Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

Hoja 2.1. - Ejercicios de inducción   Curso 2018/2019

---

1. Demuestra mediante inducción que las siguientes propiedades se cumplen para todo número entero $n \geq 1$. Indica en cada caso que tipo de inducción usas.

   a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n^2+n)}{2}$

   b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) (*) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   d) $\frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{2*3*4} + \cdots + \frac{1}{n*(n+1)*(n+2)} = \frac{n*(n+3)}{4*(n+1)*(n+2)}$.

   e) (*) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2*n-1}{2^n} = 3 - \frac{2*n+3}{2^n}$.

2. (*) Demuestra mediante inducción que las siguientes propiedades se cumplen para todo número natural. Indica en cada caso que tipo de inducción usas.

   a) $\sum_{i=1}^{n}(4*i-3) = n*(2*n-1)$.

   b) $3 + 3*5 + \cdots + 3*5^n = (3/4)*(5^{n+1}-1)$.

3. Demuestra que para todo entero $n \geq 2$ se cumple la siguiente igualdad:

$$1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + (n-1)*n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

4. Llamamos factorial de un número natural n al producto $1*2*\ldots*n$, que escribimos $n!$.

   a) Demuestra que para todo $n \geq 2$, $n! \leq n^n$.

   b) Demuestra que para todo $n \geq 4$, $2^n \leq n!$

   c) (**) Demuestra que para todo n existe m, tal que para todo $k \geq m$, se cumple $n^k \leq k!$

5. Llamamos números *pares* a aquellos naturales n que son de la forma $2*m$, siendo m tambén natural. *Impares* serán todos los naturales que no son pares.

   a) Demuestra que todo natural es o bien par, o bien de la forma $2*m+1$, siendo m natural; pero nunca ambas cosas a la vez. De ello se sigue que los impares son los naturales de la forma $2*m+1$.

   b) Demuestra por inducción que el producto de dos números naturales impares también es impar.

   c) Demuestra por inducción que un productorio de naturales es impar exactamente cuando todos sus factores son impares.

   d) Demuestra que para todo natural $n \geq 1$ impar existe un natural m tal que $n^2 - 1 = 8m$.

6. (*) Demuestra que para todo entero $n \geq 4$, $n^2 > 3n$.

7. Demuestra que para todo entero $n \geq 2$ se cumplen las siguientes desigualdades:

   a) $n^2 > n + 1$

   b) $2^{n+1} < 3^n$

   c) (*) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$

8. Demuestra por inducción que en toda fila lineal en la que hay al menos un chico y una chica, habrá algún lugar en el que tendremos a un chico y una chica en dos posiciones consecutivas de la misma. Por contra, demuestra (por medio de un contraejemplo sencillo) que tal cosa no tiene porqué ser cierta, si nos empeñamos en que el chico emparejado en cuestión esté delante de la chica.

9. Demuestra por inducción que si tenemos un grupo de chicos y chicas, con un número total par de integrantes, pero más chicos que chicas, y los agrupamos a todos en parejas, al menos tendremos siempre una pareja formada por dos chicos.

10. Demuestra por inducción el famoso *Lema del palomar*, que dice que si tenemos n palomas que se van a dormir a un palomar con m nichos, y $n > m$ entonces habrá al menos un nicho en el que se acostarán varias palomas.

11. Demuestra por inducción la variante dual del *Lema del palomar*, que dice que si al acostarse las n palomas de un palomar en sus m nichos, consiguen llenarlos todos (o sea, hay al menos una paloma en cada nicho), entonces se tendrá que $n \geq m$.

12. Demuestra que todo natural n, $2^{3n} - 1$ es de la forma $7 * m$, siendo m natural (o sea, es divisible por 7).

13. Demuestra que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos siempre es divisible por 9.

14. (*) Demuestra que, para todo $n \geq 1$, $2^{3n-1} + 5^n$ es múlltiplo de 3.

15. (*) Demuestra que dados dos números enteros a, b con $a \neq 0$ y $b \neq 1$, para todo n natural, se verifica la igualdad:
$$a + ab + ab^2 + \ldots + ab^n = \frac{ab^{n+1} - a}{b - 1}$$

16. Encuentra a partir de qué valor natural la desigualdad $2^n > 2n+1$ es válida, demostrando que ello es en efecto así, utilizando inducción.

17. (**) Encuentra el valor del entero n_0 más pequeño que funcione como base de la inducción que te permita probar que la propiedad $n^2 + 6n - 8 \geq 0$ se verifica para todo entero $n \geq n_0$.

18. (**) Conjetura una fórmula que de el valor de $S_n = 1 * 1! + 2 * 2! + \ldots + n * n!$ en función de n y demuestra por inducción que es correcta.

    Pista: Calcula los valores de S_1, S_2, S_3, $S_4, \ldots$ y observando los mismos trata de adivinar la forma general de S_n que luego has de probar.

Observación: Los ejercicios marcados con (*) son similares a algunos de los no marcados, por lo que se sugiere dejarlos para después de los no marcados. Los ejercicios marcados con (**) se consideran un poco más “creativos” y sólo deberían intentarse tras haber resuelto todos los no marcados.