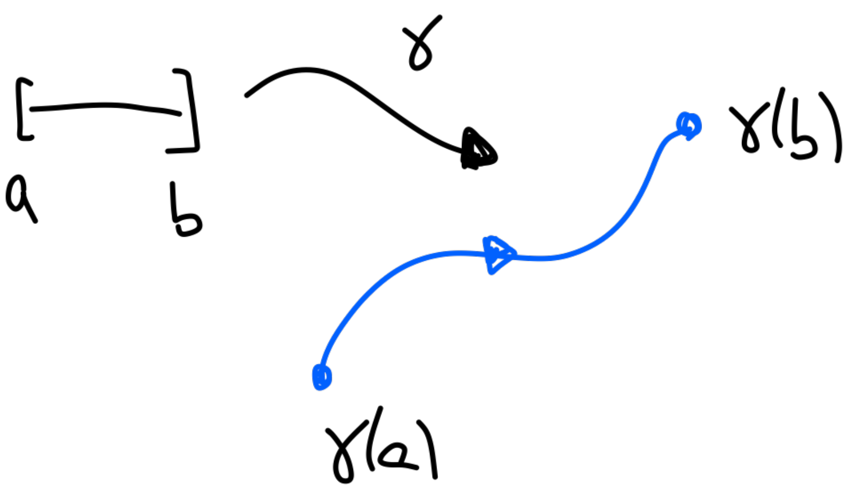
CAMPOS CONSERVATIVOS

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\vec{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ campo vectorial continuo. Se dice que $\vec{F}$ es **conservativo** si $\exists\, f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tq $\nabla f = \vec{F}$. Al campo escalar f se le llama **potencial** asociado.

$\boxed{\text{Ej:}}$ $A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Potencial gravitatorio $f = \frac{MG}{r}$

Campo gravitatorio: $\vec{F} = \frac{-MG}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$\boxed{\text{Obs.}}$: $\vec{F}$ conservativo $\vec{F} = \nabla f$.



$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

TFC aplicado a $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$

$\left(g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right)$

Para campos conservativos: $\boxed{\text{TRABAJO = DIFERENCIA DE POTENCIAL}}$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (Caracterización de campos conservativos):

$A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^n$ continuo. Son equivalentes:

(1) $\vec{F}$ es conservativo

(2) $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall \gamma$ camino cerrado en A.

(3) $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ es independiente del camino γ

Si además A es simplemente conexo (sin agujeros), y $\vec{F}$ es de clase C^1, tambien es equivalente:

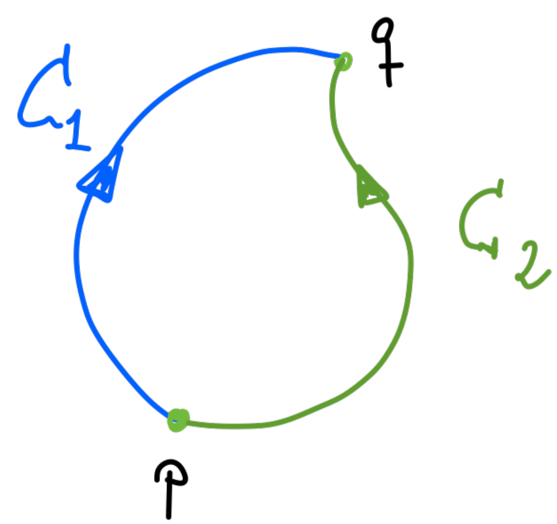
(4) $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall i,j = 1,\dots,n.$

Obs: Para $n=3$ la condición $(4) \Leftrightarrow rot(\vec{F}) = 0$

(e.d. que el campo es <u>IRROTACIONAL</u>)

<u>Dem:</u> $(1) \Rightarrow (3)$ visto (TFC)

$(2) \Leftrightarrow (3)$ trivial



$C_1 + C_2^-$ es cerrado

y

$$\int_{C_1 + C_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$(1) \Rightarrow (4)$ Tma. Schwarz para f.

$(4) \Rightarrow (1)$ Apuntes D. Azagra (para el caso A estrellado)

③ $\Rightarrow$ ① Problema: ¿Cómo definir el potencial f a partir de (3)?

Suponemos (sin pérdida de generalidad) A conexo (+ abierto)

$\Rightarrow$ conexo por poligonales (que son caminos C^1 a trozos).

Fijamos $p \in A$. Para cada $x \in A$ elegimos un camino γ_x de p a x

Definimos $$\boxed{f(x) = \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

(Por (3) f no depende de la elección de γ_x.)

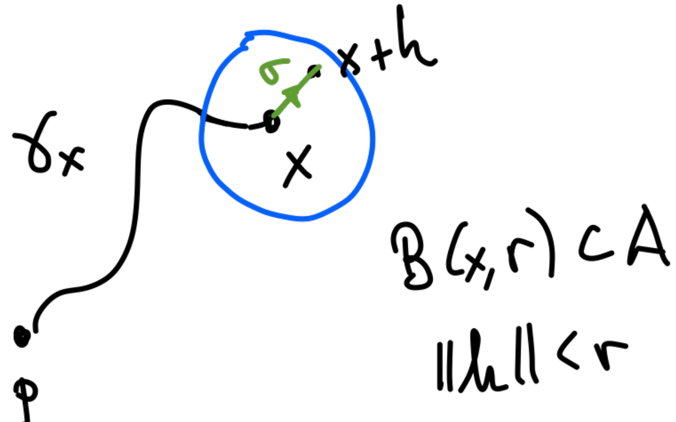
Hay que ver que $\nabla f = \vec{F}$.

¿ $\nabla f = \vec{F}$?

∇f se define por la propiedad:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \nabla f(x) \cdot h|}{\|h\|} = 0}$$

$$|f(x+h) - f(x) - \vec{F}(x) \cdot h| = \left| \int_{\gamma_{x+h}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_x} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \vec{F}(x) \cdot h \right| =$$



$$= \left| \int_{\sigma} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \vec{F}(x) \cdot h \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \vec{F}(x+th) \cdot h \, dt - \int_0^1 \vec{F}(x) \cdot h \, dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 \left(\vec{F}(x+th) - \vec{F}(x) \right) \cdot h \, dt \right|$$

$$\leq \|h\| \int_0^1 \| \vec{F}(x+th) - \vec{F}(x) \| \, dt$$

Elegimos $\gamma_{x+h} = \gamma_x + \sigma$

$\sigma(t) = x + th \quad , t \in [0,1]$

$\boxtimes$