Matemática Discreta y Lógica Matemática

Facultad de Informática

Hoja de ejercicios Tema 6

1. Tenemos una colección de subconjuntos de $\mathbf{8}$ tal que cada conjunto de la colección tiene 4 elementos y cada número de $\mathbf{8}$ pertenece exáctamente a 3 de los conjuntos de la colección. ¿Cuántos subconjuntos de $\mathbf{8}$ forman la colección? Construye la colección (hay varias posibilidades, limítate a una). Recuerda que $\mathbf{n} = \{0, \cdots, n-1\}$.

2. ¿Puede construirse una familia de subconjuntos de $\mathbf{8}$ tal que cada conjunto de la familia tenga 3 elementos y cada número de $\mathbf{8}$ pertenezca exactamente a 5 conjuntos de la familia?

3. Supongamos que se fabrican llaves haciendo incisiones en varias posiciones de una llave virgen. Suponiendo que haya 8 profundidades posibles para las incisiones, ¿cuál es el menor número de posiciones que permite fabricar 1.000.000 de llaves diferentes?

4. Carpanta ha sido invitado por Don Pantuflo a consumir comidas de 4 platos diferentes a elegir de entre un menú de 10 platos. El mecenas pagará día tras día a tocateja mientras la imaginación del comensal alcance a no repetir una comida ya seleccionada en algún día anterior. ¿Por cuántos días, como máximo, subsistirá Carpanta a costa de su bienhechor?

5. Al marcar un número de teléfono, un abonado olvida las tres últimas cifras y, acordándose únicamente de que estas cifras son diferentes, las marca al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada se haga al número correcto?
(Recuerda que la *probabilidad* de un suceso se calcula como el cociente entre el número de *casos favorables* y el número de *casos posibles*).

6. Razona que el número de palabras binarias de longitud n que contienen exactamente m 1's es $\begin{pmatrix} \mathrm{n} \\ \mathrm{m} \end{pmatrix}$.

7. Demuestra que cuando se arrojan tres dados indistinguibles el número de resultados posibles es 56. ¿Cuál sería el número de resultados posibles al arrojar n dados indistinguibles?

8. Explica un método sistemático para construir todas las variaciones sin repetición de 3 letras, tomadas de entre las 5 vocales. Generaliza al caso de las variaciones sin repetición de m elementos tomados de entre n.

9. Resuelve los dos casos siguientes:

   a) En un taller trabajan 6 hombres y 4 mujeres. Por sorteo se han escogido 7 personas al azar. Hallar la probabilidad de que entre las personas seleccionadas haya 3 mujeres.

   b) En un rebaño de 15 ovejas hay 10 lobos disfrazados. El pastor escoge al azar 5 animalillos. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de entre ellos sean lobos?

10. *a*) ¿Cuántos números naturales hay que tengan cinco cifras efectivas, es decir, sin ceros a la izquierda, diferentes?

    b) ¿Y si además pedimos que tengan cifras pares e impares alternadas?

11. De una representación formada por 15 profesores, 6 administrativos y 9 alumnos debe formarse una comisión compuesta por 5 profesores, 2 administrativos y 3 alumnos.

    a) ¿De cuántas maneras puede hacerse?

    b) ¿Y si uno de los profesores debe pertenecer a la comisión obligatoriamente?

12. Debemos escoger 8 asignaturas optativas: 3 del grado en Ingenierá Informática (de 12 opciones posibles), 2 del grado en Ingeniería del Software (de 10 posibles), 2 del grado en Ingeniería de Computadores (de 6 opciones) y 1 del doble grado de Matemáticas e Informática (de 4 opciones). ¿De cuántas formas distintas lo podemos hacer?

13. En el juego de la loteria Primitiva, una apuesta consiste en marcar seis números comprendidos entre 1 y 49. Se realiza el sorteo extrayendo 6 de los 49 números, que forman la combinación ganadora (CG.); se extrae también un séptimo número, llamado complementario.

    a) ¿Cuántas posibles apuestas hay?
    b) ¿Cuántas formas hay de acertar los 6 números de la CG? ¿Cuál es la probabilidad de acetar los seis números de la combinación ganadora?
    c) ¿Y de acertar cinco números y el complementario?
    d) ¿Y de acertar solo cinco números sin el complementario?
    e) ¿Y de acertar solo cuatro números?
    f) ¿Y de acertar solo un número?
    g) ¿Y de no acertar ninguno?

14. Sean A y B dos conjuntos finitos de cardinales n y m respectivamente.

    a) ¿Cuántas relaciones distintas existen entre A y B?
    b) ¿Cuántas funciones totales existen entre A y B?
    c) ¿Cuántas de las funciones anteriores son inyectivas?

15. Debemos formar un comité de 12 personas a escoger entre 10 mujeres y 10 hombres.

    a) ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?
    b) ¿Y si exigimos que haya el mismo número de hombres que de mujeres?
    c) ¿Y si queremos que haya un número par de hombres?
    d) ¿Y si se pide que haya más mujeres que hombres?

16. Aplica el teorema binomial para desarrollar las expresiones siguientes:

$$(1+x)^4 \qquad (1-x)^7$$

17. Un experimento realizado con 67 perros guardianes de la urbanización "Sotos del Fijodalgo", ha arrojado los siguientes resultados: 47 animalillos muerden, 35 ladran, y 23 muerden y ladran. ¿Cuántos cancerberos habrá que ni muerdan ni ladren? Si posteriores experiencias muestran que 20 de los chuchos están rabiosos, de los cuales 12 muerden, 11 ladran y 5 muerden y ladran, ¿cuántos canes habrá exentos de ladrido, mordida y rabia?

18. En una escuela de idiomas hay 65 personas dando clase y cada una de ellas sabe al menos un idioma extranjero. 50 personas saben inglés, 35 alemán y 30 francés. Hay 25 que saben inglés y alemán, 20 que saben inglés y francés y 15 que saben alemán y francés.

    a) ¿Cuantas personas saben los tres idiomas?
    b) ¿Cuántas personas saben exactamente dos idiomas?
    c) ¿Cuántas personas saben solo inglés, solo francés y solo alemán?

19. ¿Cuántas palabras de longitud 8 pueden formarse con 5 vocales, si imponemos la restricción de que a aparezca exactamente 3 veces y u aparezca exactamente 2 veces?

20. Calcula de cuántas maneras diferentes puede reordenarse la palabra “PALIO” de manera que ni “LA” ni “PIO” sean parte de la palabra resultante.

21. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras en la palabra INTELIGENTE?

$$\text{a) } \binom{11}{10} \qquad \text{b) } 11! \qquad \text{c) } \binom{11}{3,2,2,2,1,1}$$

22. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras en la palabra MISSISSIPPI?

$$\text{a) } \binom{11}{10} \qquad \text{b) } \binom{11}{4,4,2,1} \qquad \text{c) } 11!$$

23. Bart’Ohlo está organizando una campaña de venta de burros y tractores en el poblado de Otheka, que tiene 8 familias. En Otheka hay una ley que dice que cada familia debe de tener o bien un burro o un tractor o las dos cosas. Bart’Ohlo quiere estudiar de cuántas maneras distintas pueden las 8 familias adquirir burros y tractores de modo que haya una familia que adquiere un burro, 4 que adquieren un tractor y 3 las dos cosas. Ayúdale.

24. Demuestra la siguiente igualdad utilizando inducción, la definición recursiva de los números combinatorios y sus propiedades:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

25. Considera el alfabeto $X = \{a, b\}$.

   a) Sea X^6 el conjunto de palabras de longitud 6 sobre este alfabeto. Calcula $|X^6|$.

   b) ¿Cuántas palabras de X^6 empiezan por xba, siendo $x \in X$? ¿Cuántas palabras de X^6 empiezan por xba, siendo $x \in X$ y tienen al menos dos a’s seguidas?

   c) Utilizando el principio de inclusión y exclusión, halla el número de palabras diferentes de X^6 que *no* contengan la secuencia aba.

26. Encuentra la falacia en la siguiente argumentación: Puesto que la mitad de los números del conjunto **60** son pares, 30 de ellos no pueden ser primos. Además, puesto que la tercera parte de los números del intervalo son múltiplos de 3, 20 de ellos no pueden ser primos. Por consiguiente, a lo sumo 10 de los números del intervalo son primos.

27. Demuestra que para $m, n > 0$ se verifica la identidad siguiente:

$$\binom{\text{n+m}}{\text{m}} = \binom{\text{n+m-1}}{\text{m}} + \binom{\text{n+m-2}}{\text{m-1}} + \cdots + \binom{\text{n}}{1} + \binom{\text{n-1}}{0}$$

(*Pista*: Comienza aplicando la identidad

$$\binom{\text{n+m}}{\text{m}} = \binom{\text{n+m-1}}{\text{m}} + \binom{\text{n+m-1}}{\text{m-1}}$$

y sigue desarrollando del mismo modo el segundo sumando)

28. Usa la identidad $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ para demostrar que:

$$\binom{\text{m+n}}{\text{k}} = \binom{\text{m}}{0}\binom{\text{n}}{\text{k}} + \binom{\text{m}}{1}\binom{\text{n}}{\text{k-1}} + \cdots + \binom{\text{m}}{\text{k}}\binom{\text{n}}{0}$$

siendo $m \geq k \geq 1$, $n \geq k \geq 1$.