GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES.
E. FERNÁNDEZ.

Hoja 1.

1. Encontrar una curva parametrizada α cuya traza es el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$ recorrida en sentido horario y tal que $\alpha(0) = (0, 1)$.
   Solución: La curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (\cos t, \sin t)$, parametriza la circunferencia unidad en sentido antihorario y satisface que $\beta(0) = (1, 0)$. En esta parametrización se tiene que $\beta(\pi/2) = (0, 1)$ luego la curva $\hat{\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\hat{\beta}(t) = \beta(t + \pi/2)$ cumple que $\hat{\beta}(0) = \beta(\pi/2) = (1, 0)$. Para acabar debemos recorrer la curva $\hat{\beta}$ en sentido opuesto, es decir, que la curva $\alpha(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = \hat{\beta}(-t) = \beta(-t + \pi/2)$ resuelve el problema.
2. Sea $\alpha(t)$ una curva plana que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0)$ es no nulo demostrar que $\alpha(t_0)$ y $\alpha'(t_0)$ son ortogonales.
   Solución: Sea I el dominio de la curva α. Consideremos la función de variable real
   $$d : I \to \mathbb{R}, t \mapsto |\alpha(t)|^2$$
   Se tiene que la función d es diferenciable pues es la composición $d = |-|^2 \circ \alpha$ de la función $|-|^2$ norma al cuadrado y α, ambas diferenciables. Por hipótesis t_0 es un mínimo de d luego es un punto crítico y $d'(t_0) = 0$. Por otro lado, $d(t) = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$ luego
   $$d'(t) = \alpha'(t) \cdot \alpha(t) + \alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 2\alpha(t) \cdot \alpha'(t).$$
   Evaluando en $t = t_0$ obtenemos que $\alpha'(t_0) \cdot \alpha(t_0) = 0$, como $\alpha(t_0) \neq 0$ pues la curva no pasa por el origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$ por hipótesis concluimos el resultado.
3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector dado. Supongamos que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in \mathbb{R}^3$ y que $\alpha(0)$ también lo es. Demostrar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.
   Solución: Consideremos la función diferenciable $h : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha(t) \cdot v$. Se tiene que
   $$h'(t) = \alpha'(t) \cdot v \equiv 0$$
   por hipótesis ya que $\alpha'(t)$ es ortogonal a v. Por lo tanto $h \equiv h(0) = \alpha(0) \cdot v = 0$ es la función idénticamente nula. Es decir, $\alpha(t)$ y v son ortogonales.
4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Demostrar que $|\alpha(t)|$ es constante (diferente de cero) si y sólo si $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales.
   Solución: Observamos que $|\alpha(t)|$ es constante si y sólo si $|\alpha(t)|^2$ es constante. Luego debemos ver que la función $d(t) = |\alpha(t)|^2 = \alpha(t) \cdot \alpha(t)$ es constante si y sólo si $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales.
   La función d es constante si y sólo si
   $$d'(t) = 2\alpha(t) \cdot \alpha'(t) \equiv 0$$
   de donde se sigue el resultado.
5. Sea $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido y $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Demostrar que las longitudes de α y $M \circ \alpha$ entre a y b coinciden.

<u>Solución:</u> Todo movimiento rígido se escribe como $M(v) = Av + p$, $v \in \mathbb{R}^3$, donde $A \in \mathrm{O}(3)$ es una matriz ortogonal ($AA^t = \mathrm{Id}$) y $p \in \mathbb{R}^3$. Es decir, todo movimiento rígido se expresa como la composicón de una traslación y una transformación ortogonal.

Por un lado $l_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt$. Para la curva $M \circ \alpha(t) = A\alpha(t) + p$ calculamos su derivada $(M \circ \alpha)'(t) = A\alpha'(t)$[1] de donde deducimos que $|\alpha'(t)| = |(M \circ \alpha)'(t)|$ puesto que

$$(M\circ\alpha)'(t)\cdot(M\circ\alpha)'(t) = A\alpha'(t)\cdot A\alpha'(t) = (A\alpha'(t))^t(A\alpha'(t)) = (\alpha'(t))^t A^t A\alpha'(t) = (\alpha'(t))^t\alpha'(t) = \alpha'(t)\cdot\alpha'(t).$$

Hemos utilizado que A es una matriz ortogonal, i.e. $AA^t = \mathrm{Id}$.

Se deduce inmediatamente que

$$l_a^b(M \circ \alpha) = \int_a^b |(M \circ \alpha)'(t)|dt = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = l_a^b(\alpha)$$

como queríamos.

6. Demostrar que las líneas tangentes a la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $R = \{y = 0, x = z\}$.

Es un ejercicio interesante tratar de dibujar esta curva y sus proyecciones a los planos coordenados.

<u>Solución:</u> La recta tangente a α a tiempo t es por definición

$$T_{\alpha(t)} = \{\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

mientras que

$$R = \{\lambda(1, 0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Luego el ángulo que forman $T_{\alpha(t)}$ y R viene dado por el ángulo que forman los vectores $\alpha'(t)$ y $(1, 0, 1)$.

Calculamos $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ y observamos que $\alpha'(0) = (3, 0, 0)$ y $(1, 0, 1)$ forman un ángulo de $\pi/4$ (DIBUJADLO) luego debemos ver que el ángulo θ_t que forman $\alpha'(t)$ y $(1, 0, 1)$ es constantemente $\pi/4$. Observamos que $\alpha'(t)$ es nunca nulo por lo que

$$\cos\theta_t = \frac{(\alpha)'(t)\cdot(1,0,1)}{|(\alpha)'(t)||(1,0,1)|} = \frac{3+6t^2}{\sqrt{2}\sqrt{3^2+6^2t^2+6^2t^4}} = \frac{3+6t^2}{\sqrt{2}\sqrt{(3+6t^2)^2}} =^{2} \frac{3+6t^2}{\sqrt{2}(3+6t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4),$$

de donde deducimos el resultado.

10. Sea $\alpha(t) = ae^{bt}(\cos t, \sin t)$, la *espiral logarítmica;* donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b < 0$. Demostrar que cuando $t \mapsto \infty$ la curva α se acerca al origen. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo calcular la longitud $L_{t_0}^{t_1}(\alpha)$y hallar una reparametrización por longitud de arco de α.

<u>Solución:</u>

Observamos que la curva α se escribe como $\alpha(t) = \rho(t)c(t)$, donde $\rho(t) = ae^{bt}$ y $c(t) = (\cos t, \sin t)$ es la parametrización usual de la circunferencia unidad centrada en el origen. La parametrización $c(t)$ cumple las propiedades:

- $||c(t)|| = 1$,
- $c'(t) = (-\sin t, \cos t)$,
- $||c'(t)|| = 1$,
- $\langle c(t), c'(t)\rangle$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$.

---

[1] Esto podemos comprobarlo como dijo Enric en clase antes de que le cortase: Escribimos la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$ en términos de la base canónica. Usando que A es una aplicación lineal deducimos que $A\alpha(t) = A(x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3) = x(t)A(e_1) + y(t)A(e_2) + z(t)A(e_3)$. Por lo tanto, $(A\alpha(t))' = x'(t)A(e_1) + y'(t)A(e_2) + z'(t)A(e_3) = A(x'(t)e_1 + y'(t)e_2 + z'(t)e_3) = A\alpha'(t)$.

[2] Nótese que $3 + 6t^2 > 0$ luego coincide con su valor absoluto.

Para la primera parte del ejercicio observamos que

$$||\alpha(t)|| = |\rho(t)| \cdot ||c(t)|| = |\rho(t)| = \rho(t) = ae^{bt},$$

luego $\lim_{t\mapsto\infty} ||\alpha(t)|| = \lim_{t\mapsto\infty} \rho(t) = 0$ pues $b < 0$. Por lo que $\lim_{t\mapsto\infty} \alpha(t) = 0$ como queríamos.

Para calcular la longitud de la curva α debemos calcular la norma de su derivada. Se tiene que

$$\alpha'(t) = \rho'(t)c(t) + \rho(t)c'(t),$$

luego

$$||\alpha'(t)||^2 = \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = (\rho'(t))^2 + \rho(t)^2,$$

donde hemos usado que $\langle c(t), c'(t)\rangle$ es una base ortonormal.

Se tiene que $\rho'(t) = b\rho(t)$ luego la expresión anterior se reescribe como

$$||\alpha'(t)||^2 = \rho(t)^2(b^2 + 1).$$

Por lo que

$$L_{t_0}^{t_1}(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} ||\alpha'(t)||dt = \sqrt{b^2+1}\int_{t_0}^{t_1} \rho(t)dt = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}(e^{bt_1} - e^{bt_0}).$$

Calculemos una reparametrización por longitud de arco de α, es decir, buscamos un difeomorfismo creciente $\varphi : J \to \mathbb{R}, s \mapsto t = \varphi(s)$; tal que $\beta(s) = \alpha \circ \varphi(s)$ sea una curva PPA, es decir, tal que

$$1 = ||\beta'(s)|| = ||\alpha'(\varphi(s))||\varphi'(s).$$

Luego debe cumplirse que $\varphi'(s) = \frac{1}{||\alpha'(\varphi(s))||}$ para cada $s \in J$. Esto último es equivalente a imponer que $(\varphi^{-1})'(t) = ||\alpha'(t)||$ puesto que

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(s))\varphi'(s) = \frac{d}{ds}(\varphi^{-1} \circ \varphi(s)) = \frac{d}{ds}(\mathrm{Id}(s)) = \frac{d}{ds}(s) = 1.$$

Luego basta definir $\varphi^{-1}(t) = L_0^t(\alpha) = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}(e^{bt} - 1)$. En efecto, $\frac{d}{dt}(L_0^t(\alpha)) = \frac{d}{dt}(\int_0^t ||\alpha'(u)||du) = ||\alpha'(t)||$.

Para determinar el intervalo de definición J de φ basta calcular $\lim_{t\mapsto\infty}(\varphi^{-1}(t)) = -\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}$ y $\lim_{t\mapsto-\infty}(\varphi^{-1}(t)) = -\infty$. Luego $J = (-\infty, -\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b})$ es el dominio φ que viene dada por

$$\varphi(s) = \frac{1}{b}\log(\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}}s + 1).$$

La curva

$$\beta : (-\infty, -\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}) \to \mathbb{R}^2, s \mapsto \beta(s) = \alpha \circ \varphi(s)$$

es una reparametrización por longitud de arco de la espiral logarítmica.

14. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable y $[a, b] \subseteq I$. Demuestre que $L_a^b(\alpha) \geq ||\alpha(b) - \alpha(a)||$, es decir, que la curva que minimiza la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$ es la recta.

Solución: Sea $v \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ cualquier vector unitario. Se tiene que

$$||\alpha'(t)|| = ||\alpha'(t)|| \cdot ||v|| \geq |\alpha'(t) \cdot v| \geq \alpha'(t) \cdot v.$$

Tomando integrales se deduce que

$$L_a^b(\alpha) \geq (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot v$$

para todo vector unitario $v \in \mathbb{S}^2$. Para concluir observamos que el resultado es trivialmente cierto si $\alpha(b) = \alpha(a)$. Mientras que si $\alpha(b) \neq \alpha(a)$ basta tomar $v = \frac{1}{||\alpha(b)-\alpha(a)||}(\alpha(b) - \alpha(a))$ en la desigualdad anterior para concluir el resultado.

15. Sea $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ parametrice su grafo y calcule su longitud de arco.

 Solución: El grafo de f es $gr(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$ luego la curva $\gamma_f(t) = (t, f(t))$ parametriza el grafo de f. Su longitud de arco viene dada por

$$L_a^b(\gamma_f) = \int_a^b ||\gamma_f'(t)||dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f')(t)^2}dt.$$

Curvatura de una curva plana. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA. Se define el *vector tangente* de α como $t_\alpha(t) = \alpha'(t)$. Dado un vector en $v \in \mathbb{R}^2$ no nulo siempre es posible hallar otro vector $w \in \mathbb{R}^2$ perpendicular a v y de forma que $\langle v, w\rangle$ sea una base positiva de $\mathbb{R}^2$. Basta tomar $w = Jv$ donde $J = A_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario en el plano (la multiplicación por i en $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). Definimos el vector *normal* de α como $n_\alpha(t) = Jt_\alpha(t)$. Por ser $\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle$ base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ se tiene que cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$ se expresa de forma única como

$$v = \lambda_1 t_\alpha + \lambda_2 n_\alpha,$$

donde $\lambda_1 = v \cdot t_\alpha$ y $\lambda_2 = v \cdot n_\alpha$. Podemos expresar así la derivada segunda de α en términos de esta base. Ahora bien, como $||\alpha'||^2 = 1$ obtenemos al derivar esta expresión que α'' es perpendicular a α' por lo que

$$\alpha''(t) = k_\alpha(t)n_\alpha(t)$$

donde

$$k_\alpha(t) = \alpha''(t) \cdot n_\alpha(t)$$

se conoce como la *curvatura* de α. Se sigue de la identidad $v \cdot Jw = \det(w|v)$ que la curvatura de α también viene dada por

$$k_\alpha(t) = \alpha'' \cdot n_\alpha = \alpha'' \cdot J\alpha' = \det(\alpha'|\alpha'').$$

Nótese que se cumplen las identidades

$$t_\alpha' = k_\alpha n_\alpha$$

y

$$n_\alpha' = (J\alpha')' = J\alpha'' = Jk_\alpha n_\alpha = k_\alpha J^2 t_\alpha = -k_\alpha t_\alpha.$$

16. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA y $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento. Demostrar que la curva $\beta = M \circ \alpha$ es PPA y calcular la relación entre las curvaturas de α y de β.

 Solución: Todo movimiento $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se escribe como $M(v) = Av + b$, donde $A \in \mathrm{O}(2)$ y $b \in \mathbb{R}^2$. Claramente la curva $\beta = M \circ \alpha$ está PPA sii α también lo está pues

$$\beta' = A\alpha'$$

y A es una matriz ortogonal. Para calcular la curvatura de β debemos calcular primero su segunda derivada que viene dada por

$$\beta'' = A\alpha''.$$

Luego la curvatura de la curva β viene dada por

$$k_\beta = \det(\beta'|\beta'') = \det(A\alpha'|A\alpha'') = \det(A(\alpha'|\alpha'')) = \det(A)\det(\alpha'|\alpha'') = \det(A)k_\alpha.$$

Es decir, la curvatura de β coincide con la de α si M preserva la orientación, esto es, $A \in \mathrm{SO}(2)$; o coincide con la opuesta de α si A invierte la orientación.

Otra forma de proceder es directamente con la definición ya que

$$k_\beta = \beta'' \cdot n_\beta = (A\alpha'') \cdot (JA\alpha') = \det(A)(\alpha'') \cdot (J\alpha') = \det(A)k_\alpha$$

En efecto, basta probar la relación $JA = \det(A)AJ$ para toda matriz ortogonal $A \in \mathrm{O}(2)$. Como $J \in \mathrm{SO}(2)$ y el subgrupo $\mathrm{SO}(2) < \mathrm{O}(2)$ de matrices ortogonales que preservan la orientación es abeliano (pues es isomorfo a $\mathbb{S}^1$ con la multiplicación compleja) la identidad se cumple trivialmente si $\det(A) = 1$. Ahora si, $A \in \mathrm{O}(2)$ cumple que $\det(A) = -1$ existe una única matriz $B \in \mathrm{SO}(2)$ con $A = R_y B$, donde $R_y \in \mathrm{O}(2)$ es la reflexión respecto al eje y. Es inmediato comprobar que $JR_y = -R_y J$ luego

$$JA = JR_y B = -R_y JB = -R_y BJ = \det(A)AJ$$

como queríamos.

17. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ un curva PPA. Demuestre que α es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si su curvatura es constante.

Solución:

Si α es un segmento de recta se escribirá de la forma

$$\alpha(t) = vt + b,$$

donde $b \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{S}^1$ ya que α es PPA. Luego $\alpha' = v$ y $\alpha'' = 0$ de dónde se sigue que $k_\alpha \equiv 0$.

Por otro lado, si α es un arco de la circunferencia $\mathbb{S}^1(p; R)$ de centro p y radio R PPA se tiene que

$$\alpha(t) = Rc(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) + p,$$

dónde $c(t) = (\cos t, \sin t)$ es la parametrización usual de la circunferencia unidad recorrida en sentido antihorario y $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Nótese que $t_c(t) = c'(t) = Jc(t)$, $n_c(t) = J^2c(t) = -c(t) = c''(t)$ y que $k_c(t) = 1$.

Luego

$$t_\alpha(t) = \alpha'(t) = \pm c'(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = t_c(\pm\frac{t}{R} + \theta_0),$$

$$\alpha''(t) = \frac{1}{R}c''(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = -\frac{1}{R}c(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) \text{ y}$$

$$n_\alpha(t) = Jt_\alpha(t) = J \pm c'(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = \pm Jc'(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = \pm n_c(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = \pm(-c(\pm\frac{t}{R} + \theta_0)).$$

Calculamos la curvatura de α como

$$k_\alpha(t) = \alpha''(t) \cdot n_\alpha(t) = \frac{1}{R}c''(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) \cdot (\pm n_c(\pm\frac{t}{R} + \theta_0)) = \pm\frac{1}{R}k_c(\pm\frac{1}{R} + \theta_0) = \pm\frac{1}{R},$$

dónde el signo será positivo si la circunferencia se recorre en sentido antihorario y negativo en caso contrario. En ambos casos la curvatura es constante.

Observamos además que en cualquier caso el centro de la circunferencia se expresa sin ambigüedad de signo como

$$p = \alpha(t) - Rc(\pm\frac{t}{R} + \theta_0) = \alpha(t) + (\pm R)n_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}n_\alpha(t) = \alpha + R^2\alpha''(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha^2(t)}\alpha''(t).$$

Recíprocamente, supongamos que la curvatura de α es $k_\alpha(t) \equiv k_0$ constante. Si $k_0 = 0$ se tiene que $\alpha'' \equiv 0$ de dónde se sigue tras integrar dos veces que

$$\alpha(t) = tv + b$$

para cierto $v \in \mathbb{S}^1$ y $b \in \mathbb{R}^2$. Mientras que si $k_0 \neq 0$ podemos definir la curva

$$p(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_0}n_\alpha(t)$$

inspirados por la expresión del centro de la circunferencia que hemos deducido antes. Basta probar que $p(t) \equiv p_0$ es constante para concluir que $\operatorname{Tr}\alpha \subseteq \mathbb{S}^1(p_0; \frac{1}{|k_0|})$ ya que

$$||p(t) - \alpha(t)|| = \frac{1}{|k_0|}||n_\alpha(t)|| = \frac{1}{|k_0|}.$$

Para comprobar que la curva diferenciable $p(t)$ es constante basta ver que $p'(t) = 0$. Calculamos dicha derivada

$$p'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k_0}n'_\alpha(t).$$

Como $\alpha' = t_\alpha$ y $n'_\alpha(t) = -k_\alpha(t)t_\alpha(t) = -k_0 t_\alpha(t)$ concluimos que

$$p'(t) = t_\alpha(t) - t_\alpha(t) = 0$$

como queríamos.

18. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA. Definamos la curva $\beta(s) = \alpha(-s)$ demostrar que β está PPA y coprobar que $k_\beta(s) = -k_\alpha(s)$.

Solución: Las dos primeras derivadas de β vienen dadas por

$$\beta'(s) = -\alpha'(-s)$$

y

$$\beta''(s) = \alpha''(-s).$$

En particular, $|\beta'(s)| = |-\alpha'(-s)| = 1$ y β está PPA. Se sigue de esto que $t_\beta(s) = \beta'(s) = -t_\alpha(-s)$ y que

$$n_\beta(s) = Jt_\beta(s) = -Jt_\alpha(-s) = -n_\alpha(-s).$$

Para calcular la curvatura de β utilizamos las relaciones anteriores para concluir que

$$k_\beta(s) = \beta''(s) \cdot n_\beta(s) = \alpha''(-s) \cdot (-n_\alpha(-s)) = -\alpha''(-s) \cdot n_\alpha(-s) = -k_\alpha(-s)$$

como queríamos.

Teorema Fundamental de curvas planas. Recordemos el *Teorema Fundamental de curvas planas* antes de seguir. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto cualquiera y consideremos el espacio $\text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)$ de curvas $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizadas por longitud de arco. Tenemos una acción obvia del grupo de movimientos rígidos directos del plano en el espacio de curvas $\text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)$. Denotemos por $\text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)/\simeq$ al conjunto de órbitas de dicha acción, esto es, identificamos dos curvas α y β de $\text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)$ si y sólo si existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha = M \circ \beta$. Nótese que la curvatura de una curva plana es preservada por un movimiento rígido directo luego la aplicación

$$\Phi : \text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)/\simeq \to C^\infty(I, \mathbb{R}), [\alpha] \mapsto k_\alpha$$

está bien defnida. Es más,

Theorem 0.0.1 (Teorema Fundamental de Curvas Planas)**.** *La aplicación*

$$\Phi : \text{Curvas}^{PPA}(I, \mathbb{R}^2)/\simeq \to C^\infty(I, \mathbb{R}), [\alpha] \mapsto k_\alpha$$

es una biyección. Esto es, para toda función $k : I \to \mathbb{R}$ diferenciable existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PPA con $k = k_\alpha$. Además, α es única salvo movimiento rígido directo.

Es importante notar que si $\alpha = M \circ \beta$ con $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento rígido directo (o aplicación afín en general) entonces M está determinadas por transformar la referencia afín $R_1 = \langle\beta(t_0); t_\beta(t_0), n_\beta(t_0)\rangle$ en la referencia $R_2 = \langle\alpha(t_0); t_\alpha(t_0), n_\alpha(t_0)\rangle$.

19. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA que satisface que $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ para todo $s \in (-a, a)$. Demostrar que la traza de α es simétrica respecto a la recta normal de α en $s = 0$.

   Solución: En primer lugar observamos que, tras posiblemente aplicar un movimiento rígido directo a α, podemos asumir que $\alpha(0) = 0$, $t_\alpha(0) = e_1$ y $n_\alpha(0) = e_2$. En estás coordenadas la recta normal a α en $s = 0$ coincide con el eje Y

$$N_\alpha(0) = \{\alpha(0) + \lambda n_\alpha(0); \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda e_2 : \lambda \in \mathbb{R}\} = Y.$$

   Por lo tanto, la aplicación lineal $A(x, y) = (-x, y)$ define la simetría respecto a $N_\alpha(0)$. Nótese que $A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2)$.

   Consideremos las curva $\beta(s) = \alpha(-s)$ y $\gamma(s) = A\alpha(s)$ ambas PPA. Basta probar que $\beta = \gamma$ para concluir el ejercicio ya que en este caso

$$\mathrm{Tr}\,\alpha = \mathrm{Tr}\,\beta = \mathrm{Tr}\,\gamma = \mathrm{Tr}\,A \circ \alpha = A\,\mathrm{Tr}\,\alpha.$$

   En virtud del Teorema Fundamental de Curvas Planas para ver que $\beta = \gamma$ debemos comprobar que $k_\beta = k_\gamma$ y que las referencias afines $\langle \beta(0); t_\beta(0), n_\beta(0)\rangle$ y $\langle \gamma(0); t_\gamma(0), n_\gamma(0)\rangle$ coinciden.

   En ejercicio 18 hemos comprobado que $k_\beta(s) = -k_\alpha(-s)$, $t_\beta(s) = -t_\alpha(-s)$ y que $n_\beta(s) = -n_\beta(s)$.

   Por otro lado, en el ejercicio 16 hemos visto que $k_\gamma(s) = \det(A)k_\alpha(s) = -k_\alpha(s)$. Mientras que los vectores tangente y normal de γ vienen dados por $t_\gamma(s) = At_\alpha(s)$ y $n_\gamma(s) = Jt_\gamma(s) = JAt_\alpha(s) = -AJt_\alpha(s) = -An_\alpha(s)$ ya que $AJ = -JA$.

   Como por hipótesis $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ concluimos que

$$k_\beta(s) = -k_\alpha(-s) = -k_\alpha(s) = k_\gamma(s).$$

   Por otro lado $\beta(0) = \alpha(0) = 0 = A(0) = A\alpha(0) = \gamma(0)$,

$$t_\beta(0) = -t_\alpha(0) = -e_1 = A(e_1) = At_\gamma(0) = t_\gamma(0)$$

   y

$$n_\beta(0) = -n_\alpha(0) = -e_2 = -A(e_2) = -A(n_\alpha(0)) = n_\gamma(0).$$

   Concluímos así el argumento.

20. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA que satisface que $k_\alpha(s) = -k_\alpha(-s)$. Demostrar que la traza de α es simétrica respecto a $\alpha(0)$.

   Solución: Este ejercicio es completamente análogo al anterior. En primer lugar podemos suponer que $\alpha(0) = 0$, $t_\alpha(0) = e_1$ y $n_\alpha(0) = e_2$. Por lo que la simetría respecto al punto $\alpha(0)$ viene dada por la rotación $A = R_\pi \in \mathrm{SO}(2)$ de ángulo π.

   Definamos de nuevo las curva $\beta(s) = \alpha(-s)$ y $\gamma(s) = A\alpha(s)$. Basta comprobar que $\beta = \gamma$ para concluir. La comprobación es rutinaria y análoga a la realizada en el ejercicio anterior.

21. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA. Demostrar que
   (i) α es un segmento de recta si y sólo si todas sus rectas tangentes pasan por un punto.
   (ii) α es un arco de circunferencia si todas sus rectas normales pasan por un punto.

   Solución:
   (i) Es claro que si α es un segmento de recta entonces todas sus rectas tangentes pasan por $p_0 = \alpha(t_0)$ para un tiempo fijo $t_0 \in I$. Recíprocamente, si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ por el cual pasan todas las rectas tangentes de α se tiene que

$$p_0 = \alpha(t) + \lambda(t)t_\alpha(t),$$

donde $\lambda(t) = (p_0 - \alpha(t)) \cdot t_\alpha(t)$ es una función diferencible. Derivando la expresión de p_0 respecto de t obtenemos que

$$0 = t_\alpha(t) + \lambda(t) t'_\alpha(t) + \lambda'(t) t_\alpha(t) = (1 + \lambda'(t)) t_\alpha(t) + k_\alpha(t)\lambda(t) n_\alpha(t).$$

Como $\langle t_\alpha(t), n_\alpha(t) \rangle$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ concluimos que debe satisfacerse que

$$1 + \lambda'(t) \equiv 0$$

y

$$k_\alpha(t)\lambda(t) \equiv 0.$$

De la primera igualdad obtenemos que $\lambda'(t) \equiv -1$, es decir, $\lambda(t) = -t + b$ para cierta constante $b \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en la segunda igualdad obtenemos la relación

$$k_\alpha(t)(-t + b) \equiv 0.$$

Como esta relación debe cumplirse para todo $t \in I$, $\lambda(t) = -t + b$ tiene a lo sumo un cero en I y k_α es continua concluimos que $k_\alpha \equiv 0$ y, por lo tanto, α es un segmento de recta.

(ii) Si α es una arco de circunferencia entonces todas sus rectas normales pasan por el centro de la circunferencia. Recíprocamente, si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^2$ por el cual pasan todas las rectas normales de α podremos escribir

$$p_0 = \alpha(t) + \lambda(t) n_\alpha(t),$$

con $\lambda(t) = (p_0 - \alpha(t)) \cdot n_\alpha(t)$. Derivando la expresión anterior obtenemos que

$$0 = t_\alpha(t) + \lambda'(t) n_\alpha(t) - k_\alpha(t)\lambda(t) t_\alpha(t) = (1 - k_\alpha(t)\lambda(t)) t_\alpha(t) + \lambda'(t) n_\alpha(t).$$

De nuevo, como $\langle t_\alpha(t), n_\alpha(t)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ concluimos que

$$1 - k_\alpha(t)\lambda(t) \equiv 0$$

y

$$\lambda'(t) \equiv 0.$$

De la segunda igualdad deducimos que $\lambda(t) \equiv c \in \mathbb{R}$ es constante. Además, la constante $c \neq 0$ es no nula ya que en caso contrario tendríamos que $\alpha(t) \equiv p_0$ que no es una curva regular. Sustituyendo el valor $\lambda \equiv c$ en la otra igualdad concluimos que

$$k_\alpha(t) \equiv \frac{1}{c} \neq 0$$

es constante. Como vimos en el ejercicio 17 se sigue que $\operatorname{Tr}\alpha \subseteq \mathbb{S}^1(p_0; |c|)$ es un arco de circunferencia.

22. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA. Demostrar que todas las rectas normales de α equidistan de un punto fijo si y sólo si existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que

$$k_\alpha(s) = \pm \frac{1}{\sqrt{as + b}}.$$

Solución: Sea $p \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Sabemos que $\langle t_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle$ es una base ortonormal para cada $s \in I$. Por lo tanto, siempre se puede escribir

$$p = \alpha(s) + \lambda_1(s) t_\alpha(s) + \lambda_2 n_\alpha(s),$$

donde $\lambda_1(s) = (p - \alpha(s)) \cdot t_\alpha(s)$ y $\lambda_2(s) = (p - \alpha(s)) \cdot n_\alpha(s)$ son funciones diferenciables. Es más, la distancia de p a la recta tangente de α en $\alpha(s)$ es $d_2 = |\lambda_2(s)|$ mientras que la distancia a la recta normal en $\alpha(s)$ es $d_1 = |\lambda_1(s)|$.

Observamos que las funciones λ_1 y λ_2 cumplen las relaciones

$$\lambda'_1(s) = -1 + k_\alpha(s)\lambda_2(s)$$

y
$$\lambda_2'(s) = -k_\alpha(s)\lambda_1(s).$$
Volvamos ahora al ejercicio. Asumamos que existe un punto $p \in \mathbb{R}^2$ que equidista de todas las rectas normales de α. Expresando p como antes, se cumplirá, por la hipótesis, que λ_1 es constante. Luego
$$\lambda_1' = -1 + k_\alpha\lambda_2 = 0,$$
es decir,
$$k_\alpha\lambda_2 = 1.$$
Ahora, si multiplicamos la expresión de λ_2' por λ_2 obtenemos la identidad
$$\frac{1}{2}(\lambda_2^2)' = -k_\alpha(s)\lambda_1\lambda_2 = c$$
constante, ya que $\lambda_1 = -c$ es constante y $k_\alpha\lambda_2 = 1$.

Deducimos pues que $(\lambda_2^2)' = 2c = a$ es constante, por lo que,
$$\lambda_2^2(s) = as + b.$$
Por lo tanto, $\lambda_2(s) = \pm\sqrt{as+b}$ y, como $1 = k_\alpha(s)\lambda_2(s)$ concluimos que
$$k_\alpha(s) = \pm\frac{1}{\sqrt{as+b}}$$
como queríamos.

Recíprocamente, supongamos ahora que $k_\alpha(s) = \pm\frac{1}{\sqrt{as+b}}$. Basándonos en el desarrollo anterior definimos las funciones diferenciables $\lambda_2(s) = \pm\sqrt{as+b}$ y $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ y consideremos la curva
$$p(s) = \alpha(s) + \lambda_1 t_\alpha(s) + \lambda_2(s)n_\alpha(s).$$
Basta comprobar que $p(s) \equiv p_0$ es constante, esto es, $p'(s)$ para concluir el ejercicio ya que en este caso la distancia de p_0 a la recta normal de α en $\alpha(s)$ será $|\lambda_1| = |\frac{a}{2}|$ constante.

Derivando la expresión de $p(s)$ obtenemos que
$$p'(s) = t_\alpha + \lambda_1' t_\alpha + k_\alpha\lambda_1 n_\alpha + \lambda_2' n_\alpha - k_\alpha\lambda_2 t_\alpha = (1 + \lambda_1' - k_\alpha\lambda_2)t_\alpha + (k_\alpha\lambda_1 + \lambda_2')n_\alpha.$$
Com $\langle t_\alpha, n_\alpha\rangle$ es una base para que $p'(s) = 0$ debe cumplirse que
$$1 + \lambda_1' - k_\alpha\lambda_2 \equiv 0$$
y
$$k_\alpha\lambda_1 + \lambda_2' \equiv 0.$$
La primera igualdad se satisface ya que $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$ es constante por definición y $\lambda_2 = \frac{1}{k_\alpha(t)}$ por definición también. Para comprobar que la segunda igualdad también se cumple debemos usar la expresión explícita de $\lambda_2(s) = \frac{1}{k_\alpha(s)} = \pm\sqrt{as+b}$ de dónde obtenemos que
$$\lambda_2'(s) = \pm\frac{a}{2\sqrt{as+b}} = \mp\lambda_1(s)k_\alpha(s)$$
luego la segunda ecuación también se satisface y $p'(s) = 0$ como queríamos.

23. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA y $s_0 \in I$. Consideremos la función $f : I \to \mathbb{R}$ definida por la expresión
$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0).$$
La función f mide la distancia orientada de $\alpha(s)$ a la recta tangente de α en $\alpha(s_0)$. Se pide demostrar que $f(s_0) = f'(s_0) = 0$ y $f''(s_0) = k_\alpha(s_0)$. Usar lo anterior para concluir que

(i) Si $k_\alpha(s_0) > 0$ entonces existe un subintervalo $J \subseteq I$ abierto que contiene a s_0 tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en $\alpha(s_0)$ hacie el que apunta $n_\alpha(s_0)$.

(ii) Si existe un subintervalo $J \subseteq I$ como antes entonces $k_\alpha(s_0) \geq 0$.

Solución: En primer lugar recordamos que toda recta afín de ecuación
$$R = \{p \in \mathbb{R}^2 : (p - q_0) \cdot v = 0\}$$
divide al plano en dos semiespacios
$$H_\pm = \{p \in \mathbb{R}^2 : \pm(p - q_0) \cdot v \geq 0\}$$
de forma que
$$H_+ \cap H_- = R.$$

En el caso de nuestro ejercicio
$$R = T_{\alpha(s_0)} = \{p \in \mathbb{R}^2 : (p - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) = 0\}$$
mientras los semiespacios vienen dados por
$$H_\pm = \{p \in \mathbb{R}^2 : \pm(p - \alpha(s_0)) \cdot n_\alpha(s_0) \geq 0\}.$$

Calculemos las primeras derivadas de f. Obtenemos que
$$f'(s) = t_\alpha(s) \cdot n_\alpha(s_0)$$
y que
$$f''(s) = k_\alpha(s) n_\alpha(s) \cdot n_\alpha(s_0).$$
De aquí deducimos directamente que
$$0 = f(s_0) = f'(s_0)$$
y
$$k_\alpha(s_0) = f''(s_0),$$
como se nos pedía.

Para resolver (i) y (ii) observamos que la condición sobre el subintervalo J es equivalente a decir que $f(J) \subseteq [0, +\infty)$, esto es, $\alpha(J) \subseteq H_+$. Para (i) observamos que si $k_\alpha(s_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo en s_0 de donde se sigue el resultado y, además, se puede tomar J con $f(s) > f(s_0)$ para todo $s \in J \backslash \{s_0\}$. Esto es, $\alpha(J \backslash \{s_0\}) \subseteq H_+ \backslash T_{\alpha(s_0)}$. Mientras que (ii) es totalmente análogo se deduce negando la afirmación y aplicando (i) (junto con la observación final que acabamos de dar de que $\alpha(J \backslash \{s_0\})$ no interseca al borde del semiespacio).

Otra forma de proceder (para probar los mismo) es usar el desarrollo de Taylor de f o aplicar el Lema de Hadamard [3] a la función f. En este último caso tendríamos que existe una función diferenciable $g : I \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(s) = (s - s_0)^2 g(s),$$

[3] La importancia del Lema de Hadamard es que permite estudiar singularidades (derivadas igual a cero) de funciones de variable real (y también algunas singularidades en funciones de varias variables). Como ejemplo, supongamos que $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es un función diferenciable con $0 = f(0) = \cdots = f^{k)}(0)$ y $f^{k+1)}(0) \neq 0$. Entonces existe una función $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ con $f(s) = s^{k+1} g(s)$ y $g(0) = \frac{f^{k+1)}(0)}{k!} \neq 0$. Como g es diferenciable debe existir un subintervalo $(-\delta, \delta)$ con $g(s) \neq 0$ para todo $s \in (-\delta, \delta)$ luego podemos definir el cambio de coordenadas $t(s) = s(\pm g(s))^{\frac{1}{k+1}}$ que será un difeomorfismo para s pequeño (restringiendo aún más el dominio). Precomponiendo f con la inversa $s(t)$ de $t(s)$ concluimos que $f \circ s(t) = \pm t^{k+1}$. Donde el signo $\pm$ coincide con el signo de $g(0)$. Es decir, f para entender el comportamiento de f cerca del origen basta entender el de los polinomios $\pm t^{k+1}$ que es mucho más fácil y concreto!. En este ejercicio vemos que si $k_\alpha(s_0) > 0$ entonces (tras un cambio de coordenadas en el dominio) la función f se puede escribir como $(s - s_0)^2$ de donde se sigue el argumento de forma clara.

con $g(s_0) = f''(s_0)/2 = k_\alpha(s_0)/2$. De donde se sigue que como $(s-s_0)^2 > 0$ para $s > s_0$ el signo de f está determinado por el de g y se puede deducir así el resultado.

24. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t))$ una curva regular. Demostrar que

$$k_\alpha(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{||\alpha'||^3} \det(\alpha'|\alpha'').$$

Solución: Si β es una curva parametrizada por longitud de arco sabemos que

$$k_\beta(s) = \det(\beta'|\beta'').$$

Sea $\varphi : J \to I$ un difeomorfismos creciente tal que $\beta(s) = \alpha \circ \varphi(s)$ esté PPA. Se cumple que

$$\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s),$$

luego $\varphi'(s) = \frac{1}{||\alpha'(s)||}$. Derivando de nuevo obtenemos también que

$$\beta''(s) = (\varphi')^2(s)\alpha''(\varphi(s)) + \varphi''(s)\alpha'(s).$$

Deducimos que si $t = \varphi(s)$ entonces

$$k_\alpha(t) = k_\alpha(\varphi(s)) = k_\beta(s) = \det(\beta'|\beta'') = \det(\varphi'\alpha'|(\varphi')^2\alpha''+\varphi''\alpha') = (\varphi')^3 \det(\alpha'|\alpha'') = \frac{1}{||\alpha'||^3} \det(\alpha'|\alpha'')$$

como queríamos.

25. Demostrar que una curva plana $\alpha(\theta)$ que se escribe en coordenadas polares como $\rho = \rho(\theta)$ satisface que

$$k_\alpha(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Solución: Por hipótesis $\alpha(\theta) = \rho(\theta)c(\theta)$ donde $c(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ es la parametrización usual de la circunferencia unidad. Como siempre, observamos que $c'(\theta) = Jc(\theta)$ y $c''(\theta) = -c(\theta)$. Nótese que $\langle c, c' = Jc\rangle$ conforma una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. En particular, nuestra curva $\alpha = \rho c$ cumple que

$$\alpha' = \rho' c + \rho c'$$

y como $\langle c, c'\rangle$ es una bse ortonormal

$$||\alpha'||^2 = (\rho')^2 + \rho^2.$$

Por otro lado, la segunda derivada de α la podemos expresar como

$$\alpha'' = \rho'' c + 2\rho' c' + \rho c'' = (\rho'' - \rho)c + 2\rho c'.$$

Utilicemos el ejercicio anterior para concluir el resultado. Por un lado calculamos

$$\det(\alpha'|\alpha'') = \det(\rho'c+\rho c'|(\rho''-\rho)c+2\rho'c') = 2(\rho')^2\det(c|c')+\rho(\rho''-\rho)\det(c'|c) = 2(\rho')^2-\rho\rho''+\rho^2,$$

donde hemos utilizado que $\det(c|c') = 1$. Utilizando la fórumla obtenida en el ejercicio anterior y el valor de $||\alpha'||^2 = (\rho')^2 + \rho^2$ concluimos el resultado.

26. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular PPA. Supongamos que $k_\alpha(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. La *evoluta* de α es la curva

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)} n_\alpha(s).$$

(i) Demostrar que la recta normal a α a tiempo s coincide con la recta tangente a su evoluta a tiempo s.
(ii) Demuestre que el punto de intersección de las rectas normales a α en $\alpha(t+h)$ y $\alpha(t)$ converge a un punto de la evoluta de α cuando $h \mapsto 0$.

Solución:

(i) La recta normal a α a tiempo s es

$$N_{\alpha(s)} = \{\alpha(s) + \lambda n_\alpha(s) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

mientras que la tangente a la curva evoluta es

$$T_{\beta(s)} = \{\beta(s) + \lambda\beta'(s) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Calculemos la derivada de β para obtener que

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + (\frac{1}{k_{\alpha(s)}})' n_\alpha(s) - \frac{1}{k_\alpha(s)} k_\alpha(s) n_\alpha(s) = g(s) n_\alpha(s),$$

puesto que $\alpha' = t_\alpha$. En la expresión anterior $g(s) = (\frac{1}{k_\alpha(s)})'$ y debemos asumir que $k'_\alpha(s) \neq 0$. Así,

$$T_{\beta(s)} = \{\beta(s)+\lambda\beta'(s) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(s)+\frac{1}{k_\alpha(s)} n_\alpha(s)+\lambda g(s) n_\alpha(s) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(s)+\mu n_\alpha(s) : \mu \in \mathbb{R}\} = N_{\alpha(s)}$$

como queríamos.

(ii) Si las rectas $N_{\alpha(t)}$ y $N_{\alpha(t+h)}$ se intersecan en cierto punto $p(t+h)$ debe ocurrir que

$$p(t+h) = \alpha(t) + \lambda_t(h) n_\alpha(t) = \alpha(t+h) + mu_t(h) n_\alpha(t+h).$$

Multiplicando ambas expresiones por $t_\alpha(t+h)$ obtenemos que

$$\alpha(t) \cdot t_\alpha(t+h) + \lambda_t(h) n_\alpha(t) \cdot t_\alpha(t+h) = \alpha(t+h) \cdot t_\alpha(t+h).$$

Es decir,

$$\lambda_t(h) n_\alpha(t) \cdot t_\alpha(t+h) = (\alpha(t+h) - \alpha(t)) \cdot t_\alpha(t+h).$$

Como $n_\alpha(t) \cdot t_\alpha(t) \equiv 0$ podemos reescribir la parte izquierda de la igualdad como

$$\lambda_t(h) n_\alpha(t) \cdot (t_\alpha(t+h) - t_\alpha(t)) = (\alpha(t+h) - \alpha(t)) \cdot t_\alpha(t+h).$$

Dividiendo ambas expresiones por $h \neq 0$ obtenemos

$$\lambda_t(h) n_\alpha(t) \cdot \frac{(t_\alpha(t+h) - t_\alpha(t))}{h} = \frac{(\alpha(t+h) - \alpha(t))}{h} \cdot t_\alpha(t+h).$$

Observamos así que el límite cuando $h \mapsto 0$ de la expresión de la derecha es $t_\alpha(t) \cdot t_\alpha(t) = 1$; mientras que el límite de la derecha es [4]

$$\lambda_t(0) n_\alpha(t) \cdot t_\alpha(t) = \lambda_t(0) k_\alpha(t).$$

Igualando ambas expresiones obtenemos que

$$\lambda_t(0) = \frac{1}{k_\alpha(t)},$$

es decir, el límite de $p(t+h)$ cuando $h \mapsto 0$ es

$$\alpha(t) + \lambda_t(0) n_\alpha(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)} n_\alpha(t) = \beta(t),$$

como queríamos.

27. La catenaria es la curva $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide
    (i) La curvatura de α a tiempo t es $k_\alpha(t) = \frac{1}{\cosh^2 t}$.
    (ii) La evoluta de α es $\beta(t) = (t - \sinh t \cosh t, 2\cosh t)$.

<u>Solución:</u>

[4]Asumimos que $\lambda_t(h)$ es continua en h.

(i) Calculamos la primera derivada de la catenaria:
$$\alpha'(t) = (1, \sinh t).$$
Observamos que
$$||\alpha'|| = (1+\sinh^2 t)^{\frac{1}{2}} = (\cosh^2 t)^{\frac{1}{2}} = \cosh t \neq 0.$$
Luego α es una curva regular pero no está PPA. Hemos utilizado la identidad $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ en el calculo anterior.
En virtud del ejercicio 24. la curvatura de α a tiempo t viene dada por la expresión
$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'|\alpha'')}{||\alpha'||^3}.$$
Calculemos pues la segunda derivada de α'' para obtener que
$$\alpha''(t) = (0, \cosh t).$$
Concluimos así que $\det(\alpha'|\alpha'') = \cosh t$ y por lo tanto
$$k_\alpha(t) = \frac{\cosh t}{\cosh^3 t} = \frac{1}{\cosh^2 t},$$
como queríamos.

(ii) Para la segunda parte del ejercicio observamos que
$$t_\alpha(t) = \frac{1}{||\alpha'||}\alpha'(t) = \frac{1}{\cosh t}(1, \sinh t)$$
luego
$$n_\alpha(t) = Jt_\alpha(t) = \frac{1}{\cosh t}(-\sinh t, 1).$$
Por lo tanto, la curva evoluta de α es
$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_\alpha(t)}n_\alpha(t) = (t, \cosh t) + \cosh t(-\sinh t, 1) = (t - \cosh t \sinh t, 2\cosh t)$$
que es la expresión buscada.

28. Consideremos la hélice $\alpha(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s)$, donde $a^2 + b^2 = c^2$. Se pide
   (i) Demostrar que α está PPA.
   (ii) Calcular la curvatura y la torsión de α.
   (iii) Hallar el plano osculador de α en $\alpha(s)$.
   (iv) Demostrar que las rectas normales a α cortan al ejer Z en ángulo recto.
   (v) Demostrar que el ángulo entre las rectas tangentes de α y el eje Z es constante.

<u>Solución:</u>

Sea $c(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ la parametrización usual de la circunferencia unidad en el plano XY. Observamos que $c'(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$ es perpendicular a $c(s)$ y unitario. Además, $c''(s) = -c(s)$.

Si denotamos por $Z(s) = (0, 0, s)$ a la parametrización del eje Z, que cumple que $Z'(s) = e_3$, observamos que la hélice α descompone como
$$\alpha(s) = ac(\frac{s}{c}) + \frac{b}{c}Z(s).$$
Por lo tanto,
$$\alpha'(s) = \frac{a}{c}c'(\frac{s}{c}) + \frac{b}{c}e_3.$$
Como c' y e_3 son perpendiculares y ambso unitarios concluimos que
$$||\alpha'(s)||^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

luego α está PPA. Esto prueba (i).

En particular, el vector tangente unitario

$$t_\alpha(s) = \frac{a}{c}c'(\frac{s}{c}) + \frac{b}{c}e_3$$

es la suma de un vector contenido en plano XY (luego perpendicular al eje Z) de norma constante y un vector paralelo al eje Z también de norma constante. Por lo tanto, el ángulo entre el vector $t_\alpha(s)$ y el eje Z es claramente constante lo cual prueba (v). Otra forma de expresar lo mismo es decir que $t_\alpha(s) = R_{\frac{s}{c}}t_\alpha(0)$ donde $R_{\frac{s}{c}}$ es la rotación de ángulo $\frac{s}{c}$ respecto del eje Z, luego el ángulo entre $t_\alpha(0)$ y e_3 coincide con el ángulo entre $t_\alpha(s) = R_{\frac{s}{c}}t_\alpha(0)$ y $e_3 = R_{\frac{s}{c}}e_3$.

Calculemos ahora el vector normal de α. Para ello calculamos la derivada segunda de la curva que viene dada por la expresión:

$$\alpha''(s) = \frac{a}{c^2}c''(\frac{s}{c}) = -\frac{a}{c^2}c(\frac{s}{c}).$$

Observamos que la curvatura de la curva α es

$$k_\alpha(s) = ||\alpha''(s)|| = \frac{|a|}{c^2}$$

y que el vector normal de α es

$$n_\alpha(s) = -\frac{a}{|a|}c(\frac{s}{c}).$$

Observamos que como el vector normal de α está contenido en el plano XY es siempre perpendicular al eje Z y, además, como la recta normal a α en s viene dada por

$$N_{\alpha(s)} = \{\alpha(s)+\lambda n_\alpha(s) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{ac(\frac{s}{c})+\frac{b}{c}Z(s)+\lambda(-\frac{a}{|a|})c(\frac{s}{c}) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\frac{b}{c}Z(s)+\lambda c(\frac{s}{c}) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

observamos que la intersección del eje Z y la recta $N_{\alpha(s)}$ es no vacía. Esto prueba (iv).

Terminemos de calcular el triedro de Frenet asociado a α para ello debemos computar

$$b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \times n_\alpha(s) = (\frac{a}{c}c'(\frac{s}{c}) + \frac{b}{c}e_3) \times (-\frac{a}{|a|}c(\frac{s}{c})).$$

Observamos que $c(s) \times c'(s) = e_3$ luego $e_3 \times c(s) = c'(s)$. Utilizando esta relación y que el producto vectorial es lineal en cada variable concluimos que

$$b_\alpha(s) = \frac{a^2}{|a|c}e_3 - \frac{ab}{|a|c}c'(\frac{s}{c}) = \frac{|a|}{c}e_3 - \frac{ab}{|a|c}c'(\frac{s}{c}).$$

Podemos calcular ahora fácilmente la torsión de α ya que

$$b'_\alpha(s) = -\frac{ab}{|a|c^2}c''(\frac{s}{c}) = \frac{ab}{|a|c^2}c(\frac{s}{c}) = -\frac{b}{c^2}n_\alpha(s).$$

Es decir,

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{b}{c^2}.$$

Para terminar, calculamos el plano osculador de α en $\alpha(s)$ que viene dado por

$$\Pi^{osc}_{\alpha(s)} = \{p \in \mathbb{R}^3 : (p - \alpha(s)) \cdot b_\alpha(s) = 0\}.$$

Curvatura y torsión de una curva en el espacio. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA. El *tangente* de α es el vector unitario

$$t_\alpha(t) = \alpha'(t).$$

Como $t_\alpha \cdot t_\alpha = \alpha' \cdot \alpha' \equiv 1$ obtenemos derivando que α'' es perpendicular a t_α. Definimos el vector normal de α como

$$n_\alpha(t) = \frac{\alpha''}{||\alpha''||}$$

y la curvatura de α como $k_\alpha = ||\alpha''|| \geq 0$. En particular, se sigue de la definición que

$$t'_\alpha = k_\alpha n_\alpha.$$

Como t_α y n_α son perpendiculares y unitarios podemos usar el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ para completar a una base ortonormal positiva conocida como *triedro de Frenet* dada por

$$\{t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha\}$$

donde

$$b_\alpha = t_\alpha \times n_\alpha$$

se conoce como vector binormal de α. Observamos que como b_α es unitario siempre es perpendicular a su vector derivada. Además,

$$b'_\alpha = t'_\alpha \times n_\alpha + t_\alpha \times n'_\alpha = t_\alpha \times n'_\alpha$$

ya que $t'_\alpha = k_\alpha n_\alpha$. Así, como el triedro de Frenet es una base ortonornormal de $\mathbb{R}^3$ concluimos que

$$b'_\alpha = \tau_\alpha n_\alpha,$$

para cierta función τ_α conocida como *torsión* de α. Nótese que τ mide en cierto sentido la variación del vector binormal, es decir, del plano osculador de α. Luego cdifica cuomo de lejos está α de ser una curva plana.

Por último, para calcular la variación del vector normal de α observamos que

$$n_\alpha = b_\alpha \times t_\alpha.$$

Derivando esta expresión y usando las relaciones anteriores obtenemos que

$$n'_\alpha = -k_\alpha t_\alpha - \tau_\alpha b_\alpha.$$

29. Demostrar que la torsión de una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birregular PPA se puede calcular por medio de la expresión

$$\tau_\alpha = -\frac{(\alpha' \times \alpha'') \cdot \alpha'''}{k_\alpha^2} = -\frac{\det(\alpha'|\alpha''|\alpha'')}{k_\alpha^2}.$$

Solución:

Por la definición de torsión se tiene que

$$\tau_\alpha = b'_\alpha \cdot n_\alpha.$$

Ahora bien, como $b_\alpha \cdot n_\alpha \equiv 0$ derivando está expresión conlcuimos que

$$\tau_\alpha = -b_\alpha \cdot n'_\alpha = -(t_\alpha \times n_\alpha) \cdot n'_\alpha = -\det(t_\alpha|n_\alpha|n'_\alpha).$$

Recordemos que $t_\alpha = \alpha'$ y $n_\alpha = \frac{1}{k_\alpha}\alpha''$ luego

$$n'_\alpha = (\frac{1}{k_\alpha})'\alpha'' + \frac{1}{k_\alpha}\alpha'''.$$

Sustiyendo ambas expresiones en la igualdad anterior obtenemos que

$$\tau_\alpha = -\det(\alpha'|\frac{1}{k_\alpha}\alpha''|(\frac{1}{k_\alpha})'\alpha'' + \frac{1}{k_\alpha}\alpha''') = -\frac{1}{k_\alpha^2}\det(\alpha'|\alpha''|\alpha'''),$$

como queríamos.

30. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular PPA tal que todas sus rectas normales pasan por el mismo punto. Demostrar que α está contenida en una circunferencia.

Solución: Sea $p \in \mathbb{R}^3$ un punto por el cual pasan todas las rectas normales de α. Podemos escribir

$$p = \alpha(s) + \lambda(s)n_\alpha(s),$$

donde $\lambda(s) = (p - \alpha(s)) \cdot n_\alpha(s)$ es una función diferenciable. Derivando la expresión de p obtenemos la relación

$$0 = t_\alpha(s)+\lambda'(s)n_\alpha(s)-k_\alpha(s)\lambda(s)t_\alpha(s)-\tau_\alpha(s)\lambda(s)b_\alpha(s) = (1-k_\alpha(s)\lambda(s))t_\alpha(s)+\lambda'(s)n_\alpha(s)-\tau_\alpha(s)\lambda(s)b_\alpha(s).$$

Como el triedro de Frenet es una base concluimos que deben satisfacerse las siguientes ecuaciones

$$1 - k_\alpha(s)\lambda(s) \equiv 0,$$
$$\lambda'(s) \equiv 0$$

y

$$\tau_\alpha(s)\lambda(s) \equiv 0.$$

De la segunda ecuación concluimos que $\lambda(s) \equiv c$ es constante. Además, $c \neq 0$ pues en caso contrario tendríamos que $\alpha(s) \equiv p$ no es birregular. En particular, deducimos de la expresión de p que

$$\operatorname{Tr}\alpha \subseteq \mathbb{S}^2(p; |c|).$$

De la tercera ecuación deducimos que $\tau_\alpha \equiv 0$ luego como α es birregular concluimos que es una curva plana y esférica, es decir, que está contenida en una circunferencia. Esto prueba el ejercicio. Por completar un poco observamos que de la primera ecuación se deduce que la curvatura de α es constante y tiene valor $k_\alpha(s) = \frac{1}{c}$ en particular, la constante c debe ser positiva.

33. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA birregular. Demostrar que la traza de α está contenida en un arco e circunferencia si y sólo si α es una curva esférica de curvatura constante.

Solución: Supongamos primero que la traza de α está contenida en la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2(p; R) \cap \Pi$ de centro p, radio R y contenida en el plano Π.En particular α es esférica. Además, sabemos que $k_\alpha = \frac{1}{R}$ es constante.

Recíprocamente, supongamos que la curvatura de α es constante $k_\alpha \equiv k_0 > 0$ y que α es una curva esférica. Por hipótesis $\operatorname{Tr}\alpha \subseteq \mathbb{S}^2(p; R)$ para cierto punto $p \in \mathbb{R}^3$ y cierto radio positivo $R > 0$. Debemos ver que α es una curva plana para concluir. Como α es birregular basta pues comprobar que $\tau_\alpha \equiv 0$.

Escribimos el centro de la esfera en términos de la refencia afín determinada por $\alpha(s)$ y el triedro de Frenet, esto es,

$$p = \alpha(s) + \lambda_t(s)t_\alpha(s) + \lambda_n(s)n_\alpha(s) + \lambda_b(s)b_\alpha(s),$$

donde $\lambda_j(s) = (p - \alpha(s)) \cdot j_\alpha(s)$ para $j \in \{t, n, b\}$.

Consideremos la función diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q \mapsto ||p - q||^2$. Tenemos que la composición $f(s) = F \circ \alpha(s) \equiv R^2$ es una función constante. Por ello,

$$f'(s) = 2(p - \alpha(s)) \cdot t_\alpha(s) = 2\lambda_t = 0.$$

Observamos, además, que $\lambda_t'(s) = -1 + k_\alpha(s)\lambda_n(s) \equiv 0$ pues λ_t es constante. De donde deducimos que

$$\lambda_n(s) = \frac{1}{k_0}$$

es constante. Por lo tanto, derivando de nuevo esta expresión obtenemos que

$$0 = \lambda_n'(s) = -k_0\lambda_t(s) - \tau_\alpha(s)\lambda_b(s) = -\tau_\alpha(s)\lambda_b(s).$$

Supongamos que existe $s_0 \in I$ con $\lambda_b(s) \equiv 0$ para $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ para cierto $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, se cumpliría que

$$0 = \lambda_b'(s) = \tau_\alpha(s)\lambda_n(t) = \frac{1}{k_0}\tau_\alpha(s),$$

luego $\tau_\alpha(s) = 0$ para $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$. Es decir, para que se cumpla la igualdad $-\tau_\alpha(s)\lambda_b(s) = 0$ debe ocurrir que $\tau_\alpha \equiv 0$ como queríamos. Otra forma de proceder hubiese sido observar que como

$$p = \alpha(s) + \frac{1}{k_0}n_\alpha(s) + \lambda_b(s)b_\alpha(s)$$

y $||p - \alpha(s)||^2 = \frac{1}{k_0^2} + \lambda_b^2 = R^2$ entonces,

$$\lambda_b^2 = R^2 - \frac{1}{k_0^2}$$

y λ_b debe ser constante. A partir de aquí derivamos paa obtener la relación $0 = \frac{1}{k_0}\tau_\alpha(s)$ anterior de donde se deduce el resultado.

34. Se dice que una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PPA con curvatura positiva es una *hélice* cuando todas sus rectas normales son perpendiculares a una dirección fija. Demostrar el

Theorem 0.0.2. *(de Lancret) Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una hélice si y sólo si existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tau_\alpha = ak_\alpha$.*

Solución: Supongamos primero que α es una hélice. Esto es, existe un vector unitario $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $n_\alpha(t)$ es perpendicular a v para todo $t \in I$. Como el triedro de Frenet $\langle t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha \rangle$ es una base ortonormal se tiene que

$$v = \lambda_t t_\alpha + \lambda_n n_\alpha + \lambda_b b_\alpha$$

donde, al ser la base ortonormal, los coeficientes vienen dados por la expresión

$$\lambda_j = v \cdot j_\alpha$$

para $j \in \{t, n, b\}$.

Por la hipótesis $\lambda_n = v \cdot n_\alpha = 0$, y

$$v = \lambda_t t_\alpha + \lambda_b b_\alpha.$$

Por otro lado,

$$1 = ||v||^2 = \lambda_t^2 + \lambda_b^2$$

es un vector en la circunferencia unidad del plano determinado por la base ortonormal $\langle t_\alpha, b_\alpha \rangle$ que orientamos según esta base. Por lo que

$$v = \cos\theta(t)t_\alpha + \sin\theta(t)b_\alpha,$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo medido en sentido antihorario de t_α a v.

Comprobemos que $\theta(t)$ es constante. En efecto, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\lambda_t = (v \cdot t_\alpha)' = k_\alpha(v \cdot n_\alpha) = 0$$

luego $\lambda_t = v \cdot t_\alpha$ es constante y, por lo tanto, el ángulo entre ambos vectores también ya que

$$v \cdot t_\alpha = ||v||||t_\alpha|| \cos\theta(t) = \cos\theta(t).$$

Concluimos que existe un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$v = \cos\theta t_\alpha + \sin\theta b_\alpha,$$

además, **podemos asumir que** $\theta \in (0, \pi)$ cambiando v por $-v$ si fuese necesario y observando que $\theta \neq 0$ ya que en este caso se tendría que $v = t_\alpha$ y α no tendría curvatura postiva.

Después de todos estos preparativos, derivamos la igualdad $v = \cos\theta t_\alpha + \sin\theta b_\alpha$ para obtener la relación

$$0 = (k_\alpha \cos\theta + \tau_\alpha \sin\theta) n_\alpha,$$

de donde obtenemos que $-k_\alpha \cos\theta = \tau_\alpha \sin\theta$ y, como $\theta \in (0, \pi)$, podemos despejar la torsión para conlcluir que

$$\tau_\alpha = a k_\alpha$$

donde $a = -\cot\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Recípricomante, supongamos que existe un número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tau_\alpha = a k_\alpha$. Basándonos en el desarrollo anterior consideramos el único[5] ángulo $\theta \in (0, \pi)$ tal que $a = -\cot\theta$. Definimos una curva esférica $v : I \to \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, vía la expresión

$$v(t) = \cos\theta t_\alpha + \sin\theta b_\alpha.$$

Dicha curva satisface que $v(t)$ es perpendicular a $n_\alpha(t)$ para todo $t \in I$. Basta comprobar que $v(t) \equiv v(0)$ es constante para concluir el resultado. Para ello, derivamos la expresión anterior para obtener que

$$v'(t) = (k_\alpha \cos\theta + \tau_\alpha \sin\theta) n_\alpha$$

luego $v'(t) = 0$ por la elección del ángulo $\theta \in (0, \pi)$ que hemos tomado. Esto concluye el resultado.

35. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular PPA con torsión nunca nula. Demostrar que α es una curva esférica si y sólo si

$$(\frac{1}{k_\alpha})^2 + (\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})^2$$

es constante.

<u>Solución:</u> Supongamos primero que $\mathrm{Tr}\,\alpha \subseteq \mathbb{S}^2(p; R)$. Expresemos el centro de la esfera en términos de la referencia afín determinada por $\alpha(s)$ y el triedro de Frenet como

$$p = \alpha + \lambda_t t_\alpha + \lambda_n n_\alpha + \lambda_b b_\alpha,$$

donde los coeficientes se defines exactamente igual que en los dos ejercicios anteriores. Nótese que como el triedro de Frenet es una base ortonormal se tiene que

$$R^2 = ||p - \alpha||^2 = \lambda_t^2 + \lambda_n^2 + \lambda_b^2.$$

En primer lugar, observamos que como

$$||p - \alpha||^2 = R^2$$

es constante, derivando obtenemos la relación

$$2\lambda_t = 0,$$

[5]Nótese que $\cot\theta$ está perfectamente definida en $(0, \pi)$ y es biyectiva sobre su imagen restringida a este dominio ya que $(\cot\theta)' = -\frac{1}{\sin^2\theta} < 0$ es estrictamente decreciente. Su imagen es claramente $\mathbb{R}$.

luego $\lambda_t = 0$. En particular, debe darse que

$$0 = \lambda_t' = 1 - k_\alpha \lambda_n,$$

es decir,

$$\lambda_n = \frac{1}{k_\alpha}.$$

Observamos que entonces

$$R^2 = \lambda_b^2 + \lambda_b^2 = (\frac{1}{k_\alpha})^2 + \lambda_b^2$$

es constante. Comprobemos pues que

$$\lambda_b = \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha}$$

para concluir.

Para calcular λ_b derivamos la expresión obtenida para $\lambda_n = \frac{1}{k_\alpha}$ para obtener que

$$-\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2} = (\frac{1}{k_\alpha})' = \lambda_n' = -k_\alpha \lambda_t - \tau_\alpha \lambda_b = -\tau_\alpha \lambda_b.$$

Despejando obtenemos que

$$\lambda_b = \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha}$$

como queríamos. Observemos que hemos deducido que el centro de la esfera en la que yace la curva α viene dado por

$$p = \alpha + \frac{1}{k_\alpha} n_\alpha + \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha}$$

y que el radio (al cuadrado) de dicha esfera viene dado por la constante

$$R^2 = (\frac{1}{k_\alpha})^2 + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})^2.$$

Comprobemos ahora el recíproco. Supongamos que la cantidad

$$(\frac{1}{k_\alpha})^2 + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})^2 = R^2$$

es constante y definamos la curva

$$p(s) = \alpha + \frac{1}{k_\alpha} n_\alpha + \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha} b_\alpha.$$

Basta comprobar que $p(s)$ es constante, esto es, que $p'(s) = 0$ para concluir. En efecto, si $p(s) = p_0$ constante se tendría que

$$||p_0 - \alpha(s)||^2 = ||p(s) - \alpha(s)||^2 = (\frac{1}{k_\alpha})^2 + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})^2 = R^2,$$

es decir, la traza de α estaría contenida en la esfera de centro p_0 y radio R.

La derivada de $p(s)$ viene dada por

$$p' = t_\alpha - \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2} n_\alpha - t_\alpha - \frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} b_\alpha + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})' b_\alpha + \frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2} n_\alpha = (-\frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})') b_\alpha.$$

Luego $p'(s) = 0$ si y sólo si

$$-\frac{\tau_\alpha}{k_\alpha} + (\frac{k_\alpha'}{k_\alpha^2 \tau_\alpha})' = 0$$

Ahora usamos la hipótesis de que

$$(\frac{1}{k_\alpha})^2 + (\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2\tau_\alpha})^2 = R^2$$

es constante. Derivando esta expresión obtenemos que

$$-2\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2}\frac{1}{k_\alpha} + 2(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2\tau_\alpha})(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2\tau_\alpha})' = 2\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2}(-\frac{1}{k_\alpha} + \frac{1}{\tau_\alpha}(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2\tau_\alpha})') = 0.$$

Como $k'_\alpha \neq 0$ podemos simplificar para concluir que

$$-\frac{1}{k_\alpha} + \frac{1}{\tau_\alpha}(\frac{k'_\alpha}{k_\alpha^2\tau_\alpha})' = 0.$$

Finalmente, multiplicando por la fución nunca nulda τ_α esta expresión obtenemos la relación que buscabamos. Concluimos así que $p(s)$ es contante como queríamos. Esto conluye el argumento.

36. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular PPA. Supongamos para cierto $s \in I$ existe un plano afín $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que
   - Π contiene a la recta tangente a α en s, esto es,

$$T_{\alpha(s)} = \{\alpha(s) + \lambda t_\alpha(s) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \Pi.$$

   - Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\alpha(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ corta a las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \backslash \Pi$.

Demostrar que Π coincide con $\Pi^{osc}_{\alpha(s)}$ el plano osculador de α en s.

Solución:

Observamos que precomponiendo α con el difeomorfismo creciente $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t+s$ podemos asumir que $s = 0$. Además, podemos asumir sin perdida de generalidad (mediante una traslación) que $\alpha(0) = 0$.

Por la hipótesis, tenemos que $\Pi = \langle t_\alpha(0), v\rangle$, dónde si tomamos v perpendicular a $t_\alpha(0)$ se tiene que $v = \lambda n_\alpha(0) + \mu b_\alpha(0)$. Luego podemos escribir,

$$\Pi = \langle t_\alpha(0), \lambda n_\alpha(0) + \mu b_\alpha(0)\rangle = \langle -\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0)\rangle^\perp.$$

Por otro lado, el plano osculador de α en $s = 0$ viene dado por

$$\Pi^{osc}_{\alpha(0)} = \langle b_\alpha(0)\rangle^\perp.$$

Para concluir el ejercicio debemos comprobar que $\mu = 0$.

Consideremos el funcional lineal

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, w \mapsto w \cdot (-\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0))$$

que define Π, esto es, $\Pi = F^{-1}(0)$ y, más aún, las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \backslash \Pi = H^+ \cup H^-$ son $H^\pm = \{w \in \mathbb{R}^3 : \pm F(w) > 0\}$.

Por la segunda hipótesis del enunciado la función diferenciable

$$f(s) = F \circ \alpha(s) = \alpha(s) \cdot (-\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0))$$

tiene un cero aislado en $s = 0$ y cambia de signo al pasar por $s = 0$. Esto es, $\alpha((-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}) \cap H^\pm \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

Aplicando el *Lema de Hadamard* [6] concluimos que

$$f(s) = sh(s),$$

donde $h(s)$ es una función diferenciable. Además,

$$f'(s) = h(s) + sh'(s)$$

luego $f'(0) = h(0)$. Por otro lado, la derivada de f viene dada por

$$f'(s) = t_\alpha(s) \cdot (-\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0)),$$

de donde concluimos que $h(0) = f'(0) = t_\alpha(0) \cdot (-\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0)) = 0$. Por lo tanto, podemos volver a aplicar el *Lema de Hadamard* ahora a h para escribir

$$f(s) = s^2 g(s),$$

para cierta función diferenciable g. Además, derivando dos veces la expresión anterior obtenemos que

$$f''(s) = 2g(s) + 4sg'(s) + s^2 g''(s),$$

luego $g(0) = \frac{f''(0)}{2}$.

En conclusión, hemos probado que existe una función diferenciable g de forma que $f(s) = s^2 g(s)$ y $g(0) = \frac{f''(0)}{2}$. Además, el valor $g(0)$ sabemos calcularlo pues

$$f''(s) = k_\alpha(s) n_\alpha(s) \cdot (-\lambda b_\alpha(0) + \mu n_\alpha(0))$$

y para el $s = 0$ obtenemos que

$$f''(0) = k_\alpha(0)\mu$$

.

Fijemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $f(s) \neq 0$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$. Nótese que como $s^2 > 0$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$ se tiene que

$$signo[f(s) : (-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}] = signo[s^2 g(s) : s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}] = signo[g(s) : s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}].$$

Observamos pues que si $g(0) \neq 0$ entonces, tomando ε más pequeño si fuese necesario, el signo de $f(s)$ sería constante en $(-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}$ en contra de la hipóteis. Luego debe ser,

$$g(0) = \frac{\mu k_\alpha(0)}{2} = 0$$

, es decir,

$$\mu = 0$$

pues $k_\alpha(0) \neq 0$ por ser α birregular. Esto concluye el ejercicio.

37. Demostrar que si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ son dos curvas birregulares con la misma función de curvatura, de torsión y tales que $||\alpha'|| = ||\beta'||$ entonces son congruentes.

<u>Solución:</u> Si $||\alpha'|| = ||\beta'|| = 1$ el problema se seguiría de *Teorema Fundamental de Curvas en el Espacio.* Ahora bien, si consideramos un difeomorfismo creciente $\varphi : J \to I$ tal que $\alpha \circ \varphi$ sea PPA observamos que $\beta \circ \varphi$ también será PPA. En efecto,

$$1 = ||(\alpha \circ \varphi)'(s)|| = \varphi'(s)||\alpha'(\varphi(s)))||$$

[6] El *Lema de Hadamard* lo vimos en clase y afirma que si una función diferenciable $f(s)$ tiene un cero en $s = 0$ entonces existe otra función diferenciable h con $f(s) = sh(s)$. En efecto, basta observar que

$$f(s) = f(0) + \int_0^s f'(u)du = \int_0^s f'(u)du = \int_0^1 f'(st)sdt = s\int_0^1 f'(ts)dt = sh(s).$$

Otra forma de proceder para resolver este ejercicio es considerar el desarrollo de Taylor de orden 2 de α (o de f).

luego $\varphi'(s) = \frac{1}{||\alpha'(\varphi(s))} = \frac{1}{||\beta'(\varphi(s))}$ de donde se deduce la afirmación. Así, por el Teorema Fundamental para curvas en espacio existe un movimieto rígido directo, digamos $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $M \circ \beta \circ \varphi = \alpha \circ \varphi$. Como φ es un difeomorfismo concluimos que $M \circ \beta = \alpha$ como queríamos.

38. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA. Definimos la curva $\beta(s) = \alpha(-s)$. Demostrar que β está PPA y hallar sus funciones de curvatura y de torsión en términos de las de α. Supongamos, además, que $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ y $\tau_\alpha(s) = -\tau_\alpha(-s)$, demostrar entonces que la traza de α es simétrica respecto al plano normal de α en $\alpha(0)$.

Solución: Es claro que β es PPA pues $\beta'(s) = -\alpha'(-s)$. El triedro de Frenet de β se puede escribir en términos del de α como

$$\langle t_\beta(s), n_\beta(s), b_\beta(s)\rangle = \langle -t_\alpha(-s), n_\alpha(-s), -b_\alpha(-s)\rangle,$$

mientras que la curvatura y la torsión de ambas curvas satisfacen que

$$k_\beta(s) = k_\alpha(-s) \text{ y } \tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s).$$

En efecto, la relación entre los vectores tangentes se sigue de la igualdad $\beta'(s) = -\alpha'(-s)$. Derivando de nuevo obtenemos que $\beta''(s) = \alpha''(-s)$ de donde obtenemos que $k_\beta(s) = k_\alpha(-s)$ y $n_\beta(s) = n_\alpha(-s)$. Por último, $b_\beta(s) = t_\beta(s) \times n_\beta(s) = -t_\alpha(-s) \times n_\alpha(-s) = -b_\alpha(-s)$. Para relacionar la torsión de ambas curvas derivamos el vector binormal de β. Observamos que

$$b'_\beta(s) = \tau_\beta(s) n_\beta(s) = \tau_\beta(s) n_\alpha(-s),$$

donde hemos utilizado que $n_\beta(s) = n_\alpha(-s)$; mientras que por otro lado como $b_\beta(s) = -b_\alpha(-s)$ también debe cumplirse que

$$b'_\beta(s) = b'_\alpha(-s) = \tau_\alpha(-s) n_\alpha(-s).$$

Igualando ambas expresiones deducimos que $\tau_\beta(s) = \tau_\alpha(-s)$.

Para la segunda parte del ejercicio podemos asumir, después de posiblemente aplicar un movimiento rígido directo, que $\alpha(0) = 0$ y $\langle t_\alpha(0), n_\alpha(0), b_\alpha(0)\rangle = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. En estas coordenadas el plano normal de α en $\alpha(0)$ coincide con el plano YZ, por lo que la simetría respecto a este plano viene dado por la aplicación $A(x, y, z) = (-x, y, z)$. Observamos que $A \in \mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3)$. Consideremos la curva $\gamma = A \circ \alpha$. Para concluir el ejercicio basta probar que $\gamma = \beta$. En efecto, en este caso se cumpliría que

$$\operatorname{Tr} \alpha = \operatorname{Tr} \beta = \operatorname{Tr} \gamma = \operatorname{Tr} A \circ \alpha = A \operatorname{Tr} \alpha$$

como queremos.

Como A es una matriz ortogonal se tiene que $\gamma = A \circ \alpha$ es una curva PPA. Además, $t_\gamma(s) = \gamma'(s) = A\alpha'(s) = At_\alpha(s)$. Mientras que $\gamma''(s) = A\alpha''(s)$ de donde deducimos que $k_\gamma(s) = k_\alpha(s)$ y que $n_\gamma(s) = An_\alpha(s)$. Por último, como A invierte la orientación obtenemos que

$$b_\gamma(s) = (At_\alpha(s)) \times (An_\alpha(s)) = \det(A) A(t_\alpha(s) \times n_\alpha(s)) = -Ab_\alpha(s).$$

Mientras que la torsión de γ cumple que

$$\tau_\gamma(s) = -\tau_\alpha(s).$$

En efecto, por un lado tenemos que

$$b'_\gamma(s) = \tau'_\gamma(s) n_\gamma(s) = \tau_\gamma(s)(An_\alpha(s)),$$

mientras que por el otro lado

$$b'_\gamma(s) = (-Ab_\alpha(s))' = -A(\tau_\alpha(s) n_\alpha(s)) = -\tau_\alpha(s) An_\alpha(s)$$

de donde se deduce la relación entre las torsiones arriba mencionada.

En resumen, se cumple que

$$\langle t_\gamma(s), n_\gamma(s), b_\gamma(s)\rangle = \langle At_\alpha(s), An_\alpha(s), -Ab_\alpha(s)\rangle$$

y

$$(k_\gamma(s), \tau_\gamma(s)) = (k_\alpha(s), -\tau_\alpha(s)) = (k_\alpha(-s), \tau_\alpha(-s)).$$

Donde hemos utilizado la hipótesis del enunciado en la última igualdad.

Observamos en particular que

$$(k_\gamma(s), \tau_\gamma(s)) = (k_\alpha(-s), \tau_\alpha(-s)) = (k_\beta(s), \tau_\beta(s)).$$

Por el Teorema Fundamental de Curvas en el espacio concluimos que existe un movimieto rígido directo $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $M \circ \gamma = \beta$. Además, M está determinado por transformar la referencia afín

$$R_1 = \langle \gamma(0), t_\gamma(0), n_\gamma(0), b_\gamma(0)\rangle$$

en la referencia afín

$$R_2 = \langle \beta(0), t_\beta(0), n_\beta(0), b_\beta(0)\rangle.$$

Es claro que $\gamma(0) = A\alpha(0) = A(0) = 0 = \beta(0)$. Mientras que por un lado tenemos que

$$\langle t_\gamma(0), n_\gamma(0), b_\gamma(0)\rangle = \langle At_\alpha(0), An_\alpha(0), -Ab_\alpha(0)\rangle = \langle Ae_1, Ae_2, -Ae_3\rangle = \langle -e_1, e_2, -e_3\rangle$$

y por el otro lado tenemos que

$$\langle \beta(0), t_\beta(0), n_\beta(0), b_\beta(0)\rangle = \langle -t_\alpha(0), n_\alpha(0), -b_\alpha(0)\rangle = \langle -e_1, e_2, -e_3\rangle.$$

Conluimos que las referencias R_1 y R_2 coinciden luego $M = \mathrm{Id}$ y $\gamma = \beta$ como queríamos.

39. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular PPA. Demostrar que α es una curva plana si y sólo si todos sus planos osculadores son concurrentes.

Solución: Si α es plana todos sus planos osculadores coinciden con el plano que contiene a α luego en particular son concurrentes. Recíprocamente, supongamos que existe cierto punto $p \in \mathbb{R}^3$ por el que pasan todos los planos osculadores de α. Esto es,

$$p = \alpha(s) + \lambda_t(s)t_\alpha(s) + \lambda_n(s)n_\alpha(s).$$

Como α es birregular basta probar que $\tau_\alpha \equiv 0$ para concluir. Derivando la expresión de p concluimos que

$$0 = t_\alpha + \lambda_t' t_\alpha + k_\alpha\lambda_t n_\alpha + \lambda_n' n_\alpha - k_\alpha\lambda_n t_\alpha - \tau_\alpha\lambda_n b_\alpha = (1 + \lambda_t' - k_\alpha\lambda_n)t_\alpha + (k_\alpha\lambda_t + \lambda_n')n_\alpha - \tau_\alpha\lambda_n b_\alpha.$$

Como el triedro de Frenet es una base concluimos que

$$1 + \lambda_t' - k_\alpha\lambda_n \equiv 0,$$

$$k_\alpha\lambda_t + \lambda_n' \equiv 0$$

y

$$\tau_\alpha\lambda_n \equiv 0.$$

Supongamos que $\lambda_n \equiv 0$ en cierto subintervalo abierto $J \subseteq I$. En particular, se cumpliría la tercera ecuación. Se tendría entonces que $\lambda_n' \equiv 0$ en J de donde usando la segunda ecuación y el hecho de que la curvatura de α es positiva deduciríamos que

$$\lambda_t \equiv 0$$

en J. Esto no puede ocurrir ya que entonces

$$p = \alpha(s), s \in J,$$

en contra de la hipótesis de que α es PPA. Por lo tanto, como τ_α es una función continua concluimos que para que se cumpla la tercera ecuación debe satisfacerse que

$$\tau_\alpha \equiv 0$$

como queríamos.