MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1996

1 Se considera una matriz simétrica A cuyos menores principales son todos no nulos. Demostrar que, en la factorización LU de A, cada columna de L es múltiplo de la correspondiente fila de U. Explicar en qué puede facilitar esto el cálculo de la factorización LU de una matriz simétrica.

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante.

a) Se considera la descomposición $A = M - N$ con M y N verificando

$$m_{ii} = a_{ii}$$

y

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (|m_{ij}| + |n_{ij}|)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ es convergente.

b) Demostrar, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques para matrices de diagonal estrictamente dominante.

c) Probar que toda matriz de diagonal estrictamente dominante admite una descomposición $M - N$ como en a) verificando, además, que los elementos m_{ij} y n_{ij} son no nulos cuando $i \neq j$ en el caso de que $a_{ij} \neq 0$.

3 Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \operatorname{sen} x = 0$.

a) Probar que dicha ecuación tiene, al menos, una raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x_{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a una raíz positiva de la ecuación anterior. ¿Cuántos pasos deben darse, a partir de $x_0 = \frac{\pi}{2}$, para obtener una aproximación de la raíz con un error inferior a la milésima?

c) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar dicha raíz (comprobando las hipótesis de convergencia) y calcular el valor de x_1.

4 Dados dos números, $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 - bx^2 + ax - ab.$$

a) Encontrar una relación entre a y b que garantice que la sucesión de Sturm de P tenga sólo tres términos

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}.$$

b) Decidir, en el caso en que a y b verifiquen la relación anterior, el número de raíces reales y distintas de P. ¿Son simples?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1996

1 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Probar que A admite factorización LU.

2 Sea A una matriz hermítica definida positiva y $A = D - E - F$ una descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

$a)$ Demostrar que el método de Jacobi por bloques para A está bien definido.

$b)$ Probar que si $B = 2D - A$ es definida positiva, el método de Jacobi por bloques para A es convergente.

3 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ con $M = D - F$ y $N = E$, siendo $A = D - E - F$ la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

4 Se considera la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

$a)$ Probar que dicha ecuación tiene, en el intervalo $[1, 2]$, una única raíz.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_{n-1}^3},\ n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a la raíz del apartado anterior.

5 Se considera la ecuación

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$a)$ Separar, en intervalos de longitud uno, todas las raíces reales de la ecuación anterior.

$b)$ Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar una raíz real de dicha ecuación (comprobando las hipótesis de convergencia) y calcular el valor de x_1.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1997

---

1 *a*) Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^{4} |x-2|^3(1-\operatorname{sen}\pi x)dx$$

mediante la fórmula de Simpson cerrada compuesta para 4 subintervalos.

b) Determinar los valores de las constantes $\alpha,\ \beta$ y γ que hacen que la fórmula de integración

$$\int_{0}^{3h} f(x)dx \simeq \alpha f(0) + \beta f(h) + \gamma f(3h) \qquad (h>0)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante y $A = D - E - F$ su descomposición $D - E - F$ por puntos. Se considera $0 \leq w \leq 1,\ M = D - wE - wF$ y $N = M - A$.

a) Demostrar que el método asociado a la descomposición $Mx = Nx + b$ está bien definido.

b) Probar que dicho método es convergente.

c) Deducir la convergencia del método de Jacobi para matrices de diagonal estrictamente dominante.

3 Consideremos el polinomio

$$P(x) = 9x^3 + 9x^2 + 9\lambda x + \lambda$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$. ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

b) Fijado $\lambda = \sqrt{3}$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el método de Newton para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1997

1 $a)$ Hallar el valor que se obtiene al aplicar la fórmula de Simpson cerrada compuesta para $m = 1001$ subintervalos a la integral

$$\int_{-1001}^{1001} |x \cos \pi x|^3 dx.$$

$b)$ Si $T_k(x)$ denota el polinomio de Tchebychev de orden $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, probar que

$$T_{20}(T_5(7)) = T_{100}(7).$$

(**Indicación**: demostrar que, de hecho, para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica

$$T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}).$$

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante y $A = D - E - F$ su descomposición $D - E - F$ por puntos. Se consideran $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $M = D - \alpha E - \beta F$ y $N = M - A$.

$a)$ Demostrar que el método asociado a la descomposición $Mx = Nx + b$ está bien definido.

$b)$ Probar que dicho método es convergente y deducir la convergencia de los métodos de Gauss–Seidel y Jacobi por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.

$c)$ Demostrar que el método también es convergente si se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

3 Demostrar que la factorización LU de una matriz también es única si se impone que los elementos diagonales de U valgan uno.

4 Consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 + \sqrt{6}x^2 + 2x + \lambda$$

donde $\lambda > 0$.

$a)$ Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$.

$b)$ ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

$c)$ Fijado $\lambda = 1$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el método de Newton para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1997

1 Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ puntos distintos del intervalo $[a, b]$. Si P y Q son, respectivamente, los polinomios de interpolación de f y g en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

$a)$ ¿es $\alpha P + \beta Q$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ el polinomio de interpolación de $\alpha f + \beta g$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

$b)$ ¿es PQ el polinomio de interpolación de fg en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$?

2 Aplicar la fórmula de Simpson cerrada compuesta a la integral

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para obtener una aproximación del logaritmo neperiano de 2 determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}. (**Indicación**: el error en la fórmula de Simpson compuesta viene dado por

$$E_{(a,b)}(f) = (b-a)\frac{h^4}{180} f^{iv)}(\theta) = \frac{(b-a)^5}{2880 m^4} f^{iv)}(\theta)).$$

3 $a)$ Dada una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

sea δ_k el menor principal de orden k de A $(k = 1, 2, \ldots, n)$ donde $\delta_0 = 1$. Probar que

$$\delta_1 = b_1 \text{ y } \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

$b)$ Consideremos, en particular, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\lambda_1 & 1 & & & \\ 1 & 2+\lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2+\lambda_{n-1} & 1 \\ & & & 1 & 2+\lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}$.

$i)$ Probar que si $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, entonces el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

$ii)$ Demostrar que si $\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$, entonces el método de relajación para A es convergente. (**Indicación**: utilizar el apartado $a)$ para probar que

$$\delta_k > \delta_{k-1} > \cdots > \delta_0,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

4 $a)$ Aplicar el Teorema del Punto Fijo para aproximar una raíz ξ de la ecuación

$$x^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{2} - 1 = 0$$

en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ demostrando las hipótesis de convergencia del método y determinar una sucesión $\{x_n\}_n$ que converja a ξ.

$b)$ ¿Qué términos de la sucesión anterior distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-3}?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1998

---

1 Determinar la constante $A \in \mathbb{R}$ y los puntos $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A\left(f(x_1) + f(0) + f(x_2)\right)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante.

$a)$ Demostrar que A admite factorización LU.

$b)$ Si además A es simétrica y verifica que

$$a_{ii} > 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$, probar que A admite factorización de Cholesky.

3 Se considera una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$$

verificando

$$a_{11} \neq 0 \ \text{ y } \ a_{22} \neq 0.$$

$a)$ Demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel para A convergen o divergen simultáneamente. (**Indicación**: considerar los autovalores de las matrices de los métodos).

$b)$ Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre los elementos de la matriz A para que ambos converjan.

$c)$ En el caso de que ambos métodos converjan, ¿cuál lo hace más rápidamente? Justificar la respuesta.

4 Se considera la ecuación

$$(x + 1)\tan(x) - 1 = 0.$$

$a)$ Probar que la ecuación anterior tiene infinitas raíces positivas y determinar intervalos que contengan a cada una de ellas.

$b)$ Si ξ es la menor raíz positiva, demostrar que se puede aproximar mediante el método del punto fijo.

$c)$ Comenzando en $x_0 = 0$ construir una sucesión $\{x_n\}_n$ que converja a ξ. Determinar un valor de $n \in \mathbb{N}$ a partir del cual todos los términos de la sucesión distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-4}. Justificar la respuesta.

5 Dada la ecuación algebraica:

$$x^5 + x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 13x - 10 = 0$$

$a)$ Determinar el número de raíces positivas.

$b)$ Encontrar una raíz racional negativa.

$c)$ Hallar el número de raíces reales y complejas de la ecuación anterior.

$d)$ Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1998

1 Determinar los valores de las constantes $A,\ B$ y de los puntos $x_0,\ x_1 \in [-1,1]$ para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \sim Af(x_0) + Bf(x_1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = M - N$ siendo $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible y sea $B = M^{-1}N$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ se definen las matrices

$$M_\alpha = (1+\alpha)M,\ N_\alpha = M_\alpha - A \text{ y } B_\alpha = M_\alpha^{-1}N_\alpha.$$

$a)$ Demostrar que

$$B_\alpha = \frac{1}{1+\alpha}(B + \alpha I).$$

$b)$ Probar que

$$\lambda \in \mathrm{sp}(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda+\alpha}{1+\alpha} \in \mathrm{sp}(B_\alpha)$$

(**Indicación**: probar que λ y $\dfrac{\lambda+\alpha}{1+\alpha}$ tienen asociados los mismos autovectores).

$c)$ Si los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ de B verifican

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n < 1,$$

determinar para qué valores de $\alpha > 0$ el método iterativo definido por la matriz B_α es convergente.

3 Dado $\alpha > 0$ se considera la sucesión

$$x_n = \sqrt{\alpha + x_{n-1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

$a)$ Encontrar un intervalo I en el que la sucesión $\{x_n\}_n$ sea convergente para cualquier dato inicial $x_0 \in I$ y calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

$b)$ Hallar el valor de

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$$

4 Dados $\lambda,\ \mu > 0$ se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \frac{\lambda^2}{3}x + \mu.$$

$a)$ Hallar la secuencia de Sturm para el polinomio $P(x)$ distinguiendo los diversos casos que pueden presentarse en función del valor de los parámetros λ y μ.

$b)$ Determinar, en función de λ y μ, el tipo de raíces (reales y complejas) que tiene $P(x)$.

$c)$ Encontrar intervalos y valores iniciales en los que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar las raíces reales de la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$$

determinando los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1998

---

1 $a)$ Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2+1), & 0 \le x \le 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

$b)$ Con los valores de λ y μ obtenidos en el apartado anterior, ¿puede ser S una función spline cúbica de interpolación de la función

$$f(x) = x^2,\ 0 \le x \le 2$$

respecto de la partición $\Delta = \{0, 1, 2\}$?

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz con todos sus menores principales no nulos. Demostrar que existen matrices $B \in \mathcal{M}_n$ triangular inferior y $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ triangular superior con

$$c_{ii} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

tales que $A = BC$. ¿Es única la factorización anterior?

3 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica definida positiva y la descomposición $A = D - E - F$ por puntos de A. Demostrar que si la matriz $2D - A$ es definida positiva entonces el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

4 $a)$ Demostrar que la ecuación

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x - 4 = 0$$

tiene una única raíz positiva.

$b)$ Encontrar un intervalo y un valor inicial en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva de la ecuación anterior determinando los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

5 Aplicar el Método del Punto Fijo para aproximar la menor raíz positiva de la ecuación

$$\cos x + 3x^2 - 6x = 0$$

determinando una sucesión que converja a dicha raíz y justificando las hipótesis de convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 1999

1 Determinar las constantes $A,\ B \in \mathbb{R}$ y el punto $\xi \in [0,2]$ para que la fórmula de integración

$$\int_0^2 f(x)dx \simeq A\left(f(0)+f(2)\right)+Bf(\xi)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \tag{1}$$

donde las matrices A_1 y A_4 son inversibles.

$a)$ Demostrar que

$$\det(A) = \det(A_1)\det\left(A_4 - A_3(A_1)^{-1}A_2\right).$$

(**<u>Indicación</u>**: utilizar el método de eliminación gaussiana por bloques para anular el bloque ocupado por A_3).

$b)$ Utilizar el apartado $a)$ para probar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 A_1 & A_2 \\ \hline \lambda^2 A_3 & \lambda^2 A_4 \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} \lambda^2 A_1 & \lambda A_2 \\ \hline \lambda A_3 & \lambda^2 A_4 \end{array}\right).$$

$c)$ Se considera la descomposición $D-E-F$ por bloques de la matriz A asociada a la descomposición (1) y los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques correspondientes. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\lambda^n \det(-D)P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(E-D)P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2)$$

donde $P_{\mathcal{J}}$ y $P_{\mathcal{L}_1}$ son, respectivamente, los polinomios característicos de las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel.

$d)$ Encontrar la relación existente entre $\varrho(\mathcal{J})$ y $\varrho(\mathcal{L}_1)$. Deducir que ambos métodos convergen o divergen simultáneamente.

$e)$ Si la matriz A es, además, hermítica y definida positiva, demostrar que los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel asociados a esta descomposición por bloques son convergentes. ¿Cuál lo hace más rápidamente?

3 Se considera la ecuación

$$x^3 + x - 1 = 0. \tag{2}$$

$a)$ Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz real.

$b)$ Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dicha raíz y determinar los dos primeros términos de la sucesión que define ese método.

$c)$ Comprobar que la ecuación (2) puede escribirse de forma equivalente como $f(x) = x$ siendo

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Probar que $f : [0,1] \to [0,1]$ y que para cualquier valor inicial $x_0 \in [0,1]$ la sucesión definida como

$$x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}^2},\ n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

es convergente.

d) Si tomamos $x_0 = 1$ y denotamos por

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} x_n$$

determinar qué términos x_n de la sucesión anterior distan de ξ una cantidad inferior a 10^{-4}.

e) Demostrar que la sucesión definida en (3) también converge a ξ para cualquier valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

4 Determinar de forma exacta todas las raíces de la ecuación algebraica

$$2x^3 - 3\pi^2 x + \sqrt{2}\pi^3 = 0.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 1999

1 Sea A una matriz $n \times n$ inversible y que tiene una factorización $A = LU$ con L triangular inferior y $l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y U triangular superior.

$a)$ Probar que A admite una factorización $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ con $\widetilde{L}$ triangular inferior y $\widetilde{U}$ triangular superior y $\widetilde{u}_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ¿Es única tal factorización?

$b)$ Demostrar que si además A es simétrica entonces las columnas de L son múltiplos de las filas de U.

2 Dado el sistema $Au = b$ con $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$, a partir de un vector $u^0 \in \mathbf{V}$ se considera el método iterativo asociado

$$u^k = Bu^{k-1} + b, \; k \in \mathbb{N}$$

donde $B = I - A$.

$a)$ Demostrar que si $\|B\| < 1$ para alguna norma matricial subordinada, entonces se tiene la siguiente cota del error

$$\left|\left|u^k - u\right|\right| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \left|\left|u^1 - u^0\right|\right|.$$

$b)$ Probar que si A verifica que

$$a_{ii} = 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{o} \quad a_{jj} = 1 > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|,$$

entonces el método es convergente.

$c)$ Aplicar si es posible los resultados anteriores al sistema

$$\begin{cases} 10u_1 + 5u_2 = 6 \\ 5u_1 + 10u_2 - 4u_3 = 25 \\ -4u_2 + 8u_3 - u_4 = -11 \\ -u_3 + 5u_4 = -11 \end{cases}$$

para determinar el número de iteraciones necesario para aproximar la solución con un error inferior a 10^{-4} (usar $||\cdot||_\infty$ y tomar $u^0 = 0$).

3 $a)$ Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_2^5 f(x)dx \simeq A\left(f(x_0) + f(x_1)\right),$$

calcular A, x_0 y x_1 para que sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es dicho grado? ¿Corresponde esta fórmula con alguna de las estudiadas?

$b)$ Aplicar la fórmula obtenida para estimar

$$\int_2^5 \frac{1}{\ln x} dx. \tag{4}$$

$c)$ Determinar el número de subintervalos necesarios para que el error cometido en el cálculo de (4) por la fórmula compuesta de Newton–Côtes abierta de 2 puntos sea inferior a 10^{-3}.

4 Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \lambda x(1 - x).$$

$a)$ Probar que si $0 \leq \lambda \leq 4$, f transforma el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo.

$b)$ Demostrar que si $0 \leq \lambda \leq 1$, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a $\xi = 0$ para cualquier valor inicial $x_0 \in [0, 1]$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 1999

---

1 Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - x$ y los nodos $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

a) Hallar el polinomio de interpolación $P(x)$ de la función $f(x)$ en dichos nodos.

b) Determinar el error que se comete cuando se aproxima

$$\int_0^1 f(x)dx$$

mediante la fórmula de Simpson (cerrada).

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz que admite factorización LU y δ_k el menor principal de orden k de la matriz $A,\ k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Si A es inversible demostrar que

$$\delta_k \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Probar con un contraejemplo de una matriz 2×2 que (20) no se verifica, en general, si A no admite factorización LU.

b) Si A no es inversible probar que para todo índice k_0 con $\delta_{k_0} = 0$ se verifica que

$$\delta_k = 0,\ k = k_0, k_0 + 1, \ldots, n.$$

3 Se considera el sistema lineal $Ax = d$ para una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

de diagonal estrictamente dominante. Demostrar los siguientes resultados:

a) $||x||_\infty \leq c(A)\, ||d||_\infty$ siendo

$$c(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{|b_i| - |a_i| - |c_i|} \right\} \qquad (a_1 = c_n = 0).$$

b) $\varrho(\mathcal{L}_1) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{|c_i|}{|b_i| - |a_i|} \right\}$ donde $\mathcal{L}_1$ es la matriz del método de Gauss–Seidel.

4 Se considera la ecuación

$$3x(1 + x)^3 = 4\left((1 + x)^3 - 1\right).$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz real positiva ξ.

b) Encontrar un intervalo y un valor inicial donde el método de Newton sea convergente a la raíz ξ, justificando las hipótesis de convergencia.

c) Determinar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para aproximar dicha raíz e indicar el número de iteraciones necesario para que el error cometido sea inferior a 10^{-4}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2000

1 $a)$ Determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$\int_0^{1000} e^{\operatorname{sen}\pi x}\,dx \tag{6}$$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de 1001 puntos.

$b)$ Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral (6) mediante la regla de los trapecios (fórmula del trapecio cerrada compuesta) sea inferior a la décima.

2 Dado $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se consideran las matrices tridiagonales

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(\gamma) = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{c_1}{\gamma} & & & \\ \gamma a_2 & b_2 & \frac{c_2}{\gamma} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma a_{n-1} & b_{n-1} & \frac{c_{n-1}}{\gamma} \\ & & & \gamma a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

$a)$ Llamando $\delta_0 = 1$ y δ_k al menor principal de orden k de A, $k = 1, 2, \ldots, n$, probar que

$$\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

$b)$ Demostrar que

$$\det(A(\gamma)) = \det(A).$$

Para ello probar que, si se denota por $\delta_0(\gamma) = 1$ y $\delta_k(\gamma)$ al menor principal de orden k de $A(\gamma)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que $\delta_k(\gamma) = \delta_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

$c)$ Se considera la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Demostrar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\lambda^n \det(-D)P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(E - D)P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2)$$

donde $P_{\mathcal{J}}$ y $P_{\mathcal{L}_1}$ son, respectivamente, los polinomios característicos de las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel (por puntos).

$d)$ Encontrar la relación existente entre $\varrho(\mathcal{J})$ y $\varrho(\mathcal{L}_1)$. Deducir que ambos métodos convergen o divergen simultáneamente. En caso de que converjan, ¿cuál lo hace más rápidamente?

3 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible que admite factorización de Cholesky de la forma $A = BB^{\mathrm{T}}$ siendo $B \in \mathcal{M}_n$ una matriz real triangular inferior. Demostrar que A es simétrica y definida positiva.

4 Se considera la ecuación

$$\tan x - e^{-x} = 0. \tag{7}$$

$a)$ Determinar el número de raíces reales de (7).

$b)$ Encontrar una función y un intervalo con los que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para aproximar la menor raíz positiva de (7) e indicar un número de iteraciones suficiente para que el error cometido sea inferior a la milésima.

5 Se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + 7x^2 + 3.$$

$a)$ Determinar el número de raíces (reales y complejas) de P.

$b)$ Encontrar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar una raíz real de P, justificando las hipótesis de convergencia y determinando los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Examen Final

Junio 2000

1 Se considera el sistema de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas

$$\begin{cases} x + Sy = b \\ S^{\mathrm{T}}x + y = c \end{cases}$$

donde $b, c \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ y $S \in \mathcal{M}_n$.

$a)$ Escribir el sistema en forma

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{2n}$ es una matriz por bloques $n + n$.

$b)$ Se consideran los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques asociados a la descomposición por bloques de A dada en $a)$. Probar que

$$\varrho(J^2) = \varrho(\mathcal{L}_1) = \varrho(S^{\mathrm{T}}S)$$

y deducir que ambos métodos convergen o divergen a la vez.

$c)$ Demostrar que si $\|\!|S|\!\|_2 < 1$ ambos métodos son convergentes. ¿Cuál converge más rápidamente?

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ donde $M = D - \alpha E - (1 - \alpha)F$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

$a)$ Justificar que el método asociado a esta descomposición está bien definido.

$b)$ Probar que el método es convergente y deducir de ello la convergencia del método de Gauss–Seidel (**<u>Indicación</u>**: utilizar que si $|\lambda| \geq 1$ y $0 \leq \beta \leq 1$ entonces $\left|\frac{1-\beta+\lambda\beta}{\lambda}\right| \leq 1$).

3 Sea $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Dada la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)dx = Af(x_0) + kf''(\theta)$$

con $\theta \in [a, b]$ se pide:

$a)$ Obtener A y x_0 para que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 1 y dar una interpretación geométrica del resultado.

$b)$ Aplicando la fórmula a $f(x) = x^2$ determinar el valor de k en el término de error.

$c)$ Aproximar el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$$

aplicando la fórmula anterior compuesta para 4 subintervalos, acotando el error cometido y comparándolo con el error real.

4 Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ se pide:

$a)$ Determinar el número de raíces positivas y negativas.

$b)$ Hallar un intervalo en el que se puede aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña.

$c)$ Dada la función

$$g(x) = \sqrt{\frac{10}{4 + x}}$$

estudiar si se puede aplicar al teorema del Punto Fijo para aproximar la raíz anterior. Calcular los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2000

---

1 Encontrar los valores de A, B, C y D para que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq Af(0) + Bf(1) + Cf'(0) + Df'(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

2 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1},\ a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que si

$$A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}(L_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

con $L_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $D_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ diagonal con elementos diagonales positivos entonces existen $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & d \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (L_{n-1})^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right).$$

Deducir que, en este caso, $d > 0$.

b) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si A es simétrica definida positiva entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con elementos diagonales positivos tales que $A = LDL^{\mathrm{T}}$.

3 $a)$ Dada una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

sea δ_k el menor principal de orden k de A $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $\delta_0 = 1$. Probar que

$$\delta_1 = b_1 \text{ y } \delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_kc_{k-1}\delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

$b)$ Consideremos, en particular, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha_1 & -1 & & & \\ -1 & 2+\alpha_2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+\alpha_{n-1} & -1 \\ & & & -1 & 2+\alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

$i)$ Demostrar por inducción que para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que

$$\delta_k > \delta_{k-1} > \cdots > \delta_0.$$

Deducir que la matriz A es definida positiva.

$ii)$ Para cada $\beta \geq 0$ se considera la descomposición $A = M_\beta - N_\beta$ donde

$$N_\beta = \operatorname{diag}\left(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \dots, \beta - \alpha_n\right).$$

Encontrar valores del parámetro β para los cuales el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A sea convergente.

4 Se considera la función $F(x) = x - e^{x-2}$.

$a)$ Probar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene, exactamente, dos raíces reales.

$b)$ Encontrar sendos intervalos donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar cada una de ellas.

$c)$ Estudiar si se puede aplicar el Teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = 2 + \ln x$$

para aproximar las raíces de F.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2001

1 Consideremos una matriz $M \in \mathcal{M}_{2n}$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$M = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline Q^{\mathrm{T}} & R \end{array}\right)$$

donde $P, Q, R \in \mathcal{M}_n$.

a) Tomando $w = -P^{-1}Qv$ comprobar que

$$\begin{pmatrix} w^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline Q^{\mathrm{T}} & R \end{array}\right) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = v^{\mathrm{T}} S v$$

siendo $S = R - Q^{\mathrm{T}} P^{-1} Q$. Deducir que la matriz S es también simétrica definida positiva.

b) Suponiendo conocidas las factorizaciones de Cholesky de $P = BB^{\mathrm{T}}$ y de $S = CC^{\mathrm{T}}$ determinar, a partir de ellas, la factorización de Cholesky de la matriz M.

2 Se considera el sistema lineal $Au = b$ y $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F)$ la matriz del método de Jacobi por puntos asociada a A.

a) Si $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada a la norma vectorial $||\cdot||$, demostrar:

i) $||u|| \leq \|\mathcal{J}\| \, ||u|| + \|D^{-1}\| \, ||b||$.

ii) Si $\|\mathcal{J}\| < 1$ y se toma $u^0 = 0$, entonces

$$\left|\left|u^k - u\right|\right| \leq \frac{\|\mathcal{J}\|^k}{1 - \|\mathcal{J}\|} \|D^{-1}\| \, ||b||, \ k \in \mathbb{N}.$$

b) Probar que si A es de diagonal estrictamente dominante se verifica que $\|\mathcal{J}\|_\infty < 1$.

c) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar un número k de iteraciones para que el error en norma infinito cometido en la resolución del sistema $Au = b$ mediante el método de Jacobi por puntos a partir de $u^0 = 0$ sea inferior a la milésima.

3 Aplicar la *regla del trapecio abierta compuesta* a la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

para obtener una aproximación de $\arctan \frac{1}{2}$ determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}. (**Indicación**: el error en la regla del trapecio abierta simple viene dado por

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{(b-a)^3}{36} f''(\theta)).$$

4 Se considera la función $F(x) = 1 - 2(1+x)e^{-x}$.

a) Demostrar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene una única raíz ξ positiva.

b) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para dar una aproximación de ξ, así como las dos primeras iteraciones del método.

c) Se considera la función

$$\psi(x) = 1 - \lambda x - 2e^{-x}.$$

Supuesto conocido el valor de ξ, encontrar el valor de $\lambda > 0$ que hace que la función ψ tenga una raíz positiva doble.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2001

---

1 Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz inversible y $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas definidas positivas. Probar que las matrices A^{-1}, $A+B$, $C^{\mathrm{T}}AC$ y la submatriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$ de A son también definidas positivas.

2 Se considera el método iterativo de Jacobi por puntos para resolver el sistema lineal $Ax = b$ partiendo de $x^0 = 0$, para una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ verificando

$$|a_{ii}| > \alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

donde $\alpha > 1$ y

$$|a_{ii}| > \gamma > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

a) Demostrar que $||\mathcal{J}||_\infty < \dfrac{1}{\alpha}$ donde $\mathcal{J} = D^{-1}(E+F)$.

b) Probar que

$$x = \mathcal{J}x + D^{-1}b \text{ y } x^k - x = \mathcal{J}^k(x^0 - x).$$

Deducir de lo anterior que

$$||x||_\infty < \frac{\alpha\, ||b||_\infty}{\gamma(\alpha-1)} \text{ y } \left|\left|x^k - x\right|\right|_\infty < \frac{||b||_\infty}{\gamma\alpha^{k-1}(\alpha-1)}.$$

c) En particular, se considera el sistema $Ax = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1'3 & 0'1 & -0'2 & 0'3 \\ 0'3 & -1'9 & 0'4 & 0'2 \\ -0'4 & 0'1 & 1'1 & 0'0 \\ 0'1 & 0'2 & -0'3 & 1'3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizar la cota obtenida anteriormente para determinar un número k de iteraciones tal que el error cometido en norma infinito, al aplicar el método de Jacobi por puntos con $x^0 = 0$, sea inferior a 10^{-6}.

3 *a*) Determinar las relaciones que deben verificar los parámetros a, b, c, d y e para que la función

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \in \left[-\dfrac{1}{6}, 1\right] \\ c(x-2)^2, & x \in [1, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

sea una *spline* cúbica.

b) Determinar los valores de los parámetros para que $f(x)$ interpole la tabla

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

c) ¿Es la función $f(x)$ obtenida una función *spline* cúbica de tipo I (o natural)?

4 Se considera la función $f(x) = \lambda e^{-x}$.

$a)$ Probar que si $0 \leq \lambda < 1$ se puede aplicar a la función $f(x)$ el teorema del punto fijo en el intervalo $[0, 1]$.

$b)$ Utilizar $a)$ para probar que la función $F(x) = 2x - e^{-x}$ tiene una única raíz real ξ y determinar un número de iteraciones para aproximar a ξ con un error inferior a 10^{-3} comenzando en el punto medio del intervalo.

$c)$ Aplicar el método de Whittaker a la ecuación $F(x) = 0$ eligiendo el valor óptimo del parámetro y comprobando que se cumplen las hipótesis de convergencia de dicho método en el intervalo $[0, 1]$. Determinar un número de iteraciones para aproximar ξ con el mismo error y el mismo valor inicial que en el apartado $b)$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2001

1 Determinar el número de intervalos necesarios para aproximar el valor de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

con un error menor que 10^{-2} cuando se emplea la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio compuesta).

2 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ con autovalores reales $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ tales que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Para resolver el sistema $Au = b$ se considera el método iterativo

$$\begin{cases} u^0 \text{ arbitrario} \\ u^{k+1} = B_w u^k + c_w, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

donde

$$B_w = I - wA \ \text{ y } \ c_w = wb \quad (w \neq 0).$$

a) Demostrar que los autovalores de B_w son

$$\mu_i = 1 - w\lambda_i, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

b) Probar que si $0 < w < \dfrac{2}{\lambda_n}$ entonces

$$1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n > -1.$$

Deducir que el método iterativo asociado a B_w es convergente.

c) Comprobar que para el valor

$$w = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}$$

se tiene que $\mu_1 = -\mu_n$ y deducir que

$$\varrho(B_w) = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}.$$

d) Demostrar que para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

el método anterior coincide con el de Jacobi si se elige un valor adecuado del parámetro w.

e) Probar que la matriz A del apartado d) admite factorización LU.

3 Se considera la ecuación $3x^2 - e^x = 0$.

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz negativa ξ.

$b)$ Determinar un intervalo $[a, b]$ para el cual la iteración

$$x_{n+1} = -\sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

converja a ξ para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

$c)$ Partiendo de $x_0 = b$ estimar, a partir de $b)$, el error cometido tras las cuatro primeras iteraciones.

$d)$ ¿Se puede utilizar la iteración

$$x_{n+1} = \ln(3x_n^2)$$

para aproximar ξ? Razonar la respuesta.

4 Determinar el número de raíces reales del polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Encontrar intervalos en los que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dichas raíces y escribir las dos primeras aproximaciones en cada caso.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2002

1 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = LDL^{\mathrm{T}}$ donde L es una matriz real triangular inferior con unos en la diagonal y $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ es una matriz diagonal con $d_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$a)$ Demostrar que A admite factorización de Cholesky.

$b)$ Determinar los elementos de la matriz de la factorización de Cholesky de A a partir de los elementos de las matrices L y D.

2 Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de diagonal estrictamente dominante se considera un número natural p, con $1 \le p \le n$, y las matrices $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \ge p, \end{cases}$$

y $N = M - A$.

$a)$ Demostrar que el método iterativo asociado a esta descomposición $A = M - N$ está bien definido y es convergente.

$b)$ En el método anterior, ¿qué método se obtiene si $p = 1$? ¿Qué ocurre si $p = n$?

3 $a)$ Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a, b]$.

$b)$ Determinar los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ para que la función

$$S(x) = \begin{cases} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 & \text{en} \quad [a, x_1] \\ c_4 x^2 + c_5 x + 1 & \text{en} \quad [x_1, x_2] \\ c_6 x^2 + c_7 x + c_8 & \text{en} \quad [x_2, x_3] \\ c_9 x^2 + 2x + c_{10} & \text{en} \quad [x_3, b] \end{cases}$$

con $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, sea una función spline cúbica de tipo I en $[a, b]$.

4 Determinar el valor que se obtiene al aproximar, mediante la fórmula de Simpson compuesta con $m = 1000$ subintervalos, la integral definida

$$\int_{-1000}^{1000} |x|^3 e^{\mathrm{sen}\, \pi x} dx.$$

5 Se considera el polinomio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

$a)$ Demostrar que P tiene una única raíz ξ positiva.

$b)$ Encontrar un intervalo y una función con los que se pueda utilizar el método del Punto Fijo para dar una aproximación de dicha raíz.

$c)$ ¿Con cuántas iteraciones queda garantizado que el error cometido, cuando se parte del extremo izquierdo del intervalo considerado, es inferior a la millonésima?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2002

---

1 Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Se pide:

$a)$ Calcular el radio espectral de la matriz del método iterativo de Jacobi.

$b)$ Hallar el radio espectral de la matriz del método iterativo de Gauss–Seidel.

$c)$ Comprobar que ambos métodos son convergentes o divergentes simultáneamente. En caso de convergencia, ¿cuál de los dos lo hace más rápidamente?

$d)$ Determinar los valores $\alpha \in \mathbb{C}$ para los que ambos métodos convergen para la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

2 Se considera la función $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\lambda}{x}\right)$. Se pide:

$a)$ Demostrar que es contractiva en el intervalo $[\lambda, 1]$ si $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$.

$b)$ Justificar si la ecuación $f(x) = x$ puede resolverse utilizando el método del Punto Fijo.

$c)$ Hallar un número de iteraciones para que la aproximación obtenida por el método anterior diste de la solución real menos de 10^{-4}.

$d)$ ¿Cuál es la solución exacta?

3 Se considera la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right),$$

donde A es una constante y x_0, x_1, x_2 son puntos en el intervalo $[-1, 1]$.

$a)$ Hallar los valores de A, x_0, x_1, x_2 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible y determinar éste.

$b)$ Ídem para la fórmula de cuadratura

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = A\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

para el intervalo $[a, b]$, donde ahora $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$. (**Indicación**: usar el apartado anterior y la dilatación $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\theta(x) = a + \frac{b-a}{2}(x + 1)$ que transforma el intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[a, b]$).

$c)$ ¿Existe alguna relación entre la fórmula anterior y la fórmula de Simpson? Explica razonadamente tu conclusión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2002

---

1 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinar los valores del parámetro α para los cuales la matriz A admite:

$a)$ Factorización LU.

$b)$ Factorización de Cholesky.

2 Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de diagonal estrictamente dominante se considera un número natural p, con $1 \leq p \leq n$, y las matrices $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \geq p, \end{cases}$$

y $N = M - A$. Para cada número $w \in (0, 1]$ se consideran las matrices

$$M_w = \frac{1}{w} M \ \text{ y } \ N_w = M_w - A.$$

Demostrar que el método iterativo asociado a la descomposición $A = M_w - N_w$ es convergente.
(**Indicación**: Utilizar que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ entonces $\left| \dfrac{1-w-\lambda}{\lambda w} \right| \geq 1$).

3 Sabiendo que la longitud de la curva $y = f(x)$ definida sobre el intervalo $[a, b]$ es

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

determinar un número n de intervalos para aproximar la longitud de la curva dada por la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ usando la regla de los trapecios compuesta de forma que el error cometido sea inferior a 10^{-2}.

4 Las ecuaciones paramétricas del movimiento de un proyectil vienen dadas por

$$\begin{cases} x(t) = 3(1 - e^{-t}) \\ y(t) = 6(1 - e^{-t}) - 2t \end{cases}$$

donde $t > 0$. El tiempo de impacto del proyectil con el suelo se calcula resolviendo la ecuación $y(t) = 0$.

Encontrar un intervalo en el que se pueda aproximar dicho tiempo de impacto mediante el método de Newton.

5 Obtener la secuencia de Sturm del polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$ y encontrar, a partir de ella, todas las raíces de P.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2003

1 $a)$ Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar que si A_{n-1} es inversible y admite factorización LU

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$$

entonces existen $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & y \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right).$$

$b)$ Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si todos los menores principales de la matriz A son no nulos entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior tales que $A = LU$.

2 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$a)$ Dar una condición suficiente que garantice la convergencia del método de Jacobi asociado a la matriz A.

$b)$ Dar una condición necesaria y suficiente para que dicho método sea convergente.

$c)$ Encontrar valores de α para los cuales el método de relajación de parámetro $0 < w < 2$ asociado a A sea convergente.

3 Dado $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar las siguientes integrales:

$a)$ $\displaystyle\int_0^{2n} x^{2n} \cos(2\pi x)\, dx.$

$b)$ $\displaystyle\int_0^{2n} x^{2n+1} \cos(2\pi x)\, dx.$

$c)$ $\displaystyle\int_0^{2n} \left(a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \cos(2\pi x)\, dx \quad (a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, 2n+1).$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $2n + 1$ puntos.

4 $a)$ Probar que la función

$$f(x) = \frac{3 - 2x^3 + x^4 - x^5}{5}$$

es contractiva en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Determinar la constante de contractividad.

$b)$ Demostrar que el polinomio

$$P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 5x - 3$$

tiene una única raíz ξ en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$.

$c)$ Determinar los dos primeros términos de una sucesión que converja a la raíz ξ de P, justificando su convergencia.

$d)$ ¿Tiene P raíces negativas?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2003

1 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$a)$ Encontrar la relación que deben verificar α y β para que el método de Jacobi por puntos sea convergente.

$b)$ Dado el sistema

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{3} = 3 \\ x + y + z = 4 \\ \dfrac{y}{3} + z = 0, \end{cases}$$

calcular la primera aproximación a la solución del mismo, por el método anterior, para el valor inicial $(2, 3, 0)^{\mathrm{T}}$.

2 Para calcular de forma aproximada el valor $\dfrac{1}{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ no nulo, se consideran las funciones

$$F(x) = \alpha - \frac{1}{x} \text{ y } G(x) = \alpha^3 - \frac{1}{x^3}.$$

$a)$ Comprobar que los métodos de aproximación de Newton para dichas funciones son, respectivamente,

$$x_{n+1} = x_n(2 - \alpha x_n) \tag{8}$$

y

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{3}(4 - \alpha^3 x_n^3) \tag{9}$$

para todo $n \in \mathbb{N}\{0\}$.

$b)$ Se considera la sucesión $r_n = 1 - \alpha x_n$, con $n \in \mathbb{N}\{0\}$. Comprobar que se verifica

$$r_{n+1} = r_n^2$$

para la sucesión (8) y

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}(r_n^4 - 4r_n^3 + 6r_n^2)$$

para la sucesión (9).

$c)$ Para cada $\alpha > 0$, hallar un intervalo $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ de forma que la sucesión (8) converja para cualquier $x_0 \in I_\alpha$.

$d)$ Si $0 < r_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}\{0\}$, comprobar que

$$\frac{1}{3}(r_n^4 - 4r_n^3 + 6r_n^2) > r_n^2.$$

Deducir cuál de los dos métodos, (8) o (9), converge más rápidamente.

3 Se considera la fórmula de derivación aproximada

$$f'(x) \simeq \frac{1}{12h}\left(f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)\right).$$

a) Usando desarrollos en serie, calcular el orden de aproximación del error, en función de h.

b) Para $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, hallar la aproximación de $f'(2)$ cuando se toma $h = \dfrac{1}{10}$ y calcular el error cometido.

4 La sucesión de Sturm del polinomio

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

es $\left\{P_0(x) = P(x), P_1(x) = P'(x), P_2(x) = -x + \dfrac{50}{13}, P_3(x) = -1\right\}$.

a) Determinar el número de raíces reales de $P(x)$ y, para cada una de ellas, un intervalo que la contenga.

b) Hallar la primera aproximación de la raíz más cercana a 1, por el método de las cuerdas, cuando se toma como valor inicial $x_0 = 1$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2003

---

1 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

$a)$ Demostrar que las matrices

$$i)\ D \qquad\qquad ii)\ \mu A \text{ con } \mu > 0 \qquad\qquad iii)\ D - \mu E - \mu F \text{ con } 0 \le \mu \le 1$$

son, también, simétricas definidas positivas.

$b)$ Si A se escribe en la forma $A = M - N$, con M inversible, siendo $M = D - \alpha E - \beta F$, determinar un rango de valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el método iterativo asociado a la descomposición anterior es convergente.

$c)$ ¿Se deduce del apartado $b)$ la convergencia del método de Jacobi? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

2

$a)$ Teniendo en cuenta que el error en la fórmula del trapecio (cerrada) viene dado por la expresión

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta)$$

con $\theta \in (a, b)$, deducir la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio compuesta cerrada) con m subintervalos, obteniendo la expresión del error de dos formas:

$i)$ Sumando los errores cometidos en cada subintervalo.

$ii)$ Aplicando a lo anterior el Teorema de los Valores Intermedios.

$b)$ Dado $n \in \mathbb{N}$, aplicar el apartado $a)$ con $m = n - 1$ subintervalos a la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, n]$. Escribir los términos de error en las formas $a)i)$ y $a)ii)$.

$c)$ Sabiendo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} \le \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} \le \frac{1}{n-1},$$

acotar las dos expresiones del error obtenidas en el apartado $b)$. ¿Cuál de las dos cotas es mejor?

$d)$ Teniendo en cuenta que

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1),$$

utilizar los apartados $b)$ y $c)$ para aproximar la cantidad

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n.$$

3 Sea $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función par. Dado $n \in \mathbb{N}$, se consideran una partición equiespaciada del intervalo $[-a, a]$ de $n + 1$ puntos y P_n el polinomio de interpolación de f en dichos puntos. Justificar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

$a)$ P_2 tiene grado exactamente 2.

$b)$ P_3 tiene grado menor o igual que 2.

$c)$ $P_2 = P_3$.

4 Utilizar el método de Newton, justificando las hipótesis de convergencia, para aproximar el valor de x que en la gráfica $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$, determinando el valor de las dos primeras iteraciones. (**Indicación**: Minimizar la distancia al cuadrado del punto $(1, 0)$ a un punto genérico de la curva).

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2004

1 Nos gustaría tener una cuenta de ahorros con un saldo de 100000€ en el momento de comprar una casa dentro de 5 años y podemos depositar 6000€ anuales. El interés anual x que deberá proporcionarnos la cuenta de ahorros es solución de la ecuación

$$100000x = 6000\left((1+x)^5 - 1\right).$$

a) Probar que esta ecuación posee una solución estrictamente positiva.

b) Determinar un intervalo en el que aplicar el método de Newton para calcularla.

2 Se desea aproximar el valor de la integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que 10^{-2}. Para ello seguimos el proceso siguiente:

a) Calculamos un valor $L \geq 1$ para el cual

$$\int_L^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \frac{10^{-2}}{2}.$$

Comprobar que podemos elegir $L = 6$. (**Indicación**: utilizar la desigualdad $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \geq 1$ y tener en cuenta que $\ln(200) \approx 5{,}2983$).

b) A continuación, determínese el número de intervalos necesarios para calcular

$$\int_0^6 e^{-x^2}\,dx$$

con un error menor que $\dfrac{10^{-2}}{2}$ mediante la fórmula del trapecio cerrada compuesta usando la fórmula del error

$$R_{(a,b)}(f) = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\theta) \ \text{ con } \ \theta \in (a,b), \ \text{ siendo } \ h = \frac{b-a}{m}.$$

3 Se utiliza el método iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u^{k+1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ \eta & \zeta & 0 \end{pmatrix} u^k = b, \ u^0 \in \mathbb{R}^3$$

para resolver el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & 1 & 1 \\ \eta & \zeta & 1 \end{pmatrix} u = b, \ b \in \mathbb{R}^3,$$

siendo ξ, η y ζ constantes reales.

a) Encontrar todos los valores de ξ, η y ζ para los que, sean cuales sean u^0 y b, la sucesión $\{u^k\}_{k=0}^\infty$ converge.

b) En el caso en que $\xi = \eta = \zeta = -1$, encontrar vectores u^0 y b para los que la sucesión $\{u^k\}_{k=0}^\infty$ no converge.

c) ¿Es cierto que cuando $\xi = \zeta = 0$ el método siempre permite encontrar la solución exacta en un número finito de iteraciones? En caso afirmativo, encontrar dicho número; en cualquier caso, razonar la respuesta.

4 Se considera el sistema lineal $Ax = y$ para una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & 0 & 0 \\ c & a_2 & b & 0 \\ 0 & c & a_3 & b \\ 0 & 0 & c & a_4 \end{pmatrix}$$

a) Usar el método de eliminación gaussiana para triangularizar la matriz A.

b) Probar que $A = LU$, siendo L una matriz triangular inferior con unos en su diagonal y U una matriz triangular superior, calculando los elementos de las matrices L y U directamente a partir de los elementos de la matriz A.

5 Sea $\varepsilon > 0$ el error de redondeo unitario de la máquina, $i.e.$

$$fl(x * y) = [fl(x) * fl(y)](1 + \delta) = \frac{[x * y]}{1 - \delta'} \text{ con } |\delta|, |\delta'| < \varepsilon.$$

Sean x, y vectores columna cuyas componentes son números máquina, $z_1 = fl(x_1 y_1)$ y $z_{k+1} = fl(z_k + x_{k+1} y_{k+1})$. Si $n\varepsilon < \frac{1}{3}$ y $\delta_i > 0$ son tales que

$$fl\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (1 + \delta_i),$$

se pide:

a) Demostrar por inducción sobre n que

$$|\delta_i| \leq (1 + \varepsilon)^{n+2-i} - 1.$$

b) Probar que

$$(1 + \varepsilon)^k - 1 \leq \frac{k\varepsilon}{1 - \frac{k\varepsilon}{2}} < \frac{6}{5} k\varepsilon.$$

c) El error relativo satisface

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - fl\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|} < \frac{6}{5} (n + 1)\varepsilon.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2004

1 a) Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

donde $A_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}$ y $A_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}$, con $n_1 + n_2 = n$. Elegir convenientemente w verificando

$$\begin{pmatrix} w^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = v^{\mathrm{T}} M v,$$

donde $M = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{21}^{\mathrm{T}}$, para deducir que la matriz M es también simétrica definida positiva.

b) Dada una matriz $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & u^{\mathrm{T}} \\ \hline u & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, con $B \in \mathcal{M}_{n-1}$, probar que existen $\alpha \in \mathbb{R}_+$ y $C \in \mathcal{M}_{n-1}$ simétrica definida positiva, tales que $A = R_1 A_1 R_1^{\mathrm{T}}$, siendo

$$R_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \frac{1}{\alpha} u & I \end{pmatrix} \text{ y } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

c) Iterar el proceso anterior para concluir que $A = R_1 \cdots R_n R_n^{\mathrm{T}} \cdots R_1^{\mathrm{T}}$. ¿Identificas la matriz $R = R_1 \cdots R_n$?

2 Sea A una matriz cuyos autovalores son todos positivos. Se considera el método iterativo

$$u^{k+1} = B_\theta u^k + \theta b$$

con $\theta > 0$, donde $B_\theta = I - \theta A$.

a) Demostrar que $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ si y sólo si $1 - \lambda\theta \in \mathrm{sp}(B_\theta)$.

b) Encontrar el intervalo de valores de θ para los que el método anterior es convergente.

c) ¿Se puede aplicar el método anterior a la matriz $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$? ¿Para qué valores de θ es convergente?

3 Encontrar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ que hace que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = f(-\alpha) + f(\alpha)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste? ¿Qué error se comete cuando se aplica esta fórmula para aproximar

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \operatorname{sen} x\, dx?$$

4 Dados $x_0, a, b \in \mathbb{R}$ se considera la función

$$h(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si} \quad x \in [x_0 - 1, x_0] \\ ax + b & \text{si} \quad x \in [x_0, x_0 + 1] \end{cases}$$

donde $P(x) = x^3 + x + 1$.

a) Demostrar que si $x_0 \neq 0$ la función h no puede ser una función *spline* cúbica.

b) Hallar los valores de x_0, a y b para los que h es una función *spline* cúbica y esbozar la gráfica de h.

c) Determinar el número de raíces reales del polinomio $P(x)$ y encontrar, para cada una de ellas, un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton o el método de Whittaker, dando los dos primeros términos de la sucesión definida por el método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2004

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz con *estructura de flecha*:

$$\begin{pmatrix} \times & & & & & \times \\ & \times & & & & \times \\ & & \times & & & \times \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

es decir, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ para $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$.

a) Demostrar que si $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ entonces la matriz A admite factorización LU.

b) Probar que la factorización LU preserva la estructura de matriz flecha, $i.e.$, si A tiene esta estructura también la tienen las matrices L y U.

c) Enunciar resultados análogos a los de los apartados a) y b) para la factorización de Cholesky.

2 Consideremos las iteraciones dadas por

$$u^{k+1} = Bu^k + b, \ k = 0, 1, \ldots$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $|\alpha|, |\beta| < 1$.

a) Dado $b \in \mathbb{R}^2$, probar que la ecuación $u = Bu + b$ posee una única solución $u^* \in \mathbb{R}^2$ y que la sucesión $\{u^k\}_{k=0}^\infty$ converge a u^*, para cualquier $u^0 \in \mathbb{R}^2$.

b) Supongamos que $\alpha = \beta$.

I) Si $u^0 - u^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, calcular $u^k - u^*$. ¿Cuál es el menor número k de iteraciones necesarias para tener

$$\left\| u^k - u^* \right\|_\infty < 10^{-3}?$$

Estudiar el comportamiento de dicho número mínimo k en función de α y γ.

II) Supongamos, además, que $\gamma = 1$. Fijado $k > 0$, ¿cuál es la menor constante $c(k)$ para la que se verifica

$$\left\| u^k - u^* \right\|_\infty \leq c(k) \left\| u^0 - u^* \right\|_\infty$$

para todos los vectores $u^0 \in \mathbb{R}^2$? Estudiar el comportamiento de $c(k)$ cuando α varía.

3 Se considera la función $f(x) = e^x$ y $n \in \mathbb{N}$.

a) Hallar los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ para que el error en la interpolación polinomial de la función f en dicho intervalo, relativa a dichos puntos, sea mínimo.

b) Encontrar el menor $n \in \mathbb{N}$ para el que dicho error es menor que 10^{-6}.

4 Sea la función $F(x) = (x+1)\tan x - 1$.

a) Demostrar que en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ existe una única raíz, ξ, de F.

b) Demostrar que ξ se puede aproximar por un método de punto fijo en dicho intervalo. Decidir si $k = 0'51$ es una posible constante de contractividad para dicho método.(**Indicación**: $\arctan(\frac{2}{\pi+2})$ está entre $0'3$ y $0'4$).

c) Comenzando con $x_0 = 0$, determinar una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ que converja a ξ. Hallar el término x_1 y el mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \xi| < 10^{-4}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2005

1 Se pretende calcular numéricamente la raíz cuadrada de un número real $a > 0$.

a) Se considérese la fórmula recursiva

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \;\; \text{dado} \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Demostrar que si la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente entonces necesariamente su límite es $\sqrt{a}$. (**Indicación**: puede ser úlil comprobar que (10) se obtiene como las iteraciones del método de Newton aplicado a cierta ecuación $F(x) = 0$).

b) Probar que si $x_n > \sqrt{a}$ para todo $n \geq 0$ entonces el método definido por (10) converge cuadráticamente, es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{(\sqrt{a} - x_n)^2} \;\; \text{existe y es un número real.}$$

c) Se considera ahora el siguiente método

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \;\; \text{dado} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}. \end{cases}$$

Suponiendo que $x_n > \sqrt{a}$ para todo $n \geq 0$, pruébese que el orden de convergencia del método es cúbico, es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{(\sqrt{a} - x_n)^3} \;\; \text{existe y es un número real.}$$

2 Deducir la expresión de la fórmula de Simpson y de su término de error del siguiente modo: supongamos que existe una regla que satisface, dados $x_0 < x_2$ y f una función cuatro veces derivable en el intervalo (x_0, x_2)

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + c f^{iv)}(\xi), \tag{11}$$

siendo $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$ y $\xi \in (x_0, x_2)$ un punto que depende eventualmente de f.

a) Calcular los coeficientes α_0, α_1 y α_2 aplicando la fórmula anterior a polinomios de grado 0, 1 y 2.

b) Una vez hecho esto, obtener a partir de (11) el valor del coeficiente c.

3 Se utiliza el método iterativo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} u^{k+1} + \begin{pmatrix} 0 & 4\alpha(1-\alpha) & 13 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u^k = b$$

para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 4\alpha(1-\alpha) & 13 \\ 1 & 1 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} u = b,$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ y $b \in \mathbb{R}^3$.

a) Determinar para qué valores de α el método es convergente.

b) Razonar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *Sea* $\alpha \neq -1$ *y* $u^* \in \mathbb{R}^3$ *la solución exacta del sistema. Entonces existe un valor inicial* $u^0 \in \mathbb{R}^3$ *con la propiedad de que la sucesión* $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ *converge a* u^* *cuando* $k \to +\infty$.

4 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz real, simétrica y definida positiva.

a) Demostrar que es posible encontrar L triangular y D diagonal con $d_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tales que $A = D - L - L^T$. Probar que $D - L$ es inversible.

b) Se considera la matriz $\mathcal{L}_1 = (D - L)^{-1} L^T$ asociada al método de Gauss–Seidel. Comprobar la siguiente identidad

$$\mathcal{L}_1 = I - (D - L)^{-1} A.$$

c) Comprobar que $P = A - (\mathcal{L}_1)^T A \mathcal{L}_1$ es una matriz simétrica.

d) Si $Q = (D - L)^{-1} A$, demostrar que

$$P = Q^T D Q$$

y concluir que P es definida positiva.

e) Utilizar que P es simétrica y definida positiva para probar que $\varrho(\mathcal{L}_1) < 1$ y, por tanto, que el método de Gauss–Seidel aplicado a A es convergente.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2005

---

1 a) Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ con $M = D - F$ y $N = E$, siendo $A = D - E - F$ la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, 2, \dots, n$$

el método de Gauss–Seidel por puntos para A es convergente. (**Indicación**: Utilizar a)).

c) Demostrar resultados análogos a los apartados a) y b) cuando se toma una descomposición $D - E - F$ por bloques.

2 a) Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right)$$

donde la matriz A_1 es inversible. Demostrar que $\det(A) = \det(A_1) \det\left(A_4 - A_3(A_1)^{-1}A_2\right)$. (**Indicación**: Utilizar el método de eliminación gaussiana por bloques para anular el bloque ocupado por A_3).

b) Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array} \right)$$

con $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ inversible, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que si A no es inversible entonces $\alpha = a^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{-1}a$.

c) Sea A simétrica con sus $n-1$ primeros menores principales positivos y con $\det(A) = 0$. Demostrar que A admite factorización de Cholesky y se tiene que $b_{nn} = 0$.

3 Decidir si existen números reales a, b, c y d tales que la función

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

sea una función *spline* cúbica con condiciones de tipo I (condiciones naturales).

4 Encontrar el valor de $x_1 > 0$ que hace que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{9}\big(2f(-1) + 6f(-x_1) + 10f(x_1)\big)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

5 Se considera la ecuación $x^3 - x^2 - 10x + 1 = 0$.

a) Hallar el número de raíces reales y complejas de dicha ecuación, separando, mediante el método de Sturm, las raíces reales en intervalos que contengan una única raíz.

b) Encontrar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la menor raíz real, demostrando la convergencia del método y dando los dos primeros términos de la sucesión.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2005

1 Dado $t \in \mathbb{R}$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 5 & t^2+6 & 0 \\ 5 & 2t+9 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores de t la matriz A no admite factorización LU.

b) Para cada uno de los valores de t hallados en el apartado anterior, encontrar una matriz de permutaciones P tal que la matriz PA sí admita factorización LU.

2 Para cada número natural $n \geq 2$ se considera la matriz $A_n \in \mathcal{M}_n$ que tiene por elementos

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 2^i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

a) Calcular la matriz de Jacobi por puntos asociada a A_n. Demostrar que el método de Jacobi por puntos para A_n es convergente.

b) Demostrar que el método de Gauss–Seidel por bloques asociado a A_3 es convergente.

3 Determinar números reales a, b, c, d de modo que la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

4 Se considera la ecuación

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20,$$

y los esquemas equivalentes de punto fijo

$$\begin{cases} \text{(E1)}: & x = \dfrac{20 - 2x^2 - x^3}{10} \\ \text{(E2)}: & x = \dfrac{20 - 2x^2 - x^3}{10}. \end{cases}$$

a) Probar que la ecuación de partida tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$.

b) Estudiar la convergencia a dicha raíz de las iteraciones de punto fijo correspondientes a (E1) y (E2) con $x_0 \in [1, 2]$.

c) Suponiendo que se parte de $x_0 = 1$, determinar, para las iteraciones que sean convergentes, un número natural n_0 de forma que, si $n \geq n_0$, el error correspondiente a la iteración x_n sea menor que 10^{-4}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2006

1 Se quiere resolver el sistema lineal $Au = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

usando el método SOR

$$\left(\frac{1}{w}D - E\right)u^{k+1} = \left(\frac{1-w}{w}D + F\right)u^k + b$$

siendo

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar el valor de $w \in \mathbb{R}$ óptimo.

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica y definida positiva que admite las factorizaciones $A = L_1 L_1^{\mathrm{T}}$ y $A = L_2 D L_2^{\mathrm{T}}$, siendo D una matriz diagonal con elementos diagonales $d_1, d_2, \ldots, d_n$ positivos. Si $D^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$, demostrar:

a) $D = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$.

b) $A = L_2 D^{\frac{1}{2}} (L_2 D^{\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}$.

3 Se considera el polinomio de Laguerre de cuarto grado

$$L(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Sabiendo que la ecuación $L(x) = 0$ tiene al menos una raíz positiva, se pide:

a) Hallar un intervalo adecuado para poder emplear el método de Newton cuando se quiera aproximar el valor de la raíz de L más pequeña.

b) Demostrar que todas las raíces de L son reales y positivas.

c) Demostrar que todas las raíces de L son simples.

4 Para calcular la integral definida

$$\int_0^1 f(x)\,dx \text{ siendo } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

se consideran fórmulas de Newton–Côtes de tipo trapecio.

a) ¿Conviene elegir una fórmula del trapecio abierta o cerrada? ¿Por qué?

b) Calcular la aproximación que se obtiene empleando la fórmula del trapecio abierta.

c) Calcular el error exacto cometido.La estimación teórica del error en la fórmula del trapecio abierta viene dada por $\frac{3h^3}{4} f''(\xi)$ con $\xi \in (0, 1)$. ¿Es útil esta estimación?

d) Nos planteamos a continuación el uso de una fórmula del trapecio cerrada para calcular $\displaystyle\int_{0'01}^1 f(x)\,dx$. Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral y con la aproximación obtenida en el apartado b).

e) Si se reemplaza la integral anterior por $\displaystyle\int_{0'1}^1 f(x)\,dx$, comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral y con la aproximación obtenida en el apartado b).

f) La estimación teórica del error en este caso es $-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$ con $\xi \in (\varepsilon, 1)$ para $\varepsilon = 0'1$ ó $\varepsilon = 0'01$. ¿Qué cota da para el error?

g) ¿Qué conclusión se deduce de estos resultados?

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2006

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ inversible.

a) Probar que si A admite factorización LU entonces todos sus menores principales son no nulos.

b) Demostrar que si A admite factorización de Cholesky entonces es simétrica y definida positiva.

2 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se considera su descomposición $D - E - F$ por puntos y, a partir de ella, se definen las matrices $M = D - \alpha E - (1-\alpha)F$ y $N = M - A$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que M sea inversible.

a) Demostrar que si A es hermítica definida positiva el método asociado a tal descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Probar que si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante y $\alpha \in [0,1]$ entonces el método iterativo asociado a tal descomposición $M - N$ de A es convergente. (**Indicación**: Demostrar que si $|\lambda| \geq 1$ y $\alpha \in [0,1]$ entonces
$$\frac{|1-\alpha+\lambda\alpha|}{|\lambda|} \leq 1 \text{ y } \frac{|\lambda-\lambda\alpha+\alpha|}{|\lambda|} \leq 1).$$

c) ¿Se deduce de los apartados anteriores la convergencia del método de Jacobi por bloques para algún tipo de matrices? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

3 Determinar el número de subintervalos que deben tomarse para que el error cometido al aproximar
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$
mediante la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio cerrada compuesta) sea inferior a la milésima. Escribir la expresión que toma la regla de los trapecios para este caso concreto y con el número de subintervalos hallado.

4 Consideremos el polinomio
$$P(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 + x + \lambda$$
donde $\lambda > 0$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces (reales y complejas) de la ecuación $P(x) = 0$. ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

b) Fijado $\lambda = 1$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el *método de Newton* para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2006

1 Se considera una matriz A simétrica no inversible cuyos $n-1$ primeros menores principales son todos positivos, escrita en la forma $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$ siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

a) Demostrar que $\alpha - a^{\mathrm{T}}(A_{n-1})^{-1}a = 0$. (**Indicación**: aplicar el método de Gauss por bloques para anular el bloque ocupado por a^{T}).

b) Demostrar que A_{n-1} admite factorización de Cholesky.

c) Si $A_{n-1} = B_{n-1}(B_{n-1})^{\mathrm{T}}$ es la factorización de Cholesky de A_{n-1} ¿cómo deben elegirse $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ para que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & \beta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{n-1}^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & \beta \end{array}\right)?$$

Probar que tal elección de x y β es posible.

d) Deducir que A admite factorización de Cholesky $A = BB^{\mathrm{T}}$ y se tiene que $b_{nn} = 0$.

2 Consideramos el sistema lineal $Ax = b$, con $b \in R^3$ y $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz del método de relajación por puntos.

b) Demostrar que el método de Gauss–Seidel es óptimo.

3 Se desea calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ mediante la regla de Simpson compuesta. Como la función a integrar, $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$, no está definida en cero, se reescribe la integral como

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x - p(x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{p(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

donde

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

es el polinomio de Taylor de e^x de orden 4. Si

$$g(x) = \frac{e^x - p(x)}{\sqrt{x}},$$

se pide:

a) Demostrar que $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

b) Aproximar $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ mediante la regla de Simpson compuesta con $h = 0'25$ y dos subintervalos ($m = 2$).

c) Calcular el valor exacto de $\displaystyle\int_0^1 \frac{p(x)}{\sqrt{x}}dx$.

d) ¿Cuál es el valor aproximado de I que se obtiene con esta estrategia? ¿Se obtendría una aproximación mejor o peor usando un polinomio de Taylor de orden menor?

4 Se desea calcular $\sqrt[3]{21}$ mediante la iteración siguiente

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = g(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{con } g(x) = \frac{1}{21}\left(20x + \frac{21}{x^2}\right).$$

Se pide:

a) Encontrar un intervalo $[a, b]$ que contenga a 2, en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para garantizar la convergencia de la iteración.

b) Concluir que la iteración sugerida converge a un valor que es, precisamente, $\sqrt[3]{21}$.

c) Determinar un número de iteraciones para que el error cometido sea menor que 10^{-3}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2007

---

1 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a,b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son, respectivamente, los polinomios de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, demostrar que

$$P(x) = \frac{(x - x_0)P_2(x) - (x - x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1} - x_0}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

2 Los coeficientes de Fourier de una función impar $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$ vienen dados por la secuencia de integrales definidas

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Se desean calcular los primeros 20 coeficientes de Fourier de la función $f(x) = x$. Determinar qué número m de subintervalos se debe usar en la regla del trapecio cerrada compuesta para calcular los coeficientes $\{c_1, c_2, \ldots, c_{20}\}$ con un error inferior a 10^{-3}.

3 Se considera la función

$$f(x) = 5x(1 - x)(x - 0'5) + 0'1.$$

a) Probar que tiene tres ceros reales distintos.

b) Hallar un intervalo en el que aplicar el método de Newton para construir una sucesión que converja a la raíz intermedia y obtener los dos primeros términos de dicha sucesión.

4 Para resolver el sistema lineal $Au = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ \text{y} \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

a partir de un vector inicial $u^0 \in \mathbb{R}^2$ se considera el método iterativo

$$u^{k+1} = B(\theta)u^k + c(\theta),\ k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

siendo θ un parámetro real,

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 2\theta + 1 \\ 2\theta + 1 & \theta \end{pmatrix} \ \text{y} \ c(\theta) = \begin{pmatrix} -3\theta \\ -3\theta \end{pmatrix}.$$

a) Hallar los valores de θ para los cuales los sistemas $Au = b$ y $u = B(\theta)u + c(\theta)$ tienen las mismas soluciones.

b) Determinar los valores de θ para los cuales el método (12) es convergente.

c) Encontrar el valor de θ *óptimo* (es decir, aquel valor del parámetro que proporciona la máxima velocidad de convergencia).

MÉTODOS NUMÉRICOS

Examen Final

Junio 2007

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.

c) Probar que si la matriz A admite factorización LU entonces todos sus menores principales son no nulos.

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante.

a) Se considera una descomposición $A = M - N$ en la que se supone que los elementos de la matriz M se escriben en la forma

$$m_{ij} = \alpha_{ij}a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

donde los n^2 números α_{ij} verifican:

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_{ij} \leq 1, & i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha_{ii} = 1, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ está bien definido y es convergente.

b) Demostrar, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.

c) Ídem para los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques.

3 Sea $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $S_\Delta(y; \cdot)$ la función spline cúbica que interpola los valores $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ con condiciones de tipo I. Sea P_3 el polinomio de interpolación de Lagrange que interpola los valores $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y (x_3, y_3). ¿Qué debe ocurrir para que $S_\Delta(y; \cdot) = P_3$ en todo el intervalo $[a, b]$?

4 Dada la ecuación $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ se pide:

a) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de dicha ecuación.

b) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, escribiendo los dos primeros términos de una sucesión construida mediante dicho método y que converja a dicha raíz.

c) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{5}{3 + x}}$$

encontrar un intervalo en el que f verifique las hipótesis del Teorema del Punto Fijo, y pueda usarse para aproximar la raíz anterior. Determinar el número de iteraciones suficiente para que el error cometido sea inferior a la milésima.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2007

1 Se considera la matriz $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ con $n \geq 2$, siendo

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

a) Probar que la matriz A_n es inversible.

b) Para cada $\beta \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $B_n(\beta) = \beta I_n + A_n$, siendo I_n la matriz identidad de orden n.

- Dar una condición suficiente sobre β para que el método de Jacobi por puntos, aplicado al sistema lineal
$$B_n(\beta)u = b \tag{13}$$
con $b \in \mathbb{R}^n$, sea convergente.
- Dar una condición necesaria sobre β para que el método de Jacobi por puntos, aplicado al sistema (13) sea convergente. (**Indicación**: Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el determinante la matriz $H_n(\alpha) = (h_{ij}(\alpha))_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$, con
$$h_{ij}(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$
es $\det(H_n(\alpha)) = (1 + \alpha - n)(1 + \alpha)^{n-1}$).

c) Probar que, para cualquier norma matricial, la norma de la matriz A_n es mayor o igual a 1.

2 **Obtención del inverso de un número mediante sumas, restas y multiplicaciones**. Dado $\alpha > 0$, se considera la función

$$f(x) = 2x - \alpha x^2.$$

a) Comprobar que el único punto fijo no nulo de la función f es $\dfrac{1}{\alpha}$.

b) Encontrar, justificando debidamente la respuesta, un intervalo I que contenga a $\dfrac{1}{\alpha}$ de forma que la sucesión
$$x_n = f(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$$
converja a $\dfrac{1}{\alpha}$ para cualquier dato inicial $x_0 \in I$.

3 Determinar los valores de los pesos w_0, w_1, w_2 y w_3 para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq w_0 f(-1) + w_1 f\left(-\frac{1}{3}\right) + w_2 f\left(\frac{1}{3}\right) + w_3 f(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

4 Sea $f \in \mathcal{C}^3([-a, a])$ con $a > 0$. Dados $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ se considera la función

$$E(h) = \frac{\big(f(h) + \varepsilon_2\big) - \big(f(-h) + \varepsilon_1\big)}{2h} - f'(0),\ 0 < h < a.$$

a) Demostrar que
$$|E(h)| \leq \frac{M_3}{6} h^2 + \frac{\varepsilon}{h} \tag{14}$$
siendo $M_3 = \max\limits_{x \in [-a,a]} |f'''(x)|$ y $\varepsilon = \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$. (**Indicación**: Hacer desarrollos de Taylor de las funciones $f(h)$ y $f(-h)$ en torno al punto 0).

b) Determinar el valor de h óptimo que minimiza la cota de la estimación (14) cuando $M_3 > 0$ y $0 < \varepsilon < \dfrac{M_3 a^3}{3}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2008

1 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Demostrar que A no tiene autovalores racionales.

b) Probar que los autovalores de A son reales y que A no es definida positiva.

c) Acotar los autovalores positivos de A entre intervalos de longitud uno.

d) Aplicar el método del Punto Fijo para aproximar el autovalor positivo de A más pequeño, garantizando la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.

2 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \sigma & \alpha & \delta \\ \gamma & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

con $\alpha > 0$ y $\beta\gamma > 0$. Determinar la condición necesaria y suficiente que deben verificar los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y σ para que el método de Jacobi por puntos asociado a la matriz A sea convergente.

3 Sea $h > 0$ y $f \in \mathcal{C}^4([0, 3h])$.

a) Determinar el polinomio de interpolación de Lagrange $P_2(x)$ de la función f en los nodos $\{x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h\}$.

b) Usar el polinomio $P_2(x)$ para encontrar una fórmula de cuadratura I_h que aproxime

$$I = \int_0^{3h} f(x)\, dx.$$

c) Utilizar desarrollos de Taylor de la función f para demostrar que

$$I - I_h = \frac{3}{8} h^4 f'''(0) + O(h^5).$$

4 Aplicar el método de Newton para determinar qué punto de la rama de la hipérbola

$$y = \frac{1}{x} \text{ con } x > 0$$

está más cerca del punto $(-1, 0)$. (**Observación**: determinar los dos primeros términos de la sucesión del método de Newton, garantizando la convergencia del mismo).

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2008

1 Se considera la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida como

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ -b & b & a \end{pmatrix}.$$

a) Dar una condición suficiente sobre a y b para que A admita factorización LU. Determinar las matrices L y U.

b) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, demostrar que la matriz A puede factorizarse como $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ siendo $\widetilde{L}$ una matriz triangular inferior y $\widetilde{U}$ una matriz triangular superior con unos en la diagonal principal. Determinar las matrices $\widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$.

2 Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

con $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Para resolver el sistema lineal $Au = b$, con $b \in \mathbb{R}^3$, se considera el método de relajación por puntos de parámetro $w \in \mathbb{R}$.

a) Determinar para qué valores de w el método iterativo anterior está bien definido y hallar la matriz $\mathcal{L}_w$ del mismo.

b) ¿Para qué valores de w este método es convergente?

c) Determinar el valor de w óptimo (es decir, aquel valor del parámetro que proporciona la máxima velocidad de convergencia).

3 Se considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Demostrar, por inducción sobre el número de puntos, que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

b) Hallar el polinomio de interpolación de la función f en los nodos $\{1, 2, 4, 8\}$.

4 Dados $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + \sqrt{3\alpha}\, x^2 + \alpha x + \beta.$$

a) Justificar que $P(x)$ no tiene raíces positivas y que, al menos, tiene una raíz negativa.

b) Hallar la secuencia de Sturm del polinomio $P(x)$ y determinar el tipo y número de raíces de $P(x)$ en función de los parámetros α y β.

c) ¿Qué deben verificar α y β para que $P(x)$ tenga raíces múltiples? Determinar cuáles son dichas raíces y su orden de multiplicidad.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2008

---

1 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se considera la matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b & a & & & \\ a & b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & a \\ & & & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n,$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_j = b + 2a\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

1) **Factorización de Cholesky**. Si $b > 0$ y $a < 0$, encontrar una relación entre los parámetros a y b para que la matriz A admita una única factorización de Cholesky,

2) **Método de Jacobi**.

   a) Supuesto que $b > 0$ y $a < 0$, dar una condición suficiente sobre los parámetros a y b para que el método de Jacobi por puntos asociado a la matriz A sea convergente.

   b) En el caso particular de que $a = -1$ y $b = 2$:

      I) Calcular la matriz $\mathcal{J}$ del método de Jacobi por puntos.

      II) Demostrar que el método de Jacobi por puntos es convergente.

2 **Regla de los trapecios**. Aplicar la regla del trapecio compuesta a la integral

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

para obtener una aproximación de $\frac{\pi}{4}$, determinando el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-2}.

3 **Interpolación**.

a) Encontrar el valor de los parámetros a, b y c para que

$$S(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0,1] \\ -\dfrac{(x-1)^3}{2} + a(x-1)^2 + b(x-1) + c, & x \in [1,3] \end{cases}$$

sea una función spline cúbica de tipo I (natural).

b) Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange que interpola la función $S(x)$ en los nodos $\{0, 3\}$ y dar una estimación del error cometido en dicha aproximación en el intervalo $[0, 3]$.

4 Aplicar el método del Punto Fijo para aproximar la raíz positiva más pequeña de la ecuación

$$x \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Determinar un número de iteraciones que garantice que el error cometido en dicha aproximación sea inferior a 10^{-3}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2009

---

1 Se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ \beta & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Hallar todos los valores de α y β para los cuales la matriz A es de diagonal estrictamente dominante y definida positiva al mismo tiempo.

b) Si la matriz A tiene las propiedades del apartado a) y, además, es simétrica, determinar el espectro y el radio espectral cuando $\alpha = 2$.

c) Hallar la factorización de Cholesky para la matriz A del apartado b).

2 Demostrar las siguientes propiedades:

a) A partir de $n+1$ puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, se considera la función
$$f(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Probar que:

I) $f[x_0, x_1, \ldots, x_i] = 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

II) $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = 1$ si $x \neq x_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

III) $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x', x''] = 0$ si $x' \neq x''$, $x' \neq x_i$ e $x'' \neq x_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

b) Se considera la siguiente tabla de diferencias divididas:

x_i	$f(x_i)$			
1	2	-1	$-\frac{1}{6}$	d
0	3	$-\frac{4}{3}$	c	
3	-1	b		
2	a			

Sabiendo que el polinomio P que interpola la tabla anterior es de segundo grado:

I) Calcular $P(2)$ sin tener que desarrollar el polinomio.

II) Hallar el polinomio P.

III) ¿Qué valor toma la función f en el punto $x = -1$ sabiendo que el polinomio P es invariante si se añade el punto $x = -1$?

3 Se considera la fórmula de integración aproximada
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) - \frac{f'(b)-f'(a)}{12}(b-a)^2 \tag{15}$$
que tiene como error
$$R_{(a,b)} = -\frac{(b-a)^5}{720} f^{iv)}(\xi),\ \xi \in (a,b). \tag{16}$$

a) Comprobar que la fórmula de integración (15) es exacta para polinomios de grado menor o igual que tres.

b) Dividir el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos equiespaciados $[x_i, x_{i+1}]$, de paso h, y hallar la expresión de la fórmula de integración compuesta correspondiente.

c) Utilizando la expresión del error (16) en un intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, demostrar que la expresión del error global en todo el intervalo $[a, b]$ de la fórmula de integración compuesta es

$$R^{global}_{(a,b)} = -\frac{(b-a)^5}{720m^4}\, f^{iv)}(\xi),\ \xi \in (a, b).$$

d) Si $[a, b] = [1, 10]$ y $f(x) = e^x$, determinar el número m de subintervalos necesarios para que el error global en la fórmula de integración compuesta sea inferior a 10^{-2}.

4 Dados $a, b > 0$ se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}\, x + b.$$

a) Hallar la secuencia de Sturm del polinomio P en función de los valores que tomen los parámetros a y b.

b) Determinar el número de raíces reales y complejas del polinomio P en función de los valores que tomen los parámetros a y b.

c) Aplicar el método de Newton para aproximar las raíces reales de la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$$

especificando los intervalos y los puntos de partida. Calcular los dos primeros términos de las sucesiones que definen dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2009

1 Sean $\{A_k\}_{k=1}^m \in \mathcal{M}_n$ tales que cada matriz A_k admite una factorización LU de la forma

$$A_k = L_k U$$

con $L_k = \left(\ell_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^n$ y $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n$ para $k = 1, 2, \dots, m$.

a) Demostrar que la matriz

$$A = \sum_{k=1}^m A_k$$

también admite factorización LU y hallar los elementos de las matrices de la factorización anterior en función de $\ell_{ij}^{(k)}$ y u_{ij}.

b) En el caso particular de que

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ k = 1, 2, 3, 4,$$

hallar la factorización LU de la matriz

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

2 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible que admite factorización de Cholesky de la forma $A = BB^{\mathrm{T}}$ siendo $B \in \mathcal{M}_n$ una matriz real triangular inferior. Demostrar que A es simétrica y definida positiva.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica definida positiva y la descomposición $A = D - E - F$ por puntos de A. Demostrar que si la matriz $D + E + F$ es definida positiva entonces el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

3 Se considera la función $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ dada por

$$f(x) = \arccos x$$

y las abscisas de Tchebychev

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \ k = 0, 1, \dots, n.$$

a) Para $n = 2$, hallar el polinomio de interpolación P_2 de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, x_2\}$.

b) ¿Están alineados los puntos $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$?

c) Obtener el valor que se obtiene al aproximar $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$ por $\int_{-1}^1 P_2(x)\, dx$. ¿Es la anterior una fórmula de Newton–Côtes? Razonar la respuesta.

4 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & \cdots & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

con $a_n \neq 0$.

a) Demostrar que el polinomio característico de A es

$$P(x) = \frac{(-1)^n}{a_n} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \right).$$

b) Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I) Obtener acotaciones de los autovalores de la matriz B.

II) Encontrar un intervalo y un valor inicial en el que se pueda aplicar el Método de Newton para aproximar el autovalor positivo más pequeño de la matriz B, determinando los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2009

---

1 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 3 & \beta \\ 0 & \beta & 5 \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano (α, β) en los que la matriz A es:

   I) Inversible.

   II) De diagonal estrictamente dominante.

   III) Definida positiva.

b) Se considera la matriz $\mathcal{J}$ del método de Jacobi por puntos asociado a la matriz A.

   I) Explicitar la matriz $\mathcal{J}$.

   II) Determinar la condición necesaria y suficiente que deben verificar los coeficientes α y β para que el método de Jacobi por puntos asociado a la matriz A sea convergente. ¿Existe alguna relación con lo obtenido en el apartado a)? Razonar la respuesta.

2 a) Determinar la constante $C \in \mathbb{R}$ y los puntos $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ para que la fórmula de integración

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx C(f(-x_1) + f(x_2) + f(x_1)) \tag{17}$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

b) Encontrar la expresión de una fórmula análoga a (17) que sirva para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ siendo (a, b) un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. (**Indicación**: efectuar un cambio de variable lineal).

c) Calcular, de forma exacta, el valor de la integral

$$\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}\,dx. \tag{18}$$

d) Aproximar la integral (18) según la fórmula obtenida en b) y mediante la regla de Simpson. ¿Cuál de las dos aproximaciones proporciona un mejor resultado?

3 Se considera la función

$$F(x) = \ln(x^2) - x^2 + 2,\; x \neq 0.$$

a) Demostrar que la función F tiene únicamente dos raíces positivas ξ_1 y ξ_2 que se encuentran, respectivamente, en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

b) ¿Cuántas raíces negativas tiene F? ¿En qué intervalos se encuentran?

c) Aplicar el método del Punto Fijo para aproximar la raíz ξ_2, determinando un número de iteraciones que garantice que el error cometido en dicha aproximación sea inferior a 10^{-3}.

4 Encontrar todas las raíces del polinomio

$$P(x) = x^7 + x^6 - 4x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 4x - 4.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2010

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica y definida positiva.

a) Demostrar que A admite factorización LU.

b) Expresar las matrices L y U en función de la matriz B de la factorización de Cholesky de A.

2 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

y sean

$$A_1 = D_1 - E_1 - F_1 \ \text{ y } \ A_4 = D_4 - E_4 - F_4$$

las descomposiciones $D - E - F$ por puntos de las matrices A_1 y A_4, respectivamente. Se considera la descomposición $A = M - N$ siendo

$$M = \left(\begin{array}{c|c} D_1 - E_1 & 0 \\ \hline 0 & D_4 - E_4 \end{array}\right).$$

Demostrar que la matriz M es de diagonal estrictamente dominante y que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ es convergente.

b) ¿Puede demostrarse, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante?

3 Se considera la función

$$f(x) = x^4 + x - 1.$$

a) Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange P de la función f en los puntos $\{-1, 0, 1, 2\}$.

b) Demostrar que el error cometido en la interpolación anterior viene dado por

$$f(x) - P(x) = (x+1)x(x-1)(x-2), \ x \in [-1, 2].$$

c) Aproximar $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$ mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de 4 puntos y determinar el error que se comete en dicha aproximación.

d) Demostrar que la función f tiene una única raíz positiva ξ.

e) Determinar un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que garanticen que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que define el método de Newton converja a ξ. Justificar la respuesta.

4 Se considera la función

$$f(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta x$$

siendo $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta < 1$.

a) Demostrar que la función f es contractiva en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. ¿Cuál es la constante de contractividad?

b) Probar que f tiene un único punto fijo ξ en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) En el caso particular de que $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{1}{4}$ y comencemos en $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, encontrar un valor $n \in \mathbb{N}$ para el que podamos afirmar que la diferencia, en valor absoluto, entre el término x_n de la sucesión del método del Punto Fijo y ξ sea inferior a la milésima.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2010

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.

2 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

y sean

$$A_1 = D_1 - E_1 - F_1 \text{ y } A_4 = D_4 - E_4 - F_4$$

las descomposiciones $D - E - F$ por puntos de las matrices A_1 y A_4, respectivamente. Se considera la descomposición $A = M - N$ siendo

$$M = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & A_2 \\ \hline A_3 & D_4 \end{array}\right).$$

Demostrar que la matriz M es de diagonal estrictamente dominante y que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ es convergente.

b) ¿Puede demostrarse, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante?

3 a) Determinar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y ε para que

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 3x^2 + \beta x + \gamma, & x \in [-1, 0] \\ x^3 + \delta x^2 + 3x + 1, & x \in [0, 1] \\ -2\left(x^3 - 2\beta x^2 + \delta x + \varepsilon\right), & x \in [1, 2] \end{cases}$$

sea una función spline cúbica de tipo I.

b) Para los valores de los parámetros obtenidos en el apartado anterior:

I) Justificar si S puede ser el polinomio de interpolación de la tabla

x_i	y_i
-1	0
0	1
1	8
2	24

II) ¿Qué error se comete al aplicar la fórmula de Simpson a la función spline S en el intervalo $[-1, 1]$? Este error, ¿es el mismo que se comete al aplicar dicha fórmula en el intervalo $[0, 2]$?

4 Se considera la ecuación

$$e^x = 1 + \cos x. \tag{19}$$

a) Demostrar que la ecuación (19) tiene una única raíz positiva ξ.

b) Utilizar el método del Punto Fijo para aproximar la raíz ξ, justificando las hipótesis que garantizan la convergencia de dicho método.

c) Si se parte del valor inicial 0, encontrar un valor $n \in \mathbb{N}$ para el que podamos afirmar que el error cometido al aproximar ξ por el término n–ésimo de la sucesión del método del Punto Fijo sea inferior a la milésima.

d) Determinar un intervalo $[a, b]$ y un valor inicial x_0 que garanticen que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que define el método de Newton converja a ξ. Justificar la respuesta.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2011

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz que admite factorización LU y sea δ_k el menor principal de orden k de la matriz A para $k = 1, 2, \dots, n$.

a) Si A es inversible demostrar que

$$\delta_k \neq 0, \; k = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

Probar con un contraejemplo de una matriz 2×2 que (20) no se verifica, en general, si A no admite factorización LU.

b) Si A no es inversible y existe $k_0 \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ tal que $\delta_{k_0} = 0$, demostrar que

$$\delta_k = 0, \; k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, n.$$

2 Se desea resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mediante el método iterativo

$$x^{k+1} = Bx^k + c,$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ y } c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar para qué valores de x^0 y qué valores reales de α y β converge este método. Dibujar la correspondiente región del plano (α, β).

3 Se considera la fórmula de Newton–Côtes

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{3h}{2}\big(f(a+h) + f(a+2h)\big),$$

donde $h = \dfrac{b-a}{3}$, cuyo error viene dado por

$$R_{(a,b)}(f) = \frac{3h^3}{4} f''(\theta)$$

con $\theta \in (a, b)$.

a) Determinar para qué polinomios la fórmula de integración anterior es exacta.

b) Obtener la expresión de la correspondiente fórmula de integración compuesta así como su término de error.

c) Si $[a, b] = [1, 2]$ y $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x$, determinar el número de subintervalos necesarios para que el error global para la fórmula de integración compuesta sea inferior a 10^{-2}.

4 Se considera la función

$$F(x) = \ln(e^x - 2) - \frac{x}{2} \text{ con } x \in [1, +\infty).$$

a) Demostrar que F tiene una única raíz ξ en dicho dominio.

b) Determinar un intervalo en que se pueda aproximar ξ, mediante el Método de Newton, indicando las tres primeras iteraciones.

Dato: $F(1) \simeq -0'8309$.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2011

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible que admite una factorización de la forma $A = LU$, siendo L una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que pueda factorizarse en la forma

$$A = \widetilde{L}\widetilde{U}$$

siendo $\widetilde{L}$ una matriz triangular inferior y $\widetilde{U}$ una matriz triangular superior con $\mathrm{diag}(\widetilde{U}) = \mathrm{diag}(A)$. Explicitar las matrices $\widetilde{L}$ y $\widetilde{U}$ en función de A, L y U. ¿Qué ocurre si no se impone la condición de que A sea inversible?

2 a) Demostrar que el método iterativo $u^{k+1} = Bu^k + c$, siendo B una matriz cuadrada de orden n, converge en un número finito de pasos sólo si $\varrho(B) = 0$.

b) Dado el sistema lineal $Au = b$, donde A es una matriz real cuadrada inversible de orden n y $b \in \mathbb{R}^n$, se considera la descomposición $D - E - F$ por puntos de A. Suponiendo que la matriz D es inversible, contestar razonadamente (aportando una demostración, en caso afirmativo, o un contraejemplo, en caso negativo) a las siguientes preguntas:

I) Si $F = 0$ entonces el método de Jacobi converge en un número finito de pasos.

II) Si $F = 0$ y $w \in (0,2)\backslash\{1\}$ entonces el método de relajación de parámetro w converge en un número finito de pasos.

III) Justificar las respuestas a las dos preguntas anteriores para una descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

3 Con vistas a aproximar el valor de la integral doble $\int_0^1 \int_0^1 xe^{-y^2} dxdy$ se considera la igualdad

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^{-y^2} dxdy = \left(\int_0^1 x\, dx\right)\left(\int_0^1 e^{-y^2} dy\right),$$

con lo que el problema se reduce a calcular dos integrales simples. Para ello se procede como sigue:

1) Se evalúa $\int_0^1 x\, dx$.

2) Se aproxima $\int_0^1 e^{-y^2} dy$ mediante la fórmula de los trapecios de modo que el error cometido sea menor que 10^{-2}.

Determinar el valor de la aproximación de la integral $\int_0^1 \int_0^1 xe^{-y^2} dxdy$ obtenido mediante este procedimiento.

4 Se considera la ecuación

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 10x - 10 = 0. \tag{21}$$

a) Encontrar sus raíces enteras.

b) Demostrar que la ecuación (21) sólo tiene dos raíces reales: una negativa η y una positiva ξ.

c) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del punto fijo a la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

para aproximar la raíz ξ, justificando la respuesta.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2012

1 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la matriz $H_n(\alpha) \in \mathcal{M}_n$ con elementos

$$h_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

a) Demostrar que $\det(H_n(\alpha)) = (\alpha + 1 - n)(\alpha + 1)^{n-1}$.

b) Expresar los menores principales de la matriz $H_n(\alpha)$ en función de α. ¿Para qué valores de α la matriz $H_n(\alpha)$ admite factorización LU?

2 Se considera un sistema lineal $Au = b$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular la matriz $\mathcal{J}$ del método de Jacobi por puntos asociada a A. ¿Es convergente el método de Jacobi por puntos para la matriz A?

b) Dado un parámetro real $\omega \neq 0$, se considera el método de relajación–Jacobi

$$u^{k+1} = ((1 - \omega)I + \omega\mathcal{J})u^k + \omega D^{-1}b.$$

Probar que el límite de la sucesión así construida, si existe, es solución del sistema $Au = b$.

c) 1) Demostrar que, en general, para toda matriz $M \in \mathcal{M}_n$ y valores $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ se verifica que

$$\lambda \in \mathrm{sp}(M) \;\Leftrightarrow\; \alpha + \beta\lambda \in \mathrm{sp}(\alpha I + \beta M).$$

2) Hallar los valores de $\omega \neq 0$ para los que el método de relajación–Jacobi es convergente para la matriz A. (**Indicación**: Utilizar el apartado 1)).

3 Se desea aproximar el valor de la integral definida

$$\int_2^3 \frac{\ln x}{x - 1}\, dx.$$

Encontrar un número m de subintervalos de forma que el error cometido al utilizar la fórmula de los trapecios al aproximar dicha integral sea menor que 10^{-3}.

4 Se considera la ecuación

$$\operatorname{sen} x = x^2 + 2x - 1.$$

a) Demostrar que tiene una única raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar dicha raíz, justificando las hipótesis de convergencia. Determinar los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2012

---

1 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva escrita en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^{\mathrm{T}} & \alpha \end{array}\right)$$

siendo $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que si

$$A_{n-1} = L_{n-1} D_{n-1} (L_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

con $L_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ triangular inferior con unos en la diagonal y $D_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}$ diagonal con elementos diagonales positivos entonces existen $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $d \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline x^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & d \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} (L_{n-1})^{\mathrm{T}} & x \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right).$$

Deducir que, en este caso, $d > 0$.

b) Demostrar, por inducción sobre la dimensión de la matriz, que si A es simétrica definida positiva entonces existen L triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con elementos diagonales positivos tales que $A = LDL^{\mathrm{T}}$.

2 a) Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ siendo $M = D - F$ y $N = E$, donde $A = D - E - F$ es la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

el método de Gauss–Seidel por puntos para A es convergente. (**Indicación**: Utilizar el apartado a)).

3 Se considera la función $f(x) = e^{x-x^2}$.

a) Demostrar que $|f''(x)| \leq 2\, e^{\frac{1}{4}}$ para todo $x \in [0, 1]$.

b) Encontrar un número m de subintervalos de forma que el error cometido al utilizar la fórmula de los trapecios para aproximar

$$\int_0^1 e^{x-x^2} dx$$

sea menor que 10^{-2}. Obtener el valor de dicha aproximación.

4 Se considera el polinomio

$$P(x) = \frac{3x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - x + \frac{1}{160}.$$

a) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Encontrar un intervalo en el se pueda aplicar el método del Punto Fijo con la función

$$f(x) = \frac{3x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{160}$$

para aproximar la raíz positiva más pequeña de P, justificando las hipótesis de convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Febrero 2013

---

1 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y de diagonal estrictamente dominante. Demostrar que A admite factorización LU y que cada fila de U es proporcional a la correspondiente columna de L.

2 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

a) Demostrar que las matrices

$$i)\ D \qquad\qquad ii)\ \mu A \ \text{ con } \ \mu > 0 \qquad\qquad iii)\ D - \mu E - \mu F \ \text{ con } \ 0 \leq \mu \leq 1$$

son, también, simétricas definidas positivas.

b) Si A se escribe en la forma $A = M - N$, con M inversible, siendo $M = D - \alpha E - \beta F$, determinar un rango de valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el método iterativo asociado a la descomposición anterior sea convergente.

c) ¿Se deduce del apartado b) la convergencia del método de Jacobi? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

3 Hallar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$\int_{-120}^{120} \left(x^3 + 2|x| + \cos^2(\pi x)\right) dx$$

mediante la fórmula de Simpson abierta compuesta para 60 subintervalos.

4 Se considera el polinomio

$$P(x) = x^5 - 2x + 3.$$

a) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Encontrar un intervalo en el se pueda aplicar el método del Punto Fijo para aproximar la mayor raíz negativa de P, justificando las hipótesis de convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2013

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar un resultado análogo para la factorización de Cholesky, en caso de que A la admita.

c) Probar que si la matriz A admite factorización LU entonces todos sus menores principales son no nulos.

2 a) Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ con $M = D - F$ y $N = E$, siendo $A = D - E - F$ la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

el método de Gauss–Seidel por puntos para A es convergente. (**Indicación**: Utilizar a)).

c) Demostrar resultados análogos a los apartados a) y b) cuando se toma una descomposición $D - E - F$ por bloques.

3 Determinar los parámetros α y β para que

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + 2x^2 + \beta x + 1, & x \in [0, 1] \\ x^3 + \beta x^2 + 2x + \alpha, & x \in [1, 2] \\ \dfrac{\beta}{2} x^3 + 2\alpha x^2 + 2x + 1, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

sea una función spline cúbica.

4 Determinar el número de intervalos necesarios para aproximar el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

con un error menor que 10^{-3} cuando se emplea la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio compuesta).

5 Se considera el polinomio

$$P(x) = 3x^7 - 5x^3 - 1.$$

a) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar su mayor raíz, justificando las hipótesis de convergencia. Determinar los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2016

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante. Demostrar que A puede factorizarse en la forma

$$A = CD$$

siendo C una matriz triangular inferior y D una matriz triangular superior con $\mathrm{diag}(D) = \mathrm{diag}(A)$. Probar el mismo resultado en caso de que A sea una matriz simétrica definida positiva.

2 Sea A una matriz de diagonal estrictamente dominante.

a) Se considera una descomposición $A = M - N$ con M y N verificando

$$m_{ii} = a_{ii}$$

y

$$|m_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (|m_{ij}| + |n_{ij}|)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ está bien definido y es convergente.

b) Probar que A admite una descomposición $M - N$ como en a) que, además, verifica que si $i \neq j$ y $a_{ij} \neq 0$ entonces $m_{ij} \neq 0$ y $n_{ij} \neq 0$ (es decir, si un elemento no diagonal de A es no nulo, son no nulos los correspondientes elementos de M y N).

c) Demostrar, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel **por bloques** para A.

3 Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a, b]$. Probar que si, además, se imponen condiciones de tipo I, la función será una recta en todo $[a, b]$.

4 *a*) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$I_n = \int_0^n e^{\operatorname{sen} \pi x} dx$$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $n + 1$ puntos.

b) Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral I_{10} mediante la regla de los trapecios sea inferior a una centésima.

5 Consideremos el polinomio

$$P(x) = x^3 + \sqrt{15}x^2 + 5x + \lambda$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar, en función del parámetro λ, el número de raíces positivas, negativas y complejas de la ecuación $P(x) = 0$.

b) ¿Para qué valores de λ las raíces de P son múltiples? Hallar todas las raíces de P para esos valores de λ.

c) Fijado $\lambda = 1$ encontrar un intervalo donde pueda aplicarse el método de Newton para calcular una raíz negativa de P. Determinar los dos primeros términos de la sucesión definida por dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2016

1 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz que puede factorizarse en la forma $A = CD$ siendo $C = (c_{ij})$ una matriz triangular inferior y $D = (d_{ij})$ una matriz triangular superior. Si $\delta_k, k = 1, 2, \cdots, n$ son los menores principales de A demostrar que

$$\delta_k = c_{11}c_{22}\cdots c_{kk}d_{11}d_{22}\cdots d_{kk}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

b) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ probar que son equivalentes:

I) Los menores principales de A valen todos 1.

II) A admite factorización LU con $l_{ii} = u_{ii} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$.

c) Dada $A \in \mathcal{M}_n$ probar que son equivalentes:

I) A es una matriz simétrica cuyos menores principales valen todos 1.

II) A admite factorización de Cholesky con $b_{ii} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$.

2 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se considera su descomposición $D - E - F$ por bloques y, a partir de ella, se definen las matrices $M = D - \alpha E - (1-\alpha)F$ y $N = M - A$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que si A es hermítica definida positiva y la matriz M es inversible el método asociado a tal descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Probar que si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante y $\alpha \in [0, 1]$ entonces el método iterativo asociado a tal descomposición $M - N$ de A está bien definido y es convergente.

c) ¿Se deduce de los apartados anteriores la convergencia del método de Jacobi por bloques para algún tipo de matrices? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

3 Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son, respectivamente, los polinomios de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, demostrar que

$$P(x) = \frac{(x - x_0)P_2(x) - (x - x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1} - x_0}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

4 Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda(x^3 + x), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

sea una función spline cúbica. ¿Puede ser S una función spline cúbica de interpolación de la función

$$f(x) = x^2, \ 0 \leq x \leq 2$$

respecto de la partición $\Delta = \{0, 1, 2\}$?

5 Dada la ecuación $x^3 + 4x^2 - 7 = 0$ se pide:

$a)$ Determinar el número de raíces positivas y negativas de dicha ecuación.

$b)$ Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, justificando la convergencia del método. Calcular los dos primeros términos de la sucesión.

$c)$ Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{7}{4 + x}}$$

con vistas a aproximar la raíz anterior. Justificar la convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2017

---

1 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica, de diagonal estrictamente dominante.

a) Demostrar que A puede escribirse en la forma $A = LDL^{\mathrm{T}}$ donde L es una matriz real triangular inferior con unos en la diagonal y D es una matriz diagonal.

b) Demostrar que si los elementos diagonales de A son estrictamente positivos también lo son los de D.

2 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ hermítica definida positiva descompuesta en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right). \tag{22}$$

a) Demostrar que

$$\det(A) = \det(A_1) \det \left(A_4 - A_3 (A_1)^{-1} A_2 \right).$$

b) Probar que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ se verifica que

$$\det \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \lambda^2 A_3 & A_4 \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \lambda A_2 \\ \hline \lambda A_3 & A_4 \end{array} \right).$$

c) Se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de la matriz A asociada a la descomposición (22) y los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques correspondientes. Demostrar que ambos métodos están bien definidos y que para todo $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ se verifica que

$$\lambda^n \det(-D) P_{\mathcal{J}}(\lambda) = \det(E - D) P_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2),$$

donde $P_{\mathcal{J}}$ y $P_{\mathcal{L}_1}$ son, respectivamente, los polinomios característicos de las matrices de dichos métodos de Jacobi y Gauss–Seidel.

d) Demostrar que ambos métodos son convergentes. ¿Cuál lo hace más rápidamente?

3 Hallar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$\int_{-10}^{10} \left(\sqrt{10}\, x^3 + 10|x| + \operatorname{sen}^2(10\,\pi x) \right) dx$$

mediante la fórmula de Simpson compuesta para 100 subintervalos.

4 Se considera el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 2x + 2$.

a) Encontrar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la mayor raíz negativa de P, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

c) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del punto fijo a P para aproximar su menor raíz positiva, justificando la respuesta.

5 Sean $a \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Decidir si la secuencia de Sturm de un polinomio P puede estar formada por tres términos $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ siendo $P_2(x) = (x - a)^m$. En caso afirmativo, encontrar un ejemplo; en caso negativo, demostrar que no es posible.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2017

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar si $A = B_1B_1^{\mathrm{T}} = B_2B_2^{\mathrm{T}}$ son dos factorizaciones de Cholesky de A entonces existe una matriz $\Delta \in \mathcal{M}_n$ diagonal tal que $B_2 = B_1\Delta$. ¿Cuánto valen los elementos de la diagonal de Δ?

2 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante.

a) Se considera una descomposición $A = M - N$ en la que se supone que los elementos de la matriz M se escriben en la forma

$$m_{ij} = \mu_{ij}a_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

donde los n^2 números μ_{ij} verifican:

$$\begin{cases} 0 \le \mu_{ij} \le 1, & i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \mu_{ii} = 1, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ está bien definido y es convergente.

b) Demostrar, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.

c) Ídem para los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por bloques.

3 a) Determinar los parámetros λ, μ y ν para que

$$S(x) = \begin{cases} 6\mu + 4\lambda x - 2\mu x^3 + 5\nu x^4, & x \in [0, 1] \\ 2 + 2\mu(x-1) - (x-1)^2 + \mu(x-1)^3 + 2\nu(x-1)^4, & x \in [1, 3] \end{cases}$$

sea una función spline cúbica. ¿De qué tipo es la función spline obtenida?

b) Con los valores de λ, μ y ν obtenidos en el apartado a), ¿puede ser S una función spline cúbica de interpolación de la función

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ x \in [0, 3]$$

respecto de la partición $\Delta = \{0, 1, 3\}$?

4 Se considera el polinomio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5x - 5$.

a) Encontrar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña de P, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

c) Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{5}{3+x}},$$

demostrar que las raíces positivas de P son puntos fijos de f. Encontrar un intervalo en el que f verifique las hipótesis del Teorema del Punto Fijo, y pueda usarse para aproximar la raíz positiva más pequeña de P.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Enero 2018

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible.

a) Probar que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar que si $A = B_1B_1^{\mathrm{T}} = B_2B_2^{\mathrm{T}}$ son dos factorizaciones de Cholesky de A, entonces existe una matriz $\Delta \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible tal que $B_2 = B_1\Delta$. ¿Cuánto valen los elementos de la diagonal de Δ?

2

a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera una descomposición $A = M - N$ en la que se supone que los elementos de la matriz M se escriben en la forma

$$m_{ij} = \mu_{ij}a_{ij}, \; i, j = 1, 2, \ldots, n$$

donde los n^2 números μ_{ij} verifican

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_{ij} \leq 1, & i, j = 1, 2, \ldots, n \\ \mu_{ii} = 1, & i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ está bien definido y es convergente.

b) Demostrar, a partir de a), la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.

3 Determinar, justificando la respuesta, el valor que se obtiene al aproximar las integrales

$$\int_0^{4000} x^{1001} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx \;\; \text{y} \;\; \int_0^{4000} x^{1001} \cos(\pi x)\, dx$$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de 1001 puntos.

4 Se considera el polinomio

$$P(x) = 2x^4 + 13x^3 + 6x^2 - 6x - 3.$$

a) Encontrar las raíces enteras y racionales de P.

b) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

c) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{x+6}}$$

para aproximar la menor raíz positiva de P, justificando la respuesta. Determinar un número de iteraciones suficiente para que el error cometido sea inferior a la milésima.

d) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña de P, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Mayo 2018

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz que admite factorización LU y sea δ_k el menor principal de orden k de la matriz A, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

a) Demostrar que si A es inversible entonces todos sus menores principales son no nulos.

b) Probar que si A tiene algún menor principal nulo, entonces son nulos todos los menores principales de orden mayor; esto es, si para algún k_0 el menor δ_{k_0} es nulo, entonces se verifica que

$$\delta_k = 0, \; k = k_0, k_0 + 1, \ldots, n.$$

2 Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de diagonal estrictamente dominante se considera un número natural p, con $1 \leq p \leq n$, y la matriz $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \geq p, \end{cases}.$$

Para cada número $w \in (0, 1]$ se definen las matrices

$$M_w = \frac{1}{w} M \;\text{ y }\; N_w = M_w - A.$$

a) Demostrar que el método iterativo asociado a esta descomposición $A = M_w - N_w$ está bien definido.

b) Probar que dicho método es convergente. (**<u>Indicación</u>**: Utilizar el hecho conocido de que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ entonces $\left| \dfrac{1 - w - \lambda}{\lambda w} \right| \geq 1$).

c) ¿Sirve este resultado para demostrar la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel o relajación, para algún tipo de matrices?

3 Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y denotemos por $\mathbf{S}_\Delta$ el conjunto de todas las funciones *spline* cúbicas asociadas a Δ con condiciones de tipo I.

a) Demostrar que $\mathbf{S}_\Delta$ es un espacio vectorial.

b) Para cada $i = 0, 1, \cdots, n$ se considera una función $S_i \in \mathbf{S}_\Delta$ que verifica $S_i(x_j) = \delta_{ij}, \; j = 0, 1, \cdots, n$. Probar que S_i está unívocamente determinada y que las funciones $\{S_i\}_{i=0}^n$ forman una base de $\mathbf{S}_\Delta$. ¿Cuáles son las coordenadas de una función $S \in \mathbf{S}_\Delta$ respecto a dicha base?

4 Se considera la ecuación $x^2 - e^x = 0$.

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz real ξ.

b) Determinar un intervalo $[a, b]$ y una función para los que se pueda aplicar el Teorema del Punto Fijo para aproximar el valor de ξ.

c) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar ξ, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

5 Calcular las raíces reales de la ecuación algebraica

$$\frac{2\sqrt{3}}{9\pi} x^3 + x^2 - \pi^2 = 0.$$

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2018

---

1 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ una matriz triangular inferior con elementos diagonales no nulos.

a) Demostrar que existe una única matriz $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ triangular inferior con $l_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y una única matriz $U \in \mathcal{M}_n$ triangular superior tales que $A = LU$. Determinar, explícitamente, las matrices L y U.

b) Escribir las matrices de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel asociados a una descomposición por bloques de la matriz A. Demostrar que ambos métodos convergen en una cantidad finita de iteraciones.

2 a) Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a, b]$.

b) Determinar los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ para que la función

$$S(x) = \begin{cases} c_1x^2 + c_2x + c_3 & \text{en} \quad [a, x_1] \\ c_4x^2 + c_5x + 1 & \text{en} \quad [x_1, x_2] \\ c_6x^2 + c_7x + c_8 & \text{en} \quad [x_2, x_3] \\ c_9x^2 + 2x + c_{10} & \text{en} \quad [x_3, b] \end{cases}$$

con $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, sea una función spline cúbica de tipo I en $[a, b]$.

3 Determinar los valores de las constantes $c_0, c_1, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ para que la fórmula de integración aproximada

$$\int_0^1 f(x)\, dx \simeq c_0 f(0) + d_0 f'(0) + c_1 f(1) + d_1 f'(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

4 Se considera la ecuación

$$e^{-x} = 2\sqrt{x}.$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz positiva ξ y determinar un intervalo que la contenga.

b) Demostrar que ξ se puede aproximar mediante el método del Punto Fijo, encontrando un intervalo y una función adecuados.

c) Elegir un dato inicial x_0 y construir una sucesión $\{x_n\}_n$ que converja a ξ. Determinar un valor de $n \in \mathbb{N}$ a partir del cual todos los términos de la sucesión $\{x_n\}_n$ disten de ξ una cantidad inferior a 10^{-4}.

d) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar ξ, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2018

---

1 Sea $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ una matriz triangular superior inversible.

a) Demostrar que existe una única matriz $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ triangular inferior y una única matriz $U \in \mathcal{M}_n$ triangular superior con $u_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, \dots, n$, tales que $A = LU$. Determinar explícitamente los elementos de las matrices L y U a partir de los elementos de A.

b) Demostrar que el método de Gauss–Seidel asociado a una descomposición por bloques de la matriz A está bien definido y que converge en una cantidad finita de iteraciones.

2 Sea A una matriz hermítica definida positiva y $A = D - E - F$ una descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

a) Demostrar que el método de Jacobi por bloques para A está bien definido.

b) Probar que si la matriz $2D - A$ es definida positiva, el método de Jacobi por bloques para A es convergente.

3 a) Demostrar que si una función spline cúbica asociada a una partición Δ de un intervalo $[a, b]$ coincide, en cada subintervalo de la partición, con un polinomio de grado menor o igual que 2, entonces dicha función es un polinomio de grado menor o igual que 2 globalmente en todo el intervalo $[a, b]$.

b) Determinar los coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ para que la función

$$S(x) = \begin{cases} c_1x^2 + c_2x + c_3 & \text{en} \quad [a, x_1] \\ c_4x^2 + c_5x + 1 & \text{en} \quad [x_1, x_2] \\ c_6x^2 + c_7x + c_8 & \text{en} \quad [x_2, x_3] \\ c_9x^2 + 2x + c_{10} & \text{en} \quad [x_3, b] \end{cases}$$

con $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$, sea una función spline cúbica de tipo I en $[a, b]$.

4 Se considera la ecuación

$$e^{-x} = \sqrt{x}.$$

a) Probar que la ecuación anterior tiene una única raíz positiva ξ.

b) Demostrar que ξ se puede aproximar mediante el método del Punto Fijo, encontrando un intervalo y una función adecuados.

c) Hallar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar ξ, justificando las hipótesis de convergencia y la elección del término inicial de la sucesión que define dicho método.

5 Dados $a, b > 0$ se considera el polinomio

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{3}x + b.$$

a) Hallar la secuencia de Sturm del polinomio P.

b) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas del polinomio P en función de los valores de a y b.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Enero 2019

---

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible tal que $A = L_1U_1 = L_2U_2$, con L_1, L_2 triangulares inferiores y U_1, U_2 triangulares superiores.

a) Probar que existe una matriz $D \in \mathcal{M}_n$ diagonal e inversible de forma que $L_2 = L_1D$ y $U_2 = D^{-1}U_1$.

b) Demostrar que si $(L_1)_{ii} = (L_2)_{ii},\ i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.

c) En el caso particular de que $U_1 = L_1^{\mathrm{T}}$ y $U_2 = L_2^{\mathrm{T}}$, ¿qué valores pueden tomar los elementos diagonales de D?

2 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante. Se considera la descomposición $A = M - N$ siendo $M = D - F$ y $N = E$, donde $A = D - E - F$ es la descomposición $D - E - F$ por puntos de la matriz A. Probar que el método iterativo asociado a esta descomposición $M - N$ de A es convergente.

b) Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

el método de Gauss–Seidel por puntos para A es convergente. (**Indicación**: Utilizar el apartado a)).

3 Se considera la fórmula de integración aproximada

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{3h}{8}\big(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\big), \tag{23}$$

donde $h = \dfrac{b-a}{3}$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

a) Sabiendo que el error cometido en la fórmula (23) es

$$R_{(a,b)}(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{iv)}(\theta)$$

con $\theta \in [a, b]$, determinar para polinomios de hasta qué grado la fórmula (23) es exacta.

b) Obtener la expresión de la fórmula (23) compuesta para m subintervalos, determinando el error cometido expresado en términos de la derivada cuarta en un punto intermedio.

4 Se considera la ecuación

$$2x - \cos(x) = 3. \tag{24}$$

a) Demostrar que (24) tiene una única raíz real ξ.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar ξ, justificando las hipótesis de convergencia. Determinar los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

c) Encontrar un intervalo y una función para los que se pueda aplicar el método del Punto Fijo para aproximar ξ, justificando las hipótesis de convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Mayo 2019

1 Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = LDL^{\mathrm{T}}$ donde L es una matriz real triangular inferior con unos en la diagonal y $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ es una matriz diagonal con $d_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

a) Demostrar que A admite factorización de Cholesky.

b) Determinar los elementos de la matriz de la factorización de Cholesky de A a partir de los elementos de las matrices L y D.

2 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica definida positiva, se considera la descomposición $D - E - F$ por bloques de A.

a) Demostrar que las matrices

i) D ii) μA con $\mu > 0$ iii) $D - \mu E - \mu F$ con $0 \leq \mu \leq 1$

son, también, simétricas definidas positivas.

b) Si A se escribe en la forma $A = M - N$, con M inversible, siendo $M = D - \alpha E - \beta F$, determinar un rango de valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el método iterativo asociado a la descomposición anterior sea convergente.

c) ¿Se deduce del apartado b) la convergencia del método de Jacobi? ¿Y la del método de Gauss–Seidel?

3 Se sabe que la función

$$P(x) = (x + 1)u(x)$$

es un polinomio de grado 3 que toma los valores $P(0) = -1$, $P(1) = 6$ y $P(2) = 27$. Hallar la función $u(x)$ utilizando la fórmula de interpolación de Newton para el polinomio $P(x)$.

4 Se considera la función

$$F(x) = x^2 - x - 6 - \mathrm{sen}(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

a) Probar que la función F' tiene una única raíz real η que se localiza en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Demostrar que la función F tiene únicamente dos raíces reales ξ_1 y ξ_2 que se encuentran, respectivamente, en los intervalos $(-3, 0)$ y $(0, \pi)$.

c) Aplicar el método de Newton para aproximar la raíz ξ_2, demostrando la convergencia del método y determinando los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que define dicho método.

d) Estudiar si se puede aplicar el teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = \sqrt{x + 6 + \mathrm{sen}(x)},$$

para aproximar la raíz ξ_2. Determinar un número de iteraciones suficiente para que, comenzando en $x_0 = \pi$, el error cometido sea inferior a la milésima.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Junio 2019

---

1 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz de diagonal estrictamente dominante.

i) Demostrar que A admite factorización LU.

ii) Probar que A puede factorizarse en la forma

$$A = BC$$

siendo B una matriz triangular inferior y C una matriz triangular superior con $\operatorname{diag}(B) = \operatorname{diag}(A)$.

b) Encontrar una matriz que admita factorización LU y no verifique ii).

2 a) Si $A \in \mathcal{M}_n$ con $\operatorname{sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ y $B = I + \mu A$ con $\mu \in \mathbb{R}$, demostrar que

$$\operatorname{sp}(B) = \{1 + \mu\lambda_1, 1 + \mu\lambda_2, \dots, 1 + \mu\lambda_n\}.$$

b) Dado el sistema $Au = b$ con $A \in \mathcal{M}_n$ inversible, a partir de un vector $u^0 \in \mathbf{V}$ se considera el método iterativo

$$u^{k+1} = u^k + w(b - Au^k),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{25}$$

donde $w > 0$. Si A es simétrica y definida positiva, demostrar la siguiente equivalencia:

$$\text{el método iterativo (25) es convergente} \ \Leftrightarrow\ 0 < w < \frac{2}{\varrho(A)},$$

siendo $\varrho(A)$ el radio espectral de la matriz A.

3 a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral

$$I_n = \int_0^n e^{\operatorname{sen}(\pi x)} dx$$

mediante la fórmula de Newton–Côtes cerrada de $n + 1$ puntos.

b) Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral I_{10} mediante la regla de los trapecios sea inferior a una centésima.

4 Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a, b]$, con un polinomio de grado ≤ 2, entonces dicha función es un polinomio de grado ≤ 2 globalmente en todo $[a, b]$. Probar que si, además, se imponen condiciones de tipo I, la función será una recta en todo $[a, b]$.

5 Se considera el polinomio

$$P(x) = 4x^9 - 6x^5 - 1.$$

a) Determinar el número de raíces positivas, negativas y complejas de P.

b) Encontrar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de Newton para aproximar su mayor raíz, justificando las hipótesis de convergencia. Determinar los dos primeros términos de la sucesión que define dicho método.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Examen Final

Enero 2020

---

1 a) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz simétrica e inversible que puede factorizarse en la forma $A = BC$, siendo $B \in \mathcal{M}_n$ real y triangular inferior, $C \in \mathcal{M}_n$ real y triangular superior y verificándose que $\operatorname{diag}(B) = \operatorname{diag}(C)$. Demostrar que $C = B^{\mathrm{T}}$. Deducir que A es simétrica definida positiva.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz real con todos sus menores principales estrictamente positivos. Demostrar que existen $B \in \mathcal{M}_n$ real y triangular inferior y $C \in \mathcal{M}_n$ real y triangular superior, con $\operatorname{diag}(B) = \operatorname{diag}(C)$, de forma que $A = BC$.

2 Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ de diagonal estrictamente dominante se consideran n números naturales p_i, con $1 \leq p_i \leq n$. Se definen las matrices $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, donde

$$m_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si} \quad |i-j| < p_i \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| \geq p_i, \end{cases}$$

y $N = M - A$.

a) Demostrar que el método iterativo asociado a esta descomposición $A = M - N$ está bien definido y es convergente.

b) En el método anterior, ¿qué método se obtiene si todos los p_i valen 1? ¿Qué ocurre si todos los p_i valen n?

3 Encontrar los valores de A, B, C y D para que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq Af(0) + Bf(1) + Cf'(0) + Df'(1)$$

sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es éste?

4 Se considera la función $F(x) = x - e^{x-2}$.

a) Probar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene, exactamente, dos raíces reales.

b) Encontrar sendos intervalos donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar cada una de ellas, justificando las hipótesis de convergencia y los valores iniciales de cada sucesión.

c) Estudiar si se puede aplicar el Teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = 2 + \ln x$$

para aproximar las raíces de F.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Examen Final

Junio 2020

1 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ inversible.

a) Probar que si A admite factorización LU entonces todos sus menores principales son no nulos.

b) Demostrar que si A admite factorización de Cholesky de la forma $A = BB^{\mathrm{T}}$, siendo $B \in \mathcal{M}_n$ una matriz real triangular inferior, entonces A es simétrica y definida positiva.

2 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son, respectivamente, los polinomios de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, demostrar que

$$P(x) = \frac{(x - x_0)P_2(x) - (x - x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1} - x_0}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$.

3 Se considera la ecuación

$$e^{x^4 - x^3 - x - 2} = 1.$$

a) Determinar, de forma justificada, el número de raíces positivas y negativas.

b) Encontrar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método, justificando la convergencia.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Septiembre 2020

1 Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Dar condiciones suficientes lo más generales posibles sobre α que garanticen:

a) que la matriz A admite factorización LU.

b) que la matriz A admite factorización de Cholesky.

c) la convergencia del método de Jacobi por puntos asociado a la matriz A.

d) la convergencia del método de relajación por bloques de parámetro $0 < w < 2$ asociado a A.

2 Determinar el número de subintervalos que deben tomarse para que el error cometido al aproximar

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

mediante la regla de los trapecios (o fórmula del trapecio cerrada compuesta) sea de tamaño inferior a la décima. ¿Cuánto vale la aproximación así calculada?

3 Se considera la ecuación

$$x^3 + \operatorname{sen}(x) = 2. \tag{1}$$

a) Encontrar un intervalo y un valor inicial donde el método de Newton sea convergente a la raíz positiva más pequeña ξ de la ecuación (1), justificando las hipótesis de convergencia.

b) Determinar un intervalo en el que se pueda aplicar el teorema del Punto Fijo para aproximar la raíz ξ anterior e indicar un número de iteraciones para garantizar que el error cometido sea inferior a 10^{-4}.

MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen Final
Enero 2021

1 [2 puntos] Se considera una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ simétrica y definida positiva. Demostrar que existen C triangular inferior con unos en la diagonal y D diagonal con elementos diagonales positivos tales que $A = CDC^{\mathrm{T}}$. ¿Es única tal factorización?

2 [3 puntos] Se consideran $a_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, $b_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, n$ y la matriz tridiagonal simétrica

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Sea δ_k el menor principal de orden k de A, $k = 1, 2, \ldots, n$, y $\delta_0 = 1$.

a) Probar que
$$\delta_1 = b_1 \text{ y } \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_{k-1}^2 \delta_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots, n.$$

b) Supongamos que se verifica que $b_1 \geq 1$ y $b_k \geq 1 + a_{k-1}^2$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

   I) Demostrar que
   $$\delta_n \geq \delta_{n-1} \geq \cdots \geq \delta_2 \geq \delta_1 \geq 1.$$
   Deducir que la matriz A es simétrica definida positiva.

   II) Probar que el método de Jacobi para A está bien definido y es convergente.

3 [1 punto] Se consideran $n+1$ puntos distintos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y un polinomio

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grado menor o igual que $n+1$.

a) Probar que $Q(x) = P(x) - a_{n+1}\Pi_n(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de P en dichos puntos.

b) Usar el apartado a) para encontrar el polinomio de interpolación de $P(x) = 7x^3 + 30x^2 + 13x + 10$ en los puntos $\{-1, 0, 1\}$.

4 [1,5 puntos] Hállense valores $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in (0,1)$ de manera que la fórmula de integración

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

sea exacta para los polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es este?

5 [2,5 puntos] Se considera la ecuación
$$2x + 3 = e^{x+1}.$$

a) Demostrar que tiene una única raíz positiva ξ.

b) Probar que ξ es punto fijo de la función $f(x) = \ln(2x+3) - 1$. Determinar un intervalo en el que se pueda aplicar el método de punto fijo para aproximar ξ, justificando la respuesta.