Temas 3 y 4: Conjuntos, funciones y relaciones. Quinta parte

David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

Def:

Un conjunto A *es* *finito* *si existe* $n \in \mathbb{N}$ *y una biyección* $\mathbf{n} \longrightarrow A$.

En este caso se dice que el *cardinal* *de* A *es* n *y se denota por* $|A| = n$.

Un conjunto es *infinito* *si no es finito.*

Prop.: Para cualesquiera conjuntos finitos A y B, se verifica:

1. Si $S \subseteq A$, entonces S es finito y $|\,S\,| \leq |\,A\,|$
2. $|\,A \cup B\,| = |\,A\,| + |\,B\,| - |\,A \cap B\,|$
3. $|\,A \setminus B\,| = |\,A\,| - |\,A \cap B\,|$
4. $|\,A \times B\,| = |\,A\,| \cdot |\,B\,|$
5. $|\,(A \longrightarrow B)\,| = |\,B\,|^{|A|}$
6. Si existe $f : A \to B$ biyectiva, entonces $|\,A\,| = |\,B\,|$
7. $|\,\wp(A)\,| = 2^{|A|}$

Dem 7.):

Tomando como universo el conjunto A cada subconjunto $S \subseteq A$ tiene como función característica la función $\chi_S : A \longrightarrow \{0,1\}$ definida por:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin S \\ 1 & \text{si} \quad x \in S \end{cases}$$

Al asignar a cada subconjunto de A su función característica se obtiene una biyección entre $\wp(A)$ y $(A \longrightarrow \mathbf{2})$ y basta aplicar **6.** y **5.** para concluir **7.**

Lema del Palomar

Para cualesquiera conjuntos finitos A y B,

$$\text{Si } f : A \longrightarrow B \text{ y } \mid A \mid > \mid B \mid, \text{ entonces } f \text{ no es inyectiva.}$$

Corolario: Un mismo conjunto A no puede estar en biyección a la vez con **m** y **n**, siendo $m \neq n$, y por tanto el cardinal de todo conjunto finito está unívocamente definido.

Ej. de aplicación:
Demostremos que en un garaje en el que haya dos o más coches, siempre pueden encontrarse dos coches distintos, tales que coincidan los números de coches de la marca de cada uno de ellos presentes en el garaje.

Dem:

Sea A el conjunto de coches del garaje y $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ la función que asigna a cada coche x el número de coches de su misma marca distintos a él presentes en el garaje.
Sabemos que $\mid A \mid= n \geq 2$.
Si todos los coches son de la misma marca, $f(x) = n-1$ para todo $x \in A$,
y entonces dos coches (distintos) cualesquiera resuelven el problema.
En otro caso, $f(x) < n-1 \quad \forall x \in A$, con lo que $f : A \longrightarrow \mathbf{n\text{-}1}$, y por el lema del palomar tiene que haber dos coches diferentes $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$.

Def:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera (finitos o infinitos). Decimos que:

1. *A y B son* **equipotentes** $(A \sim_c B)$ *si existe una biyección* $f : A \longrightarrow B$.
2. *A está* **dominado** *por B* $(A \leq_c B)$ *si existe una inyección* $f : A \longrightarrow B$.
3. *A está* **dominado estrictamente** *por* $B, (A <_c B)$, *si* $A \leq_c B$ *pero* $A \not\sim_c B$

Ejs.

1. $\mathbb{N}^+ \leq_c \mathbb{N}$, vía la inyección $id_{\mathbb{N}^+} : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N}^+ \sim_c \mathbb{N}$, vía la biyección $pred : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $pred(n) = n - 1$.

   Esto muestra que un conjunto infinito puede ser equipotente a un subconjunto propio suyo. Para conjuntos finitos esto no es posible.
3. $\mathbb{N}^+ \not<_c \mathbb{N}$, por el apartado anterior.
4. $\mathbb{Z} \sim_c \mathbb{N}$, vía la biyección $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2 \mid x \mid -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

5. $\mathbb{R} \sim_c \mathbb{R}^+$, vía la biyección $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^x$.
6. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim_c \mathbb{R}$, vía la biyección $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = tg(x)$.

Leyes de comparación de cardinales (LCC)

1. Cuando $A \sim_c B$ escribimos $|\, A \,| = |\, B \,|$.
2. Cuando $A \leq_c B$ escribimos $|\, A \,| \leq |\, B \,|$.
3. Cuando $A <_c B$ escribimos $|\, A \,| < |\, B \,|$.

Observese que todas estas afirmaciones son coherentes en los casos en que A y B son finitos, y por tanto tenemos definidos sus cardinales.

En los demás casos leeríamos, respectivamente, que A y B tienen el mismo cardinal; que A tiene a lo sumo el cardinal de B; o que A tiene un cardinal menor al de B.

Prop.(**): Para cualesquiera conjuntos se verifica:

1. $A \leq_c B, \;\; B \leq_c C \implies A \leq_c C$
2. $A \sim_c B \implies A \leq_c B$
3. $A \subseteq B \implies A \leq_c B$
4. A finito $\implies A <_c \mathbb{N}$
5. A infinito $\iff \mathbb{N} \leq_c A$

   Esto viene a decir que el tamaño de $\mathbb{N}$ es "el menor posible para un conjunto infinito".
6. $A \sim_c A$ y por tanto $A \leq_c A$
7. $A \sim_c B, \;\; B \sim_c C \implies A \sim_c C$
8. $A \sim_c B \implies B \sim_c A$

Dem 3.):

Si $A \subseteq B$ entonces la inyección $id_A : A \longrightarrow B$ prueba $A \leq_c B$.

Dem 4.):

Sea A finito, $\mid A \mid = n$. Entonces existe una biyección $f : \mathbf{n} \longrightarrow A$, lo que nos garantiza que $f^{-1} : A \longrightarrow \mathbf{n}$ es inyectiva, y componiendola con la inmersión inducida por la inclusión $\mathbf{n} \subseteq \mathbb{N}$, obtenemos la función inyectiva que prueba $A \leq_c \mathbb{N}$.

Por otra parte, $A \not\sim_c \mathbb{N}$, pues si existiese una biyección $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$, entonces $g^{-1} \mid_{\mathbf{n+1}} : \mathbf{n+1} \longrightarrow A$ sería inyectiva, lo que es imposible en virtud del lema del palomar, ya que $\mid \mathbf{n+1} \mid = n + 1 > n = \mid A \mid$.

Dem 5.):

$\Leftarrow$) Si A fuese finito tendríamos $A \sim_c \mathbf{n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y aplicando 2) y 1) tendríamos $\mathbb{N} \leq_c \mathbf{n}$. Ahora bien, por 3) tendríamos $\mathbf{n+1} \leq_c \mathbb{N}$, y aplicando nuevamente 1) llegamos a $\mathbf{n+1} \leq_c \mathbf{n}$, en contra del lema del palomar. Luego A debe ser infinito.

$\Rightarrow$) Como A es infinito, entonces $(\mathbf{n} \not\sim_c A)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
De $(\mathbf{0} \not\sim_c A)$ se deduce $A \neq \phi$, por lo que podemos tomar $a_0 \in A$.
De $(\mathbf{1} \not\sim_c A)$ se deduce $A \neq \{a_0\}$, luego existe $a_1 \in A \setminus \{a_0\}$.
De $(\mathbf{2} \not\sim_c A)$ se deduce $A \neq \{a_0, a_1\}$, luego existe $a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}$.
Iterando este proceso definimos una sucesión $a_i \in A\ \ (i \in \mathbb{N})$, de modo que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Con lo que la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$, definida por $f(i) = a_i$ es inyectiva, y prueba que $\mathbb{N} \leq_c A$.

Teorema de Schröder y Bernstein

$A \leq_c B, \;\; B \leq_c A \Longrightarrow A \sim_c B$

Ejs de aplicación:

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim_c \mathbb{N}$
   Dem: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \leq_c \mathbb{N}$ vía la inyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x, y) = 2^x 3^y$.
   $\mathbb{N} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vía la inyección $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida por $g(x) = (x, 0)$.

2. $[0, 1] \sim_c \mathbb{R}$
   Dem: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim_c \mathbb{R}$, vía la biyección $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = tg(x)$.
   $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim_c (0, 1)$, vía la biyección $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow (0, 1)$ definida por $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}$.
   Luego $\mathbb{R} \sim_c (0, 1)$.
   $[0, 1] \leq_c \mathbb{R}$, ya que $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$
   $\mathbb{R} \leq_c [0, 1]$, ya que $\mathbb{R} \sim_c (0, 1) \subseteq [0, 1]$

Operaciones y comparación de cardinales

Sean A, B, A', B' conjuntos tales que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$.

Se tienen:

a) $(A \cap B = \emptyset \ \wedge \ A' \cap B' = \emptyset) \ \longrightarrow \ |A \cup B| = |A' \cup B'|$

b) $|A \times B| = |A' \times B'|$

c) $|(B \to A)| = |(B' \to A')|$

DEF:

Un conjunto es numerable si es finito o equipotente a $\mathbb{N}$.
Un conjunto es infinito numerable cuando es equipotente a $\mathbb{N}$.

El cardinal de $\mathbb{N}$ se representa como χ_0, y escribimos $|\mathbb{N}| = \chi_0$.

Lema:

a) Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es numerable

b) Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

Dem de a)

- Si A es finito entonces es numerable por definición.
- A infinito $\Longrightarrow \mathbb{N} \leq_c A$ por el apartado 5 de la Prop.(**)
  $A \subseteq \mathbb{N} \Longrightarrow A \leq_c \mathbb{N}$ por el apartado 3 de la Prop.(**)

Luego $A \sim_c \mathbb{N}$, aplicando el teorema de Schröder-Berstein .

Teorema(NUM):

1. Un conjunto A es numerable si y sólo si existe una función $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva (es decir, $A \leq_c \mathbb{N}$).
2. Un conjunto $A \neq \phi$ es numerable si y sólo si existe una función suprayectiva $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

   En este caso se dice que g enumera a A, pues los elementos de Ason los de la lista $g(0), g(1), \cdots$ aunque posiblemente con repeticiones, pues no se exige que g sea inyectiva.

Dem de 1.

$\Rightarrow$) Si A es finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim_c \mathbf{n}$ y como $\mathbf{n} \subseteq \mathbb{N}$, tenemos $A \leq_c \mathbb{N}$.
Si A es infinito, entonces $A \sim_c \mathbb{N}$, lo que implica $A \leq_c \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Si A finito entonces es numerable.
Si A es infinito, entonces $\mathbb{N} \leq_c A$, y como $A \leq_c \mathbb{N}$, aplicando el teorema de Schröder-Berstein se concluye $A \sim_c \mathbb{N}$.

Prop.:

1. La unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable
2. El producto cartesiano de una familia finita de conjuntos numerables es numerable.

Ejs.

1. $\mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+ \sim_c \mathbb{N}$, vía la biyección $pred : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $pred(n) = n - 1$.)
2. $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \sim_c \mathbb{N}$, vía la biyección $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2\mid x \mid -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
)
3. $\mathbb{Z}^- = \{n \in \mathbb{Z} / n < 0\}$ ($\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}$ es numerable)
4. $\mathbb{Q}^+ = \{n \in \mathbb{Q} / n > 0\}$ ($\mathbb{Q}^+ \sim_c \mathbb{N}$, por el Teorema(NUM), vía la inyección $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = 2^m 3^n$ con $\frac{m}{n}$ fracción irreducible de x.)
5. $\mathbb{Q}^- = \{n \in \mathbb{Q} / n < 0\}$ ($\mathbb{Q}^- \sim_c \mathbb{N}$, pues $\mathbb{Q}^- \sim_c \mathbb{Q}^+$, vía la biyección $f : \mathbb{Q}^- \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, definida por $f(x) = -x$)
6. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ es numerable por ser unión finita de numerables.
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable por ser producto de dos conjuntos numerables.

Conjuntos no numerables

Conjuntos no numerables

- Los conjuntos no numerables son aquellos que no son finitos ni equipotentes a $\mathbb{N}$.
- Tanto $\wp(\mathbb{N})$ como $\mathbb{R}$ son conjuntos no numerables.
- El cardinal de $\mathbb{R}$, $|\mathbb{R}|$, se representa como χ_1 o bien por 2^{χ_0} .
- Los conjuntos equipotentes a $\mathbb{R}$ se dice que tienen la potencia del continuo.
- $\wp(\mathbb{N})$ tiene la potencia del continuo, al igual que todo intervalo no degenerado (que incluya más de un punto) de $\mathbb{R}$

Teorema: $\wp(\mathbb{N})$ es infinito, no numerable y tiene la potencia del continuo.

Ejs.: $\wp(\mathbb{N}), \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n, (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $I = \{x \in \mathbb{R} / x$ es irracional $\}$, cualquier intervalo no degenerado con más de un punto de $\mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots$