Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

# Lista 3

**Número 3.21.-** Se considera la aplicación $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $p(x,y) = (x, xy)$ y se denota $E \subset \mathbb{R}^2$ su divisor excepcional $x=0$.

1) Mostrar que $p$ induce un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \setminus E$ sobre sí mismo.

2) Deducir que $p$ induce una identificación topológica del cuadrado cerrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ sobre el triángulo cerrado de vértices $(0,0), (1,0), (1,1)$.

Utilizar lo anterior para probar que si en un disco cerrado se identifican a un sólo punto todos los de un arco cerrado propio de su borde, el espacio cociente es de nuevo un disco cerrado.

Para probar que $p$ es un homeomorfismo hay que ver que es biyectiva, continua y con inversa continua. En este caso es sencillo encontrar explícitamente la inversa porque si:

$p(x,y) = (u,v) = (x, xy)$ con $x \neq 0$ entonces $\begin{cases} u = x \\ v = x \cdot y \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{x} = \frac{v}{u} \end{cases}$ luego basta tomar

$$\begin{aligned} p^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \\ (x,y) &\longmapsto \left(x, \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Como hemos visto,

si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$ entonces $p(p^{-1}(x,y)) \overset{x\neq 0}{=} p\left(x, \frac{y}{x}\right) = \left(x, x \cdot \frac{y}{x}\right) = (x,y)$ y

$p^{-1}(p(x,y)) = p^{-1}(x, x\cdot y) \overset{x \neq 0}{=} \left(x, \frac{x \cdot y}{x}\right) = (x,y)$.

Además, ambas funciones $p$ y $p^{-1}$ son continuas por serlo cada una de sus componentes, ya que son producto o cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula.

Para el apartado 2) denotamos por $C$ al cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(1,0)$ y por $T$ al triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$; es decir

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \quad \text{y} \quad T:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\ge 0,\ x\ge y,\ x\le 1\}.$$

Tenemos que probar que

$$\begin{aligned} p|_C : C &\longrightarrow T \\ (x,y) &\longmapsto (x, x\cdot y) \end{aligned} \qquad \text{es una identificación.}$$

Sea $\sim$ la relación de equivalencia tal que $(x,y)\sim(x',y') \iff \begin{cases} (x,y)=(x',y') \\ \text{o} \\ x=x'=0 \end{cases}$,

es decir, la que colapsa el segmento $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0,\ 0\le y\le 1\}$ al punto $(0,0)$. Tenemos entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & T \\ C/\sim \arrow[ur, "\bar{p}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{p}$ está bien definida porque manda la clase del $(0,0)$ al punto $(0,0)$ y las demás clases, que tienen un solo elemento, a su imagen por $p$.

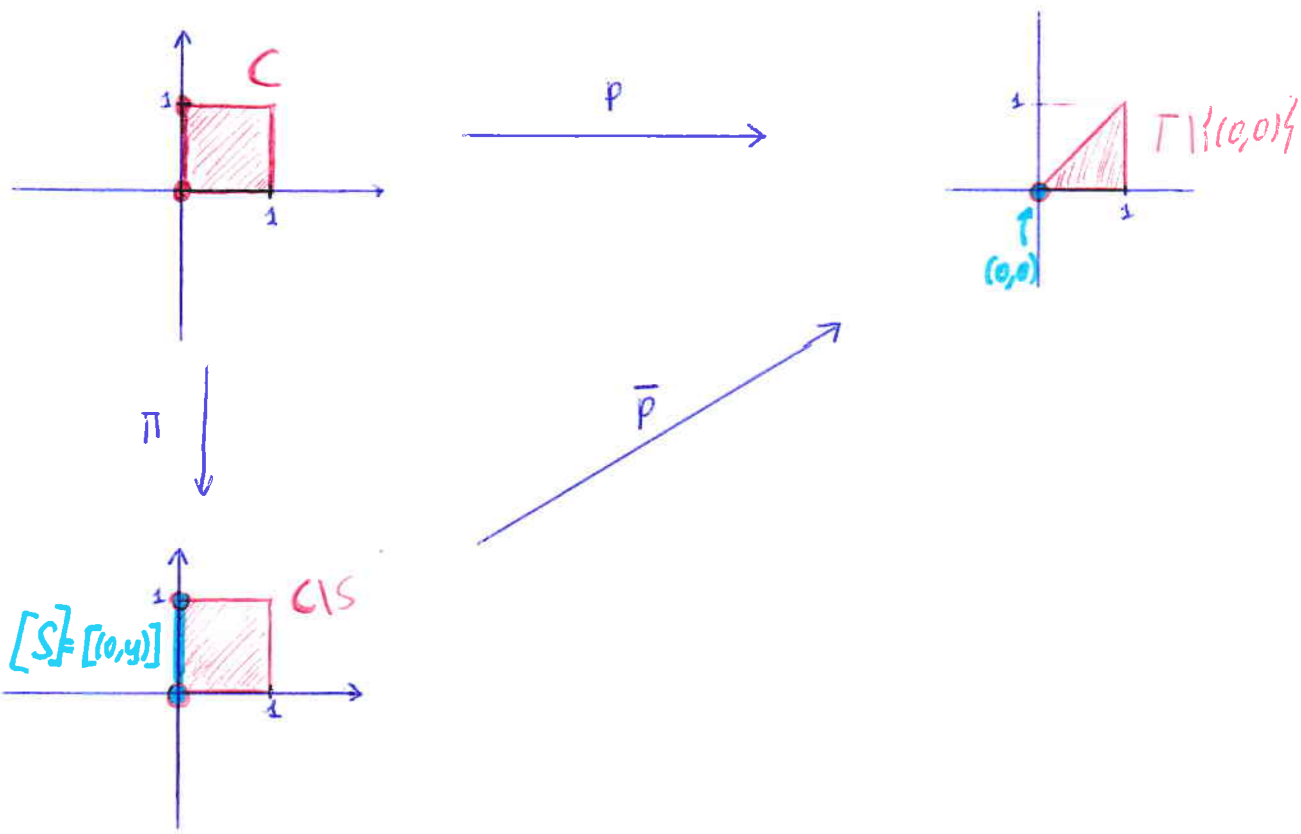
Para ver que $p$ es identificación, basta ver que $\bar{p}$ es homeomorfismo. Como $p$ era un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2\setminus E$ y $\mathbb{R}^2\setminus E$ es suficiente con ver que $C\setminus S$ va a $T\setminus\{(0,0)\}$ y que la clase del $(0,0)$ va al $(0,0)$.

Efectivamente, para lo primero si $(x,y)\in C\setminus S$ entonces

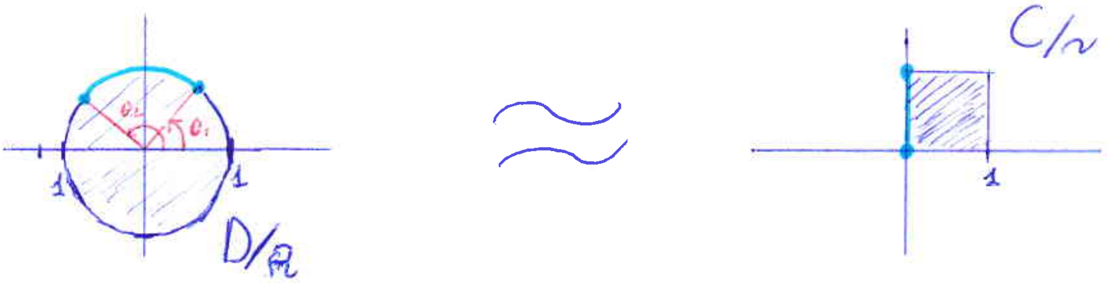
$0<x\le 1$, $0\le y\le 1$ y $p(x,y)=(x, x\cdot y)=(u\cdot v). \iff \begin{cases} u=x \\ v=x\cdot y \end{cases}$

Como $x\in(0,1] \Rightarrow u\in(0,1]$ y $0 \overset{x>0,\,y\ge 0}{\le} v = x\cdot y \overset{y\le 1}{\le} x = u \le 1$ luego la imagen de $C\setminus S$ es $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u\in(0,1],\ 0\le v\le u\le 1\} = T\setminus\{(0,0)\}$.

Además, $\bar{p}([(0,0)]) = \bar{p}([(0,y)]) = (0,0)$.



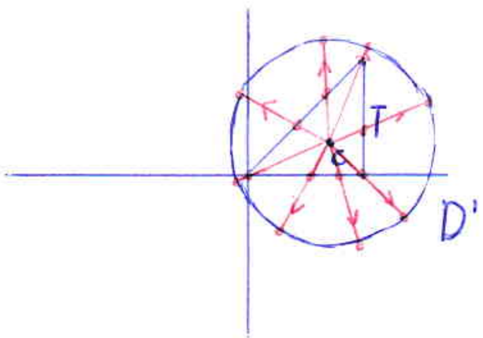

Sea $D$ un disco cerrado, que podemos suponer que tiene radio 1 y está centrado en el 0, y sean $\theta_1$ y $\theta_2$ los dos ángulos que delimitan el arco cerrado que identificamos en un solo punto. Del ejercicio 2.14 se sigue que existe un homeomorfismo que lleva un cuadrado a una circunferencia y los vértices a 4 puntos prefijados. En este caso llevamos la circunferencia al cuadrado $C$ donde los puntos $(\cos\theta_1, \operatorname{sen}\theta_1)$ y $(\cos\theta_2, \operatorname{sen}\theta_2)$ van a $(0,1)$ y $(0,0)$ respectivamente $(0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi)$




Intuitivamente, solo realizamos transformaciones continuas como "estirar" un arco de la circunferencia para convertirlo en un segmento y girar el cuadrado

Por lo visto en el apartado anterior $C/\sim \;\approx T$

Por tanto, es suficiente con construir un homeomorfismo entre un triángulo y un disco. Para ello podemos tomar un punto interior al triángulo que será el centro del disco y un radio suficientemente grande para que el triángulo esté contenido en el disco. Después podemos proyectar el triángulo sobre la circunferencia de manera continua, como se ve en la figura.




De esta manera el borde del triángulo irá al borde del disco y el interior del triángulo al interior del disco.

Por tanto, $D/_{\mathcal{R}} \approx C/\sim \;\approx T \approx D'$ y el cociente de un disco bajo la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ que identifica a un solo punto un arcos cerrado es (homeomorfo a) ~~otro~~ disco.

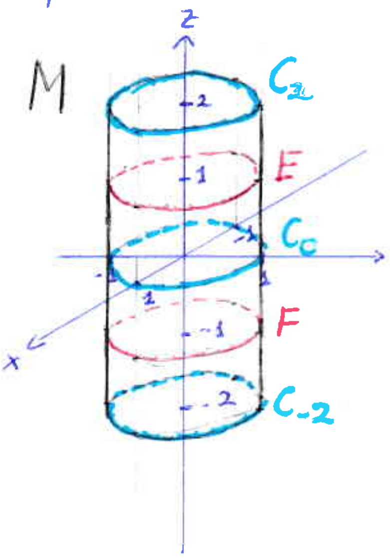
Número 3.25.- Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de cilindro $\{x^2+y^2=1, -2 \leq z \leq 2\}$ y sean $E, F \subset X$ dos circunferencias $\{x^2+y^2=1, z=1\}$, $\{x^2+y^2=1, z=-1\}$.

En $M$ se considera la relación de equivalencia

$$p=(x,y,z) \sim p'=(x',y',z') \overset{def.}{\iff} p=p' \text{ o } z=z'=1 \text{ o } z=z'=-1.$$

Encontrar un subespacio de $\mathbb{R}^3$ homeomorfo al espacio cociente $M/\sim$.

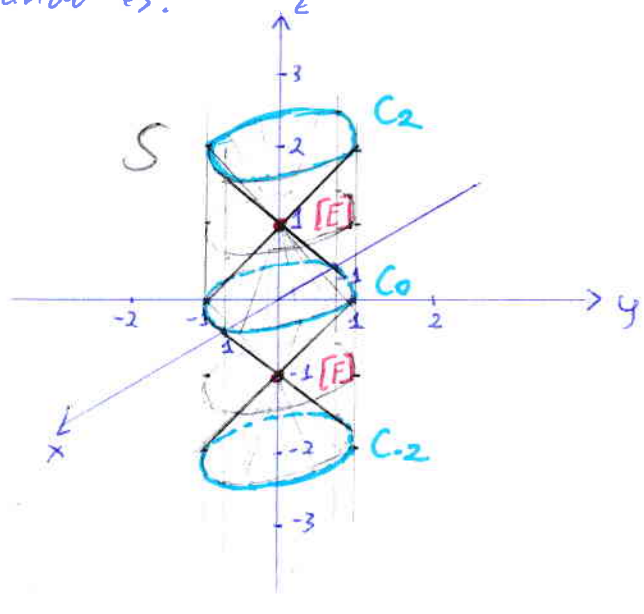
En primer lugar, representamos el conjunto $M$ para ganar intuición sobre lo que está sucediendo.




La relación de equivalencia $\sim$ consiste en colapsar $E$ y $F$ a un solo punto. Si en $M$ dejamos fijas las circunferencias $C_2$, $C_0$ y $C_{-2}$ definidas como

$$C_i = \{x^2+y^2=1, z=i\} \text{ con } i \in \{-2,0,2\}$$

y deformamos de manera continua $M$ para que $E$ y $F$ colapsen a un punto, intuitivamente el resultado serán dos conos dobles, uno encima de otro, que comparten la circunferencia $C_0$ y que tendrán como vértices los puntos $(0,0,1)$ y $(0,0,-1)$. El subespacio en el que estamos pensando es:



Este razonamiento nos lleva a considerar el conjunto.

$$S = \begin{cases} x^2+y^2=(z-1)^2 & \text{si } z\in[0,2] \\ x^2+y^2=(z+1)^2 & \text{si } z\in[-2,0) \end{cases}$$

Ahora buscamos el homeomorfismo que lleva $M/\sim$ a $S$.

Sea $f: M/\sim \dashrightarrow \mathbb{R}^3$

$$[(x,y,z)] \longmapsto f([(x,y,z)]) = \begin{cases} (|z-1|x, |z-1|y, z) & \text{si } z\geq 0. \\ (|z+1|x, |z+1|y, z) & \text{si } z<0. \end{cases}$$

En primer lugar, $f$ está bien definida:

- Si $z\neq 1,-1$ entonces $(x,y,z)$ es el único elemento de la clase $[(x,y,z)]$.
- Si $z=1$ entonces $f([(x,y,1)]) = (|1-1|x, |1-1|y, 1) = (0,0,1)$. Si llamamos $[E]=[(x,y,1)]$ tenemos que $f([E])=(0,0,1)$.
- Si $z=-1$ entonces $f([(x,y,-1)]) = (|-1+1|x, |-1+1|y, -1) = (0,0,-1)$. Si llamamos $[F]=[(x,y,-1)]$ tenemos que $f([F])=(0,0,-1)$.

La imagen de $f$ es $S$ ($\Leftrightarrow Im(f)=S$).

$\subseteq$] Dado $p\in Im(f) \Rightarrow p=(|z-1|x, |z-1|y, z)$ con $x^2+y^2=1$, $z\in[0,2]$.

Entonces $|z-1|^2x^2+|z-1|^2y^2 = |z-1|^2(x^2+y^2) \underset{\substack{\uparrow \\ x^2+y^2=1}}{=} (z-1)^2 \Rightarrow p\in S$.

(Análogo cuando $z\in[-2,0]$.)

$\supseteq$] Dado $p\in S$ (suponemos $z\in[0,2]$) tenemos que encontrar $[(x,y,z)]\in M/\sim$ tal que $f([(x,y,z)])=p$. Si $p=(0,0,1)$ entonces $f([E])=(0,0,1)$. Si $p=(x,y,z)$ con $z\neq 1$ entonces $f\left(\left[\frac{x}{|z-1|}, \frac{y}{|z-1|}, z\right]\right) = \left(|z-1|\frac{x}{|z-1|}, |z-1|\frac{y}{|z-1|}, z\right) =$

$= (x,y,z)$.

La función $f$ es inyectiva. (El otro caso es análogo).

$$\text{Si } f([(x_1,y_1,z_1)]) = f([(x_2,y_2,z_2)]) \overset{\substack{z_1,z_2\geq 0 \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} \begin{cases} |z_1-1|x_1 = |z_2-1|x_2 \\ |z_1-1|y_1 = |z_2-1|y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

Cuando $z_1 = z_2 = 1$ entonces $[(x_1, y_1, z_1)] = [(x_2, y_2, z_2)] = [E]$.

En caso contrario $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| \neq 0$ y dividiendo a ambos lados de las dos igualdades se tiene que $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ y sus clases también son iguales.

Con todo esto $f: M/\sim \longrightarrow S$ es una biyección y su inversa, que la hemos calculado implícitamente al probar la sobreyectividad de $f$ sobre $S$, es:

$$f^{-1}: S \longrightarrow M/\sim$$
$$(x,y,z) \longmapsto f^{-1}(x,y,z) = \begin{cases} [E] & \text{si } z = 1 \\ [F] & \text{si } z = -1 \\ \left[\left(\frac{x}{|z-1|}, \frac{y}{|z-1|}, z\right)\right] & \text{si } z \in [0,2] \setminus \{1\} \\ \left[\left(\frac{x}{|z+1|}, \frac{y}{|z+1|}, z\right)\right] & \text{si } z \in [-2,0) \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

Por último, $f$ es continua y $f^{-1}$ también.

- $f$ es continua porque si $z_0 \neq 0$ ambas ramas son aplicaciones continuas porque todas sus componentes lo son (composición, producto y suma y producto por escalares). Además, si $z_0 = 0$ $f([(x_0, y_0, z_0)]) = (x_0, y_0, 0)$, que coincide con el límite cuando $(x,y,z) \longrightarrow (x_0, y_0, 0)$ de $f(x,y,z)$ independientemente de la rama por la que vayamos.

- $f^{-1}$ es continua. Es claro que si $z_0 \neq 1, -1$ la aplicación es continua. Por ejemplo en $z_0 = 1$. $f^{-1}((0,0,1)) = [E]$. Sea $\mathcal{U}$ un entorno abierto de $[E]$ que podemos suponer de la forma $[E] \cup \{[(x,y,z)] \mid x^2+y^2=1, z \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{1\}\}$:
Entonces $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U}) = (0,0,1) \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = (z-1)^2, z \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \setminus \{1\}\}$ que es un entorno abierto de $(0,0,1)$ en $S$.

Por tanto $M/\sim$ es homeomorfo a $S$.