b) $(3z+1)^{-1}$ en $z_0=-2$.

$$f(z)=\frac{1}{3z+1} \quad \text{holomorfa en } D(-2;\,|-2+\tfrac{1}{3}|)=D(-2;\tfrac{5}{3})$$

$$f'(z)=-(3z+1)^{-2}\cdot 3=-3(3z+1)^{-2}$$
$$f^{2)}(z)=2\cdot 3\cdot(3z+1)^{-3}\cdot 3=2!\cdot 3^2\cdot(3z+1)^{-3}$$
$$f^{3)}(z)=-3!\cdot(3z+1)^{-4}\cdot 3^3$$

Veamos que $f^{n)}(z)=(-1)^n\cdot n!\cdot 3^n\cdot(3z+1)^{-n-1}$

Los casos base ya están.

El paso inductivo. Supuesto cierto para k.

$$f^{k+1)}(z)=\left(f^{k)}(z)\right)'=\left((-1)^k\cdot k!\cdot 3^k(3z+1)^{-k-1}\right)'=$$

$$=(-1)^k\cdot k!\cdot 3^k\cdot(3z+1)^{-k-2}\cdot(-k-1)\cdot 3=(-1)^{k+1}\cdot(k+1)!\cdot 3^{k+1}\cdot(3z+1)^{-k-2}.$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{3z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(-2)}{n!}(z+2)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\cancel{n!}\,3^n\cdot(-5)^{-n-1}}{\cancel{n!}}(z+2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(-5)^{n+1}}(z+2)^n=$$

$$=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)\cdot 3}{-5}\right)^n\cdot(z+2)^n=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n(z+2)^n \quad \forall z\in D(-2,\tfrac{5}{3})$$

c) $\cos^2\left(\frac{iz}{2}\right)$ en $z_0=0$

$f(z)=\cos^2\left(\frac{iz}{2}\right)$ es holomorfa en $D(0;R)$ $\forall R>0$.

$$\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2it}+e^{-2it}+2-e^{2it}-e^{-2it}+2}{4}=1$$

$$\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2=\frac{e^{2it}+e^{-2it}+2+e^{2it}+e^{-2it}-2}{4}=$$

$$=\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}=\cos 2\theta$$