Se desea resolver el siguiente problema de Programación No Lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1^2 + x_2 \\ \text{s.a.}: \quad & 1 - x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Se calculan los gradientes de las siguientes funciones:

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2 \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_1(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \qquad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \qquad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar:

$$u_0 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente:

$$-u_0 x_1 - u_1 x_1 + u_2 x_1 = 0$$
$$u_0 - 2u_1 x_2 + 2u_2 x_2 = 0$$

Se tienen las condiciones de Fritz John:

$$-u_0 x_1 - u_1 x_1 + u_2 x_1 = 0$$
$$u_0 - 2u_1 x_2 + 2u_2 x_2 = 0$$
$$u_1(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0$$
$$u_2(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0$$

$u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, no todos nulos.

I) Se estudia la posibilidad de que las dos restricciones sean activas.

$$1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

Ningún punto verifica las dos restricciones simultáneamente.

II) Se estudia la posibilidad de que se verifiquen las condiciones si ninguna restricción es activa.

$$\begin{array}{lcl} 1 - x_1^2 - x_2^2 < 0 & & u_1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 < 0 & \Rightarrow & u_2 = 0 \end{array}$$

Todos los multiplicadores u_0, u_1, u_2, tendrían que ser nulos

III) Se consideran los casos donde exactamente una restricción es activa.

a)

$$1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{aligned} -u_0 x_1 - u_1 x_1 &= 0 \\ u_0 - 2u_1 x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si $u_0 = 0$ y $u_1 \neq 0$, se obtendría $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, que no es factible.

Por tanto se considera $u_0 = 1$, obteniéndose las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 - u_1 x_1 = 0 \\ 1 - 2u_1 x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x_1(1 + u_1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad \text{o} \\ u_1 = -1 \end{cases}$$

Se considera $x_1 = 0$.
Puesto que se debe verificar $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0$, se deben considerar

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se debe verificar la ecuación:

$$1 - 2u_1 = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = \frac{1}{2}$$

$$x^1 = \bar{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \textbf{ es punto de Kuhn} - \textbf{Tucker}$$

$(u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2},\; u_2 = 0)$.

ii) $\bar{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Se debe verificar la ecuación:

$$1 + 2u_1 = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = -\frac{1}{2} < 0$$

b)

$$1 - x_1^2 - x_2^2 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} -u_0 x_1 + u_2 x_1 = 0 \\ u_0 + 2u_2 x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Si $u_0 = 0$ y $u_2 \neq 0$, se obtendría $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, que no es factible. Por tanto se considera $u_0 = 1$, obteniéndose las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + u_2 x_1 = 0 \\ 1 + 2u_2 x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación

$$x_1(-1+u_2)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \text{o} \\ u_2 = 1 \end{cases}$$

i) Se considera $x_1 = 0$.

Puesto que se debe verificar $x_1^2+x_2^2-4=0$, se deben considerar

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\tilde{x}}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

Además se debe verificar la segunda ecuación:

$$1+2u_2x_2=0$$

Si $x_2 = 2$, se debe verificar la ecuación:

$$1 + 4u_2 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = -\frac{1}{4} < 0$$

Si $x_2 = -2$, se debe verificar la ecuación:

$$1 - 4u_2 = 0 \;\Rightarrow\; u_2 = \frac{1}{4}$$

Por tanto,

$$x^2 = \tilde{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \textbf{ es punto de Kuhn} - \textbf{Tucker}$$

$(u_0 = 1, u_1 = 0,\ u_2 = \frac{1}{4})$.

ii) Se considera $u_2 = 1$. Se debe verificar la ecuación:

$$1 + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Puesto que se debe verificar $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$,

$$\left.\begin{array}{r} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \frac{15}{4}$$

Puntos de Kuhn − Tucker:

$$\boldsymbol{x}^3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{15}}/_{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-1}/_{\mathbf{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{x}^4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mathbf{15}}/_{\mathbf{2}} \\ \mathbf{-1}/_{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

$(u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1)$.

Evaluando la función objetivo ($f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2$) en los cuatro puntos que cumplen las condiciones necesarias, se obtiene:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x^1) = 1$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = -2$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} \sqrt{15}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad f(x^3) = -\frac{17}{4}$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} -\sqrt{15}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad f(x^4) = -\frac{17}{4}$$

Por tanto, las soluciones óptimas son x^3 y x^4.

Se desea resolver el siguiente problema de Programación No Lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.a.}: \quad & -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Se calculan los gradientes de las siguientes funciones:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \,, \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g_1(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2 \,, \qquad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 \,, \qquad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_3(x_1, x_2) = -x_2 \,, \qquad \nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar:

$$u_0\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+u_1\begin{pmatrix}-2x_1\\1\end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix}2(x_1-1)\\1\end{pmatrix}+u_3\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} u_0 - u_1x_1 + u_2(x_1-1) &= 0\\ -u_0 + u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se deduce que no pueden ser simultáneamente nulos u_1 y u_2, ni pueden ser simultáneamente nulos u_0 y u_3.

Se tienen las condiciones de Fritz John:

$$
\begin{aligned}
u_0 - u_1 x_1 + u_2(x_1 - 1) &= 0 \\
-u_0 + u_1 + u_2 - u_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$u_1(-x_1^2 + x_2) = 0$$

$$u_2\big((x_1 - 1)^2 + x_2 - 5\big) = 0$$

$$u_3\, x_2 = 0$$

$u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$, no todos nulos.

I) Se estudia la posibilidad de que las tres restricciones sean activas.

$$-x_1^2 + x_2 = 0$$
$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 = 0$$
$$x_2 = 0$$

Ningún punto verifica las tres restricciones simultáneamente.

II) Se estudia la posibilidad de que se verifiquen las condiciones si ninguna restricción es activa.

$$-x_1^2 + x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$$
$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$
$$-x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 0$$

Todos los multiplicadores u_0, u_1, u_2, u_3 tendrían que ser nulos

III) Se consideran los casos donde exactamente dos restricciones son activas.

a)

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^2 + x_2 = 0 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 0$$

Se estudian a continuación los dos puntos obtenidos.

Por la observación anterior, no pueden ser nulos simultáneamente u_3 y u_0, por lo que se considera $u_0 = 1$.

i) $\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - 2u_1 + u_2 = 0 \\ -1 + u_1 + u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = \frac{2}{3}\,, \quad u_2 = \frac{1}{3}$$

$$x^1 = \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ es punto de Kuhn} - \text{Tucker}$$

$(u_0 = 1,\, u_1 = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = 0)$.

ii) $\bar{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} 1 + u_1 - 2u_2 = 0 \\ -1 + u_1 + u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = \frac{1}{3}\,, \quad u_2 = \frac{2}{3}$$

$$x^2 = \bar{\bar{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es punto de Kuhn} - \text{Tucker}$$

$(u_0 = 1,\, u_1 = \dfrac{1}{3}, u_2 = \dfrac{2}{3}, u_3 = 0)$.

b)

$$\left.\begin{array}{r} -x_1^2 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} u_0 = 0 \\ -u_0 + u_1 - u_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; u_0 = 0\,, \quad u_1 = u_3$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es punto de Fritz John}$$

$(u_0 = 0, u_1 = u_3, u_2 = 0)$.

c)

$$\left.\begin{aligned}(x_1-1)^2+x_2-5=0\\ x_2=0\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \tilde{x}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}, \qquad \tilde{\tilde{x}}=\begin{pmatrix}1-\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$$

$$-x_1^2+x_2<0 \;\Rightarrow\; u_1=0$$

Se estudian a continuación los dos puntos obtenidos.

i) $\tilde{x}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$. Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$1+\sqrt{5}u_2=0 \quad\Rightarrow\quad u_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$-1+u_2-u_3=0$$

$\tilde{x}$ no cumple las condiciones necesarias.

ii) $\tilde{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{aligned} 1-\sqrt{5}u_2 = 0 \\ -1+u_2-u_3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad u_3 = -1+\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Puesto que $u_3 < 0$, $\tilde{\tilde{x}}$ no se cumplen las condiciones necesarias.

III) Se consideran los casos donde exactamente una restricción es activa.
a)

$$-x_1^2 + x_2 = 0$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$

$$-x_2 < 0 \qquad \Rightarrow \quad u_3 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - u_1 x_1 = 0 \\ -1 + u_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_1 = 1,\; x_1 = 1$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es punto de Kuhn} - \text{Tucker}$$

$(u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 0)$.

b)

$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$$

$$-x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$\left.\begin{array}{r} 1 + (x_1 - 1)u_2 = 0 \\ -1 + u_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; u_2 = 1, \;\; x_1 = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ No es factible, por no verificar la primera restricción.

c)

$$x_2 = 0$$

$$-x_1^2 + x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0$$

$$(x_1 - 1)^2 + x_2 - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$$

Las ecuaciones que deben verificarse son:

$$u_0 = 0$$

$$-u_0 - u_3 = 0$$

No se cumplen las condiciones.

Evaluando la función objetivo ($f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$) en los cuatro puntos que cumplen las condiciones necesarias, se obtiene:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f(x^1) = 0$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = -3$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x^3) = 0$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x^1) = 1$$

Por tanto, la solución óptima es $x^* = x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.