Ejercicio 1

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{nx} \,. \quad f_n : [a,\pi] \to \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \to 0 = f(x) \,, \ \forall x \in [a,\pi]$$

Veamos que la conv. es uniforme.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\operatorname{sen} nx}{nx} - 0 \right| \leq \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{an} \quad \forall x \in [a,\pi]$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[a,\pi]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{an} \xrightarrow[n]{} 0$$

luego hay conv. uniforme. Por tanto

$$\int_{[a,\pi]} f_n \to \int_{[a,\pi]} f = 0 \text{, como se pedía ver.}$$

Veamos ahora el caso $a=0$.

En este caso no hay convergencia uniforme

pq. $f_n(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}, & x \in (0,\pi] \\ 1, & x=0 \end{cases}$ es continua $\forall n$

pero $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,\pi) \\ 1, & x=0 \end{cases}$ que no es continua

conv. puntual

Por tanto no podemos aplicar el teorema y tenemos ver cómo analizar $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\,dx$.

Hacemos un cambio de variable

$$x = g(u) = \frac{u}{n} \,. \quad g'(u) = \frac{1}{n} \,.$$

Por el TCV tenemos

$$\int_{[0,\pi]} \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\,dx = \frac{1}{n}\int_{[0,n\pi]} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \,.$$

por tanto

$$\left| \int_{[0,\pi]} \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\,dx \right| \leq \frac{1}{n} \underbrace{\left| \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \right|}_{= \text{cte}} + \frac{1}{n} \left| \int_1^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \right|$$

$\frac{\operatorname{sen} u}{u}$ es continua en $[0,1]$

$$\leq \frac{\text{cte}}{n} + \frac{1}{n} \int_1^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} u|}{u}\,du$$

$$\leq \frac{\text{cte}}{n} + \frac{1}{n} \underbrace{\int_1^{n\pi} \frac{1}{u}\,du}_{= [\log u]_{u=1}^{u=n\pi} = \log(n\pi) = \log(n) + \log\pi} = \frac{\text{cte} + \log\pi + \log n}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

y se tiene que en este caso también

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{nx}\,dx \xrightarrow[n]{} 0 \,.$$

Ejercicio 2:

(a) $$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt$$

$$= \lim_n \left[\frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \right]_{t=0}^{t=n} =$$

int. impropia

$$= \lim_n \frac{1}{a-s} \left[e^{(a-s)n} - 1 \right]$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } a \geq s \\ \frac{-1}{a-s} & \text{si } a < s \end{cases}$$

por tanto $F(s)$ está definida en $(a, +\infty)$ y en ese intervalo vale $F(s) = \frac{-1}{a-s}$

(b) Queremos ver que $\frac{dF}{ds} = \mathcal{L}(-t f(t))$ en los puntos donde ambos estén definidos (como int. impropias).

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \lim_n \underbrace{\int_0^n e^{-st} f(t)\,dt}_{= F_n(s)}$$

$\boxed{\text{Paso 1}}$: podemos intercambiar $\frac{d}{ds}$ y $\lim_n$.

Tenemos que $\frac{d}{ds} F_n(s) = \int_0^n (-t f(t)) e^{-st}\,dt$

Tma derivación bajo el signo integral

Ahora $\int_0^n (-t f(t)) e^{-st}\,dt \xrightarrow[n]{} \mathcal{L}(-t f(t))$

Además, la convergencia es uniforme en cada intervalo acotado. En efecto,

como funciones de s.

$$\left| \int_0^n (-t f(t)) e^{-st}\,dt - \int_0^\infty (-t f(t)) e^{-st}\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_n^\infty |t f(t)| e^{-st}\,dt \leq \int_n^\infty |t f(t)| e^{-\alpha t}\,dt \xrightarrow[n]{(*)} 0$$

$s \in [\alpha, \beta]$ independiente de s

(*) pq $\mathcal{L}(-t f(t))(\alpha)$ está definida como integral impropia

Por el tma de 1º sobre derivadas de sucesiones de funciones, podemos intercambiar $\frac{d}{ds}$ y $\lim_n$ y tenemos que

$$F'(s) = \lim_n \frac{d}{ds} \int_0^n e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_n \int_0^n (-t f(t)) e^{-st}\,dt = \mathcal{L}(-t f(t))(s)$$

tma derivación bajo signo integral
