ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 2

1. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\sqrt{n}} \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} in}{3^n} \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} i\sqrt{n}}{\operatorname{sen} in} \qquad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$$

2. Demuestra que si la serie $\sum c_n$ converge y $|\arg c_n| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces la serie converge absolutamente.

3. Supongamos que las series $\sum c_n$ y $\sum c_n^2$ convergen. Demuestra que si $\operatorname{Re} c_n \geqslant 0$, entonces la serie $\sum |c_n|^2$ también converge.

4. Estudia la convergencia uniforme de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{z^n}{1+z^n} \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\frac{z^n}{1+z^n} \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$$

$$\text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \qquad \text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z^2|} \qquad \text{f)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{2^n+3^n}.$$

5. Determina el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n \qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n+3n}(z-3)^n$$

$$\text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n \qquad \text{e)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (z-2i)^n \qquad \text{f)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\operatorname{sen}^n(1+in)}$$

$$\text{g)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1+2^n n^n}\, z^n \qquad \text{h)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{9} z^{2n} \qquad \text{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)^n\, z^n.$$

6. El radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es igual a R $(0 < R < \infty)$. Determina el radio de convergencia de las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n-1) c_n z^n \qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n \qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} n^n c_n z^n,$$

donde k es un entero positivo

7. Suma las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen} nx, \quad r > 0; \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n}; \qquad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} z^n \qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+2}{(n+2)!} z^n.$$

8. Demuestra que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ converge en todo punto de la circunferencia unidad, excepto en $z = 1$.

9. a) Aplica el teorema de Abel para demostrar la igualdad $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

b) Da un ejemplo de una serie $\sum a_n$ que no converja y tal que $\sum a_n z^n$ tenga radio de convergencia 1 y $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n$ exista.

10. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left|2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right|, \ (0 < |\theta| \leqslant \pi);$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}, \ (0 < \theta < 2\pi);$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right), \ (0 < \theta < \pi);$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n} = \frac{\theta}{2}, \ (-\pi < \theta < \pi).$