Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Ejercicios a entregar FLI.

1.- Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Para cada uno de los lenguajes que se proponen a continuación, indica si es regular o no lo es. En caso afirmativo, muestra una expresión regular que caracterice dicho lenguaje. En caso negativo, demuestra la no regularidad del lenguaje aplicando el lema del bombeo y además muestra una gramática incontextual para el lenguaje.

a) $L_1 = \{a^i b^j \mid i$ y j se diferencian como mucho en 2 unidades$\}$

Este lenguaje no es regular. Razonando por reducción al absurdo supongamos que sí lo es. Por el lema del bombeo $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall w \in L_1$ con $|w| \geq n$ se puede descomponer como $w = xyz$ verificando:

i) $|xy| \leq n$.

ii) $y \neq \varepsilon$

iii) $\forall k \geq 0$ $xy^kz \in L$.

En particular, tomando $w = a^n b^n$ ($|w| = 2n \geq n$ y $j = n, i = n$, $|i-j| = 0 \leq 2 \Rightarrow w \in L_1$) se tiene la descomposición $w = xyz$ y se verifica que $s = |xy| \leq n$. Por tanto, $xy = a^s$. De la condición ii) obtenemos que $y = a^l$ con $1 \leq l \leq s$. Aplicando iii) para $k = 4$ se tiene que $xy^kz = a^{s-l}(a^l)^k a^{n-s} b^n = a^{n+l(k-1)} b^n = a^{n+3l} b^n$. Sin embargo, esta palabra no pertenece al lenguaje ya que $|n+3l-n| = |3l| = 3l \geq 3 > 2$. Contradicción.

Damos la gramática incontextual:

$S \longrightarrow aSb \mid a \mid aa \mid b \mid bb \mid \varepsilon$. Intuitivamente, esta gramática incontextual genera el lenguaje porque $S \Rightarrow^* a^n S b^n$ $\forall n \geq 0$ y después se aplica una de las producciones para generar los terminales y cumplir la condición $|i-j| \leq 2$.

b) $L_2 = \{a^m b^n b^n \mid n \cdot m \geq 3\}$

Este lenguaje es regular. Lo podemos escribir como unión de lenguajes regulares, lo que nos facilitará encontrar su expresión regular:

$$L_2 = \{a^m b^{2n} \mid n \cdot m \geq 3\} = \{a^m b^{2n} \mid n=1, m\geq 3\} \cup \{a^m b^{2n} \mid n \geq 3, m=1\} \cup \{a^m b^{2n} \mid n\geq 3, m \geq 3\} =$$

$$= \{a^3 a^k b^2 \mid k \geq 0\} \cup \{a\, b^{2(k+3)} \mid k \geq 0\} \cup \{a^3 a^k b^{2(j+3)} \mid k \geq 0, j \geq 0\} =$$

$$= \{a^3 a^k b^2 \mid k \geq 0\} \cup \{a\, b^{2k} b^6 \mid k \geq 0\} \cup \{a^3 a^k b^{2j} b^6 \mid k \geq 0, j \geq 0\}.$$ Por tanto una expresión regular que caracteriza el lenguaje es:

$$aaaa^* bb + a(bb)^* bbbbbb + aaa\, a^*(bb)^* bbbbbb.$$

c) $L_3 = \{a^n b^k a^m \mid m = n + (k \bmod 2)\}$

Este lenguaje no es regular. Supongamos que sí lo es y sea $p \in \mathbb{N}$ la constante del lema del bombeo. Consideramos la palabra

$w = a^p b^2 a^p$ $(|w| = 2p+2 \geq p)$ que pertenece a L_3 ya que $p = p + (2 \bmod 2)$.

Por tanto tenemos la descomposición $w = xyz$ verificando i), ii) y iii).

Por i), $s = |xy| \leq p$, luego $xy = a^s$. Por ii), $y \neq \varepsilon$ luego y será de la forma $y = a^l$ con $1 \leq l \leq s$. Por iii), sabemos que $xy^k z \in L_3 \ \forall k \geq 0$ luego $xy^kz = a^{s-l}(a^l)^k a^{p-s} b^2 a^p = a^{p+l(k-1)} b^2 a^p \in L_3 \ \forall k \geq 0$. Esto nos lleva a contradicción tomando $k=0$ porque

$p - l < p + 2 \bmod 2 = p$ por ser $l \geq 1$ luego esa palabra no está en L_3.

Proponemos la gramática incontextual:

$S \to aSa \mid X$

$X \to bbX \mid ba \mid \varepsilon$

Intuitivamente, con esta GIC podemos hacer $S \Rightarrow^* a^n X a^n \ \forall n \geq 0$ y a partir de este punto, añadimos una cantidad par de b's. Si la cantidad de b's es impar habrá que añadir una b y una a $(m = n + k \bmod 2)$ y, si no, ε.

d) $L_4 = \{a^n b^m a^k a^l \mid n+l \text{ es par}\} \cup \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$

Veamos que este lenguaje es regular

Denotamos $L_A = \{a^n b^m a^k a^l \mid n+l \text{ es par}\}$ y $L_B = \{b^p a^p \mid p \geq 0\}$.

Es claro que $L_4 = L_A \cup L_B$ ya que solo hemos hecho un renombramiento.

Vamos a ver que $L_B \subset L_A$ y L_A es regular luego $L_4 = L_A \cup L_B = L_A$ será regular.

Si tomamos w una palabra de L_B será de la forma $w = b^p a^p$ con $p \geq 0$, pero $w = a^n b^m a^k a^l$ para $n=0$, $m=p$, $k=p$ y $l=0$ con $n+l=0$ par, luego esta palabra pertenece a L_A. Por tanto $L_B \subset L_A$.

Para ver que L_A es regular escribimos:

$L_A = \{a^n b^m a^k b^l \mid n+l \text{ es par}\} = \{a^n b^m a^k b^l \mid n \text{ y } l \text{ pares}\} \cup \{a^n b^m a^k b^l \mid n \text{ y } l \text{ impares}\}$

Es sencillo ver que este lenguaje tiene como expresión regular:

$$(aa)^* b^* a^* (bb)^* + a(aa)^* b^* a^* (bb)^* b$$

e) $L_5 = \{w \mid \text{la longitud de } w \text{ es un número primo}\}^*$

Vamos a probar que $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{la longitud de } w \text{ no es } 1\}$.

Recordamos que, por definición, los números primos son mayores o iguales que 2. Si tomamos una palabra de L_5 entonces será la concatenación de palabras de longitud prima (es decir, tendrá longitud la suma de números mayores o iguales que 2 y esta longitud será mayor o igual que 2) o será la palabra vacía ε. En cualquiera de los casos la longitud de la palabra no es 1. En sentido contrario, si tomamos una palabra w de longitud $n \neq 1$ distinguimos los casos:

- $n = 0 \Rightarrow w = \varepsilon \in L_5$
- $n \geq 2$
  - n par $\Rightarrow n = 2k$, $k \geq 1$ (w concatenación de k palabras de longitud 2 (primo))
  - n impar $\Rightarrow n = 2k+1$, $k \geq 1$ (w concatenación de $k-1$ palabras de longitud

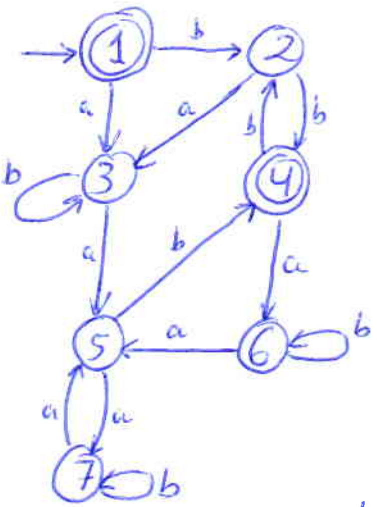
2 (primo) y una palabra de longitud 3 (primo)).

En cualquiera de los casos $w \in L_5$.

Con esta descripción de L_5 es fácil ver que el lenguaje es regular y una expresión regular que lo caracteriza es.

$$\varepsilon + (a+b)(a+b)(a+b)^*$$

2.- Aplica el algoritmo automatizable para minimizar el siguiente AFD. Para cada pareja que marques como distinguible, la notación que utilices debe permitir averiguar claramente por qué y en qué momento consideraste ese par de estados como distinguible. Al final, no olvides mostrar el AFD minimizado.



Hacemos notar que todos los estados son alcanzables luego no es necesario aplicar el algoritmo que elimina estados inalcanzables.

Usamos la notación $X_{i,j}$ para indicar que los estados son distinguibles en el paso i ya que al consumir desde ellos el carácter j nos llevan a estados distinguibles (si $j=\varepsilon$ será porque uno es de aceptación y el otro no). Para indicar que dos estados son indistinguibles en el paso i usamos O_i.

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2	$X_{0,\varepsilon}$						
3	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{1,b}$					
4	O_2	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{0,\varepsilon}$				
5	$X_{0,\varepsilon}$	O_2	$X_{1,b}$	$X_{0,\varepsilon}$			
6	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{1,b}$	O_1	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{1,b}$		
7	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{1,b}$	O_1	$X_{0,\varepsilon}$	$X_{1,b}$	O_1	

Por tanto $1 \equiv 4$, $2 \equiv 5$, $3 \equiv 6 \equiv 7$ y el AFD minimizado es: