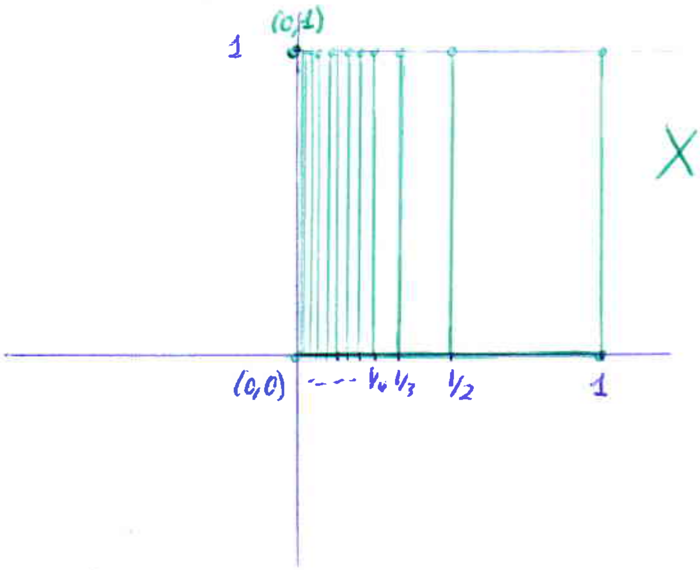
Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Lista 8

Número 8.11.- En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto $X = ([0,1]\times\{0\}) \cup \{(\frac{1}{k},t) : k\geq 1 \;\; 0\leq t\leq 1\} \cup \{(0,1)\}$. Demostrar que X es conexo pero no es conexo por caminos.

En primer lugar, hacemos un esbozo del conjunto X.



Veamos que X es un conjunto conexo. Comenzamos denotando por A_n con $n\geq 0$ a los conjuntos

$$A_0 = [0,1]\times\{0\} \quad y \quad A_n = \{(\tfrac{1}{n},t) : 0\leq t\leq 1\} = (\{\tfrac{1}{n}\}\times[0,1]) \;\; \forall n\geq 1$$

De esta forma podemos escribir X como $X = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \cup \{(0,1)\}$.

Afirmamos que $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$ es un conjunto conexo (conexo por caminos).

Efectivamente, los conjuntos A_n son conexos (conexos por caminos) por ser segmentos en la topología usual y existe un $n_0 = 0$ tal que $A_{n_0} \cap A_n \neq \emptyset$ $\forall n \geq 0$ $\left(A_0 \cap A_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \ \forall n \geq 1\right)$. Por una de las variantes del Teorema del pivote para conjuntos conexos (conexos por caminos) entonces $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ es un conjunto conexo (conexo por caminos).

Supongamos que X no es un conjunto conexo, es decir, existen U, V abiertos no vacíos tales que

$$X \subset U \cup V, \quad X \cap U \neq \emptyset, \quad X \cap V \neq \emptyset, \quad X \cap U \cap V = \emptyset.$$

Tiene que ser $U \cap \bigcup_{n\geq 0} A_n = \emptyset$ o $V \cap \bigcup_{n\geq 0} A_n = \emptyset$ porque si no U y V separarían $\bigcup_{n\geq 0} A_n$, que es conexo. Podemos suponer que $U \cap \bigcup_{n\geq 0} A_n = \emptyset$ así que, como $X \cap U \neq \emptyset$, entonces $X \cap U = \{(0,1)\}$.

Al ser U un entorno abierto de $(0,1)$ $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B((0,1),\varepsilon) \subset U$.

Podemos tomar $n_1 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$. De esta forma $\left(\frac{1}{n_1}, 1\right) \in X \cap U \cap V = \emptyset$!!! Esto es así ya que $\left(\frac{1}{n_1}, 1\right) \in A_{n_1} \subset \bigcup_{n\geq 0} A_n \subset V, \subset X$ y $\left\|(0,1) - \left(\frac{1}{n_1}, 1\right)\right\| = \frac{1}{n_1} < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{n_1}, 1\right) \in B((0,1),\varepsilon) \subset U$.

La contradicción viene de suponer que X no es un conjunto conexo, luego hemos llegado a nuestro primer objetivo que era probar que X es conexo.

Para ver que X no es conexo por caminos nos apoyamos en que $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ sí lo es, y por tanto, los "problemas" surgen al añadir el punto $(0,1)$. Vamos a probar que no existe ningún camino en X de $(0,1)$ a $(0,0)$. Supongamos que $\exists \sigma : [0,1] \longrightarrow X$ con $\sigma(0) = (0,1)$, $\sigma(1) = (0,0)$ y σ continuo.

Vamos a probar que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es un conjunto no vacío, abierto y cerrado en $[0,1]$ y que no es el total. Que es no vacío, cerrado y propio en $[0,1]$ es inmediato porque $0 \in \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ ($\Leftrightarrow \sigma(0)=(0,1)$), $1 \notin \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ ($\sigma(1)=(0,0)\neq(0,1)$) y $\{(0,1)\}$ es cerrado y σ continua luego $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es cerrado.

Para ver que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es abierto sea $x \in \sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ y vamos a encontrar U^x entorno abierto de x con $U^x \subset \sigma^{-1}((0,1))$.

Consideramos $V^{(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$ un entorno abierto de $(0,1)$ con la restricción de que $V^{(0,1)}$ no corta al eje de abscisas. Como σ es continua entonces $\sigma^{-1}(V^{(0,1)})$ es un abierto y contiene a x ya que $\sigma(x)=(0,1)\in V^{(0,1)}$. Por tanto, $\exists\, U^x$ intervalo abierto que contiene a x y contenido en $\sigma^{-1}(V^{(0,1)})$. Queremos probar que $U^x \subset \sigma^{-1}(\{(0,1)\}) \Leftrightarrow \sigma(U^x)=\{(0,1)\}$

Supongamos que no, es decir, $\exists\, y \in U^x$ tal que $\sigma(y)\neq(0,1)$ y como $U^x \subset \sigma^{-1}(V^{(0,1)})$, entonces $\sigma(y)\in V^{(0,1)}$, luego $\sigma(y)$ no está en el eje X por como hemos construido $V^{(0,1)}$. Entonces será de la forma $\sigma(y)=(\frac{1}{n},t)$ con $n\geq 1$, $t\in(0,1]$. Podemos entonces elegir $r\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ para probar que los conjuntos $(-\infty,r)\times\mathbb{R}$ y $(r,\infty)\times\mathbb{R}$ separan $\sigma(U^x)$. En efecto, ambos son abiertos no vacíos y $(0,1)\in\sigma(U^x)\cap(-\infty,r)\times\mathbb{R}$, $\sigma(y)\in\sigma(U^x)\cap(r,\infty)\times\mathbb{R}$ y $\sigma(U^x)\cap(-\infty,r)\times\mathbb{R}\cap(r,\infty)\times\mathbb{R}=\emptyset$. Sin embargo, $\sigma(U^x)$ es conexo por ser la imagen continua de un intervalo, que es un conjunto conexo. Esta contradicción viene de suponer que $\sigma(U^x) \not\subset \{(0,1)\}$ luego queda probado que $\sigma^{-1}(\{(0,1)\})$ es abierto, cerrado, no vacío y propio en $[0,1]$. Esto también es una contradicción porque $[0,1]$ es conexo. Esta contradicción viene de suponer que existe un camino en X de $(0,1)$ a $(0,0)$, lo cual es falso y podemos entonces concluir que X no es conexo por caminos.

Número 8.9.- Se considera en $\mathbb{R}^{m \times n}$ el subconjunto S de las matrices $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^m$, que tienen las columnas distintas: $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ $1 \leq i,j \leq n$. Estudiar si S es conexo por caminos.

Empezamos mostrando que el resultado dependerá de m y n con estos dos ejemplos.

Si $m=n=1$ entonces $S = \mathbb{R}$, que es conexo por caminos.

Si $n=2$ y $m=1$ entonces $S = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \neq x_2\} \subset \mathbb{R}^2$ que no es conexo porque los abiertos $U = \{(x_1,x_2) \mid x_1 < x_2\}$, $V = \{(x_1,x_2) \mid x_1 > x_2\}$ separan S. En particular S no es conexo por caminos.

Por tanto no podemos afirmar que $\forall m,n \geq 1$ entonces S es conexo por caminos ni que $\forall m,n \geq 1$ entonces S no es conexo por caminos.

Podemos realizar la siguiente distinción de casos:

a) $n=1$, $m \geq 1$. Entonces $S = \mathbb{R}^m$ que es conexo por caminos.

b) $n \geq 2$, $m=1$. En este caso $S = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\} =$

$$= \bigcap_{i \neq j} \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j\} = \bigcap_{i \neq j} \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = x_j\} = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \neq x_j\}$$

Veamos que $U = \{(x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < x_2\}$ y $V = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > x_2\}$ son dos conjuntos abiertos que separan S. Claramente $U \neq \emptyset \neq V$ y ambos son abiertos porque si consideramos la función continua

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2 \dots x_n) \longmapsto x_1 - x_2$$

entonces $U = f^{-1}((-\infty, 0))$ y $V = f^{-1}((0, \infty))$ que son preimágenes continuas de abiertos y, por tanto, abiertos.

Por otro lado $U \cap V = \emptyset \Rightarrow S \cap U \cap V = \emptyset$. y

$(1, 2, 3, 4, \dots n) \in S \cap U \neq \emptyset$

$(2, 1, 3, 4, \dots n) \in S \cap V \neq \emptyset$.

Finalmente $S \subset U \cup V$ porque si $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in S$ en particular $x_1 \neq x_2$ así que $x_1 < x_2$ o $x_1 > x_2$.

Esto prueba que S no es conexo y, en particular, no es conexo por caminos.

c) $n \geq 2$, $m \geq 2$. Proponemos un algoritmo que construye explícitamente un camino en S, más concretamente será una poligonal, que une dos matrices $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}$ en S.

Introducimos la notación

$\bar{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{m-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1}$ y $\bar{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{m-1,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1}$ con lo que las matrices

X e Y las podemos escribir como

$$X = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \\ x_{m1} & x_{m2} & & x_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ahora elegimos $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots n$ de la siguiente manera:

Para $i=1$, consideramos $A_1 = \{x_{m1}, x_{m2}, \dots x_{mn}; y_{m1}, y_{m2} \cdots y_{mn}\}$ y renombramos todos los elementos menos x_{m1} de tal forma que $A_1 = \{a_1, a_2 \dots, a_k, x_{m1}, a_{k+1}, \dots a_{k+l}\}$ cumpliendo $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq x_{m1} < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{k+l}$.

Entonces tomamos $\tilde{x}_1 \in (x_{m1}, a_{k+1})$. (Si $l=0$ $\tilde{x}_1 \in (x_{m1}, \infty)$).

Con esta elección caprichosa conseguimos que el segmento que une X con $X_1 = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \\ \tilde{x}_1 & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ esté contenido en S

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 : [0,1] \longrightarrow S \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \\ t\tilde{x}_1 + (1-t)x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$t\tilde{x}_1 + (1-t)x_{m1} \in (x_{m1}, a_{k+1}) \ \forall t \in (0,1]$ $\Downarrow$ $\sigma_1(t) \in S \ \forall t \in [0,1]$

(La primera columna es distinta a las demás porque la última coordenada lo es $\forall t \in (0,1]$, y $\sigma_1(0) = X \in S$)

Además $\tilde{x}_1 \neq y_{mj} \ \forall j = 1 \cdots n$ y $\tilde{x}_1 \neq x_{mj} \ \forall j = 1 \cdots n$.

Para $i \geq 2$, consideramos $A_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots \tilde{x}_{i-1}, x_{mi}, x_{m(i+1)} \cdots x_{mn}, y_{m1}, y_{m2}, \dots y_{mn}\}$ y renombramos todos los elementos menos x_{mi} de tal forma que

$A_i = \{a_1, a_2, \dots a_k, x_{mi}, a_{k+1}, \dots a_{k+l}\}$ cumpliendo $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq x_{mi} < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{k+l}$

Entonces tomamos $\tilde{x}_i \in (x_{mi}, a_{k+1})$. Con esta elección conseguimos que el segmento que une X_{i-1} con $X_i = \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_i} & \cdots & \overline{x_n} \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_i & & x_{mn} \end{pmatrix}$ esté contenido en S.

$$\sigma_i : [0,1] \longrightarrow S$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_i} & \overline{x_{i+1}} & \cdots & \overline{x_n} \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & t\tilde{x}_i + (1-t)x_{mi} & x_{m(i+1)} & & x_{mn} \end{pmatrix}$$

(Las columnas que no tocamos siguen siendo distintas entre sí y la columna i-ésima es distinta a las demás $\forall t \in [0,1]$)

$t\tilde{x}_i + (1-t)x_{mi} \in (x_{mi}, a_{k+1}) \ \forall t \in [0,1] \Longrightarrow \sigma_i(t) \in S \ \forall t \in [0,1]$

Con esta construcción podemos concatenar los segmentos de tal forma que empecemos en X y terminemos en X_n

$$X=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_1} X_1=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_2} X_2=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{\sigma_n} X_n=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}.$$

Nótese que, por construcción, $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j$ $\forall i\neq j$ y $\tilde{x}_i \neq y_{m_j}$ $\forall i,j\in\{1\dots n\}$

Ahora consideramos las matrices $Z_i=\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_{i-1} & \bar{y}_i & \bar{x}_{i+1} & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_{i-1} & \tilde{x}_i & \tilde{x}_{i+1} & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ $\forall i=1\dots n$.

Como $\tilde{x}_i\neq\tilde{x}_j$ $\forall i\neq j$ entonces el segmento que une Z_{i-1} con Z_i está contenido en S $\forall i=1\dots n$ $(Z_0=X_n)$:

$$\begin{aligned} \gamma_i:[0,1] &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & t\bar{y}_i+(1-t)\bar{x}_i & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & & \tilde{x}_i & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(La columna i-ésima es diferente a todas las demás por ser $\tilde{x}_i\neq\tilde{x}_j$ $\forall i\neq j$ $\forall t\in[0,1]$ y las otras ya eran distintas entre sí.)

Así podemos unir con segmentos

$$X_n=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\gamma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}}_{=Z_1} \xrightarrow{\gamma_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{x}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}}_{=Z_2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{\gamma_n} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_n \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}=Z_n$$

Para llegar a $Y=\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \cdots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{pmatrix}$ faltaría únicamente cambiar las $\tilde{x}_i$ por y_{mi} pero debemos hacerlo con cuidado y asegurándonos de que no nos salimos de S.

Realizamos una construcción similar a las de los $\overline{x}_i$ pero esta vez para los $\overline{y}_i$.

Para cada $i=1 \dots n$ construimos $y_i^* \in \mathbb{R}^{m-1}$ de tal forma que todas las coordenadas de y_i^* son iguales a las de $\overline{y_i}$ salvo la primera que la denotamos por $\tilde{y}_i$ y la elegimos de manera especial.

Consideramos $B_i = \{\overline{y}_{11}, \overline{y}_{21}, \dots, \overline{y}_{i1}, \dots \overline{y}_{in}\}$ siendo $\overline{y}_{j1}$ la primera coordenada de $\overline{y_j}$ y renombramos los elementos del conjunto menos $\overline{y}_{i1}$ para que $B_i = \{b_1, b_2, \dots b_k, \overline{y}_{i1}, b_{k+1}, \dots b_{k+e}\}$ con

$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \overline{y}_{i1} < b_{k+1} \leq \dots \leq b_{k+e}$. Elegimos $\tilde{y}_i \in (\overline{y}_{i1}, b_{k+1})$ para que

$$\alpha_i : [0,1] \longrightarrow S$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & ty_i^* + (1-t)\overline{y_i} & \dots & \overline{y_n} \\ z_1 & z_2 & & z_i & \dots & z_n \end{pmatrix}$$

sea un segmento en S $\forall z_1, \dots z_n \in \mathbb{R}$ y cuando $\alpha_i(0) \in S$. Esto es así porque la columna i-ésima de $\alpha_i(t)$ es distinta a todas las demás $\forall t \in [0,1]$ porque se distinguen en la primera coordenada. Lo mismo sucede para el segmento recorrido en sentido contrario que podemos llamar β_i y que verifica $\beta_i(t) \in S$ $\forall t \in [0,1]$.

Con estas consideraciones y partiendo desde Z_n

$$Z_n = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_1} \begin{pmatrix} y_1^* & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta_1} \begin{pmatrix} y_1^* & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_1}$$

$$\xrightarrow{\beta_1} \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_2} \begin{pmatrix} \overline{y_1} & y_2^* & \dots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & \tilde{x}_2 & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{y_1} & y_2^* & \dots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta_2}$$

$$\xrightarrow{\beta_2} \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ y_{m1} & y_{m2} & & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \rightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \dots & \overline{y_n} \\ y_{1m} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix} = Y$$

donde δ_i son los segmentos que unen las matrices

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & y_i^* & \cdots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \cdots & \tilde{x}_i & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & y_i^* & \cdots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \cdots & y_{mi} & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

y que están contenidos en S porque $\forall t \in [0,1]$ la columna i-ésima de $\delta_i(t)$ es distinta a todas las demás porque se distingue en la primera coordenada.

Únicamente falta por probar que $\alpha_i(0) \in S$ y $\beta_i(1) \in S$

$$\alpha_i(0) = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \cdots & \bar{y}_{i-1} & \bar{y}_i & \bar{y}_{i+1} & \cdots & \bar{y}_n \\ y_{m1} & \cdots & y_{m,i-1} & \tilde{x}_i & \tilde{x}_{i+1} & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

pertenece a S porque las primeras $i-1$ se distinguen entre sí porque $Y \in S$ y las otras columnas se distinguen cada una de todas las demás en la última coordenada porque $\tilde{x}_i \neq \tilde{x}_j$ $\forall i \neq j$ y $\tilde{x}_i \neq y_{mj}$ $\forall j = 1 \ldots n$.

$\beta_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$ luego está en S.

Por tanto, dadas $X, Y \in S$ hemos construido una poligonal en S que une X e Y concatenando los segmentos como hemos ido explicando.

Esto prueba que S es conexo por caminos.

En resumen, S es conexo por caminos si $n=1$ y $m \geq 1$ o si $n \geq 2$ y $m \geq 2$ y no es conexo por caminos si $n \geq 2$ y $m = 1$.