Ejercicio 3 (Hoja 4)

20-XII-2019

Grupo Cuaternión

$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$

(i) Orden y tabla de multiplicar

$\text{ord}(1) = 1$ (único elemento de orden 1 en grupos)

$\text{ord}(-1) = 2$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$\Rightarrow \text{ord}(i) = \text{ord}(j) = \text{ord}(k) = 4$

(todo elemento en un grupo cuyo cuadrado sea -1 significa que tiene orden 4)

↳ es decir, su cuadrado tiene orden 2

$x^2 \equiv 1 \rightsquigarrow$ orden 2 (salvo neutro)

$x^2 \equiv -1 \rightsquigarrow$ orden 4 necesariamente

- Observaciones previas a la tabla del grupo:

- Se tiene que $x^{-1} = -x$ si $x \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$ (pues $x^2 = -1$ para estos valores)

- $x \cdot (-1) = -x = (-1) \cdot x, \ \forall x \in Q$

- Dado $y \neq \pm 1$ t.q. $y \neq \pm x$, entonces $x \cdot y \in Q$ con $x \cdot y \neq \pm 1$

luego, necesariamente: $(xy)^2 = -1$

[A saber: $(xy)^{-1} = -xy$]

- En las mismas condiciones anteriores,

$$(xy)(yx) = xy^2x = -x^2 = 1 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Luego, por la unicidad del inverso, se tiene que

$$yx = -xy \,]$$

- Sólo falta determinar los productos $ij, ik, jk \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$.

Como $ijk = -1$, usando las aplicaciones

$$\begin{cases} R_g : \begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & Q \\ h & \longmapsto & hg \end{array} & \forall h \in Q \\ L_g : \begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & Q \\ h & \longmapsto & gh \end{array} & \end{cases}$$

se observa que

$$\left.\begin{array}{l} R_{-k}(ijk) = ij \\ \quad \parallel \\ R_{-k}(-1) = k \end{array}\right\} \quad ij = k \,]$$

$$\left.\begin{array}{l} L_{-i}(ijk) = jk \\ \quad \parallel \\ L_{-i}(-1) = i \end{array}\right\} \quad [i = jk]$$

Finalmente, usando el Ejercicio 1:

$$\left.\begin{array}{l} L_j(\underline{ik}) = (ji)k = (-ij)k = \\ \qquad = (-k)k = 1 \\ L_j(\underline{-j}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

sabemos que $j(-j) = 1$

$$\Rightarrow \quad [ik = -j]$$

L_j es $\boxed{\text{biyección}}$

Con todos estos datos, podemos construir la tabla del grupo Q.

no hay repeticiones en ninguna fila/columna

Q	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

⊛ Multiplico columna x fila (en ese orden)

(ii) Subgrupos. ¿$i^n j \, i^n = j \quad \forall n \in \mathbb{Z}$?

$|Q| = 8 \overset{\text{TR. de Lagrange}}{\Longrightarrow}$ subgrupos propios órdenes 2 ó 4.

↳ Sólo hay un subgrupo de orden 2 (generado por el único elemento de dicho orden, ya que este será cíclico).

[A saber: $H_1 = \langle -1 \rangle$]

→ Los grupos de orden $4 = 2^2$ (primo al cuadrado) son abelianos y, estos en concreto, están caracterizados porque; o bien son cíclicos, o bien ~~todos sus elementos tienen orden 2~~

imposible en este grupo pues sólo hay un elemento de orden 2

[estudiamos estos en el Ejercicio 30]

Luego, estos son $H_x = \langle x \rangle$
$\forall x \in \{\pm i, \pm j, \pm k\}$.

Sin embargo: $H_x = H_{-x}$

$H_x \neq H_y$
si $x \neq \pm y$
claramente
en virtud de
todo lo ya visto

En efecto: $x^3 = -x$

Luego:

$$\langle x \rangle = \{1, x, -1, -x\}$$
$$\shortparallel$$
$$\langle -x \rangle = \{1, -x, -1, x\}$$

<u>Conclusión</u>: Subgrupos de Q

→ Triviales: $\{1\}$, Q

→ propios:

- orden 2: $H_1 = \langle 1 \rangle$
- orden 4:

$H_i = \langle i \rangle$, $H_j = \langle j \rangle$, $H_k = \langle k \rangle$.

Vamos a demostrar la identidad que queda por inducción en n. para $n > 0$ ($n = 0$ es trivial).

- Caso base ($n = 1$)

$$(\cancelto{k}{ij})(\cancelto{k}{ij}) = -1 \quad [\text{lo hemos visto}]$$

$$\Rightarrow \quad iji = j \;]$$

multiplicando por $-j$ a derecha

$$(j)(-j) = 1$$

- Caso general: Suponemos cierto el resultado para $n-1$ ($n > 1$) [Hipótesis de inducción] y veamos el resultado para n.

hip. de inducción

$$i^n j i^n = i^{n-1}(\cancelto{j}{iji})\, i^{n-1} = \cancelto{j}{i^{n-1} j\, i^{n-1}}$$

caso base

Veamos ahora que esto sigue siendo cierto si $n<0$. En efecto,

$$i^n j\, i^n = [(i^{-n})^{-1} \underbrace{(-j)^{-1}}_{j^{-1}=-j}] (i^{-n})^{-1} =$$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$$= (-j \cdot i^{-n})^{-1} (i^{-n})^{-1} =$$

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$$= (i^{-n} (-j)\, i^{-n})^{-1} =$$

$$= (-j)^{-1} = j$$

aplicamos lo probado para $-n>0$

Conclusión: $i^n j\, i^n = j \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

(iii) ¿Q abeliano? Centro.

Es obvio que Q no es abeliano, pues

$ij = -ji \neq ji$ (contraejemplo)

Hallamos por tanto su centro.

Recordad: $Z(Q) < Q$ (subgrupo)

Además: • $Z(Q) \neq Q$ (no abeliano)

• $Z(Q) \neq \{1\}$ (no trivial)

[Ejercicio 11 Hoja 5]

Luego $Z(Q) = H_x$, donde $x \in \{-1, i, j, k\}$.

Hemos visto cuáles son todos los subgrupos

Pero, ¿cuál? Obviamente $Z(Q) = \langle -1 \rangle$

¿Por qué? Se ha visto que

$$\left.\begin{array}{l} ij = -ji \neq ji \\ ik = -ki \neq ki \\ jk = -kj \neq kj \end{array}\right\} \Rightarrow i, j, k \notin Z(Q)$$

$\blacksquare$

pues $|Q| = 8 = 2^3 \Rightarrow G$ es 2-grupo.