Ejercicio 4.4.- Probar que

$$\langle c_1, e_1, s\rangle \, D^k \, \langle c', e', s'\rangle \Rightarrow \langle c_1 : c_2, e_1 : e_2, s\rangle \, D^k \, \langle c' : c_2, e' : e_2, s'\rangle.$$

Por inducción sobre la longitud de la secuencia de cómputo.

$k=0$ | Si $\langle c_1, e_1, s\rangle D^0 \langle c', e', s\rangle \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c' \\ e_1 = e' \\ s = s' \end{cases}$ y el resultado es trivial.

$k \geq 1$ | Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$ con $k \geq 1$ y veamos que es cierto para k.

$$\Rightarrow \langle c_1, e_1, s\rangle D^k \langle c', e', s'\rangle \Rightarrow \langle c_1, e_1, s\rangle D \langle \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{s}\rangle D^{k-1} \langle c', e', s'\rangle.$$

Como $\langle \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{s}\rangle D^{k-1} \langle c', e', s'\rangle$, por HI se tiene que

$$\langle \tilde{c} : c_2, \tilde{e} : e_2, \tilde{s}\rangle D^{k-1} \langle c' : c_2, e' : e_2, s'\rangle.$$

Basta ver que

$\langle c_1 : c_2, e_1 : e_2, s\rangle D \langle \tilde{c} : c_2, \tilde{e} : e_2, \tilde{s}\rangle$, pero sabemos que

$\langle c_1, e_1, s\rangle D \langle \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{s}\rangle$.

Ahora basta hacer casos sobre la cabeza de c_1.

Si $c_1 = \varepsilon$ | Absurdo.

Si $c_1 = \bar{c}_1 : \bar{\bar{c}}_1$ con $\bar{c}_1 \in Code$

Si $\bar{c}_1 = PUSH\text{-}n$ /, como $\langle PUSH\text{-}n : \bar{\bar{c}}_1, e_1, s \rangle$

$\triangleright \leftarrow$ Regla (Única aplicable).

$\langle \bar{\bar{c}}_1, \mathcal{N}[\![n]\!] : e_1, s \rangle$

$\|$

$\langle \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{s} \rangle.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{c} = \bar{\bar{c}}_1 \\ \tilde{e} = \mathcal{N}[\![n]\!] : e_1 \\ s = \tilde{s}. \end{cases} (*)$$

$$\Rightarrow \langle PUSH\text{-}n : \bar{\bar{c}}_1 : c_2, e_1 : e_2, s \rangle \overset{\text{Regla}}{\triangleright} \langle \bar{\bar{c}}_1 : c_2, \mathcal{N}[\![n]\!] : e_1 : e_2, s \rangle$$

$\| \leftarrow (*)$

$\langle \tilde{c} : c_2, \tilde{e} : e_2, \tilde{s} \rangle.$

Como queríamos ver.

Si $\bar{c}_1 = \ldots$ /

$\vdots$

Así con todos.

Alternativamente se puede demostrar por casos sobre las reglas.

$$\langle c_1, e_1, s \rangle \triangleright \langle \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{s} \rangle \overset{(!)}{\Rightarrow} \langle c_1 : c_2, e_1 : e_2, s \rangle \triangleright \langle \tilde{c} : c_2, \tilde{e} : e_2, \tilde{s} \rangle.$$

Si la regla es PUSH

$\Rightarrow c_1 = PUSH\text{-}n : \bar{c}$

$\tilde{c} = \bar{c}$

$\tilde{e} = \mathcal{N}[\![n]\!] : e_1$

$s = \tilde{s}$

Aplicando PUSH

$\langle PUSH\text{-}n : \bar{c} : c_2, e_1 : e_2, s \rangle \triangleright$

$\triangleright \langle \bar{c} : c_2, \mathcal{N}[\![n]\!] : e_1 : e_2, s \rangle$

$\|$

$\langle \tilde{c} : c_2, \tilde{e} : e_2, \tilde{s} \rangle$ ✓.