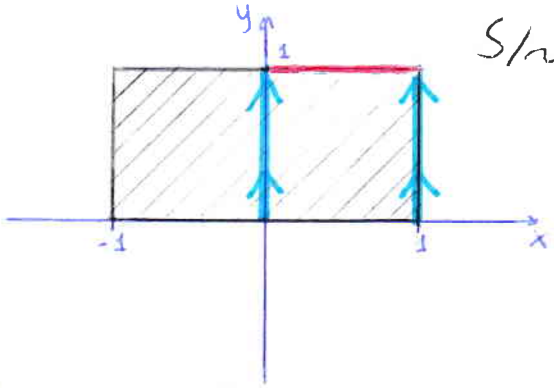
Juan Carlos Llamas Núñez 3º DG Mat-Inf

Lista 9

Número 9.20.- Consideramos en el rectángulo $S=\{(x,y) : -1\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ la relación de equivalencia $\sim$ definida en 3.26 y el correspondiente cociente $X=S/\sim$. Mostrar que X es simplemente conexo, pero no es homeomorfo a una esfera.

Recordamos que la relación de equivalencia $\sim$ venía definida como

$(1,y)\sim(0,y)$ y $(x,1)\sim(x',1)$ para $0\leq x,x'\leq 1$.



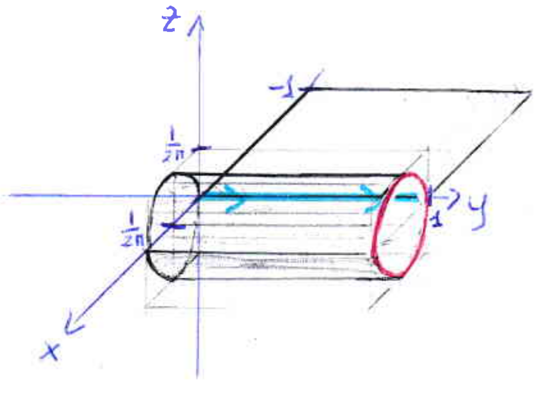
$S/\sim \; = X$

Con esta relación identificamos los segmentos $\{0\}\times[0,1]$ con $\{1\}\times[0,1]$ luego el espacio $X=S/\sim$ es homeomorfo a $Y=Y_1/\sim_1$

donde $Y_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-\frac{1}{2\pi})^2+z^2=\frac{1}{4\pi^2}, y\in[0,1]\}\cup$

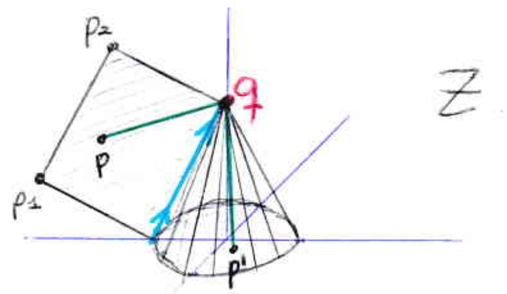
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1\leq x\leq 0, 0\leq y\leq 1, z=0\}$

y $\quad p\sim_1 p' \iff p,p'\in\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-\frac{1}{2\pi})^2+z^2=\frac{1}{4\pi^2}, y=1\}$



$Y=Y_1/\sim_1$

De igual manera, al identificar toda la circunferencia a un punto, el espacio Y es homeomorfo a un espacio Z que es, esencialmente, un cono con una "aleta":



Este conjunto Z es estrellado ya que dado cualquier punto $p \in Z$, el segmento que une p con el vértice del cono q está completamente contenido en el conjunto. En particular es simplemento conexo luego $\pi(Z) = \{1\}$. Como $Z \approx X$ entonces X es simplemente conexo y $\pi(X) = \{1\} = \pi(\mathbb{S}^2)$, sin embargo, X y $\mathbb{S}^2$ no son homeomorfos. Supongamos que sí, es decir, $X \approx \mathbb{S}^2$ y $X \approx Z$, luego $Z \approx \mathbb{S}^2$. Sea f el homeomorfismo de Z a $\mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} f : Z &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Sean $p_1, p_2 \in Z$ las esquinas del cuadrado que forma la aleta. Entonces $Z \setminus \{p_1, p_2\}$ sigue siendo estrellado luego es simplemente conexo y $\pi(Z \setminus \{p_1, p_2\}) = \{1\}$. Por otro lado,

$$f(Z \setminus \{p_1, p_2\}) = \mathbb{S}^2 \setminus \{f(p_1), f(p_2)\}. = (\mathbb{S}^2 \setminus \{f(p_1)\}) \setminus \{f(p_2)\}.$$

Sabemos que la esfera menos un punto es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$ vía la proyección estereográfica y que $\mathbb{R}^2$ menos un punto se puede deformar a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ con el retracto radial (que es deformación), luego:

$$(\mathbb{S}^2 \setminus \{f(p_1)\}) \setminus \{f(p_2)\} \approx \mathbb{R}^2 \setminus \{q\} \quad \text{y} \quad \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Llegamos a que $Z \setminus \{p_1, p_2\} \approx \mathbb{S}^2 \setminus \{f(p_1), f(p_2)\}$ pero

$$\pi(Z \setminus \{p_1, p_2\}) = \{1\} \neq \mathbb{Z} = \pi(\mathbb{S}^2 \setminus \{f(p_1), f(p_2)\})$$

lo que supone una contradicción que viene de haber supuesto que X y $\mathbb{S}^2$ son homeomorfos.

Número 9.13. Calcular el grupo fundamental de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^3$:

$Q_1: x^2 - y^2 - z^2 = 2$, $Q_2: z = x^2 + y^2$, $Q_3: x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $Q_4: x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Si comenzamos con Q_1 nos damos cuenta de que se trata de un hiperboloide de dos hojas. Como el espacio no es conexo, nos restringimos a cada una de sus componentes conexas que son Q_1^+ y Q_1^- las hojas del hiperboloide. Como $Q_1^+ \approx Q_1^-$ calculamos únicamente el grupo fundamental de Q_1^+. Para ello nos damos cuenta de que Q_1^+ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ por el homeomorfismo f:

$$f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 2,\ x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (y, z)$$

que es la proyección de la hoja de hiperboloide con $x > 0$ sobre el plano $x = 0$. Es sencillo probar que esto es un homeomorfismo y entonces $\pi(Q_1^+) = \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$ porque $\mathbb{R}^2$ es convexo ($\Rightarrow$ simplemente conexo)

La cuádrica Q_2 es un paraboloide elíptico y podemos usar la misma idea que para Q_1^+ para ver que Q_2 es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Sea g:

$$g: \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z=x^2+y^2\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto g(x,y,z)=(x,y)$$

Se puede probar de manera estándar que g es realmente un homeomorfismo y razonando igual que para Q_1^+ se tiene que

$\pi(Q_2)=\pi(\mathbb{R}^2)=\{1\}$.

La cuádrica Q_3 es un cono y vamos a probar que es estrellado. Como los conjuntos estrellados son simplemente conexos habremos probado que $\pi(Q_3)=\{1\}$. Para ver que es estrellado tomamos $P=(x_0,y_0,z_0)\in Q_3$ y vamos a ver que el segmento que une P con $O=(0,0,0)\in Q_3$ está contenido en Q_3: Sea $\sigma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \longmapsto \sigma(t)=tO+(1-t)P=(1-t)P$$

Así $(1-t)P=(1-t)(x_0,y_0,z_0)=((1-t)x_0,(1-t)y_0,(1-t)z_0)$ y

$$((1-t)x_0)^2+((1-t)y_0)^2-((1-t)z_0)^2=(1-t)[x_0^2+y_0^2-z_0^2] \underset{\substack{\Uparrow \\ P\in Q_3}}{=} 0 \quad \Rightarrow \sigma(t)\in Q_3 \quad \forall t\in[0,1]$$

Por último, la cuádrica Q_4 es un hiperboloide de una hoja. Veamos que es homeomorfo a un cilindro. Sea h:

$$h:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=1\} \longrightarrow \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$$
$$(x,y,z) \longmapsto h(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right)$$

Entonces h define un homeomorfismo entre el hiperboloide de una hoja y el cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Por tanto $\pi(Q_4) = \pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) = \pi(\mathbb{S}^1) \times \pi(\mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \{1\} = \mathbb{Z}$