HOJA 3

Problema 1

Se desea planificar el cultivo de tres fincas de labranza durante el próximo mes. La superficie cultivable de cada finca medida en hectáreas y el personal disponible, durante el próximo mes en cada una de ellas, se indican en la siguiente tabla.

Finca	Superficie de cultivo (Ha.)	Número de trabajadores
1	300	20
2	640	40
3	445	30

Los empleados trabajan 7 horas diarias, 22 días al mes. Se ha decidido cultivar maíz, que puede ser de tres variedades diferentes denominadas largo (L), mocho (M) y grande (G).

La tabla siguiente indica las superficies máximas que pueden cultivarse con cada variedad (por limitaciones en la disponibilidad de semilla), además del requerimiento de mano de obra por mes y el beneficio esperado en determinada unidad monetaria, por Ha. cultivada, en ambos casos.

Tipo de maíz	Superficie máxima (Ha.)	Mano de obra horas/mes /Ha.	Beneficio/Ha. (Unidades monetarias)
L	**350**	**5**	**800**
M	**510**	**4**	**760**
G	**480**	**6**	**735**

La siembra tiene asociada unos costes mensuales por Ha., diferentes según la finca y el tipo de maíz utilizado, que se indican a continuación en la unidad monetaria considerada.

	L	M	G
1	60	48	52
2	56	51	50
3	53	50	61

Además, se desea hacer una planificación en la que la proporción de superficie dedicada al cultivo del maíz sea la misma en las tres fincas, aunque la proporción respecto de las variedades de maíz plantado no tenga que cumplir tal condición.

Formular el problema de programación lineal que determine el número de hectáreas que deben cultivarse de cada variedad de maíz en cada finca, durante el próximo mes, para maximizar el beneficio.

Solución

Se consideran 9 variables de decisión. Se denota por x_{ij} el número de hectáreas de la finca i dedicadas a cultivo del maíz j, $i = 1, 2, 3; j = L, M, G$.

Se deben considerar restricciones debidas a:

- Limitación de la superficie de cultivo en cada finca.
- Limitación de la superficie para cada variedad de maíz.
- Limitación del número de trabajadores en cada finca.
- Igualdad en la proporción de superficie cultivada en cada finca

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = {} & 800(x_{1L} + x_{2L} + x_{3L}) \\
& +760(x_{1M} + x_{2M} + x_{3M}) \\
& +735(x_{1G} + x_{2G} + x_{3G}) \\
& -\begin{pmatrix} 60x_{1L} + 56\,x_{2L} + 53x_{3L} + 48x_{1M} + 51\,x_{2M} + 50x_{3M} \\ +52x_{1G} + 50\,x_{2G} + 61x_{3G} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = {} & 740x_{1L} + 744\,x_{2L} + 747x_{3L} + 712x_{1M} + 709x_{2M} + 710x_{3M} \\
& +683x_{1G} + 685\,x_{2G} + 674x_{3G}
\end{aligned}
$$

sujeto a:

$$x_{1L} + x_{1M} + x_{1G} \leq 300$$
$$x_{2L} + x_{2M} + x_{2G} \leq 640$$
$$x_{3L} + x_{3M} + x_{3G} \leq 445$$
$$x_{1L} + x_{2L} + x_{3L} \leq 350$$
$$x_{1M} + x_{2M} + x_{3M} \leq 510$$
$$x_{1G} + x_{2G} + x_{3G} \leq 480$$
$$5x_{1L} + 4x_{1M} + 6x_{1G} \leq 3080$$
$$5x_{2L} + 4x_{2M} + 6x_{2G} \leq 6160$$
$$5x_{3L} + 4x_{3M} + 6x_{3G} \leq 4620$$

$$\frac{x_{1L} + x_{1M} + x_{1G}}{300} = \frac{x_{2L} + x_{2M} + x_{2G}}{640}$$

$$\frac{x_{2L} + x_{2M} + x_{2G}}{640} = \frac{x_{3L} + x_{3M} + x_{3G}}{445}$$

$$x_{1L} \geq 0, \quad x_{1M} \geq 0, \quad x_{1G} \geq 0,$$
$$x_{2L} \geq 0, \quad x_{2M} \geq 0, \quad x_{2G} \geq 0,$$
$$x_{3L} \geq 0, \quad x_{3M} \geq 0, \quad x_{3G} \geq 0.$$

Solución óptima:

$$z^* = 952791{,}40$$

$$x_{1L}^* = 0 \qquad x_{1M}^* = 290{,}25 \qquad x_{1G}^* = 0$$
$$x_{2L}^* = 0 \qquad x_{2M}^* = 139{,}21 \qquad x_{2G}^* = 480$$
$$x_{3L}^* = 350 \qquad x_{3M}^* = 80{,}54 \qquad x_{3G}^* = 0$$

$$\frac{290{,}25}{300} = \frac{619{,}21}{640} = \frac{430{,}54}{445} = 0{,}97$$

Problema 2

Una empresa desea planificar la producción de dos productos A y B, para los dos próximos semestres. La producción de cada unidad del producto A requiere una hora de trabajo (regular o extra) y la producción de cada unidad del producto B requiere hora y media de trabajo (regular o extra). Las especificaciones de la demanda de ambos productos y el coste de producción se indican en las siguientes tablas:

	Unidades demandadas	
Producto	1er semestre	2º semestre
A	**750**	**1500**
B	**250**	**600**

	Coste	
Producto	Hora regular	Hora extra
A	**30**	**45**
B	**20**	**30**

La empresa, durante cada semestre, dispone de 1800 horas de trabajo regular y de 750 horas extraordinarias.

Las unidades no vendidas tienen un coste de almacenamiento de 2 unidades monetarias por cada unidad sobrante en el primer semestre y de 1.5 unidades monetarias por cada unidad sobrante en el segundo semestre. Se supone que inicialmente no hay unidades en inventario.

Formular el problema de Programación Lineal que determine la planificación de la producción de A y B de forma que se minimice el coste.

Solución.

Se consideran 8 variables de decisión.

Se denota por x_1 el número de unidades del producto A fabricadas en tiempo de *trabajo regular* en el **primer semestre**.

Se denota por x_2 el número de unidades del producto A fabricadas en tiempo de *trabajo extraordinario* en el **primer semestre**.

Se denota por x_3 el número de unidades del producto B fabricadas en tiempo de *trabajo regular* en el **primer semestre**.

Se denota por x_4 el número de unidades del producto B fabricadas en tiempo de *trabajo extraordinario* en el **primer semestre**.

Se denota por x_5 el número de unidades del producto A fabricadas en tiempo de *trabajo regular* en el **segundo semestre**.

Se denota por x_6 el número de unidades del producto A fabricadas en tiempo de *trabajo extraordinario* en el **segundo semestre**.

Se denota por x_7 el número de unidades del producto B fabricadas en tiempo de *trabajo regular* en el **segundo semestre**.

Se denota por x_8 el número de unidades del producto B fabricadas en tiempo de *trabajo extraordinario* en el **segundo semestre**.

$$\min \quad z = 30(x_1 + x_5) + 45(x_2 + x_6) + 20(1.5)(x_3 + x_7)$$

$$30(1.5)(x_4 + x_8) + 2(x_9 + x_{10}) + 1.5(x_{11} + x_{12}) =$$

$$30(x_1 + x_5) + 45(x_2 + x_6) + 30(x_3 + x_7)$$

$$45(x_4 + x_8) + 2(x_9 + x_{10}) + 1.5(x_{11} + x_{12})$$

Siendo $x_9 + x_{10}$ el número de unidades sobrantes en el primer semestre y $x_{11} + x_{12}$ el número de unidades sobrantes en el segundo semestre

$$x_1 + x_2 \geq 750 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 - x_9 = 750$$

$$x_3 + x_4 \geq 250 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 + x_4 - x_{10} = 250$$

$$x_5 + x_6 + x_9 \geq 1500 \quad \Leftrightarrow \quad x_5 + x_6 + x_9 - x_{11} = 1500$$

$$x_7 + x_8 + x_{10} \geq 600 \quad \Leftrightarrow \quad x_7 + x_8 + x_{10} - x_{12} = 600$$

$$x_1 + 1.5\, x_3 \leq 1800$$

$$x_2 + 1.5\, x_4 \leq 750$$

$$x_5 + 1.5\, x_7 \leq 1800$$

$$x_6 + 1.5\, x_8 \leq 750$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, 12$$

$$x_j \ \text{entero} \qquad j = 1, \ldots, 12$$

Solución óptima:

$$z^* = 93800$$

$$x_1^* = 750 \qquad x_2^* = 0 \qquad x_3^* = 650 \qquad x_4^* = 0$$

$$x_5^* = 1500 \qquad x_6^* = 0 \qquad x_7^* = 200 \qquad x_8^* = 0$$

$$x_9^* = 0 \qquad x_{10}^* = 400 \qquad x_{11}^* = 0 \qquad x_{12}^* = 0$$

$$x_{13}^* = 75 \qquad x_{14}^* = 750 \qquad x_{15}^* = 0 \qquad x_{16}^* = 750$$

Siendo x_{13}^*, x_{14}^*, x_{15}^* y x_{16}^* las variables de holgura de las cuatro últimas restricciones

Problema 3

Una empresa de alimentación para animales, produce pienso que elabora mezclando tres ingredientes, A, B y C. Cada kilo de uno de estos ingredientes, contiene un número determinado de unidades de calcio, fósforo, magnesio y hierro, que se indican en la siguiente tabla:

	A	**B**	**C**
Calcio	**12**	**18**	**30**
Fósforo	**14**	**27**	**19**
Magnesio	**23**	**25**	**15**
Hierro	**20**	**32**	**10**

El coste, por kilo, de los ingredientes A, B y C es de 14 euros, 16.8 euros y 15.2 euros respectivamente.

La empresa debe decidir la composición de cada kilo de pienso, teniendo en cuenta las siguientes condiciones. El pienso que se elabore debe contener, por kilo, al menos 18 unidades de calcio, 20 de fósforo y 22 de magnesio. Además, respecto del hierro, debe contener al menos 14 unidades y a lo sumo 26, por kilo.

Debido a que la llegada de los ingredientes se produce al comienzo de cada mes, la planificación de la producción debe hacerse para este periodo de tiempo. Al comienzo del próximo mes se dispondrá de 6 toneladas del ingrediente A, 4 toneladas del ingrediente B y 5 toneladas del ingrediente C. Se conoce que la demanda del pienso para el próximo mes será de 9 toneladas.

Formular el problema de Programación Lineal que permita determinar la composición de cada kilo de pienso que debe elaborarse, para minimizar el coste.

Solución

Se denota por x_1 la cantidad (en Kg.) del ingrediente A en un Kg, de pienso.

Se denota por x_2 la cantidad (en Kg.) del ingrediente B en un Kg, de pienso.

Se denota por x_3 la cantidad (en Kg.) del ingrediente C en un Kg, de pienso.

Debe verificarse: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$$\min \ z = 14\, x_1 + 16.8\, x_2 + 15.2\, x_3$$

Sujeto a.:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$12x_1 + 18x_2 + 30x_3 \geq 18$$

$$14x_1 + 27x_2 + 19x_3 \geq 20$$

$$23x_1 + 25x_2 + 15x_3 \geq 22$$

$$20x_1 + 32x_2 + 10x_3 \geq 14$$

$$20x_1 + 32x_2 + 10x_3 \leq 26$$

$$9000\, x_1 \leq 6000$$

$$9000\, x_2 \leq 4000$$

$$9000\, x_3 \leq 5000$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Solución óptima:

$$z^* = 15{,}3176$$

$$x_1^* = 0{,}4118 \qquad x_2^* = 0{,}3824 \qquad x_3^* = 0{,}2058$$

$$\boldsymbol{x_4^* = 0} \qquad \boldsymbol{x_5^* = 0}$$

$$x_6^* = 0{,}1176 \qquad x_7^* = 8{,}5294 \qquad x_8^* = 3{,}4706$$

$$x_9^* = 2294{,}10 \qquad x_{10}^* = 558{,}80 \qquad x_{11}^* = 3147{,}10$$

Siendo $x_4^*, \ldots, x_{11}^*$ las variables de holgura de las restricciones