Grupo 1:		Calificación
Integrantes:	Golhen Mateo, Clara Nathalie González López, Francisco José Miret Ortega, Miguel Polo Rodríguez, Beatriz SANTO-TOMÁS ROS, PABLO	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sean p un primo impar y denotamos $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$, $\theta := \frac{2\pi}{p}$, $\zeta := e^{\mathtt{i}\theta}$ y $\mathtt{c} := \cos\theta$.*

(i) *¿Cuál es el grado de la extensión $[\mathbb{Q}(\mathtt{c}) : \mathbb{Q}]$?*

(ii) *Probar que la extensión $\mathbb{Q}(\mathtt{c})|\mathbb{Q}$ es de Galois y que el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\mathtt{c}) : \mathbb{Q})$ es cíclico.*

(iii) *Demostrar que para cada subgrupo H del grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ el elemento*

$$u_H := \sum_{\tau \in H} \tau(\zeta)$$

pertenece a $\mathrm{Fix}(H)$.

(iv) *Sean $\mathtt{s} := \sin\theta$ e $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$. Probar que $\left(\sqrt{1-\mathtt{s}^2} + \mathtt{i}\mathtt{s}\right)^p = \left(\sqrt{1-\mathtt{s}^2} - \mathtt{i}\mathtt{s}\right)^p$.*

(v) *Hallar el polinomio mínimo de $\mathtt{s}$ sobre $\mathbb{Q}$.*

(vi) *¿Cuál es el grado de la extensión $[\mathbb{Q}(\mathtt{s}) : \mathbb{Q}]$?*

(vii) *¿Contiene $\mathbb{Q}(\zeta)$ a $\mathtt{s}$?*

(viii) *¿Cuál es el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\mathtt{s}, \mathtt{c})|\mathbb{Q}(\mathtt{c})$? ¿Y el de $\mathbb{Q}(\mathtt{s}, \mathtt{c})|\mathbb{Q}$?*

En los apartado (ix), (x) *y* (xi) *suponemos que $p := 13$.*

(ix) *Demostrar que el automorfismo $\sigma \in G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ definido por $\sigma(\zeta) = \zeta^2$ genera el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$*

(x) *Emplear, si se desea, los dos apartados anteriores para encontrar elementos primitivos de todas las subextensiones de $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ para $p = 13$.*

(xi) *Encontrar elementos primitivos de las subextensiones propias de la extensión $\mathbb{Q}(\mathtt{c})|\mathbb{Q}$.*

Grupo 2:		**Calificación**
Integrantes:	Benaroya Garzas, Isidro Carpes Martínez, Antonio Alberto MUELA CASCALLANA, JUAN JOSÉ Hernán Zazo, Manuel LÓPEZ MAYORAL, RAQUEL	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Consideramos los números complejos* $\zeta := e^{2\pi\mathtt{i}/25}$ *y* $\alpha := r\zeta$*, donde* $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ *y* $r := \sqrt[5]{5}$ *denota el único número real cuya potencia quinta es* 5.

(i) *Demostrar que el polinomio* $f := \mathtt{t}^{20} + \mathtt{t}^{15} + \mathtt{t}^{10} + \mathtt{t}^5 + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ *y que* ζ *es una de sus raíces. Expresar en función de* ζ *todas las raíces de* f *en* $\mathbb{C}$.

(ii) *Sean* $L_1 := \mathbb{Q}(\zeta)$ *y* $L_2 := \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$. *Demostrar que los grados de las extensiones* $L_1|\mathbb{Q}$ *y* $L_2|\mathbb{Q}$ *son, respectivamente,* 20 *y* 100*, y que ambas son de Galois.*

(iii) *Sea* $L_3 := \mathbb{Q}(\alpha)$. *Probar que* $L_3|\mathbb{Q}$ *tiene grado* 20*, que*

$$g := \mathtt{t}^{20} + 5\mathtt{t}^{15} + 25\mathtt{t}^{10} + 125\mathtt{t}^5 + 625$$

es el polinomio mínimo de α *sobre* $\mathbb{Q}$ *y expresar sus raíces en función de* ζ *y* r. *Probar que* $L_3|\mathbb{Q}$ *no es de Galois. Hallar un sistema finito de generadores del cuerpo de descomposición* $\mathbb{Q}_g$ *de* g *sobre* $\mathbb{Q}$ *y calcular el grado de la extensión* $\mathbb{Q}_g|\mathbb{Q}$.

(iv) *Determinar cuáles de los grupos de Galois* $G_k := G(L_k : \mathbb{Q})$*, donde* $k = 2, 3$*, son abelianos.*

En lo sucesivo denotamos $L := L_2$ *y* $G := G_2$.

(v) *Demostrar que* $L = \mathbb{Q}(\zeta, r)$ *y expresar los automorfismos del grupo de Galois* G *en términos de los generadores* ζ *y* r *de la extensión* $L|\mathbb{Q}$. *Encontrar un sistema generador de* G *formado por dos elementos* ϕ, ψ.

(vi) *Expresar el algoritmo de la múltiplicación en* G *en términos de la expresión de los automorfismos del grupo de Galois* G *usando los generadores* ζ *y* r *obtenidos en el apartado (6).*

(vii) *Demostrar que en un grupo cíclico de orden 20 hay un elemento de orden* 1*, un elemento de orden* 2*, dos elementos de orden* 4*, cuatro elementos de orden* 5*, cuatro elementos de orden* 10 *y ocho elementos de orden* 20.

(viii) *Demostrar que* G *posee, exactamente, un elemento de orden* 1*, cinco elementos de orden* 2*, diez elementos de orden* 4*, veinticuatro elementos de orden* 5*, veinte elementos de orden* 10 *y cuarenta elementos de orden* 20.

(ix) *Probar que* $L|\mathbb{Q}$ *tiene una única subextensión de grado* 4 *y, exactamente, cinco subextensiones de grado* 25. *¿Cuántas de las seis subextensiones anteriores son de Galois?*

(x) *Probar que* $h := \mathtt{t}^5 - 10\mathtt{t}^3 + 5\mathtt{t}^2 + 10\mathtt{t} + 1$ *tiene por raíz a* $\zeta + \zeta^{-1} + \zeta^7 + \zeta^{-7}$.

(xi) *Encontrar conjuntos finitos de generadores de cada subextensión de* $L|\mathbb{Q}$.

Grupo 3:		**Calificación**
Integrantes:	ALEMANY SÁNCHEZ, ÍÑIGO ALMAGRO SÁNCHEZ, ALBERTO LLAMAS NÚÑEZ, JUAN CARLOS REY GISBERT, ENRIQUE TORRE PIÑANA, PABLO	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sea* $u := \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. *Demostrar que* $\mathbb{Q}(u)|\mathbb{Q}$ *es una extensión de Galois y calcular el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q})$.

2. *Sea* $\mathbb{Q}_f \subset \mathbb{C}$ *el cuerpo de descomposición sobre* $\mathbb{Q}$ *del polinomio* $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^8 - 2$.

(i) *Calcular el número de subextensiones de grado* 8 *de* $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$.

(ii) *¿Es diedral el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}_f:\mathbb{Q})$*?*

(iii) *Encontrar un conjunto finito de generadores de una subextensión* $F|\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ *tal que el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}_f:F)$ *sea cíclico de orden* 8.

3. (i) *Sea* $\zeta := e^{2\pi\mathtt{i}/5}$, *donde* $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$. *Demostrar que* $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

(ii) *Sea* $E := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. *Calcular el grado de las extensiones* $E(\sqrt[10]{5})|E$ *y* $E(e^{\pi\mathtt{i}/5})|E$.

(iii) *Sea* $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^{10} - 5$ *y* $\mathbb{Q}_f \subset \mathbb{C}$ *un cuerpo de descomposición de* f *sobre* $\mathbb{Q}$. *Calcular el grado de* $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$.

(iv) *¿Cuántas subextensiones de grado* 5 *tiene* $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$*?*

(v) *Demostrar que* $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\zeta)$.

(vi) *Calcular el polinomio mínimo de* ζ *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Grupo 4:		Calificación
Integrantes:	DÁVILA ROMERO, MANUEL Díaz Bricio, Angela Fernández Blanco, Álvaro ROURICH GONZÁLEZ, ALEJANDRO Torices Sanz, Carlos	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sean* $f := \mathtt{t}^6 - 6\mathtt{t}^3 + 18$ *y* $L \subset \mathbb{C}$ *el cuerpo de descomposición de* f *sobre* $\mathbb{Q}$*. Denotamos* $\theta := \pi/12$,

$$\mathtt{i} := \sqrt{-1}, \quad \eta_1 := \sqrt[3]{1+\mathtt{i}} = \sqrt[6]{2}e^{\theta\mathtt{i}} \quad \& \quad \eta_2 := \sqrt[3]{1-\mathtt{i}} = \sqrt[6]{2}e^{-\theta\mathtt{i}}.$$

(i) *Demostrar que el polinomio* f *es irreducible en* $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(ii) *Demostrar que los números* $\eta := \sqrt[3]{3}(\eta_1+\eta_2)$ *y* $-\sqrt[3]{12}$ *son raíces reales y distintas del polinomio* $g(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^3 - 3\mathtt{t}\sqrt[3]{18} - 6$.

(iii) *Demostrar que el polinomio irreducible de* η *sobre* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{18})$ *tiene grado* 2.

(iv) *Probar que la extensión* $\mathbb{Q}\big(\sqrt[3]{3}\eta_1, \sqrt[3]{3}\eta_2\big)|\mathbb{Q}(\sqrt[3]{18})$ *tiene grado* 4 *y concluir que* $L|\mathbb{Q}$ *tiene grado 12.*

(v) *Encontrar una cantidad finita de generadores de la extensión* $L|\mathbb{Q}$ *del tipo* $\sqrt[\ell]{n}$ *para* n, ℓ *enteros adecuados.*

(vi) *Describir los* $\mathbb{Q}$*-automorfismos de* L *en términos de los generadores de la extensión* $L|\mathbb{Q}$ *obtenidos en el apartado anterior.*

(vii) *Probar que el grupo de Galois* $G := G(L : \mathbb{Q})$ *es isomorfo al grupo diedral* $\mathcal{D}_6$.

(viii) *Calcular el orden de cada uno de los* $\mathbb{Q}$*-automorfismos de la extensión* $L|\mathbb{Q}$.

(ix) *Probar que* G *tiene exactamente un subgrupo de orden* 1*, siete subgrupos de orden* 2*, un subgrupo de orden* 3*, tres subgrupos de orden* 4*, tres subgrupos de orden* 6 *y un subgrupo de orden* 12*. Determinar la estructura de cada subgrupo de orden 4 y cada subgrupo de orden* 6*, indicando en cada caso, cuántos hay de cada tipo.*

(x) *Para cada divisor positivo* d *del grado* $[L : \mathbb{Q}]$ *calcular cuántas subextensiones tiene* $L|\mathbb{Q}$ *de grado* d*. ¿Son todas de Galois?*

(xi) *Hallar conjuntos finitos de generadores de cada subextensión de* $L|\mathbb{Q}$.

Grupo 5:		**Calificación**
Integrantes:	CASTELLANOS GARCÍA, PABLO DÍAZ RODRÍGUEZ, JUAN CARLOS MARTÍN GÓMEZ, DANIEL PAUL, RICARDO MAURIZIO GARCÍA GARCÍA, ALEJANDRO LUIS	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sean* $u := \sqrt[6]{7}$ *el único número real positivo cuya potencia sexta vale* 7, $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$, $E := \mathbb{Q}(u, \sqrt{3}\mathtt{i})$ *y* $G := G(E : \mathbb{Q})$.

(i) *Calcular el polinomio mínimo de* u *sobre* $\mathbb{Q}$. *Calcular el grado de la extensión* $\mathbb{Q}(u, \mathtt{i})|\mathbb{Q}$.

(ii) *Calcular el polinomio mínimo de* u *sobre* $\mathbb{Q}(\mathtt{i})$.

(iii) *Calcular las raíces del polinomio mínimo de* u *sobre* $\mathbb{Q}$. *Demostrar que* $E|\mathbb{Q}$ *es una extensión de Galois y calcular su grado.*

(iv) *Calcular el orden de los grupos* $H_1 := G(E : \mathbb{Q}(u))$ *y* $H_2 := G(E : \mathbb{Q}(\sqrt{3}\mathtt{i}))$.

(v) *Demostrar que los grupos* H_1 *y* H_2 *del apartado anterior son cíclicos.*

(vi) *Encontrar elementos primitivos de las extensiones* $\mathrm{Fix}(H_1)|\mathbb{Q}$ *y* $\mathrm{Fix}(H_2)|\mathbb{Q}$.

(vii) *Sean* $\sigma, \tau \in G$ *tales que* $H_1 = \langle \tau \rangle$ *y* $H_2 = \langle \sigma \rangle$. *Calcular el orden de* $\sigma\tau$. *Demostrar que* G *es un grupo diedral.*

(viii) *¿Cuáles son los grados de las subextensiones propias de* $E|\mathbb{Q}$*? Encontrar una subextensión de cada uno de dichos grados y calcular conjuntos finitos de generadores de cada una de ellas.*

(ix) *Probar que* $E|\mathbb{Q}$ *posee una única subextensión de grado* 4 *y hallar el polinomio mínimo de uno de sus elementos primitivos. ¿Cuántas subextensiones de* $E|\mathbb{Q}$ *tienen grado* 3*?*

(x) *Sea* σ *el generador del grupo* H_2 *del apartado (7). Encontrar un conjunto finito de generadores de la extensión* $\mathrm{Fix}(\sigma^3)|\mathbb{Q}$. *¿Es de Galois esta extensión?*

Grupo 6:		**Calificación**
Integrantes:	GÓMEZ BLANCO, RUBÉN PÉREZ PEINADOR, ADRIÁN SANJUÁN ESPEJO, ADRIÁN ANGULO ROMO, ALBERTO MORAL ALMANSA, LARA MARIA	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sean p, q_1 y q_2 tres números primos tales que $p-1=q_1q_2$ y el polinomio $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^p - p$. Sea L un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$.*

(i) *Hallar el grado de la extensión $L|\mathbb{Q}$ y un conjunto finito de generadores suyos.*

(ii) *Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L en términos de los generadores de $L|\mathbb{Q}$ obtenidos en el apartado anterior.*

(iii) *¿Es abeliano el grupo de Galois $G := G(L : \mathbb{Q})$?*

(iv) *Calcular los órdenes de los elementos de G.*

(v) *Demostrar que G posee un subgrupo normal de orden p.*

(vi) *En este apartado suponemos que $p = 7$. Demostrar que $L|\mathbb{Q}$ posee alguna subextensión de grado 2 y alguna subextensión de grado 3. Encontrar elementos primitivos de dichas subextensiones y sus polinomios mínimos.*

2. *Sea $\mathbb{Q}_f$ un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de $f(\mathtt{t}) = \mathtt{t}^5 - 4\mathtt{t}$.*

(i) *Dar una base de $\mathbb{Q}_f$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.*

(ii) *Comprobar que el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q})$ de la extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones $\mathbb{S}_5$ generado por dos transposiciones disjuntas.*

(iii) *Para cada subgrupo H de $G(\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q})$, presentar el subcuerpo $\mathrm{Fix}(H)$ de $\mathbb{Q}_f$ fijado por H como extensión finitamente generada de $\mathbb{Q}$. Listar todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}_f$.*

3. *Sea $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$. ¿Pertenece $\sqrt{3}$ al cuerpo $\mathbb{Q}(\mathtt{i}, \sqrt[4]{2})$?*

Grupo 7:		Calificación
Integrantes:	ANDRÉS SEDGWICK, SAMUEL BARRANCO GODOY, ALBERTO CALVET SISÓ, ÓSCAR De La Gándara Fernández, Fernando PASTOR RAMÍREZ, JAVIER	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Consideramos los números complejos* $\zeta := e^{2\pi \mathtt{i}/9}$ *y* $\alpha := r\zeta$, *donde* $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ *y* $r := \sqrt[3]{3}$ *denota el único número real cuyo cubo es* 3.

(i) *Demostrar que el polinomio* $f := \mathtt{t}^6 + \mathtt{t}^3 + 1$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ *y que* ζ *es una de sus raíces. Expresar en función de* ζ *todas las raíces de* f *en* $\mathbb{C}$.

(ii) *Sean* $L_1 := \mathbb{Q}(\zeta)$ *y* $L_2 := \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$. *Demostrar que los grados de las extensiones* $L_1|\mathbb{Q}$ *y* $L_2|\mathbb{Q}$ *son, respectivamente,* 6 *y* 18, *y que ambas son de Galois.*

(iii) *Sea* $L_3 := \mathbb{Q}(\alpha)$. *Demostrar que la extensión* $L_3|\mathbb{Q}$ *tiene grado* 6 *y no es de Galois. Probar que* $g := \mathtt{t}^6 + 3\mathtt{t}^3 + 9$ *es el polinomio mínimo de* α *sobre* $\mathbb{Q}$. *Expresar sus raíces en función de* ζ *y* r. *Obtener un sistema finito de generadores del cuerpo de descomposición* $\mathbb{Q}_g$ *de* g *sobre* $\mathbb{Q}$ *y calcular el grado de la extensión* $\mathbb{Q}_g|\mathbb{Q}$.

(iv) *Determinar cuáles de los grupos de Galois* $G_k := G(L_k : \mathbb{Q})$, *donde* $k = 2, 3$, *son abelianos.*

En lo sucesivo denotamos $L := L_2$ *y* $G := G_2$.

(v) *Demostrar que* $L = \mathbb{Q}(\zeta, r)$ *y expresar los elementos del grupo de Galois* G *en términos de su acción sobre los generadores* ζ *y* r *de la extensión* $L|\mathbb{Q}$. *Encontrar un sistema generador del grupo* G *formado por dos elementos.*

(vi) *Demostrar que* G *posee, exactamente, un elemento de orden* 1, *tres elementos de orden* 2, *ocho de orden* 3 *y seis de orden* 6.

(vii) *Probar que* G *tiene, exactamente, un subgrupo de orden* 1, *tres subgrupos de orden* 2, *cuatro subgrupos de orden* 3, *cuatro subgrupos de orden* 6 *(de los que tres son cíclicos y el restante isomorfo al grupo diedral* $\mathcal{D}_3$*), un subgrupo de orden* 9 *y un subgrupo de orden* 18.

(viii) *¿Cuántos subgrupos normales tiene* G*? ¿De qué órdenes?*

(ix) *Calcular, para cada divisor positivo* d *del grado* $[L : \mathbb{Q}]$, *cuántas subextensiones de* $L|\mathbb{Q}$ *tienen grado* d. *¿Cuántas de estas subextensiones son de Galois?*

2. *Sea* $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$. *¿Pertenece* $\sqrt{3}$ *al cuerpo* $\mathbb{Q}(\mathtt{i}, \sqrt[4]{2})$*?*

Grupo 8:		**Calificación**
Integrantes:	Artola Velasco, Ander CABELLO GIL, JULIO Voces Porteiro, Diego ZAYAS ALCAIDE, JOSÉ LUIS	

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Consideremos los números reales*

$$\alpha_1 := \sqrt{4+2\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 := \sqrt{\frac{9}{2}+2\sqrt{5}}, \quad \alpha_3 := \sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \& \quad \alpha_4 := \sqrt{6+2\sqrt{5}},$$

y para cada $1 \leq i \leq 4$ *denotemos* $E_i|\mathbb{Q}$ *la menor extensión de Galois que contiene a* $\mathbb{Q}(\alpha_i)|\mathbb{Q}$. *Calcular el grupo de Galois* $G(E_i : \mathbb{Q})$ *para cada* $1 \leq i \leq 4$.

2. *Sean* $\alpha := \sqrt{7+\sqrt{11}}$, $\beta := \sqrt{7-\sqrt{11}}$ *y* $E := \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$

(i) *Calcular el polinomio mínimo de* α *sobre* $\mathbb{Q}$.

(ii) *Demostrar que* $E|\mathbb{Q}$ *es una extensión de Galois y que* $\mathbb{Q}(\sqrt{38}) \subset E$.

(iii) *Decidir si* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *contiene o no a* β. *¿Cuál es el grado de la extensión* $E|\mathbb{Q}$*? ¿Cuál es su grupo de Galois?*

(iv) *Calcular el grupo de Galois* $G(E : \mathbb{Q}(\sqrt{38}))$ *y obtener elementos primitivos de todas las subextensiones propias y no triviales de* $E|\mathbb{Q}(\sqrt{38})$.

Grupo 9:		Calificación
Integrantes:	CARRO GARRIDO, ENRIQUE COBIÁN FERNÁNDEZ, JOSÉ RAMÓN DOMÍNGUEZ CABRERA, SERGIO ESTEBAN NÚÑEZ, AITOR RUIZ HUGUET, EDURNE	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. (i) *Calcular el discriminante y la resolvente cúbica del polinomio*

$$f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^4 - 4\mathtt{t}^3 - 4\mathtt{t}^2 + 8\mathtt{t} - 2.$$

(ii) *Deducir que el grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es cíclico o isomorfo al grupo diedral $\mathcal{D}_4$.*

(iii) *Probar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$ pertenecen a un cuerpo de descomposición de f sobre $\mathbb{Q}$. Deducir que $G_{\mathbb{Q}}(f) \simeq \mathcal{D}_4$.*

(iv) *Calcular las raíces de f en $\mathbb{C}$.*

2. *Sean $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ y $\zeta := e^{2\pi\mathtt{i}/15}$.*

(i) *Calcular el polinomio mínimo de ζ sobre $\mathbb{Q}$ y el grado $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.*

(ii) *Probar que el grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.*

(iii) *Encontrar elementos primitivos de dos subextensiones $E_1|\mathbb{Q}$ y $E_2|\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ de grados 2 y 4 respectivamente tales que $E_1 \not\subset \mathbb{R}$ y $E_2 \not\subset \mathbb{R}$.*

(iv) *Encontrar elementos primitivos de dos subextensiones $F_1|\mathbb{Q}$ y $F_2|\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ de grados 2 y 4 respectivamente tales que $F_1 \subset \mathbb{R}$ y $F_2 \subset \mathbb{R}$.*

3. *Sean A un anillo y $f := \sum_{k=0}^{d} a_k\mathtt{t}^k \in A[\mathtt{t}]$. Se dice que el polinomio f es* recíproco *si $a_k = a_{d-k}$ para cada $k = 0, \ldots, d$. Demostrar que para cada $n > 1$ el polinomio ciclotómico Φ_n es recíproco.*

Grupo 10:		Calificación
Integrantes:	ARIZA LÓPEZ, LUIS PEÑALVER CARVAJAL, MIGUEL JESÚS SANZ RAMOS, ÁLVARO Hidalgo Pérez, Ángel MARTINEZ SAVIOTE, ANA	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. (i) *Denotemos* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la función de Euler. Encontrar todos los números naturales* n *tales que* $\varphi(n) = 12$.

(ii) *Demostrar que* $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^{12} - \mathtt{t}^{10} + \mathtt{t}^8 - \mathtt{t}^6 + \mathtt{t}^4 - \mathtt{t}^2 + 1$ *es un polinomio ciclotómico y que el grupo de Galois* $G_{\mathbb{Q}}(f)$ *es abeliano pero no es cíclico.*

(iii) *Hallar el grado de la extensión* $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$.

(iv) *¿Cuántas subextensiones hay de cada grado? Calcularlas todas.*

2. *Sean* $f_1(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^4 + 5\mathtt{t}^2 + 5$ *y* $f_2(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^3 - 21\mathtt{t} - 7$ *y denotamos* $E_i \subset \mathbb{C}$ *un cuerpo de descomposición de* f_i *sobre* $\mathbb{Q}$ *para* $i = 1, 2$. *Sea* $F \subset \mathbb{C}$ *un cuerpo de descomposición de* $f_1 f_2$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *que contiene a* E_1 *y* E_2.

(i) *Demostrar que el grupo de Galois de* $E_1|\mathbb{Q}$ *es cíclico y encontrar el polinomio mínimo sobre* $\mathbb{Q}$ *de un elemento primitivo de esta extensión.*

(ii) *¿Es radical la extensión* $E_1|\mathbb{Q}$*?*

(iii) *¿Cuántas subextensiones propias no triviales posee* $E_1|\mathbb{Q}$*? Calcular un elemento primitivo de cada una de ellas.*

(iv) *Calcular el grupo de Galois de* $E_2|\mathbb{Q}$. *¿Posee* f_2 *alguna raíz en* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*?*

(v) *Demostrar que el grupo de Galois de* $f_1 f_2$ *sobre* $\mathbb{Q}$ *es cíclico y calcular su orden.*

(vi) *Hallar conjuntos finitos de generadores de las subextensiones propias y no triviales de* $F|\mathbb{Q}$.

Grupo 11:		Calificación
Integrantes:	LOZANO DEL MORAL, FRANCISCO DE BORJA LINARES VITORES, MAXIMINO JESUS ORDOÑEZ FERRANDIS, SANDRA SÁNCHEZ GABÁN, LUCÍA SÁNCHEZ MADRUGA, JAVIER	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ejercicios de la entrega: 2021-2022

Instrucciones: Se deberá entregar únicamente un block con un máximo de 6 hojas con la solución del ejercicio. Deberéis escribir los nombres de los integrantes del grupo. Podéis usar los enunciados de apartados no resueltos para resolver otros siempre que no hagáis bucles.

1. *Sean* $\mathtt{i} := \sqrt{-1}$ *y* $\zeta := e^{2\pi\mathtt{i}/15}$.

(i) *Calcular el polinomio mínimo de* ζ *sobre* $\mathbb{Q}$ *y el grado* $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.

(ii) *Probar que el grupo de Galois* $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(iii) *Encontrar elementos primitivos de dos subextensiones* $E_1|\mathbb{Q}$ *y* $E_2|\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ *de grados* 2 *y* 4 *respectivamente tales que* $E_1 \not\subset \mathbb{R}$ *y* $E_2 \not\subset \mathbb{R}$.

(iv) *Encontrar elementos primitivos de dos subextensiones* $F_1|\mathbb{Q}$ *y* $F_2|\mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ *de grados* 2 *y* 4 *respectivamente tales que* $F_1 \subset \mathbb{R}$ *y* $F_2 \subset \mathbb{R}$.

2. *Sean* A *un anillo y* $f := \sum_{k=0}^{d} a_k \mathtt{t}^k \in A[\mathtt{t}]$. *Se dice que el polinomio* f *es* recíproco *si* $a_k = a_{d-k}$ *para cada* $k = 0, \ldots, d$. *Demostrar que para cada* $n > 1$ *el polinomio ciclotómico* Φ_n *es recíproco.*

3. (i) *Demostrar que el polinomio* $f := \mathtt{t}^3 + 6\mathtt{t}^2 + 9\mathtt{t} + 3$ *es irreducible en* $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$.

(ii) *Sea* $\mathbb{Q}_f \subset \mathbb{C}$ *un cuerpo de descomposición de* f *sobre* $\mathbb{Q}$. *Calcular el grado* $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}]$.

(iii) *¿Cuál es el grupo de Galois de* f *sobre* $\mathbb{Q}$*?*

(iv) *Sea* $K|\mathbb{Q}$ *una extensión de grado* 2. *Demostrar que* f *es irreducible en* $K[\mathtt{t}]$.

(v) *Sean* $x, y, z \in \mathbb{C}$ *las raíces de* f. *Demostrar que para cada entero* n *se cumple*

$$\delta := (x^n - y^n) \cdot (y^n - z^n) \cdot (z^n - x^n) \in \mathbb{Q}.$$