Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Inf - Mat

DNI: 11867802-D Fecha: 17/12/2020

Examen I.O

1.-

Para añadir esa nueva variable calculamos el vector $Y_6 = B^{-1}a_6$

$$\Rightarrow Y_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

El coste reducido será $\bar{c}_6 = c_6 - c_B^t B^{-1} a_6 = c_6 - c_B^t Y_6 =$

$= -1 - (-1, 2)\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 - (-1) = 0$. Por tanto, la solución asociada a la tabla que teníamos sigue siendo óptima, pero ahora la solución ya no es única. La nueva tabla es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	5	1	3	-5	24
x_1	1	0	4	1	2	-3	21
	0	0	-2	-1	-1	0	z-18

Detectamos que hay una dirección extrema en la que la función objetivo mantiene su valor óptimo así que el conjunto de soluciones es:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \mu \geq 0 \quad \text{y} \quad z^* = 18.$$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI: 11867802-D

2.-

El nuevo vector x_B^* será

$$x_B^* = B^{-1} b' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la nueva tabla del Simplex queda:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1/2	1	1/2	0	3
x_1	1	$\boxed{-1/2}$	0	-1/6	1/3	-2/3
	0	4	0	4	2	$z-(-26)$

Como no tenemos factibilidad primal pero sí factibilidad dual aplicamos el algoritmo dual del Simplex.

Entra en la base x_2 y sale x_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	0	1	1/3	1/3	7/3
x_2	-2	1	0	1/3	-2/3	4/3
	8	0	0	8/3	14/3	$z-(-62/3)$

Esta tabla presenta solución óptima factible y además es única. Esta es:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad z^* = -\frac{62}{3}$$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI: 11867802-D

3.-

En primer lugar observamos que la solución óptima de la que partíamos no verifica la nueva restricción ya que $2\cdot 0 - 20 - 3\cdot 0 < -10$

Introducimos por tanto la restricción $-2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10$. Para ello aumentamos la base considerando la nueva variable de holgura x_6 y escribimos la nueva tabla (con x_6 en la base):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	-1	1	3	1	0	0	20
x_5	8	0	-1	-2	1	0	5
x_6	-1	0	0	-1	0	1	-10
	0	0	-2	-5	0	0	$z-100$

Como tenemos factibilidad dual aplicamos el algoritmo dual del simplex. Entra en la base la variable x_1 y sale x_6.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	3	2	0	-1	30
x_5	0	0	-1	-10	1	8	-75
x_1	1	0	0	1	0	-1	10
	0	0	-2	-5	0	0	$z-100$

Ejecutamos otra iteración en la que entra en la base x_4 y sale x_5

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	14/5	0	1/5	3/5	15
x_4	0	0	1/10	1	-1/10	-4/5	15/2
x_1	1	0	-1/10	0	1/10	-1/5	5/2
	0	0	-3/2	0	-1/2	-4	$z-125/2$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI: 11867802-D

Hemos llegado a una tabla óptima con solución óptima única que es:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15 \\ 0 \\ 15/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad z^* = \frac{125}{2}$$

4.-

Vamos a aplicar el Corolario del Teorema de la Holgura complementaria. En primer lugar ponemos el problema primal de minimización en forma canónica:

$$\begin{aligned} \min \; z &= -6x_1 + 2x_2 - 10x_3 \\ \text{s.a.} \quad & +3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq -5 \\ & -6x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} 3x_1^* - x_2^* - 4x_3^* &= -5 \geq -5 \\ -6x_1^* + x_2^* - 2x_3^* &= -10 \geq -10 \end{aligned}$$

por lo que la solución es factible.

Si consideramos el problema dual, este es:

Juan Carlos Llamas Núñez DNI: 11867802-D

$$\max\ w = -5y_1 - 10y_2$$

$$\text{s.a.}\quad \begin{aligned} 3y_1 - 6y_2 &\le -6 \\ -y_1 + y_2 &\le 2 \\ -4y_1 - 2y_2 &\le -10 \\ y_1, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Como las variables x_1^* y x_3^* son estrictamente mayores que 0 entonces la primera y tercera restricción del dual debe cumplirse con igualdad para la solución óptima:

$$\begin{cases} 3y_1^* - 6y_2^* = -6 \\ -4y_1^* - 2y_2^* = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 3y_1^* - 6y_2^* &= -6 \\ 12y_1^* + 6y_2^* &= 30 \\ \hline 15y_1^* \quad &= 24 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} y_1^* &= \frac{8}{5} \ge 0 \\ y_2^* &= \frac{9}{5} \ge 0 \end{aligned}$$

Esta solución verifica la segunda restricción del dual

$\left(-\frac{8}{5} + \frac{9}{5} = \frac{1}{5} \le 2\right)$ y se tiene que $w^* = -26 = -26 = z^*$

Por tanto concluimos que $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución óptima del primal y $\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 9/5 \end{pmatrix}$ es solución óptima del dual.