CI. Grupo A. Hoja 3. Cambio de variable.

Problema 1. Calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

Problema 2. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$. Hallar

$$\int_D xy \, dx \, dy \, .$$

Problema 3. Hallar

$$\int_D e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dx \, dy$$

siendo D el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Problema 4. Sea $I = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ y sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} xz, & x > y \\ xy, & x \leq y \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable en I y calcular $\int_I f$.

Problema 5. Calcular

(a) $\displaystyle\int_A xyz \, dx \, dy \, dz \, ,$ con $A = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(b) $\displaystyle\int_B z \, dx \, dy \, dz \, ,$ con $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

Problema 6.* Sea $S = \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ y sean $v, w \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|w\| = 1$. Calcular

$$\int_S [\text{signo}(u|v)] \cdot [\text{signo}(u|w)] \, du$$

donde $(u|v)$ es el producto escalar $(u|v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.