Ahora,

$$E[\ln X] = \int_0^1 \ln x \cdot f(x|\beta)\,dx = \int_0^1 \ln x \cdot \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1} dx =$$

$$= \ln x \cdot x^{1/\beta}\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{1/\beta}\frac{1}{x}\,dx =$$

$\ln x = u \quad \frac{1}{x}dx = du$

$\frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1} dx = dv$

$x^{1/\beta} = v$

$$= x^{1/\beta}\ln x\Big]_0^1 - \beta x^{1/\beta}\Big]_0^1 =$$

$$= 0 - \lim_{x\to 0} x^{1/\beta}\ln x - \beta + 0 = -\beta$$

Por tanto $E\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i\right] = n \cdot E[\ln X] = -n\beta$

Si llamamos T a $T(X_1 \ldots X_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i$ entonces

$E[T] = -\frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i\right] = \beta$, es decir, T es insesgado para β.

Además, T es función de S (un estadístico suficiente y completo).

Podemos concluir entonces que $T(X_1 \ldots X_n) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i$ es el ECUMV.

Veamos cuál es la distribución de T. Primero calculamos la distribución de $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\ln\left(\frac{1}{X}\right) \le y\} = P\{\frac{1}{X} \le e^y\} = P\{e^{-y} \le X\} =$$

$$= 1 - P\{X \le e^{-y}\} = 1 - F_X(e^{-y})$$

$$f_Y(y) = + f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y} = \frac{1}{\beta}\cdot (e^{-y})^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot e^{-y} \cdot I_{(0,1)}(e^{-y}) =$$

$$= \frac{1}{\beta} e^{-\frac{y}{\beta}} \cdot I_{(0,\infty)}(y)$$ ya que $0 < e^{-y} < 1 \Leftrightarrow -y < 0 \Leftrightarrow y > 0$