ALGORITMO (PRIMAL) DEL SIMPLEX (Problema de minimización)

Paso 1:

Determinar una base inicial B tal que $B^{-1}b \geq 0$, y su matriz no básica asociada N,

$$B = \left(a_{B_1}, \dots, a_{B_l}, \dots, a_{B_m}\right) \qquad N = \left(a_{N_1}, \dots, a_{N_t}, \dots, a_{N_{n-m}}\right)$$

Ir al paso 2.

Paso 2:

Poner $\bar{x}_B = B^{-1}b$ y $\bar{x}_N = 0$. Calcular

$$Y_{N_j} = B^{-1}a_{N_j} \quad \text{y} \quad \bar{c}_{N_j} = c_{N_j} - c_B^t Y_{N_j} \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n-m\}.$$

Paso 3 (Detección de optimalidad)**:**

Si $\bar{c}_{N_j} \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n-m\}$, PARAR ($\bar{x}$ es solución óptima del problema). En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4 (Detección de no acotación)**:**

Si existe $t \in \{1, \dots, n-m\}$ tal que $\bar{c}_{N_t} < 0$ e $Y_{N_t} \leq 0$, PARAR (el valor de la función objetivo no está acotado, suponiendo $B = (a_1, \dots, a_m)$, decrece a lo largo de

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y_{N_t} \\ e_t \end{pmatrix} \mu \qquad \text{para todo } \mu \geq 0).$$

En otro caso, ir al paso 5.

Paso 5 (Cálculo de una nueva solución básica factible**):**

Determinar

$$\bar{c}_{N_t} = \min\left\{ \bar{c}_{N_j} \;\middle|\; j \in \{1, \dots, n-m\} \;\; \text{y} \;\; \bar{c}_{N_j} < 0 \right\}$$

$$\frac{\bar{x}_{B_l}}{y_{lN_t}} = \min\left\{ \frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{iN_t}} \;\middle|\; i \in \{1, \dots, m\} \;\; \text{e} \;\; y_{iN_t} > 0 \right\}$$

Considerar la base $\bar{B}$ obtenida suprimiendo de $B = \left(a_{B_1}, \dots, a_{B_l}, \dots, a_{B_m}\right)$ la columna a_{B_l} e incorporando en su lugar la columna a_{N_t}. Ir al paso 2.

ALGORITMO (PRIMAL) DEL SIMPLEX (Problema de maximización)

Paso 1:

Determinar una base inicial B tal que $B^{-1}b \geq 0$, y su matriz no básica asociada *N*,

$$B = \left(a_{B_1}, \dots, a_{B_l}, \dots, a_{B_m}\right) \qquad N = \left(a_{N_1}, \dots, a_{N_t}, \dots, a_{N_{n-m}}\right)$$

Ir al paso 2.

Paso 2:

Poner $\bar{x}_B = B^{-1}b$ y $\bar{x}_N = 0$. Calcular

$$Y_{N_j} = B^{-1}a_{N_j} \quad \text{y} \quad \bar{c}_{N_j} = c_{N_j} - c_B^t Y_{N_j} \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, n-m\}.$$

Paso 3 (Detección de optimalidad)**:**

Si $\bar{c}_{N_j} \leq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n-m\}$, PARAR ($\bar{x}$ es solución óptima del problema). En otro caso, ir al paso 4.

Paso 4 (Detección de no acotación)**:**

Si existe $t \in \{1, \dots, n-m\}$ tal que $\bar{c}_{N_t} > 0$ e $Y_{N_t} \leq 0$, PARAR (el valor de la función objetivo no está acotado, suponiendo $B = (a_1, \dots, a_m)$, aumenta a lo largo de

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y_{N_t} \\ e_t \end{pmatrix} \mu \qquad \text{para todo } \mu \geq 0).$$

En otro caso, ir al paso 5.

Paso 5 (Cálculo de una nueva solución básica factible**):**

Determinar

$$\bar{c}_{N_t} = \max\left\{\bar{c}_{N_j} \;\middle|\; j \in \{1, \dots, n-m\} \text{ y } \bar{c}_{N_j} > 0\right\}$$

$$\frac{\bar{x}_{B_l}}{y_{lN_t}} = \min\left\{\frac{\bar{x}_{B_i}}{y_{iN_t}} \;\middle|\; i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } y_{iN_t} > 0\right\}$$

Considerar la base $\bar{B}$ obtenida suprimiendo de $B = \left(a_{B_1}, \dots, a_{B_l}, \dots, a_{B_m}\right)$ la columna a_{B_l} e incorporando en su lugar la columna a_{N_t} . Ir al paso 2.

Fórmulas de la operación de pivotaje.

Se considera la base inicial $B = (a_1, \dots, a_m)$ y la sustitución de la columna básica a_l, $1 \leq l \leq m$, por la columna no básica a_k, $m + 1 \leq k \leq n$.

Puesto que

$a_j = y_{1j}a_1 + y_{2j}a_2 + \cdots + y_{mj}a_m$ para todo $j \in \{m + 1, \dots, n\}$. [*]

En particular, para a_k resulta

$$a_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} y_{ik}a_i + y_{lk}a_l$$

de donde se puede despejar a_l,

$$a_l = \frac{1}{y_{lk}} a_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{lk}} a_i$$

Sustituyendo la última expresión en [*] resulta

$$a_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{m} \left(y_{ij} - \frac{y_{ik}y_{lj}}{y_{lk}} \right) a_i + \frac{y_{lj}}{y_{lk}} a_k$$

Denotando por y'_{ij} los valores correspondientes a la nueva base, se obtiene

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{ik}y_{lj}}{y_{lk}} & i \neq l \\[2ex] y'_{lj} = \dfrac{y_{lj}}{y_{lk}} & \end{cases}$$

Además,

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{y_{lj}}{y_{lk}} \bar{c}_k$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que $B = (a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_m)$

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc|c|c}
 & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & & \\
\hline
x_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,k} & \cdots & y_{1,n} & \bar{x}_1 & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_l & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & y_{l,m+1} & \cdots & y_{l,k} & \cdots & y_{l,n} & \bar{x}_l & \rightarrow \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
x_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,k} & \cdots & y_{m,n} & \bar{x}_m & \\
\hline
 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_k & \cdots & \bar{c}_n & z - c_B^t \bar{x}_B & \\
\hline
 & & & & & & & & \uparrow & & & &
\end{array}
$$

<u>Actualización de la base</u>: $B' = (a_1, \ldots, a_{l-1}, a_k, a_{l+1}, \ldots, a_m)$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc|c|}
 & x_1 & \cdots & x_l & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & 1 & \cdots & y'_{1,l} & \cdots & 0 & y'_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & y'_{1,n} & \bar{x}'_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_k & 0 & \cdots & y'_{l,l} & \cdots & 0 & y'_{l,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & y'_{l,n} & \bar{x}'_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & \cdots & y'_{m,l} & \cdots & 1 & y'_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & y'_{m,n} & \bar{x}'_m \\
\hline
 & 0 & \cdots & \bar{c}'_l & \cdots & 0 & \bar{c}'_{m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \bar{c}'_n & z - c_{B'}^t \bar{x}'_{B'} \\
\hline
\end{array}
$$

PIVOTAJE

	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1	1	$\cdots$	$-\frac{y_{1,k}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$y_{1,m+1} - y_{1,k}\frac{y_{l,m+1}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{1,n} - y_{1,k}\frac{y_{l,n}}{y_{l,k}}$	$\overline{x}_l - y_{1,k}\frac{\overline{x}_l}{y_{l,k}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	$\cdots$	$\frac{1}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$\frac{y_{l,m+1}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{y_{l,n}}{y_{l,k}}$	$\frac{\overline{x}_l}{y_{l,k}}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	$-\frac{y_{m,k}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	1	$y_{m,m+1} - y_{m,k}\frac{y_{l,m+1}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{m,n} - y_{m,k}\frac{y_{l,n}}{y_{l,k}}$	$\overline{x}_m - y_{m,k}\frac{\overline{x}_l}{y_{l,k}}$
	0	$\cdots$	$-\overline{c}_k\frac{1}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$\overline{c}_{m+1} - \overline{c}_k\frac{y_{l,m+1}}{y_{l,k}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\overline{c}_n - \overline{c}_k\frac{y_{l,n}}{y_{l,k}}$	$z - c_B^t\overline{x}_B - \overline{c}_k\frac{\overline{x}_l}{y_{l,k}}$