Primer examen parcial enero de 2019. Álgebra Lineal (E)

La parte de Teoría puntúa el 20% y los problemas el 80% restante. Los problemas puntúan por igual.

Teoría

UNO.- **Rango de una matriz y una función lineal. Definiciones y teoremas principales.**

Se trata de dar una exposición de conjunto. Es casi imposible dar definiciones, demostraciones, ejemplos, etc. de todo esto en el tiempo disponible. Se pretende que, tras un rato de reflexión, se escriba lo que podría ser una introducción en sus ideas esenciales para quien conoce los prerrequisitos básicos.

DOS.- Se ha visto en teoría que si $\mathbb{E}$ es espacio de dimensión finita y $\mathbb{F}$ un subespacio, hay suplementarios $\mathbb{G}$; o sea, subespacios $\mathbb{G}$ tales que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$. Pedimos mejorar este teorema en el sentido siguiente: si $\mathbb{E}$ es espacio de dimensión finita, $\mathbb{F}$ un subespacio, y $\mathbb{H}$ otro subespacio tal que $\mathbb{F} \cap \mathbb{H} = 0$ existe entonces un suplementario $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ *conteniendo a* $\mathbb{H}$.

Solución a DOS. Tomamos bases $(u_1, \ldots, u_m)$ y $(v_1, \ldots, v_p)$ de $\mathbb{F}$ y $\mathbb{H}$ y las unimos, quedando base de familia independiente porque si fuese $\sum_{i=1}^m \lambda^i u_i + \sum_{j=1}^p \mu^j v_j = 0$ se tendría que $\sum_{i=1}^m \lambda^i u_i = -\sum_{j=1}^p \mu^j v_j \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} = 0$ luego $\sum_{i=1}^m \lambda^i u_i = \sum_{j=1}^p \mu^j v_j = 0$ y por la independencia de $(u_1, \ldots, u_m)$ y $(v_1, \ldots, v_p)$ son nulos todos los λ y μ. Una familia independiente puede extenderse hasta una base; digamos que $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_p)$ se extiende a la base $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q)$. Si definimos como $\mathbb{G}$ el subespacio generado por $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q)$ tenemos que $\mathbb{H} \subset \mathbb{G}$ (obvio) y que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{H}$. Que es $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{H}$ se sigue de que todo $x \in \mathbb{E}$ se escribe como

$$x = \lambda^1 u_1 + \ldots + \lambda^m u_m + \mu^1 v_1 + \ldots + \mu^p v_p + \theta^1 w_1 + \ldots + \theta^q w_q$$

con $\lambda^1 u_1 + \ldots \lambda^m u_m \in \mathbb{F}$ y $\mu^1 v_1 + \ldots + \mu^p v_p + \theta^1 w_1 + \ldots + \theta^q w_q \in \mathbb{H}$. El ser $\mathbb{F} \cap \mathbb{H} = 0$ se debe a que si $x \in \mathbb{F} \cap \mathbb{H}$ se podrá poner

$$x = \lambda^1 u_1 + \ldots + \lambda^m u_m = \mu^1 v_1 + \ldots + \mu^p v_p + \theta^1 w_1 + \ldots + \theta^q w_q$$

y restando, $0 = -\lambda^1 u_1 - \ldots - \lambda^m u_m + \mu^1 v_1 + \ldots + \mu^p v_p + \theta^1 w_1 + \ldots + \theta^q w_q$ y por la independencia de $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q)$ da que todos los λ, μ y θ son nulos, luego $x = 0$.

Una manera de demostrarlo más rápida, si no nos paramos en detalles, es definir $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F} \oplus \mathbb{H}$ y aplicar el teorema que citamos en el enunciado a $\mathbb{F}_1$. Tenemos $\mathbb{G}_1$ tal que $\mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \oplus \mathbb{G}_1 = (\mathbb{F} \oplus \mathbb{H}) \oplus \mathbb{G}_1 = \mathbb{F} \oplus (\mathbb{H} \oplus \mathbb{G}_1)$ y se tiene lo pedido definiendo $\mathbb{G} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{G}_1$.

Problemas

Problema 1 *Estudiar en* $\mathbb{R}^3$ *el sistema dependiente de* $\lambda \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinando los valores de λ *para los que el sistema es compatible y dando en esos casos las soluciones.*

Solución. Las operaciones fila a realizar son

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^3 & 1 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda - \lambda \cdot \lambda^3 & \lambda^3 - \lambda \cdot \lambda^2 & 1 - \lambda \cdot 1 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda^2 \cdot \lambda^3 & \lambda - \lambda^2 \cdot \lambda^2 & 1 - \lambda^2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda - \lambda^4 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & \lambda^2 - \lambda^5 & \lambda - \lambda^4 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda - \lambda^4 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & \left(\lambda^2 - \lambda^5\right) - \lambda \cdot \left(\lambda - \lambda^4\right) & \lambda - \lambda^4 & \left(1 - \lambda^2\right) - \lambda \cdot (1 - \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda - \lambda^4 & 0 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

La matriz final tiene filas nulas cuando $\lambda = 1$, pero dan ecuaciones tipo $0 = 0$ que no afectan a la compatibilidad. Por tanto, *el sistema es siempre compatible.* Los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda = 1$ son respectivamente

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda^3 y + \lambda^2 z = 1 \\ \lambda \left(1 - \lambda^3\right) y = 1 - \lambda \\ \lambda \left(1 - \lambda^3\right) z = 1 - \lambda \end{cases} , \quad \{x + y + z = 1$$

En el primer caso la solución *unica* es

$$y = z = \frac{1-\lambda}{\lambda\left(1-\lambda^3\right)}, \quad x = \frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda^3 y+\lambda^2 z\right) = \frac{1}{\lambda}\left(1-\lambda^3\frac{1-\lambda}{\lambda\left(1-\lambda^3\right)}-\lambda^2\frac{1-\lambda}{\lambda\left(1-\lambda^3\right)}\right) = \frac{1}{\lambda^3+\lambda^2+\lambda}.$$

Parece que es $x \neq y = z$ pero no es así porque si se factoriza $1-\lambda^3 = (1-\lambda)\left(1+\lambda+\lambda^2\right)$ queda $x = y = z$. Esto da que pensar y muestra que los muy listos se podrían haber percatado a la primera[1] que el sistema puede tener soluciones tipo $(h,h,h)^\top$. En efecto, sea como sea λ

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^3 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ h \\ h \end{pmatrix} = h\left(\lambda^3+\lambda^2+\lambda\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y se puede tomar } h = \frac{1}{\lambda^3+\lambda^2+\lambda}.$$

Quien se diera cuenta de esto a la primera (¡difícil! ¿difícil?) había obtenido casi sin esfuerzo que el sistema es siempre compatible y una solución. Por desgracia o fortuna, como piden las soluciones, hay que hacer el trabajo más duro del principio, porque quizás la solución $(h,h,h)^\top$ no sea la única. Y es lo que pasa si $\lambda = 1$ porque la solución es $(z,y,z)^\top = (1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, dependiendo de dos parámetros. ♠

Problema 2 *Para* p, q *no simultaneamente nulos pero posiblemente iguales pedimos* $\det(a)$ *siendo*

$$a = \begin{pmatrix} p & p & q & q \\ q & q & p & p \\ q & p & q & p \\ p & q & q & p \end{pmatrix}.$$

Determinar el rango de a *en función de* p *y* q*. ¿Depende la respuesta de si* $\Bbbk$ *tiene característica* 2*?*

Solución. Tenemos restando a la columna 2 la columna 1 y a la columna 4 la columna 3 que

$$\begin{vmatrix} p & p & q & q \\ q & q & p & p \\ q & p & q & p \\ p & q & q & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ q & p-q & q & p-q \\ p & q-p & q & p-q \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ q & q & p-q & p-q \\ p & q & q-p & p-q \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} p & q \\ q & p \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p-q & p-q \\ q-p & p-q \end{vmatrix} = -\left(p^2-q^2\right)2(p-q)^2 = -2(p+q)(p-q)^3.$$

1. Caso $\Bbbk = \mathbb{R}$. Que sea $\det(a) = 0$ equivale a $p = \pm q$. Para $p \neq \pm q$ se tiene pues $\det(a) \neq 0$ y $\operatorname{rg}(a) = 4$. Si $p = q$ hay filas iguales en a y $\operatorname{rg}(a) = 1$. Solo queda analizar el caso $p = -q$ en el que a se transforma así:

$$\begin{pmatrix} p & p & -p & -p \\ -p & -p & p & p \\ -p & p & -p & p \\ p & -p & -p & p \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} p & p & -p & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p & -2p & 0 \\ 0 & -2p & 0 & 2p \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{2} \begin{pmatrix} p & p & -p & -p \\ 0 & -2p & 0 & 2p \\ 0 & 2p & -2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} p & p & -p & -p \\ 0 & -2p & 0 & 2p \\ 0 & 0 & -2p & 2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En $\xrightarrow{1}$ se suma o resta la primera fila a las otras; en $\xrightarrow{2}$ se permutan las filas 2 y 4, y en $\xrightarrow{3}$ se suma a la tercera fila la segunda. Como $p = -q$ y no puede ser $p = 0$ porque sería $p = q = 0$ descartado por hipótesis, vemos que si $\Bbbk = \mathbb{R}$, la matriz a con $p = -q$ tiene rango 3. *La respuesta es rango* 4 *si* $p \neq \pm q$*; rango* 1 *si* $p = q$*, y rango* 3 *si* $p = -q$*.*

2. Si la característica de $\Bbbk$ es 2 ya dijimos que $\det(a) = 0$ y no puede haber rango 4 en ningún caso.

[1] El profesor no lo es y se dió cuenta a la segunda al querer poner la respuesta del examen para los estudiantes lo más bonita posible.

Con operaciones columna

$$a=\begin{pmatrix} p & p & q & q \\ q & q & p & p \\ q & p & q & p \\ p & q & q & p \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} p & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ q & p-q & q & p-q \\ p & q-p & q & p-q \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ q & q & p-q & p-q \\ p & q & q-p & p-q \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ q & q & p-q & 0 \\ p & q & q-p & 0 \end{pmatrix}=b$$

restando a la columna 2 la columna 1 y a la 4 la 3; permutando columnas 2 y 4; y restando a la columna 4 la 3. Sabemos que $\operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(b)$.

Si en b es $p=0$, es $q\neq 0$ y nos queda permutando columnas

$$b=\begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 \\ q & q & -q & 0 \\ 0 & q & -p & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ q & q & -q & 0 \\ q & 0 & -p & 0 \end{pmatrix}=c, \qquad \operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(b)=\operatorname{rg}(c)=3.$$

Si es $p\neq 0$ y $r=q/p$ se resta en b a la columna 2 la columna 1 por r y

$$b=\begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ q & q & p-q & 0 \\ p & q & q-p & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & pr & 0 & 0 \\ pr & p & 0 & 0 \\ pr & pr & p-pr & 0 \\ p & pr & pr-p & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ pr & \left(1-r^2\right)p & 0 & 0 \\ pr & pr\left(1-r\right) & p\left(1-r\right) & 0 \\ p & 0 & p\left(r-1\right) & 0 \end{pmatrix}=c.$$

Si $r\neq 1$, luego $p\neq q$, entonces p, $\left(1-r^2\right)p$ y $p\left(1-r\right)$ son no nulos y $\operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(b)=\operatorname{rg}(c)=3$. Si $r=1$, luego $p=q$, sale $\operatorname{rg}(a)=\operatorname{rg}(b)=\operatorname{rg}(c)=1$, cosa que se sabe desde el principio con solo sustituir. *El resumen para característica* 2 *es que el rango es* 3 excepto en el caso $p=q$ que tiene rango 1.

La respuesta depende de la característica porque en característica 2 nunca puede haber rango 4.

Como en el problema anterior, los muy listos[2] se percatarán que la suma de las columnas de a es $2\left(p+q\right)\left(1,1,1,1\right)^\top=0$. Quien lo vea desde el principio ya sabe que $\det(a)=0$ en característica 2 y $\operatorname{rg}(a)<4$. ♠

Problema 3 *En* $\mathbb{E}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ *fijamos una matriz* F *(que ahora daremos) y definimos* $L:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, $L(a)=aF-Fa$. *En concreto,*

$$F=\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ siendo } h\neq 0.$$

Se piden bases de $\ker(L)$ *e* $\operatorname{im}(L)$, *los valores de* $\operatorname{tr}(L)$ *y* $\det(L)$ *y estudiar si para* $\mathbb{S}$ *el subespacio de* $\mathbb{E}$ *formado por las matrices simétricas se cumple* $\mathbb{E}=\mathbb{S}\oplus\operatorname{im}(L)$, $\mathbb{E}=\mathbb{S}+\operatorname{im}(L)$ *o ninguna de las dos cosas.*

Solución. Partimos de la fórmula

$$L(a)=aF-Fa=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -hr & hp-hs \\ 0 & hr \end{pmatrix} \text{ para } a=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

En la base estándar $\mathcal{E}$ con

$$\mathbf{e}_1^1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2^1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_1^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$L\left(\mathbf{e}_1^1\right)=\begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L\left(\mathbf{e}_2^1\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L\left(\mathbf{e}_1^2\right)=\begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},\ L\left(\mathbf{e}_2^2\right)=\begin{pmatrix} 0 & -h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2] El profesor no lo es pero alguna alumna (por lo menos) sí. En realidad hay un problema en el texto donde una matriz aparentemente invertible en $\mathbb{R}$ no lo es en $\mathbb{Z}_2$ porque la suma de sus filas tiene el factor $2=0$. Debería tener mejor memoria.

lo que da

$$L\left(\mathbf{e}_1^1\right)=h\mathbf{e}_2^1,\ L\left(\mathbf{e}_1^2\right)=0,\ L\left(\mathbf{e}_1^2\right)=-h\mathbf{e}_1^1+h\mathbf{e}_2^2,\ L\left(\mathbf{e}_2^2\right)=-h\mathbf{e}_2^1,\quad \operatorname{mat}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -h & 0\\ h & 0 & 0 & -h\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & h & 0\end{pmatrix}.$$

Es inmediato que, como el espacio de columnas de $M=\operatorname{mat}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L)$ está generado por las columnas 1 y 3, que son independientes, la imagen de L tiene base

$$\left(L\left(\mathbf{e}_1^1\right),L\left(\mathbf{e}_1^2\right)\right)=\left(h\mathbf{e}_2^1,-h\mathbf{e}_1^1+h\mathbf{e}_2^2\right)=\left(\begin{pmatrix} 0 & h\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\right).$$

Por otra parte, las ecuaciones de $\ker(L)$ son $r=0$ y $p=s$, luego

$$a=\begin{pmatrix} p & q\\ r & s\end{pmatrix}\in\ker(L)\text{ equivale a } a=\begin{pmatrix} p & q\\ 0 & p\end{pmatrix}$$

y tenemos a $\left(I,\mathbf{e}_2^1\right)$ como base más sencilla de $\ker(L)$. A la vista de $\operatorname{mat}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(L)$ queda claro que $\operatorname{tr}(L)$ y $\det(L)$ son nulos.

Para la última pregunta partimos de las identificaciones por isomorfismo con $\mathcal{E}$,

$$\mathbb{S}\cong\operatorname{lg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right),\quad \operatorname{im}(L)\cong\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Llamamos $(v_1,\ldots,v_5)$ a estos 5 vectores columna, y $\mathbb{S}+\operatorname{im}(L)$ se corresponderá con el espacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(v_1,\ldots,v_5)$. La matriz v yuxtaponiendo $(v_1,\ldots,v_5)$ es

$$v=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ y permutando sus columnas pasa a } w=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Como (w_1,w_2,w_3-w_2,w_4) es la matriz unidad, el rango de v, igual que el de w, es 4, y por tanto, $\mathbb{S}+\operatorname{im}(L)=\mathbb{E}$. Al ser $\dim(\mathbb{S})=3$ y $\dim(\operatorname{im}(L))=2$, la fórmula de Grassmann da que

$$\dim(\mathbb{S}\cap\operatorname{im}(L))=\dim(\mathbb{S})+\dim(\operatorname{im}(L))-\dim(\mathbb{S}+\operatorname{im}(L))=3+2-4=1$$

y $\mathbb{S}\cap\operatorname{im}(L)\neq 0$ no pudiendo haber suma directa. Es en todo caso más fácil sacar a ojo que

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix}\in\mathbb{S}\cap\operatorname{im}(L)$$

y no puede haber suma directa. ♠

Problema 4 *Sea $(u_1,\ldots,u_n)$ una base de $\mathbb{E}$ y v un vector tal que al escribir $v=\sum_{i=1}^n\lambda^i u_i$ se tiene que un coeficiente concreto λ^j es no nulo. Estudiar si $(u_1,\ldots,u_{j-1},v,u_{j+1},\ldots,u_n)$, sustituyendo u_j por v, es o no es base de $\mathbb{E}$.*

Solución. *Siempre es base de* $\mathbb{E}$. Dado que $(u_1,\ldots,u_{j-1},v,u_{j+1},\ldots,u_n)$ es de longitud n, puede probarse que es base bien con la independencia o bien mostrando que es sucesión generadora.

1. *Independencia.* Si $\sum_{i\neq j}\mu^i u_i+\theta v=0$, sustituyendo,

$$0=\sum_{i\neq j}\mu^i u_i+\theta v=\sum_{i\neq j}\mu^i u_i+\theta\left(\sum_{i\neq j}\lambda^i u_i+\lambda^j u_j\right)=\sum_{i\neq j}\left(\mu^i+\theta\lambda^i\right)u_i+\theta\lambda^j u_j.$$

   Como $(u_1,\ldots,u_n)$ es base todos los coeficientes son nulos, en particular $\theta\lambda^j=0$ que da, por ser $\lambda^j\neq 0$, que $\theta=0$. Entonces $\sum_{i\neq j}\mu^i u_i+\theta v=0$ se transforma en $\sum_{i\neq j}\mu^i u_i=0$ y, usando otra vez que $(u_1,\ldots,u_n)$ es base, tambien los μ son nulos. Esto prueba la independencia.

2. *Sucesión generadora.* Se toma $x = \sum_{i=1}^{n} x^i u_i \in \mathbb{E}$. Entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i$ nos da

$$u_j = \frac{1}{\lambda_j}\left(v - \sum_{i \neq j} \lambda^i u_i\right), \quad x = \sum_{i \neq j} x^i u_i + x^j \frac{1}{\lambda_j}\left(v - \sum_{i \neq j} \lambda^i u_i\right)$$

que es combinación lineal de $(u_1, \ldots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \ldots, u_n)$, luego esta sucesión genera $\mathbb{E}$.

Otra posibilidad es utilizar que si $(u_1, \ldots, u_n) = \mathcal{U}$ es una base y $(v_1, \ldots, v_m) = V$ es una sucesión de vectores y $v_j = \sum_{i=1}^{m} a_j^i u_j$ entonces $\dim \operatorname{lg}(v_1, \ldots, v_m) = \operatorname{rg}(a)$.

En nuestro caso, $V = (u_1, \ldots, u_{j-1}, v, u_{j+1}, \ldots, u_n)$ y

$$a = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \lambda^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda^{j-1} & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^j & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \lambda^{j+1} & 1 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^n & & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(a) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda^j & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^{j+1} & 1 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda^n & & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda^j \neq 0$$

calculando por cajas. Entonces, $\dim \operatorname{lg}(V) = n$ y es forzosamente $\mathbb{E}$, que implica que$V$ es base. ♠