Primera Entrega

Juan Carlos Llamas Núñez

Ejercicio 1.-

$(X_1 \dots X_n)$ mas $X \sim U(\theta, 4\theta)$. Demostrar que el estadístico $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente pero no completo.

$$F(x|\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<\theta \\ \frac{x-\theta}{3\theta} & \text{si } x \in [\theta, 4\theta) \\ 1 & \text{si } x \geq 4\theta \end{cases} \implies f(x|\theta) = \frac{1}{3\theta} I_{[\theta,4\theta)}(x)$$

Veamos cuál es la distribución conjunta de la muestra

$$f(x_1 \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3\theta} I_{[\theta,4\theta)}(x_i) = \left(\frac{1}{3\theta}\right)^n \cdot I_{(-\infty,4\theta)}(x_{(n)}) \cdot I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}).$$

Por el teorema de factorización, el estadístico $T(X_1 \dots X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente.

Sin embargo, no es completo. Un estadístico es completo si $\forall g(x_1 \dots x_n)$ función real se verifica que $E_\theta[g(T)] = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ casi seguro.

Vamos a encontrar una función g que verifique que $E_\theta[g(T)] = 0$ pero g va a ser distinta de cero.

Primero vamos a calcular $E[X_{(1)}]$ y $E[X_{(n)}]$. Para ello necesitamos conocer las distribuciones de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - P\{x < X_{(1)}\} = 1 - P\{x < X_1, x < X_2 \dots x < X_n\} =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(x < X_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P(X_i \leq x) = 1 - (1-F(x))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = -n(1-F(x))^{n-1} \cdot (-f(x)) = n\left(1 - \frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3\theta} \cdot I_{[\theta,4\theta)}(x).$$

De manera análoga

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{X_1 \leq x, \dots X_n \leq x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} = F(x)^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\, F(x)^{n-1} \cdot f(x) = n \cdot \left(\frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3\theta} I_{[\theta,4\theta)}(x).$$

Si calculamos ahora dichas esperanzas

$$E[X_{(1)}] = \int_\theta^{4\theta} x \cdot f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_\theta^{4\theta} x \cdot n\left(1 - \frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3\theta}\,dx =$$

$$= \frac{n}{3\theta}\int_\theta^{4\theta} x \cdot \left(\frac{4\theta - x}{3\theta}\right)^{n-1} dx \underset{\uparrow}{=} \frac{n}{3\theta}\int_1^0 (4\theta - 3\theta y)\, y^{n-1}(-3\theta)\,dy =$$

$$y = \frac{4\theta - x}{3\theta} \qquad x = 4\theta \Rightarrow y = 0$$

$$dy = -\frac{dx}{3\theta} \qquad x = \theta \Rightarrow y = 1$$

$$x = 4\theta - 3\theta y$$

$$= n\int_0^1 4\theta y^{n-1}\,dy - n\int_0^1 3\theta y^n\,dy = 4\theta - 3\theta\frac{n}{n+1} = \frac{4\theta n + 4\theta - 3\theta n}{n+1} =$$

$$= \frac{\theta n + 4\theta}{n+1} = \theta\,\frac{n+4}{n+1}$$

$$E[X_{(n)}] = \int_\theta^{4\theta} x\, f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_\theta^{4\theta} x \cdot n\left(\frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{3\theta}\,dx \underset{\uparrow}{=}$$

$$y = \frac{x-\theta}{3\theta} \qquad x = 4\theta \Rightarrow y = 1$$

$$dy = \frac{dx}{3\theta} \qquad x = \theta \Rightarrow y = 0$$

$$x = \theta + 3\theta y$$

$$= n\int_0^1 (\theta + 3\theta y)\, y^{n-1}\,dy = n\theta\left(\int_0^1 y^{n-1}\,dy + 3\int_0^1 y^n\,dy\right) = n\theta\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n+1}\right) =$$

$$= n\theta\left(\frac{n+1+3n}{n(n+1)}\right) = \theta\,\frac{4n+1}{n+1}$$

Basta entonces tomar como función $g(T) = g(X_{(1)}, X_{(n)}) = \frac{X_{(1)}}{n+4} - \frac{X_{(n)}}{4n+1}$.

Esta función es claramente no nula y se esperanza es

$$E_\theta[g(T)] = E_\theta\left[\frac{X_{(1)}}{n+4} - \frac{X_{(n)}}{4n+1}\right] = \frac{1}{n+4}E[X_{(1)}] - \frac{1}{4n+1}E[X_{(n)}] =$$

$$= \frac{1}{n+4}\cdot\theta\frac{n+4}{n+1} - \frac{1}{4n+1}\cdot\theta\cdot\frac{4n+1}{n+1} = 0.$$

Ejercicio 2.-

Sea $(X_1, \ldots X_n)$ una m.a.s. con $X \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Calcular el sesgo de los estimadores $T_1 = X_{(n)}$ y $T_2 = \bar{X}$ para estimar la media poblacional.

Recordemos que el sesgo de una v.a. es $b_\theta(T) = E_\theta[T] - h(\theta)$, donde $h(\theta)$ es la función a estimar.

En nuestro caso $h(\theta) = E[X] = \frac{\theta}{2}$

Empezando por T_2

$$b_\theta(T_2) = E_\theta[T_2] - h(\theta) = E_\theta[\bar{X}] - E[X] = 0$$

Para el sesgo de T_1 tenemos que calcular primero la distribución de $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{X_1 \leq x \ldots X_n \leq x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} = P\{X \leq x\}^n = F_X(x)^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\, F_X(x)^{n-1} f_X(x).$$

En este caso $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta) \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$ y $f_X(x) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta)}(x)$

$$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = n \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta)}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} I_{[0,\theta)}(x)$$

Ahora podemos calcular la esperanza de T_1

$$E[T_1] = E[X_{(n)}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\, dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n\, dx = \theta \frac{n}{n+1}$$

El sesgo será por tanto

$$b_\theta(T_1) = E[X_{(n)}] - E[X] = \theta \frac{n}{n+1} - \frac{\theta}{2} = \frac{2n-n-1}{2n+2}\theta = \frac{n-1}{2n+2}\theta$$

Ejercicio 3.- Sea $(X_1 - - X_n)$ m.a.s. Demostrar que

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2$ es un estimador insesgado para estimar la varianza poblacional.

Vamos a calcular $E[S^2]$.

$$E[S^2] = E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} E[(X_j - \bar{X})^2].$$

$$E[(X_j - \bar{X})^2] = E[X_j^2 - 2X_j\bar{X} + \bar{X}^2] = E[X_j^2] - 2E[X_j\bar{X}] + E[\bar{X}^2] =$$

$$= Var(X_j) + E[X_j]^2 - 2E[X_j\bar{X}] + Var(\bar{X}) + E[\bar{X}]^2 =$$

$$= Var(X) + E[X]^2 + \frac{Var(X)}{n} + E[X]^2 - \frac{2}{n} E\left[X_j \sum_{i=1}^{n} X_i\right].$$

Ahora $E\left[X_j \sum_{i=1}^{n} X_i\right] = E\left[X_j^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} X_i X_j\right] = E[X_j^2] + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} E[X_i X_j] =$

$$= Var(X_j) + E[X_j]^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} E[X_i]E[X_j] = Var(X) + E(X)^2 + (n-1) E[X]^2 =$$

X_i y X_j indep.

$$= Var(X) + nE[X]^2$$

Sustituyendo

$$E[(X_j - \bar{X})^2] = Var(X) + E[X]^2 + \frac{Var(X)}{n} + E[X]^2 - \frac{2}{n}\left(Var(X) + nE[X]^2\right) =$$

$$= Var(X)\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) + E[X]^2\left(1 + 1 - \frac{2}{n} \cdot n\right) = Var(X)\frac{n-1}{n}$$

y volviendo al principio

$E[S^2] = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} E[(X_j - \bar{X})^2] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} Var(X) \frac{n-1}{n} = Var(X)$, es decir, la varianza poblacional. Por tanto el sesgo de S^2 para estimar $Var(X)$ es $b_\theta(S^2) = E[S^2] - Var(X) = Var(X) - Var(X) = 0$, es decir, S^2 es insesgado.

Ejercicio 4.-

Sea $(X_1 \ldots X_n)$ una m.a.s. con $X \sim f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$ si $\theta < x < \infty$ y $\theta > 0$. Encontrar un estadístico suficiente e insesgado para estimar θ.

$$f(x_1 \ldots x_n/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i+\theta}\, I_{(\theta,\infty)}(x_i) = e^{n\theta} e^{-\sum x_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}).$$

Por el Teorema de factorización $T(X_1 \ldots X_n) = X_{(1)}$ es un estadístico suficiente.

Vamos a calcular la esperanza de $X_{(1)}$

Su distribución es

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \le x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P\{X_i \le x\} =$$

$$= 1 - (1 - F(x))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = -n(1-F(x))^{n-1}(-f(x)) = n(1-F(x))^{n-1} f(x).$$

Si calculamos $F(x)$,

$$F(x) = \int_\theta^x e^{-t+\theta}\,dt = e^\theta\left[-e^{-t}\right]_{t=\theta}^{t=x} = e^\theta\left(e^{-\theta} - e^{-x}\right) = 1 - e^{\theta - x}$$

y sustituimos

$$f_{X_{(1)}}(x) = n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} f(x) = n\left(1 - (1 - e^{\theta - x})\right)^{n-1} e^{-x+\theta}\, I_{(\theta,\infty)}(x) =$$

$$= n\left(e^{\theta-x}\right)^{n-1} e^{\theta - x}\, I_{(\theta,\infty)}(x) = n\left(e^{\theta-x}\right)^n I_{(\theta,\infty)}(x).$$

Por tanto,

$$E[X_{(1)}] = \int_\theta^\infty x \cdot f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_\theta^\infty x\, n\left(e^{\theta-x}\right)^n dx = n e^{n\theta}\int_\theta^\infty x\, e^{-nx}\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} \cancel{n} e^{n\theta}\left(\left[-\frac{x e^{-nx}}{\cancel{n}}\right]_\theta^\infty + \frac{1}{n}\int_\theta^\infty e^{-nx}\,dx\right) =$$

$(*)$ $x = u \quad dx = du$

$e^{-nx}dx = dv \quad -\frac{e^{-nx}}{n} = v$

$$= e^{n\theta}\left(\left[-x e^{-nx}\right]_{x=\theta}^{x=\infty} + \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_{x=\theta}^{x=\infty}\right) =$$

$$= e^{n\theta}\left(\theta e^{-n\theta} - \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{nx}} + \frac{e^{-n\theta}}{n} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{n e^{nx}}\right) =$$

$$= \theta + \frac{1}{n}$$

Por tanto podemos tomar $S(X_1 \dots X_n) = X_{(1)} - \frac{1}{n}$ como estadístico suficiente y que además será insesgado para θ ya que

$$E[S] = E\left[X_{(1)} - \frac{1}{n}\right] = E[X_{(1)}] - \frac{1}{n} = \theta + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \theta$$

Ejercicio 5: Dada una m.a.s. de tamaño $n=1$ de $X \sim Poisson(\lambda)$, y dado el estimador $T(X) = \begin{cases} 1 & si\ X=0 \\ 0 & si\ X \geq 1 \end{cases}$, demostrar que T es insesgado para $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$. ¿Es T eficiente para estimar $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$.

En primer lugar recordamos que si $X \sim Poisson(\lambda)$

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = P[X=x] \qquad \lambda > 0 \quad x = 0, 1, 2 \dots$$

Por tanto $E[T] = 1 \cdot P[X=0] + 0 \cdot P\{X \geq 1\} = P[X=0] = e^{-\lambda}$,

luego T es insesgado para $Z(\lambda) = e^{-\lambda}$ ya que

$b_\lambda(T) = E[T] - Z(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 0$.

Para ver si T es eficiente para estimar $Z(\lambda)$ basta ver si su varianza alcanza la cota de Fréchet-Crámer-Rao para $Z(\lambda)$, ya que hemos visto que es insesgado.

Por un lado

$$Var(T) = E[T^2] - E[T]^2;$$

$$E[T^2] = 1^2 \cdot P[X=0] + 0^2 \cdot P[X\geq 1] = P[X=0] = e^{-\lambda} = E[T]$$

$$\Rightarrow Var(T) = E[T^2] - E[T]^2 = e^{-\lambda} - (e^{-\lambda})^2 = e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})$$

Por otro lado, para calcular la cota necesitamos primero conocer la información de Fisher.

Como $n=1$

$$I_n(\lambda) = I_1(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} Ln(f(X|\lambda))\right] =$$

$$= -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(-\lambda + X Ln\lambda - Ln X!\right)\right] = -E\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(-1+\frac{X}{\lambda}\right)\right] =$$

$$= -E\left[-\frac{X}{\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda^2}E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

La cota de FCR será $\dfrac{(Z'(\lambda))^2}{I_n(\lambda)} = \dfrac{(-e^{-\lambda})^2}{1/\lambda} = \lambda e^{-2\lambda}$

Como la varianza del estimador T no alcanza la cota de FCR, el estimador T no es eficiente. (Se puede ver que $Var(T) > \lambda e^{-2\lambda}$ $\forall \lambda > 0$).

Ejercicio 6.- Sea $(X_1 \dots X_n)$ una m.a.s. de $X \sim f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ con $0<x<1$ y $\theta>0$. Calcular la esperanza y la varianza del estadístico $T = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j)$. ¿Es T el ECUMV para estimar $Z(\theta) = \frac{1}{\theta}$?

$$T = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ln\left(\frac{1}{X_j}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \bar{Y}$$

$Y_j = Ln\left(\frac{1}{X_j}\right) \quad \forall j = 1 \dots n.$

Necesitamos saber la distribución de los $Y_n = Ln\left(\frac{1}{X_n}\right)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{Ln\left(\tfrac{1}{X_n}\right) \leq y\} = P\{\tfrac{1}{X_n} \leq e^y\} =$$

$$= P\{e^{-y} \leq X_n\} = 1 - P\{X_n < e^{-y}\} = 1 - F_X(e^{-y}).$$

$$f_Y(y) = -f_X(e^{-y}) \cdot (-e^{-y}) = f_X(e^{-y}) \cdot e^{-y}$$

$$f_Y(y) = \theta \cdot (e^{-y})^{\theta-1} e^{-y} = \theta (e^{-y})^\theta = \theta e^{-\theta y} \quad \text{si} \quad 0 < e^{-y} < 1 \Leftrightarrow y > 0$$

Por tanto $f_Y(y) = \theta e^{-\theta y}$ con $y>0$, es decir,

$Y_n \sim Gamma(a=\theta, p=1) \quad \forall n$

Por tanto $E[T] = E[\bar{Y}] = E[Y] = \frac{1}{\theta}$ y

$$Var(T) = Var(\bar{Y}) = \frac{Var(Y)}{n} = \frac{1}{n\theta^2}$$

Vamos a ver ahora que T es el ECUMV ya que es función de un estimador suficiente y completo y como hemos visto $E[T] = Z(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

$$f(x_1 \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\theta-1} =$$

$$= \theta^n \cdot e^{(\theta-1)Ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} = \theta^n e^{(\theta-1)\sum_{i=1}^{n} Ln(x_i)}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico $S(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ es suficiente. Además, éste es completo ya que al pertenecer $f(\vec{x}|\theta)$ a la familia de distribuciones exponencial uniparamétrica, es suficiente que $\pi(\theta) = (\theta - 1)$ contenga un rectángulo abierto $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo. Esto, en efecto, se cumple por lo que podemos concluir que al ser T, estimador insesgado de $Z(\theta)$, función de S, estadístico suficiente y completo, entonces $T = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)$ es el ECUMV.

Ejercicio 7.- Sea $(X_1 \dots X_n)$ una m.as. con $X \sim f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}$ con $x>0$ y $\theta>0$. Hallar un estadístico suficiente y completo para θ.
Hallar ~~el~~ estimador de máxima verosimilitud para θ^2 y comprobar si además es eficiente para estimar $Z(\theta) = \theta^2$.

$$f(x_1 \dots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}} = \frac{1}{\theta^{2n}} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico $S(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente. Además, es completo pues al tratarse de la familia exponencial uniparamétrica es suficiente comprobar que $\pi(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ contiene un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Efectivamente, esto último es cierto por lo que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente y completo.

Ahora vamos a calcular el estimador de máxima verosimilitud para θ^2. La función de verosimilitud de θ^2 es:

$$L(\theta^2) = f(x_1 \cdots x_n | \theta) = \frac{1}{(\theta^2)^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \; e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}}.$$

Por simplicidad hacemos el cambio $\lambda = \theta^2$ y calculamos la función soporte.

$$\ell(\lambda) = Ln(L(\lambda)) = -n Ln \lambda + Ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{\sum x_i^2}{2\lambda}$$

$$\ell'(\lambda) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\lambda^2}; \quad \ell'(\lambda) = 0 \iff -\frac{2\lambda n}{2\lambda^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\lambda^2} = 0 \iff$$

$\iff \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}$. Comprobamos que se trata de un máximo con la segunda derivada:

Obs: $\frac{\sum x_i^2}{2n} \in (0, \infty) = (H)$

$$\ell''(\lambda) = +\frac{n}{\lambda^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\lambda^3} = \frac{1}{\lambda^2}\left(n - \frac{\sum x_i^2}{\lambda}\right)$$

$$\ell''\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}\right) = \left(\frac{2n}{\sum x_i^2}\right)^2 \cdot \left(n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2/2n}\right) = \left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)^2 \cdot (-n) < 0$$

Por tanto la función de verosimilitud de $\lambda = \theta^2$ alcanza el máximo en $\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}$. Por tanto el estimador de máxima verosimilitud para θ^2 es $T(X_1 \cdots X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$

Para probar si es eficiente para θ^2 calculamos la siguiente expresión

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Ln(f(x_1 \cdots x_n|\theta)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-n Ln\, \theta^2 + Ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \left(\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{n 2}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta^3} = \frac{2n}{\theta^3}\left(\frac{\sum x_i^2}{2n} - \theta^2\right)$$

Sabemos que si tenemos la descomposición

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Ln(f(x_1 \cdots x_n|\theta)) = \frac{I_n(\theta)}{Z'(\theta)}(T - Z(\theta)) \quad \text{entonces}$$

T es eficiente para $Z(\theta)$.

Por tanto $T = \dfrac{\sum X_i^2}{2n}$ es eficiente para $Z(\theta) = \theta^2$.

Otra forma de probar que es eficiente sería ver si la varianza de T alcanza la cota de FCR. Veámoslo.

Para ello necesitamos calcular la información de Fisher:

$$I_n(\theta) = -nE\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} Ln(f(X|\theta))\right] = -n\, E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(Ln\, x - 2Ln\,\theta - \frac{X^2}{2\theta^2}\right)\right] =$$

$$= -n\, E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{2}{\theta} + \frac{X^2}{\theta^3}\right)\right] = -n\, E\left[\frac{2}{\theta^2} - \frac{3X^2}{\theta^4}\right] = n\left(\frac{3}{\theta^4}E[X^2] - \frac{2}{\theta^2}\right)$$

$$= n\left(\frac{3}{\theta^4}2\theta^4 - \frac{2}{\theta^2}\right) = \frac{4n}{\theta^2}$$

. Queda por demostrar y después lo haremos que $E[X^2] = 2\theta^4$.

$$Z(\theta) = \theta^2 \implies Z'(\theta) = 2\theta$$

Entonces la cota de FCR es: $\dfrac{(Z'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \dfrac{(2\theta)^2}{\frac{4n}{\theta^2}} = \dfrac{4\theta^2}{4n}\cdot\theta^2 = \dfrac{\theta^4}{n}$

Antes de calcular la varianza de T hacemos notar que los valores de $I_n(\theta)$ y $Z'(\theta)$ concuerdan con la descomposición que dimos anteriormente y que era $\dfrac{\partial}{\partial\theta} Ln(f(x_1 \cdots x_n|\theta)) = \dfrac{2n}{\theta^3}(T - Z(\theta))$.

Así, $\dfrac{I_n(\theta)}{Z'(T)} = \dfrac{4n/\theta^2}{2\theta} = \dfrac{2n}{\theta^3}$.

Para el cálculo de la varianza de T es preferible calcular primero la distribución de $Y = X^2$ ya que ésta nos va a ser de gran ayuda.

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] \underset{\substack{\uparrow \\ X>0}}{=} P[X \leq \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{\theta^2} \cdot e^{-\frac{y}{2\theta^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\theta^2} \cdot y} \quad \text{con } y>0$$

Por tanto $X^2 = Y \sim \text{Gamma}\left(a = \frac{1}{2\theta^2}, p = 1\right)$.

De esta manera $E[X^2] = E[Y] = \dfrac{1}{\frac{1}{2\theta^2}} = 2\theta^2$ como antes habíamos anticipado. Además $Var(Y) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2\theta^2}\right)^2} = 4\theta^4$

Por tanto, y volviendo al cálculo de la varianza de T,

$$Var(T) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}\right) = \frac{1}{4} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{4} Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) =$$

$$= \frac{1}{4} Var(\bar{Y}) = \frac{1}{4} \frac{Var(Y)}{n} = \frac{1}{4} \frac{4\theta^4}{n} = \frac{\theta^4}{n}$$ que es el valor que habíamos obtenido antes para la cota de FCR.

En conclusión, $T(X_1 \ldots X_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}$ es un estimador eficiente.

Ejercicio 8.- Dada una m.a.s. de tamaño n de $X \sim Bernoulli(p)$ con $p \in [1/3, 2/3] = \Theta$, encontrar el estimador de máxima verosimilitud para estimar p. ¿Es insesgado para estimar p?

La función de verosimilitud de p es:

$$L(p) = f(x_1 \dots x_n | p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i | p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i} = p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i}$$

Si trabajamos con la función soporte:

$$\ell(p) = Ln(L(p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, Ln\,p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) Ln(1-p)$$

y calculamos sus puntos críticos:

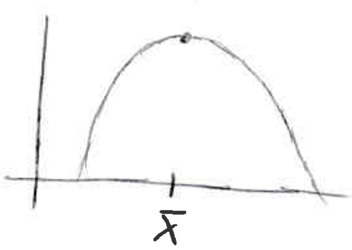
$$\ell'(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} + \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)}(-1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - p\sum_{i=1}^{n} x_i - pn + p\sum_{i=1}^{n} x_i}{p(1-p)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - pn}{p(1-p)} \; ; \quad \ell'(p) = 0 \iff p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

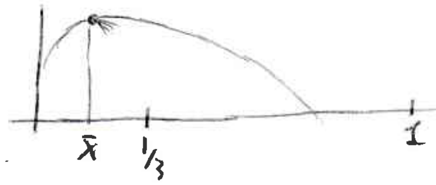
$$\ell''(p) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{(1-p)^2} < 0$$

Obtenemos que $p = \bar{x}$ es un máximo. Sin embargo, no tenemos garantizado que $\bar{x} \in [1/3, 2/3]$.

Sabemos que $p = \bar{x}$ es el único punto crítico y es un máximo por lo que si $p \in (0, \bar{x}) \Rightarrow \ell'(p) > 0$ y si $p \in (\bar{x}, 1) \Rightarrow \ell'(p) < 0$.

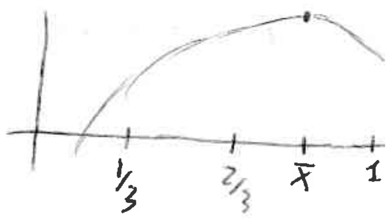
$\Rightarrow$ 

Si $\bar{x} \in (0, \frac{1}{3}) \Rightarrow$



El máximo de $\ell(p)$ en $[1/3, \frac{2}{3}]$ se alcanzará cuando $p = \frac{1}{3}$

Si $\bar{x} \in (\frac{2}{3}, 1) \Rightarrow$



El máximo de $\ell(p)$ en $[1/3, \frac{2}{3}]$ se alcanzará cuando $p = \frac{2}{3}$.

Por tanto, el estimador de máxima verosimilitud de p es

$$\hat{p}_{MV} = \begin{cases} \bar{X} & \text{si } \bar{x} \in [1/3, \frac{2}{3}] \\ \frac{1}{3} & \text{si } \bar{x} \in (0, \frac{1}{3}) \\ \frac{2}{3} & \text{si } \bar{x} \in (\frac{2}{3}, 1) \end{cases}$$

Hemos excluido los casos $\bar{x} = 1$ y $\bar{x} = 0$ para tratarlos aparte.

Si $\bar{x} = 1 \Rightarrow L(p) = L(p \mid x_1 = 1, x_2 = 1 \dots x_n = 1) = p^n (1-p)^{n-n} = p^n$ que es monótona creciente y alcanza su máximo en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ cuando $p = \frac{2}{3}$.

Si $\bar{x} = 0 \Rightarrow L(p) = L(p \mid x_1 = 0, x_2 = 0, \dots x_n = 0) = p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$ que es monótona decreciente en $(0, 1)$ y alcanza su máximo en $[1/3, 2/3]$ cuando $p = 1/3$. Po

En conclusión

$$\hat{p}_{MV} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \bar{x} \in [0, 1/3) \\ \bar{X} & \text{si } \bar{x} \in [1/3, 2/3] \\ 2/3 & \text{si } \bar{x} \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] = H$$

Para ver si es insesgado para p vamos a calcular la esperanza de $\hat{p}_{MV}$ sustituyendo las observaciones por variables aleatorias, esto es:

$$\hat{p}_{MV} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \bar{X} \in [0, 1/3) \\ \bar{X} & \text{si } \bar{X} \in [1/3, 2/3] \\ \frac{2}{3} & \text{si } \bar{X} \in (2/3, 1] \end{cases}$$

Por tanto $E[\hat{p}_{MV}] = \frac{1}{3} \cdot P\{\bar{X} \in [0, 1/3)\} + \bar{x} \cdot P\{\bar{X} \in [1/3, 2/3]\} + \frac{2}{3} P\{\bar{X} \in (\frac{2}{3}, 1]\}$

Por la pesadez de los cálculos de esta esperanza preferimos calcularla para el caso $n=1$ y como dicha esperanza va a ser distinta de p podremos concluir que $\hat{p}_{MV}$ tiene sesgo, es decir, no es insesgado, ya que no lo es para algún $n \in \mathbb{N}$.

Efectivamente si $n=1$

$$E[\hat{p}_{MV}] = \frac{1}{3} \cdot P\{\bar{X} \in [0, 1/3)\} + \bar{x} \cdot P\{\bar{X} \in [1/3, 2/3]\} + \frac{2}{3} P\{\bar{X} \in (2/3, 1]\} \underset{\bar{X}=X_1}{=}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot P\{0 \leq X_1 < 1/3\} + x_1 \cdot P\{\frac{1}{3} \leq X_1 \leq \frac{2}{3}\} + \frac{2}{3} P\{\frac{2}{3} < X_1 \leq 1\} \underset{X_1 \sim \text{Bernoulli}(p)}{=}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot P[X_1 = 0] + x_1 \cdot 0 + \frac{2}{3} P[X_1 = 1] = \frac{1}{3}(1-p) + \frac{2}{3} p =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} p \neq p.$$

Por tanto hemos dado un contraejemplo que garantiza que p ~~no es~~ insesgado.