Por tanto la función de densidad de $W = 2\theta X_{(n)} - X_{(n)}^2$ es

$$f_W(w) = \left(f_{X_{(n)}}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\theta^2 - w}} + f_{X_{(n)}}(\theta + \sqrt{\theta^2 - w}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\theta^2 - w}} \right) \cdot I_{(-\infty, \theta^2]}(w) =$$

Si calculamos por separado cada uno de los términos

$$f_{X_{(n)}}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) = \frac{n}{\theta^{2n}} \left(2\theta(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) - (\theta - \sqrt{\theta^2 - w})^2\right)^{n-1} \left(2\theta - 2(\theta - \sqrt{\theta^2 - w})\right) \cdot I_{(0,\theta)}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) =$$

$$= \frac{n}{\theta^{2n}} \left(2\theta^2 - 2\theta\sqrt{\theta^2 - w} - \theta^2 + 2\theta\sqrt{\theta^2 - w} - \theta^2 + w\right)^{n-1} \left(2\theta - 2\theta + 2\sqrt{\theta^2 - w}\right) \cdot I_{(0,\theta)}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) =$$

$$= \frac{n}{\theta^{2n}} w^{n-1} \cdot 2\sqrt{\theta^2 - w} \cdot I_{(0,\theta)}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}).$$

La condición $0 < \theta - \sqrt{\theta^2 - w} < \theta$ equivale a $\sqrt{\theta^2 - w} < \theta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \theta^2 - w < \theta^2 \Leftrightarrow w > 0$.

Por tanto $f_{X_{(n)}}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) = \frac{n}{\theta^{2n}} w^{n-1} 2\sqrt{\theta^2 - w} \cdot I_{(0,\infty)}(w)$.

El segundo caso es mucho más fácil ya que

$f_{X_{(n)}}(\theta + \sqrt{\theta^2 - w}) = 0$ porque $\theta + \sqrt{\theta^2 - w} \notin (0, \theta)$.

En conclusión

$$f_W(w) = f_{X_{(n)}}(\theta - \sqrt{\theta^2 - w}) \frac{1}{2\sqrt{\theta^2 - w}} \cdot I_{(-\infty, \theta^2]}(w) = \frac{n}{\theta^{2n}} w^{n-1} \frac{2\sqrt{\theta^2 - w}}{2\sqrt{\theta^2 - w}} \cdot I_{(0,\theta^2)}(w) =$$

$$= \frac{n}{\theta^{2n}} w^{n-1} I_{(0,\theta^2)}(w) = \frac{n}{\theta^2} \left(\frac{w}{\theta^2}\right)^{n-1} I_{(0,\theta^2)}(w).$$

Esta distribución es mucho más manejable pero aún depende de θ por lo que consideramos la distribución de $S = \frac{W}{\theta^2}$

$$F_S(s) = P\{S \le s\} = P\{\frac{W}{\theta^2} \le s\} = P\{W \le s\theta^2\} = F_W(s\theta^2).$$