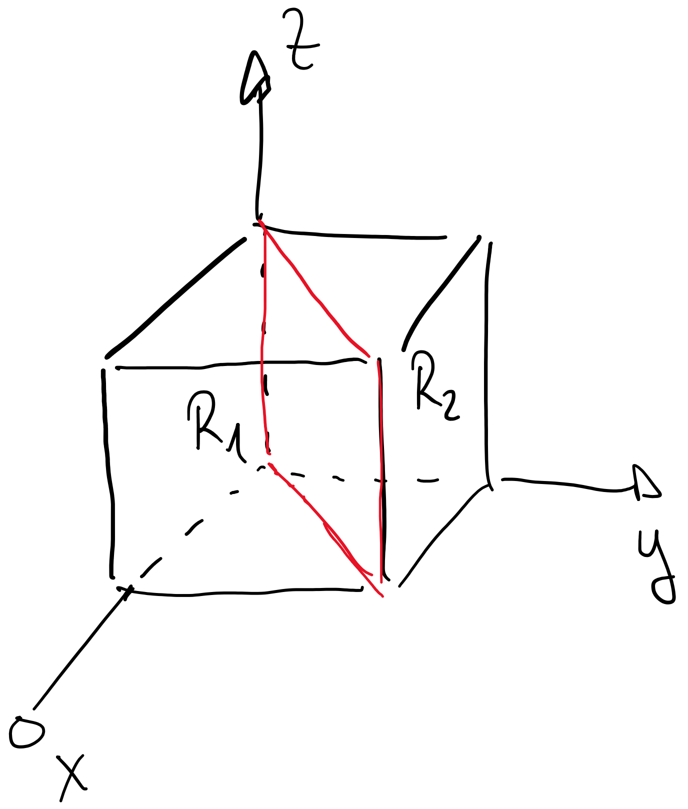
Ejercicio 4

miércoles, 25 de marzo de 2020 18:42

Los puntos de discontinuidad de f están en el plano $x=y$, que tiene medida cero. $\underset{\text{Lebesgue}}{\Rightarrow}$ f integrable



$$\int_I f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$$

$$\underset{\substack{\text{Corolario} \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^x (xz)\, dy\, dx\, dz + \int_0^1 \int_0^1 \int_x^1 (xy)\, dy\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 z\, dx\, dz + \int_0^1 \int_0^1 x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx\, dz$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

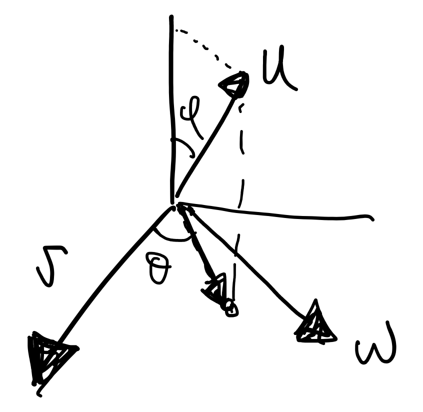
Ejercicio 6

miércoles, 8 de abril de 2020 18:07

Haciendo una rotación (que es un cambio de variable con jacobiano 1 que lleva S a S) podemos suponer sin pérdida de generalidad que $v=(1,0,0)$ y que $w=(\alpha,\beta,0)$ con $\alpha^2+\beta^2=1$, $\beta>0$

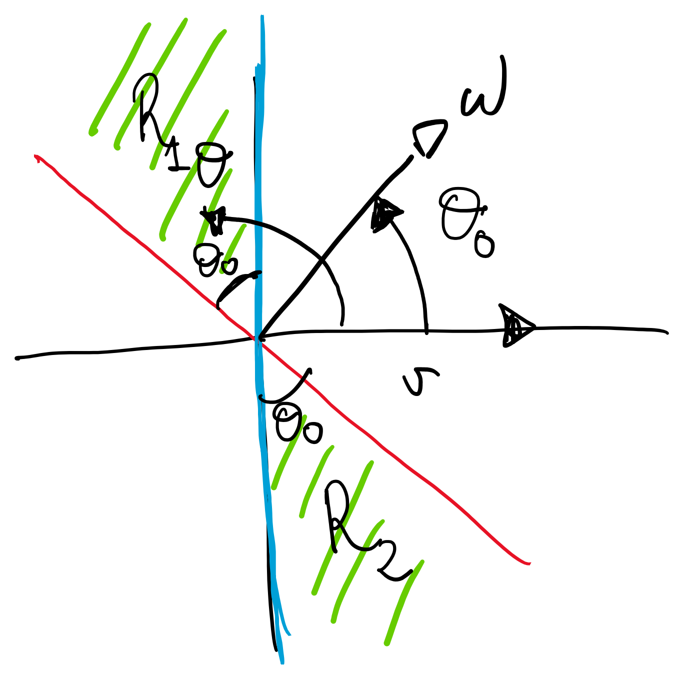
Consideramos coord. esféricas.

El signo$(u|v)$ y el signo$(u|w)$ dependen únicamente de θ



de la siguiente manera

plano XY



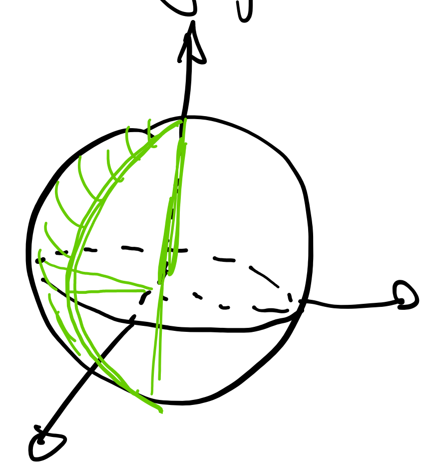
si θ está en la región marcada $\overset{R_1\cup R_2}{\overset{\shortparallel}{R}}$, entonces

$$\text{signo}(u|v)\cdot\text{signo}(u|w) < 0$$

si no,

$$\text{signo}(u|v)\cdot\text{signo}(u|w) > 0.$$

Cada región R_i define (al variar r y φ de forma arbitraria) un "gajo" de la esfera,



dado por $\{(x,y,z) \mid$ en coord. esféricas $\theta\in R_i\} = G_i$

Por tanto, si $G=G_1\cup G_2$, la integral pedida I será

$$I = \text{vol}(\text{Esfera}\setminus G) - \text{vol}(G) =$$

$$\text{vol}(\text{Esfera}) - 2\,\text{vol}(G) \quad \text{y}$$

$$\text{vol}(G) = \frac{\theta_0}{\pi}\,\text{vol}(\text{Esfera}).$$

Con lo que

$$I = \left(1-\frac{2\theta_0}{\pi}\right)\text{vol}(\text{Esfera})$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{2\theta_0}{\pi}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)$$

$$= \frac{8}{3}\arcsen(v|w)$$

$$\theta_0 = \arccos(v|w) \in [0,\pi]$$