1.-

i) Dar un ejemplo de una homografía $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sin puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma?

Para este ejemplo imponemos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ya que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ cualquier homografía tiene puntos fijos.

Consideramos
$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^1 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [-x_1 : x_0] \end{aligned}$$
habiendo fijado una cierta referencia proyectiva $\mathcal{R}$. La clase de equivalencia de matrices $M_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(f)$ tiene como representante

$$M_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La aplicación es claramente inyectiva por lo que f es una homografía y el conjunto de puntos fijos de f, en coordenadas respecto a $\mathcal{R}$, es el conjunto de soluciones del sistema

$$\lambda x^t = M_{\mathcal{R}}(f) x^t \qquad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\Updownarrow$$
$$(M_{\mathcal{R}}(f) - \lambda Id_2) x^t = 0$$

que tiene solución no trivial sí y solo sí $\det(M_{\mathcal{R}}(f) - \lambda Id_2) \neq 0$. Esto nos conduce al cálculo del polinomio característico de $\hat{f}$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

que no tiene raíces reales

Por tanto la única solución es la trivial por lo que f no tiene puntos fijos. Por otro lado, sabemos que para que f sea la completación proyectiva de una aplicación afín se debe verificar que $f(\mathbb{A}_\infty \setminus Z(f)) \subset \mathbb{A}_\infty$.

$\mathbb{A}_\infty$ es un hiperplano de $\mathbb{P}^1$, es decir, un punto por ser la dimensión 1. Por lo visto anteriormente f no tiene puntos fijos por lo que esta condición no se verifica para ningún $\mathbb{A}_\infty$ que fijemos por lo que f no puede ser la completación proyectiva de ninguna aplicación afín.

ii) Dar un ejemplo de una homografía $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ con un único punto fijo. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de la recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es.

Sea $$\begin{aligned} f: \mathbb{P}^1 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0 : x_0 + x_1] \end{aligned}$$ que tiene como representante de la clase de equivalencia de las matrices de f respecto a una cierta referencia R

$$M_R(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ La aplicación es inyectiva y por tanto es una homografía.

El polinomio característico de esta matriz es:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$ por lo que tenemos un único autovalor $\lambda = 1$.

Para ese valor, la solución del sistema $(M_R(f) - \lambda Id_2)\, x^t = 0$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_0 = 0$$, es decir, el punto proyectivo $P = [0:1]$. Este es el único punto fijo de la aplicación f.

Como $f(P) = P$ y si definimos $\mathbb{A} = \mathbb{P}^1 \setminus P$ con el modelo $\{x_0 = 1\}$ se tiene que la aplicación afín $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, $x_1 \longmapsto 1 + x_1$ tiene como completada proyectiva f. Esta restricción es una traslación por lo que f, que es su completación proyectiva, es una elación.

iii) Dar un ejemplo de una homografía $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ con exactamente dos puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo identificar qué tipo es.

Sea $f: \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$

$[x_0 : x_1] \longmapsto [x_0 : 2x_1]$ con respecto a una cierta referencia R

y que tiene como matriz de la aplicación la clase de equivalencia con representante $M_R(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La aplicación es inyectiva por lo que f es una homografía y los autovalores de la matriz son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. Las soluciones a los sistemas $(M_R(f) - \lambda Id_2)x^t = 0$ son los puntos proyectivos $P_1 = [1:0]$ y $P_2 = [0:1]$

Si consideramos $\mathbb{A} = \mathbb{P}^1 \setminus P_2$ y tomamos como modelo $\{x_0 = 1\}$ por ser P_2 un hiperplano invariante por f se tiene que

$$f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$x_1 \longmapsto 2x_1$$

es una aplicación afín cuya completación proyectiva es f. Esta restricción es la homotecia de centro O y razón 2 y su completación proyectiva es f, que es una homología.

Nota: Si hubieramos tomado como hiperplano de infinito el punto P_1 podíamos haber definido $\mathbb{A}' = \mathbb{P}^1 \setminus P_1$ y hubieramos obtenido una aplicación

$$f|_{\mathbb{A}'} : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$x_0 \longmapsto \frac{x_0}{2}$$

que es una homotecia de centro O y razón $\frac{1}{2}$

iv) Dar un ejemplo de una homografía $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ con al menos tres puntos fijos. ¿Puede ser f la completación proyectiva de alguna aplicación afín de una recta afín en sí misma? En caso afirmativo, identificar de qué tipo es:

Sea
$$f : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[x_0 : x_1] \longmapsto [x_0 : x_1]$$

la identidad, que es una homografía y deja fijo todo el espacio $\mathbb{P}^1$ y en particular 3 puntos

Tomando como hiperplano de infinito $P = [0:1]$ entonces si

$\mathbb{A} = \mathbb{P}^1 \setminus P$ con el modelo $\{x_0 = 1\}$, la aplicación

$$f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$
$$x_1 \longmapsto x_1$$

que es la identidad en $\mathbb{A}$ tiene como completación proyectiva f.