Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Grupo U.
2 de junio de 2022
Examen Práctico Nombre y apellidos: ______________________

El examen consiste en la realización 4 problemas. Está permitido utilizar los apuntes de la asignatura y/o los libros de la asignatura. NO está permitido utilizar ningún dispositivo electrónico. Se evaluará la redacción y el orden de las ideas presentadas en la resolución de los problemas.

1. (5,5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Considérese la superficie diferenciable S_f definida por el grafo de f con su parametrización natural $\varphi : \mathbb{R}^2 \to S_f \subseteq \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$.

   (i) (0,5 puntos) Determine una base del plano tangente T_pS_f para todo $p \in S$ y una aplicación de Gauss $N : S_f \to \mathbb{S}^2$.

   (ii) (1 punto) Fíjese la aplicación de Gauss del apartado anterior. Determine las matrices de la primera y segunda forma fundamental respecto de la base $\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle$. Respecto de la misma base, escriba la matriz de la aplicación de Weingarten en términos de las matrices anteriores.

   (iii) (1 puntos) Pruebe que la curvartura de Gauss K de S_f viene dada por la expresión en coordenadas
   $$K \circ \varphi(x, y) = \frac{1}{F^4} \det(Hf(x, y)),$$
   donde $F(x, y) = (1+f_x^2+f_y^2)^{\frac{1}{2}}$ y $Hf(x, y)$ es la matriz Hessiana de f en el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pruebe también que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico de f entonces la curvatura media H de S_f cumple que
   $$H \circ \varphi(x, y) = \pm\frac{f_{xx} + f_{yy}}{2}.$$
   ¿A qué se debe la ambigüedad en el signo?

   (iv) (1,5 puntos) ¿Existe alguna función diferenciable f tal que las líneas coordenadas sean líneas de curvatura y $H \circ \varphi \neq 0$?

   (v) (1,5 puntos) Considérese la función $f(x, y) = x^2e^y$. ¿Tiene la superficie S_f puntos elípticos, hiperbólicos, planos o parabólicos aislados?

   Solución:

   (i) Una base del plano tangente en el punto $p \in S_f$ viene dada por $\varphi_x(\pi(p)) = (1, 0, f_x)(\pi(p))$ y $\varphi_y(\pi(p)) = (0, 1, f_y)(\pi(p))$, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}, (x, y, z) \mapsto (x, z)$. De ahora en adelante, cuando no haya lugar a confusión omitiremos el punto de evaluación de nuestras aplicaciones, vectores, matrices, etc. Por lo tanto, una aplicación de Gauss para S_f es
   $$N : S_f \mapsto \mathbb{S}^2, p \mapsto \frac{1}{||(-f_x, -f_y, 1)||}(-f_x, -f_y, 1)(\pi(p)).$$
   La otra aplicación de Gauss posible es $-N$. Nótese que S_f es conexa pues es (homeo)difeomorfa al plano $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Denotemos por Q_p, M_p y L_p, resp., las matrices de la primera forma fundamental, de la segunda forma fundamental y de la aplicación de Weingarten, resp., en el punto p respecto de la base $\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle$.

La matriz Q_p viene dada por

$$Q_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

donde $E = \varphi_x \cdot \varphi_x$, $F = \varphi_x \cdot \varphi_y$ y $G = \varphi_y \cdot \varphi_y$. Recordemos que $\varphi_x = (1, 0, f_x)$ mientras que $\varphi_y = (0, 1, f_y)$, por lo tanto un cálculo sencillo muestra que

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, la matriz M_p de la segunda forma fundamental viene dada por la expresión

$$M_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix},$$

donde $e = N \circ \varphi \cdot \varphi_{xx}$, $f = N \circ \varphi \cdot \varphi_{xy}$ y $g = N \circ \varphi \cdot \varphi_{yy}$. Calculamos las segundas derivadas de la parametrización que vienen dadas por

$$\varphi_{xx} = f_{xx} e_3,$$

$$\varphi_{xy} = f_{xy} e_3$$

y

$$\varphi_{yy} = f_{yy} e_3,$$

donde $e_3 = (0, 0, 1)$ denota al tercer vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. En vista de la forma que tiene la aplicación de Gauss obtenida en (i) concluimos que

$$M_p = \frac{1}{F(x, y)} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{F(x, y)} Hf(x, y),$$

donde $Hf(x, y)$ denota a la matriz Hessiana de f y $F(x, y) = ||(-f_x, -f_y, 1)||$.
Por último, la matriz de la aplicación de Weingarten se puede expresar como

$$L_p = -Q_p^{-1} M_p = -\frac{1}{F(x, y)} \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Aunque es relativamente sencillo deducir la relación anterior definiciones no es lo que nos pide el ejercicio, tampoco calcular explícitamente los coeficietes de la matriz.

(iii) La curvatura de Gauss en cierto punto $p \in S_f$ coincide con el determinante de la aplicación de Weingarten en dicho punto. En vista de la expresión anterior para la aplicación de Weingarten en términos de la primera y segunda forma fundamental se tiene que

$$K \circ \varphi = \det(L_{\varphi(x,y)}) = \frac{\det(M_{\varphi(x,y)})}{\det(Q_{\varphi(x,y)})}$$

de donde se sigue el resultado.
Por otro lado, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sea un punto crítico de f se tiene que $Q_{\varphi(x,y)} =$ y $F(x, y) = ||(-f_x, -f_y, 1)|| = 1$ por lo que

$$L_{\varphi(x,y)} = -M_{\varphi(x,y)} = -Hf(x, y)$$

de donde se sigue la expresión del enunciado. La ambigüedad en el signo se debe a la elección de la aplicación de Gauss que hemos realizado anteriormente.

(iv) Las líneas coordenadas serán líneas de curvatura si y sólo si la aplicación de Weingarten en la base $\langle \varphi_x, \varphi_y \rangle$ es diagonal. Como tenemos la relación

$$L_p = -Q_p^{-1} M_p$$

, lo más sencillo para encontrar una función diferenciable que cumpla lo requerido es imponer que Q_p sea diagonal y que M_p sea también diagonal. Una vez hecho esto tendremos que L_p es diagonal y estudiar la relación $H \circ \varphi \neq 0$ será muy sencillo. [1]

La condición de que Q_p sea diagonal se traduce en $f_x f_y = 0$. Mientras que para que M_p sea diagonal debemos imponer que $f_{xy} = 0$. Observamos que basta tomar cualquier función que sea invariante de una de las dos variables para que se satisfagan ambas relaciones. Por ejemplo, tomamos $f(x,y) = g(x)$ donde g es cualquier función de variable real diferenciable.

Bajo esta elección obtenemos que

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 + g'(x)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y que

$$M_p = \frac{1}{(1 + g'(x)^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} g''(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz de la aplicación de Weingarten será

$$L_p = \frac{1}{(1 + g'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} g''(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en particular es diagonal, i.e. las líneas coordenadas definen líneas de curvatura. Para asegurar la condición $H \circ \varphi \neq 0$ basta tomar una función $g(x)$ con segunda derivada no idénticamente nula.

(v) La función de curvatura $K : S_f \to \mathbb{R}$ de cualquier superficie es diferenciable luego en particular continua. Por ello, el conjunto de puntos elípticos $K^{-1}(0, \infty)$ es abierto y el de puntos hiperbólicos $K^{-1}(-\infty, 0)$ también; luego no puede haber puntos elípticos ni hiperbólicos aislados.

Para estudiar los puntos parabólicos y planos, esto es $K^{-1}(\{0\})$ podemos hacer uso de las expresiones obtenidas anteriormente. Se tiene que $K \circ \varphi(x,y) = \frac{1}{F^4} \det(Hf(x,y)) = \frac{1}{F^4}(-2x^2 e^{2y})$. Por lo tanto, los puntos parabólicos y planos son

$$K^{-1}(\{0\}) = \{\varphi(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Además, observamos que cualquier punto de la forma $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, es un punto crítico de f luego podemos utilizar la expresión para la curvatura media obtenida en (iii) para concluir que

$$H \circ \varphi(0,y) = \frac{1}{2}(f_{xx}(0,y) + f_{yy}(0,y)) = e^y \neq 0.$$

Esto quiere decir que todos los puntos de la forma $\varphi(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$, son parabólicos y, en particular, no aislados.

[1] En particular, φ_x y φ_y serán ortogonales. Esto siempre ocurre para cualesquiera autovectores de la aplicación de Weingarten si no estamos en un punto umbílico.

2. (2 puntos) Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable orientable y $\alpha : I \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco, birregular y asintótica. Demuéstrese que

$$|\tau_\alpha(t)| = (-K(\alpha(t)))^{\frac{1}{2}},$$

dónde $\tau_\alpha : I \to \mathbb{R}$ es la torsión de α y $K : S \to \mathbb{R}$ es la función de curvatura de S.

Solución: La curva $\alpha : I \to S$ es asintótica, luego

$$k_n(\alpha)(t) = \alpha'' N \circ \alpha \equiv 0.$$

En particular, $\alpha''(t) \in T_{\alpha(t)}S$, como el vector α'' es proporcional al vector normal de la curva α y su vector tangente es $\alpha' \in T_{\alpha(t)}S$ concluimos que el vector binormal b_α de α satisface la relación

$$b_\alpha(t) = \pm(N \circ \alpha)(t).$$

Derivando esta última relación obtenemos que

$$b'_\alpha = \pm\tau_\alpha n_\alpha = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t))$$

De aquí se deduce que la primera columna de la matriz de la aplicación de Weingarten respecto de la base ortonormal $\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle$ es $(0, \pm\tau_\alpha)^t$. La matriz de la aplicación de Weingarten respecto de una base ortonormal es simétrica (puesto que coincide con la de la segunda forma fundamental) por lo que la segunda columna de la matriz es de la forma $(\pm\tau_\alpha, \mu)^t$ para cierta función μ.

De aquí se deduce que la curvatura de Gauss en $\alpha(t)$, que coincide con el determinante de la aplicación de Weingarten, es

$$K(\alpha(t)) = -\tau_\alpha^2$$

de donde se sigue el resultado.

Una forma menos conceptual de resolver el ejercicio es la siguiente: de la relación

$$\pm\tau_\alpha n_\alpha = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t))$$

se deduce, tomando normas, que

$$\tau_\alpha^2 = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) \cdot d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)).$$

Si consideramos una base de direcciones principales unitarias $e_1, e_2 \in T_{\alpha(t)}S$ con curvaturas principales k_1 y k_2 se tendrá que existe cierto ángulo θ tal que

$$\alpha'(t) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$$

por lo que

$$d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) = -k_1 \cos\theta e_1 - k_2 \sin\theta e_2.$$

Tomando normas obtenemos la relación

$$\tau_\alpha^2 = k_1^2 \cos^2\theta + k_2^2 \sin^2\theta = (k_1^2 - k_2^2)\cos^2\theta + k_2^2.$$

Mientras que por otro lado sabemos que

$$0 = k_n(\alpha) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = (k_1 - k_2)\cos^2\theta + k_2.$$

Observamos de la primera relación que si $k = k_1 = k_2$ en cierto punto, entonces en dicho punto se tiene que la $k_n(\alpha) = 0 = k$ y el resultado se cumple pues $K(\alpha(t)) = 0$ en dicho punto. Asumamos pues que $k_1 \neq k_2$, entonces podemos despejar $\cos^2\theta$ de la segunda relación para obtener que

$$\cos^2\theta = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}.$$

Sustituyendo esta expresión en la primera relación obtenemos que

$$\tau_\alpha^2 = -k_2\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 - k_2} + k_2^2 = -k_2(k_1 + k_2) + k_2^2 = -k_1k_2 = -K(\alpha(t)).$$

3. (1,5 puntos) Contéstese verdadero o falso y arguméntese la respuesta.

   (i) (0,5 puntos) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y $\alpha : I \to S$ una curva geodésica y asintótica; entonces α parametriza una recta.

   (ii) (0,5 puntos) Existe una superficie diferenciable compacta $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ y un difeomorfismo local $f : \Sigma \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   (iii) (0,5 puntos) Si $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie *minimal,* esto es, tiene curvatura media nula en todo punto; entonces S no es compacta.

   Solución:

   (i) Verdadero. Si una curva es geodésica su segunda derivada debe ser perpendicular a la superficie en cada punto mientras que si es asintótica debe ser tangente a la superficie. La única forma de que esto ocurra es que su segunda derivada sea nula, de donde se deduce el resultado.

   (ii) Falso. Si existiese dicha superficie compacta Σ y dicho difeomorfismo local $f : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ se tendría por continuidad que $f(\Sigma) \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto en el plano. Mientras que por otro lado, la condición de ser difeomorfismo local asegura que la aplicación f es abierta, en particular $f(\Sigma)$ es abierto. Para comprobar esto basta observar que, por definición, para cada punto $p \in \Sigma$ existe un entorno abierto $U^p \subseteq \Sigma$ de p tal que $f_{|U^p}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, en particular $f(U^p) \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto. Luego $f(\Sigma)$ es abierto y compacto en el plano lo cual es absurdo.[2]

   (iii) Verdadero. Toda superficie compacta tiene un punto elíptico luego con curvatura media no nula.

4. (1 punto) Sean (r, θ) coordenadas polares en $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Sean $\varepsilon > 0$ muy pequeño, $A = \{(r, \theta) : 1 - \varepsilon < r < 2 + \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ y $C = \{(r, \theta) \in A : 1 \leq r \leq 2\}$. Sea $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y $\varphi_\alpha : A \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de cierta superficie tal que

   - $\varphi_\alpha(C) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 2\}$,
   - Para $i \in \{1, 2\}$ se tiene que $\varphi_\alpha(i, \theta)$ parametriza la circunferencia C_i de radio 1 contenida en el plano $\{(x, y, z) : z = i\}$ centrada en el punto $(0, 0, i)$.
   - Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ existe cierto número positivo $R(\alpha) > 0$ tal que

[2] Geométricamente lo que ocurre es que la aplicación norma al cuadrado en el plano tiene que tener un máximo absoluto $q = f(p)$ sobre el compacto $f(\Sigma)$, forzosamente d_pf tiene que perder rago en dicho punto (DIBUJADLO..). Este tipo de argumento lo usábais en Cálculo Complejo para probar los teoremas típicos de Liouville, etc.

- $\varphi_{\alpha|\{2-\varepsilon<r<2+\varepsilon\}}$ parametriza un entorno abierto de la circunferencia C_2 contenido en cierta esfera de radio $R(\alpha)$ y centro en el eje Z que incide en el plano $\{z = 2\}$ con ángulo α. Dicha esfera contiene a C_2 en su hemisferio norte.
- $\varphi_{\alpha|\{1-\varepsilon<r<1+\varepsilon\}}$ parametriza un entorno abierto de la circunferencia C_1 contenido en cierta esfera de radio $R(\alpha)$ y centro en el eje Z que incide en el plano $\{z = 1\}$ con ángulo α. Dicha esfera contiene a C_1 en su hemisferio sur.

Aquí entiéndase por hemisferio norte (resp. sur) de una esfera S de radio $R > 0$ y centro $(0, 0, z_0)$ el conjunto $\{(x, y, z) \in S : z \geq z_0\}$ (resp. $\{(x, y, z) \in S : z \leq z_0\}$).

Para cada $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ considérese la función de curvatura $K_\alpha : \varphi_\alpha(A) \to \mathbb{R}$ de la superficie $\varphi_\alpha(A)$ y la función de variable real

$$F : (0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \int_{\varphi_\alpha(C)} K_\alpha.$$

(i) (0,5 puntos) Pruebe que $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(ii) (0,25 puntos) Halle una expresión en término de funciones elementales de $F(\alpha)$.

(iii) (0,25 puntos) Justifique geométricamente que $\lim_{\alpha\mapsto 0^+} F(\alpha) = 4\pi$.

<u>Solución:</u> Denotemos por N_α al casquete esférico en el norte de la esfera de radio $R(\alpha)$ del enunciado delimitada por por C_2 y por S_α al casquete esférico sur delimitado por C_1. Las hipótesis del enunciado aseguran que

$$\Sigma_\alpha = \varphi_\alpha(C) \cup N_\alpha \cup S_\alpha,$$

es una superficie diferenciable. De hecho, Σ_α es difeomorfa a una esfera. Sean $K_{\Sigma_\alpha} : \Sigma_\alpha \to \mathbb{R}$, $K_{N_\alpha} : N_\alpha \to \mathbb{R}$ y $K_{S_\alpha} : S_\alpha \to \mathbb{R}$ las funciones de curvatura de todos los objetos previamente mencionados.

Se cumplen las relaciones

- $K_{N_\alpha} \equiv \frac{1}{R(\alpha)^2}$,
- $K_{S_\alpha} \equiv \frac{1}{R(\alpha)^2}$,
- $(K_{\Sigma_\alpha})_{|\varphi_\alpha(C)} = (K_\alpha)_{|\varphi_\alpha(C)}$,
- $(K_{\Sigma_\alpha})_{|N_\alpha} = K_{N_\alpha}$ y
- $(K_{\Sigma_\alpha})_{|S_\alpha} = K_{S_\alpha}$.

Como la característica de Euler de la esfera es 2 se sigue del *Teorema de Gauss-Bonnet* que

$$\int_{\Sigma_\alpha} K_{\Sigma_\alpha} = 4\pi.$$

Ahora bien, de esta igualdad y las relaciones anteriores obtenemos que

$$4\pi = F(\alpha) + \int_{N_\alpha} K_{N_\alpha} + \int_{S_\alpha} K_{S_\alpha} = F(\alpha) + \frac{2}{R(\alpha)^2} A_\alpha,$$

donde A_α es el área de N_α que coincide con el de S_α. Aquí hemos utilizado que la integral de una constante en una superficie es el área de la superficie multiplicada por la constante.

En el caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $N_{\frac{\pi}{2}}$ es el hemisferio norte de una esfera de radio $R(\alpha) = 1$ y S_α el sur. Por lo tanto,

$$\int_{N_\alpha} K_{N_\alpha} + \int_{S_\alpha} K_{S_\alpha} = \int_{\mathbb{S}^2(1)} 1 = 4\pi$$

y, por ello,

$$F(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Por otro lado, es fácil determinar el radio $R(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}$ por lo que cuando α tiende a 0 se tiene que el radio de la esfera tiende a ∞ y por lo tanto su curvatura tiende a 0. Esto explica analíticamente que $F(\alpha)$ tiende a 4π cuando α tiende a 0. Geométricamente lo que ocurre en este caso es que "las tapas" que hay que añadir a $\varphi_0(C)$ para completarlo a una esfera son literalmente planas y, por ello, no aportan curvatura.
Para terminar faltaría calcular el área A_α. Ésta coincide con el área de la superficie revolución obtenida al revolucionar la curva

$$\beta_\alpha(t) = R(\alpha)(\sin t, 0, \cos t),$$

$\theta \in (0, \alpha)$, respecto del eje Z. Dicha superficie tiene parametrización natural

$$\varphi : (0, \alpha) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, (t, \theta) \mapsto A_\theta \beta_\alpha(t);$$

donde $A_\theta \in SO(3)$ denota la matriz de rotación de ángulo θ respecto del eje Z.
Un simple cálculo (que hemos hecho en las clases de problemas) muestra que

$$\varphi_t \cdot \varphi_t = A_\theta \beta'_\alpha(t) \cdot_\theta \beta'_\alpha(t) = ||\beta'_\alpha(t)||^2 = R(\alpha)^2,$$

dónde hemos utilizado que A_θ es ortogonal. Por otro lado, es claro que

$$\varphi_t \cdot \varphi_\theta = 0$$

pues son vectores perpendiculares y, por último,

$$\varphi_\theta \cdot \varphi_\theta = R(\alpha)^2 \sin^2 t,$$

esto último se debe a que cuando fijamos la variable $t = t_0$ la curva $\varphi(t_0, \theta)$ define la parametrización natural de una circunferencia plana de radio $R(\alpha)\sin t$ contenida en el plano $z = R(\alpha)\cos t$.
Obtenemos pues que

$$A_\alpha = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} (R(\alpha)^4 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} d\theta dt = 2\pi R(\alpha)^2 \int_0^\alpha \sin t dt = 2\pi R(\alpha)^2(-\cos\alpha + 1).$$

Sustituyendo en la relación $F(\alpha) = 4\pi - \frac{2}{R(\alpha)^2} A_\alpha$ obtenemos que

$$F(\alpha) = 4\pi - 4\pi(-\cos\alpha + 1) = 4\pi\cos\alpha.$$