# Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

Hoja 3.4. - Ejercicios sobre relaciones de orden — Curso 2018/2019

---

1. Estudia si cada una de las relaciones siguientes es o no un orden sobre el conjunto indicado:

   *a*) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x \leq x' \wedge y \geq y'$.

   *b*) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x \leq x' \wedge y \neq y'$.

   *c*) $R \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$, definida por $(x, y)\ R\ (x', y') \Leftrightarrow_{def} x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')$.

   *d*) $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, definida por $X\ R\ Y \Leftrightarrow_{def} (X \text{ es finito} \wedge X \subseteq Y) \vee (X \text{ es infinito} \wedge X \supseteq Y)$.

2. Dibuja diagramas de Hasse que representen los siguientes conjuntos ordenados:

   *a*) $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 25\}$ ordenado por la relación de divisibilidad.

   *b*) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbf{5}) \mid X \text{ tiene un número par de elementos}\}$, ordenado por la relación de inclusión.

   *c*) $(\mathbf{2} - \to \mathbf{2})$, ordenado por la relación de inclusión.

   *Nota*: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n}$ representa el conjunto formado por los números naturales menores que $n$.

3. Estudia los elementos extremos y extremales de las siguientes familias de conjuntos, ordenadas por la relación de inclusión:

   *a*) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbf{3}) \mid X \neq \emptyset\}$

   *b*) $\mathcal{F} =_{def} \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \neq \emptyset \ \wedge \ X \text{ finito}\}$

   *c*) $\mathcal{CF} =_{def} \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \neq \mathbb{N} \ \wedge \ \mathbb{N} \setminus X \text{ finito}\}$

   *d*) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \text{ tiene más de 2 elementos}\}$

4. Considera el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 12\}$. Sea $S \subseteq (B \times B)$ definida por $a\,S\,b$ sii $(a \mid b) \vee (a \text{ es primo} \wedge a < b)$.

   *a*) Demuestra que $S$ es una relación de orden parcial.

   *b*) Dibuja su diagrama de Hasse.

   *c*) ¿Tiene elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

5. Sea $A = \{0, 1, 2\} \times \{2, 5, 8\}$ y $R \subseteq (A \times A)$ definida por $(a, b)R(c, d)$ sii $(a + b) \mid (c + d)$.

   *a*) Demuestra que $S$ es una relación de orden parcial.

   *b*) Dibuja su diagrama de Hasse.

   *c*) ¿Tiene elementos minimales y maximales? ¿Máximo y mínimo?

6. Define un orden lineal $\sqsubseteq$ sobre $\mathbb{Z}$ de tal manera que $(\mathbb{Z}, \sqsubseteq)$ y $(\mathbb{Z}, \leq)$ no sean isomorfos.

7. Considera la relación binaria $R$ sobre $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ definida por la condición

   $$f\ R\ g \Leftrightarrow_{def} \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > g(n)\} \text{ es finito}$$

   Estudia si $R$ es una relación de orden. En caso afirmativo, demuéstralo, y en caso contrario, encuentra un contraejemplo.

8. Sea $A$ un conjunto cualquiera y $f : A \to \mathbb{R}$, también cualquiera. Demuestra que la relación inducida $R \subseteq A \times A$ definida por $x \; R \; y \Leftrightarrow_{def} f(x) \leq f(y)$, es un orden si y sólo si $f$ es inyectiva.

9. Demuestra que el orden de inclusión en $\mathcal{P}(A)$ solo es lineal cuando $A$ es vacío o unitario.

10. En $\mathbb{N}$ se definen dos relaciones $S$ y $T$ del siguiente modo:

$$x \; S \; y \Leftrightarrow_{def} x < 2 * y \qquad x \; T \; y \Leftrightarrow_{def} 2 * x < y$$

   *a*) Demuestra que $S$ no es un orden estricto. ¿Qué propiedades fallan?
   *b*) Demuestra que $T$ es un orden estricto.
   *c*) Demuestra que $T$ no es un orden total.
   *d*) Dado $A =_{def} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden (ordinario) $\sqsubseteq_T$ inducido por la relación $T$, restringida a los elementos de $A$ ($\sqsubseteq_T = (T \cup id_{\mathbb{N}}) \upharpoonright A$).
   *e*) Determina las parejas de elementos diferentes del conjunto $A$ que poseen supremo con respecto a la relación $\sqsubseteq_T$. Haz lo mismo para los ínfimos.

11. Un orden lineal $\leq$ sobre un conjunto $A$ se llama *denso* si el orden estricto $<$ asociado a $\leq$ satisface la siguiente condición: para todo $x, y \in A$ tales que $x < y$, existe $z \in A$ tal que $x < z < y$.

   *a*) Demuestra que si dos conjuntos ordenados linealmente son isomorfos y uno de ellos es denso, el otro también lo es.
   *b*) Demuestra que $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ no son isomorfos.