Estadística. Grupo m3

Hoja 5. Contrastes de hipótesis

Mayte Rodríguez

Ejercicio 4. Modelo 1

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una población.

Modelo 1. Población $N(\theta, \sigma^2 = 4)$, $n = 4, \theta_0 = 1, \theta_1 = 2$.

a) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)$.

Ejercicio 4. Modelo 1

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = 1 \\ H_1 &: \theta = 2 \end{aligned}$$

Por el lema de Neyman-Pearson, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} \geq c \\ \\ 0 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} < c \end{cases}$$

tal que $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$.

Ejercicio 4. Modelo 1

Se puede observar que

$$\frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\right)^4 \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{4}(x_j-2)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\right)^4 \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{4}(x_j-1)^2\right\}}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_j - 3/2\right\}$$

crece con $t = \sum_{j=1}^{4} x_j$,

Ejercicio 4. Modelo 1

y entonces

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \geq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{4} X_j \geq c\right) = P\left(Z \geq \frac{c-4}{4}\right) = 0.05$$

ya que $T = \sum_{j=1}^{4} X_j \sim N(4, Var = 16)$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 1

Como $\frac{c-4}{4} = z_{0.05} = 1.645$, entonces $c = 10.58$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \geq 10.58 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j < 10.58 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 1

b) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ y encontrar su función de potencia.

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \leq 1 \\ H_1 &: \theta > 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 1

El modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{4} X_j$.

El modelo pertenece a la familia exponencial, ya que

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{8}(x-\theta)^2\} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{8}x^2\} \exp\{-\frac{1}{8}\theta^2\} \exp\{\frac{1}{4}x\theta\}$$

tomando $c(\theta) = \exp\{-\frac{1}{8}\theta^2\}$, $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{8}x^2\}$, $q(\theta) = \frac{1}{4}\theta$ y $t(x) = x$.

Como $q(\theta)$ es creciente, el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{4} X_j$.

Alternativamente, dado $\theta_1 < \theta_2$

$$\begin{aligned}
\frac{f_{\theta_2}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\right)^4 \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{4}(x_j-\theta_2)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\right)^4 \exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{4}(x_j-\theta_1)^2\right\}} \\
&= \exp\left\{-\frac{1}{4}(\theta_1-\theta_2)\sum_{j=1}^{4}x_j\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta_2^2-\theta_1^2)\right\}
\end{aligned}$$

crece con $t = \sum_{j=1}^{4} x_j$. Y entonces, el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{4} X_j$.

Ejercicio 4. Modelo 1

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \geq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{4} X_j \geq c\right) = P\left(Z \geq \frac{c-4}{4}\right) = 0.05$$

ya que $T = \sum_{j=1}^{4} X_j \sim N(4, Var = 16)$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 1

Como $\frac{c-4}{4} = 1.645$, entonces $c = 10.58$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \geq 10.58 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j < 10.58 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 1

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \geq 10.58) = P_\theta\left(Z \geq \frac{10.58 - 4\theta}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{10.58 - 4\theta}{4}\right)$$

ya que $T = \sum_{j=1}^{4} X_j \sim N(4\theta, Var = 16)$.

c) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$ y encontrar su función de potencia.

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \geq 1 \\ H_1 &: \theta < 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 1

Como el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{4} X_j$, por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \leq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{4} X_j \leq c\right) = P\left(Z \leq \frac{c-4}{4}\right) = 0.05$$

ya que $T = \sum_{j=1}^{4} X_j \sim N(4, Var = 16)$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 1

Como $\frac{c-4}{4} = z_{0.95} = -1.645$, entonces $c = -2.58$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j \leq -2.58 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{4} x_j > -2.58 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 1

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \leq -2.58) = P_\theta\left(Z \leq \frac{-2.58 - 4\theta}{4}\right) = \Phi\left(\frac{-2.58 - 4\theta}{4}\right)$$

ya que $T = \sum_{j=1}^{4} X_j \sim N(4\theta, Var = 16)$.

Ejercicio 4. Modelo 2

Modelo 2. Población $N(0, \sigma^2 = \theta^2)$, $n = 10, \theta_0 = 1, \theta_1 = 2.$

a) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)$

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = 1 \\ H_1 &: \quad \theta = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 2

Por el lema de Neyman-Pearson, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} \geq c \\ \\ 0 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} < c \end{cases}$$

tal que $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$.

Ejercicio 4. Modelo 2

Se puede observar que

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 2}}\right)^{10}\exp\left\{-\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{10}{x_j}^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{10}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10}{x_j}^2\right\}} \\
&= \frac{1}{2^{10}}\exp\left\{\frac{3}{8}\sum_{j=1}^{10}{x_j}^2\right\}
\end{aligned}
$$

crece con $t = \sum_{j=1}^{10} x_j^2$

Ejercicio 4. Modelo 2

Entonces

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 \geq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j^2 \geq c\right) = P\left(T \geq c\right) = 0.05$$

donde $T = \sum_{j=1}^{10} X_j^2 = \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{X_j}{\theta_0}\right)^2 \sim \chi^2_{10}$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 2

Por tanto $c = \chi^2_{10;0.05} = 18.31$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{10} x_j^2 \geq 18.31 \\ 0 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{10} x_j^2 < 18.31 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 2

b) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \leq 1 \\ H_1 &: \theta > 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 2

El modelo pertenece a la familia exponencial, ya que

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\theta^2}x^2\}$$

tomando $c(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $q(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ y $t(x) = x^2$.

Como $q(\theta)$ es creciente, el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{10} X_j^2$.

Ejercicio 4. Modelo 2

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 \geq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j^2 \geq c\right) = P\left(T \geq c\right) = 0.05$$

donde $T = \sum_{j=1}^{10} X_j^2 = \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{X_j}{\theta_0}\right)^2 \sim \chi^2_{10}$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 2

Por tanto $c = \chi^2_{10;0.05} = 18.31$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 \geq 18.31 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 < 18.31 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 2

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \geq 18.31) = P_\theta\left(\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{X_j}{\theta}\right)^2 \geq \frac{18.31}{\theta^2}\right) = P_\theta\left(Y \geq \frac{18.31}{\theta^2}\right)$$

donde $Y = \frac{T}{\theta^2} = \sum_{j=1}^{10}\left(\frac{X_j}{\theta}\right)^2 \sim \chi^2_{10}$.

Ejercicio 4. Modelo 2

c) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta \geq 1 \\ H_1 &: \quad \theta < 1 \end{aligned}$$

El modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{10} X_j^2$.

Ejercicio 4. Modelo 2

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 \leq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j^2 \leq c\right) = P\left(T \leq c\right) = 0.05$$

donde $T = \sum_{j=1}^{10} X_j^2 = \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{X_j}{\theta_0}\right)^2 \sim \chi^2_{10}$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 2

Por tanto $c = \chi^2_{10;0.95} = 3.94$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 \leq 3.94 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 > 3.94 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 2

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \leq 3.94) = P_\theta\left(\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{X_j}{\theta}\right)^2 \leq \frac{3.94}{\theta^2}\right) = P_\theta\left(Y \leq \frac{3.94}{\theta^2}\right)$$

donde $Y = \frac{T}{\theta^2} = \sum_{j=1}^{10}\left(\frac{X_j}{\theta}\right)^2 \sim \chi^2_{10}$.

Modelo 3. Población $Poisson(\theta)$, $n = 5, \theta_0 = 1, \theta_1 = 2.$

a) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)$

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta = 1 \\ H_1 &: \quad \theta = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

Por el lema de Neyman-Pearson, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\dots,x_n)} > c \\ a & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\dots,x_n)} = c \\ 0 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\dots,x_n)} < c \end{cases}$$

tal que $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$.

Ejercicio 4. Modelo 3

Se puede observar que

$$\frac{f_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\exp\{-n\theta_1\}\,\theta_1^t / \prod_{j=1}^{5} x_j}{\exp\{-n\theta_0\}\,\theta_0^t / \prod_{j=1}^{5} x_j} = \frac{\exp\{-10\}\,2^t}{\exp\{-5\}\,1^t} = \exp\{-5\}\,2^t$$

crece con $t = \sum_{j=1}^{5} x_j$.

Ejercicio 4. Modelo 3

Entonces

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > c \\ a & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = 0.05.$$

Ejercicio 4. Modelo 3

Se elige c de forma que

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j > c\right) &< 0.05 \\
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j \geq c\right) &\geq 0.05.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Modelo 3

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j > 9\right) &= P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j \geq 10\right) = 0.0317 < 0.05 \\
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j \geq 9\right) &= 0.0317 + 0.0363 = 0.068 > 0.05
\end{aligned}
$$

donde $T = \sum_{j=1}^{5} X_j \sim Poisson(5\theta_0) \equiv Poisson(5)$ bajo H_0.

Por tanto $c = 9$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > 9 \\ a & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = 9 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < 9 \end{cases}$$

El valor de a se calcula de forma que

$$\begin{aligned} \alpha &= E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j > 9\right) + aP_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j = 9\right) \\ &= 0.0317 + a\,0.0363 = 0.05 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

Entonces $a = 0.504$ y el test de hipótesis es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^{5} x_j > 9 \\ 0.504 & \text{si } \sum_{j=1}^{5} x_j = 9 \\ 0 & \text{si } \sum_{j=1}^{5} x_j < 9 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

b) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \leq 1 \\ H_1 &: \theta > 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

El modelo pertenece a la familia exponencial, ya que

$$f_\theta(x) = \exp\{-\theta\}\frac{1}{x!}\exp\{x\ln\theta\}$$

tomando $c(\theta) = \exp\{-\theta\}$, $h(x) = \frac{1}{x!}$, $q(\theta) = \ln\theta$ y $t(x) = x$.

Como $q(\theta)$ es creciente, el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{5} X_j$.

Ejercicio 4. Modelo 3

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_j > c \\ a & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_j = c \\ 0 & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_j < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = 0.05.$$

Ejercicio 4. Modelo 3

El test de hipótesis es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > 9 \\ 0.504 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = 9 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < 9 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta\left(T > 9\right) + 0.504 P_\theta\left(T = 9\right)$$

donde $T = \sum_{j=1}^{5} X_j \sim Poisson(5\theta)$.

Ejercicio 4. Modelo 3

c) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \geq 1 \\ H_1 &: \theta < 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

El modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = \sum_{j=1}^{5} X_j$.

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < c \\ a & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = 0.05.$$

Ejercicio 4. Modelo 3

Se elige c de forma que

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j < c\right) &< 0.05 \\
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j \leq c\right) &\geq 0.05.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Modelo 3

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j < 2\right) &= 0.0404 < 0.05 \\
P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j \leq 2\right) &= 0.0404 + 0.0842 = 0.1246 > 0.05
\end{aligned}
$$

donde $T = \sum_{j=1}^{5} X_j \sim Poisson(5\theta_0) \equiv Poisson(5)$ bajo H_0.

Ejercicio 4. Modelo 3

Por tanto $c = 2$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < 2 \\ a & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = 2 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > 2 \end{cases}$$

El valor de a se calcula de forma que

$$\begin{aligned} \alpha &= E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j < 2\right) + aP_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{5} X_j = 2\right) \\ &= 0.0404 + a\,0.0842 = 0.05 \end{aligned}$$

Entonces $a = 0.114$ y el test de hipótesis es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j < 2 \\ 0.114 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = 2 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 3

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta\,(T < 2) + 0.114 P_\theta\,(T = 2)$$

donde $T = \sum_{j=1}^{5} X_j \sim Poisson(5\theta)$.

Modelo 4. Población $U(0,\theta)$, $n=4, \theta_0=1, \theta_1=2$.

a) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha=0.05$ para contrastar $H_0:\theta=\theta_0$ frente a $H_1:\theta=\theta_1 (\theta_0<\theta_1)$

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta=1 \\ H_1 &: \theta=2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 4

Por el lema de Neyman-Pearson, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} \geq c \\ \\ 0 & \text{si} \quad \frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} < c \end{cases}$$

tal que $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$.

Se puede observar que

$$\frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 I_{(0,2)}(x_{(4)})}{\left(\frac{1}{1}\right)^4 I_{(0,1)}(x_{(4)})} = \frac{I_{(0,2)}(x_{(4)})}{2^4 I_{(0,1)}(x_{(4)})}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2^4} & \text{si} \quad 0 < x_{(4)} < 1 \\ \infty & \text{si} \quad 1 \leq x_{(4)} < 2 \end{cases}$$

es creciente en $t = x_{(4)}$.

Ejercicio 4. Modelo 4

Entonces

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \geq c \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(X_{(4)} \geq c\right) = 1 - P_{\theta_0}\left(X_{(4)} < c\right) = 1 - \left(\frac{c}{\theta_0}\right)^4 = 1 - c^4 = 0.05$$

Ejercicio 4. Modelo 4

Por tanto $c^4 = 0.95$, de donde $c = 0.987$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \geq 0.987 \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} < 0.987 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 4

b) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ y encontrar su función de potencia.

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \leq 1 \\ H_1 &: \theta > 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 4

Se puede observar que

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\theta_2}(x_1,\dots,x_n)}{f_{\theta_1}(x_1,\dots,x_n)} &= \frac{\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^4 I_{(0,\theta_2)}(x_{(4)})}{\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^4 I_{(0,\theta_1)}(x_{(4)})} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^4 & \text{si} \quad 0 < x_{(4)} < \theta_1 \\ \infty & \text{si} \quad \theta_1 \le x_{(4)} < \theta_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

es creciente en $t = x_{(4)}$ cuando $\theta_1 < \theta_2$ y entonces el modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = X_{(4)}$.

Ejercicio 4. Modelo 4

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \geq c \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = 0.05$$

Ejercicio 4. Modelo 4

Por tanto el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \geq 0.987 \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} < 0.987 \end{cases}$$

La función de potencia es

$$
\begin{aligned}
\beta(\theta) &= E_\theta(\phi) = P_\theta(X_{(4)} \geq 0.987) = 1 - P_\theta(X_{(4)} < 0.987) \\
&= \begin{cases} 1 - \left(\frac{0.987}{\theta}\right)^4 = 1 - \frac{0.95}{\theta^4} & \text{si} \quad 0.987 < \theta \\ 0 & \text{si} \quad 0.987 \geq \theta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta \leq 0.987 \\ 1 - \left(\frac{0.987}{\theta}\right)^4 = 1 - \frac{0.95}{\theta^4} & \text{si} \quad \theta > 0.987 \end{cases}
\end{aligned}
$$

c) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \theta \geq 1 \\
H_1 &: \theta < 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Modelo 4

El modelo tiene razón de verosimilitud monótona creciente en $T = X_{(4)}$. Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \leq c \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}(X_{(4)} \leq c) = c^4$$

Ejercicio 4. Modelo 4

Por tanto $c^4 = 0.05,$ de donde $c = 0.47$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_{(4)} \leq 0.473 \\ 0 & \text{si} \quad x_{(4)} > 0.473 \end{cases}$$

La función de potencia es

$$
\begin{aligned}
\beta(\theta) &= E_\theta(\phi) = P_\theta(X_{(4)} \leq 0.473) \\
&= \begin{cases} \left(\frac{0.473}{\theta}\right)^4 = \frac{0.05}{\theta^4} & \text{si} \quad 0.473 < \theta \\ 1 & \text{si} \quad 0.473 \geq \theta \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \theta \leq 0.473 \\ \left(\frac{0.473}{\theta}\right)^4 = \frac{0.05}{\theta^4} & \text{si} \quad \theta > 0.473 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Modelo 5

Modelo 5. Población $Gamma(\theta, p = 1/2)$, $n = 10, \theta_0 = 1/2, \theta_1 = 1$.

a) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1 (\theta_0 < \theta_1)$

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = 1/2 \\ H_1 &: \theta = 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 5

Por el lema de Neyman-Pearson, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \dfrac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} \geq c \\ \\ 0 & \text{si} \quad \dfrac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} < c \end{cases}$$

tal que $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$.

Ejercicio 4. Modelo 5

Se puede observar que

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\theta_1}(x_1,\ldots,x_n)}{f_{\theta_0}(x_1,\ldots,x_n)} &= \frac{\left(\frac{1^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\right)^{10} \exp\left\{-1\sum_{j=1}^{10} x_j\right\} / \prod_{j=1}^{10} x_j^{1/2-1}}{\left(\frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)}\right)^{10} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10} x_j\right\} / \prod_{j=1}^{10} x_j^{1/2-1}} \\
&= 2^5 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{10} x_j\right\}
\end{aligned}
$$

decrece con $t = \sum_{j=1}^{10} x_j$.

Ejercicio 4. Modelo 5

Entonces

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \leq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j \leq c\right) = P\left(T \leq c\right) = 0.05$$

y como $T = \sum_{j=1}^{10} X_j \sim \chi^2_{10}$ bajo H_0, $c = \chi^2_{10;0.95} = 3.94$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \leq 3.94 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j > 3.94 \end{cases}$$

b) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \theta \leq 1/2 \\ H_1 &: \quad \theta > 1/2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 5

El modelo pertenece a la familia exponencial, ya que

$$f_\theta(x) = \frac{\theta^{1/2}}{\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} \exp\{-\theta x\}$$

tomando $c(\theta) = \theta^{1/2}$, $h(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}$, $q(\theta) = -\theta$ y $t(x) = x$.

Como $q(\theta)$ es decreciente, el modelo tiene razón de verosimilitud monótona decreciente en $T = \sum_{j=1}^{10} X_j$.

Ejercicio 4. Modelo 5

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \leq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j > c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$$

Ejercicio 4. Modelo 5

Entonces el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \leq 3.94 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j > 3.94 \end{cases}$$

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \leq 3.94) = P_\theta\left(2\theta T \leq 7.88\,\theta\right) = P_\theta\left(Y \leq 7.88\,\theta\right)$$

donde $Y = 2\theta T = 2\theta \sum_{j=1}^{10} X_j \sim \chi^2_{10}$.

Ejercicio 4. Modelo 5

c) Hallar el test UMP de tamaño $\alpha = 0.05$ para contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$ y encontrar su función de potencia

Queremos contrastar

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta \geq 1/2 \\ H_1 &: \theta < 1/2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Modelo 5

El modelo tiene razón de verosimilitud monótona decreciente en $T = \sum_{j=1}^{10} X_j$.

Por el teorema de Karlin-Rubin, el test U. M. P. es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \geq c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j < c \end{cases}$$

tal que

$$\alpha = E_{\theta_0}(\phi) = P_{\theta_0}\left(\sum_{j=1}^{10} X_j \geq c\right) = P\left(T \geq c\right) = 0.05$$

Ejercicio 4. Modelo 5

Como $T = \sum_{j=1}^{10} X_j \sim \chi^2_{10}$ bajo H_0, $c = \chi^2_{10;0.05} = 18.307$ y el test es

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \geq 18.307 \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{j=1}^{10} x_j < 18.307 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Modelo 5

La función de potencia es

$$\beta(\theta) = E_\theta(\phi) = P_\theta(T \geq 18.307) = P_\theta\left(2\theta T \geq 36.614\,\theta\right) = P_\theta\left(Y \geq 36.614\,\theta\right)$$

donde $Y = 2\theta T = 2\theta \sum_{j=1}^{10} X_j \sim \chi^2_{10}$.