DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 18–19.
Sucesiones de números reales. Hoja 4

70 *Usando la definición de límite de una sucesión, probar los siguientes límites:*

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \qquad ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \qquad iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = 1/2$$

71 *Probar que*
i) Si $\alpha > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
ii) Si $r \in \mathbb{R}$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ *si* $|r| < 1$. *Si* $r > 1$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$. *¿Que ocurre si* $r < -1$*?.*
iii) Para todo $c > 0$ *se tiene* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.
Indicación: *Distinguir entre* $0 < c < 1$, $c = 1$ *y* $c > 1$.

72 *Probar que*

$$i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0 \quad ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0 \quad iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0 \quad iv)\ \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$$

$$v)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2+n+1} = 3 \quad vi)\ z_n = 2 + (-1)^n \text{ no tiene límite.}$$

73 *Estudiar la convergencia de la sucesión* $X = \{x_n\}_n$ *donde* x_n *viene dado por:*

$$i)\ x_n = \frac{n}{n+1} \qquad ii)\ x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \qquad iii)\ x_n = \frac{n^2}{n+1} \qquad iv)\ x_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$$

74 *Probar que si* $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ *donde* $P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ *y* $Q(z) = \sum_{k=0}^l b_k z^k$ *son polinomios con* $a_m > 0$, $b_l > 0$, *se tiene*
i) Si $m = l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_m}{b_l}$.
ii) si $m > l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
iii) si $m < l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

75 *i) Probar que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *si y sólo si* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.
ii) Dar un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}_n$ *que verifique que existe* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$ *pero no existe* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

76 *Probar que si* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$ *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \geq N$.

77 *i) ¿Pueden existir dos sucesiones de números reales que tengan infinitos términos iguales y distinto límite?*
ii) ¿ Pueden existir dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_n$ *y* $\{b_n\}_n$ *tales que* $a_n \neq b_n$ *para todo* n *y con el mismo límite?*
iii) Una sucesión es convergente y tiene sus términos alternativamente positivos y negativos. ¿Cual es su límite?.

78 *Demostrar que si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\{b_n\}_n$ *es acotada entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
Poner ejemplos en los que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *pero* $\{b_n\}_n$ *es no acotada y que se verifique, respectivamente, que* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ *no existe.*

79 *Dar un ejemplo de dos sucesiones que no tienen limite* X *e* Y *pero que* $X + Y$ *y* $X \cdot Y$ *sean convergentes.*

80 *i) Probar que si X e Y son sucesiones tales que X y $X+Y$ son convergentes, entonces Y es convergente.*
ii) Probar que si X e Y son sucesiones tales que X es convergente a $x \neq 0$ y $X \cdot Y$ son convergentes, entonces Y es convergente.

81 *i) Dar un ejemplo de una sucesión no acotada que contiene una subsucesión convergente.*
ii) Probar que si $X = \{x_n\}_n$ es una sucesión no acotada, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$ o $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

82 *Probar que se tienen los siguientes límites:*

i) Si $b \in I\!R$ con $0 < b < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} nb^n = 0$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n)^{1/n} = 1$ *iii)* $\lim\limits_{n\to\infty} n^2/n! = 0$ *iv)* $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n/n! = 0$

83 *Probar que si x_n es una sucesión de números reales no nulos tales que*
i) $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

84 *Calcular el límite de la sucesión $X = \{x_n\}_n$ donde:*

i) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ *ii)* $x_n = \sqrt{4n^2+n} - 2n$ *iii)* $x_n = (3\sqrt{n})^{1/2n}$

iv) $x_n = \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, *para* $0 < a < b$ *v)* $x_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n$, *para* $a \geq 0$, $b \geq 0$.

vi) $x_n = n^{1/n^2}$ *vii)* $x_n = (n!)^{1/n^2}$ *viii)* $x_n = (a^n+b^n)^{1/n}$, *para* $0 < a \leq b$.

85 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$, *ii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, *iii)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$, *iv)* $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$, *v)* $\lim_{n\to\infty} (n^{-2} + (n+1)^{-2} + \cdots + (2n)^{-2})$, *vi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$, *vii)* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, *viii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

86 *Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n\}_n$ donde*

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

87 *Sea $X = \{x_n\}_n$ con*

$$x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Probar que la sucesión es acotada, monótona creciente y por lo tanto convergente.

88 *i) Sea $x_1 = 8$ y $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2$ para $n \in I\!N$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_n$ es monótona y acotada. Calcular su límite.*
ii) Sea $x_1 > 1$ y $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ para $n \in I\!N$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_n$ es monótona y acotada. Calcular su límite.

89 *Probar que la sucesión definida por*

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \qquad n \in I\!N$$

es monótona creciente y acotada y calcular su límite.

90 *Probar que las siguientes sucesiones son monótonas y acotadas. Calcula su límite.*
i) $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$, $y_1 = 1$, $\quad n \in I\!N$.
ii) $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$, $z_1 = 1$, $\quad n \in I\!N$.

91 *Dado* $a > 0$ *sea*

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n}), \quad s_1 > 0$$

Probar que $s_{n+1}^2 \geq a$, *para* $n \geq 1$, s_n *es decreciente y converge a* $\sqrt{a}$.

92 *Calcular el límite de la sucesión*

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ldots$$

siendo $a > 0$.

93 *Sea* $x_1 = a > 0$ *y* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ *para* $n \in I\!N$. *Determinar si la sucesión* $X = \{x_n\}_n$ *tiene límite o no.*

94 *Sea* $A \subset I\!R$ *un conjunto infinito acotado superiormente y sea* $S = \sup A$. *Probar que existe una sucesión creciente* $\{x_n\}_n$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = S$.

Probar algo análogo para el ínfimo de un conjunto infinito acotado inferiormente.

95 Límite superior e inferior de una sucesión

Sea $\{x_n\}_n \subset I\!R$ *una sucesión acotada y definimos para* $N \in I\!N$

$$a_N = \inf\{x_n,\ n \geq N\}, \qquad b_N = \sup\{x_n,\ n \geq N\}.$$

Demostrar que
i) a_N *es monótona creciente,* b_N *es decreciente,* $a_N \leq x_N \leq b_N$, *para todo* $N \in I\!N$.

Definimos el **límite inferior y superior** *de* x_n *como*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} a_N, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} b_N.$$

Probar que estan bien definidos y que por tanto siempre existen.
ii) Probar que x_n *converge si y sólo si* $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
iii) Si $s > \limsup_{n\to\infty} x_n$ *entonces, excepto posiblemente para una cantidad finita de índices, se tiene* $x_n \leq s$.

Probar algo semejante para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

iv) Si x_{n_k} *es una subsucesión de* x_n *que converge a* x_0 *entonces* $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq x_0 \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.
v) Existe una subsucesión de x_n *que converge a* $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *y otra que converge a* $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Por tanto $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *y* $\limsup_{n\to\infty} x_n$ **son el infimo y el supremo, respecivamente de todos los puntos que son límite de una subsucesión** *de* x_n.

96 *Para la sucesión* $\{x_n\}_n$ *con* $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, *calcular* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *y* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

97 *(***Paso al límite en la exponencial. Caso monótono***) Con las notaciones del Problema 66 probar*
i) Si $\{x_n\}_n$ *es una sucesión monotona y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.
ii) Usando el Problema 95 , si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $a > 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

98 *Si a_n es una sucesión de números reales positivos,*
i) Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Indicación: *Si $k = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ usar la propiedad iii) del Problema 95.*
ii) ¿Qué se puede deducir del límite de $\sqrt[n]{a_n}$ cuando existe el de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?.
Dar un ejemplo de una sucesión para la que no exista el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pero si el de $\sqrt[n]{a_n}$.
iii) Aplicar lo anterior al cálculo de los límites

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

99 *Supongamos que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y son sucesiones acotadas.*
i) Demostrar que si $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq y$$

ii) Demostrar que siempre se tiene

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} y_n \quad y \quad \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n$$

100 La exponencial de base variable

Siguiendo las notaciones del Problema 66, sea $a > 0$.
i) Supongamos $x \in \mathbb{R}$ fijo. Probar que si a_n es monótona convergente a $a > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^x = a^x$.
Usando el Problema 95 probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^x = a^x$.
Indicación: *Distinguir los casos $x > 0$, $x < 0$ y $x = 0$.*
ii) Si $x > 0$, probar que $a^x = \sup\{b^x,\ b < a\} = \inf\{c^x,\ a < c\}$.
Si $x < 0$, probar que $a^x = \inf\{b^x,\ b < a\} = \sup\{c^x,\ a < c\}$.
iii) Probar que si a_n es monótona convergente a $a > 0$ y x_n es monótona convergente a x, entonces $a_n^{x_n} \to a^x$.
Usando el Problema 95 probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$.
iv) Extender el apartado anterior al caso en que los límites $a \in (0, \infty]$ y $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ (excepto los casos 1^∞ e ∞^0).

101 *Usando que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ (es una sucesión monótona y acotada) probar que $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$.*

102 *Usando que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ y $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$, probar*
i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.
Indicación: *Usar la parte entera: si $x \in \mathbb{R}$, $[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x] + 1$*
ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.
iii) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x_n}{a_n})^{a_n} = e^x$.
iv) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y existe $\lim_{n\to\infty} a_n(x_n - 1) = x$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n^{a_n} = e^x$.

103 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *ii)* $\lim_{n\to\infty} x_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n}$ *iii)* $\lim_{n\to\infty} x_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n}$ *iv)* $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n$, *v)* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n$, *vi)* $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n^2}$, *vii)* $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n^2})^n$, *viii)* $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n+1})^{\frac{n^2+5}{n+2}}$, *ix)* $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-5n+7}{8n^2+4n-1})^{\frac{5n-7}{3n}}$, *x)* $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n+1}{3n-7})^{5n}$, *xi)* $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n}{n^2+1})^{\sqrt{n}}$

104 *Dar un ejemplo de una sucesión acotada que no sea de Cauchy.*

105 *Probar directamente de la definición que las siguientes sucesiones son de Cauchy,*

i) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ *ii)* $\left(1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right)$

106 *Consideremos la sucesión* $X=\{x_n\}_n$ *con* $x_n=\sqrt{n}$. *Probar que* $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$ *pero* X *no es una sucesión de Cauchy.*

107 *Probar que si* $x_1<x_2$ *y definimos* $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$ *para* $n\geq 3$, *entonces la sucesión* $\{x_n\}_n$ *es convergente. Calcular el límite.*

108 *Probar que si la sucesión* $X=\{x_n\}_n$ *es de Cauchy y* $x_n\in\mathbb{N}$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$, *entonces la sucesión es "eventualmente constante" (es decir, existe un* $M\in\mathbb{N}$ *tal que* $x_n=x_m$ *para todo* $n,m\in\mathbb{N}$ *con* $n,m\geq M$*).*

109 *Supongamos que una sucesión de numeros verifica:*

$$|x_{n+1}-x_n|\leq k|x_n-x_{n-1}|,\quad n=2,3,4\ldots$$

con $k\neq 1$.
i) Demostrar que para todo $n\in\mathbb{N}$ *se tiene*

$$|x_{n+1}-x_n|\leq k^{n-1}|x_2-x_1|$$

ii) Demostrar que si $M>N$

$$|x_M-x_N|\leq\Big(\sum_{j=N-1}^{M-2}k^j\Big)|x_2-x_1|=\frac{k^{N-1}-k^{M-1}}{1-k}|x_2-x_1|$$

iii) Concluir que si $0<k<1$ *(decimos que la sucesión es* **Contractiva***) entonces* x_n *tiene límite.*