Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDIF) - Doble Grado Ing Inf y Mat - Curso 2021-22

Funciones de Liapunov. Hoja 4.

34 Estudiar la estabilidad del origen para los siguientes sistemas

$$(a)\begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} x' = -x^3 + 2y^3 \\ y' = -2xy^2 \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} x' = x^3 - y^3 \\ y' = xy^2 + 2x^2y + y^3. \end{cases}$$

Observar que la estabilidad no se puede decidir por linealización. Utilizar funciones de Liapunov de tipo cuadrático.

35 Probar que el origen es un equilibrio inestable para el sistema

$$\begin{cases} x' = x^3 + xy \\ y' = -y + y^2 + xy - x^3 \end{cases}$$

Indicación: Considerar una función del tipo $V(x, y) = x^4/4 - y^2/2$

36 Usando la función de Liapunov $V(x, y) = x^2/2 + y^2/4$ determinar la mayor elipse de tipo $V \leq r$ que está contenidad en la región de atracción del origen del sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -2y + 3x^2 \end{cases}$$

37 La ecuación de Van der Pol, $x'' + \lambda(x^2 - 1)x' + x = 0$ se puede escribir de la siguiente forma no standard (comprobarlo!):

$$\begin{cases} x' = y - \lambda(x^3/3 - x) \\ y' = -x \end{cases}$$

Se pide:
i) Comprobar que el único punto de equilibrio es el $(0, 0)$ y que si $\lambda > 0$ es inestable mientras que si $\lambda < 0$ es asintoticamente estable.
ii) Probar que si denotamos por $(x(t, \lambda, x_0, y_0), y(t, \lambda, x_0, y_0))$ la solución con condición inicial (x_0, y_0) para el parámetro λ, se tiene

$$(x(t, -\lambda, x_0, y_0), y(t, -\lambda, x_0, y_0)) = (x(-t, \lambda, x_0, y_0), y(-t, \lambda, x_0, y_0)).$$

Es decir, cambiar el sentido del tiempo es equivalente a cambiar el signo de λ.
iii) Probar que si $\lambda < 0$ entonces la cuenca de atracción del origen contiene el disco $x^2 + y^2 < 3$. Deducir de aquí que la órbita periódica que tiene la ecuación de Van der Pol para $\lambda > 0$ está fuera de ese círculo.

38 Utilizar el Principio de invarianza de Lasalle para analizar el plano de fases de sistemas del tipo $x'' + \varepsilon x' + f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 - x$. Probar de hecho que en general si $f(x_0) = 0$ y $f'(x_0) < 0$ entonces a través de la energia del sistema conservativo ($\varepsilon = 0$) se puede ver que $(x_0, 0)$ es asintoticamente estable y determinar las cuencas de atracción

39 La técnica de funciones de Liapunov se puede utilizar para determinar propiedades globales de algunos sistemas dinámicos. La idea no es construir una función de Liapunov global (que a veces es una misión imposible!) sino determinar regiones invariantes y atractoras que nos permiten determinar regiones donde se concentra el comportamiento de cualquier solución para tiempos grandes.

Por ejemplo, consideremos la ecuación de Lorenz

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

con $r > 1$, $b, \sigma > 0$.
i) Probar que se puede obtener $C > 0$ tal que la región elipsoidal:

$$rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 \leq C$$

verifica que para cualquier condición inicial (x_0, y_0, z_0) su solución entra en esa región en algún tiempo $t = \tau$ (que depende del dato inicial) y permanece en esa región para todo tiempo $t \geq \tau$.
ii) Probar que todas las trayectorias entran y permanecen en una bola del tipo $x^2 + y^2 + (x - r - \sigma)^2 \leq C$, para C suficientemente grande.