REGLA LEXICOGRÁFICA (1955)

Cuando al aplicar la regla de la razón mínima, usada en el método del Simplex para determinar la variable que debe salir de la base, resulta que el mínimo obtenido no se alcanza para un único índice, el punto extremo que se obtendrá será *degenerado* (alguna variable básica toma el valor cero), pudiendo ocurrir que en la aplicación del método del Simplex se produzca un ciclo.

Esta anomalía se debe a que cuando se manejan puntos extremos degenerados, a un mismo punto extremo, se le pueden hacer corresponder un número determinado de bases distintas. En este caso, las operaciones del método del Simplex pueden dar lugar a que, permaneciendo en el mismo punto extremo, se repita alguna base después de realizar varias iteraciones. Por tanto, el proceso pude entrar en un ciclo.

La *regla lexicográfica*, resuelve este problema, modificando el criterio para elegir la variable que debe dejar la base.

Definición. Dado $p \in R^n, p \neq 0$, se dice que p es *lexicográficamente positivo*, y se denota $p >_L 0$ si, y sólo si, la primera componente de p no nula es positiva. Dados $p, q \in R^n$, $p >_L q \iff p - q >_L 0$.

En el método del Simplex tiene gran importancia el conocer la inversa de la base actual B. Por ello, en las tablas que se manejan están siempre disponibles B^{-1} y $\bar{b} = B^{-1}b \ \ (\bar{b} \geq 0)$.

A cada variable básica, se asigna una fila de la siguiente matriz

$$V_B = \left(\bar{b}\,,\ B^{-1}\right) = \left(V_{B_i}^t\right)_{i=1,\dots,m}$$

$$V_{B_i}^t = \left(\bar{b}_i\,,\ \beta_{i1}\,,\dots,\ \beta_{im}\right) \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

y a cada variable no básica el vector nulo de dimensión m+1.

A cada base se asocia el valor vectorial

$$\sum_{i=1}^{m} c_{B_i} V_{B_i}$$

siendo c_{B_i} el coste correspondiente a la variable básica i- ésima, x_{B_i} , en la función objetivo.

En la resolución del problema

$$min \ \ \{c^t x \mid \ Ax = b,\ \ x \geq 0\}$$

se considera una iteración del método del Simplex, a partir de la solución básica factible asociada a la base B, siendo x_k, con $\bar{c}_k < 0$, la variable que entra en la base.

Para determinar la variable que deja la base, se considera la siguiente **regla de la razón léxico mínima**:

La variable x_{B_l} deja la base $\Leftrightarrow$

$$y_{lk} > 0 \,, \quad \frac{V_{B_i}}{y_{ik}} >_L \frac{V_{B_l}}{y_{lk}} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, m\} \backslash \{l\} \text{ tal que } y_{ik} > 0.$$

Por las fórmulas de la operación de pivotaje

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{ik} y_{lj}}{y_{lk}} & i \in \{1, \dots, m\} \backslash \{l\} \\ \\ y'_{lj} = \dfrac{y_{lj}}{y_{lk}} & \end{cases}$$

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{y_{lj}}{y_{lk}}\, \bar{c}_k \qquad j \in \{1, \dots, n\}$$

la operación de incluir en la base la variable x_k y sacar x_{B_l}, asociará a las nuevas variables básicas los vectores

$$V_{B'_i} = V_{B_i} - \frac{y_{ik}\, V_{B_l}}{y_{lk}} \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, m\} - \{l\}$$

$$V_{B'_l} = \frac{V_{B_l}}{y_{lk}}$$

y asociará a la nueva base el vector

$$\sum_{i=1}^{m} c_{B'_i} V_{B'_i} = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} V_{B_i} + \frac{\bar{c}_k\, V_{B_l}}{y_{lk}}$$

Puesto que

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} c_{B'_i}\, V_{B'_i} \;= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{m} c_{B_i}\left(V_{B_i} \;-\; \frac{y_{ik}\; V_{B_l}}{y_{lk}}\right) + c_k\left(\frac{V_{B_l}}{y_{lk}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}\left(V_{B_i} \;-\; \frac{y_{ik}\; V_{B_l}}{y_{lk}}\right) + c_k\left(\frac{V_{B_l}}{y_{lk}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} V_{B_i} - \left(\frac{V_{B_l}}{y_{lk}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} c_{B_i}\, y_{ik}\right) \; + c_k\left(\frac{V_{B_l}}{y_{lk}}\right)$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{m} c_{B_i}\, V_{B_i} \;+\; \bar{c}_k \;\left(\frac{V_{B_l}}{y_{lk}}\right)$$

Comenzando la aplicación del método del Simplex con $B = I,\ b \geq 0$, y utilizando la regla lexicográfica, en toda iteración del algoritmo se tiene:

$$V_{B_i} \;>_L 0\ , \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, m\}.$$

Esta propiedad se demuestra por inducción sobre el número de iteración r.

i) La propiedad se verifica de forma evidente para $r = 1$, por ser $b \geq 0$ y $B = I$.

ii) Se supone que la propiedad se verifica para $r = k - 1$.

iii) Se demuestra que es cierta para $r = k$.

Es evidente que

$$V_{B'_l} = \frac{V_{B_l}}{y_{lk}} \;>_L\; 0\ .$$

También, si $y_{ik} \leq 0$,

$$V_{B'_i} = V_{B_i} \;-\; \frac{y_{ik}\; V_{B_l}}{y_{lk}} \;>_L\; 0\ .$$

Si $y_{ik} > 0$, por la **regla de la razón léxico mínima**:

$$\frac{V_{B_i}}{y_{ik}} >_L \frac{V_{B_l}}{y_{lk}} \quad \Rightarrow \quad V_{B_i} >_L \frac{y_{ik}\, V_{B_l}}{y_{lk}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{B'_i} = V_{B_i} - \frac{y_{ik}\, V_{B_l}}{y_{lk}} >_L 0$$

En consecuencia, teniendo en cuenta

$$\sum_{i=1}^{m} c_{B'_i}\, V_{B'_i} = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}\, V_{B_i} + \frac{\bar{c}_k\, V_{B_l}}{y_{lk}}$$

utilizando la regla de la razón léxico mínima para determinar la variable que deja la base en cada iteración, el valor vectorial asociado a cada base decrece lexicográficamente (en problemas de minimización). Esto quiere decir, que no existe la posibilidad de repetición de bases a lo largo del proceso y, por tanto, no pueden aparecer ciclos.

REGLA DE BLAND (1977)

La regla de Bland, es una regla muy sencilla, pero restringe la elección de la variable de entrada, además de determinar la variable saliente.

En la regla de Bland, en primer lugar se ordenan todas las variables. Sin pérdida de generalidad, se consideran las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entre todas las variables no básicas con coste reducido negativo (es decir, candidatas a entrar en la base) se elige, para entrar en la base, la de menor índice. De forma análoga, de todas las variables candidatas para salir de la base (que empatan al aplicar la regla de la razón mínima), se elige como variable que sale de la base, la de menor índice.

REGLA DE BLAND

Cuando al aplicar la regla de la razón mínima, usada en el método del Simplex para determinar la variable que debe salir de la base, resulta que el mínimo obtenido no es único, el punto extremo que se obtendrá será degenerado, pudiendo ocurrir que en la aplicación del método del Simplex se produzca un ciclo.

La *Regla de Bland*, es una regla muy sencilla que resuelve este problema, pero restringe la elección de la variable de entrada, además de determinar la variable saliente.

Se considera el problema

$$min \ \ \left\{c^t x \,\middle|\, Ax = b, \ x \geq 0\right\}.$$

En la Regla de Bland, en primer lugar se ordenan todas las variables. Sin pérdida de generalidad, se consideran las variables $x_1, \, x_2, \ldots \, , \, x_n$. Entre todas las variables no básicas con coste reducido negativo (es decir, candidatas a entrar en la base) se elige, para entrar en la base, la de menor índice. De forma análoga, de todas las variables candidatas para salir de la base (que empatan al aplicar la regla de la razón mínima), se elige como variable que sale de la base, la de menor índice.

La Regla de Bland pose la siguiente característica de monotonía:

En una secuencia de pivotajes degenerados, si alguna variable x_q entra en la base, entonces no puede salir de la base, hasta que a la base también entra otra variable, de índice mayor que q, que era no básica cuando x_q entró en la base.

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la base inicial, de la secuencia de bases considerada en los pivotajes degenerados, está formada por las primeras columnas de la matriz *A*. Es decir, se puede considerar que las variables básicas iniciales son $x_1, \, x_2, \ldots \, , \, x_m$. Las variables que en un ciclo de pivotajes degenerados entran y salen de la base, se denominan variables volubles.

Si se cumple la característica de monotonía de la Regla de Bland, entonces no es posible que aparezcan ciclos, porque en un ciclo toda variable que entra en la base también debe salir de la base; lo que significa que existe alguna variable con mayor índice que entra y sale de la base. Este hecho es contradictorio con la característica de monotonía de la Regla de Bland.

Para demostrar que la característica de monotonía se cumple, se considera la solución básica factible actual en la que x_q entra en la base. Sean J_1 y J_2 los conjuntos de índices de las variables no básicas actuales, menores y mayores que q. El problema puede formularse de la siguiente forma:

$$\min \quad \sum_{j \in J_1} \bar{c}_j x_j \; + \; \bar{c}_q x_q + \sum_{j \in J_2} \bar{c}_j x_j$$

s.a.: (*)

$$\bar{A}x = \bar{b}$$

$$x \geq 0$$

($\bar{A} \coloneqq B^{-1} A$, $\quad \bar{b} \coloneqq B^{-1} b$, $\bar{c}_j := c_j - c_B^t B^{-1} a_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$)

Por la Regla de Bland, x_q es una variable de entrada, luego se tiene:

$$\bar{c}_q < 0 \quad \text{y} \quad \bar{c}_j \geq 0 \quad \text{para todo } j \in J_1$$

A continuación, se supone que no se cumple la propiedad de monotonía y después de una secuencia de pivotajes degenerados en los que x_j para todo $j \in J_2$ es no básica, se llega a un pivitaje en el que a la base entra la variable x_p y sale la variable x_q.

El problema (*) se trata ahora como el problema *original*, es decir, se consideran columnas a_j de la matriz $\bar{A}$, bases y coeficientes de la función objetivo, con respecto a esta representación del problema. En particular, sea B_1 la base de $\bar{A}$ en el pivotaje en que entra la variable x_p y sale la variable x_q, donde el vector de coeficientes de las variables básicas es $\bar{c}_{B_1}$. Por tanto,

$$\bar{c}_p - \bar{c}_{B_1}^t B_1^{-1} a_p < 0$$

ya que x_p entra en la base.

Debido a que $\bar{c}_p \geq 0$ (x_p era básica respecto de la base B o $p \in J_1$), se tiene:

$$\bar{c}_{B_1}^t B_1^{-1} a_p > 0 \, .$$

Sea $Y_p = B_1^{-1} a_p$ y sea y_{qp} el elemento pivote, en el pivotaje en el que entra la variable x_p y sale la variable x_q. Tiene que ser

$$y_{qp} > 0 \quad \text{y} \quad \bar{c}_q < 0$$

De forma que en el producto $\bar{c}_{B_1}^t Y_p$, el término $\bar{c}_q \, y_{qp}$ es negativo. Por consiguiente, debe haber otra variable básica x_r tal que

$$y_{rp} > 0 \quad \text{y} \quad \bar{c}_r > 0$$

ya que, excepto $\bar{c}_q$, todas las demás componentes de $\bar{c}_{B_1}$ corresponden a x_j , $j \in J_1$, o a las variables correspondientes a B, todas con valores no negativos $\bar{c}_j$. En particular, debe ser $r \in J_1$, lo que significa que el valor de la variable x_r en la solución actual es nulo, ya que se han efectuado pivotajes degenerados. Sin embargo, esto significa que también es candidata elegible para salir de la base en la aplicación de la regla de la razón mínima. Como $r < q$, por la Regla de Bland, la variable x_q no puede ser la variable de salida. Esta contradicción demuestra el resultado deseado.