Parte II

LÓGICA DE PRIMER ORDEN

CAPÍTULO

5

SINTAXIS Y SEMÁNTICA

5.1. PREGUNTAS DE TEST

5.1. La cadena de símbolos $\exists x \neg R(x, \neg x)$ formada usando la signatura $\Sigma = \{R/2\}$

(a) es una fórmula de primer orden (b) no es una fórmula de primer orden (c) no se puede saber

5.2. La cadena de símbolos $\forall x \exists y R(x, f(y)) \wedge \forall z \neg (h(z, z) = f(y))$ formada usando la signatura $\Sigma = \{f/1, h/2, R/2\}$

(a) es una fórmula de primer orden (b) no es una fórmula de primer orden (c) no se puede saber

5.3. En la fórmula de primer orden $\exists x R(x, y) \vee \forall y P(y)$ las apariciones de variables son

(a) libres (b) ligadas (c) de ambos tipos

5.4. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura con un único símbolo de predicado binario R y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura tal que su universo de discurso es $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) y $R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$. El valor que un estado σ ha de asignar a la variable libre y para que la fórmula $\forall x R(x, y)$ sea cierta en $\mathcal{A}$ es

(a) a (b) b (c) cualquiera de los dos

5.5. Sea $\Sigma = \{f/1\}$ una signatura con un único símbolo de función unario f y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura con universo de discurso $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) tal que $f^{\mathcal{A}}(a) = b$ y $f^{\mathcal{A}}(b) = a$. La fórmula $\forall x (x = f(y))$ se hace falsa en $\mathcal{A}$ cuando el valor que el estado σ le asigna a la variable libre y es

(a) a pero no b (b) b pero no a (c) tanto a como b

5.6. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura con un único símbolo de predicado binario y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura tal que su universo de discurso es $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) y $R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b)\}$. La fórmula $R(x, y) \to R(y, x)$ se hace cierta en $\mathcal{A}$ cuando los valores que un estado σ les asigna a las variables x e y sean, respectivamente,

(a) a y a (b) a y b (c) ninguno de los anteriores

5.7. Sea $\Sigma = \{c/0, f/1\}$ una signatura formada por un símbolo de constante c y un símbolo de función unario f, y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura con universo de discurso $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) tal que $f^{\mathcal{A}}(a) = f^{\mathcal{A}}(b) = c^{\mathcal{A}}$. La fórmula $f(f(x)) = c$ se hace cierta en $\mathcal{A}$ cuando el valor asignado por un estado σ a la variable libre x es

(a) a pero no b (b) b pero no a (c) tanto a como b

5.8. Todos los modelos de la fórmula $\exists x \exists y \forall z(z = x \vee z = y)$ tienen en su dominio

(a) dos elementos (b) uno o dos elementos (c) más de dos elementos

5.9. Cualquier modelo de la fórmula de primer orden $\exists x \exists y \neg(x = y)$ tiene en su dominio

(a) exactamente dos elementos (b) más de un elemento (c) más de dos elementos

5.10. Los modelos de la fórmula $\exists x \forall y(y = x)$ tienen en su dominio:

(a) exactamente dos elementos (b) exactamente un elemento (c) más de dos elementos

5.11. Cualquier modelo de la fórmula $\exists x(x = f(x)) \wedge \exists x \neg(x = f(x))$ tiene en su universo de discurso:

(a) por lo menos dos elementos (b) exactamente dos elementos (c) más de dos elementos

5.12. Cualquier modelo de la fórmula $\exists x \exists y(R(x, x) \wedge \neg R(y, y))$ tiene en su universo de discurso

(a) exactamente dos elementos (b) más de un elemento (c) más de dos elementos

5.13. La fórmula de primer orden $\neg\exists x P(x) \wedge \neg\forall y(\exists z P(z) \rightarrow P(y))$ es:

(a) contingente (b) lógicamente válida (c) contradictoria

5.14. La fórmula de primer orden $\varphi = \neg\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.15. La fórmula de primer orden $\varphi = \forall x(R(x, f(x)) \rightarrow \exists y R(x, y))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.16. La fórmula de primer orden $\varphi = \exists x P(x) \wedge \neg\exists y Q(y) \wedge \forall z(P(z) \rightarrow Q(z))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.17. La fórmula de primer orden $\varphi = (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.18. La fórmula de primer orden $\varphi = \exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.19. La fórmula de primer orden $\varphi = \forall x R(x, f(x)) \wedge \exists x \forall y \neg R(x, y))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.20. La fórmula de primer orden $(\exists x P(x) \wedge \exists x \neg R(x,x)) \to \exists x(P(x) \wedge \neg R(x,x))$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.21. La fórmula de primer orden $\forall x \exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg R(c,y)$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

5.22. Dados la fórmula $\varphi = \exists y(x = g(y,y))$ y el término $t = f(y)$, la sustitución $\varphi[x/t]$ da como resultado:

(a) $\exists z(f(y) = g(z,z))$ (b) $\exists y(f(y) = g(y,y))$ (c) $\exists x(f(x) = g(y,y))$

5.23. Dados la fórmula $\varphi = \forall x(Q(x) \to \forall y R(x,y))$ y el término $t = f(y)$, la sustitución $\varphi[x/t]$ da como resultado:

(a) $\forall y(Q(f(y)) \to \forall y R(f(y),y))$ (b) $\forall x(Q(x) \to \forall y R(f(y),y))$ (c) $\forall x(Q(x) \to \forall y R(x,y))$

5.2. EJERCICIOS

5.24. Considera las siguientes fórmulas:

(a) $((P(c) \wedge R(x,y)) \vee Q(y))$
(b) $(P(f(x)) \to \neg Q(f(c)))$
(c) $\exists y \forall x R(g(x, f(y)), f(c))$
(d) $\forall x(P(x) \to \exists y \neg Q(y))$

Para cada fórmula, indica una signatura adecuada que permita su formalización, distingue sus variables libres y ligadas, y comprueba que es una fórmula de primer orden bien construida.

5.25. Considera las siguientes fórmulas:

(a) $\forall x P(x) \to Q(x)$
(b) $\neg P(x) \vee Q(y)$
(c) $\forall x P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x,y,z) \to S(x,y)$

Para cada fórmula, escríbela en forma no abreviada, indicando cómo construirla mediante las reglas de formación.

5.26. Construye ejemplos de argumentaciones válidas que no se puedan formalizar con ayuda de la lógica de proposiciones. En cada caso, indica:

- La formalización en lógica de proposiciones, que no permita concluir la validez de la argumentación.
- La formalización en lógica de primer orden.

5.27. Formaliza los siguientes enunciados en el lenguaje de la lógica de predicados de primer orden. Explica en cada caso qué universo de discurso y qué significados se han supuesto para los diferentes símbolos.

(a) Madonna es una cantante.
(b) Ramón Mercader asesinó a León Trotski.
(c) La esposa del rey Arturo fue la reina Ginebra.

(d) Al sobrino de Groucho Marx le gustaba más Elvis Presley que Greta Garbo.

(e) Todas las mujeres son inefables.

(f) Algunos lógicos son incorregibles.

5.28. Formaliza los siguientes enunciados en el lenguaje de la lógica de predicados de primer orden. Explica en cada caso qué universo de discurso y qué significados se han supuesto para los diferentes símbolos.

(a) Todo número primo mayor que 2 es impar.

(b) La reina Ginebra solo fue amada por caballeros.

(c) Entre los vampiros se dan casos de hemofilia.

(d) Cierto reformador religioso que intentó reconciliar el cristianismo con el judaísmo, murió a manos de un fanático.

(e) Siempre hay un español que inventó las cosas antes que sus inventores reconocidos.

(f) Es posible engañar a todo el mundo durante algún tiempo, y engañar a algunos durante todo el tiempo; pero no es posible engañar a todo el mundo durante todo el tiempo.

5.29. Sea $\Sigma = \{D/1, P/1, R/2, S/2\}$ la signatura cuyos símbolos de predicado tienen los siguientes significados pretendidos:

- $D(x)$: “x es dragón”,
- $P(x)$: “x es piojo”,
- $R(x, y)$: “x ama a y” ,
- $S(x, y)$: “x acosa a y” .

Formaliza con esta signatura las siguientes frases:

(a) Todo el mundo ama a y.

(b) x ama a alguien.

(c) Todo el mundo ama a alguien.

(d) Si u es un dragón, entonces v es un piojo y v acosa a u.

(e) Todo dragón es acosado por el piojo v.

(f) Si u es un dragón, entonces algún piojo acosa a u.

(g) Todo dragón es acosado por algún piojo.

(h) Algunos dragones son acosados por todos los piojos.

(i) Algunos piojos acosan a todos los dragones.

(j) Todo piojo acosa a algún dragón.

5.30. Define recursivamente las tres aplicaciones siguientes:

(a) una aplicación *var* que haga corresponder a cada término $t \in T_\Sigma$ sobre una signatura Σ el conjunto finito $var(t)$ formado por todas las apariciones de variables en t;

(b) una aplicación *lib* que haga corresponder a cada fórmula de primer orden $\varphi \in L_\Sigma$ el conjunto finito $lib(\varphi)$ formado por todas aquellas variables que aparezcan libres en φ;

(c) una aplicación *lig* que haga corresponder a cada fórmula de primer orden $\varphi \in L_\Sigma$ el conjunto finito $lig(\varphi)$ formado por todas aquellas variables que aparezcan ligadas en la fórmula φ.

5.31. Para cada una de las fórmulas siguientes, determina el conjunto de las variables libres y el conjunto de las variables ligadas de la fórmula. Si estos dos conjuntos no son disjuntos, construye una variante de la fórmula en la cual ninguna variable aparezca a la vez libre y ligada.

(a) $\varphi_1 = \exists z(g(x,\ f(z)) = y)$

(b) $\varphi_2 = \forall x \exists y(R(x,y) \wedge \exists x(y = g(x,x)))$

(c) $\varphi_3 = \exists y(g(h(x,x), h(y,y)) = h(z,z))$

(d) $\varphi_4 = \exists x(R(x,y) \wedge \forall y \neg(g(y,y) = x))$

5.32. Construye fórmulas de primer orden que sirvan para formalizar los enunciados siguientes:

(a) Fórmula cerrada: "algunos dragones son asaltados por todos los piojos".

(b) Fórmula abierta: "y lee todas las novelas de x".

5.33. Construye fórmulas de primer orden, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan para formalizar los enunciados siguientes:

(a) Si es cierto que todos los gallegos son llorones, entonces también es cierto que hay algún portugués cuyos parientes son todos llorones.

(b) Todos los gallegos llorones tienen algún pariente portugués, cuyos parientes son todos gallegos.

5.34. Considera la frase "el padre de x tiene un amigo torero y el padre de y tiene un amigo bombero".

(a) Construye una fórmula de primer orden φ que formalice la frase anterior y tal que $lib(\varphi) = lig(\varphi) = \{x, y\}$.

(b) Construye una fórmula φ' que sea una variante de φ tal que $lib(\varphi') \cap lig(\varphi') = \varnothing$.

5.35. Considera la aplicación $ran : L_\Sigma \to \mathbb{N}$ definida recursivamente como sigue:

$$\begin{aligned} ran(\varphi) &= 0 \text{ si } \varphi \text{ es atómica},\\ ran(\neg\varphi) &= ran(\varphi),\\ ran((\varphi \,\square\, \psi)) &= \text{máx}\{ran(\varphi), ran(\psi)\},\\ ran(Kx\varphi) &= 1 + ran(\varphi). \end{aligned}$$

Al número $ran(\varphi)$ se le llama *rango* de la fórmula φ.

(a) Demuestra que el rango de cualquier fórmula sin cuantificadores es 0.

(b) Calcula los rangos de las fórmulas que aparecen en el ejercicio 5.31.

(c) Para la signatura $\Sigma_{ar} = \{c/0,\ f/1, g/2, h/2,\ R/2\}$, construye dos Σ_{ar}-fórmulas cerradas de rango 3.

(d) ¿Sabes explicar qué mide el rango de una fórmula?

5.36. Se llama *profundidad* de un Σ-término t a la longitud de la rama más larga del árbol estructural de t. Análogamente, se llama *profundidad* de una Σ-fórmula φ a la longitud de la rama más larga del árbol estructural de φ. Define recursivamente aplicaciones $pf : T_\Sigma \to \mathbb{N}$ y $pf : L_\Sigma \to \mathbb{N}$ que hagan corresponder a cada término y a cada fórmula, respectivamente, su profundidad.

5.37. Se llama *vocabulario* de un Σ-término t al conjunto finito formado por todos los símbolos de la signatura que aparezcan en t. Análogamente, se llama *vocabulario* de una Σ-fórmula φ al conjunto finito formado por todos los símbolos de la signatura que aparezcan en φ. Define recursivamente aplicaciones $voc : T_\Sigma \to \mathcal{P}_{fin}(\Sigma)$ y $voc : L_\Sigma \to \mathcal{P}_{fin}(\Sigma)$, donde $\mathcal{P}_{fin}(\Sigma)$ denota el conjunto formado por todos los subconjuntos finitos de símbolos en Σ, que hagan corresponder a cada término y a cada fórmula, respectivamente, su vocabulario.

5.38. Considera la signatura $\Sigma_{ar} = \{c,\ f, g, h,\ R\}$, donde c es una constante, f es un símbolo de función unario, g y h son símbolos de función binarios y R es un símbolo de predicado binario. Construye cuatro Σ_{ar}-términos de profundidad 3 (la profundidad de un término se ha definido en el ejercicio 5.36), de manera que dos de ellos sean abiertos y los otros dos cerrados. Dibuja sus árboles estructurales y determina sus vocabularios (el vocabulario de un término se ha definido en el ejercicio 5.37).

5.39. Para cada una de las fórmulas siguientes determina su profundidad y su vocabulario, utilizando para ello las aplicaciones definidas en los ejercicios 5.36 y 5.37, respectivamente.

(a) $\neg P(c,\ f(c))$

(b) $R(g(x,\ f(y)),\ f(c))$

(c) $\forall x(Q(x) \to R(g(x, c), c))$

(d) $\forall x \exists y(R(x,\ f(y)) \wedge \forall z \neg(h(z, z) = f(y)))$

5.40. Una signatura que permite representar la aritmética básica de los números naturales es $\Sigma_{ar} = \{c/0,\ f/1, g/2, h/2,\ R/2\}$. Para esta signatura llamamos $\mathcal{N}$ a la Σ_{ar}-estructura que se construye tomando como universo de discurso el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales e interpretando los símbolos $c,\ f, g, h$ y R del modo siguiente:

- $c^{\mathcal{N}}$ es el 0,
- $f^{\mathcal{N}}$ es la función *suc* que hace corresponder a cada número natural n su sucesor $n + 1$,
- $g^{\mathcal{N}}$ es la operación de suma $+$ sobre los naturales,
- $h^{\mathcal{N}}$ es la operación de multiplicación $\cdot$ sobre los naturales, y
- $R^{\mathcal{N}}$ es la relación de orden usual $<$ en $\mathbb{N}$.

Suponiendo un estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x) = 4$ y $\sigma(y) = 3$, interpreta en $\mathcal{N}$ los siguientes términos y fórmulas:

(a) $h(y, y)$

(b) $g(f(x), h(x, y))$

(c) $\exists y(h(y, y) = x)$

(d) $\exists y(x = g(h(f(f(c)), y),\ f(c)))$

(e) $\exists y \exists z(R(f(c), y) \wedge R(y, x) \wedge R(f(c), z) \wedge R(z, x) \wedge h(y, z) = x)$

5.41. Una signatura que permite representar la aritmética básica de los números enteros es $\Sigma_{ar} = \{c/0,\ f/1, g/2, h/2,\ R/2\}$. Para esta signatura llamamos $\mathcal{Z}$ a la Σ_{ar}-estructura que se construye tomando como universo de discurso el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, e interpretando los símbolos $c,\ f, g, h$ y R del modo siguiente:

- $c^{\mathcal{Z}}$ es el número entero 1,
- $f^{\mathcal{Z}}$ es la función $|\,.\,|$ que hace corresponder a cada número entero su valor absoluto,
- $g^{\mathcal{Z}}$ es la operación de suma $+$ sobre los enteros,
- $h^{\mathcal{Z}}$ es la operación de resta $-$ sobre los enteros, y

- $R^{\mathcal{Z}}$ es la relación de orden usual $<$ en $\mathbb{Z}$.

Suponiendo un estado $\sigma : V \to \mathbb{Z}$ tal que $\sigma(x) = 0$ y $\sigma(y) = 3$, interpreta en $\mathcal{Z}$ los siguientes términos y fórmulas:

(a) $h(y, y)$

(b) $g(f(x), h(x, y))$

(c) $\exists y(h(y, y) = x)$

(d) $\exists y(x = g(h(f(f(c)), y),\ f(c)))$

5.42. Considera de nuevo la signatura de la aritmética básica de los números naturales $\Sigma_{ar} = \{c/0,\ f/1, g/2, h/2,\ R/2\}$ así como la Σ_{ar}-estructura $\mathcal{N}$, ambas definidas en el ejercicio 5.40.

(a) Define recursivamente cómo se calcula el valor $[\![t]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma}$, siendo $t \in T_{\Sigma_{ar}}$ un término de la signatura de la aritmética y $\sigma : V \to \mathbb{N}$ un estado cualquiera.

(b) Sean dos variables $x, y \in V$ y un estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x) = 2$, $\sigma(y) = 3$. Construye tres términos sintácticamente diferentes $t_1, t_2, t_3 \in T_{\Sigma_{ar}}$ en los cuales aparezcan las variables x e y, de manera que se cumpla $[\![t_1]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma} = [\![t_3]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma} = 7$.

(c) Para cada número $n \in \mathbb{N}$ existe un término cerrado $t_n \in T_{\Sigma_{ar}}$ tal que $[\![t_n]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma} = 2^n$ sea quien sea el estado σ. Al ser t_n cerrado, se puede escribir también $[\![t_n]\!]^{\mathcal{N}} = 2^n$. Construye t_0 y t_1, y explica un método recursivo para construir cada t_{n+1} a partir de t_n.

(d) Construye una fórmula $\varphi \in L_{\Sigma_{ar}}$ que tenga libre una sola variable x, de manera que para cualquier estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ se cumpla: $\mathcal{N} \models \varphi\sigma$ si y solo si $\sigma(x)$ es múltiplo de 3.

(e) Construye una fórmula $\varphi \in L_{\Sigma_{ar}}$ que tenga libres dos variables x e y, de manera que para cualquier estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ se cumpla: $\mathcal{N} \models \varphi\sigma$ si y solo si $\sigma(x)$ y $\sigma(y)$ no son congruentes módulo 2.

5.43. Considera una vez más la signatura de la aritmética básica de los números naturales $\Sigma_{ar} = \{c/0,\ f/1, g/2, h/2,\ R/2\}$ así como la Σ_{ar}-estructura $\mathcal{N}$, ambas definidas en el ejercicio 5.40.

(a) Calcula los valores en $\mathcal{N}$ de los siguientes términos cerrados: $c,\ f(c),\ f(f(c)), g(f(c),\ f(c))$ y $h(f(c),\ f(c))$.

(b) Construye dos términos cerrados diferentes $t_1, t_2 \in T_{\Sigma_{ar}}$ tales que $[\![t_1]\!]^{\mathcal{N}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{N}}$.

(c) Demuestra que para cualquier número natural n existen infinitos términos cerrados diferentes pertenecientes a $T_{\Sigma_{ar}}$, cuyo valor en $\mathcal{N}$ es n.

(d) Para cada uno de los enunciados siguientes, construye una Σ_{ar}-fórmula que tenga como variables libres las que aparecen en el enunciado y que al ser interpretada en $\mathcal{N}$ signifique lo que afirma el enunciado.

1. x es un número par.
2. x es un número impar.
3. z es el máximo de x, y.
4. x es primo.
5. x e y son primos entre sí.

5.44. Considera el universo de discurso formado por todos los seres humanos y los predicados siguientes:

- La propiedad de ser hombre.
- La propiedad de ser mujer.
- La relación ternaria que se da entre una persona y sus dos progenitores.

(a) Elige una signatura Σ_{hum} adecuada y define una Σ_{hum}-estructura $\mathcal{A}$ que represente el universo de los seres humanos junto con los tres predicados citados.

(b) Construye Σ_{hum}-fórmulas que al ser interpretadas en $\mathcal{A}$ expresen lo que dicen los enunciados siguientes. Cada fórmula deberá tener como variables libres las que aparezcan en el enunciado correspondiente y solamente podrá utilizar símbolos de la signatura Σ_{hum} (aparte de los símbolos lógicos y auxiliares).

1. x e y tienen el mismo sexo.
2. x es padre de y.
3. x es madre de y.
4. x e y son hermanos (sus sexos no importan).
5. x es progenitor de y (los sexos de x e y no importan).
6. x es abuelo de y.
7. x es abuela de y.
8. x es tío o tía de y.
9. x e y son primos (sus sexos no importan).

5.45. Considera la signatura $\Sigma_{pm} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, formada por tres símbolos de predicado unarios. Teniendo en cuenta que en cualquier Σ_{pm}-estructura P, Q, R se van a interpretar como subconjuntos del universo de discurso, construye Σ_{pm}-fórmulas cerradas que formalicen las siguientes afirmaciones:

(a) P está incluido en Q.

(b) P es el complementario de Q.

(c) P es la unión de Q y R.

(d) P es la intersección de Q y R.

5.46. Sea $\Sigma_{rel} = \{R/2\}$ una signatura formada por un único símbolo de predicado binario. Construye tres Σ_{rel}-fórmulas cerradas φ_{rf}, φ_{sm}, φ_{tr} que formalicen, respectivamente, las tres afirmaciones: “R es reflexiva”, “R es simétrica” y “R es transitiva”. De este modo, las tres fórmulas pedidas formalizarán los axiomas de una relación de equivalencia y para cualquier Σ_{rel}-estructura $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ se cumplirá:

$$\mathcal{A} \models \{\varphi_{rf}, \varphi_{sm}, \varphi_{tr}\} \iff R^{\mathcal{A}} \text{ es una relación de equivalencia sobre } A.$$

5.47. Sea $\Sigma_{rel} = \{R/2\}$ una signatura formada por un único símbolo de predicado binario. Considera las dos Σ_{rel}-fórmulas siguientes:

$$\varphi_1 = \exists x \forall y (\neg R(y, y) \to R(x, y)),$$
$$\varphi_2 = \exists x \forall y (\neg R(y, y) \leftrightarrow R(x, y)).$$

(a) Construye un modelo de φ_1 y demuestra que φ_2 es insatisfactible.

(b) La llamada *paradoja del barbero* surge de suponer un pueblo donde hay un barbero que afeita a todos aquellos habitantes del pueblo que no se afeitan a sí mismos, y solo a ellos. Estudia cómo se corresponde esta paradoja con la insatisfactibilidad de la fórmula φ_2.

5.48. Las dos fórmulas cerradas siguientes se pueden construir con la signatura vacía y, por lo tanto, pertenecen a todos los lenguajes de primer orden:

- $\varphi_{\geq 2} = \exists x_1 \exists x_2 \neg(x_1 = x_2)$ formaliza la afirmación “hay al menos dos individuos en el universo de discurso”.

- $\varphi_{\leq 2} = \exists x_1 \exists x_2 \forall y((y = x_1) \vee (y = x_2))$ formaliza la afirmación "hay a lo sumo dos individuos en el universo de discurso".

(a) Demuestra que para cualquier número natural $n \geq 1$ se pueden construir dos fórmulas cerradas de vocabulario vacío $\varphi_{\geq n}$ y $\varphi_{\leq n}$ que formalizan las afirmaciones "hay al menos *n* individuos" y "hay a lo sumo *n* individuos", respectivamente.

(b) Suponiendo construidas $\varphi_{\geq n}$ y $\varphi_{\leq n}$, explica el significado de las tres fórmulas siguientes: $\neg\varphi_{\geq n}$, $\neg\varphi_{\leq n}$ y $\varphi_{\geq n} \wedge \varphi_{\leq n}$.

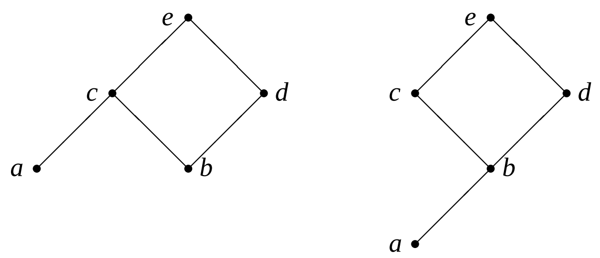
5.49. Considera la signatura $\Sigma_{ord} = \{\leq/2\}$, donde $\leq$ es un símbolo de predicado binario que se puede utilizar en notación infija. Usando Σ_{ord}-fórmulas cerradas, formaliza:

(a) Los axiomas de una relación de orden.

(b) Los axiomas de una relación de orden total.

(c) Los axiomas de una relación de orden total denso.

5.50. Un *diagrama de Hasse* permite representar gráficamente conjuntos parcialmente ordenados, siendo sus nodos los elementos considerados en el conjunto ordenado y la relación de orden $\leq$ entre sus elementos la que se establece entre cada pareja de elementos que pueden ser conectados mediante una cadena ascendente de aristas (incluyendo la posibilidad de que tal cadena sea vacía). Considera los dos diagramas de Hasse siguientes:



(a) Define dos Σ_{ord}-estructuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que correspondan a los dos diagramas de Hasse dados utilizando la Σ_{ord}-signatura dada en el ejercicio 5.49.

(b) Construye tres Σ_{ord}-fórmulas cerradas φ_1, φ_2, φ_3 que verifiquen:

- $\mathcal{A} \models \varphi_1, \mathcal{B} \not\models \varphi_1$.
- $\mathcal{A} \not\models \varphi_2, \mathcal{B} \models \varphi_2$.
- $\mathcal{A} \not\models \varphi_3, \mathcal{B} \not\models \varphi_3$.

5.51. Considera las cuatro Σ_{ord}-estructuras $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ para la Σ_{ord}-signatura definida en el ejercicio 5.49, cuyos dominios son $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq 1\}$, respectivamente, y donde $\leq$ se interpreta en cada caso como el orden numérico sobre el dominio correspondiente. Para cada una de estas cuatro estructuras, construye una Σ_{ord}-fórmula cerrada que sea verdadera en ella, pero no en las otras tres.

5.52. Demuestra que todos los modelos del conjunto de fórmulas

$$\Phi = \{\exists x \forall y \neg(f(y) = x), \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)\}$$

son infinitos.

5.53. Demuestra las siguientes propiedades de la operación de sustitución, usando las definiciones recursivas de las aplicaciones *var* y *lib* en el ejercicio 5.30 y de la operación de sustitución dada en la sección **??**.

(a) $var(s[x/t]) \subseteq (var(s) \setminus \{x\}) \cup var(t)$.

(b) $var(s[x/t]) = (var(s) \setminus \{x\}) \cup var(t)$, si $x \in var(s)$.

(c) $lib(\varphi[x/t]) \subseteq (lib(\varphi) \setminus \{x\}) \cup var(t)$.

(d) $lib(\varphi[x/t]) = (lib(\varphi) \setminus \{x\}) \cup var(t)$, si $x \in lib(\varphi)$.

5.54. Demuestra que el resultado de aplicar consecutivamente dos sustituciones depende en general del orden en que estas se apliquen.

5.55. Convengamos en aceptar $\exists^{=1} x\varphi$ como abreviatura de la fórmula siguiente:

$$\exists x(\varphi \wedge \forall y(\varphi[x/y] \to y = x))$$

siendo y una variable diferente de x que no aparece en φ. Usando el lema de sustitución, demuestra que $\exists^{=1} x\varphi$ formaliza el enunciado "existe *exactamente* un x tal que φ". Es decir, demuestra que para toda interpretación $\langle \mathcal{A}, \sigma \rangle$ se cumple:

$$\mathcal{A} \models \exists^{=1} x\varphi\,\sigma \iff \text{existe un } a \in A \text{ y uno solo tal que } \mathcal{A} \models \varphi\,\sigma[x/a].$$

5.56. Dadas n variables distintas $x_1, \ldots, x_n$ y n términos $s_1, \ldots, s_n$, formula definiciones recursivas para

(a) $t\{x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n\}$

(b) $\varphi\{x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n\}$

que correspondan a la idea de sustituir *simultáneamente* cada x_i por s_i.

CAPÍTULO 6

FORMALIZACIÓN. TÉCNICAS DE RAZONAMIENTO

6.1. PREGUNTAS DE TEST

6.1. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \exists x \forall y (x = y)$ y $\psi = \forall x \forall y (P(x) \to P(y))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ψ es insatisfactible

6.2. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x (P(x) \to Q(x))$ y $\psi = \exists x\, Q(x)$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ninguna de las dos cosas

6.3. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$ y $\psi = \exists x \exists y \neg (x = y)$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) φ lógicamente válida

6.4. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \exists x \forall y (x = y)$ y $\psi = \neg \exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ninguna de las dos cosas

6.5. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x \forall y \exists z\, R(x, y, z)$ y $\psi = \forall x \forall y (R(x, y, x) \vee R(x, y, y))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ambas cosas

6.6. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \exists x \forall y (x = y)$ y $\psi = \exists x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ninguna de las dos cosas

6.7. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x (P(x) \to Q(x))$ y $\psi = \forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) φ es insatisfactible

6.8. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x (P(x) \to Q(x))$ y $\psi = \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) φ es lógicamente válida

6.9. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x(P(x) \leftrightarrow \neg Q(x))$ y $\psi = \forall x(\neg Q(x) \to P(x))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ninguna de las dos cosas

6.2. EJERCICIOS

6.10. Estudia razonadamente si la afirmación $\exists x \forall y R(x, y) \models \forall y \exists x R(x, y)$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.11. Estudia razonadamente si la afirmación $\forall x \exists y R(x, y) \models \exists x \forall y R(x, y)$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.12. Estudia razonadamente si la afirmación $\forall x P(x) \models \exists x P(x)$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.13. Estudia razonadamente si la afirmación $\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x(P(x) \to Q(x))$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.14. Estudia razonadamente si la afirmación $\exists x P(x) \models \forall x P(x)$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.15. Estudia razonadamente si la afirmación $\models \exists x(P(x) \to \forall x P(x))$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.16. Estudia razonadamente si la afirmación $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.17. Estudia razonadamente si la afirmación $\models \forall x(\exists x P(x) \to P(x))$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.18. Estudia razonadamente si la afirmación $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$ es válida, donde φ y ψ son fórmulas genéricas; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.19. Estudia razonadamente si la afirmación $\models \neg \exists y P(y) \to \forall y(\exists x P(x) \to P(y))$ es válida; si no lo es, construye un modelo de la premisa que falsifique la conclusión.

6.20. Estudia razonadamente si la afirmación $\models P(f(c)) \leftrightarrow \forall x(x = f(c) \to P(x))$ es válida; si no lo es, construye un modelo que falsifique la conclusión.

6.21. Considera las cuatro fórmulas cerradas siguientes, que formalizan los axiomas de *reflexividad, simetría, transitividad* y *totalidad* de una relación binaria:

- (RF) $\forall x R(x, x)$
- (SM) $\forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$
- (TR) $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$
- (TL) $\forall x \exists y R(x, y)$

(a) Demuestra que (RF) es consecuencia lógica de (SM), (TR) y (TL).

(b) Construye una interpretación que pruebe que (RF) no es consecuencia lógica de (SM) y (TR).

6.22. Un conjunto de fórmulas Φ se llama *independiente* si tiene la propiedad de que ninguna fórmula del conjunto es consecuencia lógica de las restantes, es decir, para cualquier $\varphi \in \Phi$ debe ser falso que $\Phi \setminus \{\varphi\} \models \varphi$.

Usando la signatura $\{\leq\}$, construye un conjunto independiente Φ_{OP} de fórmulas cerradas que formalicen los axiomas de orden parcial. Demuestra su independencia; para ello, para cada $\varphi \in \Phi_{OP}$ construye un modelo de $\Phi_{OP} \setminus \{\varphi\}$ que falsifique φ.

6.23. Dos conjuntos de fórmulas se llaman *equivalentes* si tienen los mismos modelos. Demuestra que para cualquier conjunto finito Φ de fórmulas puede encontrarse un subconjunto $\Phi_0 \subseteq \Phi$, independiente y equivalente a Φ.

6.24. Construye fórmulas de primer orden, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan para formalizar los enunciados siguientes:

(a) Alguien tiene un amigo que odia a todos los políticos.

(b) Todo el mundo tiene un amigo que odia a algún político.

¿Es alguna de las dos frases consecuencia lógica de la otra?

6.25. Construye fórmulas de primer orden, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan para formalizar los enunciados siguientes:

(a) Alguien tiene una vecina que liga con todos los alienígenas.

(b) Todo el mundo tiene una vecina que liga con algún alienígena.

¿Es alguna de las dos frases consecuencia lógica de la otra?

6.26. Construye fórmulas de primer orden, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan para formalizar los enunciados siguientes:

(a) Algún madrileño tiene un vecino que odia a todos los catalanes.

(b) Cualquier madrileño tiene un vecino que odia a algún catalán.

¿Es alguna de las dos frases consecuencia lógica de la otra?

6.27. Considera la siguiente argumentación:

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Cualquier bombero tiene un padre torero.} \\
 & \text{No faltan bomberos.} \\
 & \text{Ningún torero es cobarde.} \\
\hline
\therefore & \text{No todo el mundo es cobarde.}
\end{array}
$$

(a) Construye una signatura Σ y cuatro fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y ψ de L_Σ que formalicen las tres premisas y la conclusión de la argumentación, respectivamente.

(b) Utilizando las fórmulas del apartado anterior, razona si la conclusión es, o no, consecuencia lógica de las premisas.

6.28. Considera la siguiente argumentación:

Todo marciano es hijo de padre canijo o de madre verde.
Cualquiera que sea canijo o verde está anémico.
Lola tiene un vecino marciano.

$\therefore$ No faltan los anémicos.

(a) Construye una signatura Σ y cuatro fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y ψ de L_Σ que formalicen las tres premisas y la conclusión de la argumentación, respectivamente.

(b) Utilizando las fórmulas del apartado anterior, estudia si la conclusión es, o no, consecuencia lógica de las premisas.

6.29. Las cuatro fórmulas de primer orden siguientes están pensadas para formalizar enunciados acerca de perros y gatos:

- "Todo perro persigue a algún gato": $\varphi_1 = \forall x(P(x) \to \exists y(G(y) \land S(x, y)))$.
- "Hay gatos perseguidos por todos los perros" : $\varphi_2 = \exists x(G(x) \land \forall y(P(y) \to S(y, x)))$.
- "Existen perros": $\varphi_3 = \exists x P(x)$.
- "Existen gatos": $\varphi_4 = \exists x G(x)$.

Construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo, demuestra que:

(a) φ_3 no es consecuencia lógica de φ_1.

(b) φ_2 no es consecuencia lógica de φ_4.

(c) φ_2 no es consecuencia lógica de φ_1.

6.30. La signatura de la profesión informática se define como $\Sigma_{pi} = \{I/1,\ S/1,\ H/1,\ P/1,\ C/2,\ V/2\}$, en la que suponemos además que:

- $I(x)$ formaliza "x es un informático",
- $H(x)$ formaliza "x es horripilante",
- $C(x, y)$ formaliza "x conoce a y",
- $S(x)$ formaliza "x es un sistema operativo",
- $P(x)$ formaliza "x es un psiquiatra",
- $V(x, y)$ formaliza "x visita a y".

(a) Usando exclusivamente los símbolos de la signatura Σ_{pi}, construye fórmulas de primer orden cerradas que formalicen los enunciados siguientes:
  - φ_1: "Existen sistemas operativos".
  - φ_2: "Existen informáticos".
  - φ_3: "Cualquier sistema operativo es conocido por algún informático".
  - φ_4: "Algunos informáticos conocen todos los sistemas operativos".
  - φ_5: "Algunos sistemas operativos son horripilantes".
  - φ_6: "Quienes conocen algo horripilante visitan a un psiquiatra".
  - φ_7: "Algunos informáticos visitan a un psiquiatra".

(b) Construye una Σ_{pi}-interpretación que sea modelo del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$.

6.31. Considera los símbolos de predicado I, M, C, A, N y R con los siguientes significados pretendidos:

- $I(x)$ formaliza "x es inglés",
- $M(x)$ formaliza "x es marinero",
- $C(x)$ formaliza "x es un continente",
- $A(x, y)$ formaliza "x es amigo de y",
- $N(x, y)$ formaliza "x es novia de y",
- $R(x, y)$ formaliza "x reside en y".

Utilizando los símbolos anteriores, resuelve los siguientes apartados:

(a) Construye una fórmula φ de primer orden que formalice el enunciado:
"Todo inglés es amigo de algún marinero que tiene una novia en cada continente".

(b) Dada $\psi = \forall x \forall z(I(x) \to A(x, m(x)) \wedge M(m(x)) \wedge (C(z) \to N(n(x, z), m(x)) \wedge R(n(x, z), z)))$, en la que los símbolos de función representan:

- $m(x)$: un marinero amigo de x,
- $n(x, z)$: una novia de $m(x)$ que reside en z,

¿es alguna de las fórmulas φ o ψ consecuencia lógica de la otra?

6.32. Construye dos fórmulas de primer orden φ y ψ, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan respectivamente para formalizar los dos enunciados siguientes:

- φ: Algún marciano tiene un rayo láser que mata a todos los lunáticos.
- ψ: Cualquier marciano tiene un rayo láser que mata a algún lunático.

Construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo, demuestra que:

(a) φ no es consecuencia lógica de ψ.

(b) ψ no es consecuencia lógica de φ.

6.33. La signatura de los animales se define como $\Sigma_{an} = \{HV/1,\ CV/1,\ SC/2\}$, en la que suponemos además que:

- $HV(x)$ formaliza "x es herbívoro",
- $CV(x)$ formaliza "x es carnívoro",
- $SC(x, y)$ formaliza "x se come a y".

(a) Usando exclusivamente los símbolos de la signatura Σ_{an}, construye fórmulas de primer orden cerradas que formalicen los enunciados siguientes:

- φ_1: "Existen herbívoros".
- φ_2: "Existen carnívoros".
- φ_3: "Todo carnívoro se come a algún herbívoro".
- φ_4: "Algunos carnívoros se comen a todos los herbívoros".

(b) Demuestra que ninguna de las dos fórmulas $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ y $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_4$ es consecuencia de la otra construyendo Σ_{an}-interpretaciones que sirvan de contraejemplos.

6.34. Considera las dos argumentaciones siguientes:

	Todos los zopiloides son pombiformes.		Algunos sotanoideos son polimorfos.
	Arturo es un zopiloide.		Booz no es polimorfo.
$\therefore$	Arturo es pombiforme.	$\therefore$	Booz no es sotanoideo.

(a) Escribe la signatura necesaria para poder formalizar cada una de las dos argumentaciones y formalízalas.

(b) Demuestra que la primera argumentación es válida (la conclusión es consecuencia lógica de las premisas).

(c) Demuestra que la segunda argumentación no es válida (la conclusión no es consecuencia lógica de las premisas). Construye un modelo de las premisas que falsifique la conclusión.

6.35. Considera las tres argumentaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} & \text{Bruto mató a César.} \\ & \text{Tito pagó a Bruto.} \\ \hline \therefore & \text{Tito pagó a uno que mató a César.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \text{Charlot amaba a Madonna.} \\ & \text{Almodóvar contrató a Charlot.} \\ \hline \therefore & \text{Almodóvar contrató a uno que amaba a Madonna.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \text{Alguien mató a Trotski.} \\ & \text{Stalin pagó a alguien.} \\ \hline \therefore & \text{Stalin pagó a uno que mató a Trotski.} \end{array}$$

(a) Formaliza las tres argumentaciones. Comprueba que las dos primeras admiten la misma forma lógica, diferente de la tercera.

(b) Demuestra que las dos primeras argumentaciones son válidas, mientras que la tercera es inválida. Construye un modelo de sus premisas que falsifique su conclusión.

6.36. Sea Σ una signatura tal que $P_\Sigma = \{P/1, R/2\}$. Supongamos que $P(x)$ formaliza el enunciado "x es feliz" y $R(x, y)$ formaliza el enunciado "x es amigo de y".

(a) Construye dos fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\Sigma$ que formalicen respectivamente los dos enunciados: "todo el que es feliz tiene algún amigo" y "todo el que tiene algún amigo es feliz".

(b) ¿Se cumple que $\varphi_1 \models \varphi_2$?

6.37. Considera las siguientes cuatro premisas y conclusión:

$$\begin{array}{rl} P_1: & \text{Braulio tiene un amigo gritón y bigotudo.} \\ P_2: & \text{Los gritones siempre son cursis o acomplejados.} \\ P_3: & \text{Los bigotudos jamás son acomplejados.} \\ P_4: & \text{Ningún bigotudo tiene un amigo cursi.} \\ C: & \text{Braulio no es bigotudo.} \end{array}$$

(a) Define una signatura Σ que sirva para formalizar los enunciados dados en lógica de primer orden y construye fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ y ψ del lenguaje de primer orden L_Σ que formalicen P_1, P_2, P_3, P_4 y C, en este orden.

(b) Construye una Σ-interpretación que demuestre que el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfactible.

(c) Demuestra por reducción al absurdo que la argumentación formada por las cuatro premisas y la conclusión es válida, es decir, *Insat*$(\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \neg\psi\})$.

6.38. Considera la siguiente argumentación:

$$\begin{array}{ll} & \text{Todo dragón es acosado por algún piojo.} \\ & \text{Malaquías es un dragón y Zacarías no acosa a Malaquías.} \\ \hline \therefore & \text{Zacarías no es un piojo.} \end{array}$$

(a) Construye una signatura Σ y tres fórmulas φ_1, φ_2 y ψ de L_Σ que formalicen las dos premisas y la conclusión de la argumentación, respectivamente.

(b) Demuestra que la argumentación no es válida, utilizando las fórmulas del apartado anterior y construyendo un Σ-interpretación que sirva de contraejemplo.

6.39. Considera los tres enunciados siguientes:

E_1 : Hay canarios amarillos.
E_2 : Hay un gato negro que persigue a todos los canarios amarillos.
E_3 : Cualquier canario amarillo es perseguido por algún gato negro.

(a) Define una signatura Σ que sirva para formalizar los enunciados dados en lógica de primer orden, y construye fórmulas φ_1, φ_2 y φ_3 del lenguaje de primer orden L_Σ que formalicen E_1, E_2 y E_3, en este orden.

(b) Demuestra por reducción al absurdo que la argumentación formada por la premisa E_2 y la conclusión E_3 es válida, es decir, $Insat(\{\varphi_2, \neg\varphi_3\})$.

(c) Construye una Σ-interpretación que demuestre que $\varphi_1, \varphi_3 \not\models \varphi_2$.

6.40. Dada la signatura $\Sigma = \{P/1, Q/1, R/2\}$ suponemos que:

- $P(x)$ formaliza "x es gallega",
- $Q(x)$ formaliza "x es rubia",
- $R(x, y)$ formaliza "y es hijo de x".

(a) Construye fórmulas de primer orden cerradas $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in L_\Sigma$ que formalicen los enunciados siguientes:
  - φ_1 formalizará el enunciado: "Cualquier gallega tiene algún hijo".
  - φ_2 formalizará el enunciado: "Algunas rubias no tienen ningún hijo".
  - ψ_1 formalizará el enunciado: "No todas las rubias son gallegas".
  - ψ_2 formalizará el enunciado: "Ninguna rubia es gallega".

(b) Demuestra que la argumentación con premisas φ_1 y φ_2 y conclusión ψ_1 es lógicamente válida.

(c) Construye una interpretación que sirva de contraejemplo para demostrar que la argumentación con premisas φ_1 y φ_2 y conclusión ψ_2 no es lógicamente válida.

6.41. Utilizamos la signatura $\Sigma = \{P/1,\ H/1,\ L/1,\ C/1,\ S/2\}$, suponiendo que:

- $P(x)$ formaliza: "x es un piojo",
- $H(x)$ formaliza: "x es un héroe",
- $L(x)$ formaliza: "x es un león",
- $C(x)$ formaliza: "x es un cobarde",
- $S(x, y)$ formaliza: "x persigue a y".

(a) Construye fórmulas cerradas del lenguaje de primer orden L_Σ, de manera que cada una formalice el enunciado que se indica junto a ella:
  - φ_1: Algunos piojos son héroes.
  - φ_2: Todo héroe persigue a algún león.
  - φ_3: Ningún cobarde persigue a un león.
  - ψ_1: No todos los piojos son cobardes.

- ψ_2: Ningún piojo es cobarde.

(b) ¿Se cumple $\psi_1 \models \psi_2$? En caso afirmativo razona por qué, y en caso negativo construye una interpretación que sirva de contraejemplo.

(c) Demuestra que $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \models \psi_1$.

6.42. Utilizamos la signatura $\Sigma = \{P/1,\ E/1,\ T/1,\ H/1,\ M/2\}$, suponiendo que:

- $P(x)$ formaliza "x es un político",
- $E(x)$ formaliza "x es un elector",
- $T(x)$ formaliza "x es tontorrón",
- $H(x)$ formaliza "x es honrado",
- $M(x, y)$ formaliza "x miente a y".

(a) Construye fórmulas cerradas del lenguaje de primer orden L_Σ de manera que cada una formalice el enunciado que se indica junto a ella:

- φ_1: Hay políticos que mienten a todos los electores.
- φ_2: Hay electores tontorrones.
- φ_3: Cualquiera que mienta a un tontorrón no es honrado.
- ψ_1: No todos los políticos son honrados.
- ψ_2: Ningún político es tontorrón.

(b) ¿Se cumple $\psi_1 \models \psi_2$? En caso afirmativo razona por qué y en caso negativo construye una interpretación que sirva de contraejemplo.

(c) Demuestra que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi_1$.

6.43. Utilizamos la signatura $\Sigma = \{P/1, S/1, R/1, E/1, V/1, C/2\}$, suponiendo que:

- $P(x)$ formaliza "x es un pitufo",
- $S(x)$ formaliza "x es una seta",
- $R(x)$ formaliza "x revienta",
- $E(x)$ formaliza "x tiene buen estómago",
- $V(x)$ formaliza "x es venenoso",
- $C(x, y)$ formaliza "x se come a y".

(a) Construye fórmulas cerradas del lenguaje de primer orden L_Σ de manera que cada una formalice el enunciado que se indica junto a ella:

- φ_1: Algunos pitufos se comen todas las setas y no revientan.
- φ_2: Algunas setas son venenosas.
- φ_3: Quienquiera que se coma algo venenoso y no reviente, tiene buen estómago.
- ψ_1: Algunos pitufos tienen buen estómago.
- ψ_2: Todos los pitufos tienen buen estómago.

(b) ¿Se cumple $\psi_1 \models \psi_2$? En caso afirmativo razona por qué y en caso negativo construye una interpretación que sirva de contraejemplo.

(c) Demuestra que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi_1$.

CAPÍTULO 7

EQUIVALENCIA LÓGICA. LEYES DE LOS CUANTIFICADORES

7.1. PREGUNTAS DE TEST

7.1. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x (P(x) \to Q(x))$ y $\psi = \forall x \neg P(x) \vee \exists x Q(x)$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

7.2. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ y $\psi = \exists x (P(x) \to Q(x))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

7.3. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$ y $\psi = \neg \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

7.4. La fórmula de primer orden $\forall x P(x) \to \neg \exists x R(x, x)$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\exists x \forall y (P(x) \to \neg R(y, y))$ (b) $\exists x \exists y (P(x) \to \neg R(y, y))$ (c) $\forall x \forall y (P(x) \to \neg R(y, y))$

7.5. La fórmula de primer orden $\neg \exists x (P(x) \to \forall y R(x, y))$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\forall x \forall y (\neg P(x) \vee R(x, y))$ (b) $\exists x \exists y (P(x) \wedge R(x, y))$ (c) $\forall x \exists y (P(x) \wedge \neg R(x, y))$

7.6. La fórmula de primer orden $\neg \exists x (P(x) \to \forall y \neg R(x, y))$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\forall x \exists y (P(x) \to R(x, y))$ (b) $\forall x \exists y (P(x) \wedge R(x, y))$ (c) $\exists y \forall x (P(x) \to R(x, y))$

7.7. La fórmula de primer orden $\forall x (\exists y R(x, y) \to P(x))$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\neg \exists x (\exists y R(x, y) \to \neg P(x))$ (b) $\forall x (\neg \exists y R(x, y) \to \neg P(x))$ (c) $\neg \exists x (\exists y R(x, y) \wedge \neg P(x))$

7.8. La fórmula $\neg \exists x (P(x) \to \forall y Q(x, y))$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(x, y))$ (b) $\forall x (\neg P(x) \vee \forall y Q(x, y))$ (c) $\exists x (P(x) \wedge \exists y Q(x, y))$

7.9. La fórmula $\neg\forall x(\exists y R(x,y) \to \neg P(x))$ es lógicamente equivalente a:

(a) $\exists x(\neg P(x) \wedge \exists y R(x,y))$ (b) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$ (c) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$

7.10. Una posible forma prenexa de la fórmula de primer orden $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ es:

(a) $\exists x\exists y\neg(P(x) \to R(x,y))$ (b) $\forall x\exists y\neg(P(x) \to R(x,y))$ (c) $\exists x\forall y(P(x) \wedge \neg R(x,y))$

7.11. Una posible forma prenexa de la fórmula de primer orden $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ es:

(a) $\forall x\exists x(P(x) \vee Q(x))$ (b) $\forall x\exists y(P(x) \vee Q(y))$ (c) $\exists x\forall x(P(x) \vee Q(x))$

7.12. Una posible forma prenexa de la fórmula de primer orden $\forall y P(y) \to \exists x Q(x)$ es:

(a) $\exists x\exists y(P(y) \to Q(x))$ (b) $\exists x\forall y(P(y) \to Q(x))$ (c) $\forall y\exists x(P(y) \to Q(x))$

7.13. Una posible forma prenexa de la fórmula de primer orden $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ es:

(a) $\exists x\exists y\neg(P(x) \to R(x,y))$ (b) $\exists x\forall y(P(x) \wedge \neg R(x,y))$ (c) $\forall x\exists y\neg(P(x) \to R(x,y))$

7.14. Una posible forma prenexa de la fórmula de primer orden $\neg\exists x(P(x) \wedge \forall y R(x,y))$ es:

(a) $\forall x\exists y(P(x) \to R(x,y))$ (b) $\forall x\exists y(P(x) \to \neg R(x,y))$ (c) $\exists y\forall x(P(x) \to \neg R(x,y))$

7.15. Una forma prenexa de la fórmula de primer orden $\neg\exists x(\exists y R(x,y) \to P(x))$ puede ser:

(a) $\exists y\forall x(R(x,y) \wedge \neg P(x))$ (b) $\forall x(\neg P(x) \wedge \exists y R(x,y))$ (c) $\forall x\exists y(R(x,y) \wedge \neg P(x))$

7.16. Una posible forma de Skolem de la fórmula de primer orden $\forall x(P(x) \to \exists x Q(x))$ es:

(a) $\forall x(P(x) \to Q(f(x)))$ (b) $\forall x(P(x) \to Q(a))$ (c) $\forall x(P(f(x)) \to Q(x))$

7.17. Una posible forma de Skolem de la fórmula de primer orden $\exists x P(x) \to \exists x\neg Q(x)$ es:

(a) $\forall x(P(f(x)) \to \neg Q(f(x)))$ (b) $\forall x(P(x) \to \neg Q(f(x)))$ (c) $\forall x(P(f(x)) \to \neg Q(x))$

7.18. Una posible forma de Skolem de la fórmula de primer orden $\exists x(\exists y R(y,x) \to \exists z\neg S(x,z))$ es:

(a) $\exists x\forall y(R(y,x) \to \neg S(x, f(y))$
(b) $\forall z(R(f(z),c) \to \neg S(c,z))$
(c) $\forall y(R(y,c) \to \neg S(c, f(y)))$

7.2. EJERCICIOS

7.19. Demuestra las siguientes leyes de cuantificadores aplicando la definición de equivalencia lógica y las propiedades que sean necesarias de la relación de satisfacción de fórmulas de primer orden.

(a) $\exists x\varphi \sim \varphi$ si $x \notin lib(\varphi)$
(b) $\forall x\varphi \sim \varphi$ si $x \notin lib(\varphi)$

(c) $\exists x \exists y \varphi \sim \exists y \exists x \varphi$
(d) $\forall x \forall y \varphi \sim \forall y \forall x \varphi$
(e) $\neg \exists x \varphi \sim \forall x \neg \varphi$
(f) $\forall x \varphi \land \forall x \psi \sim \forall x (\varphi \land \psi)$
(g) $\exists x \varphi \land \psi \sim \exists x (\varphi \land \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(h) $\exists x \varphi \sim \exists y \varphi[x/y]$ si $y \neq x$ e $y \notin lib(\varphi)$

7.20. Demuestra las siguientes leyes de cuantificadores usando otras equivalencias lógicas.

(a) $\neg \forall x \varphi \sim \exists x \neg \varphi$
(b) $\exists x \varphi \lor \exists x \psi \sim \exists x (\varphi \lor \psi)$
(c) $\forall x \varphi \lor \psi \sim \forall x (\varphi \lor \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(d) $\exists x \varphi \lor \psi \sim \exists x (\varphi \lor \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(e) $\forall x \varphi \land \psi \sim \forall x (\varphi \land \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(f) $\exists x \varphi \to \psi \sim \forall x (\varphi \to \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(g) $\forall x \varphi \to \psi \sim \exists x (\varphi \to \psi)$ si $x \notin lib(\psi)$
(h) $\varphi \to \exists x \psi \sim \exists x (\varphi \to \psi)$ si $x \notin lib(\varphi)$
(i) $\varphi \to \forall x \psi \sim \forall x (\varphi \to \psi)$ si $x \notin lib(\varphi)$
(j) $\forall x \varphi \sim \forall y \varphi[x/y]$ si $y \neq x$ e $y \notin lib(\varphi)$

7.21. Aplicando directamente la definición de equivalencia lógica y el lema de coincidencia, demuestra que $\forall x \varphi \lor \psi \sim \forall x (\varphi \lor \psi)$ siempre que $x \notin lib(\psi)$.

7.22. En cada uno de los casos que siguen, demuestra que la equivalencia lógica no es válida construyendo un modelo de una de las dos fórmulas que haga falsa a la otra.

(a) $\exists x P(x) \not\sim P(x)$
(b) $\forall x P(x) \not\sim P(x)$
(c) $\exists x P(x) \lor Q(x) \not\sim \exists x (P(x) \lor Q(x))$
(d) $\exists x P(x) \land Q(x) \not\sim \exists x (P(x) \land Q(x))$
(e) $\forall x P(x) \lor Q(x) \not\sim \forall x (P(x) \lor Q(x))$
(f) $\forall x P(x) \land Q(x) \not\sim \forall x (P(x) \land Q(x))$
(g) $\exists x P(x) \to Q(x) \not\sim \forall x (P(x) \to Q(x))$
(h) $\forall x P(x) \to Q(x) \not\sim \exists x (P(x) \to Q(x))$
(i) $P(x) \to \exists x Q(x) \not\sim \exists x (P(x) \to Q(x))$
(j) $P(x) \to \forall x Q(x) \not\sim \forall x (P(x) \to Q(x))$
(k) $\exists x R(x, y) \not\sim \exists y R(y, y)$
(l) $\forall x R(x, y) \not\sim \forall y R(y, y)$

7.23. Bajo el supuesto de que la variable x no aparezca en el término t, usa los lemas de coincidencia y sustitución para demostrar que:

$$\varphi[x/t] \sim \exists x (x = t \land \varphi) \sim \forall x (x = t \to \varphi),$$

cualquiera que sea la fórmula φ.

7.24. Encuentra un ejemplo que demuestre que el resultado del ejercicio 7.23 no es válido en general cuando x aparece en t.

7.25. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura y considera las tres Σ-fórmulas cerradas siguientes:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(\exists y R(x,y) \to R(x,x)) \\
\varphi_2 &= \forall x(R(x,x) \to \exists y R(x,y)) \\
\varphi_3 &= \forall x R(x,x) \to \forall x \exists y R(x,y)
\end{aligned}$$

(a) Construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo, demuestra que φ_1 no es lógicamente válida.

(b) Las fórmulas φ_2 y φ_3 sí son lógicamente válidas. Explica por qué.

(c) ¿Se cumple $\varphi_1 \sim \varphi_2$? ¿Se cumple $\varphi_2 \sim \varphi_3$? Justifica tus respuestas utilizando la definición de equivalencia lógica y los resultados de los dos apartados anteriores, pero sin hacer cálculos.

7.26. Considera los dos enunciados en castellano y las cuatro fórmulas que siguen:

E_1: Algunos robots solo obedecen a los amigos del programador jefe
E_2: Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y(P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)) \\
\varphi_2 &= \exists x(P(x) \land \forall y(R(x,y) \to S(y,c))) \\
\varphi_3 &= \forall y(S(y,c) \to \neg\exists x(P(x) \land \neg R(x,y))) \\
\varphi_4 &= \exists x \forall y(P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c)))
\end{aligned}$$

(a) Para una elección adecuada de los significados pretendidos de los símbolos, dos de las fórmulas formalizan E_1 y las otras dos formalizan E_2. Explica cuál es la interpretación y cuáles son las fórmulas que corresponden a cada uno de los dos enunciados.

(b) Usando las leyes de la equivalencia lógica, demuestra que las dos fórmulas correspondientes a E_1 son lógicamente equivalentes. Haz lo mismo con las dos fórmulas correspondientes a E_2.

7.27. Formaliza cada uno de los enunciados siguientes y utiliza las leyes de la equivalencia lógica para transformar en cada caso la fórmula resultante a una fórmula en forma prenexa equivalente.

(a) Algunos críticos encuentran defectos en todos los autores.

(b) Algunos buitres tienen colegas, pero ninguna hiena tiene colegas.

(c) Todo zorro come a algún roedor que solo come semillas.

(d) Algunos pitufos azules son amigos de todos los pitufos gruñones, y además cualquier pitufo azul es amigo de algún pitufo alegre.

7.28. Usando las leyes de la equivalencia lógica, transforma cada una de las fórmulas siguientes a una fórmula en forma prenexa lógicamente equivalente:

(a) $\varphi_1 = \forall x(\exists y R(x,y) \to P(x))$

(b) $\varphi_2 = \forall x(P(x) \to \neg\forall y R(x,y))$

(c) $\varphi_3 = \neg\varphi_1 \land \varphi_2$

(d) $\varphi_4 = \neg\varphi_1 \lor \neg\varphi_2$

7.29. Transforma cada una de las fórmulas prenexas obtenidas en el ejercicio 7.28 a forma normal de Skolem.

7.30. Transforma cada una de las formas de Skolem obtenidas en el ejercicio 7.29 a forma clausulada.

7.31. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Construye dos fórmulas de primer orden φ y ψ, con el mismo vocabulario y sin variables libres, que sirvan respectivamente para formalizar los dos enunciados siguientes:

Alguien tiene un pariente que lee todos los periódicos deportivos.
Todo el mundo tiene un pariente que lee algún periódico deportivo.

(b) Convierte las dos fórmulas del apartado anterior a forma de Skolem.

(c) ¿Son lógicamente equivalentes las dos fórmulas del apartado (a)? ¿Es alguna de las dos consecuencia lógica de la otra?

7.32. Calcula la forma clausulada del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, donde:

(a) $\varphi_1 = \forall x(\exists y P(x, y) \vee \neg Q(x))$

(b) $\varphi_2 = \forall x(R(x) \to (T(x) \vee Q(x)))$

(c) $\varphi_3 = \forall y(T(y) \to \exists z P(y, z))$

(d) $\varphi_4 = \exists z(\forall y \neg P(z, y) \wedge R(z))$

7.33. Calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión de la siguiente argumentación:

Raúl es miope.
Cuando alguien es miope, o su padre o su madre resulta serlo también.
Todo el mundo ama a su padre y a su madre.

$\therefore$ Algún miope es amado por alguien.

7.34. Calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión de la siguiente argumentación:

Los jefes de estado solo conservan el poder si contemporizan
con el presidente de una nación poderosa.
Todos los jefes de estado son políticos y algunos de ellos conservan el poder.
Los presidentes de naciones poderosas no son cándidos y justifican la guerra.
Quien justifica la guerra es un cínico o un cándido.

$\therefore$ Algunos políticos contemporizan con un cínico.

7.35. Calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión de la siguiente argumentación:

Algunos banqueros son amigos de todos los políticos.
Cualquier banquero explota a algún político.
Quienquiera que explota a un amigo es un impresentable.

$\therefore$ Algunos impresentables son banqueros.

7.36. Considera la argumentación siguiente:

Un conejo que no come se muere.
Todo conejo tragón es dientón o borracho.
Ni los muertos, ni los borrachos ni los dientones huelen bien.
Los conejos existen.

$\therefore$ No todo el mundo huele bien.

Formaliza la argumentación y calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión.

7.37. Considera la siguiente argumentación:

Los marcianos no informáticos aprecian cualquier cosa más que un ordenador.
Los marcianos informáticos aprecian cualquier cosa más que un ordenador lento.
Hay ordenadores rápidos y lentos.

$\therefore$ Hay al menos un ordenador tal que todo marciano aprecia alguna cosa más que a él.

Formaliza la argumentación y calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión.

7.38. Calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión de la siguiente argumentación:

Si un dragón tiene un hijo que sabe volar entonces es feliz.
Los dragones verdes saben volar.
Los dragones que no son verdes son rosa.
Quien tiene un hijo dragón es dragón.
Pepe es un dragón y su padre es Manolo.

$\therefore$ Existe alguien que o es rosa o es hijo de alguien que es feliz.

7.39. Considera la siguiente argumentación:

Una empresa no invierte en investigación a menos que haya contratado a algún doctor.
Para ser doctor es necesario haber hecho una tesis doctoral.
Todo aquel que ha hecho una tesis doctoral ha sido alumno de doctorado.
Las empresas nunca contratan a quienes han sido alumnos de doctorado.

$\therefore$ Por desgracia, no existen empresas que inviertan en investigación.

Formaliza la argumentación y calcula las formas clausuladas del conjunto de fórmulas de primer orden que formalizan las premisas y la negación de la conclusión.

CAPÍTULO 8

CÁLCULO LÓGICO CON TABLEAUX

8.1. PREGUNTAS DE TEST

8.1. El conjunto de fórmulas $\Phi = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists y(P(y) \wedge \neg Q(y))\}$ verifica:

(a) Φ es satisfactible (b) Φ tiene un tableau cerrado (c) ninguna de las dos cosas

8.2. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene tres ramas (b) es cerrado (c) es abierto

8.3. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene tres ramas (b) es cerrado (c) tiene alguna rama abierta

8.4. Sea $\Phi = \{\forall x R(x, f(x)), \exists x \forall y \neg R(x, y)\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) es infinito (b) es cerrado (c) es abierto

8.5. Sea $\Phi = \{\exists x P(x), \forall x(P(x) \to P(f(x)))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) es cerrado (b) es infinito (c) tiene una sola rama

8.6. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \to Q(x)), P(c), \neg Q(c)\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) es infinito (b) es abierto (c) es cerrado

8.7. Sea $\Phi = \{\exists x P(x), \forall x(P(x) \to \exists y(R(x, y) \wedge P(y)))\}$. Cualquier tableau terminado para Φ debe ser:

(a) finito (b) cerrado (c) abierto

8.8. Sea $\Phi = \{\exists x P(x), \forall x(P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x)))\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) es cerrado (b) es abierto (c) es finito

8.2. EJERCICIOS

8.9. Construye un tableau que demuestre la validez de la siguiente argumentación:

Algunos mamíferos leen a Quevedo.
Todos los lectores de Quevedo disfrutan.
∴ Algunos mamíferos disfrutan.

8.10. Construye un tableau que demuestre la no validez de la siguiente argumentación:

Algunos poetas fueron románticos.
Algunos románticos se suicidaron.
∴ Algunos poetas se suicidaron.

8.11. Dada la siguiente argumentación no válida, construye un tableau terminado y obtén un contraejemplo a partir de una rama abierta del tableau

Todos los informáticos son parlanchines.
Algunas mujeres son parlanchinas.
∴ Todos los informáticos son mujeres.

8.12. Construye tableaux que demuestren la validez de las siguientes consecuencias lógicas:

(a) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

(b) $\neg \exists x P(x) \models \forall y (\exists z P(z) \to P(y))$

(c) $\models \exists x P(x) \leftrightarrow \exists y P(y)$

(d) $\models \forall x (\forall y P(y) \to P(x))$

8.13. Construye tableaux que demuestren la validez de las siguientes consecuencias lógicas:

(a) $\models \exists x (P(x) \to \forall y P(y))$

(b) $\models \forall x (P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$

(c) $\exists x (P(x) \land Q(x)) \models \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

(d) $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \lor Q(x))$

(e) $\forall x \forall y (R(x, y) \to R(y, x)), \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z)), \forall x \exists y R(x, y) \models \forall x R(x, x)$

8.14. Construye tableaux que demuestren la validez de las siguientes relaciones de consecuencia lógica, utilizando las reglas para la igualdad.

(a) $\models \forall x \exists y (x = y)$

(b) $\models \forall x \forall y (x = y \land P(x) \to P(y))$

(c) $\models \forall x \forall y (x = y \to f(x) = f(y))$

(d) $\models P(f(x)) \leftrightarrow \forall y (y = f(x) \to P(y))$

(e) $\forall x \forall y (suc(x) = suc(y) \to x = y), \neg \exists x (suc(x) = 0) \models \neg(suc(0) = suc(suc(0)))$

8.15. Dada la signatura $\Sigma_{ga} = \{GA/1, CM/1, AM/2\}$, donde

- $GA(x)$ formaliza “x es gallego”,
- $CM(x)$ formaliza “x cree en las meigas”,
- $AM(x, y)$ formaliza “x es amigo de y”,

se pide resolver los apartados siguientes:

(a) Usando exclusivamente los símbolos de la signatura Σ_{ga}, construye fórmulas de primer orden cerradas que formalicen las premisas y la conclusión de la argumentación siguiente:

Cualquier gallego tiene un amigo que cree en las meigas.
Los amigos de cualquier gallego son todos gallegos.
Algunos gallegos no creen en las meigas.
$\therefore$ Algunos gallegos creen en las meigas.

(b) Utilizando las fórmulas obtenidas en el apartado anterior, construye un tableau que demuestre que la conclusión de la argumentación es consecuencia lógica de las premisas.

8.16. Formaliza la siguiente argumentación en lógica de primer orden y demuestra su validez construyendo un tableau.

Cualquier pitufo es azul o gandul.
No todos los pitufos son gandules.
Todos los pitufos azules son cascarrabias.
$\therefore$ Algunos cascarrabias no son gandules.

8.17. Formaliza la siguiente argumentación en lógica de primer orden

Todos los alienígenas son canijos.
Ningún marciano se emborracha.
Cualquier individuo canijo y desgraciado se emborracha.
Algunos alienígenas son desgraciados.
$\therefore$ No todos los alienígenas son marcianos.

Demuestra la validez de la argumentación mediante un tableau.

8.18. Considera la siguiente argumentación:

Todos los peregrinos llevan sayal.
Algunos peregrinos no se bañan.
Quienes llevan sayal y no se bañan, huelen mal.
Los devotos de Santiago no huelen mal.
$\therefore$ Algunos peregrinos no son devotos de Santiago.

(a) Formaliza la argumentación en lógica de primer orden.
(b) Demuestra la validez de la argumentación mediante un tableau.
(c) Construye un modelo que sirva de contraejemplo para demostrar que la argumentación deja de ser válida si se elimina la segunda premisa.

8.19. La signatura de la vida en sociedad se define como $\Sigma_{soc} = \{p/1, m/1, U/1, M/1, F/1, I/1, S/2\}$. Se supone además que:

- $U(x)$ formaliza “x es universitario”,

- $M(x)$ formaliza "x es marxista",
- $F(x)$ formaliza "x es feminista",
- $I(x)$ formaliza "x es ingenuo",
- $S(x, y)$ formaliza "x seduce a y",
- $p(x)$ y $m(x)$ formalizan "el padre de x" y "la madre de x", respectivamente.

(a) Usando los símbolos de la signatura Σ_{soc}, construye fórmulas de primer orden cerradas que formalicen los enunciados siguientes:
- φ_1: "Cualquier universitario tiene padre marxista o madre feminista".
- φ_2: "Todos los marxistas son ingenuos".
- φ_3: "El hijo de un padre ingenuo siempre es ingenuo".
- φ_4: "Algunos universitarios no son ingenuos".
- ψ: "Existen feministas".
- η_1: "Hay un universitario que seduce a todas las feministas ingenuas".
- η_2: "Hay un universitario ingenuo que es seducido por todas las feministas".

(b) Demuestra que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$ construyendo un tableau.

(c) Demuestra que $\exists x(U(x) \wedge I(x)), \exists x(F(x) \wedge I(x)), \eta_1 \not\models \eta_2$, construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo.

8.20. La signatura de los bichos de colores se define como $\Sigma_{bc} = \{p/1, m/1, D/1, P/1, V/1, A/1, I/2\}$. Se supone además que:

- $p(x)$ y $m(x)$ formalizan "el padre de x" y "la madre de x", respectivamente,
- $D(x)$ formaliza "x es un dragón",
- $P(x)$ formaliza "x es un piojo",
- $V(x)$ formaliza "x es verde",
- $A(x)$ formaliza "x es amarillo",
- $I(x, y)$ formaliza "x incordia a y".

(a) Usando los símbolos de la signatura Σ_{bc}, construye fórmulas de primer orden cerradas que formalicen los enunciados siguientes:
- φ_1: "Cualquier dragón es verde o amarillo".
- φ_2: "El padre de un dragón amarillo siempre es amarillo".
- φ_3: "La madre de un dragón verde siempre es verde".
- φ_4: "Hay un dragón cuya madre no es verde".
- ψ: "Hay un dragón cuyo padre es amarillo".
- η_1: "Hay un piojo amarillo que incordia a todos los dragones verdes".
- η_2: "Hay un dragón verde que es incordiado por todos los piojos amarillos".

(b) Demuestra que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \psi$ construyendo un tableau.

(c) Demuestra que $\exists x(D(x) \wedge V(x)), \exists x(P(x) \wedge A(x)), \eta_1 \not\models \eta_2$, construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo.

8.21. Considera la siguiente argumentación:

Todo lo que comen los belgas es ponzoñoso.
Quienes comen cosas ponzoñosas se mueren.
Algunos belgas no se mueren.

$\therefore$ Algunos belgas no comen nada.

(a) Formaliza la argumentación en lógica de primer orden.
(b) Demuestra la validez de la argumentación mediante un tableau.
(c) Construye un modelo que sirva de contraejemplo para demostrar que la argumentación deja de ser válida si se elimina la última premisa.

8.22. Considera la siguiente argumentación:

Todos los gallegos llevan boina.
Algunas personas tienen amigos que no llevan boina.
Los amigos de un gallego siempre son gallegos.
$\therefore$ No todas las personas son gallegos.

(a) Formaliza la argumentación en lógica de primer orden.
(b) Construye un tableau cerrado que demuestre la validez de la argumentación.
(c) Considera la argumentación resultante de suprimir la tercera premisa. Construye un tableau terminado y abierto, y a partir de él un contraejemplo que muestre la invalidez de la nueva argumentación.

8.23. Formaliza la siguiente argumentación en lógica de primer orden:

Todos los porteños son bailarines.
Algunos porteños son torpes.
Los bailarines torpes siempre se caen.
Los listillos nunca se caen.
$\therefore$ Algunos porteños no son listillos.

Construye un tableau cerrado que demuestre la validez de la argumentación.

8.24. Formaliza la siguiente argumentación en lógica de primer orden:

Los cordobeses no huelen mal.
Quienes llevan armadura y no se bañan, huelen mal.
Todos los caballeros llevan armadura.
Algunos caballeros no se bañan.
$\therefore$ No todos los caballeros son cordobeses.

Demuestra la validez de la argumentación por medio de un tableau.

8.25. Formaliza la argumentación siguiente mediante fórmulas de primer orden y usa el método de los tableaux para justificar su validez.

Lanzarote ama a la reina Ginebra.
El rey Arturo ama a Lanzarote.
Un caballero leal solamente ama si es amado.
La reina Ginebra solo es amada por caballeros.
El rey Arturo solamente ama a los leales.
Ningún caballero amado por la reina Ginebra ama al rey Arturo.
Quien siendo amado no ama es un felón.
$\therefore$ Lanzarote es un felón.

8.26. Formaliza la argumentación siguiente mediante fórmulas de primer orden y usa el método de los tableaux para justificar su validez.

Todas las porteñas alegres son amigas de marineros.
Ningún porteño feliz está casado con una porteña triste.
Los porteños casados con amigas de marineros son cornudos o marineros.
Hay porteños felices, casados con porteñas y que no son marineros.

$\therefore$ Algunos cornudos son felices.

8.27. Formaliza la argumentación siguiente mediante fórmulas de primer orden y usa el método de los tableaux para justificar su validez.

Los protozoos se dividen en pequeños, peludos y suaves.
Los naturalistas desprovistos de microscopio solamente observan protozoos grandotes.
Algunos naturalistas pobres observan protozoos ásperos.
Ningún pobre está provisto de microscopio.

$\therefore$ No faltan naturalistas que observen protozoos peludos.

8.28. Formaliza la argumentación siguiente mediante fórmulas de primer orden y usa el método de los tableaux para justificar su validez.

Los madrileños que no beben litrona son unos carrozas.
Un universitario carroza siempre es hijo de padre marxista
o madre feminista (o ambas cosas).
Los bebedores de litrona son unos degenerados.
Los marxistas son ilusos.
Las feministas son fanáticas.
Los individuos degenerados, ilusos o fanáticos son asociales.
Pedro Perplejo es un universitario madrileño.

$\therefore$ Algunos individuos son asociales.

CAPÍTULO 9

CÁLCULO LÓGICO CON RESOLUCIÓN

9.1. PREGUNTAS DE TEST

9.1. De entre las siguientes cláusulas, ¿cuál es un resolvente de $C_1 = \{p, q, r\}$ y $C_2 = \{\neg r, \neg p, s, t\}$?

(a) $\{q, r, \neg r, s, t\}$ (b) $\{p, q, r, s, t\}$ (c) $\square$

9.2. De entre las siguientes cláusulas, ¿cuál es un resolvente de $C_1 = \{p, t, \neg s\}$ y $C_2 = \{p, q, \neg s\}$?

(a) $\square$ (b) $\{t, q\}$ (c) ninguna de las anteriores

9.3. Si $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ es una fórmula proposicional en FNC y ψ es un resolvente de φ_1 y φ_2, ¿cuál de las siguientes situaciones puede darse?

(a) φ es satisfactible pero ψ no.

(b) $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es satisfactible pero ψ no.

(c) Ni φ ni ψ son satisfactibles.

9.4. Para que $R = \{p, q, r, t, u\}$ sea un resolvente de C_1 y C_2, donde $C_1 = \{p, q, r, s\}$, C_2 ha de ser:

(a) $\{p, q, r, s, t, u\}$ (b) $\{p, \neg s, t\}$ (c) ninguna de las anteriores

9.5. Sea la signatura $\Sigma = \{a/0, b/0, c/0, d/0, f/2, g/2\}$. ¿Cuál de las siguientes sustituciones es un unificador del conjunto de ecuaciones entre términos $\{f(x, g(a, y)) = f(b, g(z, v)), g(w, c) = g(d, c)\}$?

(a) $\sigma_1 = \{x/b, z/a, w/d\}$ (b) $\sigma_2 = \{x/b, z/a, v/y, w/d\}$ (c) $\sigma_3 = \{x/b, z/a, y/v\}$

9.6. Sean E y E' conjuntos de ecuaciones entre términos. Si σ es un unificador de E y ρ es un unificador de $E'\sigma$, entonces se puede garantizar que:

(a) σ es un unificador de $E'\sigma$.

(b) $\sigma\rho$ es un unificador de $E \cup E'$.

(c) ρ es un unificador de E.

9.7. Dada la signatura $\Sigma = \{a/0,\ f/1, g/1,\ P/3\}$, ¿cuál de las siguientes sustituciones es un umg del conjunto de literales $\{P(f(x), a, g(y)),\ P(z, a, g(f(v))),\ P(z, w, g(y))\}$?

(a) $\sigma = \{x/a, y/f(v), z/f(a), w/a\}$ (b) $\rho = \{z/f(x), y/f(v), w/a\}$ (c) no es unificable

9.8. Dada $\Sigma = \{a/0,\ f/1, g/1,\ P/2,\ Q/1,\ R/3\}$, un resolvente de $C_1 = \{P(x,\ f(a)),\ P(g(z), y),\ Q(a)\}$ y $C_2 = \{Q(a),\ R(a,\ f(u), v),\ \neg P(u,\ f(w))\}$ puede ser:

(a) $\{Q(a),\ R(a,\ f(g(z)), v)\}$

(b) $\{P(g(z),\ f(a)),\ R(a,\ f(g(z)), v),\ \neg P(u,\ f(w))\}$

(c) $\{P(x,\ f(a)),\ P(g(z), y),\ Q(a),\ \neg P(u,\ f(w))\}$

9.9. Sea $\Sigma = \{a/0,\ f/1,\ P/2,\ Q/1,\ S/2\}$. Para que $R = \{P(x, a),\ Q(f(a))\}$ sea un resolvente de C_1 y C_2, donde $C_1 = \{P(x, y),\ Q(f(y)),\ S(x, a),\ S(x, y)\}$, C_2 puede ser:

(a) $\{P(x_1, a), \neg S(x_1, y_1)\}$ (b) $\{P(x, a), \neg S(x, y)\}$ (c) $\{P(x_1, a), \neg Q(y_1)\}$

9.2. EJERCICIOS

9.10. Obtener la lista completa de resolventes que se pueden obtener a partir del conjunto de cláusulas $\{\{p, t, \neg q\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg$

9.11. Una cláusula es de Horn si contiene a lo sumo un literal no negado. Si R es el resolvente de dos cláusulas de Horn, demuestra que R también es una cláusula de Horn.

9.12. Sea $F = \{\{p, q, \neg r\}, \{\neg p\}, \{p, q, r\}, \{p, \neg q\}\}$. Demuestra que el conjunto F es insatisfactible utilizando resolución.

9.13. Utilizando resolución, demuestra que la fórmula $\varphi = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge r) \vee p$ es una tautología.

9.14. Si sale cara, yo gano; si sale cruz, tú pierdes. Demuestra que yo siempre gano.

9.15. Considera los siguientes enunciados:

φ_1: "Si Zape vigila la puerta y Don Pantuflo se descuida, entonces Zipi puede robar la tarta".

φ_2: "Si Zipi puede robar la tarta, entonces Zape vigila la puerta y Don Pantuflo se descuida".

φ_3: "Si Zape vigila la puerta, entonces Don Pantuflo no se descuida".

φ_4: "Zipi no puede robar la tarta".

Demuestra, utilizando resolución, que:

(a) El razonamiento que tiene como premisas los enunciados φ_1 y φ_3 y como conclusión el enunciado φ_4 no es válido.

(b) El razonamiento que tiene como premisas los enunciados φ_2 y φ_3 y como conclusión el enunciado φ_4 sí es válido.

9.16. Demuestra, utilizando el método de resolución, que la siguiente argumentación es correcta:

Los matrimonios podrían ser buenos, al menos durante un cierto tiempo, si hubiera en ellos armonía y satisfacción sexual. Pero para que esto ocurriera haría falta una educación que favoreciera la sexualidad, una experiencia sexual prenupcial y una emancipación con respecto a la moral convencional. Ahora bien: estos mismos factores, que son los que permitirían realizar buenos matrimonios, significan al mismo tiempo la condena de esta institución. Luego en los matrimonios no hay armonía y satisfacción sexual.

9.17. Habiendo desaparecido el collar de perlas finas de la Sra. Condesa, el Sr. Conde procede a interrogar a sus tres criados, que responden como sigue:

- *Agapito:* Ni Hilario ni yo hemos sido.
- *Bartolo:* Agapito está mintiendo.
- *Hilario:* Agapito no es el ladrón.

Suponiendo que los inocentes digan la verdad y que haya a lo sumo un culpable, utiliza resolventes para deducir cuál de los fámulos es el ladrón.

9.18. Sea el siguiente razonamiento:

Si los secuestradores se cansan, se ponen nerviosos.
Si los secuestradores están armados y se ponen nerviosos,
la vida de los rehenes corre peligro.
Los secuestradores están cansados y armados.

$\therefore$ Por consiguiente, la vida de los rehenes corre peligro.

Demuestra que la argumentación es válida utilizando el método de resolución.

9.19. Comprueba si son unificables los siguientes conjuntos de literales. En caso afirmativo, calcula su unificador de máxima generalidad.

(a) $\{P(g(y), f(x, h(x), y)), P(x, f(g(z), w, z))\}$

(b) $\{P(x, g(f(a)), f(x)), P(f(a), g(y), y), P(y, z, y)\}$

(c) $\{P(x, f(g(y), b)), P(h(a, y), f(g(f'(x)), b))\}$

(d) $\{P(x, z), P(g(f(z)), g(b)), P(g(f(w)), w)\}$

9.20. Dada la signatura $\Sigma = \{g/1, Q/1, R/2\}$, demuestra que la fórmula

$$\forall x \forall y((R(x, y) \vee Q(x)) \wedge \neg R(x, g(x)) \wedge \neg Q(y))$$

es insatisfactible.

9.21. Construye una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausuladas del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, donde:

- $\varphi_1 = \forall x(\exists y P(x, y) \vee \neg Q(x))$
- $\varphi_2 = \forall x(R(x) \rightarrow (T(x) \vee Q(x)))$
- $\varphi_3 = \forall y(T(y) \rightarrow \exists z P(y, z))$
- $\varphi_4 = \exists z(\forall y \neg P(z, y) \wedge R(z))$

9.22. Construye una derivación de la cláusula vacía a partir de las formas clausuladas del conjunto de fórmulas $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, donde:

- $\varphi_1 = M(a)$
- $\varphi_2 = \forall x(M(x) \to (M(f(x)) \vee M(g(x))))$
- $\varphi_3 = \forall x(Q(x, f(x)) \wedge Q(x, g(x)))$
- $\varphi_4 = \forall x(\neg M(x) \vee \forall y \neg Q(y, x))$

9.23. Demuestra utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta:

El profesor es feliz si a todos sus estudiantes les gusta la lógica.
Luego un profesor es feliz si no tiene estudiantes.

9.24. Demuestra utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta:

Raúl es miope.
Cuando alguien es miope, o su padre o su madre resulta serlo también.
Todo el mundo ama a su padre y a su madre.

$\therefore$ Algún miope es amado por alguien.

9.25. Sea la argumentación siguiente:

Los marcianos no informáticos aprecian cualquier cosa más que un ordenador.
Los marcianos informáticos aprecian cualquier cosa más que un ordenador lento.
Hay ordenadores rápidos y lentos.

$\therefore$ Hay al menos un ordenador tal que todo marciano aprecia alguna cosa más que a él.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.26. Sea la argumentación siguiente:

Algunos banqueros son amigos de todos los políticos.
Cualquier banquero explota a algún político.
Quienquiera que explota a un amigo es un impresentable.

$\therefore$ Algunos impresentables son banqueros.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.27. Demuestra utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta:

Los jefes de estado solo conservan el poder si contemporizan
con el presidente de una nación poderosa.
Todos los jefes de estado son políticos y algunos de ellos conservan el poder.
Los presidentes de naciones poderosas no son cándidos y justifican la guerra.
Quien justifica la guerra es un cínico o un cándido.

$\therefore$ Algunos políticos contemporizan con un cínico.

9.28. Sea la argumentación siguiente:

Si un dragón tiene un hijo que sabe volar entonces es feliz.
Los dragones verdes saben volar.
Los dragones que no son verdes son rosa.
Quien tiene un hijo dragón es dragón.
Pepe es un dragón y su padre es Manolo.

∴ Existe alguien que o es rosa o es hijo de alguien que es feliz.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.29. Sea la argumentación siguiente:

Un conejo que no come se muere.
Todo conejo tragón es dientón o borracho.
Ni los muertos, ni los borrachos ni los dientones huelen bien.
Los conejos existen.

∴ No todo el mundo huele bien.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.30. Sea la argumentación siguiente:

Todos los alienígenas son canijos.
Ningún marciano se emborracha.
Cualquier individuo canijo y desgraciado se emborracha.
Algunos alienígenas son desgraciados.

∴ No todos los alienígenas son marcianos.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.31. Sea la argumentación siguiente:

Los madrileños que no beben litrona son unos carrozas.
Un universitario carroza siempre es hijo de padre marxista
o madre feminista (o ambas cosas).
Los bebedores de litrona son unos degenerados.
Los marxistas son ilusos.
Las feministas son fanáticas.
Los individuos degenerados, ilusos o fanáticos son asociales.
Pedro Perplejo es un universitario madrileño.

∴ Algunos individuos son asociales.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.32. Sea la argumentación siguiente:

Una empresa no invierte en investigación a menos que haya contratado a algún doctor.
Para ser doctor es necesario haber hecho una tesis doctoral.
Todo aquel que ha hecho una tesis doctoral ha sido alumno de doctorado.
Las empresas nunca contratan a quienes han sido alumnos de doctorado.

∴ Por desgracia, no existen empresas que inviertan en investigación.

Formaliza la argumentación y demuestra que es correcta.

9.33. Una refutación por resolución se llama *binaria* si en cada paso de resolución se utiliza un único literal de cada cláusula para realizar la unificación (en otras palabras, si $m = n = 1$ en la definición de resolvente). Muestra mediante un contraejemplo que la resolución binaria es incompleta en general.

CAPÍTULO 10

EJERCICIOS PROPUESTOS

10.1. PREGUNTAS DE TEST DE LÓGICA PROPOSICIONAL

10.1. El número de apariciones de conectivas binarias en la fórmula $\neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ es:

(a) mayor que 2 (b) igual a 2 (c) menor que 2

10.2. El número de subfórmulas atómicas de la fórmula $\neg p \wedge q \rightarrow p \vee q$ es:

(a) mayor que 3 (b) igual a 3 (c) menor que 3

10.3. La profundidad de la fórmula $\neg(\neg p \leftrightarrow (q \wedge \neg r))$ es:

(a) mayor que 3 (b) igual a 3 (c) menor que 3

10.4. Todas las valoraciones v tales que $[\![(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg r]\!]^v = 0$ cumplen:

(a) $v(p) = 0$ (b) $v(q) = 0$ (c) $v(r) = 1$

10.5. Todas las valoraciones v tales que $[\![(p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \wedge r)]\!]^v = 1$ cumplen:

(a) $v(p) = 0$ y $v(r) = 1$ (b) $v(p) = 1$ y $v(r) = 0$ (c) $v(q) = 1$ y $v(r) = 1$

10.6. Sabiendo que $[\![\neg p \rightarrow q \rightarrow p]\!]^v = 0$, se puede asegurar:

(a) $v(p) = 1$ (b) $v(p) = 0$ y $v(q) = 1$ (c) $v(q) = 0$

10.7. ¿Cuál de las tres fórmulas proposicionales siguientes es una tautología?

(a) $\neg p \rightarrow p \rightarrow q$ (b) $p \rightarrow p \rightarrow q$ (c) $\neg q \rightarrow p \rightarrow q$

10.8. La fórmula proposicional $\neg(p \rightarrow q \vee p)$ es:

(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia

10.9. La fórmula proposicional $\neg(p \to q \to p)$ es:

(a) contingencia (b) tautología (c) contradicción

10.10. La fórmula proposicional $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge p \wedge \neg q$ es:

(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia

10.11. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = \neg(p \to q)$ y $\psi = q \wedge \neg p$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ni (a) ni (b)

10.12. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = q \to p$ y $\psi = \neg p \vee q$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ni (a) ni (b)

10.13. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = \neg(p \wedge \neg q)$ y $\psi = p \vee \neg q$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ni (a) ni (b)

10.14. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = p \leftrightarrow q$ y $\psi = \neg q \vee p$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) ni (a) ni (b)

10.15. ¿Cuál de las tres afirmaciones siguientes es verdadera?

(a) $\neg p \to q \models p \vee q$ (b) $\neg p \to q \models \neg p \vee \neg q$ (c) $\neg p \to q \models \neg p \wedge \neg q$

10.16. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = \neg(p \leftrightarrow q)$ y $\psi = p \vee q$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

10.17. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = p \to q \wedge r$ y $\psi = p \to q \vee r$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

10.18. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = p \leftrightarrow q$ y $\psi = \neg p \vee q$, se cumple:

(a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

10.19. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = \neg(p \to q)$ y $\psi = \neg p \to q \to p$, se cumple:

(a) $\psi \models \varphi$ (b) $\varphi \sim \psi$ (c) $\varphi \models \psi$

10.20. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = p \leftrightarrow \neg q$ y $\psi = \neg p \wedge q$, se cumple:

(a) $\psi \models \varphi$ (b) $\varphi \models \psi$ (c) $\varphi \sim \psi$

10.21. ¿Cuál de las tres fórmulas siguientes es consecuencia lógica de $\Phi = \{p \to q \vee r,\ \neg q \wedge \neg r\}$?

(a) $p \vee q$ (b) $q \vee r$ (c) $\neg p$

10.22. La fórmula proposicional $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ es lógicamente equivalente a:

(a) $p \vee q$ (b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (c) $q \rightarrow p$

10.23. Dos fórmulas proposicionales φ y ψ son lógicamente equivalentes si y solo si se cumple:

(a) $Mod(\neg\varphi) \cap Mod(\psi) = \varnothing$ (b) $Mod(\varphi) \cap Mod(\neg\psi) = \varnothing$ (c) $Mod(\varphi) = Mod(\psi)$

10.24. ¿Cuál de los tres conjuntos de conectivas siguientes es funcionalmente completo?

(a) $\{\wedge, \vee\}$ (b) $\{\neg, \rightarrow\}$ (c) $\{\neg, \leftrightarrow\}$

10.25. ¿Cuál de los tres conjuntos de conectivas siguientes es funcionalmente completo?

(a) $\{\neg, \wedge\}$ (b) $\{\wedge\}$ (c) $\{\vee\}$

10.26. ¿Cuál de las tres fórmulas siguientes sirve como FNC de la fórmula $\neg p \rightarrow q \wedge \neg r$?

(a) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$ (b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ (c) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$

10.27. Dada la fórmula proposicional $\varphi = \neg(p \vee \neg q \rightarrow p \wedge \neg r)$, $\text{FNC}(\varphi)$ puede ser:

(a) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$ (b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ (c) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$

10.28. Dada la fórmula proposicional $\varphi = \neg(p \leftrightarrow q \wedge r)$, $\text{FND}(\varphi)$ puede ser:

(a) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
(b) $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)$
(c) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)$

10.29. Dada la fórmula proposicional $\varphi = \neg((\neg p \rightarrow r) \rightarrow p \wedge r)$, $\text{FND}(\varphi)$ puede ser:

(a) $\neg p \wedge \neg r$ (b) $(\neg p \wedge r) \vee (\neg r \wedge p)$ (c) $\neg p \vee \neg r$

10.30. Sea $\Phi = \{p \rightarrow q \rightarrow \neg r, p \wedge q, r\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) es abierto (b) es cerrado (c) no tiene ramas cerradas

10.31. Sea $\Phi = \{p \rightarrow q \rightarrow \neg r, \neg p \vee \neg q, r\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) no tiene ramas cerradas (b) es cerrado (c) es abierto

10.32. Sea $\Phi = \{\neg(p \leftrightarrow \neg q), \neg p, q\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) es cerrado (b) es abierto (c) tiene tres ramas

10.33. Sea $\Phi = \{p \rightarrow q \rightarrow r, p \wedge \neg q, \neg r\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) no tiene ramas cerradas (b) tiene ramas abiertas (c) es cerrado

10.34. Sea $\Phi = \{p \rightarrow \neg q, \neg p, q \vee r\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) no tiene ramas cerradas (b) tiene ramas abiertas (c) es cerrado

10.35. Sea $\Phi = \{\neg(p \leftrightarrow q), \neg p \wedge \neg q\}$. Cualquier tableau terminado para Φ cumple que:

(a) no tiene ramas cerradas (b) tiene ramas abiertas (c) es cerrado

10.36. Sea T un tableau terminado construido a partir de la fórmula proposicional φ. Si todas las ramas de T están abiertas, ¿qué se puede asegurar?

(a) φ es una tautología (b) φ es una contradicción (c) φ es satisfactible

10.2. EJERCICIOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

10.37. Sea L_Σ el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional para una signatura Σ dada. Para cada $\varphi \in L_\Sigma$, sea $bn(\varphi)$ el número de apariciones de conectivas binarias en φ, sea $pf(\varphi)$ la profundidad del árbol que representa la estructura sintáctica de φ, sea $cn(\varphi)$ el número de conectivas que incluye φ (sin contar las conectivas 0-arias $\bot$, $\top$ y contando cada una de las conectivas restantes tantas veces como aparezca repetida) y sea $at(\varphi)$ el número de subfórmulas atómicas que incluye φ, contando cada una tantas veces como aparezca repetida.

(a) Construye una fórmula proposicional φ que cumpla $bn(\varphi) = 4$ e indica cuánto vale $at(\varphi)$.

(b) Construye una fórmula φ que cumpla $pf(\varphi) = 3$ y $cn(\varphi) = 3$.

(c) Construye una fórmula φ que cumpla $pf(\varphi) = 2$ y $at(\varphi) = 4$.

(d) Razonando por inducción sobre la estructura sintáctica de φ, demuestra que cualquier fórmula $\varphi \in L_\Sigma$ cumple que $at(\varphi) \leq 2^{pf(\varphi)}$.

10.38. Definimos la conectiva binaria # mediante la siguiente tabla:

p	0	0	1	1
q	0	1	0	1
$p \# q$	0	1	1	0

Expresa la conectiva binaria # utilizando $\vee$ y $\neg$.

10.39. Demuestra que ninguno de los conjuntos de conectivas indicados es funcionalmente completo:

(a) $\{\wedge\}$ (b) $\{\vee\}$ (c) $\{\rightarrow\}$ (d) $\{\leftrightarrow\}$

10.40. Sea L_Σ el conjunto de las fórmulas de la lógica proposicional para una signatura Σ que se supone conocida y supongamos fijados dos símbolos de proposición diferentes $p, q \in \Sigma$.

Para cada fórmula $\varphi \in L_\Sigma$ escribiremos φ' para indicar la fórmula que resulta de sustituir cada aparición de p en φ por q y viceversa. Por ejemplo, para $\varphi = ((p \vee \neg r) \rightarrow \neg(q \wedge \neg p))$, resulta $\varphi' = ((q \vee \neg r) \rightarrow \neg(p \wedge \neg q))$.

Además, para cualquier Σ-valoración v escribiremos v' para indicar la Σ-valoración que cumple $v'(p) = v(q)$, $v'(q) = v(p)$ y $v'(r) = v(r)$ para cualquier otro símbolo de proposición $r \in \Sigma \setminus \{p, q\}$.

(a) Plantea una definición recursiva de la operación que construye φ' a partir de φ.

(b) Razonando por inducción sobre φ, demuestra que para cualquier fórmula $\varphi \in L_\Sigma$ se cumple $[\![\varphi']\!]^v = [\![\varphi]\!]^{v'}$.

10.41. Si q es un átomo que no aparece en φ, demuestra que si $\models \varphi \rightarrow \psi$ entonces $\models \varphi \rightarrow \psi[q/\sigma]$, donde $\varphi, \psi, \sigma \in L_\Sigma$ y $\psi[q/\sigma]$ se obtiene reemplazando todas las apariciones de q en ψ por σ.

10.42. Para las tres fórmulas proposicionales que siguen construye sus tablas veritativas y averigua cuál es tautología, cuál contradicción y cuál contingencia. Para esta última escribe las valoraciones que la hagan cierta y las que la hagan falsa.

(a) $\varphi_1 = ((p \to q) \wedge (r \to \neg q)) \to (p \vee q \to r)$

(b) $\varphi_2 = ((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \vee q \to r)$

(c) $\varphi_3 = \neg(q \to p) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p) \wedge (r \to q)$

10.43. Para las tres fórmulas proposicionales que siguen construye sus tablas veritativas y averigua cuál es tautología, cuál contradicción y cuál contingente. Para esta última escribe las valoraciones que la hagan cierta y las que la hagan falsa.

(a) $\varphi_1 = ((p \to \neg r) \wedge (\neg q \to \neg p)) \to (p \wedge q \to \neg r)$

(b) $\varphi_2 = ((\neg p \to q) \vee (\neg q \to r)) \to (\neg p \vee \neg q \to r)$

(c) $\varphi_3 = ((\neg p \to q) \vee (\neg q \to r)) \wedge (\neg r \wedge \neg(p \vee q))$

10.44. Suponiendo que φ, ψ y χ son fórmulas de la lógica proposicional, demuestra que

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi),$$

(a) usando una tabla de verdad,

(b) mediante equivalencias lógicas y

(c) usando un único tableau.

¿Continúa siendo cierta la equivalencia lógica anterior si φ, ψ y χ son fórmulas de la lógica de primer orden? ¿Por qué?

10.45. Desarrolla un tableau para $(p \to q) \to (p \vee q)$. ¿Puedes afirmar que es una tautología?

10.46. Responde a los apartados siguientes:

(a) Sea $\varphi = (p \leftrightarrow \neg r) \to ((q \to \neg p) \wedge \neg q)$ y v una valoración tal que $v(p) = 0$ y $v(r) = 1$. ¿Qué valor debe tener $v(q)$ para que se cumpla $[\![\varphi]\!]^v = 1$?

(b) Aplicando la definición de consecuencia lógica y construyendo una valoración que sirva de contraejemplo, demuestra que $p \vee q \to r,\ \neg r \not\models p$.

(c) Aplicando la definición de consecuencia lógica y sin usar ni tablas veritativas ni tableaux, demuestra que $p \vee q \to r,\ \neg r,\ r \models p$.

(d) Calculando paso a paso con leyes de equivalencia de la lógica proposicional, demuestra la equivalencia lógica $((p \to q) \to p \wedge q) \sim p$.

(e) Transforma la fórmula $p \to (q \leftrightarrow \neg r)$ a FND utilizando un tableau.

(f) Transforma la fórmula $p \to (q \leftrightarrow \neg r)$ a FNC utilizando un tableau.

10.47. Una de las dos fórmulas proposicionales que siguen es una tautología y la otra no lo es. Construyendo tableaux, decide cuál es cuál y transforma la que no es tautología a forma normal conjuntiva.

(a) $\varphi_1 = (\neg p \to q) \vee (\neg q \to r) \to (\neg r \to p \vee q)$

(b) $\varphi_2 = (\neg p \to q) \vee (\neg q \to r) \to (\neg p \vee \neg q \to r)$

10.48. Sean φ y ψ las dos fórmulas de la lógica proposicional indicadas a continuación:

$$\varphi = (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)$$
$$\psi = (p \vee q \to r) \wedge (q \vee r \to p) \wedge (r \vee p \to q)$$

Resuelve los apartados siguientes:

(a) Construye la tabla veritativa de φ.

(b) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula φ' lógicamente equivalente a φ que solo utilice las conectivas $\neg$ y $\wedge$.

(c) Construye un tableau terminado para ψ.

(d) ¿Se cumple $\varphi \sim \psi$ o no? Razona tu respuesta basándote en los resultados de los apartados (a) y (c), sin hacer más cálculos.

10.49. Considera la fórmula proposicional $\varphi = \neg(p \wedge q \leftrightarrow q \vee r)$ y resuelve los tres apartados siguientes:

(a) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula lógicamente equivalente a φ que solo utilice las conectivas $\neg$ e $\to$.

(b) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula lógicamente equivalente a φ que esté en forma normal conjuntiva.

(c) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, transforma la fórmula obtenida en el apartado anterior a otra fórmula lógicamente equivalente a ella que esté en forma normal disyuntiva.

10.50. (a) Dada la fórmula $\varphi = \neg(r \wedge \neg q \to \neg p \vee q)$, construye razonadamente dos valoraciones v y v' tales que v sea modelo de φ y v' no lo sea.

(b) Considera las dos fórmulas proposicionales $\varphi = p \wedge r$ y $\psi = q \to r$. Demuestra que una de ellas es consecuencia lógica de la otra utilizando el método de los tableaux.

(c) Usando las leyes de equivalencia lógica, transforma la fórmula $\varphi = (p \to q) \wedge (p \vee r)$ en otra equivalente que utilice únicamente las conectivas del conjunto $\{\neg, \vee\}$.

(d) Considera las fórmulas $\varphi = (\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$ y $\varphi' = ((p \to q) \to p) \to p$. Estudia si φ y φ' son lógicamente equivalentes. En caso afirmativo demuestra la equivalencia y en caso negativo construye una valoración que sirva de contraejemplo.

(e) Usando las leyes de equivalencia lógica, transforma la fórmula $\neg((p \to r) \to ((q \to r) \to (\neg p \vee \neg q \to r)))$ en una fórmula en FNC lógicamente equivalente.

(f) Transforma la fórmula $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$ a FND utilizando un tableau.

10.51. (a) Dado el conjunto de fórmulas $\Phi = \{p \vee q \to \neg r, \neg p, \neg q \wedge r\}$, construye razonadamente dos valoraciones v y v' tales que v sea modelo de Φ y v' no lo sea.

(b) Considera las dos fórmulas proposicionales $\varphi = \neg p \vee q \to \neg r$ y $\psi = r \to p$. Demuestra que una de ellas es consecuencia lógica de la otra utilizando el método de los tableaux.

(c) Usando las leyes de equivalencia lógica, transforma la fórmula $\varphi = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ en otra equivalente que utilice únicamente las conectivas $\neg$ y $\to$.

(d) Considera las dos fórmulas proposicionales $\varphi = p \to (q \to p \wedge q)$ y $\varphi' = (p \to q) \to p \wedge q$. Estudia si φ y φ' son lógicamente equivalentes. En caso afirmativo demuestra la equivalencia y en caso negativo construye una valoración que sirva de contraejemplo.

(e) Usando las leyes de equivalencia lógica, transforma la fórmula $(p \leftrightarrow q) \to r$ en una fórmula en FNC lógicamente equivalente.

(f) Construye una FND de la fórmula $\neg\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ por medio de un tableau.

10.52. Considera la fórmula proposicional $\varphi = (p \to \neg q \wedge \neg r) \wedge (q \to \neg p \wedge \neg r) \wedge (r \to \neg p \wedge \neg q)$ y resuelve los dos apartados siguientes:

(a) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula en FNC lógicamente equivalente a φ y simplifícala lo más posible.

(b) Construye la tabla veritativa de φ y construye a partir de ella una fórmula en FND lógicamente equivalente a φ. Seguidamente, simplifica lo más posible la FND que hayas obtenido, aplicando la ley (*Dis*).

10.53. Considera las fórmulas proposicionales siguientes:

$$\varphi = p \wedge q \to r \qquad \psi = p \to (q \to r) \qquad \eta = (p \to q) \to r$$

(a) Utilizando las leyes de equivalencia lógica, demuestra que $\varphi \sim \psi$.

(b) Construyendo un tableau, demuestra que $\eta \models \varphi$.

(c) Construyendo otro tableau, calcula una FND equivalente a $\varphi \wedge \neg\eta$ y simplifícala lo más posible.

(d) Utilizando el tableau del apartado anterior, razona si es cierto o no que $\varphi \sim \eta$.

10.54. Dada la fórmula proposicional $\varphi = (p \to q) \to ((r \to \neg q) \to r)$, resuelve los apartados siguientes:

(a) Calcula mediante el uso de un tableau una fórmula φ_1 en FND tal que $\varphi_1 \sim \varphi$. Usando leyes de la equivalencia lógica, simplifica φ_1 de manera que tenga dos cláusulas.

(b) Calcula mediante el uso de un tableau una fórmula φ_2 en FNC tal que $\varphi_2 \sim \varphi$. Usando leyes de la equivalencia lógica, simplifica φ_2 de manera que tenga dos cláusulas.

(c) Usando leyes de la equivalencia lógica, calcula $\varphi_3 \sim \varphi_1$ que esté formada utilizando solamente las conectivas $\neg$ y $\vee$.

(d) Usando leyes de la equivalencia lógica, calcula $\varphi_4 \sim \varphi_1$ que esté formada utilizando solamente las conectivas $\neg$ y $\wedge$.

10.55. Considera la siguiente argumentación:

Si Carpanta está hambriento y no tiene dinero, entonces pide limosna.
Si Carpanta no tiene dinero, entonces no pide limosna.

$\therefore$ Si Carpanta está hambriento entonces tiene dinero.

(a) Construye una signatura Σ y tres fórmulas φ_1, φ_2, ψ pertenecientes al lenguaje de la lógica proposicional L_Σ, tales que φ_1 y φ_2 formalicen las dos premisas y ψ formalice la conclusión de la argumentación. Explica el significado pretendido para cada uno de los símbolos de proposición utilizados en la signatura Σ.

(b) Aplicando paso a paso leyes conocidas de equivalencia de la lógica proposicional, transforma la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ a fórmulas equivalentes en FND y FNC lo más simples que puedas.

(c) Construyendo un tableau terminado, demuestra que la argumentación es válida, es decir, la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

(d) Construyendo otro tableau terminado y extrayendo de él una valoración contraejemplo, demuestra que la argumentación deja de ser válida si la conclusión se cambia por el enunciado más sencillo "Carpanta tiene dinero".

10.56. En la residencia psiquiátrica de Miraflores hay tres internos llamados Aníbal, Braulio y Ciriaco. En todos los apartados hay que utilizar la signatura $\Sigma = \{p, q, r\}$, entendiendo que: p formaliza el enunciado “Aníbal está loco”; q formaliza el enunciado “Braulio está loco”; y r formaliza el enunciado “Ciriaco está loco”.

(a) Construye fórmulas proposicionales φ_1, φ_2, φ_3 y φ_4 que sirvan como formalizaciones respectivas de los siguientes enunciados:

E_1: “Si cualquiera de los tres internos está loco, también lo están los otros dos”.

E_2: “Alguno de los tres internos está cuerdo”.

E_3: “Aníbal está cuerdo si y solo si Braulio y Ciriaco están cuerdos también”.

E_4: “Alguno de los tres internos está loco”.

Construye una tabla veritativa con columnas para las cuatro fórmulas y úsala para explicar que cada fórmula formaliza correctamente el enunciado que le corresponde.

(b) Usando las fórmulas y la tabla construidas en el apartado anterior, demuestra que el razonamiento que tiene como premisas los enunciados E_1 y E_2 y como conclusión el enunciado E_3 es válido.

(c) Usando las fórmulas y la tabla construidas en el apartado anterior, demuestra que el razonamiento que tiene como premisas los enunciados E_1 y E_2 y como conclusión el enunciado E_4 no es válido.

10.57. Un naturalista sale al campo y encuentra tres conejos. Buen conocedor de las costumbres de los animales, el naturalista sabe que si uno cualquiera de los tres conejos huye, también huirán los otros dos. Se pregunta si será válido concluir que ninguno de los tres conejos va a huir.

(a) Formaliza las premisas “si uno cualquiera de los tres conejos huye, también huirán los otros dos” y la conclusión “ninguno de los tres conejos huye” mediante fórmulas de la lógica proposicional.

(b) Construyendo un tableau, demuestra que (en contra de los deseos del naturalista) la conclusión no se deduce de las premisas.

(c) ¿Qué premisa habría que añadir para que sí sea posible deducir la conclusión? Descúbrelo inspeccionando el tableau del apartado (b), añade la nueva premisa y completa otro tableau que demuestre la conclusión.

10.58. En un juicio se ha llamado a declarar a tres testigos. Considera la signatura de la lógica de proposiones $\Sigma = \{p, q, r\}$, entendiendo que: p formaliza el enunciado “el primer testigo miente”; q formaliza el enunciado “el segundo testigo miente”; y r formaliza el enunciado “el tercer testigo miente”.

(a) Considera las dos Σ-fórmulas

$$\varphi = (p \to q \lor r) \land (q \to p \lor r) \land (r \to p \lor q)$$
$$\psi = (\neg p \to q \land r) \land (\neg q \to p \land r) \land (\neg r \to p \land q)$$

y los dos enunciados

“Si hay algún testigo mentiroso, entonces hay más de uno.”
“Si hay algún testigo veraz, entonces hay solo uno.”

Construye las tablas veritativas de φ y ψ, y responde razonadamente las cuatro preguntas siguientes:

1. ¿Cuál de las dos fórmulas formaliza cada uno de los dos enunciados?
2. ¿Se cumple $\varphi \models \psi$?
3. ¿Se cumple $\psi \models \varphi$?
4. ¿Se cumple $\varphi \sim \psi$?

(b) Calcula $\mathrm{FNC}(\psi)$ mediante una serie de pasos de equivalencia lógica. Simplifica lo más posible la fórmula obtenida.

(c) Calcula $\mathrm{FND}(\neg\varphi)$ mediante un tableau.

10.3. PREGUNTAS DE TEST DE LÓGICA DE PRIMER ORDEN

10.59. La cadena de símbolos $\forall x\, R(x,\ R(x, x))$ formada usando la signatura $\Sigma = \{R/2\}$

(a) es una fórmula de primer orden (b) no es una fórmula de primer orden (c) no se puede saber

10.60. La cadena de símbolos $\forall x(x = P(x))$ formada usando la signatura $\Sigma = \{P/2\}$

(a) no es una fórmula de primer orden (b) es una fórmula de primer orden (c) no se puede saber

10.61. La cadena de símbolos $\forall x\, R(x,\ f(y)) \wedge \neg\exists y(f(z) = y)$ formada usando la signatura Σ definida como $F_\Sigma = \{f/1\}$ y $P_\Sigma = \{R/2\}$

(a) no es una fórmula de primer orden (b) es una fórmula de primer orden (c) no se puede saber

10.62. El conjunto de variables libres de la fórmula $\forall x(P(x) \rightarrow R(x, y)) \vee \exists y(R(x, y) \rightarrow P(x))$ es:

(a) $\varnothing$ (b) $\{x\}$ (c) $\{x, y\}$

10.63. El conjunto de variables libres de la fórmula $\forall x(\exists y R(x, y) \rightarrow P(x))$ es:

(a) $\{x, y\}$ (b) $\{x\}$ (c) $\varnothing$

10.64. El conjunto de variables libres de la fórmula $\forall x(\exists y(f(x) = y) \rightarrow \forall z R(x,\ f(z))) \rightarrow P(x)$ es:

(a) $\{x\}$ (b) $\{x, z\}$ (c) $\varnothing$

10.65. Dada la fórmula $\varphi = \exists y(x = h(y, y))$ y el término $t = m(y)$, la sustitución $\varphi[x/t]$ da como resultado:

(a) $\exists z(m(y) = h(z, z))$ (b) $\exists y(m(y) = h(y, y))$ (c) $\exists x(m(x) = h(y, y))$

10.66. Dada la fórmula $\varphi = \neg P(x) \vee \forall x P(x)$ y el término $t = g(y)$, la sustitución $\varphi[x/t]$ da como resultado:

(a) $\neg P(g(y)) \vee \forall y P(g(y))$ (b) $\neg P(g(y)) \vee \forall x P(x)$ (c) $\neg P(g(y)) \vee \forall z P(g(y))$

10.67. Dada la fórmula $\varphi = \neg P(x) \rightarrow \forall x R(x, y)$ y el término $t = g(x, y)$, la sustitución $\varphi[x/t]$ da como resultado:

(a) $\neg P(g(x, y)) \rightarrow \forall x R(g(x, y), g(x, y))$

(b) $\neg P(g(x, y)) \rightarrow \forall x R(x, y)$

(c) $\neg P(g(x, y)) \rightarrow \forall x R(x, u)$

10.68. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura con un único símbolo de predicado binario R y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura tal que su universo de discurso es $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) y $R^{\mathcal{A}} = \{(a, b), (b, b), (b, a)\}$. La fórmula $\forall x(R(x, y) \wedge R(y, x))$ se hace cierta en $\mathcal{A}$ cuando el valor que un estado σ le asigna a la variable libre y es

(a) a (b) b (c) cualquiera de los dos

10.69. Sea $\Sigma = \{f/2\}$ una signatura con un único símbolo de función binario f y sea $\mathcal{A}$ una Σ-estructura tal que su universo de discurso es $A = \{a, b\}$ (siendo a y b distintos) y $f^{\mathcal{A}}(a) \neq f^{\mathcal{A}}(b)$. La fórmula $\forall x(f(x) = y)$ se hace falsa en $\mathcal{A}$ cuando el valor que un estado σ le asigna a la variable libre y es

(a) a (b) b (c) cualquiera de los dos

10.70. Cualquier modelo de la fórmula de primer orden $\forall x \forall y \forall z(x \neq y \wedge y \neq z)$ tiene en su dominio

(a) más de un elemento (b) más de dos elementos (c) exactamente dos elementos

10.71. Cualquier modelo de la fórmula de primer orden $\forall x \exists y \exists z(x = y \vee x = z)$ tiene en su dominio

(a) exactamente un elemento (b) más de un elemento (c) ninguna de las anteriores

10.72. La fórmula de primer orden $R(x, x) \wedge \forall x \neg R(x, x)$ es:

(a) lógicamente válida (b) contradictoria (c) contingente

10.73. Dadas las fórmulas de primer orden $\varphi = \forall x R(x, x)$ y $\psi = \forall x \exists y R(x, y)$, se cumple:

(a) $\varphi \sim \psi$ (b) $\varphi \models \psi$ (c) $\psi \models \varphi$

10.74. Sea $\Phi = \{\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene tres ramas (b) es cerrado (c) tiene alguna rama abierta

10.75. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \vee \neg Q(x)), \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente tiene:

(a) una rama abierta (b) dos ramas abiertas (c) tres ramas abiertas

10.76. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \wedge Q(x)), \exists x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene tres ramas (b) es cerrado (c) tiene alguna rama abierta

10.77. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene tres ramas (b) es cerrado (c) tiene alguna rama abierta

10.78. Sea $\Phi = \{\forall x(P(x) \vee \neg Q(x)), \forall x(P(x) \wedge Q(x))\}$. Un tableau terminado para Φ, necesariamente:

(a) tiene cuatro ramas (b) es cerrado (c) tiene alguna rama abierta

10.4. EJERCICIOS DE LÓGICA DE PRIMER ORDEN

10.79. Define mediante recursión estructural sobre fórmulas de la lógica de primer orden las tres operaciones siguientes:

(a) $e(\varphi)$, que cuente el número de cuantificadores existenciales en φ,

(b) $u(\varphi)$, que cuente el número de cuantificadores universales en φ, y

(c) $c(\varphi)$, que cuente el número total de cuantificadores en φ.

Demuestra por inducción estructural que $c(\varphi) = e(\varphi) + u(\varphi)$.

10.80. Sea $\Sigma = \{</2\}$ una signatura donde $<$ es un símbolo de predicado binario. Escribe fórmulas en lógica de primer ordenque tengan como variables libres las que aparezcan en el enunciado y que al ser interpretadas en conjuntos parcialmente ordenados signifiquen:

(a) x es el máximo,

(b) no hay elementos entre x e y,

(c) x es sucesor (respectivamente predecesor) inmediato de y.

10.81. Dada la signatura Σ definida como $F_\Sigma = \{0/0\}$ y $P_\Sigma = \{+/2, */2, s/1\}$, construye Σ-fórmulas que tengan como variables libres las que aparezcan en el enunciado y que al ser interpretadas en $\mathbb{N}$ signifiquen lo siguiente:

(a) x es un número par,

(b) $z = \text{máx}\{x, y\}$,

(c) $z = \text{mcd}(x, y)$, es decir, z es el máximo común divisor de x e y.

10.82. Dada la fórmula $\exists x(x < y \wedge y < z \wedge \forall w(y < w \rightarrow x < w))$ sobre la signatura $\Sigma = \{</2\}$,

(a) Determina sus variables libres y ligadas.

(b) Interprétala en $\langle(\mathbb{Q}, <), \sigma\rangle$ con $\sigma(x) = 2$, $\sigma(y) = 1$ y $\sigma(z) = 6$. ¿Es cierta?

10.83. Dada la fórmula $\varphi = \exists x\exists y\exists z(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \wedge \neg P(z, x))$, indica cuáles de las siguientes estructuras son modelos de φ:

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, P^{\mathcal{A}})$, siendo $P^{\mathcal{A}} = \{(m, n) \mid m < n \text{ con } m, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, P^{\mathcal{B}})$, siendo $P^{\mathcal{B}} = \{(m, m + 1) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\mathcal{C} = (\mathcal{P}(\mathbb{N}), P^{\mathcal{C}})$, siendo $P^{\mathcal{C}} = \{(A, B) \mid A \subseteq B \text{ con } A, B \subseteq \mathbb{N}\}$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es el conjunto de partes de $\mathbb{N}$.

10.84. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura formada por un único símbolo de predicado binario R. Considera las dos Σ-fórmulas cerradas $\varphi_1 = \exists x\forall y R(x, y)$ y $\varphi_2 = \forall x\exists y R(x, y)$. Sea $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ la Σ-estructura definida como:

- $A = \{a, b, c\}$,
- $R^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}$.

Justifica apropiadamente si es modelo o no de cada una de las dos fórmulas anteriores.

10.85. Sea $\Sigma_{rel} = \{R/2\}$ una signatura formada por un único símbolo de predicado binario y la Σ_{rel}-fórmula

$$\varphi = \exists x\forall y(\neg R(y, y) \rightarrow R(x, y)).$$

Construye cuatro Σ_{rel}-estructuras diferentes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ tales que:

(a) El universo de discurso de $\mathcal{A}_1$ es $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\mathcal{A}_1 \models \varphi$.

(b) El universo de discurso de $\mathcal{A}_2$ es $A_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ y $\mathcal{A}_2 \not\models \varphi$.

(c) El universo de discurso de $\mathcal{A}_3$ es $A_3 = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_3 \models \varphi$.

(d) El universo de discurso de $\mathcal{A}_4$ es $A_4 = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_4 \not\models \varphi$.

10.86. Sean φ y ψ las dos fórmulas siguientes de la lógica de primer orden:

$$\varphi = \exists x (P(x) \land \neg \forall y (Q(y) \to R(x, y)))$$
$$\psi = \exists x (P(x) \land \neg \exists y (Q(y) \land R(x, y)))$$

(a) Una de las dos fórmulas dadas sirve para formalizar el enunciado "hay un cangrejo que no acosa a todos los tiburones", mientras que la otra sirve para formalizar el enunciado "hay un cangrejo que no acosa a ningún tiburón". Indica cuál es la fórmula que corresponde a cada uno de los dos enunciados.

(b) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula φ' lógicamente equivalente a φ que no utilice ni $\forall$ ni $\to$.

(c) Demuestra que $\varphi \not\models \psi$ construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo.

10.87. Sea $\Sigma = \{R/2\}$ una signatura formada por un único símbolo de predicado binario. Considera las tres Σ-fórmulas cerradas siguientes:

$$\varphi_1 = \forall x (\exists y R(x, y) \to R(x, x))$$
$$\varphi_2 = \forall x (R(x, x) \to \exists y R(x, y))$$
$$\varphi_3 = \forall x R(x, x) \to \forall x \exists y R(x, y)$$

(a) Construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo, demuestra que φ_1 no es lógicamente válida.

(b) ¿Son las fórmulas φ_2 y φ_3 lógicamente válidas?

(c) ¿Se cumple $\varphi_1 \sim \varphi_2$? ¿Se cumple $\varphi_2 \sim \varphi_3$? Justifica tus respuestas utilizando la definición de equivalencia lógica y los resultados de los dos apartados anteriores, pero sin hacer cálculos.

(d) Realizando una serie de pasos de cálculo basados en las leyes de la equivalencia lógica, transforma φ_3 a otra fórmula equivalente en forma prenexa.

10.88. Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas (donde P y Q son símbolos de predicado unarios):

- $\exists x (P(x) \to Q(x)), \quad \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \to Q(x)), \quad \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

Demuestra formalmente si son o no lógicamente equivalentes

(a) usando tableaux, y

(b) usando interpretaciones.

10.89. Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas (donde P y Q son símbolos de predicado unarios):

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$, $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x))$, $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\forall x(P(x) \vee Q(x))$, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Demuestra formalmente si son o no lógicamente equivalentes

(a) usando tableaux, y
(b) usando interpretaciones.

10.90. Estudia si son ciertas las siguientes afirmaciones utilizando tableaux:

(a) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \models \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$
(b) $\models \exists x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x P(x) \to \exists x Q(x)$

10.91. Considera de nuevo la signatura de la aritmética básica de los números naturales $\Sigma_{ar} = \{c/0, f/1, g/2, h/2, R/2\}$ así como la Σ_{ar}-estructura $\mathcal{N}$, ambas definidas en el ejercicio 5.40.

(a) Define recursivamente cómo se calcula el valor $[\![t]\!]_\sigma^{\mathcal{N}}$, siendo $t \in T_{\Sigma_{ar}}$ un término de la signatura de la aritmética, y $\sigma : V \to \mathbb{N}$ un estado cualquiera.
(b) Sean dos variables $x, y \in V$ y un estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x) = 2, \sigma(y) = 5$. Construye tres términos sintácticamente diferentes $t_1, t_2, t_3 \in T_{\Sigma_{ar}}$ en los cuales aparezcan las variables x e y, de manera que se cumpla $[\![t_1]\!]_\sigma^{\mathcal{N}} = 8$, $[\![t_2]\!]_\sigma^{\mathcal{N}} = 10$ y $[\![t_3]\!]_\sigma^{\mathcal{N}} = 20$.
(c) Construye una fórmula $\varphi \in L_{\Sigma_{ar}}$ que tenga libre una sola variable x, de manera que para cualquier estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ se cumpla $\mathcal{N} \models \varphi\sigma$ si y solo si $\sigma(x)$ es múltiplo de 7.

10.92. Considera de nuevo la signatura de la aritmética básica de los números naturales $\Sigma_{ar} = \{c/0, f/1, g/2, h/2, R/2\}$ así como la Σ_{ar}-estructura $\mathcal{N}$, ambas definidas en el ejercicio 5.40.

(a) Calcula los valores en $\mathcal{N}$ de los siguientes términos cerrados: c, $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, $f(f(f(f(c))))$, $g(f(f(f(f(c)))), f(c))$, $h(f(f(f(f(c)))), f(f(c)))$, $g(g(f(f(f(f(c)))), f(c))$, $h(f(f(f(f(c)))), f(f(c)))$, $h(g(f(f(f(f(c)))), f(c))$, $h(f(f(f(f(c)))), f(f(c)))$.
(b) Para cada número $n \in \mathbb{N}$ existe un término cerrado $t_n \in T_{\Sigma_{ar}}$ tal que $[\![t_n]\!]_\sigma^{\mathcal{N}} = 3^n$ en cualquier estado σ. Construye t_0 y t_1, y explica un método recursivo para construir cada t_n a partir de n.
(c) Suponiendo un estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x) = 3$ y $\sigma(y) = 9$, calcula el valor veritativo de las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists z(h(x, y) = z) \\
\varphi_2 &= \forall z(h(x, y) = z) \\
\varphi_3 &= \exists z(h(x, y) = f(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(h(x, y) = h(f(f(f(f(c)))), f(f(c)))) \\
\varphi_5 &= \forall z(h(x, y) = h(f(f(f(f(c)))), f(f(c))))
\end{aligned}$$

10.93. Considera de nuevo la signatura de la aritmética básica de los números naturales $\Sigma_{ar} = \{c/0, f/1, g/2, h/2, R/2\}$ así como la Σ_{ar}-estructura $\mathcal{N}$, ambas definidas en el ejercicio 5.40.

(a) Calcula los valores en $\mathcal{N}$ de los siguientes términos cerrados: c, $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, $g(f(f(c)), f(c))$, $h(g(f(f(c)), f(c)), f(f(c)))$, $g(g(f(f(c)), f(c)), f(c))$, $h(g(f(f(c)), f(c))$, $g(f(f(f(f(c)))), f(c))$, $h(f(f(f(f(c)))), g(f(f(c)), f(c)))$.

(b) Para cada número $n \in \mathbb{N}$ existe un término cerrado $t_n \in T_{\Sigma_{ar}}$ tal que $[\![t_n]\!]^{\mathcal{N}}_{\sigma} = 5^n$ en cualquier estado σ. Construye t_0 y t_1 y explica un método recursivo para construir cada t_n a partir de n.

(c) Suponiendo un estado $\sigma : V \to \mathbb{N}$ tal que $\sigma(x) = 13$ y $\sigma(y) = 19$, calcula el valor veritativo de las fórmulas siguientes:

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_1 & = & \exists z(h(x, y) = g(x, z)) \\
\varphi_2 & = & \forall z(h(x, y) = g(x, z)) \\
\varphi_3 & = & \exists z(h(x, y) = g(x, f(z))) \\
\varphi_4 & = & \exists z(h(x, y) = h(g(x, z), f(f(c)))) \\
\varphi_5 & = & \forall z(h(x, y) = h(f(f(f(f(c)))), g(x, z)))
\end{array}$$

10.94. Dada la signatura $\Sigma = \{P/1, R/2\}$ para la que $P(x)$ formaliza el enunciado “x es tonto” y $R(x, y)$ formaliza el enunciado “x es sobrino de y”,

(a) Construye dos fórmulas $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\Sigma$ que formalicen respectivamente los dos enunciados: “todo el que es tonto tiene algún sobrino” y “todo el que tiene algún sobrino es tonto”.

(b) ¿Se cumple que $\varphi_1 \sim \varphi_2$?

(c) Utilizando las leyes de equivalencia de la lógica de primer orden, transforma la fórmula $\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$ en una fórmula en forma prenexa lógicamente equivalente.

10.95. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Artemio y Braulio pueden resolver exactamente los mismos problemas.
Si Artemio es capaz de resolver algún problema, recibirá un premio.
Artemio no va a ser premiado.

$\therefore$ Braulio no es capaz de resolver ningún problema.

10.96. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Ningún buen deportista debe fumar o beber.
Hay futbolistas ya famosos que beben o fuman.
Todos los futbolistas son deportistas.

$\therefore$ Hay futbolistas famosos que no son buenos deportistas.

10.97. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y demuestra su validez utilizando tableaux.

Para todo examen hay algún alumno que lo suspende.
Algunos exámenes son fáciles.
Si un alumno suspende algún examen fácil, entonces es porque no estudia.

$\therefore$ Algunos alumnos no estudian.

10.98. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Para cualquier examen hay algún alumno que lo aprueba.
Algunos exámenes son difíciles.
Hay que ser buen estudiante para aprobar un examen difícil.

$\therefore$ Algunos alumnos son buenos estudiantes.

10.99. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Un cocodrilo que no es sanguinario no come.
Los que no comen se mueren jóvenes.
Hay cocodrilos que no mueren jóvenes.
∴ Hay cocodrilos sanguinarios.

10.100. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Un ratón que no come queso tiene el pelo de color gris.
Los ratones que comen queso son de pelaje verde o amarillo.
Ni los de pelo gris, ni los de pelo verde, ni los de pelo amarillo tienen el pelo color lila.
Pepito es un ratón.
∴ No todo el mundo tiene el pelaje lila.

10.101. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Los hipopótamos son grandes.
Los pájaros vuelan.
Los pájaros de alegres colores son felices.
Los hipopótamos bien nutridos son felices.
Jeremías es un pájaro e Isaías un hipopótamo.
O Jeremías tiene plumas de alegres colores, o Isaías está bien nutrido.
∴ Existe alguien que, siendo feliz, o vuela o es grande.

10.102. Formaliza el siguiente razonamiento en lógica de primer orden y utiliza el método de los tableaux para decidir si es válido o no.

Los marcianos que no vuelan son unos cabezotas.
Un domador cabezota siempre es hijo de padre payaso o madre trapecista (o ambas cosas).
Los voladores son unos mezquinos.
Los payasos son graciosos y las trapecistas son atléticas.
Los individuos mezquinos, graciosos o atléticos son aburridos.
Perico de los Palotes es un domador marciano.
∴ Algunos individuos son aburridos.

10.103. (a) Formaliza las tres siguientes argumentaciones en lógica de primer orden, explicando el significado de los símbolos que elijas:

Todo enanito es paticorto o jorobeta.
El padre de un paticorto siempre desgrava.
La madre de un paticorto siempre desgrava.
Alguien es enanito.
∴ Alguien desgrava.

Todo enanito es paticorto o jorobeta.
El padre de un paticorto siempre es enanito.
No todos los enanitos son hijos de padre enanito.

$\therefore$ Algunos jorobados son enanitos.

Todo enanito es paticorto o jorobeta.
No todo enanito es hijo de padre enanito.
Ningún enanito es hijo de padre jorobeta.

$\therefore$ No todo enanito es hijo de padre enanito.

(b) Demuestra la validez de las argumentaciones construyendo un tableau para cada una de ellas.

10.104. Considera la signatura Σ con $F_\Sigma = \{pd/1\}$ y $P_\Sigma = \{PF/1, AL/1, PE/1, ES/2\}$, donde suponemos que:

- $pd(x)$ formaliza "el padre de x",
- $PF(x)$ formaliza "x es un profesor",
- $AL(x)$ formaliza "x es un alumno",
- $PE(x)$ formaliza "x es un pelmazo",
- $ES(x, y)$ formaliza "x escucha a y".

(a) Construye fórmulas cerradas del lenguaje de primer orden L_Σ que formalicen las premisas y la conclusión de la siguiente argumentación:

Algunos profesores escuchan a los padres de todos los alumnos.
Algunos alumnos son hijos de padre pelmazo.
Cualquiera que escuche a un pelmazo se aburre.

$\therefore$ Algunos profesores se aburren.

(b) Demuestra que la argumentación es válida mediante el método de los tableaux.

10.105. Considera los cuatro enunciados siguientes:

P_1: Bermudo tiene un vecino gallego y sordomudo.
P_2: Todos los gallegos llorones son gaiteros.
P_3: Los sordomudos nunca son gaiteros.
C: Algunos gallegos no son llorones.

(a) Define una signatura Σ que sirva para formalizar los enunciados dados en lógica de primer orden y construye fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y ψ del lenguaje de primer orden L_Σ que formalicen respectivamente los enunciados P_1, P_2, P_3 y C.

(b) Sin utilizar tableaux, construye una Σ-interpretación que demuestre que el conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es satisfactible.

(c) Utilizando pasos de equivalencia lógica, transforma la fórmula $\varphi_2 \to \varphi_3$ en una fórmula lógicamente equivalente en forma prenexa.

(d) Construye un tableau que demuestre que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$, indicando con qué razonamiento se corresponde la construcción.

10.106. Dadas las cuatro fórmulas de la lógica de primer orden que se indican a continuación:

$$\varphi_1 = \exists x(P(x) \land \neg\forall y(Q(y) \to R(x, y)))$$
$$\varphi_2 = \exists x(P(x) \land \neg\exists y(Q(y) \land R(x, y)))$$
$$\varphi_3 = \forall x(P(x) \to \exists y(Q(y) \land R(x, y)))$$
$$\varphi_4 = \neg\exists x(P(x) \land \forall y(Q(y) \to R(x, y)))$$

resuelve cada uno de los apartados siguientes:

(a) Cada una de las cuatro fórmulas dadas sirve para formalizar uno de los cuatro enunciados siguientes. Indica para cada enunciado cuál es la fórmula que lo formaliza correctamente.

(A): Cualquier trucha come a algún gusanillo.
(B): Ninguna trucha come a todos los gusanillos.
(C): Hay una trucha que no come a todos los gusanillos.
(D): Hay una trucha que no come a ningún gusanillo.

(b) Dibuja el árbol estructural de φ_1.

(c) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula φ_1' lógicamente equivalente a φ_1 que no utilice ni $\forall$ ni $\rightarrow$.

(d) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, transforma $\varphi_3 \wedge \varphi_4$ a otra fórmula lógicamente equivalente que esté en forma prenexa.

(e) Demuestra que $\varphi_1 \not\models \varphi_2$ construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo.

10.107. Demuestra utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta:

Los caracoles cuadrados no existen. Luego todos los caracoles cuadrados viven en California.

10.108. Determina si son válidas o no las argumentaciones comprendidas entre los ejercicios 10.95 y 10.105 utilizando resolución.