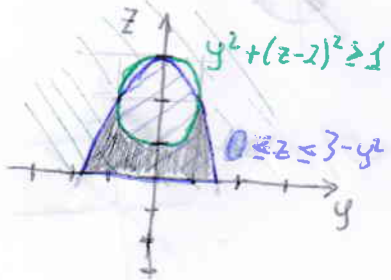
Juan Carlos Llamas Núñez

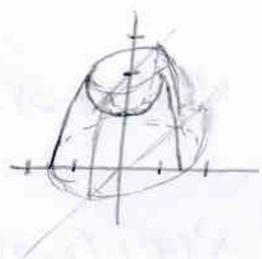
Entrega 2

Ejercicio 1.- Consideramos $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq z\leq 3-x^2-y^2,\ x^2+y^2+z^2\geq 4z-3\}$ y los campos $f(x,y,z)=x^2+2xy+z^2-3x+1$, $\vec{F}(x,y,z)=(e^{-xy}+z,\ z\,\text{sen}\,y,\ x^2-z^2+y^2)$

Calcular
$$\iint_{\partial V}(\nabla f+\text{rot}(\vec{F}))\cdot d\vec{S}.$$

En primer lugar nos fijamos en el conjunto V. Este es la intersección de un paraboloide cortado con el complementario de una bola centrada en el punto $(0,0,2)$ y de radio 1. Por la simetría de x e y, es el resultado de hacer rotar esta figura alrededor del eje z.





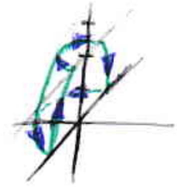
Se tiene que $\partial V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0,\ x^2+y^2\leq 3\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=3-x^2-y^2,\ 0\leq z\leq 2\}$
$\cup\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-2)^2=1,\ z\leq 2\}$.

Si separamos la integral como $\iint_{\partial V}(\nabla f+\text{rot}(\vec{F}))\cdot d\vec{S}=$
$$=\iint_{\partial V}\nabla f\cdot d\vec{S}+\iint_{\partial V}\text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}=I_1+I_2$$
podemos intentar calcular I_2 aplicando el teorema de Stokes.
(después se verá que es mucho más sencillo con el teorema de Gauss (Hoja 10))

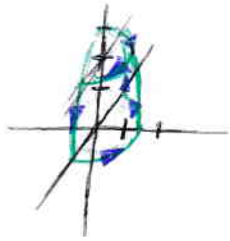
Para ello tenemos que fragmentar ∂V en varias superficies paramatrizadas con borde a las que aplicar el Teorema de stokes.

Consideramos entonces

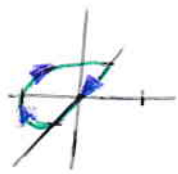
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - x^2 - y^2,\ z \in (0,2), y<0\}$$



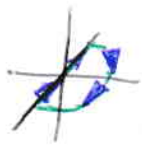
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - x^2 - y^2,\ z \in (0,2),\ y > 0\}$$



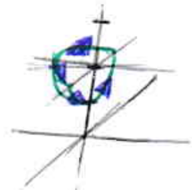
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < 3,\ y < 0,\ z = 0\}$$



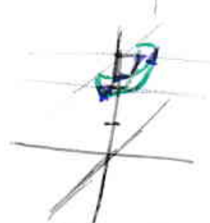
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < 3,\ y > 0,\ z = 0\}$$



$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-2)^2 = 1,\ z < 2,\ y < 0\}$$



$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z-2)^2 = 1,\ z < 2,\ y > 0\}$$



$$I_2 = \iint_{\partial V} rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_A rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_B rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_C rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} +$$

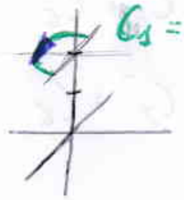
$$+ \iint_D rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_E rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_F rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\partial C} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\partial F} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Consideramos las siguientes curvas orientadas simples:

$\gamma_1 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

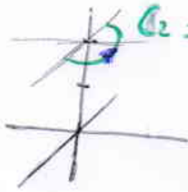
$t \longrightarrow (-\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$



$C_1 = \gamma_1([\pi, 2\pi])$

$\gamma_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$



$C_2 = \gamma_2([0, \pi])$

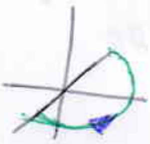
$\gamma_3 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 0)$

$C_3 = \gamma_3([\pi, 2\pi])$

$\gamma_4 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

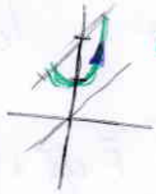
$t \longrightarrow (\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\operatorname{sen} t, 0)$



$C_4 = \gamma_4([0, \pi])$

$\gamma_5 : [\pi, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

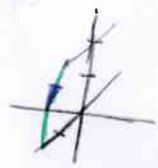
$t \longrightarrow (\cos t, 0, \operatorname{sen} t + 2)$



$C_5 = \gamma_5([\pi, 2\pi])$

$\gamma_6 : [1, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow (t, 0, 3 - t^2)$



$C_6 = \gamma_6([1, \sqrt{3}])$

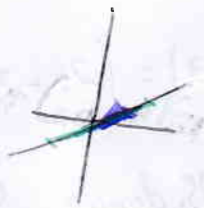
$\gamma_7 : [-1, -\sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow (t, 0, 3 - t^2)$

$C_7 = \gamma_7([-1, -\sqrt{3}])$

$\gamma_8 : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow (t, 0, 0)$



$C_8 = \gamma_8([-\sqrt{3}, \sqrt{3}])$

De esta forma:

$$\partial A = C_1^- + C_7 + C_3 + C_6^-$$
$$\partial B = C_4 + C_7^- + C_2^- + C_6$$
$$\partial C = C_3^- + C_8$$
$$\partial D = C_4^- + C_8^-$$
$$\partial E = C_1 + C_5$$
$$\partial F = C_2 + C_5^-$$

Por tanto I_2 queda como

$$I_2 = \int_{\partial A} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{\partial B} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{\partial C} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{\partial D} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{\partial F} \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= \int_{C_1^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_7} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_6^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_7^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_2^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_6} \vec{F}\cdot d\vec{s} +$$

$$+ \int_{C_3^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_8} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_4^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_8^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_5} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{C_5^-} \vec{F}\cdot d\vec{s} =$$

$$= 0$$

(Como recorremos los bordes de las superficies una vez en cada sentido se anulan todas).

Queda ahora calcular I_1 que lo hacemos directamente:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+2y-3,\ 2x,\ 2z)$$

$\partial\hat{V} = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donde S_1, S_2, S_3 y $\partial\hat{V}$ se definen de la siguiente forma:

$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - x^2 - y^2 \ , \ z \in (0,2)\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$

$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1, \ z < 2\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$

$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 3, \ z = 0\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y = 0\}$

$\partial\hat{V} = \partial V \setminus \left(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, \ y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ z = 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 3, \ z = 0\}\right)$

Como solo estamos quitando curvas para calcular una integral de superficie el cómputo de la integral se conserva y

$$\iint_{\partial V} \nabla f \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial\hat{V}} \nabla f \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \nabla f \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \nabla f \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \nabla f \cdot d\vec{S}$$

Si calculamos estas tres integrales por separado:

1) Damos una parametrización de S_1

$$\Phi_1 : (0, 2\pi) \times (1, \sqrt{3}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 3 - r^2)$$

Φ_1 es C^1 e inyectiva y si $D_1 = (0,2\pi) \times (1, \sqrt{3}) \Rightarrow \Phi_1(D) = S_1$.

Para calcular los vectores normales:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial r} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, -2r) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -2r \end{vmatrix} =$$

$$= -2r^2\cos\theta\,\vec{i} - 2r^2\text{sen}\,\theta\,\vec{j} - r(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\,\vec{k} =$$

$$= (-2r^2\cos\theta, -2r^2\text{sen}\,\theta, -r)$$

Nos ha quedado la normal interior pero preferimos trabajar con la normal exterior así que reescribimos

$$\tilde{D}_1 = (1,\sqrt{3}) \times (0,2\pi) \quad \text{con} \quad \tilde{\Phi}_1 : \tilde{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta) \rightarrow (r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 3-r^2)$$

y $$\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial r} \times \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = (2r^2\cos\theta,\ 2r^2\,\text{sen}\,\theta,\ r).$$

Sustituyendo

$$\iint_{S_1} \nabla f \cdot d\vec{S} = \iint_{\tilde{D}} (\nabla f \circ \tilde{\Phi}_1) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) dr\, d\theta =$$

$$= \iint_{\tilde{D}_1} \nabla f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta,\ 3-r^2) \cdot (2r^2\cos\theta,\ 2r^2\,\text{sen}\,\theta,\ r)\, dr\, d\theta =$$

$$= \iint_{\tilde{D}_1} (2r\cos\theta + 2r\,\text{sen}\,\theta - 3,\ 2r\cos\theta,\ 6-2r^2) \cdot (2r^2\cos\theta,\ 2r^2\,\text{sen}\,\theta,\ r)\, dr\, d\theta =$$

$$= \iint_{\tilde{D}_1} (4r^3\cos^2\theta + 4r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 6r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 6r - 2r^3)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \cancel{2r^3} + 2r^3\cos 2\theta + 4r^3 \cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 6r^2\cos\theta + 6r - \cancel{2r^3})\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \Big(\overset{0}{\cancel{r^3\,\text{sen}\,2\theta\Big]_0^{2\pi}}} + \overset{0}{\cancel{4r^3\,\text{sen}^2\theta\Big]_0^{2\pi}}} - \overset{0}{\cancel{6r^2\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{2\pi}}} + 12\pi r \Big)\, dr =$$

$$= 6\pi\ r^2\Big]_1^{\sqrt{3}} = 6\pi(3-1) = 12\pi$$

2) Sea Φ_2 una parametrización de S_2

$$\Phi_2 : (0,1)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta,\ 2+\sqrt{1-r^2})$$

Si $D_2 = (0,1)\times(0,2\pi) \Rightarrow \Phi_2(D_2) = S_2$ y Φ_2 es C^1 e inyectiva.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= \left(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} &= (-r\operatorname{sen}\theta,\ r\cos\theta,\ 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\times\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}\vec{i} - \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}}\vec{j} + r(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)\vec{k} =$$

$$= \left(-\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ -\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ r\right)$$

Esta normal es la interior en la esfera pero la exterior considerando la superficie ∂V.

Así:

$$\iint_{S_2} Df\cdot d\vec{S} = \iint_{D_2} (Df\circ\Phi_2)\cdot\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\times\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}\right) dr\,d\theta =$$

$$= \iint_{D_2} Df(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta,\ 2-\sqrt{1-r^2})\cdot\left(-\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ -\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ r\right) dr\,d\theta =$$

$$= \iint_{D_2} (2r\cos\theta+2r\operatorname{sen}\theta-3,\ 2r\cos\theta,\ 4-2\sqrt{1-r^2})\cdot\left(-\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ -\frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-r^2}},\ r\right) dr\,d\theta =$$

$$= \iint_{D_2}\left(-\frac{2r^3\cos^2\theta}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{2r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{3r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{2r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}} + 4r - 2r\sqrt{1-r^2}\right) dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2\theta \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr - 4\,\text{sen}\theta\cos\theta \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr + 3\cos\theta \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr + \int_0^1 (4r - 2r\sqrt{1-r^2})\,dr \right) d\theta$$

Calculamos por separado

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^3 x}{\cancel{\cos x}} \cancel{\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\,(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$\text{sen}\,x = r$
$\cos x\,dx = dr$
$r=1 \Rightarrow x = \pi/2$
$r=0 \Rightarrow x=0$

$$= \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\,dx - \int_0^{\pi/2} \text{sen}\,x\cos^2 x\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3 x}{3}\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= -0 + 1 + 0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^2 x}{\cancel{\cos x}} \cancel{\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{\text{sen}\,2x}{4}\Big]_0^{\pi/2}}^{\,0} = \frac{\pi}{4}$$

$\text{sen}\,x = r$
$\cos x\,dx = dr$
$r=1 \Rightarrow x = \pi/2$
$r=0 \Rightarrow x=0$

$$\int_0^1 (4r - 2r\sqrt{1-r^2})\,dr = 2 + \frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_0^1 = 2 + \frac{2}{3}(0-1) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \nabla f \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} -2\cos^2\theta \cdot \frac{2}{3}\,d\theta - \int_0^{2\pi} 4\cdot\frac{2}{3}\cdot \text{sen}\theta\cos\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} 3\cos\theta \cdot \frac{\pi}{4}\,d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\,d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta)\,d\theta - \frac{4}{3}\cancel{\text{sen}^2\theta\Big]_0^{2\pi}}^{\,0} + \frac{3\pi}{4}\cancel{\text{sen}\theta\Big]_0^{2\pi}}^{\,0} + \frac{8\pi}{3} =$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} - \cancel{\frac{\text{sen}\,2\theta}{3}\Big]_0^{2\pi}}^{\,0} = \frac{4\pi}{3}$$

3) Parametrizamos S_3

$$\Phi_3 : (0,\sqrt{3}) \times (0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta) \longrightarrow (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 0)$$

Φ_3 es de clase C^1 e inyectiva y si $D_3 = (0,\sqrt{3})\times(0,2\pi)$ entonces $\Phi_3(D_3) = S_3$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial r} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0) \\ \dfrac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0) \end{array}\right\} \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\vec{i} + 0\vec{j} + r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)\vec{k} =$$

$$= (0,0,r).$$

Esta es la normal interior y como estamos considerando la exterior, reescribimos

$$\tilde{\Phi}_3 : \tilde{D}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 0) \qquad \text{con } \tilde{D}_3 = (0,2\pi)\times(0,\sqrt{3})$$
$$\tilde{\Phi}_3(\tilde{D}_3) = S_3$$

y $$\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial r} = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = -(0,0,r) = (0,0,-r)$$

Por tanto

$$\iint_{S_3} \nabla f \cdot d\vec{S} = \iint_{\tilde{D}_3} (\nabla f \circ \tilde{\Phi}_3) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial r} \right) d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{\tilde{D}_3} \nabla f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 0) \cdot (0,0,r)\, dr = \iint_{\tilde{D}_3} (2r\cos\theta + 2r\,\text{sen}\,\theta - 3, 2r\cos\theta, 0) \cdot (0,0,r) =$$

$$= \iint_{\tilde{D}_3} 0\, dr\, d\theta = 0$$

Por tanto

$$\iint_{\partial V} (\nabla f + rot(\vec{F})) \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial V} \nabla f \cdot d\vec{S} + \cancel{\iint_{\partial V} rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S}}^{\,0} =$$

$$= \iint_{\partial \hat{V}} \nabla f \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \nabla f \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \nabla f \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \nabla f \cdot d\vec{S} =$$

$$= 12\pi + \frac{4\pi}{3} + 0 = \boxed{\frac{40}{3}\pi}$$

Podemos hacer el ejercicio de otra manera y es aplicando el teorema de Gauss. Por lo visto anteriormente para probar que $\iint_{\partial V} rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$ hemos podido comprobar que ∂V se puede dividir en superficies orientadas con bordes tales que al aplicar Stokes, se recorren una vez en cada sentido. Esto es equivalente a que V es un sólido simple y por el Teorema de Gauss:

$$\iint_{\partial V} (\nabla f + rot(\vec{F})) \cdot d\vec{S} = \iiint_V div(\nabla f + rot(\vec{F})) = \iiint_V div(\nabla f) + \iiint_V div(\cancel{rot(\vec{F})})^{\,0} = \iiint_V div(\nabla f) .$$

Ahora, $\nabla f(x,y,z) = (2x+2y-3, 2x ; 2z)$ y $div(\nabla f) = 2+0+2 = 4$

$$\Rightarrow \iint_{\partial V} (\nabla f + rot(\vec{F})) \cdot d\vec{S} = \iiint_V 4 = 4\ vol(V).$$

El volumen de V se puede calcular como el volumen del conjunto

$P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq 3-x^2-y^2\}$ menos el volumen de media bola

de radio 1 menos el volumen de $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2\leq z\leq 3-x^2-y^2\}$.

Haciendo un cambio a coordenadas cilíndricas

$$\mathrm{vol}(P)=\iiint_P 1 = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{3-r^2} r\cdot dz\,d\theta\,dr = \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(3r-r^3)\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(3r-r^3)dr = 2\pi\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\left(\frac{9}{2}-0-\frac{9}{4}+0\right)=$$

$$=\frac{9\pi}{2}$$

$$\mathrm{vol}(S)=\iiint_S 1 = \int_0^{1}\int_0^{2\pi}\int_2^{3-r^2} r\cdot dz\,d\theta\,dr = 2\pi\int_0^1(r-r^3)dr =$$

$$=2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2}-0-\frac{1}{4}+0\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\mathrm{vol}(B((0,0,2),1))}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(P)-\mathrm{vol}(S)-\frac{\mathrm{vol}(B((0,0,2),1))}{2} = \frac{9\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\frac{27-3-4}{6}\pi = \frac{20}{6}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

$$\Rightarrow \iint_{\partial V}(\nabla f+\mathrm{rot}(\vec{F}))\cdot d\vec{S} = 4\,\mathrm{vol}(V) = 4\cdot\frac{10}{3}\pi = \boxed{\frac{40\pi}{3}}$$

De este modo obtenemos también el mismo resultado pero las cuentas son más sencillas.

Ejercicio 2: Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región a la que se le aplica el Teorema de Gauss y supongamos que $(0,0,0) \notin V$. Probar que

$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = 0$$ siendo $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ y $r(x,y,z) = \|\vec{r}(x,y,z)\|$

Si llamamos $\vec{F}$ a $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)$

entonces

$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Como V cumple las condiciones del Teorema de Gauss y $\vec{F}$ es C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \supset V$ podemos aplicar el Teorema de Gauss y

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div(\vec{F})$$

Calculemos ahora la divergencia

$$div(\vec{F}(x,y,z)) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left(x^2+y^2+z^2-3x^2\right) =$$

$$= \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Análogamente $\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$ y

$$\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Por tanto

$$\operatorname{div}(\vec{F}(x,y,z)) = \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

Luego

$$\iint_{\partial V} \frac{\vec{r}}{r^3}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) = \underline{\underline{0}}$$

Nótese que los cálculos son muy similares al ejercicio 1 apartado d) de la primera hoja donde se nospedia probar que el Laplaciano del potencial gravitatorio es cero. Salvo constantes $\vec{F} = \nabla f$ con f el potencial gravitatorio.

Ejercicio 3.- Demostrar la identidad

$$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G}).$$

Sean $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$

Si desarrollamos el lado de la izquierda:

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (F_2G_3 - F_3G_2)\vec{i} + (F_3G_1 - F_1G_3)\vec{j} + (F_1G_2 - F_2G_1)\vec{k}$$

$$\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_2G_3 - F_3G_2) + \frac{\partial}{\partial y}(F_3G_1 - F_1G_3) + \frac{\partial}{\partial z}(F_1G_2 - F_2G_1) =$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x}G_3 + F_2\cdot\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x}G_2 - F_3\frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y}G_1 + F_3\frac{\partial G_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}G_3 - F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial z}G_2 + F_1\frac{\partial G_2}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z}G_1 - F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}.$$

En el lado de la derecha:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F})=\frac{\partial F_3}{\partial y}G_1-\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1+\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2-\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2+\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3-\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3$$

Análogamente

$$-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})=-F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}+F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}-F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}+F_2\frac{\partial G_3}{\partial x}-F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}+F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}$$

Si sumamos estas dos cantidades

$$\vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}(\nabla\times\vec{G})=\underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial y}G_1}_{5}-\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1}_{11}+\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2}_{9}-\underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2}_{3}+\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3}_{1}-\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3}_{7}$$

$$\underbrace{-F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}}_{8}+\underbrace{F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}}_{10}\underbrace{-F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}}_{12}+\underbrace{F_2\frac{\partial G_3}{\partial x}}_{2}\underbrace{-F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}}_{4}+\underbrace{F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}}_{6}=\text{(reordenamos términos)}$$

$$=\frac{\partial F_2}{\partial x}G_3+F_2\frac{\partial G_3}{\partial x}-\frac{\partial F_3}{\partial x}G_2-F_3\frac{\partial G_2}{\partial x}+\frac{\partial F_3}{\partial y}G_1+F_3\frac{\partial G_1}{\partial y}$$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial y}G_3-F_1\frac{\partial G_3}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}G_2+F_1\frac{\partial G_2}{\partial z}-\frac{\partial F_2}{\partial z}G_1-F_2\frac{\partial G_1}{\partial z}=$$

$$=\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})$$

Ejercicio 4.- Supongamos el caso estacionario de las ecuaciones de Maxwell (ninguno de los campos involucrados depende del tiempo). Supongamos $\rho(x,y,z)$ y $\vec{J}(x,y,z)$ conocidas. La radiación electromagnética a través de una superficie está determinada por el flujo del campo vectorial de Poynting definido como $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Probar que si V es una región a la que se le aplica el teorema de Gauss, entonces

$$\iint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Si asumimos que $\vec{P}$ es de clase C^1, como V verifica las condiciones del Teorema de Gauss se tiene que

$$\iint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{P}).$$

Ahora bien, por el ejercicio 3 sabemos que

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

Como estamos suponiendo el caso estacionario, la 3ª ecuación, de la Ley de Faraday, que en el caso general es

$$\nabla \times E_t + \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial t} = 0 \quad \text{se transforma en}$$

$$\nabla \times E_t + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times E = 0$$

Si ahora nos fijamos en la 4ª ecuación, la Ley de Ampere, la ecuación en el caso general:

$$\nabla \times \vec{H}_t - \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = \vec{J}_t$$ se transforma en

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \iff \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Por tanto si sustituimos:

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot 0 - \vec{E} \cdot \vec{J} = -\vec{E} \cdot \vec{J}$$

De aquí se obtiene que

$$\iint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{P}) = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}$$ que es lo que pretendíamos probar.