Hoja 3

Variables Aleatorias Unidimensionales

Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Sean* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ *y* $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *una aplicación.*

(a) *Demostrar que:*

i) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

ii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

iii) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$

(b) *Demostrar que* $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

(a) Demostramos cada una de las igualdades de manera conjuntista:

i) $\underline{f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A^c) &\iff f(x) \in A^c \\ &\iff f(x) \notin A \\ &\iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \in (f^{-1}(A))^c \end{aligned}$$

ii) $\underline{f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\textstyle\bigcup_{i\in I} A_i) &\iff f(x) \in \textstyle\bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff \exists i_0 \in I :\ f(x) \in A_{i_0} \\ &\iff \exists i_0 \in I :\ x \in f^{-1}(A_{i_0}) \iff x \in \textstyle\bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

iii) $\underline{f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\textstyle\bigcap_{i\in I} A_i) &\iff f(x) \in \textstyle\bigcap_{i\in I} A_i \\ &\iff \forall i \in I :\ f(x) \in A_i \\ &\iff \forall i \in I :\ x \in f^{-1}(A_i) \iff x \in \textstyle\bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

(b) Demostramos la igualdad recurriendo al método de probar el doble contenido:

$\subset$ En primer lugar veamos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega_1)$. Para ello, comprobemos que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ verifica cada una de las tres propiedades que caracterizan una σ-álgebra:

i) $\underline{\Omega_1 \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))}$

$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$, luego $\Omega_2 \in \sigma(\mathcal{C})$ por ser ésta una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega_2)$. Como $\Omega_1 = f^{-1}(\Omega_2)$, entonces se concluye que $\Omega_1 \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

ii) $\underline{\forall A \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})),\ A^c \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))}$

Supongamos que $A \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, entonces por definición $A = f^{-1}(B)$ con $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Siendo así, aplicando el apartado (1a.i) se tiene $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$. Como $B \in \sigma(\mathcal{C})$ y $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra, se deduce que $B^c \in \sigma(\mathcal{C})$. Por tanto, $A^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

iii) $\underline{\forall \{A_n : n \geq 1\} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})),\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))}$

Supongamos que $\{A_n : n \geq 1\} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, entonces podemos encontrar $\{B_n : n \geq 1\} \subset \sigma(\mathcal{C})$ tal que $\forall n \geq 1$, $A_n = f^{-1}(B_n)$. Siendo así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$ en virtud del apartado (1a.ii). Como $\{B_n : n \geq 1\} \subset \sigma(\mathcal{C})$ y $\sigma(\mathcal{C})$ es una σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \sigma(\mathcal{C})$. Por tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Es claro que $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$, por lo que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. De esta forma concluimos que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$, ya que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $f^{-1}(\mathcal{C})$ y $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ es una σ-álgebra que contiene a $f^{-1}(\mathcal{C})$.

$\supset$ Tomemos el conjunto $\mathcal{D} = \{D \in \mathcal{P}(\Omega_2) : f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. Comprobamos que $\mathcal{D}$ es una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega_2)$ verificando cada una de las tres propiedades de caracterización:

i) $\underline{\Omega_2 \in \mathcal{D}}$

$f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}(\Omega_1)$, luego $\Omega_1 \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ por ser ésta una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega_1)$. Como $f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1$, entonces se concluye que $\Omega_2 \in \mathcal{D}$.

ii) $\underline{\forall D \in \mathcal{D},\ D^c \in \mathcal{D}}$

Supongamos que $D \in \mathcal{D}$, entonces por definición $f^{-1}(D) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Siendo $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ una σ-álgebra, se deduce que $(f^{-1}(D))^c \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Aplicando el apartado (1a.i) se tiene $(f^{-1}(D))^c = f^{-1}(D^c)$, luego se verifica que $D^c \in \mathcal{D}$.

iii) $\underline{\forall \{D_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{D},\ \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}}$

Supongamos que $\{D_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{D}$, entonces $\forall n \geq 1$, $f^{-1}(D_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Siendo $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ una σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Aplicando el apartado (1a.ii) se deduce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$, luego se verifica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Es claro que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$, por lo que $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. De esta forma concluimos que $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$, ya que $\sigma(\mathcal{C})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$. Ahora bien, si $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$, estamos diciendo que $\forall C \in \sigma(\mathcal{C})$, $f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. O equivalentemente, que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Ej. 2. *Sea una urna con 3 bolas blancas, 2 negras y 1 verde. Se extraen 3 bolas al azar y se considera ξ definida como "el número de bolas extraídas". Construir la función de probabilidad inducida por ξ y su función de distribución.*

Tenemos definida la variable aleatoria $\xi :=$ "Obtener exactamente k bolas blancas al extraer 3 bolas" con $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Obtenemos su función de probabilidad inducida usando la regla de Laplace:

CP Extraemos k bolas de una urna con $3+2+1 = 6$ bolas, luego hay $\binom{6}{3}$ posibilidades.

CF Queremos que de entre las 3 bolas extraídas exactamente k sean blancas, luego hay $\binom{3}{k}$ (extraer k blancas entre 3) $\cdot \binom{3}{3-k}$ (extraer $3-k$ entre las $2+1 = 3$ restantes) posibilidades.

Pr $P(\xi = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}}$.

Por tanto, evaluando la función de probabilidad inducida por ξ, tenemos que:

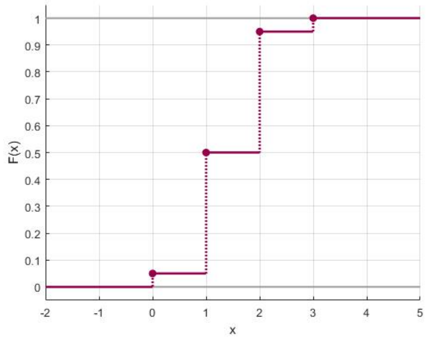
$$P(\xi = 0) = \frac{1}{20} \qquad P(\xi = 1) = \frac{9}{20} \qquad P(\xi = 2) = \frac{9}{20} \qquad P(\xi = 3) = \frac{1}{20}$$

A partir de estos valores podemos construir la función de distribución de ξ. Recordemos que en el caso de una variable aleatoria ξ discreta con soporte $\mathcal{D}_\xi$ se verifica:

$$F_\xi(x) = P_\xi(-\infty,x] = \sum_{k \in \mathcal{D}_\xi :\, k \leq x} P(\xi = k)$$

Por lo que:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{20} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{20} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



Ej. 3. *Sea Ω el espacio muestral asociado al lanzamiento de una moneda equilibrada en tres ocasiones, con puntos muestrales denotados por ω_{ijk} con $i, j, k \in \{C, X\}$. Sea*

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_2 \cup A_3\}$$

una σ-álgebra sobre $\mathcal{P}(\Omega)$, donde $A_1 = \{\omega_{CCX}, \omega_{CXC}\}$, $A_2 = \omega - (A_1 \cup A_3)$ y $A_3 = \{\omega_{XXX}\}$. Sea $X(\omega)$ "el número de caras obtenidas en el resultado ω". Estudiar si X es una variable aleatoria.

$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ será una variable aleatoria si y sólo si es una función medible. Es decir, si y sólo si $\forall a \in \mathbb{R}$, $X^{-1}(\infty,a] \in \mathcal{A}$. Sabemos que lanzando una moneda en tres ocasiones podremos obtener entre 0 y 3 caras, por lo que el soporte de X será $\mathcal{D}_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Siendo así, podemos simplificar el análisis estudiando los conjuntos $X^{-1}(\infty,a]$ por tramos:

- $\underline{a < 0}$
  En este caso, $X^{-1}(\infty,a] = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.
- $\underline{0 \leq a < 1}$
  En este caso, $X^{-1}(\infty,a] = X^{-1}(\{0\}) = \{\omega_{XXX}\} = A_3 \in \mathcal{A}$.
- $\underline{1 \leq a < 2}$
  En este caso, $X^{-1}(\infty,a] = X^{-1}(\{0, 1\}) = \{\omega_{XXX}, \omega_{CXX}, \omega_{XCX}, \omega_{XCX}\} \notin \mathcal{A}$. ¡No se verifica!

Por tanto, X no es una variable aleatoria.

Ej. 4. *Sean $\Omega = \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(\{\omega\}) = 2^{-\omega}$, $\forall \omega \in \Omega$. Se define $\xi(\omega)$ como "el resto de ω (modulo k)". Demostrar que ξ es una variable aleatoria y determinar los valores $P(\xi = r)$, para $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.*

$\xi : (\mathbb{Z}^+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+), P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ será una variable aleatoria si y sólo si es una función medible. Es decir, si y sólo si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\xi^{-1}(\infty,a] \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$. Ahora bien, como $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$, la comprobación es innecesaria. Por tanto, ξ es una variable aleatoria.

En cuanto al cálculo de los valores $P(\xi = r)$, para $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, démonos cuenta de que:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \{k, 2k, 3k, \ldots\} \\ 1 & \text{si } \omega \in \{1, 1+k, 1+2k, \ldots\} \\ \ldots & \\ r & \text{si } \omega \in \{r, r+k, r+2k, \ldots\} \\ \ldots & \\ k-1 & \text{si } \omega \in \{k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots\} \end{cases}$$

Por tanto, distingamos dos casos:

- $\underline{r = 0}$
  En este primer caso, tenemos que $\xi(\omega) = 0$ si y sólo si $\omega \in \{c\,k : c \geq 1\}$. Por tanto:

$$P(\xi = 0) = P(\{\omega = c\,k : c \geq 1\}) = P\left(\bigcup_{c=1}^{\infty} \{\omega = c\,k\}\right) = \sum_{c=1}^{\infty} P(\{\omega = c\,k\})$$

$$= \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{2^{c\,k}} = \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^c = \frac{1}{2^k} \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{c-1} = \frac{1}{2^k} \sum_{c=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^c$$

$$= \frac{1}{2^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^k - 1}$$

- $r \neq 0$

  En este segundo caso, tenemos que $\xi(\omega) = r$ si y sólo si $\omega \in \{r + c\,k : c \geq 0\}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} P(\xi = r) &= P(\{\omega = r + c\,k : c \geq 0\}) = P\left(\bigcup_{c=0}^{\infty} \{\omega = r + c\,k\}\right) \\ &= \sum_{c=0}^{\infty} P(\{\omega = r + c\,k\}) = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+c\,k}} = \frac{1}{2^r} \sum_{c=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^c \\ &= \frac{1}{2^r} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{2^{k+r} - 2^r} \end{aligned}$$

Ej. 5. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ una función Riemann-integrable tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = 1$. Demostrar que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) du$ define una función de distribución absolutamente continua.*

Para demostrar que F es una función de distribución, comprobemos que verifica cada una de las tres propiedades de caracterización:

i) $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$

   Es claro que $F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(u)\, \mathrm{d}u = 0$ (integral degenerada a un punto) y que $F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \mathrm{d}u = 1$ (por hipótesis).

ii) F es monótona no-decreciente

   Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Dado que f es una función no-negativa, deducimos que $F(x + \varepsilon) - F(x) = \int_{x}^{x+\varepsilon} f(u)\, \mathrm{d}u \geq 0$, $\forall \varepsilon > 0$. Por lo que podemos concluir que F es monótona no-decreciente.

iii) F es continua por la derecha

   Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Dado que f es una función Riemann-integrable y de acuerdo al Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, $F(x+\varepsilon) - F(x) = \int_{x}^{x+\varepsilon} f(u)\, \mathrm{d}u = c(\varepsilon)\, \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ con $m \leq \inf_{t \in [x, x+\varepsilon]} f(t) \leq c(\varepsilon) \leq \sup_{t \in [x, x+\varepsilon]} f(t) \leq M$. Pasando al límite se tiene entonces que $\lim_{\varepsilon \to 0}(F(x + \varepsilon) - F(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)\, \varepsilon = 0$. Por lo que podemos concluir que F es continua por la derecha.

Siendo F una función de distribución, es claro que es absolutamente continua ya que es continua en todo punto (lo cual se puede probar de manera análoga a la continuidad por la derecha).

Ej. 6. *La duración T de las conferencias telefónicas en una central es una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha\, e^{-kt} & si\ t > 0 \\ 0 & si\ t \leq 0 \end{cases}$$

con $k > 0$.

(a) *Calcular α para que f sea función de densidad.*

(b) *Si $1/k = 2$ minutos, calcular la probabilidad de que una conversación dure más de 3 minutos.*

(c) *Calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.*

(a) Para que f sea función de densidad, debe verificar las siguientes dos propiedades:

i) f no-negativa

Dado que $e^{-kt} > 0$ con $k, t > 0$, debemos exigir que $\alpha \geq 0$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

La condición se cumple si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} \alpha\, e^{-kt}\,\mathrm{d}t = -\frac{\alpha}{k}\, e^{-kt}\Big]_{t=0}^{t=\infty} = (0) - \left(-\frac{\alpha}{k}\right) = \frac{\alpha}{k} = 1$$

Por tanto, debemos exigir que $\alpha = k$.

Como $k > 0$, $\alpha = k$ para que f sea función de densidad.

(b) En primer lugar démonos cuenta de que si $1/k = 2$, entonces $\alpha = \frac{1}{2}$ a partir del apartado anterior. Queremos calcular la probabilidad de que una conversación dure más de 3 minutos, por tanto computamos:

$$P(T > 3) = \int_{3}^{\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = -e^{-\frac{t}{2}}\Big]_{t=3}^{t=\infty} = (0) - \left(-e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-\frac{3}{2}}$$

(c) Queremos calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos, por tanto computamos:

$$P(3 \leq T \leq 6) = \int_{3}^{6} k\, e^{-kt}\,\mathrm{d}t = -e^{-kt}\Big]_{t=3}^{t=6} = \left(-e^{-6k}\right) - \left(-e^{-3k}\right) = e^{-3k} - e^{-6k}$$

En particular, si $1/k = 2$, entonces $P(3 \leq T \leq 6) = e^{-\frac{3}{2}} - e^{-3}$.

Ej. 7. *Sea F la función definida por*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ x^{2\alpha-1} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \alpha \\ 1 & \text{si } \alpha \leq x \end{cases}$$

(a) *Determinar los valores de α para que F sea función de distribución.*

(b) *Determinar α para que F sea discreta. Análogo para el caso absolutamente continuo.*

(c) *Calcular $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$ cuando $A_n = [\frac{1}{3} + \frac{1}{3^{n+1}}, \alpha)$.*

(a) Para que F sea una función de distribución, debe verificar cada una de las tres propiedades de caracterización:

i) $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$

Es claro que $F(-\infty) = 0$ y que $F(\infty) = 1$ por definición.

ii) F es monótona no-decreciente

En primer lugar, comprobemos que F sea monótona no-decreciente en cada uno de sus tramos de definición. Si $x < \frac{1}{3}$ ó $\alpha \leq x$, es claro que F se comporta adecuadamente pues es constante. Ahora bien, si $\frac{1}{3} \leq x < \alpha$, entonces $F(x) = x^{2\alpha-1}$ es una función monótona no-decreciente si y sólo si $2\alpha - 1 \geq 0$. Debemos exigir por tanto que $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Finalmente, debemos asegurarnos de que en los cambios de tramo de definición tenemos monotonía no-decreciente. Es claro que:

$$\lim_{x \to 1/3^-} F(x) = 0 \leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2\alpha-1} = \lim_{x \to 1/3^+} F(x)$$

Sin embargo, también debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to \alpha^-} F(x) = \alpha^{2\alpha-1} \leq 1 = \lim_{x \to \alpha^+} F(x)$$

Por lo que debemos exigir (con $\alpha \geq \frac{1}{2}$) que:

$$\alpha^{2\alpha-1} \leq 1 \iff (2\alpha - 1)\ln(\alpha) \leq 0 \iff \ln(\alpha) \leq 0 \iff \alpha \leq 1$$

iii) F es continua por la derecha

De acuerdo a la definición a tramos de F, como cada tramo es continuo y están excluidos los extremos derechos de cada intervalo de definición, se tiene continuidad por la derecha.

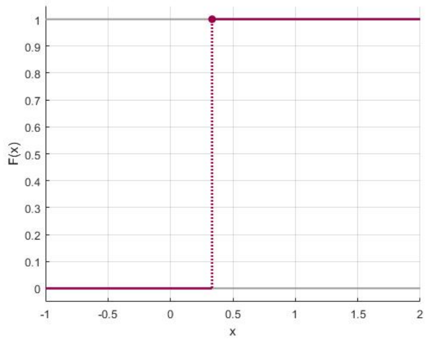
Así pues, $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ para que F sea función de distribución.

(b) Distinguimos tres casos según el valor del parámetro α:

- $\alpha = \frac{1}{2}$

  En este caso la función de distribución es discreta (degenerada en $x = \frac{1}{3}$):

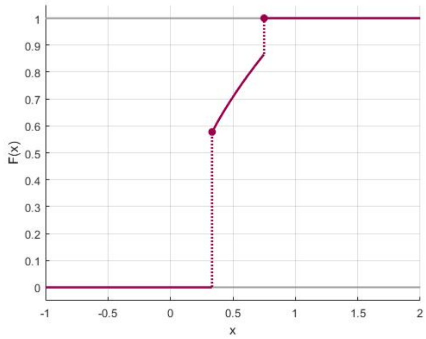
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \end{cases}$$



- $\underline{\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)}$

  En este caso la función de distribución es mixta:

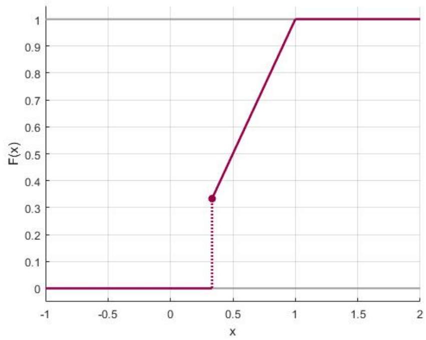
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ x^{2\alpha-1} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \alpha \\ 1 & \text{si } \alpha \leq x \end{cases}$$



- $\underline{\alpha = 1}$

  En este caso la función de distribución es mixta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{3} \\ x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



(c) Démonos cuenta de que $\{A_n : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_n \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^{n+1}}, \alpha) = \left(\tfrac{1}{3}, \alpha\right)$$

Tenemos entonces que $P(\liminf A_n) = P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$ donde:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\tfrac{1}{3}, \alpha\right) = P(\tfrac{1}{3},\alpha] - P\left(\{\alpha\}\right) \\ &= \left(F\left(\alpha\right) - F\left(\tfrac{1}{3}\right)\right) - \left(F\left(\alpha\right) - F^{-}\left(\alpha\right)\right) \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2\alpha-1} - 1 + \alpha^{2\alpha-1} = \alpha^{2\alpha-1} - \frac{1}{3^{2\alpha-1}} \end{aligned}$$

Ej. 8. *Sea*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x+1}{10} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{2x-1}{6} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$

(a) *Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda\, F_1(x) + (1 - \lambda)\, F_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

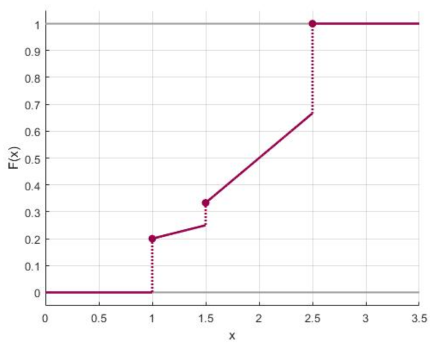
(b) *Evaluar $P_F(\mathbb{Q}))$ y $P_F(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.*

(c) *Dada la sucesión de subconjuntos*

$$A_{2n-1} = \left(\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{5n+2}{n+1}\right), \qquad A_{2n} = \left(\tfrac{4n+3}{n}, \tfrac{8n+1}{n+1}\right),$$

se pide evaluar $P(\liminf A_n)$ y $P(\limsup A_n)$.

(a) En primer lugar, representamos F:



A continuación, probamos que F es una función de distribución verificando cada una de las tres propiedades de caracterización:

i) $\underline{F(-\infty) = 0 \text{ y } F(\infty) = 1}$

Es claro que $F(-\infty) = 0$ y que $F(\infty) = 1$ por definición.

ii) <u>F es monótona no-decreciente</u>

En primer lugar, comprobemos que F sea monótona no-decreciente en cada uno de sus tramos de definición. Es claro que F se comporta adecuadamente pues en cada tramo es una recta de pendiente no-negativa (estrictamente positiva o constante).

Finalmente, debemos asegurarnos de que en los cambios de tramo de definición tenemos monotonía no-decreciente. Es claro que:

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = 0 \leq \tfrac{1}{5} = \lim_{x\to 1^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 3/2^-} F(x) = \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{3} = \lim_{x\to 3/2^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 5/2^-} F(x) = \tfrac{2}{3} \leq 1 = \lim_{x\to 5/2^+} F(x)$$

Por lo que se cumple también.

iii) <u>F es continua por la derecha</u>

De acuerdo a la definición a tramos de F, como cada tramo es continuo y están excluidos los extremos derechos de cada intervalo de definición, se tiene continuidad por la derecha.

Así pues F es una función de distribución.

Para descomponer F en una función de distribución discreta F_1 y otra absolutamente continua F_2, notemos en primer lugar que los puntos que concentran masa en F son:

$$P_F(\{1\}) = F(\{1\}) - F^-(\{1\}) = \tfrac{1}{5} - 0 = \tfrac{1}{5}$$

$$P_F\left(\{\tfrac{3}{2}\}\right) = F\left(\{\tfrac{3}{2}\}\right) - F^-\left(\{\tfrac{3}{2}\}\right) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}$$

$$P_F\left(\{\tfrac{5}{2}\}\right) = F\left(\{\tfrac{5}{2}\}\right) - F^-\left(\{\tfrac{5}{2}\}\right) = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$$

Por lo que el parámetro λ que representa la probabilidad que concentra F_1 valdrá:

$$\lambda = P_F(\{1\}) + P_F\left(\{\tfrac{3}{2}\}\right) + P_F\left(\{\tfrac{5}{2}\}\right) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{37}{60}$$

Entonces, F_1 es una función de distribución discreta con función de masa:

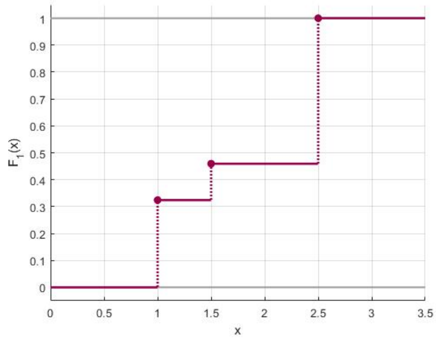
$$p_1(1) = \frac{P_F(\{1\})}{\lambda} = \frac{12}{37}$$

$$p_1\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{P_F\left(\{\tfrac{3}{2}\}\right)}{\lambda} = \frac{5}{37}$$

$$p_1\left(\tfrac{5}{2}\right) = \frac{P_F\left(\{\tfrac{5}{2}\}\right)}{\lambda} = \frac{20}{37}$$

Lo cual nos devuelve la siguiente función de distribución:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{12}{37} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{17}{37} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$



Para determinar F_2, calculamos $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ donde F es derivable:

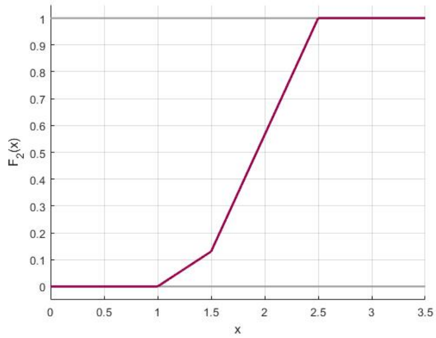
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{10} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$

La probabilidad que concentra F_2 será $1 - \lambda = \frac{23}{60}$. Entonces, F_2 es una función de distribución absolutamente continua con función de densidad:

$$f_2(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}}{1-\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{6}{23} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{20}{23} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$

Lo cual nos devuelve la siguiente función de distribución:

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{6x-6}{23} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{20x-27}{23} & \text{si } \frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \end{cases}$$



(b) Calculamos la probabilidad de cada uno de los conjuntos pedidos:

i) $\underline{\mathbb{Q}}$

$$P_F(\mathbb{Q}) = \sum_{x \in \mathbb{Q}} P_F(\{x\}) = P_F(\{1\}) + P_F(\{\tfrac{3}{2}\}) + P_F(\{\tfrac{5}{2}\}) = \tfrac{37}{60}$$

ii) $\underline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}$

$$P_F(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = P_F(\mathbb{Q}^c) = 1 - P_F(\mathbb{Q}) = \tfrac{23}{60}$$

(c) Recordemos de la hoja 1 que podemos analizar cada subsucesión A_{2n-1} y A_{2n} por separado. De esta forma simplificamos el problema:

i) $\underline{A_{2n-1}}$

Démonos cuenta de que $\{A_{2n-1} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_{2n-1} \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{5n+2}{n+1}\right) = (0,5)$$

ii) $\underline{A_{2n}}$

Démonos cuenta de que $\{A_{2n} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_{2n} \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4n+3}{n}, \tfrac{8n+1}{n+1}\right) = (4,8)$$

De forma que:

$$\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1} = (0,5) \cup (4,8) = (0,8)$$

$$\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1} = (0,5) \cap (4,8) = (4,5)\emptyset$$

Por tanto:

$$P_F(\limsup A_n) = P_F(0,8) = F(8) - P_F(\{8\}) - F(0) = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$P_F(\liminf A_n) = P_F(4,5) = F(5) - P_F(\{5\}) - F(4) = 1 - 1 - 0 = 0$$

Ej. 9. *Demostrar que la función*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2^{x+1}} - \frac{1}{2^{[x]+1}} & \textit{si } 0 \leq x \end{cases}$$

es una función de distribución de tipo mixto, donde $[x]$ denota la parte entera de x.

Hagamos la siguiente apreciación sobre $P(\{x\})$ con $x \geq 0$ distinguiendo dos casos:

- $\underline{x \in \mathbb{N}}$

  Como $x \in \mathbb{N}$, entonces $[x] = x$ y $\lim_{t\to x^-}[t] = x - 1$. Por tanto:

$$P(\{x\}) = F(x) - F^-(x) = \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{x+1}}\right) - \lim_{t\to x^-}\left(1 - \tfrac{1}{2^{t+1}} - \tfrac{1}{2^{[t]+1}}\right)$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{x+1}}\right) - \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{x}}\right) = \tfrac{1}{2^x} - \tfrac{1}{2^{x+1}} = \tfrac{1}{2^{x+1}} > 0$$

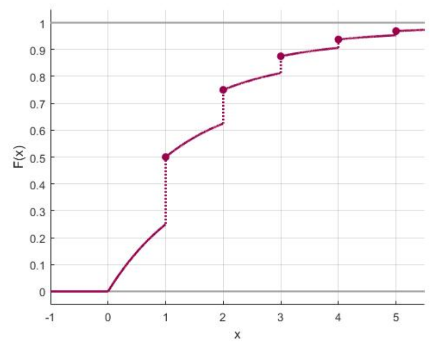
- $\underline{x \notin \mathbb{N}}$

  En este segundo caso, sin embargo:

$$P(\{x\}) = F(x) - F^{-}(x) = \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{[x]+1}}\right) - \lim_{t \to x^{-}} \left(1 - \tfrac{1}{2^{t+1}} - \tfrac{1}{2^{[t]+1}}\right)$$

$$= \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{[x]+1}}\right) - \left(1 - \tfrac{1}{2^{x+1}} - \tfrac{1}{2^{[x]+1}}\right) = 0$$

Lo cual se corresponde con la representación de F:



Así pues existen puntos que concentran masa dada la función de distribución F. En concreto, el conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales. Además:

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} P(\{x\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < 1$$

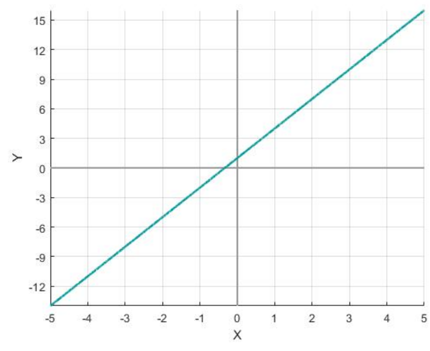
Por lo que F no puede ser una función de distribución discreta, sino mixta.

Ej. 10. *Sea la función de densidad de una variable aleatoria X con distribución de Cauchy*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Determinar la distribución de la variable aleatoria $Y = 3X + 1$.

Comencemos representando la transformación Y de la variable aleatoria X:



A continuación obtenemos la función de distribución F_X de X a partir de su función de densidad f_X:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\arctan(u)}{\pi}\Bigg]_{u=-\infty}^{u=x}$$

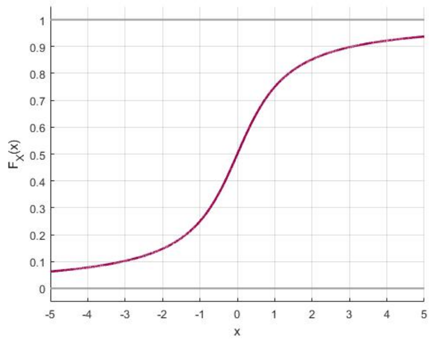
$$= \left(\frac{\arctan(x)}{\pi}\right) - \left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

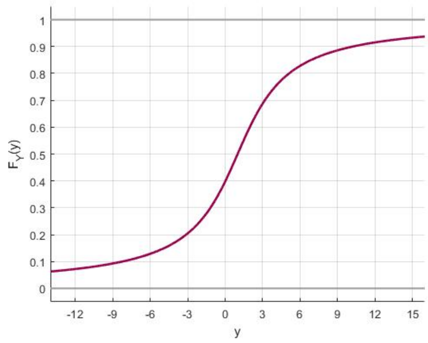
Dado que Y es una biyección en $\mathbb{R}$ y X está definida de manera uniforme en todo $\mathbb{R}$, dado $y \in \mathbb{R}$, podemos calcular $F_Y(y)$ como:

$$F_Y(y) = P_Y(-\infty,y] = P_X(Y \leq y) = P_X(3X+1 \leq y) = P_X(X \leq \tfrac{y-1}{3})$$

$$= F_X(\tfrac{y-1}{3}) = \frac{\arctan(\frac{y-1}{3})}{\pi} + \frac{1}{2}$$

Las funciones de distribución de X e Y tienen la siguiente representación:





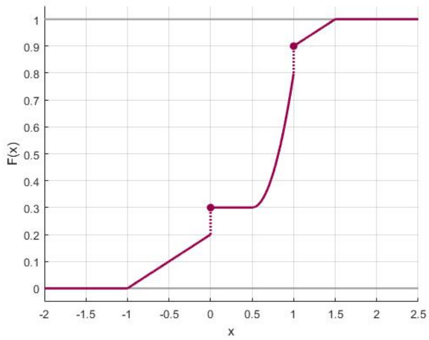
Ej. 11. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{5} & \textit{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{10} & \textit{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} + \frac{(2x-1)^2}{2} & \textit{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{9}{10} + \frac{x-1}{5} & \textit{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 1 & \textit{si } \frac{3}{2} \leq x \end{cases}$$

(a) *Comprobar que F es función de distribución. Determinar las funciones de distribución F_1 discreta y F_2 absolutamente continua tales que $F(x) = \lambda F_1(x) + (1-\lambda) F_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

(b) *Determinar la distribución de $Y = |X|$.*

(a) En primer lugar, representamos F:



A continuación, probamos que F es una función de distribución verificando cada una de las tres propiedades de caracterización:

i) $\underline{F(-\infty) = 0 \text{ y } F(\infty) = 1}$

   Es claro que $F(-\infty) = 0$ y que $F(\infty) = 1$ por definición.

ii) $\underline{F \text{ es monótona no-decreciente}}$

   En primer lugar, comprobemos que F sea monótona no-decreciente en cada uno de sus tramos de definición. Es claro que F se comporta adecuadamente pues en cada tramo tiene derivada no-negativa.

   Finalmente, debemos asegurarnos de que en los cambios de tramo de definición tenemos monotonía no-decreciente. Es claro que:

$$\lim_{x\to -1^-} F(x) = 0 = \lim_{x\to -1^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = \tfrac{1}{5} \leq \tfrac{3}{10} = \lim_{x\to 0^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 1/2^-} F(x) = \tfrac{3}{10} = \lim_{x\to 1/2^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \tfrac{4}{5} \leq \tfrac{9}{10} = \lim_{x\to 1^+} F(x)$$

$$\lim_{x\to 3/2^-} F(x) = 1 = \lim_{x\to 3/2^+} F(x)$$

   Por lo que se cumple también.

iii) $\underline{F \text{ es continua por la derecha}}$

   De acuerdo a la definición a tramos de F, como cada tramo es continuo y están excluidos los extremos derechos de cada intervalo de definición, se tiene continuidad por la derecha.

Así pues F es una función de distribución.

Para descomponer F en una función de distribución discreta F_1 y otra absolutamente continua F_2, notemos en primer lugar que los puntos que concentran masa en F son:

$$P_F(\{0\}) = F(\{0\}) - F^-(\{0\}) = \tfrac{3}{10} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{10}$$

$$P_F(\{1\}) = F(\{1\}) - F^-(\{1\}) = \tfrac{9}{10} - \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{10}$$

Por lo que el parámetro λ que representa la probabilidad que concentra F_1 valdrá:

$$\lambda = P_F(\{0\}) + P_F(\{1\}) = \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10} = \tfrac{1}{5}$$

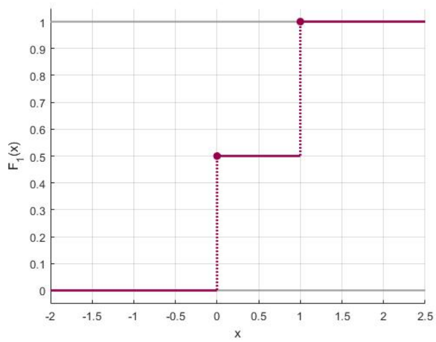
Entonces, F_1 es una función de distribución discreta con función de masa:

$$p_1(0) = \frac{P_F(\{0\})}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$p_1(1) = \frac{P_F(\{1\})}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Lo cual nos devuelve la siguiente función de distribución:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



Para determinar F_2, calculamos $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$ donde F es derivable:

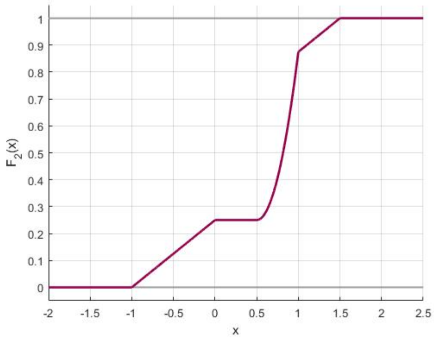
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \text{-}1 \\ \frac{1}{5} & \text{si -}1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \end{cases}$$

La probabilidad que concentra F_2 será $1 - \lambda = \frac{4}{5}$. Entonces, F_2 es una función de distribución absolutamente continua con función de densidad:

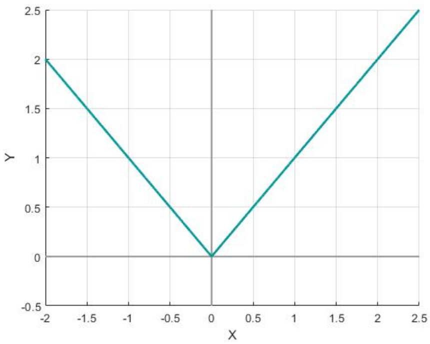
$$f_2(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}}{1-\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \text{-}1 \\ \frac{1}{4} & \text{si -}1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{10x-1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{3}{2} \leq x \end{cases}$$

Lo cual nos devuelve la siguiente función de distribución:

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \text{-}1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si -}1 \le x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{5(2x-1)^2}{8} & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ \frac{7}{8} + \frac{x-1}{4} & \text{si } 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{3}{2} \le x \end{cases}$$



(b) Comencemos representando la transformación Y de la variable aleatoria X:



Dado que Y no es inyectiva en $\mathbb{R}$ y X está definida a trozos, dado $y \in \mathbb{R}$, debemos tener cuidado a la hora de calcular $F_Y(y)$. Démonos cuenta primero de que:

- $y < 0$

  $$F_Y(y) = P_Y(-\infty{,}y] = P_X(Y \le y) = P_X(|X| \le y) = P_X(\emptyset) = 0$$

- $y \ge 0$

  $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P_Y(-\infty{,}y] = P_X(Y \le y) = P_X(|X| \le y) = P_X(-y \le X \le y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \end{aligned}$$

Por tanto, distinguiendo los distintos trozos en que está definida la función de distribución de X, deducimos que:

- $0 \le y < \frac{1}{2}$

  $$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) = \left(\frac{3}{10}\right) - \left(\frac{-y+1}{5}\right) = \frac{2y+1}{10}$$

- $\frac{1}{2} \le y < 1$

  $$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) = \left(\frac{3}{10} + \frac{(2y-1)^2}{2}\right) - \left(\frac{-y+1}{5}\right) = \frac{39}{200} + \frac{(20y-9)^2}{200}$$

- $1 \le y < \frac{3}{2}$

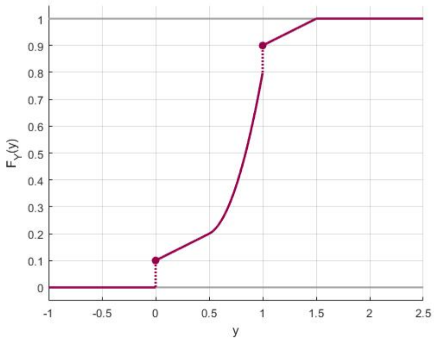
  $$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) = \left(\frac{9}{10} + \frac{y-1}{5}\right) - (0) = \frac{2y+7}{10}$$

- $\underline{\frac{3}{2} \leq y}$

  $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) = (1) - (0) = 1$

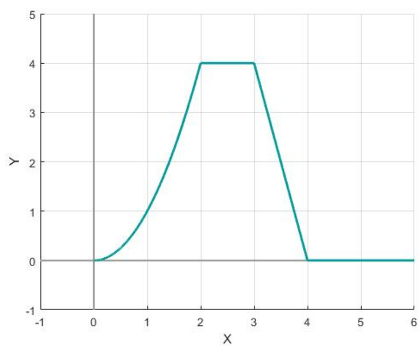
La función de distribución de Y queda entonces:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2y+1}{10} & \text{si } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ \frac{39}{200} + \frac{(20y-9)^2}{200} & \text{si } \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ \frac{2y+7}{10} & \text{si } 1 \leq y < \frac{3}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{3}{2} \leq y \end{cases}$$



Ej. 12. *Sea X una variable aleatoria exponencial de tasa $\lambda = 1$. Se define $Y = X^2$ si $0 \leq X < 2$, $Y = 4$ si $2 \leq X < 3$, $Y = -4(X-4)$ si $3 \leq X < 4$, e $Y = 0$ si $4 \leq X$. Determinar la distribución de Y.*

Comencemos representando la transformación Y de la variable aleatoria X:



Recordemos que una variable aleatoria exponencial de tasa λ tiene soporte $\mathbb{R}^+$ y que su función de densidad f es:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}, \qquad x > 0$$

Por lo que podemos obtener la función de distribución F_X de X en $\mathbb{R}^+$ a partir de su función de densidad $f_X(x) = e^{-x}$:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x e^{-u}\,\mathrm{d}u = -e^{-u}\Big]_{u=0}^{u=x} = \left(-e^{-x}\right) - (-1) = 1 - e^{-x}$$

Dado que Y no es inyectiva en $\mathbb{R}^+$ y X tiene soporte $\mathbb{R}^+$, dado $y \in \mathbb{R}$, debemos tener cuidado a la hora de calcular $F_Y(y)$. Deducimos que:

- $\underline{y < 0}$
  $F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P_X(Y \leq y) = P_X(\emptyset) = 0$

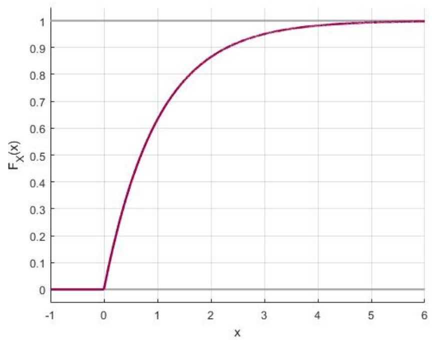
- $\underline{0 \leq y < 4}$
  $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P_Y(-\infty, y] = P_X(Y \leq y) \\ &= P_X(0 \leq X^2 \leq y) + P_X(0 \leq -4(X-4) \leq y) + P_X(4 \leq X) \\ &= P_X(0 \leq X \leq \sqrt{y}) + P_X(\tfrac{16-y}{4} \leq X \leq 4) + P_X(4 \leq X) \\ &= \big(F_X(\sqrt{y}) - F_X(0)\big) + \big(F_X(4) - F_X(\tfrac{16-y}{4})\big) + (1 - F_X(4)) \\ &= 1 + F_X(\sqrt{y}) - F_X(0) - F_X(\tfrac{16-y}{4}) = 1 + \big(1 - e^{-\sqrt{y}}\big) - (0) - \left(1 - e^{-\frac{16-y}{4}}\right) \\ &= 1 + e^{\frac{y-16}{4}} - e^{-\sqrt{y}} \end{aligned}$$

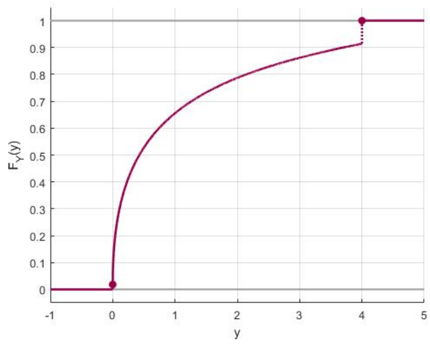
- $\underline{4 \leq y}$
  $F_Y(y) = P_Y(-\infty, y] = P_X(Y \leq y) = P_X(0 \leq X) = 1$

La función de distribución de Y queda entonces:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 + e^{\frac{y-16}{4}} - e^{-\sqrt{y}} & \text{si } 0 \leq y < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq y \end{cases}$$

Las funciones de distribución de X e Y tienen la siguiente representación:





Ej. 13. *Sea X una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_X$ y función de masa p_X. Sean $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible e $Y = g(X)$ la variable aleatoria transformada. Demostrar que Y es una variable aleatoria discreta con soporte $\mathcal{D}_Y = g(\mathcal{D}_X)$ y función de masa*

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \mathcal{D}_X :\, g(x) = y} p_X(x), \qquad y \in \mathcal{D}_Y.$$

Por hipótesis el conjunto $\mathcal{D}_X$ es discreto (y no-vacío), luego $\mathcal{D}_Y = g(\mathcal{D}_X)$ también será discreto (y no-vacío). Además, de acuerdo a la definición, dado $y \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P_Y(\{y\}) = P_X(Y = y) = P_X(g(X) = y) = P_X(X \in g^{-1}(y)) \\ &= P_X(\{x \in \mathbb{R} : \, g(x) = y\}) = \sum_{x \in \mathbb{R} :\, g(x) = y} p_X(x) = \sum_{x \in \mathcal{D}_X :\, g(x) = y} p_X(x) \end{aligned}$$

Ahora bien, si $y \notin \mathcal{D}_Y$, entonces:

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \mathcal{D}_X :\, g(x) = y} p_X(x) = \sum_{x \in \emptyset} p_X(x) = 0$$

Y además:

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_Y} p_Y(y) = \sum_{x \in \mathcal{D}_Y} \; \sum_{x \in \mathcal{D}_X :\, g(x) = y} p_X(x) = \sum_{x \in \mathcal{D}_X} p_X(x) = 1$$

Luego el conjunto $\mathcal{D}_Y$ soporta toda la masa de la variable aleatoria Y. De esta forma queda probado que Y es una variable aleatoria discreta de soporte $\mathcal{D}_Y$ y con la función de masa indicada en el enunciado.

Ej. 14. *Sea* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ *un espacio de probabilidad, siendo* P *la medida de probabilidad relativa a la función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < \text{-}3 \\ \frac{x+3}{4} & si\ \text{-}3 \leq x < 1 \\ 1 & si\ 1 \leq x \end{cases}$$

Supuesto que X *es una variable aleatoria con función de distribución* F*, definimos:*

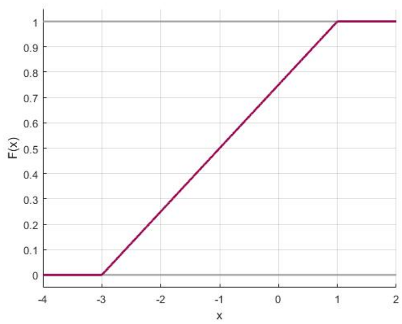
(a) $\xi_1 = X^2$

(b) $\xi_2 = X^3$

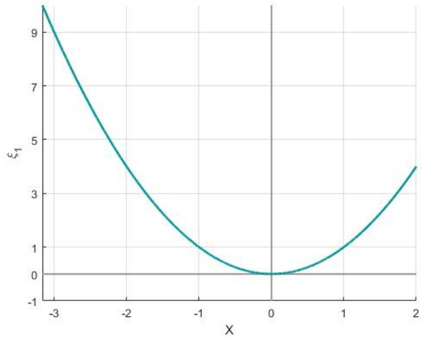
(c) $\xi_3 = e^{-X}$

Calcular las funciones de distribución inducidas por cada una de ellas.

En primer lugar, representamos F:



(a) Comencemos representando la transformación ξ_1 de la variable aleatoria X:



Dado que ξ_1 no es inyectiva en $\mathbb{R}$ y X está definida a trozos, dado $z \in \mathbb{R}$, debemos tener cuidado a la hora de calcular $F_{\xi_1}(z)$. Démonos cuenta primero de que:

- $\underline{z < 0}$

  $F_{\xi_1}(z) = P_{\xi_1}(-\infty,z] = P_X(\xi_1 \leq z) = P_X(X^2 \leq z) = P_X(\emptyset) = 0$

- $\underline{z \geq 0}$

  $$F_{\xi_1}(z) = P_{\xi_1}(-\infty,z] = P_X(\xi_1 \leq z) = P_X(X^2 \leq z) = P_X(-\sqrt{z} \leq X \leq \sqrt{z})$$
  $$= F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$$

Por tanto, distinguiendo los distintos trozos en que está definida la función de distribución de X, deducimos que:

- $\underline{0 \leq z < 1}$

  $F_{\xi_1}(z) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = \left(\frac{\sqrt{z}+3}{4}\right) - \left(\frac{-\sqrt{z}+3}{4}\right) = \frac{\sqrt{z}}{2}$

- $\underline{1 \leq z < 9}$

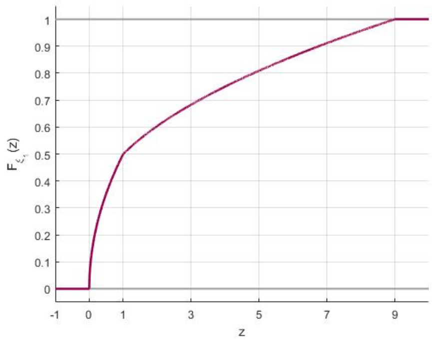
  $F_{\xi_1}(z) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = (1) - \left(\frac{-\sqrt{z}+3}{4}\right) = \frac{\sqrt{z}+1}{4}$

- $\underline{9 \leq z}$

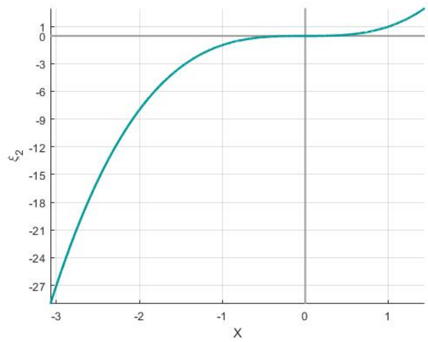
  $F_{\xi_1}(z) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = (1) - (0) = 1$

La función de distribución de ξ_1 queda entonces:

$$F_{\xi_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{\sqrt{z}}{2} & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ \frac{\sqrt{z}+1}{4} & \text{si } 1 \leq z < 9 \\ 1 & \text{si } 9 \leq z \end{cases}$$



(b) Comencemos representando la transformación ξ_2 de la variable aleatoria X:



ξ_2 es una biyección en $\mathbb{R}$, pero X está definida a trozos. Así pues, dado $z \in \mathbb{R}$, debemos tener cuidado a la hora de calcular $F_{\xi_2}(z)$. Démonos cuenta primero de que:

$$F_{\xi_2}(z) = P_{\xi_2}(-\infty,z] = P_X(\xi_2 \leq z) = P_X(X^3 \leq z) = P_X(X \leq \sqrt[3]{z}) = F_X(\sqrt[3]{z})$$

Por tanto, distinguiendo los distintos trozos en que está definida la función de distribución de X, deducimos que:

- $\underline{z < -27}$

  $F_{\xi_2}(z) = F_X(\sqrt[3]{z}) = 0$

- $\underline{-27 \leq z < 1}$

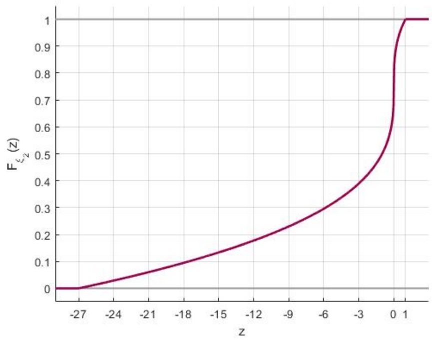
  $F_{\xi_2}(z) = F_X(\sqrt[3]{z}) = \frac{\sqrt[3]{z}+3}{4}$

- $\underline{1 \leq z}$

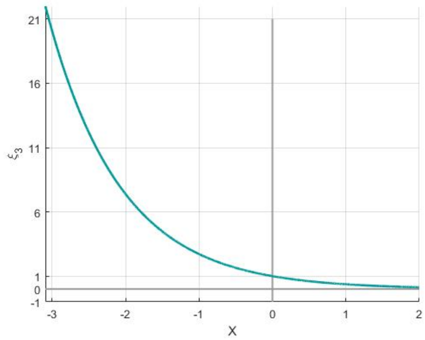
  $F_{\xi_2}(z) = F_X(\sqrt[3]{z}) = 1$

La función de distribución de ξ_2 queda entonces:

$$F_{\xi_2}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -27 \\ \frac{\sqrt[3]{z}+3}{4} & \text{si } -27 \leq z < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq z \end{cases}$$



(c) Comencemos representando la transformación ξ_3 de la variable aleatoria X:



ξ_3 es inyectiva en $\mathbb{R}$, pero X está definida a trozos. Así pues, dado $z \in \mathbb{R}$, debemos tener cuidado a la hora de calcular $F_{\xi_3}(z)$. Démonos cuenta primero de que:

- $\underline{z < 0}$

  $F_{\xi_3}(z) = P_{\xi_3}(-\infty{,}z] = P_X(\xi_3 \leq z) = P_X(e^{-X} \leq z) = P_X(\emptyset) = 0$

- $\underline{z \geq 0}$

  $$\begin{aligned} F_{\xi_3}(z) &= P_{\xi_3}(-\infty{,}z] = P_X(\xi_3 \leq z) = P_X(e^{-X} \leq z) = P_X(-\ln z \leq X) \\ &= 1 - F_X(-\ln z) \end{aligned}$$

Por tanto, distinguiendo los distintos trozos en que está definida la función de distribución de X, deducimos que:

- $\underline{0 \leq z < e^{-1}}$

  $F_{\xi_3}(z) = 1 - F_X(-\ln z) = 1 - 1 = 0$

- $\underline{e^{-1} \leq z < e^3}$

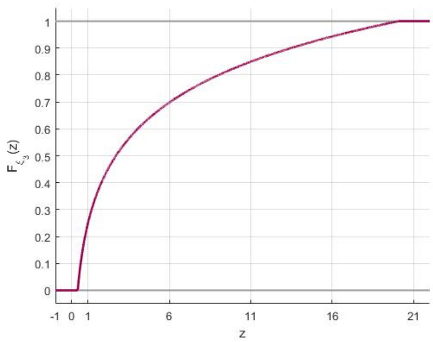
  $F_{\xi_3}(z) = 1 - F_X(-\ln z) = 1 - \frac{-\ln z + 3}{4} = \frac{\ln z + 1}{4}$

- $\underline{e^3 \leq z}$

  $F_{\xi_3}(z) = 1 - F_X(-\ln z) = 1 - 0 = 1$

La función de distribución de ξ_3 queda entonces:

$$F_{\xi_3}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < e^{-1} \\ \frac{\ln z + 1}{4} & \text{si } e^{-1} \leq z < e^3 \\ 1 & \text{si } e^3 \leq z \end{cases}$$



Ej. 15. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} k\,x + \frac{1}{2} & \textit{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) *Determinar los valores de k tales que f es una función de densidad.*

(b) *Calcular la esperanza, la moda y la mediana de X.*

(c) *¿Para qué valores de k es máxima la varianza de X?*

(a) Para que f sea función de densidad, debe verificar las siguientes dos propiedades:

i) f no-negativa

Debemos asegurar que $k\,x + \frac{1}{2} \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Dividimos el problema en tres partes:

- $k\,x + \frac{1}{2} \geq 0$, $\forall x \in [-1,0)$

  Fijado $x \in [-1,0)$, entonces:

  $$k\,x + \tfrac{1}{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \leq -\tfrac{1}{2x}$$

  Así pues, dado que tiene que cumplirse para $x \in [-1,0)$ arbitrario, hemos de exigir que $k \leq \frac{1}{2}$.

- $k\,x + \frac{1}{2} \geq 0$ con $x = 0$

  Se verifica la condición directamente pues $\frac{1}{2} \geq 0$.

- $k\,x + \frac{1}{2} \geq 0$, $\forall x \in (0,1]$

  Fijado $x \in (0,1]$, entonces:

  $$k\,x + \tfrac{1}{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \geq -\tfrac{1}{2x}$$

  Así pues, dado que tiene que cumplirse para $x \in (0,1]$ arbitrario, hemos de exigir que $k \geq -\frac{1}{2}$.

Por tanto, uniendo todas las condiciones, hemos de pedir que $|k| \leq \frac{1}{2}$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

La condición se cumple si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} k\,x + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left.\tfrac{k\,x^2}{2} + \tfrac{x}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} = \left(\tfrac{k}{2} + \tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{k}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Por tanto, se verifica $\forall k \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta ambas propiedades, $|k| \leq \frac{1}{2}$ para que f sea función de densidad.

(b) Calculamos cada uno de los valores requeridos:

i) Esperanza, $E[X]$

Aplicando la definición de esperanza para variables aleatorias absolutamente continuas, calculamos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} k\,x^2 + \tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}t = \left.\tfrac{k\,x^3}{3} + \tfrac{x^2}{4}\right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \left(\tfrac{k}{3} + \tfrac{1}{4}\right) - \left(-\tfrac{k}{3} + \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{2k}{3} \end{aligned}$$

ii) Moda, $Mo(X)$

La moda para variables aleatorias absolutamente continuas se define como el máximo de su función de densidad f. Distinguimos tres casos según el valor de k:

- $k < 0$

  En este caso f es una recta de pendiente negativa en el soporte. Por tanto, el máximo se alcanza en el mínimo del soporte. Es decir, $Mo(X) = -1$.

- $k = 0$

  En este caso f es constante en el soporte y todos los valores son máximos. Es decir, $Mo(X) = [-1, 1]$.

- $k > 0$

  En este caso f es una recta de pendiente positiva en el soporte. Por tanto, el máximo se alcanza en el máximo del soporte. Es decir, $Mo(X) = 1$.

iii) Mediana, $Me(X)$

Aplicando la definición de mediana, calculamos:

$$\begin{aligned} P(X > Me(X)) &= \int_{Me(X)}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{Me(X)}^{1} k\,x + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left.\tfrac{k\,x^2}{2} + \tfrac{x}{2}\right]_{x=Me(X)}^{x=1} \\ &= \left(\tfrac{k}{2} + \tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{k\,Me(X)^2}{2} + \tfrac{Me(X)}{2}\right) = \tfrac{-k\,Me(X)^2 - Me(X) + k + 1}{2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo que hemos de resolver la ecuación $k\,Me(X)^2 + Me(X) - k = 0$. Distinguimos dos casos según el valor de k:

- $\underline{k = 0}$

  En este caso la ecuación refleja directamente la solución $Me(X) = 0$.

- $\underline{k \neq 0}$

  En este caso la ecuación arroja dos soluciones reales $Me(X) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2k}$. Sin embargo, sólo una de ellas está en el soporte, es decir, en $[-1, 1]$. Dicha solución es $Me(X) = \frac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}$.

(c) Para calcular la varianza $Var(X)$, conocido $E[X] = \frac{2k}{3}$, resta computar:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} k\, x^3 + \tfrac{x^2}{2}\, \mathrm{d}t = \left. \tfrac{k\, x^4}{4} + \tfrac{x^3}{6} \right]_{x=-1}^{x=1}$$

$$= \left(\tfrac{k}{4} + \tfrac{1}{6}\right) - \left(\tfrac{k}{4} - \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{1}{3}$$

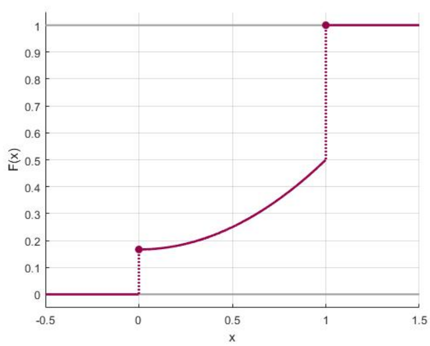
Por tanto, $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - (\frac{2k}{3})^2 = \frac{3-4k^2}{9}$. Se trata de una parábola invertida, por lo que el valor máximo de la varianza se alcanza en el vértice $k = 0$.

Ej. 16. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1+2x^2}{6} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Calcular $E[X]$ y $Var(X)$.

En primer lugar, representamos F:



En este caso, la representación es muy útil ya que nos indica que X es una variable aleatoria mixta. Notemos que hay dos puntos que concentran masa:

$$P_F(\{0\}) = F(\{0\}) - F^-(\{0\}) = \tfrac{1}{6} - 0 = \tfrac{1}{6}$$

$$P_F(\{1\}) = F(\{1\}) - F^-(\{1\}) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Mientras que para el resto de puntos (donde F es derivable), tenemos $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{3} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Calculamos los momentos requeridos:

i) $\underline{E[X]}$

Aplicando la definición de esperanza para variables aleatorias mixtas, calculamos:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}-\{0,1\}} x \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x + 0 \cdot P_F(\{0\}) + 1 \cdot P_F(\{1\}) \\ &= \int_0^1 \frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \left.\frac{2x^3}{9}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{9}\right) - (0) + \frac{1}{2} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

ii) $\underline{Var(X)}$

Para calcular la varianza $Var(X)$, conocido $E[X] = \frac{13}{18}$, resta computar:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{\mathbb{R}-\{0,1\}} x^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x + 0^2 \cdot P_F(\{0\}) + 1^2 \cdot P_F(\{1\}) \\ &= \int_0^1 \frac{2x^3}{3}\,\mathrm{d}x + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \left.\frac{x^4}{6}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{6}\right) - (0) + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

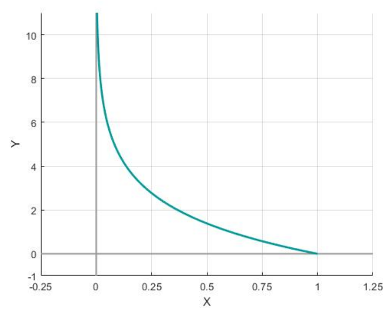
Por tanto, $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{3} - (\frac{13}{18})^2 = \frac{47}{324}$.

Ej. 17. *Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

la función de densidad de una variable aleatoria X y sea $Y = -2\ln X$. Calcular la distribución de Y.

Comencemos representando la transformación Y de la variable aleatoria X:



A continuación obtenemos la función de distribución F_X de X en $[0,1]$ a partir de su función de densidad f:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}u = u\Big]_{u=0}^{u=x} = (x) - (0) = x$$

Y es inyectiva en $[0,1]$ y X está definida de manera uniforme en todo $[0,1]$. Así pues, dado $y \in \mathbb{R}$, deducimos que:

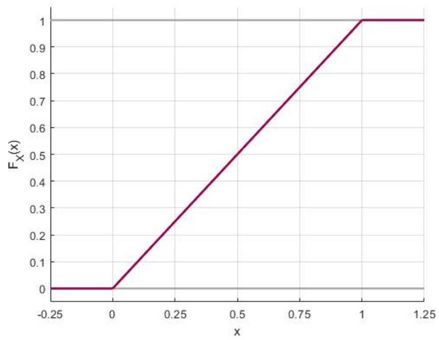
- $\underline{y < 0}$

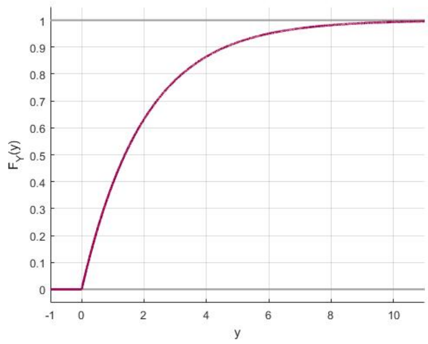
  $$F_Y(y) = P_Y(-\infty,y] = P_X(Y \leq y) = P_X(-2\ln X \leq y) = P_X(\emptyset) = 0$$

- $\underline{y \geq 0}$

  $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P_Y(-\infty,y] = P_X(Y \leq y) = P_X(-2\ln X \leq y) = P_X(e^{-\frac{y}{2}} \leq X) \\ &= 1 - F_X(e^{-\frac{y}{2}}) = 1 - e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Las funciones de distribución de X e Y tienen la siguiente representación:





Ej. 18. *Función generatriz de momentos:*

(a) *Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta con momentos $E[X^n] = \frac{1}{n+1}$.*

(b) *Determinar la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo (a,b).*

(c) *Se sabe que la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta viene dada por*

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\, e^t}, \qquad \alpha \in (0,1).$$

Determinar la función de masa de X.

(a) La función generatriz de momentos de una variable aleatoria X discreta con soporte $\{x_k : k \geq 0\}$ y función de masa $p(x_k) = p_k$, $\forall k \geq 0$, se construye como:

$$M(t) = E[e^{t\,X}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\,x_k}\,p_k$$

Sustituyendo la función exponencial por su desarrollo en serie de Taylor, obtenemos:

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,x_k)^n}{n!}\,p_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} x_k^n\,p_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,E[X^n]$$

Por lo que podemos determinar la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X discreta a partir de sus momentos $E[X^n]$. Si $t = 0$, es claro que $M(t) = 1$. En otro caso:

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{t}$$

Donde en el último paso hemos recurrido de nuevo a la expresión de la función exponencial como serie de Taylor teniendo en cuenta que carecemos del primer término de la serie.

(b) La función generatriz de momentos de una variable aleatoria X absolutamente continua con soporte $\mathcal{D}_X$ y función de densidad f se construye como:

$$M(t) = E[e^{t\,X}] = \int_{\mathcal{D}_X} e^{t\,x}\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Recordemos que una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo (a, b) tiene función de densidad f:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,I_{(a,b)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Por lo que podemos determinar la función generatriz de momentos de la variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo (a, b) a partir de su función de densidad f. Si $t = 0$, es claro que $M(t) = 1$. En otro caso:

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,x}\,\frac{1}{b-a}\,I_{(a,b)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{e^{t\,x}}{b-a}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{e^{t\,x}}{t(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \left(\frac{e^{t\,b}}{t(b-a)}\right) - \left(\frac{e^{t\,a}}{t(b-a)}\right) = \frac{e^{t\,b} - e^{t\,a}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

Nótese que en el apartado anterior hemos obtenido la misma expresión tomando $a = 0$ y $b = 1$. Sin embargo, la variable aleatoria en (a) era discreta y no uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

(c) En este apartado recurrimos a la expresión de la suma de series geométricas de razón menor que 1 para poder manipular la expresión de la función generatriz de momentos dada. Lo hacemos de la siguiente forma:

$$M(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\,e^t} = (1-\alpha)\,\frac{1}{1-\alpha\,e^t} = (1-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha\,e^t\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t\,k}\,(1-\alpha)\,\alpha^k$$

Por tanto, X es una variable aleatoria discreta con soporte $\{x_k = k : k \geq 0\}$ y función de masa $p(k) = (1-\alpha)\,\alpha^k$, $\forall k \geq 0$. Es decir, X sigue una distribución geométrica de parámetro $p = 1 - \alpha$.

Ej. 19. *Dada la función*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2 - e^{it}}$$

se pide:

(a) *Comprobar que φ es la función característica de una variable aleatoria X discreta y hallar la función de masa, la media y la varianza de X.*

(b) *Escribir la función característica de $Y = 1 + 2X$, así como su media y su varianza.*

(c) *Si $Y_1 = (Y+2)^2$ e $Y_2 = X^2 + 5$, calcular $P(Y_1 \in [10, 50])$ y $P(Y_2 \in [6, 10])$.*

(a) En primer lugar comprobamos que, en efecto, φ es la función característica de una variable aleatoria X discreta. Recurrimos de nuevo, como en el ejercicio anterior, a la expresión de la suma de series geométricas de razón menor que 1 para poder manipular la expresión de φ dada. Lo hacemos de la siguiente forma:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{it\,k}\,\frac{1}{2^{k+1}}$$

Por lo que podemos concluir que φ es la función característica de una variable aleatoria X discreta con soporte $\{x_k = k : k \geq 0\}$ y función de masa $p(k) = \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall k \geq 0$. Así, X sigue una distribución geométrica de parámetro $p = \frac{1}{2}$. Su media es entonces $E[X] = \frac{1-p}{p} = 1$, y su varianza $Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

(b) Calculamos cada una de las expresiones requeridas para Y:

i) <u>Función característica, φ_Y</u>

$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = E[e^{it(1+2X)}] = e^{it}\,E[e^{2it\,X}] = e^{it}\,\varphi(2t) = \frac{e^{it}}{2-e^{2it}}$

ii) <u>Media, $E[Y]$</u>

$E[Y] = E[1 + 2X] = 1 + 2E[X] = 3$

iii) <u>Varianza, $Var(Y)$</u>

$Var(Y) = Var(1 + 2X) = 2^2 Var(X) = 8$

(c) Calculamos cada una de las probabilidades requeridas:

i) $\underline{P(Y_1 \in [10, 50])}$

En primer lugar desarrollemos la expresión que queremos calcular:

$$P(10 \leq Y_1 \leq 50) = P(10 \leq (Y+2)^2 \leq 50) = P(10 \leq (2X+3)^2 \leq 50)$$

Démonos cuenta de que X tiene soporte no-negativo, luego:

$$P(10 \leq Y_1 \leq 50) = P(\tfrac{\sqrt{10}-3}{2} \leq X \leq \tfrac{\sqrt{50}-3}{2}) = P(0{,}081 \lesssim X \lesssim 2{,}036)$$

Como X tiene soporte en los enteros no-negativos, concluimos que:

$$P(10 \leq Y_1 \leq 50) = P(X=1) + P(X=2) = \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} = \tfrac{3}{8}$$

ii) $\underline{P(Y_2 \in [6, 10])}$

En primer lugar desarrollemos la expresión que queremos calcular:

$$P(6 \leq Y_2 \leq 10) = P(6 \leq X^2 + 5 \leq 10) = P(1 \leq X^2 \leq 5)$$

Démonos cuenta de que X tiene soporte no-negativo, luego:

$$P(6 \leq Y_2 \leq 10) = P(1 \leq X \leq \sqrt{5}) = P(1 \leq X \lesssim 2{,}236)$$

Como X tiene soporte en los enteros no-negativos, concluimos que:

$$P(6 \leq Y_2 \leq 10) = P(X=1) + P(X=2) = \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} = \tfrac{3}{8}$$

Ej. 20. *Determinar la función característica de las variables aleatorias que cumplen:*

(a) *Toda la probabilidad está concentrada en un punto.*

(b) *Toda la probabilidad está concentrada en n puntos.*

(a) La función característica de una variable aleatoria X discreta con soporte $\{x_k : k \geq 0\}$ y función de masa $p(x_k) = p_k$, $\forall k \geq 0$, se construye como:

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{it\,x_k}\, p_k$$

Si un único punto x_0 verifica $p(x_0) = p_0 = 1$, obtenemos:

$$\varphi(t) = e^{it\,x_0}\, p_0 = e^{it\,x_0}$$

(b) A partir de la expresión de la función característica de variables aleatorias discretas indicada en el apartado anterior, si n puntos $\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$ verifican $\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, obtenemos:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{it\,x_k}\, p_k$$

Ej. 21. *Demostrar que* $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ *es la función característica de una variable aleatoria.*

A primera vista, se echa en falta en φ la inclusión de la exponencial compleja e^{it} fundamental en la definición de las funciones características. Por ello, recordemos que:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$$

Además, démonos cuenta de que:

$$e^{-it} = \cos -t + i \operatorname{sen} -t = \cos t - i \operatorname{sen} t$$

Restando ambas expresiones podemos deducir que:

$$e^{it} - e^{-it} = 2i \operatorname{sen} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Por tanto:

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it}$$

Si recordamos el ejercicio (18b) en que calculamos la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo (a, b), podemos reconocer ahora en φ dicha estructura tomando $a = -1$ y $b = 1$ con la salvedad de que en este caso estamos trabajando con una función característica. Así pues, φ es la función característica de una variable aleatoria X uniforme sobre el intervalo $(-1, 1)$.

Ej. 22. *El porcentaje de piezas defectuosas fabricadas por una máquina es el* $4\,\%$. *Las piezas se empaquetan en lotes de* 100. *El cliente rechaza el lote si contiene más de dos piezas defectuosas. Calcular el porcentaje de lotes rachazados que puede esperar el fabricante si el proceso de fabricación no ha sufrido modificaciones.*

Sea X la variable aleatoria que describe el proceso de fabricación de un lote de piezas. Sabemos que cada lote consta de $n = 100$ piezas. Además, el porcentaje de piezas defectuosas es el $4\,\%$, por lo que podemos interpretar que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es $p = 0{,}04$. Bajo esta descripción, X se ajusta a una distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = 0{,}04$. Por tanto X tiene función de masa:

$$p(k) = \binom{100}{k} 0{,}04^k \, 0{,}96^{100-k}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, 100\}$$

Un lote es rechazado si contiene más de dos piezas defectuosas, es decir, si $X > 2$. Buscamos el porcentaje de lotes rachazados que pueden esperarse o, equivalentemente, $P(X > 2)$. Éste será entonces:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{100}{k} 0{,}04^k \, 0{,}96^{100-k} \approx 76{,}786\,\%$$

Ej. 23. *En dos grupos de segundo año de carrera se ha medido el coeficiente de inteligencia de los alumnos. En el grupo A la media fue* 100 *y la deviación típica* 10*, mientras que en el grupo B estas medidas fueron* 105 *y* 12*, respectivamente. Supongamos que ambos grupos tienen el mismo número de alumnos. Se escoge un alumno al azar y se comprueba que su coeficiente es mayor que* 120*. Calcular, suponiendo normalidad, la probabilidad de que el citado alumno pertenezca al grupo B.*

Sean $X_A \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$ y $X_B \sim \mathcal{N}(105, 11^2)$ las variables aleatorias normales que describen los coeficientes de inteligencia de los alumnos de los grupos de segundo año de carrera A y B, respectivamente. Además sea X la variable aleatoria que describe el coeficiente de inteligencia de un alumno escogido al azar. Definimos el suceso $G_i :=$ "El alumno pertenece al grupo i" con $i \in \{A, B\}$. Queremos calcular la probabilidad $P(G_B \,|\, X > 120)$. Obtendremos dicha probabilidad mediante el Teorema de Bayes:

$$P(G_B \,|\, X > 120) = \frac{P(X > 120 \,|\, G_B)\, P(G_B)}{P(X > 120 \,|\, G_A)\, P(G_A) + P(X > 120 \,|\, G_B)\, P(G_B)}$$

Para ello, primero hemos de calcular las siguientes probabilidades:

- $\underline{P(G_i) \text{ con } i \in \{A, B\}}$

  Dado que el alumno se escoge al azar, se tiene que $P(G_A) = P(G_B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

- $\underline{P(X > 120 \,|\, G_A)}$

  Estamos condicionados en este caso a que el alumno sea del grupo A, por lo que $P(X > 120 \,|\, G_A) = P(X_A > 120)$. Siendo $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y tipificando la variable normal X_A, obtenemos que:

  $$P(X_A > 120) = P(\tfrac{X_A - 100}{10} > 2) = P(Z > 2) = P(Z \leq -2) \approx 0{,}023$$

- $\underline{P(X > 120 \,|\, G_B)}$

  Estamos condicionados en este caso a que el alumno sea del grupo B, por lo que $P(X > 120 \,|\, G_B) = P(X_B > 120)$. Siendo $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y tipificando la variable normal X_B, obtenemos que:

  $$P(X_B > 120) = P(\tfrac{X_A - 105}{12} > \tfrac{5}{4}) = P(Z > 1{,}25) = P(Z \leq -1{,}25) \approx 0{,}106$$

Una vez calculadas las probabilidades, basta sustituir para obtener el resultado:

$$P(G_B \,|\, X > 120) \approx \frac{0{,}106 \cdot 0{,}5}{0{,}023 \cdot 0{,}5 + 0{,}106 \cdot 0{,}5} = 0{,}823$$