MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Entregas
Hoja 1. Complementos de álgebra matricial

1 Una matriz de la forma

$$P^{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i) & & & & j) & & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ j) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

se denomina *matriz de permutación* de las líneas i y j. Si $B = (b_{kl})_{k,l=1}^{n}$ comprobar que

$$(P^{ij}B)_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si} \quad k \neq i, j, \quad l = 1, 2, \ldots, n \\ b_{jl} & \text{si} \quad k = i, \quad l = 1, 2, \ldots, n \\ b_{il} & \text{si} \quad k = j, \quad l = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad \text{y} \quad (BP^{ij})_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \text{si} \quad l \neq i, j, \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ b_{kj} & \text{si} \quad l = i, \quad k = 1, 2, \ldots, n \\ b_{ki} & \text{si} \quad l = j, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

es decir, al multiplicar la matriz B a la izquierda (respectivamente, derecha) por P^{ij} se intercambian las filas (respectivamente, columnas) i y j de B. Además, probar que

$$\det(P^{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{y} \quad (P^{ij})^{-1} = P^{ij}.$$

2 Se considera una matriz del tipo

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \ell_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \ell_{nk} & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

con $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Demostrar que E_k puede escribirse en la forma

$$E_k = I + \ell_k \mathbf{e}_k^{\mathrm{T}},$$

siendo $\mathbf{e}_k$ el k–ésimo vector de la base canónica y $\ell_k = (0, \overset{k)}{\ldots}, 0, \ell_{k+1,k}, \ell_{k+2,k}, \ldots, \ell_{nk})^{\mathrm{T}}$. Probar que E_k es inversible y su inversa es

$$(E_k)^{-1} = I - \ell_k \mathbf{e}_k^{\mathrm{T}}.$$

3 Demostrar que si existen un número $r > 0$ y una norma matricial $\|\cdot\|$ tales que $A = rI + B$ con $\|B\| < r$ entonces A es inversible y

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{r - \|B\|}.$$