$\boxed{9.-}$

a) Aplica el teorema de Abel para demostrar la igualdad

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Consideramos la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \text{que tiene radio de convergencia } 1$$

porque $\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = 1$.

Además $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotado en $z = x + i0$.

Por el teorema de Abel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{z \to 1^-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \right) \underset{\substack{\uparrow \\ |z|<1 \text{ en } D(0,1).}}{=} \lim_{z \to 1^-} \log(1+z) = \log 2$$

$(|z| < 1)$

b) Da un ejemplo de una serie $\sum a_n$ que no converja y tal que $\sum a_n z^n$ tenga radio de convergencia 1 y $\lim\limits_{r \to 1^-} \sum\limits_{n \geq 0} a_n r^n$ exista

Sea $a_n = (-1)^n \implies \sum a_n$ no converge porque $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{1+z}$$

Sumación por partes de Abel (Análogo a 7b)

$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Además $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|(-1)^n|} = 1 \implies R = 1$