Ejercicio 6.- Sea $(X_1 \ldots X_n)$ una m.a.s. de $X \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ con $0<x<1$ y $\theta>0$. Calcular la esperanza y la varianza del estadístico $T = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j)$. ¿Es T el ECUMV para estimar $Z(\theta) = \frac{1}{\theta}$?

$$T = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln\left(\frac{1}{X_j}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \bar{Y}$$

$Y_j = Ln\left(\frac{1}{X_j}\right) \quad \forall j = 1 \ldots n.$

Necesitamos saber la distribución de los $Y_n = Ln\left(\frac{1}{X_n}\right)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Ln\left(\tfrac{1}{X_n}\right) \leq y\} = P\{\tfrac{1}{X_n} \leq e^y\} =$$

$$= P\{e^{-y} \leq X_n\} = 1 - P\{X_n < e^{-y}\} = 1 - F_X(e^{-y}).$$

$$f_Y(y) = -f_X(e^{-y}) \cdot (-e^{-y}) = f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y}$$

$$f_Y(y) = \theta \cdot (e^{-y})^{\theta-1} e^{-y} = \theta(e^{-y})^\theta = \theta e^{-\theta y} \quad \text{si } 0 < e^{-y} < 1 \Leftrightarrow y > 0$$

Por tanto $f_Y(y) = \theta e^{-\theta y}$ con $y>0$, es decir,

$Y_n \sim Gamma(a=\theta, p=1) \quad \forall n$

Por tanto $E[T] = E[\bar{Y}] = E[Y] = \frac{1}{\theta}$ y

$$Var(T) = Var(\bar{Y}) = \frac{Var(Y)}{n} = \frac{1}{n\theta^2}$$

Vamos a ver ahora que T es el ECUMV ya que es función de un estimador suficiente y completo y como hemos visto $E[T] = Z(\theta) = \frac{1}{\theta}$.