Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2018-19

Ejercicios complementarios (algunos difíciles). Hoja 1.

1 Encuentra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que toma todo valor en cada intervalo. Es decir, para cada $a < b$ y para cada $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in (a, b)$ con $f(x) = y$. ¿Puede ser esta función continua en algún punto?

2 ¿Existe algún reordenamiento $\{q_1, q_2, \ldots\}$ de los números racionales del intervalo $[0, 1]$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(q_{n+1} - q_n)^2$ sea convergente? ¿Existirá algún ordenamiento tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |q_{n+1} - q_n|$ lo sea?

3 Una función monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sólo puede tener discontinuidades en una cantidad contable (es decir finita o numerable) de puntos. Por tanto, si denotamos por $D(f) = \{d \in \mathbb{R} : f \text{ es discontinua en } d\}$, entonces $D(f)$ es un conjunto contable. No obstante, la función f y el conjunto $D(f)$ pueden llegar a ser bastante patológicos. Vamos a construir un ejemplo de una función estrictamente creciente, acotada y tal que $D(f) = \mathbb{Q}$, es decir, es discontinua en todos los puntos de $\mathbb{Q}$ y continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Para ello, sea $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números con $d_n > 0$ y tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n < \infty$ (por ejemplo $d_n = 1/2^n$). Sea también $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ un ordenamiento de los números racionales.

Dado $x \in \mathbb{R}$ sea $N_x = \{n \in \mathbb{N} : q_n < x\}$. Obviamente, N_x es un subconjunto de $\mathbb{N}$. Definamos la función

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_x} d_n$$

Se pide probar lo siguiente,

i) La función f está bien definida y es estrictamente creciente.

ii) La función f es discontinua en todo $q_n \in \mathbb{Q}$. De hecho es continua por la izquierda pero discontinua por la derecha, es decir:

$$\lim_{x \to q_n^-} f(x) = f(d) < \lim_{x \to q_n^+} f(x)$$

$$j_f(q_n) = d_n > 0$$

mientras que es continua en todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Esta función, al ser monótona, es integrable Riemann en cualquier intervalo $[a, b]$

4 Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua con $f(0) = f(1) = 0$. Vamos a suponer que f verifica la siguiente propiedad: para todo $x \in (0, 1)$ existe un $\delta > 0$ tal que $x - \delta$, $x + \delta \in (0, 1)$ y $f(x) = \frac{1}{2}(f(x - \delta) + f(x + \delta))$. Probar entonces que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

5 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x = a$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Calcular,

$$\lim_{x \to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}$$

6 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos la sucesión:

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

Supongamos que se tiene que $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ y que $f'(l)$ existe. Probar que $|f'(l)| \leq 1$

7 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) excepto posiblemente en $c \in (a, b)$. Supongamos que se tiene $\lim_{x \to c} f'(x) = l$. Probar que f es derivable en c y que $f'(c) = l$.

8 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que $f'(x) > f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Probar que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.

9 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que se verifica que existe $\alpha > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1+\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Probar que la función f es una función constante.

10 (Fórmula de Leibnitz) Sean f y g dos funciones derivables con derivadas continuas hasta el orden n. Entonces el producto de las dos funciones $f(x)g(x)$ tiene n derivadas continuas y se verifica:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(f(x))\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(g(x))$$

11 (Polinomios de Legendre) Consideremos las funciones $L_n(x)$ definidas como

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

a) Probar que se tiene la relación de recurrencia:

$$(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

b) Probad que L_n es un polinomio para todo $n \in \mathbb{N}$ y calcular su grado.
c) Probad que para cualquier otro polinomio P de grado menor o igual a $n - 1$ se tiene

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)dx = 0$$

12 (Teorema del Valor Medio para Integrales) Probar que si f y g son dos funciones definidas en $[a, b]$, g es continua, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y $f \geq 0$ entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^b f(x)dx$$

Indicación.: Relacionarlo con el Teorema del valor intermedio aplicado a la función $x \to g(x)\int_a^b f$

13 (Lema de Riemann-Lebesgue) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = 0, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0$$

14 Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Probar que si x_0 es un punto de continuidad de f entonces $f(x_0) = 0$.