Examen CI

Pregunta 1:-

$0 < \alpha < 1$ $\quad A_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1,\ z^2 < \alpha(x^2+y^2)\}$

En primer lugar, A_α tiene el volumen bien definido porque la frontera de A_α tiene medida cero. Esto se puede comprobar ya que dicha frontera se puede poner como union de las gráficas de funciones integrables. Para el cálculo de dicho volumen buscamos realizar un cambio a coordenadas esféricas.

La condición $x^2+y^2+z^2 < 1$ se transforma en $r^2 < 1$ por lo que $r \in (0,1)$ y la condición $z^2 < \alpha(x^2+y^2)$ equivale a

$$r^2\cos^2\varphi < \alpha\left(r^2 \operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta\right)$$
$$\| $$
$$\alpha r^2 \operatorname{sen}^2\varphi\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)$$
$$\|$$
$$\alpha r^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$r^2\cos^2\varphi < \alpha r^2 \operatorname{sen}^2\varphi \iff \cos^2\varphi < \alpha\operatorname{sen}^2\varphi \iff$$

$$\iff \frac{1}{\alpha} < \operatorname{tg}^2\varphi \iff \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < |\operatorname{tg}\varphi| \iff$$

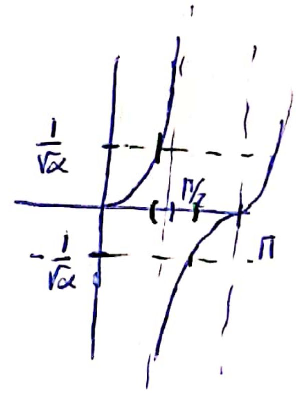
Juan Carlos Llamas Núñez $\quad$ DNI - 11867802-D

$$\Leftrightarrow \quad tg\,\varphi \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \infty\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi \in \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right), \operatorname{artg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)$$

con $\varphi \in (0, \pi)$



Por tanto el conjunto $B = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \in (0,1), \theta \in (0, 2\pi), \varphi \in (\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}), \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}))\}$

es un conjunto abierto, con volumen bien definido (es un rectángulo en $\mathbb{R}^3$) y verifica que

$$g: B \longrightarrow \tilde{A}$$
$$(r, \theta, \varphi) \longrightarrow g(r, \theta, \varphi) = (r\,sen\varphi \cos\theta, r\,sen\varphi\, sen\theta, r \cos\theta)$$

es de clase C^1 y biyectiva siendo $\tilde{A}$ el conjunto

$$\tilde{A} = A \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0\}$$

Como la función $\chi_{\tilde{A}}$ es integrable entonces

$$\int_A \chi_A \underset{\uparrow}{=} \int_{\tilde{A}} \chi_{\tilde{A}} \underset{\uparrow}{=} \int_B (\chi_{\tilde{A}} \circ g)\,|J_g| = \int_B r^2 sen\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Quitamos un conjunto de medida cero — Teorema de cambio de variable

Juan Carlos Llamas Núñez DNI-11867802-D

Ahora simplemente basta aplicar Fubini porque la función es continua y el conjunto tiene volumen bien definido. Por tanto,

$$\int_B r^2 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)} r^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

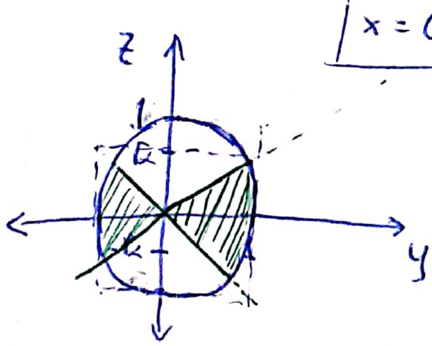
$$= \left(\int_0^1 r^2 \, dr\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \cdot \left(\int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\varphi \Big]_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)} \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right) - \cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)\right)$$

El conjunto en $\mathbb{R}^3$ es el resultado de hacer rotar sobre en eje z el siguiente conjunto:

$\boxed{x = 0}$



Por simetría, es dos veces la integral

$$\int_{B'} r^2 \operatorname{sen}\varphi$$

con $B' = \{(r,\theta,\varphi),\ r \in (0,1),\ \theta \in (0,2\pi),\ \varphi \in (\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}), \frac{\pi}{2})\}$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI - 11867802-D

Realizando de nuevo la integral obtenemos que

$$\int_{A_\alpha} \chi_A = 2\left(\int_0^1 r^2 dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} dt\right)\cdot\left(\int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left[-\cos\varphi\right]_{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}^{\pi/2}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)}$$

Juan Carlos Llamas Núñez DNI - 11867802-D