$$= 1 - \inf_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} F_{\chi^2_n}\left(\frac{c}{\sigma^2}\right)$$

Ahora, como $F_{\chi^2_n}$ es una función creciente el ínfimo se alcanza cuando $\frac{c}{\sigma^2}$ es mínimo en $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$, es decir, cuando el denominador es máximo $(\sigma^2 = \sigma_0^2)$.

Por tanto

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} E_{\sigma^2}[\phi(x_1 \dots x_n)] = 1 - F_{\chi^2_n}\left(\frac{c}{\sigma_0^2}\right) \quad \text{luego}$$

$$\frac{c}{\sigma_0^2} = \chi^2_{n:\alpha} \quad \text{con} \quad F_{\chi^2_n}(\chi^2_{n:\alpha}) = 1 - \alpha$$

El test de hipótesis quedarra como

$$\boxed{\phi(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \chi^2_{n:\alpha}\sigma_0^2 \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \chi^2_{n:\alpha}\sigma_0^2 \end{cases}}$$

Ejercicio 4.- Dada una observación $X \sim f_\theta(x) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{(0,1)}(x)$ donde $\theta \in \Theta = [-1, 1]$, construir el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \theta = 0$ frente a $H_1 : \theta \neq 0$ de tamaño α

Primero hay que calcular $\lambda(x_1 \dots x_n)$ que será

$$\lambda(x_1 \dots x_n) = \frac{\sup_{\theta = 0} \{f(x|\theta)\}}{\sup_{\theta \in [-1,1]} \{f(x|\theta)\}} = \frac{2 \cdot 0 x + 1 - 0}{\sup_{\theta \in [-1,1]} \{f(x|\theta)\}} I_{(0,1)}(x)$$