Juan Carlos Llamas Núñez 4º DG Mat-Inf

10/10

Entrega 3

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta orientada con aplicación de Gauss $N: S \to \mathbb{S}^2$. En este problema vamos a probar que S tiene, al menos, un punto elíptico; i.e. un punto con curvatura de Gauss positiva.

i) Probar que la función $h: S \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \|p\|^2$ tiene, al menos, un máximo.

Nótese que h es la restricción a la superficie de la función norma al cuadrado ($\|\cdot\|^2$) definida en todo $\mathbb{R}^3$. Esta última es diferenciable luego h también lo es. Sin embargo, para probar i) solo necesitamos utilizar la continuidad de h. Se tiene que, por ser h continua y S compacto, $h(S) = \{\|p\|^2 : p \in S\} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto (resultado topológico que afirma que la imagen continua de un compacto es compacta). Como $h(S)$ es acotado (y no vacío) $\exists \sup h(S)$.. y como $h(s)$ es cerrado $\sup h(s) \in h(S)$. Esto es que $\exists\, p_0 \in S$ tal que $\|p_0\|^2 \geq \|p\|^2$ $\forall p \in S$.

Esto termina de probar i). La idea fundamental que se utiliza es que las funciones continuas de compactos en $\mathbb{R}$ alcanzan el máximo (y el mínimo).

ii) Sea $p_0 \in S$ un máximo de h con $p_0 \neq 0$. Demostrar que $N(p_0) = \pm \frac{p_0}{\|p_0\|}$

Afirmamos que el plano afín $H = \{\langle p - p_0, p_0 \rangle = 0 \mid p \in \mathbb{R}^3\}$ es el plano afín tangente a S en p_0. Para demostrar esto vamos a utilizar un resultado del libro que afirma que si una superficie S y un plano afín H se cortan en un punto aislado p_0 entonces H es el plano afín tangente a S en el punto p_0.

~~Supongamos que p_0 no es el único punto de $S \cap H$ así que~~

~~Sea~~ $p_1 \in S \cap H$. Como $p_1 \in H$, $\langle p_1 - p_0, p_0 \rangle = 0 \iff$

$\iff \langle p_1, p_0 \rangle - \|p_0\|^2 = 0 \iff \langle p_1, p_0 \rangle = \|p_0\|^2$.

Nótese que $p_1 \neq 0$ porque si no se tendría que $\|p_0\|^2 = 0$ con $p_0 \neq 0$!!

Sea θ el ángulo entre p_1 y p_0 (vistos como vectores) luego se tendría que $\|p_0\|^2 = \|p_0\| \cdot \|p_1\| \cos\theta \leq \|p_0\| \|p_1\|$

Como $p_1 \in S$, $\|p_1\|^2 \leq \|p_0\|^2 \Rightarrow \|p_1\| \leq \|p_0\|$ luego

$\|p_0\|^2 \leq \|p_0\| \|p_1\| \cos\theta \leq \|p_0\| \cdot \|p_1\| \leq \|p_0\|^2$ y todas las desigualdades son en realidad igualdades. En particular $\|p_0\| = \|p_1\|$ y $\cos\theta = 1$.

Se tiene en vista de lo anterior que $p_0 = p_1$. Por tanto $S \cap H = \{p_0\}$.

Por el resultado previamente enunciado, $H = \{\langle p - p_0, p_0 \rangle = 0 \mid p \in \mathbb{R}^3\}$ es el plano afín tangente a S en p_0. En particular la dirección de este plano es normal al vector p_0. Como tenemos definida una aplicación de Gauss en S, $N(p_0)$ tiene que ser unitario y perpendicular a $T_{p_0}S$. Como la dirección perpendicular a $T_{p_0}S$ es p_0 se tiene que

$N(p_0) = \pm \dfrac{p_0}{\|p_0\|}$

Divertido

muy bien.

iii) Sean $p_0 \in S$ un máximo de h y $\alpha: I \to S$ una curva PPA regular con $\alpha(0) = p_0$. Demostrar que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} <\alpha, \alpha>|_{t=0} \leq 0$.

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto f(t) = <\alpha(t), \alpha(t)> = \|\alpha(t)\|^2$.

Nótese que $f = h \circ \alpha$, que es derivable por ser composición de funciones diferenciables.

Como h tiene un máximo en p_0, entonces f tiene un máximo en 0.

En efecto, $f(0) = \|\alpha(0)\|^2 = \|p_0\|^2$ y dado $t \in I$ $f(t) = \|\alpha(t)\|^2$ donde $\alpha(t) \in S$. Por tanto $\|p_0\|^2 \geq \|\alpha(t)\|^2$ $\forall t \in I$ ~~⇔~~ es decir $f(0) \geq f(t)$ $\forall t \in I$ ~~⇔~~ leer 0 es un máximo de f.

Escribir

Por esto último 0 será en particular un máximo local de f luego $f''(0) \leq 0$.

Pero $f''(0)$ no es otra cosa que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} <\alpha, \alpha>|_{t=0}$ luego se tiene que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} <\alpha, \alpha>|_{t=0} \leq 0$.

iv) Deducir que S tiene al menos un punto elíptico.

Sea p_0 un maximo de h y veamos que p_0 es un punto elíptico de S. Para ello vamos a ver que todas las curvaturas normales en p_0 tienen un signo definido, es decir, son todas ellas positivas o todas ellas negativas. Una vez demostrado esto, la curvatura de Gauss de S en p_0 es el producto sus dos curvaturas principales en p_0, luego $K(p_0) > 0$.

Para ver que todas las curvaturas normales en p_0 tienen el mismo signo tomamos w un vector unitario de $T_p S$ y según el teorema de Meusnier su curvatura normal será

$$II_{p_0}(w) = <N(p_0), \alpha''(0)> \text{ para cualquier curva } \alpha: I \longrightarrow S$$

parametrizada por la longitud del arco y que verifica que
$\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = w$.

Ejercicio ii)

Entonces $II_{p_0}(w) = \langle N(p_0), \alpha''(0)\rangle \overset{\downarrow}{=} \langle \pm \frac{p_0}{\|p_0\|}, \alpha''(0)\rangle = \pm \frac{1}{\|p_0\|} \langle p_0, \alpha''(0)\rangle$

$= \pm \frac{1}{\|p_0\|} \cdot \alpha(0) \circ \alpha''(0)$

Ahora bien, por el ejercicio iii), $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle \alpha, \alpha\rangle|_{t=0} \leq 0$, pero esta derivada (con la notación del ejercicio anterior) es:

$f(t) = \alpha(t) \circ \alpha(t)$, $f'(t) = 2 \circ \alpha'(t) \circ \alpha(t)$, $f''(t) = 2\left[\alpha''(t) \circ \alpha(t) + \|\alpha'(t)\|^2\right]$

y $2 \cdot [\alpha''(0) \circ \alpha(0) + 1] \leq 0$ por estar α parametrizada por su arco.

Por tanto, $\alpha''(0) \circ \alpha(0) \leq -1$.

Distinguiendo casos, si $N(p_0) = + \frac{p_0}{\|p_0\|}$ entonces

$II_{p_0}(w) = + \frac{1}{\|p_0\|} \alpha''(0) \circ \alpha(0) \leq - \frac{1}{\|p_0\|} < 0$

y si $N(p_0) = - \frac{p_0}{\|p_0\|}$ entonces

$II_{p_0}(w) = - \frac{1}{\|p_0\|} \cdot \alpha''(0) \circ \alpha(0) \geq \frac{1}{\|p_0\|} > 0$.

En ambos casos el signo de $II_{p_0}(w)$ es constante y no nulo, lo que concluye la prueba.

Muy bien

Muy bien trabajado todo el curso

SB 10
2