MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Problemas
Hoja 2. Complementos de álgebra matricial

1 Demostrar que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ y

$$B = \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}} \\ b_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ b_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \text{ entonces } Bx = \begin{pmatrix} b_1^{\mathrm{T}}x \\ b_2^{\mathrm{T}}x \\ \vdots \\ b_m^{\mathrm{T}}x \end{pmatrix}.$$

2 Mostrar que si

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathcal{M}_{m\times n} \text{ y } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$$

entonces

$$Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n.$$

3 Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_p) \in \mathcal{M}_{n\times p}$$

probar que

$$AB = (Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_p).$$

4 Utilizar los Problemas 2 y 3 para demostrar que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $x \in \mathcal{M}_{p\times 1}$ entonces

$$A(Bx) = (AB)x.$$

5 Usar los Problemas 3 y 4 para mostrar que si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$ entonces

$$A(BC) = (AB)C.$$

6 Si $v, w \in \mathbf{V}$, determinar la forma de vw^*.

7 Sean $A, D \in \mathcal{M}_n$ con $D = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$. Encontrar las expresiones de DA y AD.

8 Sean D y E matrices diagonales y λ un escalar. Demostrar que λD, $D + E$ y DE son matrices diagonales y determinarlas.

9 Sean A y B matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y λ un escalar. Demostrar que λA, $A + B$ y AB son matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y determinar sus elementos diagonales.

10 **Inversas de matrices diagonales y triangulares**

a) Demostrar que si D es una matriz diagonal e inversible, su inversa es también diagonal. Determinar D^{-1}.

b) Mostrar que si A es una matriz triangular superior (respectivamente inferior) e inversible, su inversa es también triangular superior (respectivamente inferior). Determinar los elementos diagonales de A^{-1}.

11 Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz triangular y normal entonces A es diagonal.

12 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Probar los siguientes resultados:

$$\text{a) } \operatorname{sp}(AB) = \operatorname{sp}(BA). \qquad \text{b) } \varrho(A^k) = (\varrho(A))^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

13 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Probar que

$$\lambda \in \operatorname{sp}(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in \operatorname{sp}(\alpha A).$$

14 Demostrar que si A es triangular por bloques entonces

$$\operatorname{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^{p} \operatorname{sp}(A_{ii}).$$

siendo A_{ii}, $i = 1, \ldots, p$ los bloques de la diagonal de A. Deducir que el determinante de una matriz triangular por bloques es el producto de los determinantes de los bloques de su diagonal.

15 Generalizar los resultados del Problema 10 para matrices diagonales, triangulares superiores e inferiores, por bloques.

16 Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz hermítica definida positiva y se descompone en bloques, los bloques diagonales son matrices hermíticas y definidas positivas. En particular, deducir que los elementos diagonales de A son números positivos así como sus menores principales.

17 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica (resp. simétrica) definida positiva.

a) Probar que existe $B \in \mathcal{M}_n$ hermítica (resp. simétrica) definida positiva tal que $A = B^2$.

b) Demostrar que si $\mathrm{cond}_2(A) > 1$ entonces $\mathrm{cond}_2(B) < \mathrm{cond}_2(A)$.