**Sucesiones de funciones. Hoja 11.**

**217** Probar que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ converge puntualmente a la función $f(x) \equiv 0$ en $A = [0, \infty)$. Probar además que la convergencia es uniforme en $[0, a]$ para todo $a > 0$ pero no lo es en todo $A$.

**Observación:** Notar que no es lo mismo decir que una sucesión de funciones converge uniformemente en $[0, a]$ para todo $a > 0$ que decir que converge uniformemente en $[0, \infty)$.

**218** Probar que la sucesión $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$. Probar que la convergencia es uniforme en todo intervalo de la forma $[a, \infty)$ para todo $a > 0$ pero no lo es en todo $[0, \infty)$.

**219** Calcula el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$ en $[0, \infty)$ y estudia su convergencia uniforme. ¿Converge uniformemente en $[a, \infty)$ con $a > 0$? ¿en $[0, b]$ con $b > 0$?, ¿en $[0, \infty)$?

**220** Calcula el límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ en $[0, \infty)$ y estudia su convergencia uniforme. ¿Converge uniformemente en $[0, b]$ con $0 < b < 1$? ¿en $[0, 1]$ ?, ¿en $[a, \infty)$ con $a > 1$?, ¿en $[1, \infty)$?

**221** Probar que si una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f$ en $I$ entonces si $\{x_n\} \subset I$ es una sucesión que converge a $x_0 \in I$ entonces $f_n(x_n) \to f(x_0)$. Dar un ejemplo que pruebe que si sustituimos convergencia uniforme por convergencia puntual entonces el resultado no es cierto.

**222** Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ en $[0, 1]$. Probar lo siguiente:
i) $f_n$ converge uniformente a una función $f$ en $[0, 1]$. Calcular esta $f$.
ii) $f$ es diferenciable en $[0, 1]$ pero
iii) $f_n'(1)$ no converge a $f'(1)$.

**223** Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ un reordenamiento de los numeros racionales en $[0, 1]$. Definimos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la forma

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = q_1, q_2, \dots, q_n \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \end{cases}$$

Probar que la sucesión de funciones es monotona creciente (es decir $f_n(x) \leq f_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in [0, 1]$), que $f_n \in \mathcal{R}[0, 1]$ y $\int_0^1 f_n = 0$. Mostrar que la sucesión de funciones $f_n$ converge puntualmente a la función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

y que esta no es integrable Riemann.

**224** i) Analizar la convergencia de la sucesión de funciones $g_n(x) = \cos(nx)$, $x \in [0, 2\pi]$. Analizar el caracter oscilante de las funciones y ver que no converge a ninguna función puntualmente ni uniformemente.

ii) Consideremos la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$ en $x \in [0, 2\pi]$. Probar que $f_n$ converge uniformemente a una función, que es diferenciable pero la sucesión de las derivadas no converge (utilizar el apartado i) ).

**225** Probar que si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de términos no nulos ( o no nulos para $n \geq n_0$) que verifican $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \rho$. Utilizar este resultado para probar que para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ con $a_n \neq 0$ para $n \geq n_0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ entonces $R = 1/\rho$ es el radio de convergencia de la serie de potencias.

**226** Calcular el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias y decidir el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x-1)^n$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n$

**227** Supongamos que las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifican $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Probar que la serie de funciones

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

converge uniformemente a una función que llamaremos $f(x)$, es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

Probar que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Integrando la serie de funciones, deducir que se tiene que $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)$. También, multiplicando por $\operatorname{sen}(kx)$ y por $\cos(kx)$ probar que se tiene $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$

**228 La función Logaritmo.** Una vez definida la función exponencial, $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que la denotaremos por $E(x)$ o $e^x$ y teniendo en cuenta que es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y su rango es $(0, \infty)$, se define la función Logaritmo como la función inversa de $E$. Por tanto $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y satisface: $(L \circ E)(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $(E \circ L)(y) = y \ \forall y \in (0, \infty)$. Probar lo siguiente:

i) La función $L : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente y es biyectiva.

ii) La función $L$ es derivable y la derivada satisface $L'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$.

Además se satisface lo siguiente:

iii) $L(1) = 0$, $L(e) = 1$

iv) $L(x^r) = rL(x)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ y $x > 0$

v) $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

A la función $L(x)$ la denotaremos por $\ln(x)$ ó $\log(x)$.

**229 La función potencia $\alpha$ de un número**. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ se define $x^\alpha$ como:

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}$$

Se pide

i) Probar que si $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, entonces la definición coincide con la definición *standard* obtenida en termino de potencias y raices enteras. Es decir $x^{m/n} = (x^m)^{1/n}$

Probar además que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in (0, \infty)$ entocnes se tiene:

ii) $1^\alpha = 1$

iii) $x^\alpha > 0$

iv) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad (x/y)^\alpha = x^\alpha / y^\alpha$

v) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha, \qquad x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$

vi) Si $\alpha < \beta$ entonces $x^\alpha < x^\beta$ para todo $x > 1$.

vii) La función $x \to x^\alpha$ es una función continua, derivable y su derivada es: $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, para $x > 0$.

viii) Se tiene $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x > 0$.
(En particular esto generaliza el apartado iv) del problema anterior).

**230** Si $a > 0$, $a \neq 1$, la función **logaritmo en base a** se define como

$$\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \quad x > 0$$

Probar que se tiene:

i) $a^{\log_a(x)} = x$ para todo $x > 0$

ii) $\log_a(a^y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

iii) $D \log_a(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$

iv) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

v) Si además $b > 0$ $b \neq 1$, entonces $\log_a(x) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)} \log_b(x)$