Ejercicio 8.- Dada una m.as. de tamaño n de $X \sim Bernoulli(p)$ con $p \in [1/3, 2/3] = \Theta$, encontrar el estimador de máxima verosimilitud para estimar p. ¿Es insesgado para estimar p?

La función de verosimilitud de p es:

$$L(p) = f(x_1 \dots x_n | p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n - \sum x_i}$$

Si trabajamos con la función soporte:

$$\ell(p) = Ln(L(p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, Ln\, p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) Ln(1-p)$$

y calculamos sus puntos críticos:

$$\ell'(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)} (-1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - p\sum_{i=1}^{n} x_i - pn + p\sum_{i=1}^{n} x_i}{p(1-p)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - pn}{p(1-p)} \; ; \quad \ell'(p) = 0 \iff p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\ell''(p) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{(1-p)^2} < 0$$

Obtenemos que $p = \bar{x}$ es un máximo. Sin embargo, no tenemos garantizado que $\bar{x} \in [1/3, 2/3]$.

Sabemos que $p = \bar{x}$ es el único punto crítico y es un máximo por lo que si $p \in (0, \bar{x}) \Rightarrow \ell'(p) > 0$ y si $p \in (\bar{x}, 1) \Rightarrow \ell'(p) < 0$.

$\Longrightarrow$