Álvaro Delgado Aguado

1) Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $\{x_0,\dots,x_n,x_{n+1}\}\subset[a,b]$ con $x_i\neq x_j$ si $i\neq j$. Si $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son respectivamente los polinomios de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ y $\{x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\}$, demostrar que:

$$P(x)=\frac{(x-x_0)P_2(x)-(x-x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1}-x_0}$$

es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\}$.

Dem/: Realmente, las condiciones que nos arroja el enunciado nos llevan a aplicar de manera natural el Lema de Aitken que se enunció y demuestra en la página 283 del Libro (4ª Edición), escogiendo $x_i=x_{n+1}$, $x_j=x_0$, $S=\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ y $T=\{x_0,\dots,x_n\}$, obteniéndose en tal caso el resultado que buscábamos.
No obstante, veamos la argumentación:
Notemos que $S=\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ y $T=\{x_0,\dots,x_n\}$ tienen la misma cantidad de puntos ($n+1$ puntos).
Denotemos por $P(x):=\dfrac{(x_i-x)P_1(x)-(x_j-x)P_2(x)}{x_i-x_j}=\dfrac{(x_{n+1}-x)P_1(x)-(x_0-x)P_2(x)}{x_{n+1}-x_0}=\dfrac{(x-x_0)P_2(x)-(x-x_{n+1})P_1(x)}{x_{n+1}-x_0}$
Sabemos entonces que, si $P_1(x),P_2(x)\in\mathbb{P}_m$ (en efecto, con $m=n$ por ser $P_1(x)$ y $P_2(x)$ polinomios de interpolación de $n+1$ puntos), se tiene entonces por el aspecto de $P(x)$ que $P(x)\in\mathbb{P}_{m+1}$ (combinación lineal de polinomios viviendo en $\mathbb{P}_{m+1}$).
Así, por un lado, "$P(x)$ tiene grado el que tiene que tener", como hemos dicho alguna vez en clase, ya que queremos un polinomio de interpolación de $n+2$ puntos, por lo que tendrá grado menor o igual que $n+1$ (en efecto, pues $m+1=n+1$).
Además, "vale lo que tiene que valer" sobre esos puntos ($n+2$ puntos) de la partición donde queremos interpolar. En efecto:

$$P(x_i)=P(x_{n+1})=P_2(x_{n+1})\underset{\uparrow}{=}f(x_{n+1})=f(x_i)$$

Pues x_{n+1} está en la partición de interpolación y $P_2(x)$ es el Polinomio de Interp.

$$P(x_j)=P(x_0)=P_1(x_0)\underset{\uparrow}{=}f(x_0)=f(x_j)$$

Pues x_0 está en la partición de interpolación y $P_1(x)$ es el Polinomio de Interp.

Para $k\notin\{i,j\}$, como $P_2(x_k)=P_1(x_k)=f(x_k)$, tenemos que $P(x_k)=\dfrac{(x_i-x_k)f(x_k)-(x_j-x_k)f(x_k)}{x_i-x_j}=\dfrac{f(x_k)(x_i-\cancel{x_k}-x_j+\cancel{x_k})}{x_i-x_j}=f(x_k)$

(Pues $x_k\in S\cap T$ y por tanto podemos verlo viviendo en S pero también viviendo en T)

Finalmente, por la unicidad del polinomio de interpolación, como $P(x)\in\mathbb{P}_{n+1}$ e interpola a f en todos los puntos de $S\cup T=\{x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\}$, tenemos que $P(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange de la función f en los nodos $\{x_0,x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\}$.

② Demostrar que si una función spline cúbica coincide, en cada subintervalo de una partición del intervalo $[a,b]$, con un polinomio de grado menor o igual que 2, entonces dicha función es un polinomio de grado menor o igual que 2 globalmente en todo $[a,b]$. Probar que si, además, se imponen condiciones de tipo I, la función será una recta en todo $[a,b]$.

a) Consideremos que trabajamos sobre la partición del intervalo $[a,b]$ denotando a esta por:
$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$
Sabemos por hipótesis que no solo es menor o igual que 3 el grado del polinomio que representa a la función en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\dots,n-1$ (definición de función spline cúbica), sino que es de hecho un polinomio de grado menor o igual que 2.
Veamos qué ocurre con la función en 2 subintervalos contiguos cualesquiera, i.e: $[x_i, x_{i+1}]$ y $[x_{i+1}, x_{i+2}]$.
Podemos suponer por lo anteriormente argumentado que la función spline cúbica restringida a $[x_i, x_{i+1}]$ quedará representada por un polinomio ax^2+bx+c de grado menor o igual que 2 para ciertos $a,b,c \in \mathbb{R}$.
De igual manera tenemos que $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ representa a la función en $[x_{i+1}, x_{i+2}]$, para ciertos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Ahora bien, debido a la regularidad que presenta una función spline cúbica ($\mathcal{C}^2([a,b])$), tenemos en particular esta regularidad en el "punto de pegado" x_{i+1}.
Se satisface por tanto (denotando por S a la función spline cúbica):

$$\begin{cases} S(x_{i+1}^-) = S(x_{i+1}^+) \\ S'(x_{i+1}^-) = S'(x_{i+1}^+) \\ S''(x_{i+1}^-) = S''(x_{i+1}^+) \end{cases}, \text{ lo cual nos dice que } \begin{cases} a(x_{i+1})^2 + b(x_{i+1}) + c = \alpha(x_{i+1})^2 + \beta(x_{i+1}) + \gamma \\ 2a(x_{i+1}) + b = 2\alpha(x_{i+1}) + \beta \\ 2a = 2\alpha \end{cases}.$$

Resolviendo por remonte obtenemos que $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$, y en consecuencia los polinomios que representaban a la función en cada subintervalo son iguales.
Como este argumento hemos dicho que es aplicable a cada par de subintervalos contiguos, obtenemos una cadena de igualdades de coeficientes que muestra que en efecto, la función spline cúbica bajo las condiciones supuestas resulta ser de manera global en $[a,b]$ un polinomio de grado menor o igual que 2.

b) Recordemos que las condiciones de Tipo I eran: $\begin{cases} S''(a) = 0 \\ S''(b) = 0 \end{cases}$

Además, hemos visto antes no solo que S es un polinomio de grado menor o igual que 2, sino que de hecho se corresponde con la extensión a $[a,b]$ de cualquier polinomio que represente a la función spline en un subintervalo.
Supongamos, por ejemplo, el primero de los subintervalos, i.e: $[a, x_1]$. Sea $S|_{[a,x_1]} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
Tenemos $S = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Por tanto, $S'' = 2\alpha$ $\forall x \in [a,b]$ (en particular para $x = a$)
Como se tiene por hipótesis que $S''(a) = 0 \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
Consecuentemente, obtenemos que $S = \beta x + \gamma$, siendo de hecho un polinomio de grado menor o igual que 1, y por tanto, una recta.

③ a) Para cada $n\in\mathbb{N}$, determinar el valor que se obtiene al aproximar la integral $I_n=\int_0^n e^{sen(\pi x)}dx$ mediante la fórmula de Newton-Cotes cerrada de $n+1$ puntos.

Aproximar según estas bases consiste en $I_n=\int_0^n e^{sen(\pi x)}dx \simeq \int_0^n P_n(x)\,dx$, donde $P_n(x)$ es el polinomio que interpola a $f(x)=e^{sen(\pi x)}$ en $\{0,1,\dots,n\}$ (equiespaciando el intervalo).

Notemos que podemos calcular de manera sencilla el polinomio de interpolación, pues considerando $P_n(x)=1$, tenemos un polinomio de grado menor o igual que $n\in\mathbb{N}$ que satisface que $\forall k=0,1,\dots,n$, $f(k)=P_n(k)$, ya que $f(k)=e^{sen(\pi k)}=e^0=1=P_n(k)$. Por unicidad del polinomio de interpolación, obtenemos que $P_n(x)=1$.

Entonces, $I_n=\int_0^n e^{sen(\pi x)}dx\simeq\int_0^n P_n(x)dx=\int_0^n 1\,dx=n$

b) Determinar un número m de subintervalos para que el error cometido al aproximar la integral I_{10} mediante la regla de los trapecios sea inferior a una centésima

Para ello nos conviene previamente obtener alguna expresión del error de la fórmula del trapecio compuesta (regla de los trapecios) que dependa al menos de m (el número de subintervalos).

Sabemos que el error en la fórmula del trapecio para calcular $\int_c^d f$ viene dado por $R_{(c,d)}(f)=-\frac{(d-c)^3}{12}f''(\theta)$ para algún $\theta\in(c,d)$.

Sean $h=\frac{b-a}{m}$ y $x_k=a+kh$ con $k=0,1,\dots,m$.

Como $\int_a^b f=\int_{x_0=a}^{x_1}f+\int_{x_1}^{x_2}f+\dots+\int_{x_{m-1}}^{x_m=b}f$, tenemos que el error $R_{(a,b)}(f)$ es la suma de los errores acumulados al aproximar cada una de las "subintegrales" mediante la fórmula del trapecio, i.e: $R_{(a,b)}(f)=\sum_{k=1}^{m}R_{(x_{k-1},x_k)}(f)$

Como $R_{(x_{k-1},x_k)}(f)=-\frac{h^3}{12}f''(\theta_k)$ para algún $\theta_k\in(x_{k-1},x_k)$, obtenemos que $R_{(a,b)}(f)=\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{h^3}{12}\right)f''(\theta_k)$

Aplicando el T^{a} de los Valores Intermedios, $\exists\,\theta\in[a,b]$ tq $f''(\theta)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f''(\theta_k)$

Por tanto, $R_{(a,b)}(f)=\left(-\frac{h^3}{12}\right)m f''(\theta)=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\theta)$, ya que $h\cdot m=b-a$. (Básicamente hemos llegado a la fórmula del Teorema 7.4).

Ahora, con esta expresión, nos será más sencillo llevar a cabo el ejercicio.

Tenemos que $f(x)=e^{sen(\pi x)}$, $f'(x)=\pi\cos(\pi x)e^{sen(\pi x)}$ y $f''(x)=\pi^2e^{sen(\pi x)}(\cos^2(\pi x)-sen(\pi x))$

Puesto que $|sen(\pi x)|\le1$ y $|\cos(\pi x)|\le1$, tenemos $|f''(x)|=\pi^2e^{sen(\pi x)}|\cos^2(\pi x)-sen(\pi x)|\le 2e\pi^2$.

Además, estamos trabajando con $b-a=10$, $h=\frac{10}{m}$.

De esta manera; $|R_{(a,b)}(f)|=\frac{|b-a|h^2}{12}|f''(\theta)|\le\frac{10\cdot\left(\frac{10}{m}\right)^2}{12}2e\pi^2=\frac{10^3\pi^2e}{6m^2}$

Por tanto, si queremos hacer satisfacerse $|R_{(a,b)}(f)|\le10^{-2}$, basta que $\frac{10^3\pi^2e}{6m^2}\le10^{-2}$, es decir, despejando, $m^2\ge\frac{10^3\pi^2e}{6\cdot10^{-2}}=\frac{10^5\pi^2e}{6}$.

Basta considerar por tanto un número de subintervalos $m\ge\frac{\sqrt{10^5}\,\pi\sqrt{e}}{\sqrt{6}}$ para que el error cometido no sea superior a la centésima, y un número de subintervalos estrictamente mayor me asegurará un error estrictamente menor (a la centésima).

4) Determinar, justificando tu respuesta, el valor que se obtiene al aproximar las integrales que siguen mediante la fórmula de Newton-Cotes cerrada de 1001 puntos

a) $\int_0^{4000} x^{1001} \operatorname{sen}(\pi x)\, dx$

Newton-Cotes se vale del Polinomio de Interpolación para aproximar el valor de la integral.
Como se trata de la fórmula cerrada de 1001 puntos, tendremos que calcular el $P_{1000}(x)$, el polinomio de interpolación de $x^{1001}\operatorname{sen}(\pi x)$ de los 1001 puntos del conjunto $\{0,4,8,\dots,4000\}$ (equiespaciando el intervalo de integración), que tendrá grado menor o igual que 1000.
Como ya hicimos anteriormente, afirmamos que $P_{1000}(x)=0$, pues "tiene grado el que tiene que tener" (grado menor o igual que 1000), y "vale lo que tiene que valer" sobre los nodos o puntos de interpolación (en efecto; ya que $\sin(\pi x)=0$ para $x\in\mathbb{Z}$, y en particular sobre los puntos de interpolación). Por tanto, por unicidad podemos decir que $P_{1000}(x)=0$. Así;

$$\int_0^{4000} x^{1001}\operatorname{sen}(\pi x)\,dx \simeq \int_0^{4000} P_n(x)\,dx = \int_0^{4000} 0\,dx = 0$$

b) $\int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)\,dx$

Nos valdremos fuertemente de la observación 7.5 del Libro (4º Edición) y del hecho de que dos funciones que valgan lo mismo sobre los puntos de interpolación tienen el mismo polinomio de interpolación.
Así, si queremos aproximar $\int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)dx$ mediante la fórmula cerrada de Newton-Cotes de 1001 puntos, deberemos calcular $\int_0^{4000} P_n(x)dx$ donde $P_n(x)$ resulta ser el polinomio de interpolación de $x^{1001}\cos(\pi x)$ sobre el mismo conjunto de los 1001 puntos del apartado anterior, y donde $P_n(x)$ tiene grado menor o igual que 1000.
Ahora bien, observemos que, como x^{1001} y $x^{1001}\cos(\pi x)$ coinciden sobre los puntos de interpolación (pues de hecho para todo entero par se tiene que $\cos(\pi x)=1$, y los puntos de interpolación resultan ser pares), tendrán el mismo polinomio de interpolación.
Por tanto, todo se reduce a calcular $\int_0^{4000} Q_n(x)dx$ donde $Q_n(x)$ es el polinomio de interpolación de x^{1001} de los 1001 puntos de nuestro conjunto de nodos, i.e, la aproximación de Newton-Cotes cerrada de 1001 puntos para la integral $\int_0^{4000} x^{1001}dx$
No obstante, por la observación 7.5, como x^{1001} se trata de un polinomio de grado $n+1=1001$ y $n=1000$ es par, la fórmula de Newton-Cotes para 1001 puntos es exacta para x^{1001}.
Por tanto, el error cometido es nulo y nos basta con calcular de hecho la propia integral $\int_0^{4000} x^{1001}dx$.
Entonces, $\int_0^{4000} x^{1001}\cos(\pi x)\,dx \simeq \int_0^{4000} P_n(x)dx = \int_0^{4000} Q_n(x) = \int_0^{4000} x^{1001}\,dx = \left.\frac{x^{1002}}{1002}\right]_0^{4000} = \frac{4000^{1002}}{1002}$