Segmento más largo

Dado un vector $X[0..N)$, con $N \geq 0$, hallar la longitud del segmento más largo $[p..q)$ que cumpla cierta propiedad $\mathcal{A}(p,q)$.

$\{N \geq 0\}$
fun segmento-más-largo$(X[0..N)$ **de** *ent*$)$ **dev** r : *ent*
$\{r = (\text{máx } p,q : 0 \leq p \leq q \leq N \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p)\}$

Ejemplo todos los elementos del segmento son 0.

$$\mathcal{A}(p,q) = (\forall i : p \leq i < q : X[i] = 0)$$

¿Qué propiedades cumple $\mathcal{A}$?

Cierta para segmentos vacíos $\mathcal{A}(p,p) = \texttt{cierto}$.

- El vector vacío $(N = 0)$ solo tiene segmentos vacíos.
- Puede suceder que ningún segmento no vacío cumpla la propiedad.

Cerrada bajo prefijos (por la izquierda) $\mathcal{A}(p,q) \Rightarrow (\forall i : p \leq i \leq q : \mathcal{A}(p,i))$

Cerrada bajo sufijos (por la derecha) $\mathcal{A}(p,q) \Rightarrow (\forall i : p \leq i \leq q : \mathcal{A}(i,q))$

Todos cero

Invariante $I \equiv 0 \leq n \leq N \ \wedge \ r = (\text{máx } p,q : 0 \leq p \leq q \leq n \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p)$

Inicialización $n := 0$

$$\begin{array}{rcl} r & := & (\text{máx } p,q : 0 \leq p \leq q \leq 0 \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p) \\ & = & (\text{máx } p,q : p = 0 \wedge q = 0 \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p) = 0 - 0 = 0 \end{array}$$

Función de cota $N - n$

Avanzar $n := n + 1$

$$\begin{array}{rl} & (\text{máx } p,q : 0 \leq p \leq q \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p) \\ = & (\text{máx } p,q : 0 \leq p \leq q \leq n \wedge \mathcal{A}(p,q) : q - p) \\ & \text{máx} \\ & (\text{máx } p : 0 \leq p \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(p,n+1) : (n+1) - p) \\ = & r \ \text{máx } (n + 1 + (\text{máx } p : 0 \leq p \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(p,n+1) : -p)) \\ = & r \ \text{máx } (n + 1 - (\text{mín } p : 0 \leq p \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(p,n+1) : p)) \end{array}$$

$$Q \equiv s = (\text{mín } p : 0 \leq p \leq n \wedge \mathcal{A}(p,n) : p)$$

Restablecer $r := r \ \mathtt{máx} \ (n + 1 - s)$

Todos cero

$\langle n, r, s \rangle := \langle 0, 0, 0 \rangle$;
mientras $n \neq N$ **hacer**
  $\{Q\}$
  ??
  $\{Q_n^{n+1}\}$
  $r := r \;\mathtt{máx}\; (n + 1 - s)$;
  $n := n + 1$
fmientras

$$Q \Leftrightarrow \underbrace{0 \leq s \leq n}_{Q_0} \wedge \underbrace{\mathcal{A}(s,n)}_{Q_1} \wedge \underbrace{(\forall p : 0 \leq p < s : \neg\mathcal{A}(p,n))}_{Q_2}$$

$$Q_n^{n+1} \equiv 0 \leq s \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(s,n+1) \wedge (\forall p : 0 \leq p < s : \neg\mathcal{A}(p,n+1))$$

¿$Q_0 \wedge Q_1 \wedge Q_2 \Rightarrow Q_n^{n+1}$?

- $Q_0 \Rightarrow 0 \leq s \leq n+1$
- $Q_2 \Rightarrow (\forall p : 0 \leq p < s : \neg\mathcal{A}(p,n+1))$ por ser $\mathcal{A}$ cerrada bajo prefijos.
- ¿$\mathcal{A}(s,n+1)$? ¿Actualizar s?
  $Q_2 \Rightarrow (\text{mín } p : 0 \leq p \leq n+1 \wedge \mathcal{A}(p,n+1) : p) \geq s$.
  Investigar valores de p tales que $s \leq p \leq n+1$.

Todos cero

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}(p,n+1) & \Leftrightarrow & (\forall i : p \leq i < n+1 : X[i] = 0) \\
 & \overset{p\leq n}{\Leftrightarrow} & (\forall i : p \leq i < n : X[i] = 0) \ \wedge \ (X[n] = 0) \\
 & \Leftrightarrow & \mathcal{A}(p,n) \ \wedge \ (X[n] = 0)
\end{array}
$$

1. $Q \ \wedge \ X[n] = 0 \Rightarrow Q_n^{n+1}$
2. $Q \ \wedge \ X[n] \neq 0 \Rightarrow (Q_n^{n+1})_s^{n+1}$
   Pues si $X[n] \neq 0$ entonces $(\forall p : s \leq p \leq n : \neg\mathcal{A}(p,n+1))$

Todos cero

$\{N \geq 0\}$
fun todos-cero$(X[0..N)$ **de** *ent*$)$ **dev** r : *ent*
var n, s : *ent*
    $\langle n, r, s \rangle := \langle 0, 0, 0 \rangle$;
    $\{I \wedge Q\}$
    mientras $n \neq N$ **hacer**
        si $X[n] \neq 0$ **entonces**
            $s := n + 1$
        fsi ;
        $r := r \;\mathtt{máx}\; (n + 1 - s)$;
        $n := n + 1$
    fmientras
ffun
$\{r = (\text{máx}\ p, q : 0 \leq p \leq q \leq N \wedge (\forall i : p \leq i < q : X[i] = 0) : q - p)\}$

Coste: $\Theta(N)$