Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDIF) - Doble Grado Ing Inf y Mat - Curso 2021-22

Sistemas autónomos. Hoja 3.

21 a) Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, analiza los puntos de equilibrio y describe las trayectorias de la ecuación autónoma $y' = a(1 - y^2)$.

b) Justifica que si $y_1(t)$, con $t \in (\alpha, \omega)$ es la solución maximal de la ecuación diferencial autónoma $y' = -(1 - y^2)$ que cumple $y_1(0) = y_0 \in (-1, 1)$, entonces $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $(-1, 1)$.

c) Se considera el sistema autónomo dado por

$$[\mathtt{S}] : \begin{cases} x' = (y + \frac{x}{5})(1 - x^2) \\ y' = -x(1 - y^2) \end{cases} .$$

Localiza los puntos de equilibrio del sistema. Comprueba que $\begin{pmatrix} 1 \\ y_1(t) \end{pmatrix}$, para $t \in \mathbb{R}$, resuelve el sistema $[\mathtt{S}]$. Determina todas las soluciones del sistema con trayectorias sobre rectas verticales y horizontales.

d) Considera el cuadrado $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1\}$. Deduce del apartado anterior que K es un conjunto invariante del sistema. Encuentra otras regiones invariantes para este sistema autónomo.

22 a) Analiza los puntos de equilibrio y describe las trayectorias de la ecuación autónoma $y' = (y^2 - 1)(1 - 2y^2)$. ¿Cuál es el intervalo maximal (α, ω) de la solución tal que $y(0) = 0$? Justifica que ella cumple $\{y(t) : t \in (\alpha, \omega)\} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Localiza todos los puntos de equilibrio del sistema autónomo $[\mathtt{S}]$ y analiza la estabilidad del punto $(1, 1)$ y del punto $(-1, 1)$:

$$[\mathtt{S}] : \begin{cases} x' = (y^2 - 1)(1 - x^2 - y^2) \\ y' = (x^2 - 1)(1 - x^2 - y^2) \end{cases} .$$

c) Comprueba que la recta $y = x$ contiene trayectorias de soluciones del sistema. Considera el círculo $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Argumenta por qué C es un conjunto invariante del sistema. Justifica que todas las soluciones $X(t)$ del sistema que cumplen que $X(t_0) \in C$ tienen como intervalo maximal $\mathbb{R}$.

23 Se considera un polinomio escalar en dos variables, $P(x, y)$, tal que $P(0, 0) \neq 0$ y el conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}$ es una curva cerrada simple del plano. Sea el sistema (no lineal) dado por

$$\begin{cases} x' = -xP(x, y) \\ y' = yP(x, y) \end{cases} .$$

a) Determina todos los puntos de equilibrio del sistema. Justifica que si la trayectoria de una solución no constante corta a uno de los ejes coordenados, entonces la trayectoria está contenida en el eje.

b) Se considera el caso particular en que $P(x, y) = 2 - 3x^2 - y^2$. Analiza el comportamiento de las trayectorias en cada cuadrante, según estén dentro o fuera de la elipse asociada C. [Piensa que $P(0, 0) > 0$ y, por tanto, P es positivo dentro de la elipse]. Esboza el diagrama de fases.

24 Se considera el sistema no lineal dado por $\begin{cases} x' = -y - xy \\ y' = x + x^2 \end{cases}$

a) Determina los puntos de equilibrio. ¿Es el origen un punto de equilibrio hiperbólico? Comprueba que los dos semiplanos que determina la recta $x = -1$ son invariantes para el flujo del sistema.

b) Plantea la ecuación de las órbitas y determina las órbitas del sistema.

c) Analiza las soluciones correspondientes a datos iniciales $x_0^2 + y_0^2 \geq 1$.

25 Supongamos un sistema depredador-presa donde se supone que un cierto número de presas x_r puede encontrar *refugio* que las hace inaccesibles para los depredadores. En este caso, las ecuaciones de Lotka-Volterra quedan:

$$\begin{cases} x' = ax - by(x - x_r) \\ y' = -cy + dy(x - x_r) \end{cases}$$

Se pide analizar el diagrama de fases de este sistema comparándolo con el de las ecuaciones originales de Lotka-Volterra, en los dos casos siguientes:

a) El número de presas en el refugio es una fracción constante del total, o sea, $x = kx$

b) El número de presas en el refugio es constante, o sea, $x_r = k$

26 Estudiar el diagrama de fases de dos especies que están en régimen de *cooperación* (con $a_i, b_i, c_i > 0$):

$$\begin{cases} x_1' = a_1x_1 - b_1x_1^2 + c_1x_1x_2 \\ x_2' = a_2x_2 + b_2x_1x_2 - c_2x_2^2 \end{cases}$$

analizar el comportamiento del sistema en el primer cuadrante $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ y distinguir los casos de acuerdo a la posición relativa de las rectas $a_1 - b_1x_1 + c_1x_2 = 0$ y $a_2 + b_2x_1 - c_2x_2 = 0$.

27 Se considera el sistema bidimensional

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

con f, g de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$. Supongamos que $f(0, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Probar que el eje Oy es un conjunto invariante, es decir, si $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$, entonces la solución es de la forma $(x(t), y(t)) = (0, Y(t))$ donde $Y(t)$ es solución de la ecuación 1D $Y'(t) = g(0, Y(t))$ con $Y(0) = y_0$.

28 Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = -x + (2 - x)y \\ y' = -y + (2 - y)x, \end{cases}$$

se pide:

a) Determinar y clasificar los puntos de equilibrio.

b) Probar que el conjunto $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\}$ es positivamente invariante.

c) Probar que toda solución que parte de un dato inicial en Ω converge a un punto de eqilibrio.

d) Esbozar el diagrama de fases en el conjunto Ω.

29 Analizar las siguientes ecuaciones de segundo orden, dibujando apropiadamente el plano de fases. Utilizar la energía del sistema.

a) $x'' - x + x^3 = 0$

b) $x'' + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = 0$

c) $x'' + xe^{-x^2} = 0$

d) $x'' + bx + x^2 = 0$, para los distintos valores de $b \in \mathbb{R}$.

30 Analizar las siguentes ecuaciones disipativas (con ε positivo y pequeño):

a) $x'' + \varepsilon x' - x + x^3 = 0$, $\varepsilon > 0$

b) $x'' + \varepsilon x' + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = 0$

Se recomienda utilizar convenientemente la información del sistema con $\varepsilon = 0$ del ejercicio anterior.

31 (Modelo SIR de epidemiología) Una población está dividida en S individuos susceptibles de contraer una enfermedad contagiosa, I individuos infectados y R individuos recuperados de la enfermedad (entre estos se incluyen los fallecidos). Si la probabilidad de contagio por contacto es $r < 1$ y la enfermedad tiene vida media $ln(2)/\gamma$ entonces tenemos:

$$\begin{cases} S' = -rSI \\ I' = -\gamma I + rSI \\ R' = \gamma I \end{cases}$$

Se pide

a) Probar que $S + I + R = cte$. Probar que el primer cuadrante $S, I, R > 0$ es positivamente invariante.

b) Analizar las ecuaciones para S e I, que son independientes de la de R (una vez "resueltas" las ecuaciones para S e I se resuelve la ecuación para R). En particular, probar que existe una integral primera. Trazar las órbitas en el primer cuadrante y analizar el plano de fases del Este análisis incluye

32 Un sistema del tipo

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \\ y' = -\dfrac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \end{cases}$$

donde $H(x,y)$ es una función regular, se dice que es un sistema Hamiltoniano. A la función H se le denomina el Hamiltoniano del sistema y tiene por particularidad que H es constante a lo largo de las órbitas del sistema. En particular, las órbitas del sistema están contenidas en las curvas de nivel del Hamiltoniano.

Estudiar los siguientes sistemas hamiltonianos:

$$(a) \begin{cases} x' = 2xy \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = e^x - 1 \\ y' = -ye^x \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x' = 2xy - 2y \\ y' = x - y^2. \end{cases}$$

33 Algunos sistemas planos para los que el origen es un punto de equilibrio admiten una expresión en coordenadas polares que es más intuitiva y facil de analizar que la de coordenadas cartesianas. Por ello a veces es conveniente realizar la transformación a polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$. Probar que si tenemos el sistema $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ entonces el sistema en coordenadas polares se escribe:

$$\begin{cases} r' = \cos(\theta) f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) + \text{sen}(\theta) g(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) \\ \\ \theta' = -\dfrac{\text{sen}(\theta)}{r} f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) + \dfrac{\cos(\theta)}{r} g(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) \end{cases}$$

Efectuar el cambio a coordenadas polares de los siguientes sistemas y analizar su comportamiento:

$$(a) \begin{cases} x' = -y(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = x^4 - x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 \\ y' = -2x^2 - xy - 2y^2 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x' = x^3 + xy^2 - y^3 \\ y' = x^2y + xy^2 + y^3 \end{cases}$$