

Por un lado

$$\text{Var}(T) = E[T^2] - E[T]^2;$$

$$E[T^2] = 1^2 \cdot P[X=0] + 0^2 \cdot P[X \geq 1] = P[X=0] = e^{-\lambda} = E[T]$$

$$\Rightarrow \text{Var}(T) = E[T^2] - E[T]^2 = e^{-\lambda} - (e^{-\lambda})^2 = e^{-\lambda}(1 - e^{-\lambda})$$

Por otro lado, para calcular la cota necesitamos primero conocer la información de Fisher.

$$\begin{aligned} \text{Como } n=1 \quad I_n(\lambda) &= I_1(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln(f(X|\lambda))\right] = \\ &= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (-\lambda + X \ln \lambda - \ln X!)\right] = -E\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (-1 + \frac{X}{\lambda})\right] = \\ &= -E\left[-\frac{X}{\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda^2} E[X] = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{La cota de FCR será } \frac{(Z'(\lambda))^2}{I_n(\lambda)} = \frac{(-e^{-\lambda})^2}{1/\lambda} = \lambda e^{-2\lambda}$$

Como la varianza del estimador T no alcanza la cota de FCR, el estimador T no es eficiente. (Se puede ver que $\text{Var}(T) > \lambda e^{-2\lambda} \forall \lambda > 0$).