

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada
Análisis de Variable Real - Grupo E - Curso 2018-19
Estudio y representación de funciones. Máximos, mínimos, optimización. Hoja 8.

180 Resuelve los siguientes problemas de optimización:

- (a) Divide un número positivo en dos sumandos de forma que su producto sea el mayor posible
- (b) Con L metros de malla metálica hay que hacer un vallado rectangular usando como cuarta lado una pared. ¿Qué dimensiones tienen que tener los lados para que el area del terreno vallado sea máximo?
- (c) Inscribir en una esfera de radio R
 - (c.1) un cilindro de volumen máximo.
 - (c.2) un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.
 - (c.3) un cono de volumen máximo.
- (d) De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos de un embudo con la mayor capacidad posible.
- (e) Por un punto en \mathbb{R}^2 de coordenadas positivas pasa una recta que corta a los dos semiejes positivos. Encontrar la recta para que el área sea mínima y determinar dicha área.
- (f) Una persona tiene que ir de un punto A en la orilla de un río de anchura constante, h , y recto, a un punto B en la otra. Sabiendo que la velocidad con la que se mueve por la orilla es k veces la velocidad con la que nada (en línea recta) determinar el ángulo con el que debe cruzar el río para llegar lo antes posible.
- (g) Hallar el punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determina con los ejes coordenados en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.
- (h) Calcular las dimensiones de una lata de refresco (cilindro de base circular) de volumen fijo V y que tenga la menor superficie. Hacerlo en los dos caso en el que el recipiente tiene tapa o no.
- (i) Encontrar el área mínima de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir en una circunferencia dada. Comprobar que dicho triángulo es equilátero.

181 En el plano se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra al punto $(1, b)$, siendo $a, b > 0$. Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos de ambas rectas con el eje horizontal son iguales.

182 Una persona está observando desde el suelo, con un telescopio, un avión que se aproxima a una velocidad de 15 km/minuto y a una altura constante de 10 km. ¿A qué ritmo está variando el ángulo del telescopio cuando la distancia horizontal del avión a esa persona es de 36 km? ¿Y cuando el avión pasa por la vertical de esa persona?

183 Un caudal de agua fluye en un tanque cónico al ritmo constante de $3m^3/s$. El cono tiene 5 m de radio, 4 m de altura y está situado con el vértice hacia abajo. Sea $h(t)$ la altura del agua sobre el fondo en el instante t . Hallar $h'(t)$ (velocidad a la que sube el nivel del agua) y $h''(t)$ cuando el tanque está lleno hasta una altura de 2 m.

184 Probar que $f(x) = x^3 + 3x - m$ no tiene dos raíces en $[0, 1]$ para ningún valor de m .

185 a) Probar que cualquier polinomio $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ verificando $a_0 \cdot a_n < 0$ tiene por lo menos una raíz real. Además, si n es par, entonces tiene por lo menos dos raíces reales.

b) Probar que todo polinomio de grado par y coeficiente de mayor grado positivo alcanza el ínfimo.

186 Representar gráficamente las siguientes funciones. Para ello estudiar: dominio de definición, simetrías (par, impar, periódica), cortes con los ejes, límites en la frontera del dominio, continuidad, derivabilidad, crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, máximos/mínimos/puntos de inflexión, asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas).

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{b) } g(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}, \quad \text{c) } h(t) = \frac{\ln(|t|)}{t} \quad \text{d) } j(x) = e^{-x^2}$$

$$\text{e) } k(t) = e^{-at} \cos(bt) \text{ con } a > 0, b \neq 0, \quad \text{f) } m(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$