Estadística. Grupo m3
Hoja 3. Estimación puntual

1. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple. En los siguientes casos, encontrar el estimador de máxima verosimilitud para θ :

   (a) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}$ si $x = 1, 2, \ldots, \theta$ (θ es entero y $1 \leq \theta \leq \theta_0$)

   (b) $f_\theta(x) = e^{-x+\theta}$ si $\theta \leq x < \infty$ y $\theta > 0$

   (c) $f_\theta(x) = \theta\alpha x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha}$ para $x > 0$ (α conocido)

   (d) $f_\theta(x) = \theta(1-x)^{\theta-1}$ si $0 < x < 1$ y $\theta \geq 1$

   (e) $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^{-1} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}}$ si $0 < x < 1$ y $1/2 \leq \theta < 1$

2. Para cada uno de los siguientes casos, encontrar la familia conjugada natural y hallar la distribución a posteriori:

   (a) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de $X \sim Poisson(\theta)$

   (b) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de $X \sim Gamma(1, \theta)$

   (c) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\theta, 1/r)$ siendo r conocido

3. Sea X una observación de la densidad

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$$

   donde $\theta > 0$. Supongamos que θ tiene una distribución a priori $U(0, 1)$. Hallar la mediana de la distribución a posteriori.

4. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$$

   para $x \in (0, 1)$ y $\theta > 0$.

   (a) Encontrar la familia conjugada natural

   (b) Hallar la distribución a posteriori correspondiente a una a priori de esta familia conjugada

5. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $B(1, \theta)$ para $\theta \in (0, 1)$. Encontrar el ECUMV para estimar θ y $\theta(1-\theta)$.

6. Encontrar la cota de Frechet-Cramer-Rao y el estimador eficiente (si existe) en los siguientes casos:

   (a) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple del modelo $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$ si $x > 0$ y $\theta > 0, (Exp(\frac{1}{\theta}))$ para estimar θ

   (b) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple del modelo $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x$ si $x = 0, 1, \ldots$ y $0 < \theta < 1$, para estimar θ

   (c) $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple del modelo $N(0, \sigma^2)$, para estimar σ (lo mismo para estimar σ^2)

7. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $N(\mu, 1)$

   (a) Probar que la cota de Frechet-Cramer-Rao para estimar μ^2 es $\frac{4\mu^2}{n}$

   (b) Probar que $T(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}^2 - 1/n$ es el ECUMV para estimar μ^2

8. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $Gamma(1, a)$

   (a) Probar que $T(X_1, \ldots, X_n) = (n-1)/(n\bar{X})$ es el ECUMV para estimar a, con varianza $\frac{a^2}{n-2}$

   (b) Probar que la cota de Frechet-Cramer-Rao para estimar a es $\frac{a^2}{n}$

9. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $Exp(\theta)$. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de θ y probar que es consistente.

10. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple del modelo $U(0, \theta)$, con $\theta > 0$. Sea $M_n = X_{(n)}$. Demostrar que M_n es consistente para θ. ¿Es $Y_n = 2\bar{X}$ consistente para θ?