Teorema de Farkas

Sea A una matriz m×n y c un vector de R^n. *Exactamente uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:*

I) $Ax \le 0$ y $c^t x > 0$ *para algún* $x \in \mathrm{R}^n$,

II) $y^t A = c^t$ e $y \ge 0$ *para algún* $y \in \mathrm{R}^m$.

Corolario (Teorema de Gordan)

Sea A una matriz m×n. Exactamente uno de los dos sistemas siguientes tiene solución:

I) $Ax < 0$ *para algún* $x \in \mathrm{R}^n$,

II) $y^t A = 0$ e $y \ge 0$ *para algún* $y \in \mathrm{R}^m$ *no nulo.*

Se considera el problema:

$$(P)\begin{cases} Min\, f(x) \\ g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \dots, m \\ x \in R^n \end{cases}$$

siendo $f: R^n \to R$ y $g_i: R^n \to R$ para $i = 1, \dots, m$.

Se denota por *S* el conjunto de soluciones factibles del problema (*P*):

$$S = \{x \in R^n | \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \dots, m\}.$$

Definición

Sea S el conjunto de soluciones factibles del problema (P) y sea $\bar{x} \in S$. El *cono de direcciones factibles de S en* $\bar{x}$, denotado por $D(\bar{x})$, se define por:

$$D(\bar{x}) = \{d \in R^n |\, d \neq 0,\ \ \bar{x} + \lambda d \in S \quad \forall \lambda \in (0, \delta)\ para\ algún\ \delta > 0\}.$$

Cada vector $d \in D(\bar{x})$ se denomina una *dirección factible*. Además, dada la función $f: R^n \to R$; el *cono de direcciones de mejora (o de descenso)* en $\bar{x}$, denotado por $F(\bar{x})$, se define por:

$$F(\bar{x}) = \{d \in R^n |\, f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}) \quad \forall \lambda \in (0, \delta)\ para\ algún\ \delta > 0\}.$$

Cada vector $d \in F(\bar{x})$ se denomina una *dirección de mejora o dirección descendente* de *f* en $\bar{x}$.

Teorema 1

Sea $f: R^n \to R$ diferenciable en $\bar{x}$. Si existe un vector $d \in R^n$ tal que $\nabla f(\bar{x})^t d < 0$, entonces existe un $\delta > 0$, tal que $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$ para todo $\lambda \in (0, \delta)$, por tanto d es una dirección descendente de f en $\bar{x}$.

Teorema 2

Se considera el problema $min\{f(x) |\, x \in S\}$, siendo $f: R^n \to R$ y S un subconjunto no vacío de R^n. Sea $f: R^n \to R$ diferenciable en $\bar{x} \in S$. Si $\bar{x}$ es un óptimo local, entonces $\bar{F}(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \emptyset$, siendo

$$\bar{F}(\bar{x}) = \{d \in R^n |\, \nabla f(\bar{x})^t d < 0\}$$

y $D(\bar{x})$ el cono de direcciones factibles de S en $\bar{x}$.

Lema 3

Dada una solución factible $\bar{x} \in S$, sea $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de índices para las restricciones activas de $\bar{x}$. Se supone que g_i , para cada $i \in I$, es diferenciable en $\bar{x}$, y que g_i , para cada $i \notin I$, es continua en $\bar{x}$. El conjunto:

$$\bar{D}(\bar{x}) = \{\, d \in R^n |\ \nabla g_i(\bar{x})^t d < 0 \quad para\ cada\ i \in I\}.$$

verifica

$$\bar{D}(\bar{x}) \subseteq D(\bar{x}) \ .$$

Teorema 4

Se considera el problema:

$$\min f(x)$$

$$s.a.: \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \dots, m$$
$$x \in R^n$$

siendo $f: R^n \to R$, $g_i: R^n \to R, i = 1, \dots, m$. Sea $\bar{x} \in S$ una solución factible y sea $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$. Se supone que f es diferenciable en $\bar{x}$, que g_i es diferenciable en $\bar{x}$, para cada $i \in I$, y que g_i es continua en $\bar{x}$, para cada $i \notin I$. Si $\bar{x}$ es un óptimo local, entonces

$$\bar{F}(\bar{x}) \cap \bar{D}(\bar{x}) = \emptyset.$$

Teorema (Condiciones necesarias de Fritz – John)

Sean f: $R^n \to R$ *y* g_i: $R^n \to R$ *para* $i=1,\dots,m$. *Se considera el problema (P):*

$$\min f(x)$$

$$s.a.: \quad g_i(x) \le 0 \quad i = 1, \dots, m$$
$$x \in R^n$$

Sea $\bar{x}$ *una solución factible y sea* $I=\{i \,/\, g_i(\bar{x})=0\}$. *Se supone que f es diferenciable en* $\bar{x}$*, que* g_i*, para cada* $i \in I$*, es diferenciable en* $\bar{x}$*, y que* g_i*, para cada* $i \notin I$*, es continua en* $\bar{x}$*. Si* $\bar{x}$ *resuelve localmente el problema (P), entonces existen* $u_0 \in R$ *y* $u_i \in R$*, para* $i \in I$*, tales que*

$$u_0 \ \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$
$$u_0 \ge 0, u_i \ge 0 \quad para \ \ i \in I$$
$$\left(u_0, (u_i)_{i \in I}\right) \ne (0,0).$$

Además, si cada g_i*, para* $i \notin I$*, es también diferenciable en* $\bar{x}$*, entonces las condiciones de Fritz John pueden escribirse en la siguiente forma equivalente,*

$$u_0 \ \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$
$$u_i \ g_i(\bar{x}) = 0 \qquad para \ \ i = 1, \dots, m$$
$$u_0 \ge 0, u_i \ge 0 \quad para \ \ i = 1, \dots, m$$
$$\left(u_0, (u_i)_{i=1,\dots,m}\right) \ne (0,0).$$

NOTA: Todo punto $\bar{x}$ para el cual existan multiplicadores ($\bar{u}_0, \bar{u}$) tales que ($\bar{x}, \bar{u}_0, \bar{u}$) satisface las condiciones de Fritz John se denomina un punto de Fritz-John.

Teorema (Condiciones necesarias de Kuhn– Tucker)

Sean f: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ *y* g_i: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ *para* i=1,…,m. *Se considera el problema (P):*

$$\min f(x)$$

$$s.a.: \quad g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$
$$x \in R^n$$

Sea $\bar{x}$ *una solución factible y sea* $\mathrm{I}=\{i \ / \ g_i(\bar{x})=0\}$. *Se supone que f es diferenciable en* $\bar{x}$*, que* g_i*, para cada* $i\in \mathrm{I}$*, es diferenciable en* $\bar{x}$*, y que* g_i*, para cada* $i\notin \mathrm{I}$*, es continua en* $\bar{x}$*. Además, se supone que los vectores* $\nabla g_i(\bar{x})$*, para* $i\in \mathrm{I}$*, son linealmente independientes. Si* $\bar{x}$ *resuelve localmente el problema (P), entonces existen* $u_i \in R$*, para* $i\in \mathrm{I}$*, tales que*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in \mathrm{I}} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$u_i \geq 0 \quad para \ \ i \in \mathrm{I}.$$

Si, además, cada g_i*, para* $i\notin \mathrm{I}$*, es también diferenciable en* $\bar{x}$*, entonces las condiciones de Kuhn– Tucker pueden escribirse en la siguiente forma equivalente,*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

$$u_i \ g_i(\bar{x}) = 0 \qquad para \ \ i = 1, \dots, m$$

$$u_i \geq 0 \qquad para \ \ i = 1, \dots, m.$$

NOTA: Todo punto $\bar{x}$ para el cual existan multiplicadores $\bar{u}$ tales que $(\bar{x}, \bar{u})$ satisface las condiciones de Kuhn– Tucker se denomina un punto de Kuhn– Tucker.