Sabemos que si tenemos la descomposición

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Ln(f(x_1 \cdots x_n|\theta)) = \frac{I_n(\theta)}{Z'(\theta)}(T - Z(\theta)) \quad \text{entonces}$$

T es eficiente para $Z(\theta)$.

Por tanto $T = \dfrac{\sum X_i^2}{2n}$ es eficiente para $Z(\theta) = \theta^2$.

Otra forma de probar que es eficiente sería ver si la varianza de T alcanza la cota de FCR. Veámoslo.

Para ello necesitamos calcular la información de Fisher:

$$I_n(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} Ln(f(X|\theta))\right] = -n\,E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(Ln\,x - 2Ln\,\theta - \frac{X^2}{2\theta^2}\right)\right] =$$

$$= -n\,E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{2}{\theta} + \frac{X^2}{\theta^3}\right)\right] = -n\,E\left[\frac{2}{\theta^2} - \frac{3X^2}{\theta^4}\right] = n\left(\frac{3}{\theta^4}E[X^2] - \frac{2}{\theta^2}\right)$$

$$= n\left(\frac{3}{\theta^4}2\theta^4 - \frac{2}{\theta^2}\right) = \frac{4n}{\theta^2}$$

. Queda por demostrar y después lo haremos que $E[X^2] = 2\theta^4$.

$$Z(\theta) = \theta^2 \implies Z'(\theta) = 2\theta$$

Entonces la cota de FCR es: $\dfrac{(Z'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \dfrac{(2\theta)^2}{\frac{4n}{\theta^2}} = \dfrac{4\theta^2}{4n}\cdot\theta^2 = \dfrac{\theta^4}{n}$

Antes de calcular la varianza de T hacemos notar que los valores de $I_n(\theta)$ y $Z'(\theta)$ concuerdan con la descomposición que dimos anteriormente y que era $\dfrac{\partial}{\partial\theta}Ln(f(x_1 \cdots x_n|\theta)) = \dfrac{2n}{\theta^3}(T - Z(\theta))$.

Así, $\dfrac{I_n(\theta)}{Z'(T)} = \dfrac{4n/\theta^2}{2\theta} = \dfrac{2n}{\theta^3}$.