ψ otra parametrización con coordenadas (s, t) que cubre p y sea η'_p el correspondiente vector normal. Se tiene $\eta'_p = \pm \eta_p$, y queremos determinar ese signo. Consideramos la matriz jacobiana de cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$:

$$J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Vimos en 3.4(3), p. 33, que

$$\psi_{s,p} = a \varphi_{u,p} + b \varphi_{v,p}, \quad \psi_{t,p} = c \varphi_{u,p} + d \varphi_{v,p},$$

luego

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \psi_s \wedge \psi_t = (a\varphi_u + b\varphi_v) \wedge (c\varphi_u + d\varphi_v) \\ &= ac\varphi_u \wedge \varphi_u + ad\varphi_u \wedge \varphi_v + bc\varphi_v \wedge \varphi_u + bd\varphi_v \wedge \varphi_v \\ &= (ad - bc)\varphi_u \wedge \varphi_v = (ad - bc)\vartheta,\end{aligned}$$

y nótese que $ad - bc = \det(J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p)))$. Por tanto, al calcular los vectores normales para obtener el signo de la relación $\eta'_p = \pm \eta_p$ resulta que es el *signo del determinante jacobiano del cambio de coordenadas*. ■

La discusión anterior muestra que dos parametrizaciones de una misma superficie definen los mismos vectores normales si y sólo si el determinante jacobiano del cambio de coordenadas es siempre positivo; en ese caso decimos simplemente que *el cambio de coordenadas es positivo*. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable. Son equivalentes:*

- (1) *Existe una aplicación continua $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que asigna a cada $p \in S$ un vector no nulo $N(p)$ ortogonal al plano tangente $T_p S$.*
- (2) *Existe un atlas de S cuyos cambios de coordenadas son todos positivos.*

Demostración. Que (2) implica (1) resulta de la discusión precedente, pues al ser todos los cambios de coordenadas positivos, dos parametrizaciones definen los mismos vectores normales en los puntos comunes, y podemos definir consistentemente $p \mapsto \eta_p$, eligiendo para cada p el vector normal asociado a cualquier parametrización $\varphi : U \rightarrow W$ del atlas con $p \in W$.

Recíprocamente, supongamos que existe N . Entonces $\|N\|$ es una función continua nunca nula, y podemos dividir N por ella para suponer que cada vector N_p es unitario, esto es, es un vector normal a $T_p S$. Fijemos un punto $p_0 \in S$, y elijamos una parametrización $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ de un entorno conexo W de p_0 definida en el disco unidad $U \subset \mathbb{R}^2$. Afirmamos que la aplicación diferenciable $\eta : W \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \eta_p$ coincide con $N|_W$ salvo signo.

En efecto, por la continuidad de N y η , los conjuntos disjuntos

$$W^+ = \{p \in W : N_p = \eta_p\} \quad \text{y} \quad W^- = \{p \in W : N_p = -\eta_p\}$$

son cerrados, y por la unicidad salvo signo de los vectores normales, $W = W^+ \cup W^-$, luego son también abiertos. Como W es conexo, uno de ellos es todo W . Esto prueba nuestra afirmación.

Visto lo anterior, si $N|W = \eta$, no hacemos nada. Si por el contrario $N = -\eta$, consideramos la parametrización

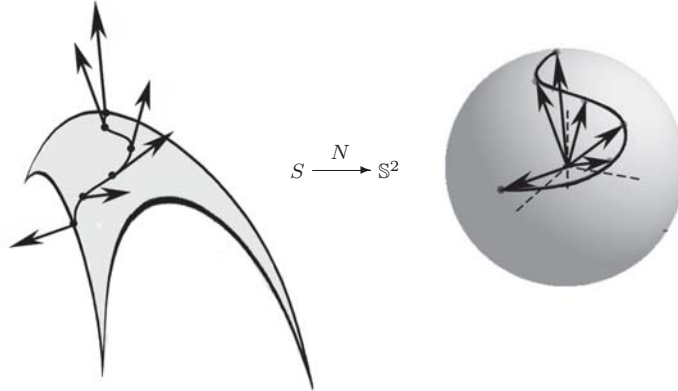
$$\psi : U \rightarrow W : (u, v) \mapsto \psi(u, v) = \varphi(v, u),$$

que está bien definida en U porque U es un disco. Claramente $\psi_u = \varphi_v$ y $\psi_v = \varphi_u$, lo que tiene el efecto de que los vectores normales η'_p de ψ son opuestos a los η_p de φ , y por tanto $N|W = \eta'$.

En todo caso, hemos obtenido una parametrización de un entorno W de p_0 que define en él los mismos vectores normales que N . Como esto vale para cada $p_0 \in S$, hemos obtenido un atlas en el que cada par de parametrizaciones definen en los puntos comunes los mismos vectores normales, y por tanto, tienen cambio de coordenadas positivo. Hemos terminado. ■

Después de establecer el resultado básico anterior definimos ya la aplicación de Gauss:

Definición 6.3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable y sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unidad. Una *aplicación de Gauss* es una aplicación continua $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que asigna a cada punto $p \in S$ un vector $N(p) \in \mathbb{S}^2$ normal a $T_p S$.



Una aplicación de Gauss, si existe, es *única salvo signo* en el sentido siguiente. Si $N, N' : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ son dos aplicaciones de Gauss, S es unión de los puntos donde $N' = N$ y los puntos donde $N' = -N$. Como esas condiciones definen dos conjuntos cerrados disjuntos, cada uno es una unión de componentes conexas de S . En otras palabras, en cada componente conexa hay dos aplicaciones de Gauss, que son opuestas. La demostración del criterio nos dice además que una aplicación

de Gauss está definida localmente mediante parametrizaciones adecuadas, luego *es una aplicación diferenciable*.

Observaciones 6.4. (1) Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización local de una superficie S . La aplicación $p \rightarrow \eta_p$ asociada a φ no es más que una aplicación de Gauss de W (que es una superficie diferenciable). Por ello, si S tiene una parametrización global, entonces tiene una aplicación de Gauss. En particular los grafos, que tienen la parametrización global de Monge (véase 3.6, p. 36).

(2) También conviene recordar que toda superficie S es localmente una superficie de nivel: cada punto tiene un entorno V en \mathbb{R}^3 en el que está definida una ecuación implícita $g(x, y, z) = a$ cuyo gradiente $\nabla_p g \neq 0$ es ortogonal $T_p S$ para todo $p \in W = S \cap V$. Resulta que la aplicación: $p \mapsto \frac{\nabla_p g}{\|\nabla_p g\|}$ es una aplicación de Gauss de W . Así, si S tiene una ecuación implícita global, entonces tiene una aplicación de Gauss. ■

Inmediatamente hay que decir que no siempre existen aplicaciones de Gauss. Hemos visto antes el criterio de existencia de un atlas con cambios de coordenadas positivos. Esta condición está directamente relacionada con la noción de orientación del plano y del espacio vectorial. El Álgebra Lineal define la orientación de un espacio vectorial mediante la elección de una base, o, con más precisión, de todas las bases relacionadas con la elegida por matrices de cambio con determinante positivo (lo que recuerda el criterio del atlas). En nuestra superficie S podemos adoptar un punto de vista parecido eligiendo una orientación en cada plano tangente, siempre y cuando las orientaciones así elegidas varíen continuamente en función del punto de tangencia.

(6.5) Orientación de los planos tangentes. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable.

(1) Sea $\varphi : U \rightarrow W$ una parametrización local de S . Para cada punto p del abierto W tenemos la base $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}\}$ de $T_p S$. Esta base determina una orientación $[\varphi]_p$ del plano $T_p S$ y, ya que los vectores de la base dependen continuamente de p , podemos considerar que también la orientación tiene esta propiedad. Formalmente, la aplicación $[\varphi] : p \mapsto [\varphi]_p$ es continua en W .

(2) Consideremos otra parametrización $\psi : U' \rightarrow W'$, y un punto $p \in W \cap W'$. En $T_p S$ tenemos las dos orientaciones $[\varphi]_p$ y $[\psi]_p$, que coinciden cuando el cambio de base correspondiente tiene determinante positivo. Pero la matriz de ese cambio de base es la jacobiana $J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p))$ del cambio de coordenadas $\varphi^{-1} \circ \psi$ (3.4(3)),

luego φ y ψ definen la misma orientación en $W \cap W'$ si y sólo si el determinante jacobiano de $\varphi^{-1} \circ \psi$ es siempre positivo.

(3) Resulta de lo anterior que si existe un atlas \mathcal{A} de S cuyos cambios de coordenadas son todos positivos, entonces existe una *elección continua de orientación* en todos los planos tangentes: $p \mapsto [\varphi]_p$, tomando cualquier parametrización φ del atlas que parametrice un entorno de p . ■

Así, nos hemos encontrado el mismo criterio que para la existencia de aplicación de Gauss, que justifica la siguiente definición:

Definición 6.6. Una superficie S se llama *orientable* si tiene una aplicación de Gauss. En ese caso una *orientación* de S es la elección de una tal aplicación, y hecha esa elección se dice que la superficie está *orientada*.

Tal vez sea bueno recordar aquí la demostración de 6.2, p. 74, donde mediante una aplicación de Gauss N se construía un atlas con todos sus cambios positivos, es decir, una elección continua de orientación en toda la superficie. La clave era elegir parametrizaciones $\varphi: U \rightarrow W$ tales que $\eta_p = N(p)$ para todo $p \in W$; decimos en ese caso que φ es *compatible con N* , o que es *compatible con la orientación*.

Presentemos por fin una superficie no orientable, es decir, que no tiene aplicaciones de Gauss:

Ejemplo 6.7. Éste es el ejemplo por excelencia: la *banda de Möbius*. Podemos definirla como la imagen S de la aplicación diferenciable $f: \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}u \\ 0 \\ \sin \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Es fácil entender la dinámica de esta definición. Como la matriz 3×3 es la de una rotación de ángulo u alrededor del eje de las z , el segundo sumando traza un cierto segmento I_u de longitud 1 centrado en el punto $(\cos u, \sin u, 0)$ de la circunferencia unidad en el plano xy .

(1) Las restricciones de f a dominios del tipo $(a, a + 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ son parametrizaciones de S , y para tener un atlas de S basta tomar las dos siguientes:

$$\begin{cases} \varphi = f|U : U \rightarrow f(U) = W, & U = (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \\ \psi = f|U' : U' \rightarrow f(U') = W', & U' = (\pi, 3\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

El abierto W consiste en toda la banda S salvo el segmento I_0 , y W' en toda la banda salvo I_π .

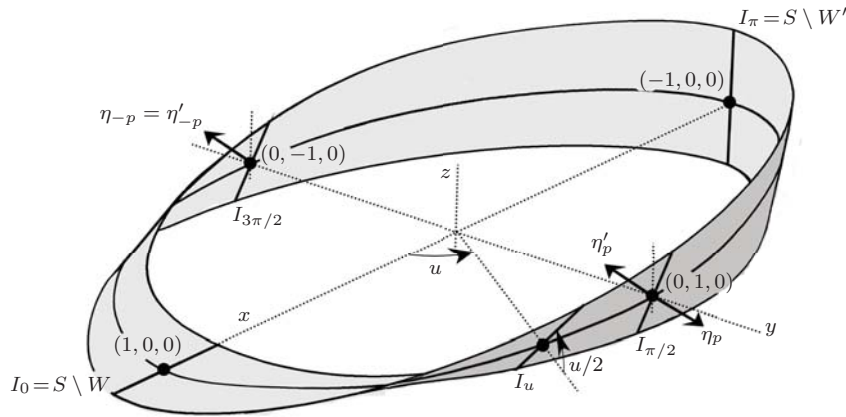
Consideramos ahora los puntos $p = (0, 1, 0)$ y $-p = (0, -1, 0)$, ambos en $W \cap W'$:

$$p = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \psi\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right), \quad -p = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \psi\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right),$$

en los que tenemos los siguientes vectores normales (calcúlense)

$$\begin{cases} \eta_p = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta_{-p} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}); \\ \eta'_p = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta'_{-p} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Lo importante aquí es que $\eta_p = -\eta'_{-p}$ y $\eta_{-p} = \eta'_p$.



(2) Supongamos ahora que existe una aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Como W es conexo, $N|W$ y η o bien son iguales o bien son opuestos. Cambiando N por su opuesto $-N$ si es necesario, podemos suponer $N|W = \eta$, luego

$$N_p = \eta_p = -\eta'_{-p}, \quad N_{-p} = \eta_{-p} = \eta'_p.$$

Ahora, como también W' es conexo, $N|W'$ y η' tienen que ser iguales u opuestos, pero: (i) no pueden ser iguales, pues no coinciden en p , (ii) no pueden ser opuestos, pues coinciden en $-p$.

De esta manera concluimos que la banda de Möbius no tiene aplicación de Gauss, es decir, no es orientable. ■

Insistimos en que todas las superficies son *localmente* orientables, es decir, todo punto tiene un entorno abierto que es una superficie orientable. Sin embargo, el concepto de orientabilidad es global, pues se refiere a la superficie en su totalidad, como bien se ve con la banda de Möbius.

Volviendo al concepto de aplicación de Gauss, como una tal aplicación recoge la variación de los vectores normales a los planos tangentes de la superficie, recoge la manera en que esos mismos planos varían, y puede dar una idea de la forma de la superficie. El caso extremo es que no haya variación ninguna:

Proposición 6.8. *Una superficie conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto de un plano afín si y sólo si tiene una aplicación de Gauss N constante.*

Demostración. La condición necesaria es evidente, pues un abierto de un plano afín tiene la misma dirección normal en todos sus puntos: la de plano; en consecuencia tiene una aplicación de Gauss constante. El recíproco es un ejercicio ilustrativo de las ventajas de disponer de cálculo diferencial en superficies. Supongamos que S tiene una aplicación de Gauss constante, digamos $N \equiv (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$; afirmamos que la aplicación diferenciable $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = ax + by + cz$ es constante.

En efecto, como S es conexa, basta ver que todas las derivadas $d_p f$ son nulas (4.6, p.47). Pero f es la restricción de la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la misma fórmula, luego

$$d_p f(\omega) = (d_p F)(\omega) = F(\omega) = \langle N(p), \omega \rangle = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_p S.$$

En fin, que f sea constante, digamos $f \equiv d$, significa que S está contenida en el plano $ax + by + cz = d$, y por 4.11, p.50, concluimos que S es un abierto de ese plano. ■

Analizamos a continuación algunos ejemplos en los que la variación de la aplicación de Gauss es significativa.

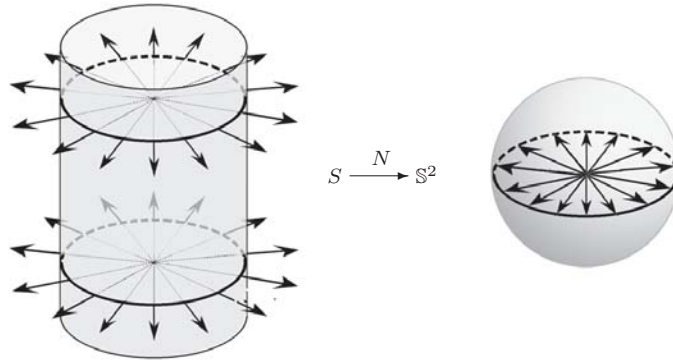
Ejemplos 6.9. (1) Las dos aplicaciones de Gauss de la esfera unidad son la identidad y la aplicación antipodal, que denotamos $\pm N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Obviamente son difeomorfismos, lo que señalamos aquí como indicador de la mucha variación del vector normal.

(2) Consideremos ahora el cilindro $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Como tiene ecuación implícita global, obtenemos inmediatamente una aplicación de

Gauss vía el gradiente. En este caso el gradiente es $(2x, 2y, 0)$, que tiene norma $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2$ (pues estamos en puntos del cilindro). Concluimos que

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

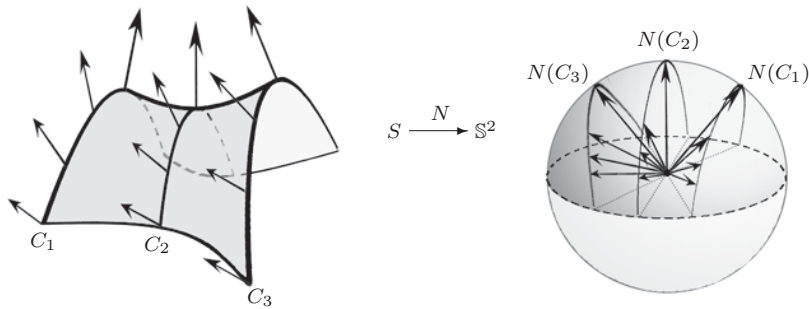
es una aplicación de Gauss.



Esta aplicación transforma todo el cilindro S en el ecuador $z = 0$ de \mathbb{S}^2 , lo que dista mucho de ser un difeomorfismo. Podemos decir que el vector normal varía muy poco.

(3) Estudiemos el paraboloide hiperbólico $S : z = -x^2 + y^2$. La parametrización de Monge de esta ecuación *explícita* tiene vector normal $\vartheta = (2x, -2y, 1)$ (3.6, p.36), y dividiendo por la norma se obtiene una aplicación de Gauss. También podemos utilizar el gradiente de la ecuación *implícita* $x^2 - y^2 + z = 0$, que es el mismo $(2x, -2y, 1)$. En cualquier caso, una aplicación de Gauss es

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$



Es fácil comprobar que esta aplicación es un difeomorfismo sobre el abierto $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$. Obsérvese en la figura cuáles son las imágenes de las curvas C_1, C_2 y C_3 por la aplicación de Gauss, y que a lo largo de esas curvas el vector normal nunca apunta hacia el hemisferio sur. Por tanto, el vector normal varía más en este paraboloides que en el cilindro, pero bastante menos que en la esfera.

(4) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el helicoides, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

con

$$\begin{cases} \varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), & \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0). \\ \vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \sin u, b \cos u, -v) \end{cases}$$

(véase 3.5(4), p. 35). Como $\|\vartheta\|^2 = b^2 + v^2$, la aplicación de Gauss, en las coordenadas globales (u, v) , es

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}}(-b \sin u, b \cos u, -v).$$

En este caso es más costoso obtener una expresión de N en las coordenadas (x, y, z) de \mathbb{R}^3 (pero es un ejercicio que recomendamos al lector). Para entender cómo se comporta N observamos que $N(\varphi(u, v)) \in \mathbb{S}^2$ es el vector que resulta de dividir por su norma la suma

$$(-b \sin u, b \cos u, 0) + v(0, 0, -1).$$

Fijemos u . El primer sumando es un vector de norma b del plano xy , y se le suman todos los vectores $v(0, 0, -1)$, $v \in \mathbb{R}$, con lo que se obtiene todo el plano generado por el primer sumando y el eje de las z , *salvo precisamente ese eje*. Por tanto, al dividir por la norma obtenemos el corte de ese plano con la esfera (un meridiano), excepto los polos norte y sur. Vemos así que al variar u , obtenemos toda la esfera menos los polos norte y sur. La aplicación no es suprayectiva, pero por dos puntos nada más. Por otra parte, es un aplicación claramente periódica en u , luego no es inyectiva. Se puede ver que es un difeomorfismo local, pero sobre esto volveremos en la lección siguiente. ■

Terminamos la lección describiendo la aplicación de Gauss de una superficie de revolución.

(6.10) Aplicación de Gauss de una superficie de revolución. Sea S una superficie de revolución como en 3.9, p. 38, de donde tomamos toda la notación. Si $\alpha(u) =$

$(\zeta(u), 0, \xi(u))$, $\zeta(u) > 0$, $u \in I$, es la curva generatriz, la aplicación

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u))$$

proporciona parametrizaciones de la superficie por restricción a dominios del tipo $I \times (a, a + 2\pi)$. Es fácil ver que los cambios de coordenadas resultantes son traslaciones en \mathbb{R}^2 , que tienen determinante jacobiano $\equiv 1 > 0$. Por tanto, podemos definir una aplicación de Gauss mediante estas coordenadas (u, v) . En primer lugar

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), & \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0), \\ \vartheta = (-\zeta(u) \xi'(u) \cos v, -\zeta(u) \xi'(u) \sin v, \zeta(u) \zeta'(u)). \end{cases}$$

Como

$$\|\vartheta\| = \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} = \zeta(u) \|\alpha'(u)\|$$

supondremos la curva generatriz parametrizada por el arco, para que la aplicación de Gauss sea

$$N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)).$$

Para entender el comportamiento de N , recurrimos a la misma matriz de la banda de Möbius:

$$N(\varphi(u, v)) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi'(u) \\ 0 \\ \zeta'(u) \end{pmatrix}.$$

Como el vector sobre el que actúa la matriz en cuestión es el vector normal $\mathbf{n}_\alpha(u)$ a la curva generatriz, fijado u , N rota a lo largo del paralelo correspondiente, con un ángulo θ respecto de la vertical dado por

$$\cos \theta = (0, 0, 1) \mathbf{n}_\alpha(u) = \zeta'(u).$$

La variación de N depende así de la del vector normal a la curva generatriz. ■

Problemas

Número 1. Estudiar la aplicación de Gauss del paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$, primero como superficie topográfica y luego como superficie de revolución.

Número 2. Determinar una aplicación de Gauss para la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = e^{xy}$. Estudiar para qué valores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ el vector $(\lambda, 0, \mu)$ es tangente a S en el punto $(0, 0, 1)$.

La segunda forma fundamental

En esta lección introducimos otra forma cuadrática en los planos tangentes: la denominada *segunda forma fundamental*. Para ello debemos avanzar en el estudio de la aplicación de Gauss, así que en lo sucesivo limitaremos nuestra atención *exclusivamente a las superficies orientables*.

Sea S una superficie orientable, con una orientación fijada, es decir, con una determinada aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$.

(7.1) Derivada de la aplicación de Gauss. La aplicación de Gauss N es diferenciable y su derivada $d_p N$ en p es una aplicación lineal definida entre los planos tangentes $T_p S$ y $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$. Ahora bien, ambos planos vectoriales son perpendiculares al vector $N(p)$ (para S por definición de N , para la esfera por 3.5(2), p. 34), y, en consecuencia, los dos planos coinciden. Por tanto, la derivada de la aplicación de Gauss puede ser entendida como una aplicación lineal

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Esta aplicación se llama *aplicación de Weingarten*. ■

Cambiar la orientación de S significa cambiar el signo de su aplicación de Gauss, y entonces el signo de la derivada $d_p N$ cambia de la misma manera. Por tanto, *al cambiar la orientación cambia el signo de la aplicación de Weingarten*. Señalemos que en muchos textos se utiliza $-d_p N$ como aplicación de Weingarten; nosotros hemos preferido no introducir ese signo menos.

Consideremos una curva $\alpha(t)$ en S con $\alpha(t_0) = p$, $\alpha'(t_0) = \omega \in T_p S$. Resulta que

$$d_p N(\omega) = (N \circ \alpha)'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{N(\alpha(t)) - N(\alpha(t_0))}{t - t_0}.$$

Así, igual que N refleja la variación de los vectores tangentes y con ellos la de los planos tangentes, la derivada $d_p N$, mide las correspondientes *variaciones infinitesimales* en p (según cualquier dirección tangente ω). Con ello mide cómo se dobla la superficie en las proximidades de p .