Podemos simplificar más aún la expresión anterior:

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(n_2+n_1)}{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)} \cdot \frac{\lambda_1^{n_1}}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{u})^{n_1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n_2}}{(\lambda_1+\frac{\lambda_2}{u})^{n_2}} \cdot \frac{1}{u^{n_2}} \cdot \frac{1}{u} =$$

$$= \frac{1}{Beta(n_1,n_2)} \cdot \left(\frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_2} \cdot \frac{1}{u}.$$

Esta expresión hace intuir que estamos trabajando con una distribución beta, al menos haciendo cierta transformación así que si seguimos operando intentando que aparezca una beta:

$$f_U(u) = \frac{1}{Beta(n_1,n_2)} \cdot \left(\frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_1-1} \left(1-\frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_2-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{u\lambda_1+\lambda_2} =$$

$$= \frac{1}{Beta(n_1,n_2)} \cdot \left(\frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_1-1} \left(1-\frac{u\lambda_1}{u\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n_2-1} \cdot \frac{\lambda_1\lambda_2}{(u\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

Esto es claramente una distribución $Beta(n_1,n_2)$ para la variable aleatoria $W = h(U) = \frac{U\lambda_1}{U\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1}{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1 U}}$.

Efectivamente, si $u \in (0,\infty)$ entonces $w = h(u) = \frac{1}{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1 u}} \in (0,1)$,

$$F_W(w) = P(W \le w) = P(h(U) \le w) = P(U \le h^{-1}(w)) = F_U(h^{-1}(w))$$

donde $h^{-1}(w) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{w}{1-w}$.

Así $f_W(w) = f_U(h^{-1}(w)) \cdot |(h^{-1}(w))'| =$

$$= \frac{1}{Beta(n_1,n_2)} \cdot (h(h^{-1}(w)))^{n_1-1} (1-h(h^{-1}(w)))^{n_2-1} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{w}{1-w}\lambda_1+\lambda_2\right)^2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{1-w+w}{(1-w)^2}}_{K}$$

$$= \frac{1}{Beta(n_1,n_2)} w^{n_1-1}(1-w)^{n_2-1} \cdot K$$