ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. GRUPO M3 (19-20).
CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.

Generalidades en grupos. Finitos, Abelianos y Cíclicos. Orden. Subgrupos.

1. Sean G un grupo y $g \in G$ arbitrario. Probar que las aplicaciones multiplicación a izquierda $L_g : G \to G, h \mapsto gh$; y a derecha $R_g : G \to G, h \mapsto hg$; son biyectivas.
2. Dados G un grupo, $k \in \mathbb{N}$ y $g \in G$ arbitrarios, demostrar que
$$\operatorname{ord}\left(g^k\right) = \frac{|G|}{\operatorname{mcd}(k, |G|)}.$$
3. El *grupo cuaternión* se define como
$$Q = \left\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \;:\; i^2 = j^2 = k^2 = -1;\; ijk = -1\right\}.$$
   (i) Calcular el orden de cada elemento, y determinar la tabla de multiplicar para Q.
   (ii) Describir todos los subgrupos de Q. Demostrar que $i^n j i^n = j$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   (iii) Estudiar si Q es abeliano, y determinar su centro.
4. Sea $\mathcal{D}_n$ el *n-ésimo grupo diédrico* (a saber, el subgrupo de $\mathrm{O}(2)$ que deja invariante el grupo $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ de las raíces n-ésimas de la unidad).
   (i) Probar que $|\mathcal{D}_n| \leq 2n$. Concluir la igualdad a partir de probar que
$$\mathcal{D}_n = \{\mathrm{Id}, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \tau, \tau\rho, \ldots, \tau\rho^{n-1}\},$$
   con $\rho \in \mathrm{SO}(2)$ la rotación de ángulo $2\pi/n$ y $\tau \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$ la conjugación.
   (ii) Calcular el orden para cada elemento de $\mathcal{D}_n$. Demostrar que $\rho^k \tau \rho^k = \tau$.
   (iii) Demostrar que $\mathcal{D}_n$ no es abeliano para $n \geq 3$. Calcular el centro de $\mathcal{D}_n$.
   (iv) Calcular todos los subgrupos de $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ y $\mathcal{D}_5$.
5. Sean G un grupo finito y n un entero positivo.
   (i) Suponiendo que el orden de todo elemento en G divide a n, estudiar si $|G| \mid n$.
   (ii) Supongamos ahora que G es abeliano, y sea H_n el subconjunto de G formado por los elementos cuyo orden es divisor de n. Demostrar que H_n es un subgrupo. ¿Qué pasa si G NO es abeliano?
   (iii) Si $n = n_1 n_2$ con $\operatorname{mcd}(n_1, n_2) = 1$ es el orden de $g \in G$ arbitrario, probar que existen $g_1, g_2 \in G$ de orden n_1 y n_2 respectivamente con $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$.
6. Sean G un grupo, $H < G$ un subgrupo y $x \in G$ de orden n. Supongamos que $m \in \mathbb{Z}$ es un número coprimo con n tal que $x^m \in H$. Demostrar que $x \in H$.
7. Sea G un grupo. Probar que $g \in G$ no trivial tiene orden 2 si, y solo si, coincide con su inverso. Concluir que G es abeliano si $\operatorname{ord}(g) = 2$ para todo $g \in G - \{1\}$.
8. Demostrar que, dados cinco números naturales cualesquiera, existen tres de forma que su suma es un múltiplo de tres.
9. Sean H y K subgrupos de un grupo G. Demostrar que $H \cup K$ es un subgrupo de G si, y solo si, uno de ellos es subgrupo del otro. Concluir que un grupo nunca puede ser la unión de dos subgrupos propios.
10. Demostrar que el grupo producto cartesiano de dos grupos no triviales cuyos órdenes no sean coprimos **nunca** puede ser un grupo cíclico.
11. Demostrar que, si $H_1, \ldots, H_n$ son subgrupos de índices finitos en G grupo arbitrario, entonces la intersección $H_1 \cap \cdots \cap H_n$ es también un subgrupo de índice finito en G.
12. Sean G un grupo y $H, K \leq G$ con $x, y \in G$ tal que $Hx = Ky$. Probar que $H = K$.

13. El objetivo de este ejercicio es probar que $(\mathbb{Q}, +)$ no puede ser finitamente generado.
    (i) Sean $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$ enteros no nulos y $d = \mathrm{mcd}(m_1, \ldots, m_r)$. Demostrar que el subgrupo de $\mathbb{Z}$ generado por $m_1, \ldots, m_r$ es $d\mathbb{Z}$.
    (ii) Probar que todo subgrupo finitamente generado de $(\mathbb{Q}, +)$ es cíclico.
    (iii) Concluir que $(\mathbb{Q}, +)$ no puede ser finitamente generado.
14. Clasificar todos los subgrupos finitos de $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{C}^*$.
15. Sean G un grupo finito y p el menor primo divisor de $|G|$.
    (i) Dado $S \subseteq G$ con $|S| > |G|/2$ un **subconjunto**, ¿se puede asegurar que $G = \langle S \rangle$?
    (ii) Si $H \leq G$ verifica que $|G : H| < p$, ¿se puede asegurar que $G = H$?

Homomorfismos. Subgrupos normales. Grupo cociente. Teoremas de Isomorfía.

16. Demostrar que en un grupo la *aplicación conjugación* es un automorfismo de grupos. Como consecuencia, dados G un grupo y $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, probar que si existe un único $g \in G$ de orden n dado, entonces $g \in Z(G)$. Calcular el valor de n.
17. Sean G un grupo y H un subgrupo en G de índice n.
    (i) Estudiar si $g^n \in H$ para cada $g \in G$.
    (ii) ¿Si $n = 2$ se puede asegurar que H es subgrupo normal?
18. Sean H y K subgrupos normales de G grupo tales que $G/H \cong G/K$. ¿Es $H \cong K$?
19. Sean H y K dos subgrupos de un grupo G.
    (i) Demostrar que $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ es también subgrupo de G si, y sólo si, es $HK = KH$. Deducir que, si H es normal, entonces $HK \leq G$.
    (ii) Probar que $Z(G)$ es normal. Deducir que $HZ(G)$ es abeliano si lo es H.
    (iii) Supongamos ahora que H y K son normales y cíclicos con $\mathrm{mcd}(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que HK es un subgrupo cíclico de G con orden $|H|\,|K|$.
20. Dar un ejemplo para cada uno de los casos siguientes:
    (i) Grupo finito no abeliano cuyos subgrupos sean todos normales.
    (ii) Grupo cíclico de orden no primo.
21. Sean G un grupo y $H \leq Z(G)$. Demostrar que G es abeliano si G/H es cíclico.
22. Sean G un grupo con $g \in G$ y $N \trianglelefteq G$. Probar que $g \in N$ si $\mathrm{mcd}\,(\mathrm{ord}(g), |G/N|) = 1$.
23. ¿Existen homomorfismos no triviales entre dos grupos finitos de órdenes coprimos?
24. Sean G_1 y G_2 dos grupos con $N_i \trianglelefteq G_i$ para cada $i \in \{1, 2\}$ y $f\colon G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorfismo de grupos con $f(N_1) \leq N_2$. Probar que f induce un homomorfismo de grupos entre G_1/N_1 y G_2/N_2. ¿Qué sucede si $f(N_1)$ NO es subgrupo de N_2?
25. Dados G un grupo cíclico y $d \geq 0$ un divisor del orden, probar que su único subgrupo con orden d es $H_d = \{g \in G : g^d = 1\}$. Estudiar si $H = \{y \in G : \exists\, x \in G \text{ con } x^d = y\}$ es un subgrupo, y determinar su orden.
26. Sea G un grupo finito y $f \in \mathrm{Aut}(G)$ un automorfismo que sólo fija el elemento neutro.
    (i) Demostrar que $G = \{g^{-1}f(g) : g \in G\}$.
    (ii) Probar que si $f^2 = \mathrm{Id}$ entonces $f \equiv \cdot^{-1}$ en G. Deducir que G es abeliano.
    (iii) Buscar un contraejemplo al apartado (i) para el caso en el que G no es finito.
27. ¿Bajo que condiciones $f\colon G \longrightarrow G, g \mapsto g^{-1}$; es un automorfismo de grupos?
28. Probar que $G \cong \mathcal{D}_n$ siendo G el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ generado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & \overline{\xi_n} \end{pmatrix} \quad \left(\text{donde } \xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ con } n \geq 3\right).$$

29. Dado G grupo finito arbitrario, demostrar las afirmaciones siguientes:
    (i) Si $|G| = 4$ (esto es, G tiene orden 4), entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ ó $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
    (ii) Si $|G| = 6$ (esto es, G tiene orden 6), entonces G es cíclico ó $G \cong \mathcal{D}_6$.
30. Estudiar si $(\mathbb{Q}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.