Convergencia bajo el signo integral

Apuntes D. Azagra. (demostraciones)

Sabemos de 1º que los límites puntuales de funciones integrables no tienen por qué ser integrables

Ej: $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ enumeración de los racionales en $[0,1]$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$

f_n tiene n puntos de discontinuidad $\Rightarrow$ integrable

pero $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$ $\quad \forall x \in [0,1]$

Teorema: $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado

$(f_k)_k$ integrables en A

$f_k \xrightarrow[k]{} f$ uniformemente en A

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^n \text{ acotado} \\ (f_k)_k \text{ integrables en } A \\ f_k \xrightarrow[k]{} f \text{ uniformemente en } A \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ int. en } A \\ \int_A f_k \xrightarrow[k]{} \int_A f \end{array}$$

def

$$\|f_k - f\|_A \xrightarrow[k]{} 0$$

$$\|f_k - f\|_A = \sup_{x \in A} |f_k(x) - f(x)|$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{n^2+1+y^5-x^4}{n^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$

donde $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\}$

$$f_n(x,y) = \frac{n^2+1+y^5-x^4}{n^2} e^{-(x^2+y^2)} \xrightarrow[n]{} e^{-(x^2+y^2)} = f(x,y) \quad \forall (x,y).$$

Veamos que la convergencia es uniforme en A.

$$|f_n(x,y)-f(x,y)| = \left|\frac{n^2+1+y^5-x^4}{n^2}-1\right| e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= \left|\frac{1+y^5-x^4}{n^2}\right| e^{-(x^2+y^2)} \le \frac{1+|y|^5+|x|^4}{n^2} e^{-(x^2+y^2)} \le \boxed{\frac{3}{n^2}} \quad \forall (x,y)\in A$$

no depende de (x,y)

$$|f_n(x,y) - f(x,y)| \leq \frac{3}{n^2} \quad \forall (x,y) \in A$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{(x,y)\in A} |f_n(x,y) - f(x,y)| \leq \frac{3}{n^2} \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0 .$$

Como hay convergencia uniforme, por el teorema:

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f = \int_A e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \underset{\text{polares + Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r e^{-r^2}\, d\theta\, dr =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Derivación bajo el signo integral

Apuntes D. Azagra (demostraciones)

Teorema:

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^n \text{ con volumen} \\ B \subset \mathbb{R}^m \text{ abierto con volumen} \\ \bar{A} \times \bar{B} \subset \mathcal{U} \text{ abierto de } \mathbb{R}^{n+m} \\ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \text{ continua} \\ \mathcal{U} \ni (x,y) \longmapsto \nabla f_x(y) \in \mathbb{R}^m \text{ continua.} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$F(y) = \int_A f(x,y)\,dx$ es diferenciable en B, y

$$\nabla F(y) = \underbrace{\int_A \nabla f_x(y)\,dx}_{\text{integral coordenada a coordenada}}, \quad \forall y \in B$$

$f_x(y) = f(x,y)$

__Ejemplo:__

$$F(x,y) = \int_A e^{xy(u^2+v^2)}\, du\, dv \quad , \quad A = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$$

Calcular $\nabla F(x,y)$, $\boxed{x,y>0}$

Hipótesis se verifican trivialmente.

$$\nabla F(x,y) = \int_A \underbrace{\nabla f_{(u,v)}(x,y)}_{\displaystyle \left(y(u^2+v^2)e^{xy(u^2+v^2)} \, , \, x(u^2+v^2)e^{xy(u^2+v^2)} \right)} du\, dv \quad , \quad \text{con } f_{(u,v)}(x,y) = e^{xy(u^2+v^2)}$$

La integral se hace coordenada a coordenada:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_A x(u^2+v^2)e^{xy(u^2+v^2)}\,du\,dv \underset{\text{polares}}{=} x\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3 e^{xyr^2}\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi x\int_0^1 r^3 e^{xyr^2}\,dr \underset{\text{partes}}{=} 2\pi x\left(\left[\frac{r^2}{2xy}e^{xyr^2}\right]_{r=0}^{r=1} - \int_0^1 \frac{r}{xy}e^{xyr^2}\,dr\right) =$$

partes, $r^2 = u$, $du = 2r\,dr$

$r e^{xyr^2}dr = dv$, $v = \frac{1}{2xy}e^{xyr^2}$

$$= \frac{\pi}{y}e^{xy} - \frac{2\pi}{y}\left[\frac{1}{2xy}e^{xyr^2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{y}e^{xy} - \frac{\pi}{xy^2}\left(e^{xy}-1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\pi}{x}e^{xy} - \frac{\pi}{x^2y}\left(e^{xy}-1\right).$$

Por tanto

igual

$(x \leftrightarrow y)$

$$DF(x,y) = \left(\frac{\pi}{x}e^{xy} - \frac{\pi}{x^2y}\left(e^{xy}-1\right), \frac{\pi}{y}e^{xy} - \frac{\pi}{xy^2}\left(e^{xy}-1\right)\right)$$