Hoja 7

Problema 1

Resolver, mediante *hiperplanos de corte*, el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl}
\min & z = -2x_1 - x_2 \\
s.a.: & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\
& 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\
& x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ y } x_5 \quad \text{enteros}
\end{array}$$

La solución óptima, del problema de programación lineal correspondiente a la relajación continua del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	3/2	0	–1/4	9/4
x_4	0	0	–2	1	1/2	1/2
x_1	1	0	–1/2	0	1/4	11/4
	0	0	1/2	0	1/4	Z – (–31/4)

Considerando como ecuación generatriz del corte: $-2x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2}$

se obtiene el corte:

$$\frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$$

Introduciendo la anterior desigualdad y denotando por x_6 la correspondiente variable de holgura, se obtiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	3/2	0	−1/4	0	9/4
x_4	0	0	−2	1	1/2	0	1/2
x_1	1	0	−1/2	0	1/4	0	11/4
x_6	0	0	0	0	−1/2	1	−1/2
	0	0	1/2	0	1/4	0	$Z-(-31/4)$

Aplicando el algoritmo dual del simplex se obtiene la solución óptima de la relajación continua del nuevo problema:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	3/2	0	0	−1/2	5/2
x_4	0	0	−2	1	0	1	0
x_1	1	0	−1/2	0	0	1/2	5/2
x_5	0	0	0	0	1	−2	1
	0	0	1/2	0	0	1/2	$Z-(-15/2)$

Considerando como ecuación generatriz del corte: $x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_6 = \frac{5}{2}$
se obtiene el corte:

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_6 \geq \frac{1}{2}$$

Introduciendo la anterior desigualdad y denotando por x_7 la correspondiente variable de holgura, se obtiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	3/2	0	0	−1/2	0	5/2
x_4	0	0	−2	1	0	1	0	0
x_1	1	0	−1/2	0	0	1/2	0	5/2
x_5	0	0	0	0	1	−2	0	1
x_7	0	0	−1/2	0	0	−1/2	1	−1/2
	0	0	1/2	0	0	1/2	0	$Z - (-15/2)$

Aplicando el algoritmo dual del simplex, se obtiene la solución óptima de la relajación continua del nuevo problema:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	0	0	0	−2	3	1
x_4	0	0	0	1	0	3	−4	2
x_1	1	0	0	0	0	1	−1	3
x_5	0	0	0	0	1	−2	0	1
x_3	0	0	1	0	0	1	−2	1
	0	0	0	0	0	0	1	$Z - (-7)$

Obteniéndose la solución óptima del problema entero.

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1^* = 3,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 2,\ x_5^* = 1,\ z^* = -7}$

Hoja 7

Problema 2

Resolver el siguiente problema de programación lineal entera, mediante *hiperplanos de corte*:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 5x_2 \\ s.a.: \quad & 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ & x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \\ & x_1 \text{ y } x_2 \ \text{ enteros} \end{aligned}$$

La solución óptima de la relajación lineal continua, del problema anterior, se presenta en la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{21}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
	0	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{10}$	$Z-\frac{56}{5}$

Seleccionando como ecuación generatriz del corte la correspondiente a la variable x_2,

$$x_2 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_5 = \frac{4}{5}$$

se obtiene el corte

$$\frac{7}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_5 \geq \frac{4}{5}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{11}{10}$	0	$\frac{21}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_6	0	0	0	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{4}{5}$
	0	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{10}$	0	$Z-\frac{56}{5}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	0	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{27}{7}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{8}{7}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{11}{7}$
x_4	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{10}{7}$	$\frac{8}{7}$
	0	0	0	0	1	1	$Z-12$

Seleccionando como ecuación generatriz del corte la correspondiente a la variable x_3,

$$x_3 - \frac{8}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_6 = \frac{27}{7}$$

se obtiene el corte

$$\frac{6}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_6 \geq \frac{6}{7}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	1	0	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{27}{7}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{8}{7}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{11}{7}$
x_4	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{10}{7}$	0	$\frac{8}{7}$
x_7	0	0	0	0	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{3}{7}$	1	$-\frac{6}{7}$
	0	0	0	0	1	1	0	Z–12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	1	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	5
x_2	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1
x_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_4	0	0	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	1
x_5	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$	1
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	Z – 13

Obteniéndose la solución óptima del problema entero.

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1^* = 2,\ x_2^* = 1,\ x_3^* = 5,\ x_4^* = 1,\ x_5^* = 1,\ z^* = 13}$