Integrando como antes:

$$\int_{\Theta} (|\theta-\theta_0| - |\theta - T|)\, dF(\theta|x_1 \dots x_n) \leq \int_{-\infty}^{\theta_0} (\theta_0 - T)\, dF(\theta|x_1 \dots x_n) + \int_{\theta_0}^{\infty} (T-\theta_0)\, dF(\theta|x_1 \dots x_n) =$$

$$= (\theta_0 - T)\, P\{\theta \leq \theta_0 | x_1 \dots x_n\} + (T-\theta_0) \cdot P\{\theta \geq \theta_0 | x_1 \dots x_n\} =$$

$$= (\theta_0 - T) \cdot \frac{1}{2} + (T - \theta_0)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Theta} |\theta - \theta_0|\, dF(\theta|x_1 \dots x_n) \leq \int_{\Theta} |\theta - T|\, dF(\theta|x_1 \dots x_n)$$

Por tanto $\forall T = T(X_1 \dots X_n)$ estimador se tiene que

$$\int_{\Theta} |\theta - \theta_0|\, dF(\theta|x_1 \dots x_n) \leq \int_{\Theta} |\theta - T|\, dF(\theta|x_1 \dots x_n)$$ que es lo que pretendíamos probar.

Ejercicio 2.- $(X_1 \dots X_n)$ m.a.s. $X \sim B(n,p)$ con n conocido y p a estimar. Encontrar la familia conjugada natural y hallar la distribución a posteriori.

$$f(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{con } p \in (0,1) \quad x = 1 \dots n$$

$$f(x_1 \dots x_n | p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \binom{n}{x_i}$$

La forma en la que la funcion de distribución de la muestra parece indicar que su familia conjugada puede ser una distribución $Beta(\alpha, \beta)$ con α, β por determinar.

Por tanto supongamos que $\pi(p) = \dfrac{1}{Beta(\alpha_0, \beta_0)} p^{\alpha_0 - 1} (1-p)^{\beta_0 - 1}$ con $p \in (0,1)$

$\alpha_0, \beta_0 > 0$ conocidos.