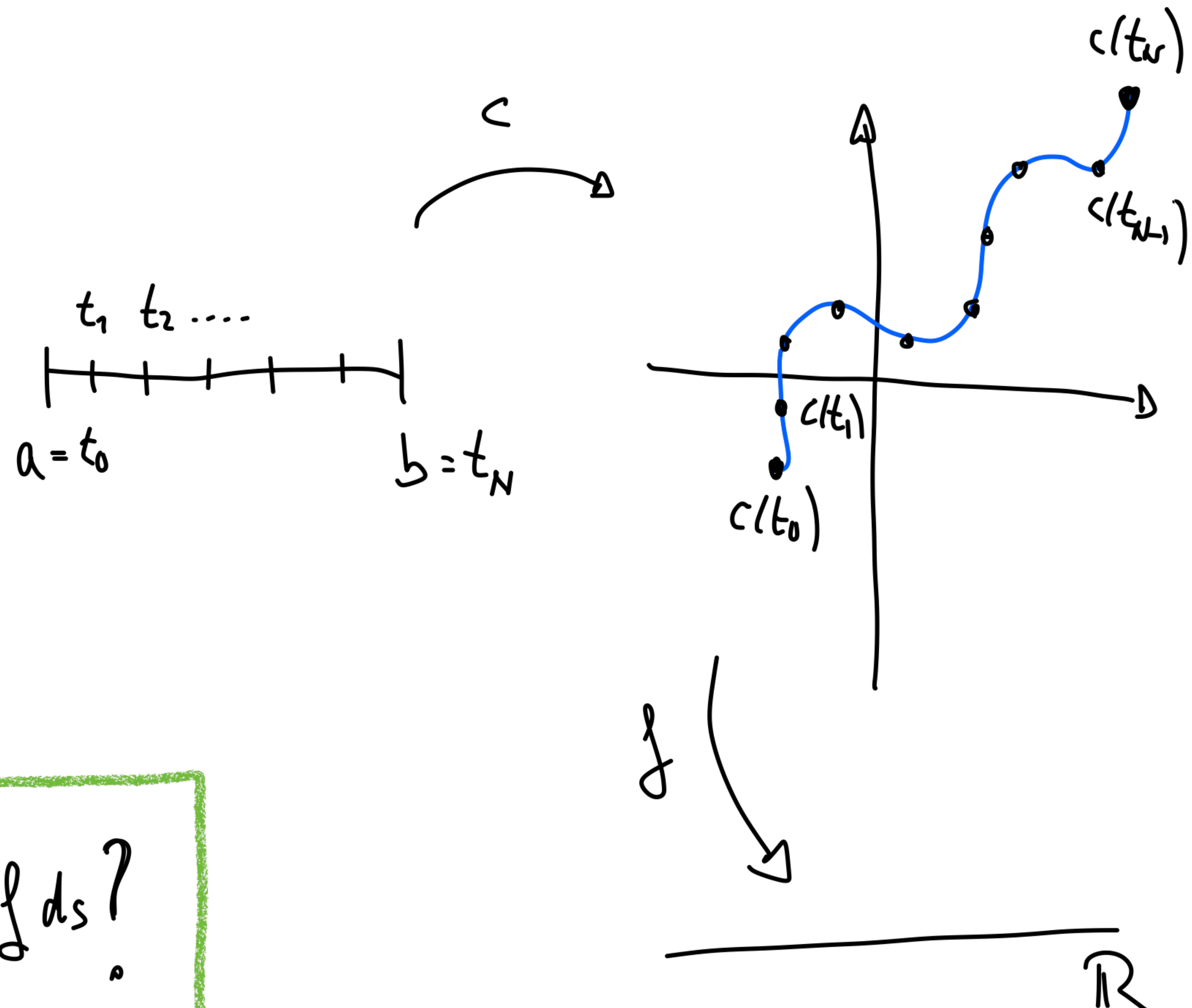
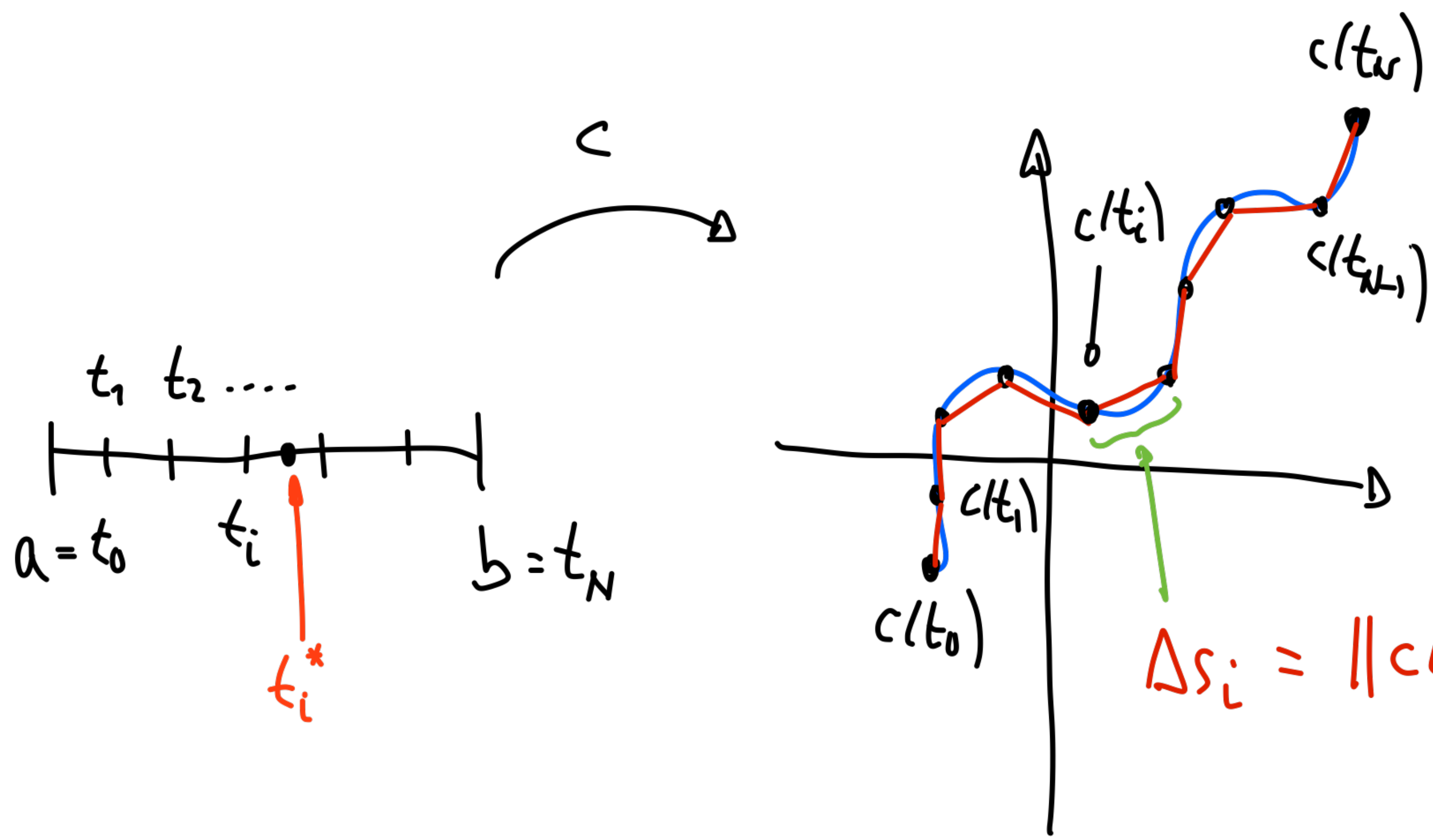
Integrales de campos en CURVAS

1.- CAMPOS $\boxed{\text{ESCALARES}}$

$$c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



$$\boxed{¿\int_c f\,ds?}$$



$$\boxed{¿\int_C f\,ds?}$$

$$\Delta s_i = \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| = \|c'(t_i^*)\|\,(t_{i+1} - t_i)$$

$$t_i^* \in (t_i, t_{i+1})$$

$$\int_C f\,ds \simeq \sum_{i=0}^{N-1} f(c(t_i^*))\cdot\Delta s_i = \sum_{i=0}^{N-1} f(c(t_i^*))\cdot\|c'(t_i^*)\|\,(t_{i+1} - t_i)$$

Suma de Riemann de

$$[a,b] \ni t \longmapsto f(c(t))\,\|c'(t)\|$$

$\boxed{\text{Definición:}}$ Sea $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y

f un campo escalar en $\mathbb{R}^n$ tq $f \circ c : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua
$t \mapsto f(c(t))$

Definimos la integral de f a lo largo de la trayectoria c

como
$$\boxed{\int_c f\, ds = \int_a^b f(c(t))\, \|c'(t)\|\, dt}$$

$\boxed{\text{Obs:}}$ si c es C^1 a trozos o $f \circ c$ es continua a trozos

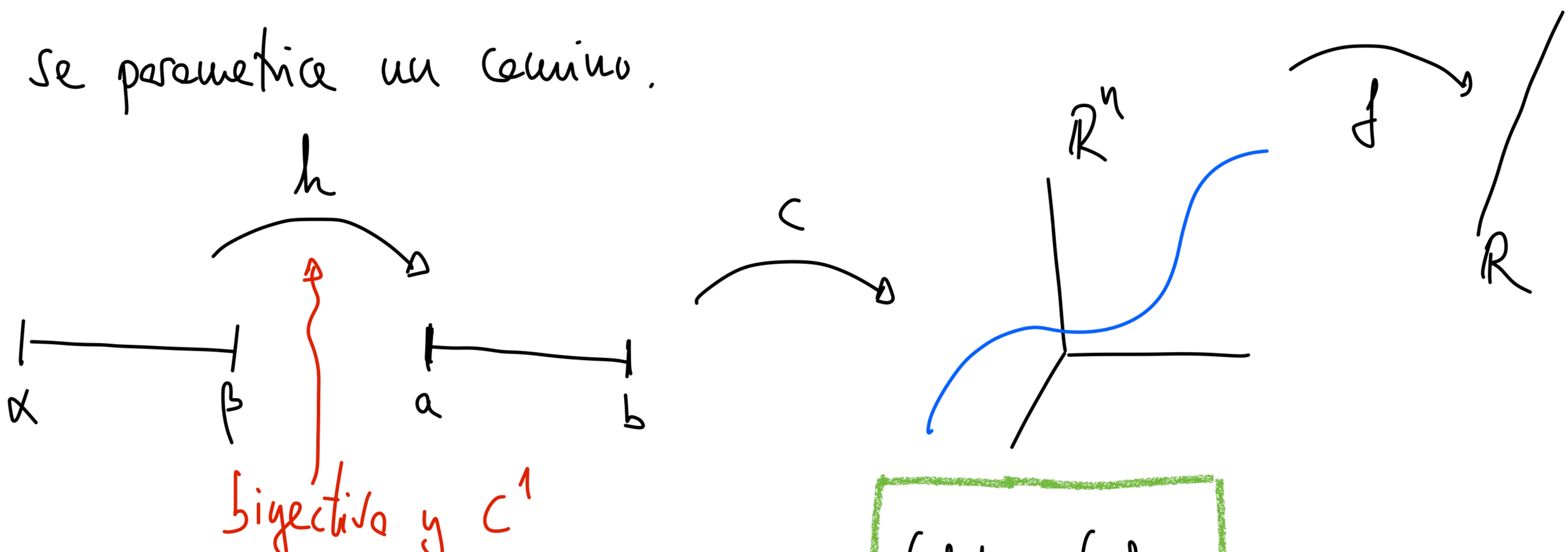
se define $\int_c f\, ds$ dividiendo $[a,b]$ en segmentos sobre los que

$f(c(t))\|c'(t)\|$ es continua y sumando las integrales resultantes

Corolario: La longitud de un camino $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1

es $\operatorname{long}(c)=\int_a^b \|c'(t)\|\,dt$.

Teorema: La integral de trayectoria NO depende de cómo se parametriza un camino.



$\boxed{d=c\circ h}$ es una REPARAMETRIZACIÓN

$$\boxed{\int_c f\,ds=\int_d f\,ds}$$

Dem: TCV. ⊠

Ejemplo: Hallar el valor medio de la coordenada y de los puntos sobre la semicircunferencia $\{(0,y,z) : y^2+z^2=a^2,\ y>0\}$

Elegimos una parametrización cualquiera de la semicircunferencia.

Por ejemplo.

$$c : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\theta \longmapsto c(\theta) = (0, a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta)$$

Hay que calcular $\boxed{\dfrac{1}{\mathrm{long}(c)} \displaystyle\int_c f\,ds}$ con $f(x,y,z) = y$.

valor medio de f en c

$$\int_c f\,ds = \int_0^{\pi} f(c(\theta))\,\|c'(\theta)\|\,d\theta = \int_0^{\pi} a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta =$$

$f(c(\theta)) = a\,\mathrm{sen}\,\theta$

$c'(\theta) = (0, a\cos\theta, -a\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$= \int_0^{\pi} a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2a^2$$

$$\mathrm{long}(c) = \int_0^{\pi} \|c'(\theta)\|\,d\theta = \int_0^{\pi} a\,d\theta = a\cdot\pi$$

Por tanto, el valor medio pedido es $\dfrac{2a}{\pi}$

$\boxed{\text{Ejercicio:}}$ ¿Cuál es la masa total de la semicircunferencia anterior si está hecha de alambre con una densidad en (x,y,z) de $\rho(x,y,z) = y^2$ gramos por unidad de longitud?

Masa total = integral de la densidad de masa a lo largo de la trayectoria

$$= \int_0^{\pi} \rho(c(\theta))\, \|c'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{\pi} a^3 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta$$

$$= a^3 \cdot \frac{\pi}{2}$$