Ejercicio 4.- Sea $(X_1 - - X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X = U^{\beta}$ donde $U \sim U(0,1)$ y $\beta > 0$ es un parámetro desconodido.. Obtener un intervalo de confianza al nivel de confianza $1-\alpha$ basado en el ECUMV para β.

Veamos cuál es la distribución de X.

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{U^{\beta} \leq x\} = P\{U \leq x^{1/\beta}\} = F_U(x^{1/\beta})$$

$$f_X(x) = f_U(x^{1/\beta}) \cdot \frac{1}{\beta} \cdot x^{\frac{1}{\beta}-1} = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot I_{(0,1)}(x)$$, que es una ~~d~~función de densidad de una distribución $Beta(\frac{1}{\beta}, 1)$.

Calculemos ahora el ECUMV.

$$f(x_1 - - x_n | \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta} x_i^{\frac{1}{\beta}-1} = \frac{1}{\beta^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{\beta}-1} =$$

$$= \frac{1}{\beta^n} e^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right) \sum_{i=1}^{n} Ln x_i}$$

Por el teorema de factorización, $S(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} Ln X_i$ es un estadístico suficiente. Además, la imagen de

$$g: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\beta \longrightarrow g(\beta) = \frac{1}{\beta} - 1$$

contiene un rectángulo abierto de $\mathbb{R}$, por lo que S es además completo (estamos en la familia exponencial uniparamétrica).

Para construir el ECUMV podemos intentar calcular primero la esperanza de $S(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} Ln X_i$

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Ln X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[Ln X_i] = n E[Ln X_i].$$