I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura................ Fecha ....

Alumno/a .... Curso........ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

11.- Halla los ceros de las siguientes funciones y determina sus órdenes:

a) $f(z)=z^4+2z^2+1$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow z^4+2z^2+1=0 \overset{z^2=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^2+2\omega+1=0 \Leftrightarrow (\omega+1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)^2=0 \Leftrightarrow \left((z+i)(z-i)\right)^2=0 \Leftrightarrow (z+i)^2(z-i)^2=0$$

$$\Rightarrow f(z)=z^4+2z^2+1=(z+i)^2(z-i)^2.$$

Los ceros de la función son i y $-i$ y ambos tienen orden 2.

b) $f(z)=z^3\cos^2 z$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^3=0 \Leftrightarrow z=0 \\ \text{o} \\ \cos^2 z=0 \Leftrightarrow \cos z=0 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Hacemos el desarrollo en serie de Taylor de $g(z)=\cos z$ para cada $k\in\mathbb{Z}$ para saber la multiplicidad de los ceros de $g(z)$

$g(z)=\cos z$ $\qquad g\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$

$g^{1)}(z)=-\operatorname{sen} z$ $\qquad g^{1}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\mp 1$

$g^{2)}(z)=-\cos z$ $\qquad g^{2)}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$

$g^{3)}(z)=\operatorname{sen} z$ $\qquad g^{3)}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\pm 1$

$g^{4)}(z)=\cos z$ $\qquad g^{4)}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$

$$\Rightarrow g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{n)}(z)}{n!}\left(z-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_{n,k}}{n!}\left(z-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)^n$$

donde $\varepsilon_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n impar.

$$\Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{n,k}}{n!} (z-(\pi/2+k\pi)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{n,k}}{n!} (z-(\tfrac{\pi}{2}+k\pi))^n.$$

Por la proposición 14.2.2. la multiplicidad del cero en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ es 1 $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto para $k\in\mathbb{Z}$ $\exists h_k$ función entera que no se anula en $\frac{\pi}{2}+k\pi$ tal que

$$g(z) = \cos z = (z-(\tfrac{\pi}{2}+k\pi)) \cdot h_k(z).$$

Por tanto $\cos^2 z = (z-(\frac{\pi}{2}+k\pi))^2 \cdot h_k^2(z)$

$$f(z) = z^3 \cdot \cos^2 z = (z-(\tfrac{\pi}{2}+k\pi))^2 z^3 h_k^2(z) \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

- Como $\cos^2 0 = 1$ y $\cos^2 z$ en entera entonces 0 es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 3.
- Como $(\frac{\pi}{2}+k\pi)^3 \cdot h_k(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2 \neq 0$ $\forall k$ y $z^3 h_k^2(z)$ es entera $\forall k\in\mathbb{Z}$ entonces $\frac{\pi}{2}+k\pi$ es un cero de $f(z)$ de multiplicidad 2 $\forall k\in\mathbb{Z}$.

---

c) $f(z) = (1-e^{iz}) \operatorname{sen} z$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{iz}=1 \Leftrightarrow z = 2k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}. \\ \text{ó} \\ \operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Por el desarrollo en Serie de Taylor de $g(z) = \operatorname{sen} z$ centrado en $k\pi$ $\forall k\in\mathbb{Z}$ se puede ver que

$$g(z) = \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_{n,k}}{n!}(z-k\pi)^n$$ donde $\mathcal{E}_{n,k}$ es 0 si n es par y ± 1 si n es impar.