

Curvas parametrizadas

(1.1) Nociones básicas. (a) Una *curva parametrizada diferenciable* o simplemente *curva*, o simplemente *parametrización*, es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que admite derivadas de todos los órdenes. Aquí I representa un intervalo abierto finito o infinito: $I = (a, b), (-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$. Obsérvese que por definición consideramos curvas en el espacio \mathbb{R}^3 . En consecuencia, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ donde $x(t), y(t), z(t)$ son funciones reales de variable real infinitamente diferenciables.

(b) Llamamos *traza* de la curva α al conjunto de puntos $\text{Tr}(\alpha) = \{\alpha(t) : t \in I\}$, es decir, a la imagen de la función α . A veces diremos que la curva α es una *parametrización* de $\text{Tr}(\alpha)$. Advertimos desde ahora que no se debe confundir la curva con su traza: ésta no determina aquélla (véase más adelante los comentarios 1.8(2)(3), p. 9).

Si la traza $\text{Tr}(\alpha)$ está contenida en un plano afín $P \subset \mathbb{R}^3$, entonces diremos que α es una curva *plana*; si no se sabe de la existencia de tal plano, diremos que α es una curva *alabeada*. El ejemplo más sencillo de curva plana α corresponde a que la tercera componente sea constante igual a 0; entonces $\text{Tr}(\alpha) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, y tenemos en realidad una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si la traza de una curva alabeada α está contenida en una esfera $S \subset \mathbb{R}^3$, diremos que α es una curva *esférica* o que *yace* en una esfera.

(c) En algunas ocasiones consideraremos también curvas definidas en intervalos cerrados, es decir, aplicaciones $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que se pueden extender a un intervalo abierto en el que tienen derivadas de todos los órdenes.

Si $\alpha(a) = \alpha(b)$ diremos que α es una *curva cerrada*. En este caso siempre supondremos que $\alpha'(a) = \alpha'(b)$, $\alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$, esto es, $\alpha^{(k)}(a) = \alpha^{(k)}(b)$ para todos los órdenes $k \geq 1$. Por tanto una curva cerrada se prolonga a una aplicación periódica $\bar{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ infinitamente diferenciable.

(d) Una construcción sencilla que a veces se usa es la siguiente. Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva y $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un difeomorfismo, entonces $\beta = h \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es

también una curva, llamada la *imagen* de la anterior mediante h . Obsérvese que $h(\text{Tr}(\alpha)) = \text{Tr}(\beta)$.

Cuando h es un cambio lineal de coordenadas esta construcción facilita el análisis de la curva, pues permite transformarla para hacer hipótesis suplementarias sobre ella. Más adelante consideraremos el caso en que h es un *movimiento rígido directo*, es decir, una aplicación afín que conserva las distancias. Una curva y su imagen por un tal movimiento se contemplan como iguales, y de esta igualdad tratan los denominados teoremas fundamentales (lección 9). ■

A continuación introducimos el primer concepto asociado a la diferenciabilidad de las parametrizaciones, de claro significado geométrico. Se refiere a la primera derivada; más adelante analizaremos el significado de las derivadas de orden superior.

(1.2) Tangencia. (a) Sea α una curva diferenciable. Para un valor dado $t \in I$, el vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es el *vector tangente* a α en el punto $\alpha(t)$; también recibe el nombre de *vector velocidad*. Cuando $\alpha'(t) \neq 0$, definimos el *vector tangente unitario* $\mathbf{t}(t) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$. En este caso la recta afín que pasa por el punto $\alpha(t)$ con la dirección de $\alpha'(t)$ se denomina recta tangente a la curva en t , y se denota $T_t(\alpha)$.

(b) Si $\alpha'(t) = 0$ se dice que la curva tiene una *singularidad* en t . La curva α se llama *regular* si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Por ejemplo, supongamos que una curva β es imagen de otra α , es decir, $\beta = h \circ \alpha$ para cierto difeomorfismo h de \mathbb{R}^3 . Entonces $\beta'(t) = d_{\alpha(t)}h(\alpha'(t))$, por la regla de la cadena, y como $d_{\alpha(t)}h$ es un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^3 , resulta que las dos curvas tienen singularidades para los mismos valores de t .

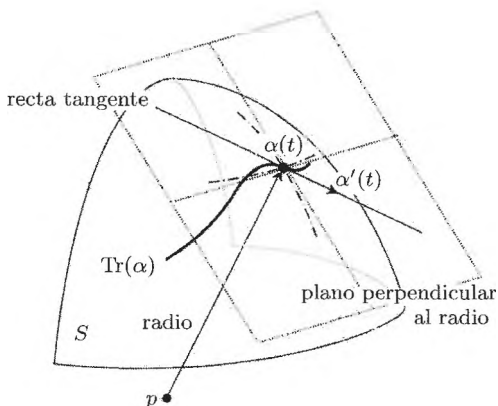
(c) Dos curvas α y β se denominan *tangentes* en un punto común $\alpha(t) = \beta(u)$ de su traza si las rectas tangentes $T_t(\alpha)$ y $T_u(\beta)$ coinciden. ■

El concepto de tangencia es fundamental en el estudio de las curvas. Proporciona información relevante sobre su naturaleza y, como decíamos, refleja sus propiedades geométricas. Como ilustración de esto mencionamos ahora un par de cosas sencillas.

Observaciones 1.3. (1) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva plana. Su traza $\text{Tr}(\alpha)$ estará contenida en un plano afín $P \subset \mathbb{R}^3$, que será perpendicular a cierto vector $u \in \mathbb{R}^3$, y se cumplirá por tanto $u(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = 0$. Derivando esta igualdad

resulta $u\alpha'(t) = 0$, lo que significa que *la recta afín tangente está contenida en el plano P* .

(2) Supongamos ahora que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es esférica. Su traza $\text{Tr}(\alpha)$ estará contenida en una cierta esfera $S \subset \mathbb{R}^3$ de, digamos, centro $p \in \mathbb{R}^3$ y radio $r > 0$. Será $\|\alpha(t) - p\| = r$, o equivalentemente, $(\alpha(t) - p)^2 = r^2$. Derivando se deduce $2(\alpha(t) - p)\alpha'(t) = 0$, lo que se expresa diciendo que *la recta tangente en el punto $\alpha(t)$ es perpendicular al radio de la esfera en ese punto*. ▮

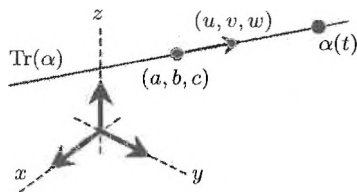


A continuación presentamos ejemplos diversos, algunos muy concretos, otros construcciones generales, que pueden servir como motivación para el estudio posterior de las curvas en el espacio.

Ejemplos 1.4. (1) Las rectas son curvas diferenciables. En efecto, sus parametrizaciones son las aplicaciones $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por

$$\alpha(t) = (a + ut, b + vt, c + wt),$$

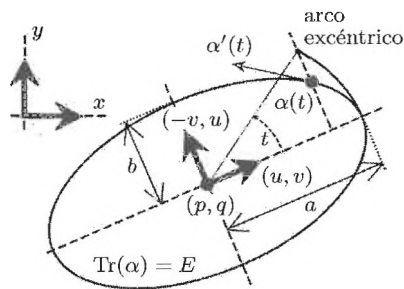
con $(u, v, w) \neq 0$. Se trata de curvas regulares con vector tangente $\alpha'(t) = (u, v, w)$.



(2) Las elipses son curvas diferenciables. La elipse $E \subset \mathbb{R}^2$ de centro (p, q) , dirección principal (u, v) con $u^2 + v^2 = 1$, y semiejes mayor a y menor b , es la traza de la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ con

$$\begin{cases} x(t) = p + au \cos t - bv \sin t, \\ y(t) = q + av \cos t + bu \sin t. \end{cases}$$

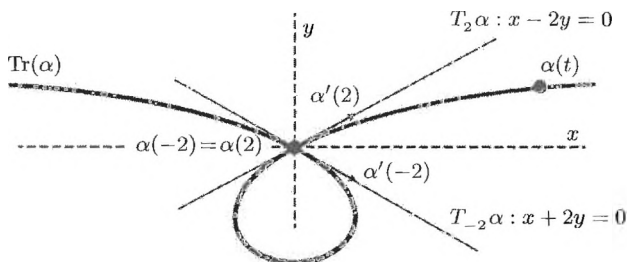
Por supuesto, si $a = b$, entonces se trata de una circunferencia y se puede elegir una parametrización mucho más sencilla (¿cuál?). El lector puede encontrar por sí mismo parametrizaciones de las parábolas y las hipérbolas.



(3) La aplicación

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$$

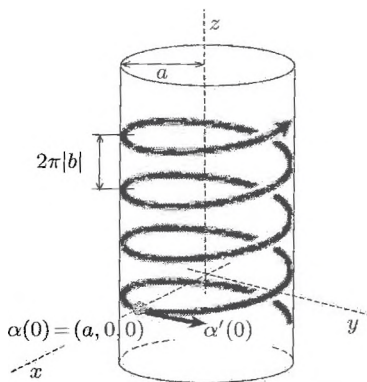
define una curva plana. Obsérvese que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ y, por tanto, la curva tiene una *autointersección*; en este ejemplo, en esa autointersección hay dos tangentes diferentes. Por razones obvias, esta curva se denomina *lazo*.



La autointersección se produce porque la parametrización α no es una aplicación inyectiva: $\alpha(-2) = \alpha(2)$. Sin embargo la situación local es diferente: para cada valor del parámetro t (incluidos los valores $t = -2, 2$), existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que la restricción de α al intervalo $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ sí es inyectiva. ■

Ejemplos 1.5. (1) La aplicación $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt),$$



$a > 0, b \neq 0$, es una curva regular. Esta curva recibe el nombre de *hélice circular de radio a y paso b* . Su traza yace en la superficie de un cilindro de radio a con el eje z como eje central. Para todo t los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(t + 2\pi)$ se encuentran en la misma generatriz del cilindro a una distancia $2\pi|b|$. Las dos primeras coordenadas describen un movimiento de giro y la tercera aleja (o acerca, según los valores del parámetro) la curva del plano xy .

Si calculamos el vector tangente resulta

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

que es perpendicular al vector $(a \cos t, a \sin t, 0)$, proyección ortogonal de $\alpha(t)$ sobre el plano xy . Así, el vector tangente es perpendicular al radio de rotación del cilindro en el que yace la hélice.

(2) La curva

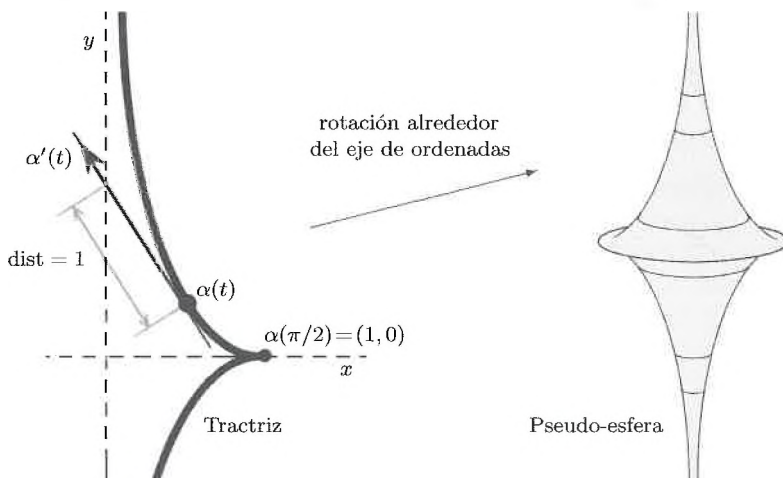
$$\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{1}{2}t)$$

recibe el nombre de *tractriz*. Su vector tangente es

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2}t \tan \frac{1}{2}t} \right) = \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2 \cos \frac{1}{2}t \sin \frac{1}{2}t} \right) \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right), \end{aligned}$$

y, por tanto, α presenta una singularidad en $t = \pi/2$ (y sólo ésta).

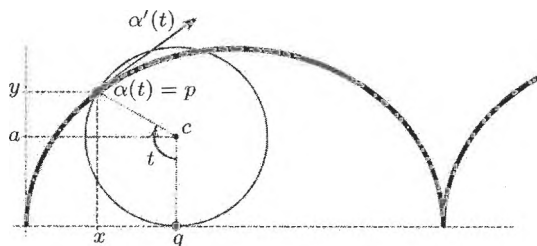
La tractriz es la trayectoria descrita por un cuerpo material que es arrastrado por una cuerda cuyo extremo libre se mueve a lo largo de una línea recta predefinida. Esto se recoge en la propiedad de la tractriz, que el lector fácilmente comprobará, de que la longitud del segmento de la tangente ^{de} la tractriz entre el punto de tangencia y el eje de ordenadas es constante e igual a 1.



La *superficie de revolución* construida rotando la tractriz alrededor de dicho eje se llama *pseudo-esfera*.

(3) La *cicloide* es una curva plana que se define de la siguiente manera: supongamos que un círculo de radio a rueda sobre el eje de abscisas (en sentido

creciente) de modo que el punto de contacto inicial p coincide con el origen $(0, 0)$. Después de un cierto tiempo hay un nuevo punto de contacto q , y denotamos por t el ángulo definido por q , el centro del círculo y el punto de contacto inicial p , que ahora ocupa otra posición.



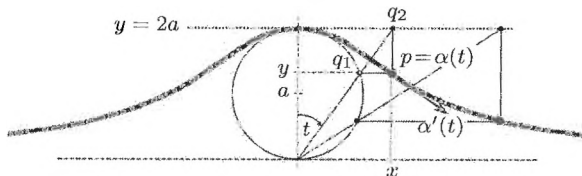
Es fácil ver que p tiene ahora coordenadas $(a(t - \text{sen } t), a(1 - \text{cos } t))$. Por tanto, la cicloide es la curva

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (a(t - \text{sen } t), a(1 - \text{cos } t)),$$

(cuya traza es la trayectoria seguida por el punto p). La curva presenta singularidades para $t = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Sea C el círculo de radio a y centro $(0, a)$ en el plano. Dado un punto $q_1 \in C$ distinto del origen $(0, 0)$ consideremos el punto q_2 de intersección de la recta que une el origen y q_1 con la recta de ecuación $y = 2a$ y sea p el punto de intersección de la recta a través de q_1 paralela al eje x con la recta a través de q_2 paralela al eje y . Los puntos p obtenidos de este modo constituyen la traza de la curva llamada *bruja de Agnesi*, que admite la parametrización

$$\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2a \tan t, 2a \cos^2 t).$$



El parámetro t se interpreta en la construcción anterior como el ángulo que forma el eje y con la recta que une el origen con el punto q_1 .

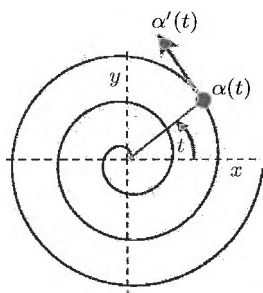
(5) Una *espiral* es una curva plana del tipo

$$\alpha(t) = \rho(t)(\cos t, \text{sen } t),$$

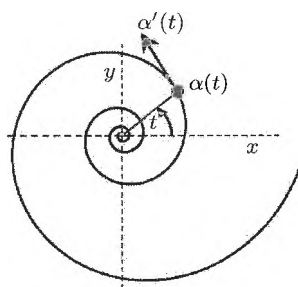
es decir, una deformación de la circunferencia mediante una función $\rho(t)$ infinitamente derivable. Tenemos:

$$\alpha'(t) = \rho'(t)(\cos t, \sin t) + \rho(t)(-\sin t, \cos t) = \rho'(t)u(t) + \rho(t)v(t),$$

y como $u(t)$ y $v(t)$ son dos vectores unitarios ortogonales, las singularidades corresponden a las soluciones de $\rho(t) = \rho'(t) = 0$. Según esto, para muchas funciones ρ no hay singularidades. Dos ejemplos célebres son la *espiral de Arquímedes*, para $\rho(t) = a + bt$, y la *espiral logarítmica*, para $\rho(t) = e^t$.



Espirale de Arquímedes



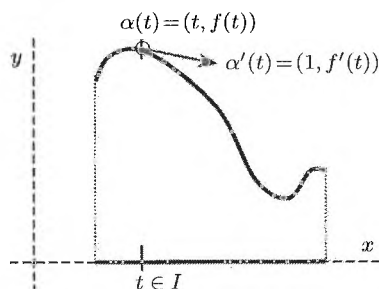
Espirale logarítmica

La parametrización $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$ es una variante de la espiral logarítmica anterior. En este caso, la curva va progresivamente envolviendo el origen para valores crecientes del parámetro. Una forma más general sería $\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t)$, con a y b constantes positivas. ■

Ejemplos 1.6. (1) Los grafos de funciones diferenciables son curvas diferenciables. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función infinitamente diferenciable entonces la aplicación

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 : \alpha(t) = (t, f(t))$$

es una curva regular plana. Por supuesto, se denomina *grafo de f* .

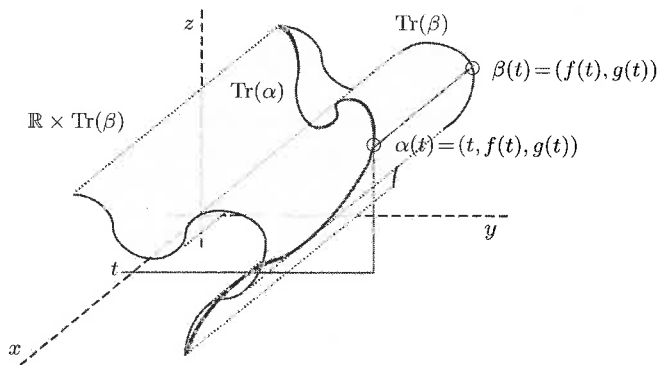


(2) Una construcción análoga se puede realizar para dos funciones f, g . En este caso tenemos

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3 : \alpha(t) = (t, f(t), g(t)).$$

Denotemos $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre las coordenadas segunda y tercera. Entonces $\beta = p \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la curva plana $\beta(t) = (f(t), g(t))$, y la traza de

α está contenida en el cilindro $\mathbb{R} \times \text{Tr}(\beta)$ obtenido trasladando la traza de β a lo largo del primer eje coordenado. En realidad, α es el *grafo* de β .



(3) Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto U de \mathbb{R}^2 . Para un valor $a \in \mathbb{R}$ fijo consideramos la *curva de nivel* $C = f^{-1}(a)$ y suponemos que (x_0, y_0) es un punto de C tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita, existen $\epsilon > 0$ y una función diferenciable $h : (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que: (i) $h(x_0) = y_0$, y (ii) $f(x, h(x)) = a$ si $|x - x_0| < \epsilon$. Resulta de esto que el grafo de h es una curva regular contenida en C que pasa por el punto (x_0, y_0) . Posteriormente (10.5, p. 114), seremos más precisos acerca de las curvas construidas por este procedimiento. ■

(1.7) Curvas esféricas. (1) Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ yace en la esfera S de centro $p \in \mathbb{R}^3$ y radio $r > 0$ si y sólo si $\|\alpha(t) - p\| = r$. Si (a, b, c) son las coordenadas de p y $(x(t), y(t), z(t))$ son las de $\alpha(t)$, entonces la condición anterior es equivalente a

$$(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 + (z(t) - c)^2 = r^2,$$

y vemos que una de las coordenadas de $\alpha(t)$ es en realidad función de las otras. Por ejemplo,

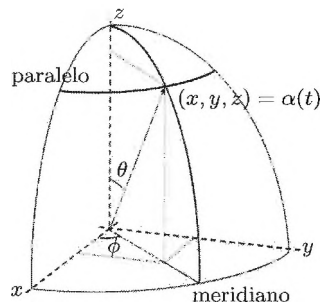
$$z(t) = c \pm \sqrt{r^2 - (x(t) - a)^2 - (y(t) - b)^2}.$$

(2) Una forma más eficiente a veces de definir curvas esféricas es utilizar la *longitud* y la *latitud* de un punto $(x, y, z) \in S$; de hecho, conviene más usar la *colatitud*, que es el ángulo complementario de la latitud. Denotamos por ϕ la

longitud y por θ la colatitud, y resulta

$$\begin{cases} x = a + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \\ y = b + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \\ z = c + r \cos \theta. \end{cases}$$

De esta manera, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se define mediante dos funciones $\theta = \theta(t)$ y $\phi = \phi(t)$. Como antes, vemos que la curva se define en realidad mediante dos funciones. Por ejemplo, un *meridiano* viene dado por $\phi = \phi_0, \theta = t$, y un *paralelo* por $\phi = t, \theta = \theta_0$.



(3) En fin, podríamos también utilizar la idea del grafo del ejemplo anterior, y definir curvas mediante funciones $\phi = \phi(\theta), \theta = t$ de forma que la curva dependiera del parámetro $\theta = t$ (o al revés, mediante $\phi = t, \theta = \theta(\phi)$). ■

(1.8) Cambios de parámetro. (1) Sea de nuevo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, y consideremos ahora un difeomorfismo $\varphi : J \rightarrow I$. Entonces $\beta = \alpha \circ \varphi$ es otra curva, que se denomina *reparametrización de α* , obtenida mediante el cambio de parámetro $t = \varphi(s)$ (o $s = \varphi^{-1}(t)$). Observamos aquí que: (i) α y β tienen la misma traza, y (ii) β tiene una singularidad en s si y sólo si α la tiene en $\varphi(s)$.

Obsérvese que por ser φ un difeomorfismo, su derivada nunca se anula, luego tendrá signo constante en el intervalo J : si el signo es siempre positivo, es un difeomorfismo creciente y decimos que *conserva la orientación*, y si negativo es decreciente y decimos que *invierte la orientación*.

(2) Hemos visto en la construcción anterior que las curvas α y β tienen la misma traza $\Gamma = \operatorname{Tr}(\alpha) = \operatorname{Tr}(\beta)$, o en otras palabras, son dos parametrizaciones distintas del mismo subconjunto Γ de \mathbb{R}^3 . Esto no es ninguna dificultad, pues como ya advertimos al principio mismo de esta primera lección una curva debe ser distinguida de su traza: la curva es una aplicación y la traza es un conjunto, y dos curvas diferentes pueden tener la misma traza. Por ejemplo, las curvas $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ y $\beta(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ tienen ambas por traza la circunferencia unidad $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (el difeomorfismo utilizado aquí es $\varphi(t) = 2t$).

(3) Pero aun más, en general la traza no determina la curva ni siquiera salvo reparametrización (compárense las anteriores parametrizaciones de la circunferencia con $\gamma(s) = (\cos s^3, \operatorname{sen} s^3)$ en un intervalo $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$). Hagamos notar sin embargo que cuando una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ define un ho-

meomorfismo entre el intervalo I y la traza de α , entonces cualquier otra curva regular $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ con la misma traza y satisfaciendo análoga propiedad se obtiene por reparametrización de α . La prueba de esta afirmación es elemental y se deja al cuidado del lector (se trata simplemente de ver que $\varphi = \alpha^{-1} \circ \beta$ es un difeomorfismo). ■

Los cambios de parámetro son un recurso común para el estudio de las curvas. Sirven para ajustar las condiciones de la curva a la conveniencia de la situación, y constantemente recurriremos a ellos. De hecho la lección siguiente trata del que tal vez sea más importante: la reparametrización por la longitud del arco. La elección de un cambio adecuado no siempre es fácil, y a veces es técnicamente engorrosa. Veamos un ejemplo que necesitaremos más adelante.

Ejemplos 1.9. (1) El cambio más sencillo es la interpolación lineal para modificar el intervalo de definición. Para el intervalo unidad $[0, 1]$ se escribe

$$h : [0, 1] \rightarrow [a, b] : t \mapsto (1 - t)a + tb.$$

En este caso $h'(t) \equiv b - a$. En general sería

$$\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b] : t \mapsto a \frac{d - t}{d - c} + b \frac{t - c}{d - c}$$

con derivada constante $\varphi'(t) \equiv \frac{b-a}{d-c}$.

(2) Una interpolación lineal φ convierte una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ en otra $\beta = \alpha \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\beta'(t) = \frac{b-a}{d-c} \alpha'(\varphi(t)),$$

y modifica la velocidad. En general, supongamos que dados escalares $\lambda, \mu > 0$ construimos un cambio $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ con $\varphi'(a) = \lambda$ y $\varphi'(b) = \mu$. Entonces podemos modificar a conveniencia las velocidades inicial $u = \alpha'(a)$ y final $v = \alpha'(b)$:

$$\beta'(a) = \varphi'(a)\alpha'(a) = \lambda u, \quad \beta'(b) = \varphi'(b)\alpha'(b) = \mu v.$$

(3) Como ilustración de una manera de obtener este tipo de cambios, y porque nos será útil más adelante, construyamos efectivamente el cambio φ último. Para ello podemos suponer que $[a, b]$ es el intervalo unidad. En efecto, si φ es un difeomorfismo de $[0, 1]$ con las condiciones requeridas y h es la interpolación lineal

de (1), la composición $h \circ \varphi \circ h^{-1}$ es un difeomorfismo de $[a, b]$ con esas mismas propiedades. Así pues, el intervalo de definición será a partir de ahora $[0, 1]$.

Consideramos un entero $n > \lambda + \mu$, de modo que $0 < \frac{1}{n}\lambda < 1 - \frac{1}{n}\mu < 1$, y denotamos

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dots = \xi_{n-2} = \frac{1}{n}\lambda, \xi_{n-1} = 1 - \frac{1}{n}\mu, \xi_n = 1.$$

Entonces un cambio del tipo deseado es

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \xi_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (\text{con } t^0 \equiv 1, (1-t)^0 \equiv 1).$$

El origen de esta fórmula bella y misteriosa es la *interpolación polinomial* con la que se definen los *splines*, pero aquí nos basta con comprobar lo que nos interesa. Es claro que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, así que lo que necesitamos es que la derivada sea siempre positiva. Pero la virtud de la fórmula anterior es que la derivada tiene la elegante expresión siguiente:

$$f'(t) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} (\xi_{\ell+1} - \xi_{\ell}) \binom{n-1}{\ell} t^{\ell} (1-t)^{n-1-\ell}.$$

Por tanto,

$$f'(0) = n(\xi_1 - \xi_0) = \lambda, \quad f'(1) = n(\xi_n - \xi_{n-1}) = \mu,$$

y como todos los sumandos son ≥ 0 (y alguno no nulo), la derivada $f'(t)$ no es nunca cero. ■

(1.10) Curvas de Jordan. (1) Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ que define un homeomorfismo sobre su imagen $\text{Tr}(\alpha)$, se llama *arco de Jordan*, *cerrado* si la curva está definida en un intervalo cerrado. Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada tal que $\alpha|_{(a, b]}$ es inyectiva (y, por tanto, $\alpha|_{[a, b)}$ también lo es), entonces α recibe el nombre de *curva simple* o *de Jordan*. Se comprueba fácilmente que si α es una curva de Jordan entonces su traza es homeomorfa a la circunferencia \mathbb{S}^1 .

(2) Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular, entonces todo $t_0 \in I$ tiene un entorno $I_0 = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset I$ tal que la curva $\alpha_0 = \alpha|_{I_0} : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo sobre su traza $\text{Tr}(\alpha_0) = \alpha(I_0)$. Por tanto, α_0 es un arco de Jordan.

Este hecho es consecuencia del teorema de la función inversa. En efecto, por hipótesis $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq 0$, y por simplicidad suponemos $x'(t_0) \neq$

0. Sea $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección sobre la primera coordenada: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$. Como $p \circ \alpha(t) = x(t)$, existe un entorno $I_0 \subset I$ de t_0 y un entorno J_0 de $x(t_0) = p \circ \alpha(t_0) \in \mathbb{R}$ tales que $p \circ \alpha|_{I_0}$ es un difeomorfismo de I_0 sobre J_0 . Denotamos $\alpha_0 = \alpha|_{I_0}$ y $\Gamma = \text{Tr}(\alpha_0)$. Entonces la aplicación

$$\beta = \alpha_0 \circ (p \circ \alpha|_{I_0})^{-1} : J_0 \rightarrow \Gamma$$

es un homeomorfismo cuyo inverso es $p|_{\Gamma}$. Por tanto $\alpha_0 = \beta \circ (p \circ \alpha|_{I_0})$ es también un homeomorfismo. Ya que la aplicación β es de la forma $\beta(s) = (s, f(s))$, con $f(s) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $\Gamma = \text{Tr}(\alpha_0)$ es el grafo de la función diferenciable $f : J_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(3) Lo anterior no significa que una curva regular considerada en su totalidad sea un arco de Jordan, es decir, sea un homeomorfismo sobre su traza. Un contraejemplo es el lazo de 1.4(3), p. 4. ■

Terminamos esta lección con un resultado de naturaleza intuitiva, que muestra cómo es posible interpretar geoméricamente el vector tangente unitario como límite de vectores unitarios secantes.

Proposición 1.11. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva. Dado $t_0 \in I$, en donde α no tiene una singularidad, consideremos los vectores

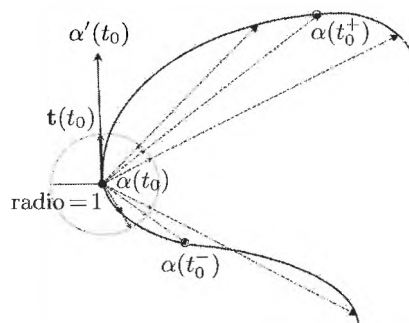
$$u(t) = \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|} \quad \text{para } t \neq t_0.$$

Entonces

$$\mathbf{t}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} u(t) = - \lim_{t \rightarrow t_0^-} u(t)$$

Demostración. Puesto que en t_0 no hay singularidad, se tiene por 1.10(2) que $\alpha(t) - \alpha(t_0) \neq 0$ para valores de t cercanos a t_0 y, por tanto, la función $u(t)$ está bien definida para estos valores. Los siguientes cálculos son inmediatos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} u(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}}{\frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|}{t - t_0}} \\ &= \frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} = \mathbf{t}(t_0). \end{aligned}$$

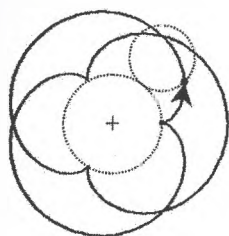


La diferencia en este cálculo cuando $t \rightarrow t_0^-$ es la siguiente:

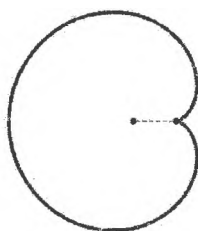
$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|}{t - t_0} = - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \left\| \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \right\| = -\|\alpha'(t_0)\|.$$

Problemas

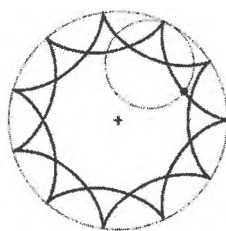
Número 1. (1) Hallar una parametrización de la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse alrededor de la parte externa de otra circunferencia. Esta curva se denomina *epicicloide*, y *cardioide* cuando las dos circunferencias tienen el mismo radio.



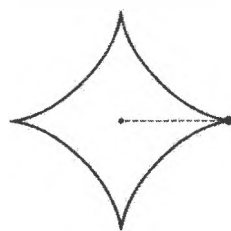
Epicicloide



Cardioide



Hipocicloide



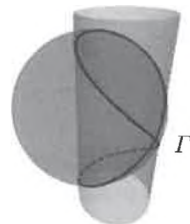
Astroide

(2) Resolver el problema análogo cuando la circunferencia que rueda lo hace alrededor de la parte interna de la otra. En este caso, la curva se llama *hipocicloide*, y *astroide* cuando el radio de la circunferencia que rueda es la cuarta parte del de la otra.

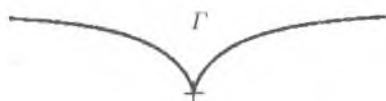
Número 2. Denotemos por Γ la intersección del cilindro de eje z y radio $1/2$ con la esfera de centro $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$ y radio 1. Demostrar que Γ es la traza de la curva

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (\cos^2 t - \tfrac{1}{2}, \sin t \cos t, \sin t) \\ &= (\tfrac{1}{2} \cos 2t, \tfrac{1}{2} \sin 2t, \sin t). \end{aligned}$$

Esta curva recibe el nombre de *curva de Viviani*.



Número 3. Sea Γ el conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación $\rho = \cos \theta / \tan \theta$ (en coordenadas polares, $0 < \theta < \pi$). Pasando a coordenadas cartesianas y utilizando la ecuación anterior se obtiene una parametrización de Γ respecto de θ que se llama *cisoide de Diocles*. Probar que $\beta(t) = (\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}, t^2)$, $-1 < t < 1$, define una reparametrización de la cisoide.



Longitud de un arco de curva

Una noción geométrica fundamental relativa a las curvas es la noción de *longitud*, que introducimos en la siguiente definición.

Definición 3.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva y sean $c, d \in I$. Se llama *longitud del arco de curva entre los valores c y d* al valor de la integral siguiente

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt.$$

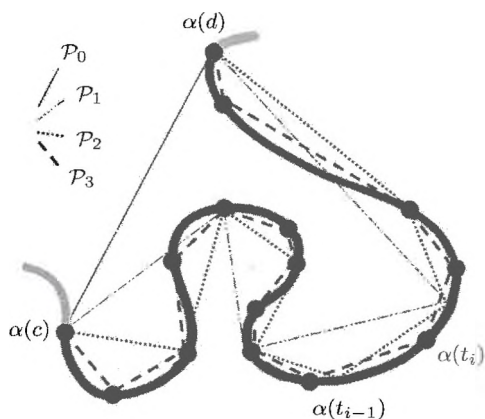
Obsérvese que en la definición anterior no se excluye la posibilidad de que $c > d$, en cuyo caso estaríamos considerando una longitud negativa. En definitiva, lo que hemos definido es el concepto de *longitud con signo*. Obsérvese también que esta integral sólo es cero cuando el integrando es idénticamente nulo (pues en todo caso es ≥ 0), y por tanto α es constante; en otras palabras, las únicas curvas con longitud cero son las curvas constantes.

Es inmediato que si $c' \leq c$ y $d \leq d'$, entonces se cumple $L_c^d(\alpha) \leq L_{c'}^{d'}(\alpha)$, lo que permite definir la longitud de toda la curva, aunque el intervalo I no sea cerrado. En efecto, si $I = (a, b)$, entonces se define la longitud de α como el límite (que muy bien puede ser infinito):

$$L(\alpha) = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ d \rightarrow b}} L_c^d(\alpha).$$

En realidad ésta es la integral $L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$, que puede ser impropia. Señalemos que esta longitud es siempre ≥ 0 , pues hemos utilizado los límites $a < b$.

El sentido geométrico de la definición de longitud se consigue interpretando la integral anterior como límite de las longitudes de poligonales \mathcal{P} que se van ajustando a la curva entre los valores dados del parámetro.



Sean $c < d$. Una *partición* del intervalo $[c, d]$ es una sucesión

$$\mathcal{P} : t_0 = c < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = d,$$

y su *diámetro* es el valor máximo de las amplitudes $t_i - t_{i-1}$. A esta partición se asocia la *poligonal* de \mathbb{R}^3 que une los puntos

$$\alpha(c) = \alpha(t_0), \dots, \alpha(t_{i-1}), \alpha(t_i), \dots, \alpha(t_n) = \alpha(d),$$

y cuya *longitud* es

$$L_c^d(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|.$$

Se tiene la siguiente proposición, que nos dice que la longitud de la curva se puede aproximar arbitrariamente por longitudes de poligonales siempre que se tome la partición \mathcal{P} suficientemente fina.

Teorema 3.2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|L_c^d(\alpha) - L_c^d(\alpha, \mathcal{P})| < \varepsilon$$

para toda partición \mathcal{P} de diámetro $< \delta$.

En particular, como la longitud de una poligonal es siempre mayor o igual que la del segmento que une sus extremos, resulta que la longitud (en valor absoluto) de cualquier arco que una dos puntos p, q es mayor o igual que $\|q - p\|$.

Demostración. Definimos la función auxiliar $f : I^3 = I \times I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(t_1, t_2, t_3) = +\sqrt{x'(t_1)^2 + y'(t_2)^2 + z'(t_3)^2}$$

Obsérvese que $\|\alpha'(t)\| = f(t, t, t)$. Consideramos la restricción $f|_{[c,d]^3} : [c, d] \times [c, d] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ que, por ser $[c, d]$ compacto, es uniformemente continua. En consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que si $|t'_1 - t_1| < \delta, |t'_2 - t_2| < \delta, |t'_3 - t_3| < \delta$, entonces $|f(t'_1, t'_2, t'_3) - f(t_1, t_2, t_3)| < \varepsilon/(d - c)$. Sea \mathcal{P} una partición de diámetro $< \delta$. Aplicamos ahora el teorema del valor medio coordenada a coordenada a cada una de las funciones $x(t), y(t), z(t)$ en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Se tiene que

$$\begin{aligned}x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\lambda_i)(t_i - t_{i-1}) \\y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\mu_i)(t_i - t_{i-1}) \\z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\theta_i)(t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

donde $\lambda_i, \mu_i, \theta_i$ yacen en el intervalo (t_{i-1}, t_i) . En consecuencia,

$$\begin{aligned}\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) &= ((t_i - t_{i-1})x'(\lambda_i), (t_i - t_{i-1})y'(\mu_i), (t_i - t_{i-1})z'(\theta_i)) \\&= (t_i - t_{i-1})(x'(\lambda_i), y'(\mu_i), z'(\theta_i)),\end{aligned}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}L_c^d(\alpha, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'(\lambda_i)^2 + y'(\mu_i)^2 + z'(\theta_i)^2} \\&= \sum_{i=1}^n f(\lambda_i, \mu_i, \theta_i)(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Por otra parte, el teorema del valor medio del Cálculo Integral nos permite escribir

$$\begin{aligned}L_c^d(\alpha) &= \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(t)\| dt \\&= \sum_{i=1}^n \|\alpha'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \xi_i, \xi_i)(t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

donde $\xi_i \in (t_i, t_{i-1})$. Se deduce de lo anterior que

$$\begin{aligned}|L_c^d(\alpha) - L_c^d(\alpha, \mathcal{P})| &= \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \xi_i, \xi_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(\lambda_i, \mu_i, \theta_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\&= \left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i, \xi_i, \xi_i) - f(\lambda_i, \mu_i, \theta_i))(t_i - t_{i-1}) \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i, \xi_i, \xi_i) - f(\lambda_i, \mu_i, \theta_i)|(t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{d-c}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{d-c} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3.3) Curvas rectificables. El concepto de longitud se puede establecer para nociones de curva más generales que la que utilizamos en este libro. De hecho basta que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ sea una aplicación continua, en cuyo caso se llama *curva continua*. Si $c, d \in I$, se dice que la curva continua α es *rectificable entre c y d* si existe el límite de las longitudes de poligonales $L_c^d(\alpha, \mathcal{P})$ cuando los diámetros tienden a 0. Ese límite es, por definición, la longitud $L_c^d(\alpha)$. En estos términos, la demostración anterior prueba que si la curva continua α es de clase C^1 entonces α es rectificable entre cualesquiera dos parámetros c, d . Por tanto, toda curva parametrizada en el sentido utilizado en este libro es rectificable.

Ejemplos 3.4. Consideremos algunos ejemplos de la lección 1.

(1) Una recta afín de \mathbb{R}^3 se parametriza como se explicó en 1.4(1), p. 3: $\alpha(t) = (a + ut, b + vt, c + wt)$. Por tanto,

$$\alpha'(t) = (u, v, w) = \frac{\alpha(d) - \alpha(c)}{d - c}, \text{ para cualesquiera } c < d.$$

Por tanto:

$$L_{t_1}^{t_2}(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\|}{t_2 - t_1} dt = \|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\|,$$

como era de esperar. En otras palabras, la longitud del segmento que une dos puntos p y q es exactamente $\|p - q\|$.

(2) Una elipse viene dada por la parametrización de 1.4(2), p. 3:

$$\alpha(t) = (p + au \cos t - bv \sin t, q + av \cos t + bu \sin t),$$

con $u^2 + v^2 = 1$. Un cálculo sencillo muestra que $\|\alpha'(t)\|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$, de modo que:

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Esta integral se llama *elíptica*, y su cálculo requiere en general el uso de funciones no elementales. Pero si la elipse es una circunferencia de radio r , es decir, $a =$

$b = r$, entonces

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = r \int_c^d dt = r(d - c) = r\theta,$$

donde $\theta = d - c$ es la amplitud del ángulo central determinado por los puntos $\alpha(c)$ y $\alpha(d)$. ¡Como tenía que ser!

Obsérvese que la longitud se ha definido según el intervalo de parámetros, de modo que si una parametrización es periódica como la anterior, y la traza se recorre varias veces, la longitud se cuenta todas esas veces.

(3) Consideremos ahora la hélice de 1.5(1), p. 4: $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$. Calculando un poco, se ve que la norma de la derivada es $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, y concluimos

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2}(d - c).$$

(4) Una de las espirales descritas en 1.5(5), p. 6, era la logarítmica:

$$\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

Tenemos que

$$\alpha'(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t),$$

y, por tanto,

$$\|\alpha'(t)\|^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 = 2e^{2t}.$$

En consecuencia, la longitud de un arco *a partir de* $c = 0$ es

$$L_0^d(\alpha) = \int_0^d \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2}(e^d - 1), \quad d > 0.$$

Un cálculo similar nos da la longitud de un arco *hasta* $d = 0$:

$$L_c^0(\alpha) = \sqrt{2}(1 - e^c), \quad c < 0.$$

Por tanto:

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} L_0^d(\alpha) = +\infty, \quad \lim_{c \rightarrow -\infty} L_c^0(\alpha) = \sqrt{2},$$

y vemos que la parte de la espiral parametrizada por $t \geq 0$ tiene longitud infinita, mientras que la parte parametrizada por $t \leq 0$ la tiene finita. Esta última parte

muestra que se puede necesitar un tiempo infinito para recorrer una distancia finita.

(4) En fin, un grafo (1.6(1), p. 7) se parametriza mediante $\alpha(t) = (t, f(t))$, de modo que $\alpha'(t) = (1, f'(t))$, y la longitud del arco entre los valores c y d es

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

(3.5) Longitud y reparametrizaciones. Recordemos que una reparametrización de una curva α se obtiene mediante un cambio de parámetro $t = \varphi(s)$ cuando $\beta = \alpha \circ \varphi$, y en ese caso ambas tienen la misma traza (1.8(2), p. 9). Veamos como se comporta la longitud en esta situación.

Supongamos $\varphi(c_0) = c$ y $\varphi(d_0) = d$ con $c_0 < d_0$. Entonces

$$\begin{aligned} L_{c_0}^{d_0}(\beta) &= \int_{c_0}^{d_0} \|\beta'(s)\| ds \\ &= \int_{c_0}^{d_0} \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\| ds = \int_{c_0}^{d_0} \|\alpha'(\varphi(s))\| |\varphi'(s)| ds \\ &= \begin{cases} + \int_{c_0}^{d_0} \|\alpha'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds & \text{si } \varphi'(s) > 0, \\ - \int_{c_0}^{d_0} \|\alpha'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds & \text{si } \varphi'(s) < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} + \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt = L_c^d(\alpha) & \text{con } c < d, \\ - \int_c^d \|\alpha'(t)\| dt = -L_c^d(\alpha) & \text{con } c > d. \end{cases} \end{aligned}$$

En estas igualdades hemos aplicado el cambio de variable de la integral, distinguiendo los dos posibles signos de φ' : para signo positivo, φ es creciente y $c < d$, y para signo negativo φ es decreciente y $c > d$.

Si la curva β se obtiene a partir de α mediante una reparametrización creciente podemos pensar que ambas curvas son esencialmente la misma y diremos que son *equivalentes*.

A continuación introducimos la parametrización por la longitud del arco:

Definición 3.6. Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, diremos que está *parametrizada por la longitud del arco* si existe un *origen* t_0 tal que $L_{t_0}^t(\alpha) = t - t_0$.

Ejemplo 3.7. Veamos cuándo una recta afín $\alpha(t) = (a + ut, b + vt, c + wt)$ está parametrizada por la longitud del arco:

$$L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} (t - t_0),$$

luego la parametrización es por el arco si y sólo si el vector tangente $\alpha'(t) = (u, v, w)$ es unitario. ■

La siguiente proposición muestra que la condición necesaria y suficiente anterior vale para cualquier curva.

Proposición 3.8. La curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada por la longitud del arco si y sólo si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

Demostración. Si α está parametrizada por la longitud del arco, tomemos el origen t_0 de la definición, de modo que

$$\int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = L_{t_0}^t(\alpha) = t - t_0.$$

Derivando esta igualdad obtenemos que $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo t . Recíprocamente, si $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo t , entonces para cualquier t_0 que tomemos es

$$L_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t du = t - t_0,$$

y α está parametrizada por la longitud del arco. ■

De la demostración anterior se sigue que la elección del origen t_0 es irrelevante en la definición de curva parametrizada por la longitud del arco.

También resulta de lo anterior que las curvas parametrizadas por la longitud del arco son regulares. En la siguiente proposición demostramos que es siempre posible reparametrizar una curva regular por la longitud del arco, mediante una reparametrización creciente.

Proposición 3.9. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces existe un difeomorfismo creciente $\varphi : J \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$ está parametrizada por la longitud del arco.

Demostración. Fijemos $t_0 \in I$. Definimos $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$, es decir, ψ mide la longitud del arco a partir de t_0 . La función ψ es diferenciable y $\psi'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ (ya que α es regular). Por tanto ψ es creciente y define un homeomorfismo de $I = (a, b)$ sobre un intervalo abierto $J = (a_0, b_0)$. Por el teorema de la función inversa, ψ es un difeomorfismo sobre J y tomamos su inversa $\varphi = \psi^{-1} : J = (a_0, b_0) \rightarrow I = (a, b)$, que también es creciente. Sea $\beta = \alpha \circ \varphi$. Entonces

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)\| = \|\alpha'(\varphi(s))\| \cdot |\varphi'(s)| = \psi'(\varphi(s))\varphi'(s) = 1,$$

pues $\psi \circ \varphi(s) = s$. De 3.8, p.35, deducimos que β está parametrizada por la longitud del arco. ■

La reparametrización por la longitud del arco es esencialmente única, en el sentido de que cualquier otra reparametrización de α por la longitud del arco que conserve la orientación difiere de la anterior tan sólo en una *traslación del parámetro*. Lo anterior se puede expresar formalmente así: Si β_1 y β_2 son reparametrizaciones crecientes de α por la longitud del arco, definidas en intervalos J_1 y J_2 respectivamente, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $J_1 = c + J_2$ y $\beta_2(s) = \beta_1(s + c)$ para todo $s \in J_2$. Es más, todas las curvas equivalentes a α tienen una misma reparametrización por la longitud del arco salvo traslación del parámetro. La demostración de lo anterior queda como ejercicio para el lector.

Si $\beta = \alpha \circ \varphi$ es una reparametrización creciente de α por la longitud del arco mediante el cambio $t = \varphi(s)$, entonces $\beta'(s) = \alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)$, es decir, los vectores tangentes a α y β en t y s son proporcionales con razón $\varphi'(s) > 0$. Como $\beta'(s)$ es unitario, resulta

$$\beta'(s) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \mathbf{t}(t) \quad (\text{o equivalentemente, } \alpha'(t) = \|\alpha'(t)\|\beta'(s)).$$

Ejemplos y observaciones 3.10. La reparametrización de una curva por la longitud del arco puede ser muy complicada o incluso imposible de formular explícitamente. Veamos algunos ejemplos.

(1) Utilizando los cálculos de 3.4(4), p.33, para la espiral logarítmica $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, tenemos

$$\psi(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

(para $t_0 = 0$). De modo que el cambio de parámetro φ vendría definido por la expresión

$$\varphi(s) = \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + 1 \right).$$

Así pues, la reparametrización β por la longitud del arco sería

$$\beta(s) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + 1 \right) \cos \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + 1 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + 1 \right) \operatorname{sen} \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + 1 \right) \right) \quad (1.5)$$

(2) Si efectuamos los mismos cálculos con la hélice circular (1.5(1), p.4, y 3.4(3), p.33)

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt), a > 0, b \neq 0,$$

obtenemos

$$\psi(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} du = \sqrt{a^2 + b^2} t,$$

y, por tanto,

$$\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De modo que la expresión

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

nos da una parametrización de la hélice circular por la longitud del arco.

(3) Se comprueba de la misma manera que $\beta(s) = r(\cos \frac{1}{r}s, \operatorname{sen} \frac{1}{r}s)$ es una parametrización de la circunferencia de radio r y centro el origen por la longitud del arco. Sin embargo, si queremos hacer lo propio para una elipse arbitraria nos encontramos rápidamente con complicaciones, por lo mismo indicado en 3.4(2), p.32. Según aquel cálculo, la longitud de un arco de una elipse de semiejes a y b , viene dado por la integral

$$\psi(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u} du,$$

que como ya hemos señalado, no se puede expresar mediante funciones elementales. ■

Es interesante hacer notar que la razón entre la longitud del arco entre dos puntos p y q de la curva y la longitud de la cuerda que los une tiende a la unidad cuando q tiende hacia p . Este hecho se establece formalmente a continuación.

Proposición 3.11. *Dada una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $t_0 \in I$, se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|L_{t_0}^t(\alpha)|}{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|} = 1.$$

Demostración. Como

$$\frac{|L_{t_0}^t(\alpha)|}{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|} = \frac{\frac{|L_{t_0}^t(\alpha) - L_{t_0}^{t_0}(\alpha)|}{|t - t_0|}}{\frac{\|\alpha(t) - \alpha(t_0)\|}{|t - t_0|}},$$

bastará ver que

$$\left| \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{L_{t_0}^t(\alpha) - L_{t_0}^{t_0}(\alpha)}{t - t_0} \right| = \left\| \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \right\|.$$

Los dos límites involucrados son, respectivamente, las derivadas en t_0 de las funciones

$$L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \quad \text{y} \quad \alpha(t),$$

y esas derivadas son respectivamente $\|\alpha'(t_0)\|$ y $\alpha'(t_0)$, lo que concluye la demostración. ■

Problemas

Número 1. Calcular la longitud del arco de cicloide correspondiente a una rotación completa del círculo.

Número 2. Calcular la longitud del arco de la parábola $\alpha(t) = (t, bt^2)$ entre los valores del parámetro $-a$ y a .

Número 3. Determinar si la curva $\alpha(t) = (-\frac{4}{5} \cos t, 2 - \sin t, \frac{3}{5} \cos t)$ está parametrizada por la longitud del arco.

Número 4. Dada la espiral logarítmica $\alpha(t) = (ae^{-bt} \cos t, ae^{-bt} \sin t)$ con $a, b > 0$, calcular la longitud $L_0^\infty(\alpha)$ y comprobar que es finita. (En otras palabras, calcular el límite de las longitudes $L_0^t(\alpha)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, que resultará finito.)

Número 5. Dada una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ probar que la desigualdad $L_a^b(\alpha) \geq \|\alpha(b) - \alpha(a)\|$ es una igualdad si y sólo si la traza de α es un segmento de recta.

Número 6. La curva dada por $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ se llama *cúbica alabeada*. Comprobar que es una curva regular y hallar la expresión integral de su longitud del arco, para concluir que no se puede evaluar en términos de funciones elementales.

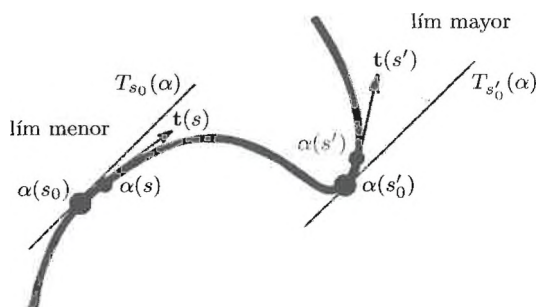
Curvatura y torsión. Fórmulas de Frenet-Serret

A continuación estudiaremos otras nociones geométricas que están relacionadas con las derivadas sucesivas de las parametrizaciones de una curva. Según vimos en la lección anterior, toda curva se puede reparametrizar de un modo esencialmente único por la longitud del arco. Por ello, en lo que sigue todas las curvas se consideran parametrizadas respecto del arco, que denotamos de manera sistemática s . Aún así, en los enunciados insistiremos en ello.

Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable. Una interpretación geométrica del límite

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\alpha'(s) - \alpha'(s_0)}{s - s_0}$$

sugiere que está ligado a la rapidez con la que la curva se aleja de su recta tangente en el punto $\alpha(s_0)$.



Por esta razón definimos:

Definición 4.1. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco. La *curvatura* de α en $s = s_0$ es el número no negativo $\|\alpha''(s_0)\|$, que se denota $\kappa(s_0)$. Si $\kappa(s_0) \neq 0$, el número inverso $1/\kappa(s_0)$ recibe el nombre de *radio de curvatura* y se designa por $\rho(s_0)$.

Si el número $\kappa(s_0)$ refleja la idea intuitiva de curvatura, es de esperar que las curvas con curvatura nula en todo punto sean justamente las rectas. El siguiente resultado refleja esta propiedad de la curvatura plenamente coherente con la intuición geométrica.

Proposición 4.2. *Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por la longitud del arco tiene curvatura idénticamente nula si y sólo si es una recta, es decir, si y sólo si $\alpha(s) = as + b$ (con $\|a\| = 1$).*

Demostración. Por una parte, si $\kappa(s) = 0$, entonces $\alpha''(s) = 0$ y, por tanto, $\alpha'(s)$ es un vector constante, digamos a , y $\alpha(s) = as + b$ ($\|a\| = 1$ por ser s el arco). Recíprocamente, si α tiene la forma anterior, derivando se obtiene $\alpha'(s) = a$ y $\alpha''(s) = 0$, con lo que $\kappa(s) = 0$ para todo $s \in I$. ■

Ejemplos 4.3. (1) Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la circunferencia de centro el origen y radio r parametrizada por la longitud del arco: $\alpha(s) = r(\cos s/r, \sin s/r)$. Se tiene que

$$t(s) = (-\sin s/r, \cos s/r) \quad \text{y} \quad t'(s) = \frac{1}{r}(-\cos s/r, -\sin s/r).$$

En consecuencia, la curvatura $\kappa(s)$ y el radio de curvatura $\rho(s)$ son constantes, e iguales a $1/r$ y r respectivamente, y como era de esperar.

(2) Consideramos ahora la hélice circular parametrizada por la longitud del arco (ejemplo 3.10(2), p. 37):

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Tenemos

$$t(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

y

$$t'(s) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Por tanto la curvatura y el radio de curvatura son constantes como en el ejemplo anterior:

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \rho(s) = \frac{a^2 + b^2}{a}.$$

■

Volvemos ya a nuestro análisis de las derivadas sucesivas de la curva.

Definición 4.4. Sea de nuevo $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco. Si $\kappa(s_0) \neq 0$, llamaremos *vector normal en $s = s_0$* al vector

$$\mathbf{n}(s_0) = \alpha''(s_0) / \|\alpha''(s_0)\|.$$

Se llama *recta normal a la curva en s* a la recta afín que pasa por el punto $\alpha(s)$ con la dirección de $\mathbf{n}(s)$.

Obviamente $\mathbf{n}(s_0)$ es un vector unitario, y una justificación de su nombre viene dada por el hecho de que derivando la igualdad

$$\|\alpha'(s)\|^2 = \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1,$$

se obtiene que

$$2\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0$$

y, en consecuencia, $\alpha''(s)$, y por tanto $\mathbf{n}(s)$, es ortogonal al vector tangente $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$. En lo que sigue haremos uso frecuente del vector $\mathbf{n}(s)$ por lo que *supondremos a partir de ahora que $\kappa(s) \neq 0$ para todo s* . Recordemos que la curva α es regular (está parametrizada por la longitud del arco), y por cumplir esta nueva condición la denominamos *birregular*.

Como α está parametrizada por la longitud del arco, la derivada $\alpha'(s)$ es el vector tangente unitario $\mathbf{t}(s)$ y de la discusión anterior se sigue la llamada *primera fórmula de Frenet-Serret*:

$$(4.5) \quad \mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \mathbf{n}(s).$$

El plano vectorial generado por los vectores tangente y normal, recibe el nombre de *plano osculador*. También puede definirse como el plano afín que pasa por el punto $\alpha(s_0)$ y tiene como dirección el plano vectorial mencionado $[\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0)]$. Si lo entendemos de este modo, el plano osculador se interpreta intuitivamente como el plano que mejor se adapta a la curva en la proximidad del punto $\alpha(s_0)$. Naturalmente, si la curva es plana su plano osculador en todo punto es el plano en el que está contenida su traza.

Una vez introducido el plano osculador volvamos al concepto de radio de curvatura.

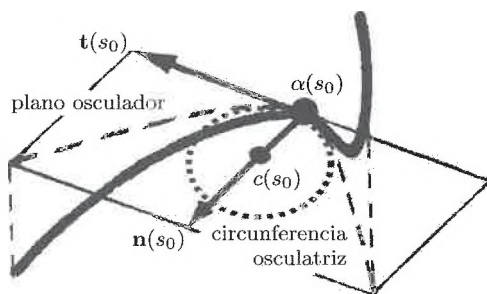
Definición 4.6. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ nuestra curva parametrizada por la longitud del arco. Se llama *centro de curvatura en $s = s_0$* el punto del plano

osculador dado por

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \rho(s_0)\mathbf{n}(s_0), \quad \rho(s_0) = 1/\kappa(s_0),$$

y se llama *circunferencia osculatriz* en $s = s_0$ a la circunferencia del plano osculador con centro el centro de curvatura y que pasa por el punto $\alpha(s_0)$.

Según esta definición, el radio de la circunferencia osculatriz es $\rho(s_0)$, y su curvatura es $\kappa(s_0)$. Es una circunferencia tangente a la curva en el punto $\alpha(s_0)$.



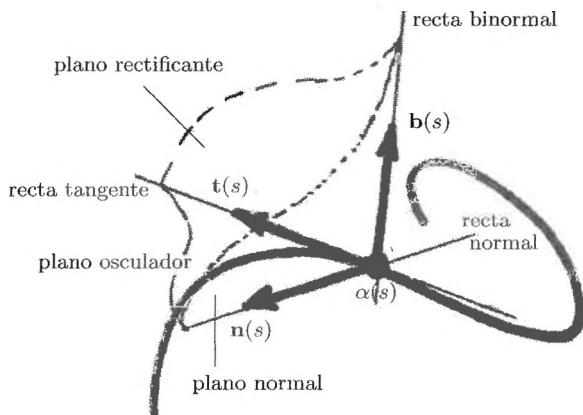
El par formado por los vectores tangente y normal se completa con un tercer vector de modo que obtenemos una base ortonormal:

Definición 4.7. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ como antes. Se llama vector *binormal* en s_0 al vector $\mathbf{b}(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \wedge \mathbf{n}(s_0)$.

Se llama *recta binormal* a la curva en s a la recta afín que pasa por el punto $\alpha(s)$ con la dirección de $\mathbf{b}(s)$.

El vector binormal es, por su misma definición, ortogonal al plano osculador, y puesto que los vectores $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$ son unitarios y perpendiculares, se tiene que $\|\mathbf{b}(s_0)\| = 1$. El plano afín que pasa por $\alpha(s_0)$ y tiene como dirección el plano vectorial $[\mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)]$ recibe el nombre de *plano normal* en s_0 ; obsérvese que este plano normal está generado por las rectas normal y binormal. El plano afín que pasa por $\alpha(s_0)$ y tiene como dirección el plano vectorial $[\mathbf{t}(s_0), \mathbf{b}(s_0)]$ recibe el nombre de *plano rectificante* en s_0 .

Con todo esto, tenemos una base de \mathbb{R}^3 formada por los vectores $\mathbf{t}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ y $\mathbf{b}(s_0)$; esta base se llama *triedro de Frenet* de α en s_0 y es una base ortonormal. Si tenemos en cuenta que $\mathbf{b}(s_0)$ es el producto vectorial de $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$, está claro que esta base define una orientación positiva (*regla del sacacorchos*).



Ya que $\mathbf{b}(s)$ es unitario, es decir $\mathbf{b}(s)\mathbf{b}(s) = 1$, se sigue que $2\mathbf{b}'(s)\mathbf{b}(s) = 0$ y, por tanto, que $\mathbf{b}'(s)$ es perpendicular a $\mathbf{b}(s)$. Si calculamos la derivada de $\mathbf{b}(s)$ utilizando la expresión $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, obtenemos

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s),$$

ecuación que muestra que $\mathbf{b}'(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$. En resumen, $\mathbf{b}'(s)$, siendo perpendicular a $\mathbf{t}(s)$ y a $\mathbf{b}(s)$, es proporcional a $\mathbf{n}(s)$ y existirá un coeficiente $\tau(s)$ tal que:

$$(4.8) \quad \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s).$$

Esta es la denominada *segunda fórmula de Frenet-Serret*, que da pie a la siguiente definición:

Definición 4.9. Sea $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ como en toda esta discusión. El coeficiente $\tau(s_0)$ que aparece en la segunda fórmula anterior se denomina *torsión de α en $s = s_0$* .

La torsión está ligada de manera muy precisa a la variación del vector binormal: $|\tau(s_0)| = \|\mathbf{b}'(s_0)\|$ mide la velocidad con que $\mathbf{b}(s)$ se aleja de $\mathbf{b}(s_0)$, esto es, con que el plano $[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$ perpendicular a $\mathbf{b}(s)$ se aleja del plano $[\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0)]$ perpendicular a $\mathbf{b}(s_0)$. Acabamos de escribir así que la torsión mide la velocidad con que el plano osculador en s se aleja del plano osculador en s_0 . Esta interpretación es plenamente coherente con el siguiente resultado, que estudia el caso particular de la torsión nula.

Proposición 4.10. Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por la longitud del arco es plana si y sólo si $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Demostración. En primer lugar veamos que si la traza de la curva α está contenida en un plano $P \subset \mathbb{R}^3$, entonces P es el plano osculador de la curva en todo punto.

En efecto, sea $\nu \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario perpendicular a P , de modo que fijado $s_0 \in I$, para cualquier otro $s \in I$ tenemos $(\alpha(s) - \alpha(s_0))\nu = 0$. Derivando, $\alpha'(s)\nu = \alpha''(s)\nu = 0$, luego ν es perpendicular a $\alpha'(s)$ y a $\alpha''(s)$. Por tanto, P es paralelo al plano $[\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$ generado por los últimos dos vectores, es decir, P es el plano osculador en s .

Lo anterior implica que $\mathbf{b}(s)$ es normal al plano P , esto es, paralelo a ν , y como ambos vectores son unitarios, $\mathbf{b}(s) = \pm\nu$. Por ser I conexo, es uno de los signos el que se da siempre, luego $\mathbf{b}(s)$ es constante, y su derivada es nula. Concluimos que la torsión $\tau(s)$ también es nula.

Recíprocamente, si $\tau(s) = 0$ para todo s entonces $\mathbf{b}'(s) = 0$ y $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}(s_0)$ para todo s , donde s_0 es como antes un valor fijo del parámetro. Definimos a continuación la función auxiliar $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$f(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0))\mathbf{b}(s).$$

Obviamente, $f(s_0) = 0$ y

$$f'(s) = \alpha'(s)\mathbf{b}(s) + (\alpha(s) - \alpha(s_0))\mathbf{b}'(s) = \alpha'(s)\mathbf{b}(s) = 0.$$

Por tanto, $f(s) = f(s_0) = 0$ para todo s . De aquí se deduce que $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ y $\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}(s_0)$ son perpendiculares y, por tanto, $\alpha(s) \in \alpha(s_0) + [\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0)]$. Es decir, la traza de α está contenida en el plano osculador en $s = s_0$, que es de hecho el plano osculador en todo $s \in I$. ■

Repasando la demostración del resultado anterior vemos que se puede repetir siempre que todos los planos osculadores sean paralelos. Así pues, basta eso para que la curva sea plana, y entonces todos los planos osculadores coinciden.

En el ejemplo siguiente continuamos con el estudio de las hélices circulares y calculamos la torsión de este tipo de curvas, así como sus vectores normal y binormal.

Ejemplo 4.11. Dada una hélice parametrizada por la longitud del arco, hemos calculado en el ejemplo 4.3(2), p. 42, que

$$\mathbf{t}(s) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

y que

$$\mathbf{t}'(s) = \left(-\frac{a}{a^2 + b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right)$$

y hemos encontrado la expresión de la curvatura, que es constante

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Deducimos de aquí que

$$\mathbf{n}(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right).$$

Por otra parte, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, lo que después de un sencillo cálculo nos permite escribir

$$\mathbf{b}(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(b \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -b \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \right)$$

y

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{-b}{a^2 + b^2} \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) = \frac{-b}{a^2 + b^2} \mathbf{n}(s),$$

de donde obtenemos la expresión de la torsión de la hélice circular:

$$\tau(s) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Una vez establecidas las dos primeras fórmulas de Frenet-Serret, que se refieren a las derivadas de los vectores tangente y binormal, deduciremos la tercera, en la que se estudia la derivada del vector normal.

Puesto que la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ está positivamente orientada, se tiene que $\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}'(s) = \tau(s) \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \wedge \kappa(s) \mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s) \mathbf{b}(s) - \kappa(s) \mathbf{t}(s). \end{aligned}$$

Hemos obtenido de este modo la *tercera fórmula de Frenet-Serret*:

$$(4.12) \quad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{t}(s) - \tau(s) \mathbf{b}(s).$$

Las fórmulas de Frenet-Serret pueden presentarse de forma unificada utilizando la siguiente notación matricial:

$$(4.13) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior es antisimétrica, lo que es en realidad una consecuencia del hecho de formar los vectores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$ una base ortonormal.

(4.14) Representación canónica de una curva. Si se toma como sistema de referencia el triedro de Frenet correspondiente a un punto de la curva se obtienen unas ecuaciones que son útiles para su estudio en un entorno de dicho punto.

Como es habitual, sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por el arco, y dado $s_0 \in I$ consideremos el triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ en s_0 . A partir del desarrollo de Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{1}{2!}(s - s_0)^2\alpha''(s_0) + \frac{1}{3!}(s - s_0)^3\alpha'''(s_0) + O(s),$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \alpha'(s_0) &= \mathbf{t}(s_0), \quad \alpha''(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0) \quad \text{y} \\ \alpha'''(s_0) &= \kappa'(s_0)\mathbf{n}(s_0) - \kappa^2(s_0)\mathbf{t}(s_0) - \kappa(s_0)\tau(s_0)\mathbf{b}(s_0), \end{aligned}$$

se obtiene inmediatamente la *expresión canónica de la curva*:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + \left((s - s_0) - \frac{1}{6}\kappa^2(s_0)(s - s_0)^3\right)\mathbf{t}(s_0) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\kappa(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6}\kappa'(s_0)(s - s_0)^3\right)\mathbf{n}(s_0) \\ &\quad - \frac{1}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)(s - s_0)^3\mathbf{b}(s_0) + O(s), \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{O(s)}{(s - s_0)^3} = 0.$$

En lecciones posteriores haremos uso de este resultado para establecer diversas propiedades geométricas de una curva. Aquí nos limitaremos a mostrar cómo se puede utilizar de modo heurístico para hacernos una idea aproximada de su forma. El razonamiento no es enteramente riguroso, aunque podría detallarse más hasta que lo fuera. Sin embargo, aún sin más detalles, es una buena ilustración de los métodos clásicos en el estudio de las curvas y tiene un

an-

fuerte contenido intuitivo, por lo que hemos creído conveniente incluirlo. Para simplificar al máximo los cálculos suponemos que $s_0 = 0$ y que $\alpha(s_0) = 0$; además, denotamos $\kappa_0 = \kappa(s_0)$, $\kappa'_0 = \kappa'(s_0)$, $\tau_0 = \tau(s_0)$. Teniendo en cuenta que $\lim_{s \rightarrow s_0} O(s)/(s - s_0)^3 = 0$ podemos despreciar el término $O(s)$, y entonces, llamando $x(s), y(s), z(s)$ a las coordenadas de $\alpha(s)$ respecto del triedro de Frenet en s_0 , resulta que

ia

$$\begin{cases} x = s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3, \\ y = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa'_0 s^3, \\ z = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3. \end{cases}$$

de

Es inmediato comprobar que

en

$$\lim_{s \rightarrow 0} (y/x^2) = \frac{1}{2}\kappa_0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} (z/x^3) = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0, \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0} (z^2/y^3) = \frac{2}{9}\tau_0^2/\kappa_0,$$

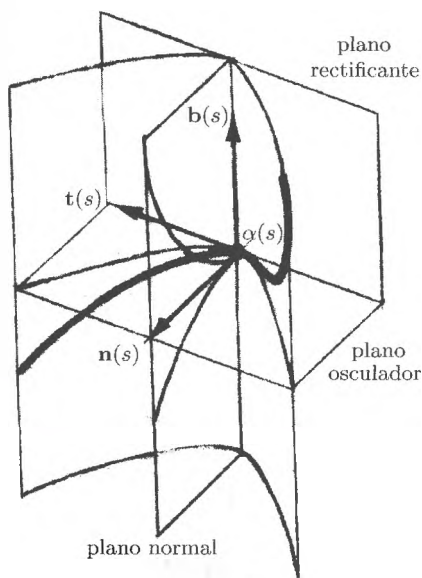
I

de modo que para valores cercanos a $s = 0$ se verifican de modo aproximado las igualdades

a-

$$y = \frac{1}{2}\kappa_0 x^2, \quad z = -\frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 x^3, \quad \text{y} \quad z = \pm \frac{1}{3}\tau_0 \sqrt{\frac{2}{\kappa_0}} y^{3/2}.$$

También de forma aproximada, estas ecuaciones representan respectivamente las proyecciones de la curva sobre los planos osculador (en estas coordenadas



el plano (x, y)), el rectificante (el plano (x, z)) y el normal (el plano (y, z)). Esas proyecciones son una parábola, una parábola cúbica y una cúspide en el origen cuyas dos ramas son tangentes al eje y (obsérvese que $y \geq 0$ para puntos cercanos al origen). De este modo vemos que α es semejante en un entorno del origen a una curva cuya traza está en un cilindro de base una parábola situada en el plano osculador y de generatriz el eje z . Si $\tau_0 > 0$, la rama de esta curva correspondiente a $x > 0$ yace bajo el plano osculador y la rama correspondiente a $x < 0$ está por encima, situación que se invierte para $\tau < 0$. En la lección siguiente estableceremos de modo

riguroso esta propiedad geométrica del signo de la torsión (Proposición 5.3).

Otra cosa que observamos ahora y repetiremos más adelante (Proposición 8.2) es que la curva *no atraviesa el plano rectificante* y queda del mismo lado de él que el eje positivo de las y , es decir, *del mismo lado que el centro de curvatura*. Esto significa que la circunferencia osculatriz en el punto considerado tiene *orientada la concavidad* en ese punto como la curva, según adelantaba el dibujo de la p. 44. En la lección 6 veremos cómo pasa esto en el caso de las curvas planas (Teorema 6.8).

(4.15) Interpretación cinemática de las fórmulas de Frenet-Serret. El triedro de Frenet $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ de una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ se puede concebir como un *triedro móvil* con origen en el punto $\alpha(s)$, que se va moviendo cuando s varía. Según la mecánica elemental, el movimiento del triedro se puede representar como composición del desplazamiento de su origen, descrito por la ecuación de la curva $\alpha(s)$, y un giro alrededor de un eje instantáneo de rotación que pasa por $\alpha(s)$. Si consideramos *exclusivamente* el movimiento de rotación, éste queda totalmente determinado para $s = s_0$ por un vector $\mathbf{w}(s_0)$ que expresa la *velocidad angular*. Este vector tiene la propiedad de que dado un punto del triedro (o, más generalmente, de un sólido que gire alrededor del eje) de coordenadas $(x(s_0), y(s_0), z(s_0))$ respecto del triedro $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$, su *velocidad lineal* $(x'(s_0), y'(s_0), z'(s_0))$ coincide con $\mathbf{w}(s_0) \wedge (x(s_0), y(s_0), z(s_0))$. Si aplicamos esta interpretación mecánica a los puntos unidad de las rectas tangente, normal y binormal, determinados respectivamente por los tres vectores unitarios $\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)$, obtenemos las expresiones siguientes:

$$\mathbf{t}'(s_0) = \mathbf{w}(s_0) \wedge \mathbf{t}(s_0),$$

$$\mathbf{n}'(s_0) = \mathbf{w}(s_0) \wedge \mathbf{n}(s_0),$$

$$\mathbf{b}'(s_0) = \mathbf{w}(s_0) \wedge \mathbf{b}(s_0).$$

Interpretando estas ecuaciones a la luz de las fórmulas de Frenet-Serret vemos inmediatamente que

$$\mathbf{w}(s_0) = -\tau(s_0)\mathbf{t}(s_0) + \kappa(s_0)\mathbf{b}(s_0).$$

Observamos que $\mathbf{w}(s_0)$ está en el plano rectificante en s_0 . El vector anterior recibe el nombre de *vector de Darboux* y su expresión en coordenadas nos dice que la curvatura y la torsión con signo cambiado pueden ser interpretadas como las componentes del vector velocidad angular del triedro cuando se mueve a lo largo de la curva.

Curvatura con signo de curvas planas

Desarrollamos aquí una noción de curvatura aplicable exclusivamente a las curvas planas. Así pues, en toda esta lección $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva plana regular parametrizada por la longitud del arco, que denotamos s .

Podemos construir un vector normal en $s = s_0$ de manera distinta a la empleada en el caso general. Dado el vector tangente $\mathbf{t}(s_0)$ en el plano existen exactamente dos vectores unitarios ortogonales a él, que se distinguen por la orientación:

Definición 6.1. Llamamos *vector normal* $\mathbf{n}(s_0)$ a α en $s = s_0$ al único vector unitario perpendicular a $\mathbf{t}(s_0)$ tal que $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0)\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^2 .

Recordemos que dado un vector no nulo $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se obtiene una base ortogonal positiva $\{u, v\}$ tomando $v = (-y, x)$. Claramente v es perpendicular a u , y la base está positivamente orientada, pues su determinante es positivo:

$$\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = \|u\|^2 > 0.$$

Vemos también que v tiene la misma norma que u , luego si u es unitario la base es ortonormal.

Este vector normal $\mathbf{n}(s)$ es el que utilizaremos siempre en esta lección. Puede ser el opuesto al obtenido anteriormente según la teoría general de curvas. Asimismo, el vector normal que acabamos de definir depende del sentido de la parametrización, pues depende del sentido del vector tangente. Esto se ve en el ejemplo más sencillo posible:

Ejemplo 6.2. Parametricemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por la longitud del arco de dos maneras diferentes.

(1) Para la parametrización $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$ obtenemos el vector tangente $\mathbf{t}_\alpha(s) = \alpha'(s) = (-\sin s, \cos s)$ y el vector normal que acabamos de definir es

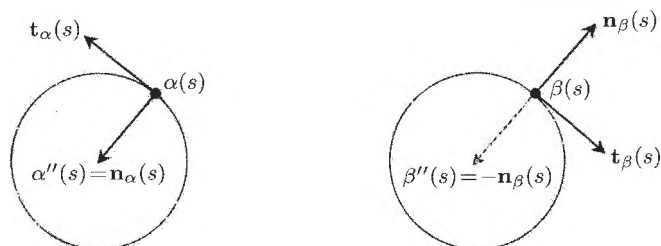
$\mathbf{n}_\alpha(s) = (-\cos s, -\sin s) = -\alpha'(s)$. En este caso éste es también el vector normal de la lección 4:

$$\alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s) = \mathbf{n}_\alpha(s).$$

(2) Consideremos ahora la parametrización $\beta(s) = (\sin s, \cos s)$. Resulta que $\mathbf{t}_\beta(s) = (\cos s, -\sin s)$, y

$$\mathbf{n}_\beta(s) = (\sin s, \cos s) = \beta(s) \quad \text{y} \quad \beta''(s) = (-\sin s, -\cos s) = -\mathbf{n}_\beta(s).$$

Vemos que en el primer caso el vector normal $\mathbf{n}_\alpha(s) = -\alpha'(s)$ apunta al interior de la circunferencia, mientras que en el segundo, $\mathbf{n}_\beta(s) = \beta(s)$ apunta al exterior.



Esto se corresponde con que, como indica el vector tangente, en el primer caso la circunferencia se recorre en contra de las agujas del reloj, mientras que en el segundo se recorre a favor. ■

Al haber definido un vector normal específico en el plano, surge la posibilidad de definir una noción específica de curvatura.

Definición 6.3. Llamamos *curvatura con signo* de α en $s = s_0$ al número $\kappa(s_0)$ tal que $\mathbf{t}'(s_0) = \kappa(s_0)\mathbf{n}(s_0)$.

Obsérvese que la curvatura con signo puede ser negativa, cosa que no sucede si consideramos la curvatura de la lección 4 anterior. En todo caso, como $\mathbf{n}(s_0)$ es salvo signo el vector normal de la lección 4, y para este se cumple la fórmula de Frenet-Serret en la que se inspira la definición anterior, vemos enseguida que la curvatura definida anteriormente es el valor absoluto de la curvatura con signo definida aquí.

Como la curva α está parametrizada respecto del arco, es $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ y $\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s)$. Multiplicando por el vector normal la igualdad que define la curvatura con signo se obtiene inmediatamente que

$$\kappa(s) = \mathbf{t}'(s)\mathbf{n}(s) = \alpha''(s)\mathbf{n}(s).$$

Así, si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, se tiene que $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$ y $\mathbf{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$. Calculamos ahora

$$\alpha''(s)\mathbf{n}(s) = (x''(s), y''(s))(-y'(s), x'(s)) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s),$$

para concluir:

$$(6.4) \quad \kappa(s) = \det \begin{pmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{pmatrix} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s).$$

La fórmula anterior vale *exclusivamente* para las curvas parametrizadas por la longitud del arco. Más adelante (Proposición 10.3, p. 112) probaremos la fórmula general, de la cual ésta es, tan sólo, un caso especial.

Ejemplo 6.5. Volvamos al ejemplo 6.2. Utilizando todos los cálculos hechos allí para vectores tangentes y normales y derivadas segundas, vemos que:

(1) Para la circunferencia $\alpha(s) = (\cos s, \sin s)$ es

$$\mathbf{t}'_{\alpha}(s) = \alpha''(s) = (-\cos s, -\sin s) = \mathbf{n}_{\alpha}(s),$$

luego la curvatura con signo es constante $\kappa_{\alpha}(s) \equiv 1$.

(2) Para la circunferencia $\beta(s) = (\sin s, \cos s)$ se tiene

$$\mathbf{t}'_{\beta}(s) = \beta''(s) = (-\sin s, -\cos s) = -\mathbf{n}_{\beta}(s),$$

con lo que la curvatura con signo es de nuevo constante, pero esta vez $\kappa_{\beta}(s) \equiv -1$. ■

Para expresar de otra manera la curvatura con signo, recordemos que por ser $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ un vector unitario, se puede representar como

$$\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)),$$

donde $\theta(s)$ es el *ángulo de tangencia*, esto es, ángulo orientado entre la parte positiva del eje de abscisas y $\alpha'(s)$; el vector normal es entonces $\mathbf{n}(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$. Además

$$\mathbf{t}'(s) = \alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}(s),$$

y como por definición de curvatura con signo, $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, deducimos que

$$(6.6) \quad \kappa(s) = \theta'(s).$$

Esta fórmula nos permite interpretar la curvatura de las curvas planas como *la variación del ángulo que la tangente forma con una dirección fija*. Más adelante veremos que una interpretación de este tipo es también válida para curvas no necesariamente planas.

El ángulo de tangencia que acabamos de utilizar está determinado salvo un múltiplo de 2π y no es, a priori, evidente que exista una determinación diferenciable $\theta(s)$ (como hemos asumido para poder escribir la fórmula 6.6). Explicamos esto a continuación.

(6.7) Determinación y diferenciabilidad del ángulo de tangencia. Elijamos, en primer lugar, un número θ_0 tal que $\mathbf{t}(s_0) = (\cos \theta_0, \text{sen } \theta_0)$, donde s_0 es un valor del parámetro que fijamos como origen. A continuación, la fórmula 6.6 nos sugiere definir:

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s \kappa(u) du,$$

que es obviamente una función diferenciable cuya derivada es la curvatura con signo. Afirmamos que ésta es la determinación del ángulo buscada, y es única salvo múltiplo entero de 2π .

En efecto, definimos otra función diferenciable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$f(s) = \|\mathbf{t}(s) - (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s))\|^2.$$

Con esta definición se tiene, omitiendo el arco s para aligerar la escritura,

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\mathbf{t} - (\cos \theta, \text{sen } \theta))(\mathbf{t}' - \theta'(-\text{sen } \theta, \cos \theta)) \\ &= 2(\mathbf{t} - (\cos \theta, \text{sen } \theta))(\kappa \mathbf{n} - \kappa(-\text{sen } \theta, \cos \theta)) \\ &= -2\kappa \mathbf{t}(-\text{sen } \theta, \cos \theta) - 2\kappa(\cos \theta, \text{sen } \theta) \mathbf{n} \\ &= -2\kappa((x', y')(-\text{sen } \theta, \cos \theta) + (\cos \theta, \text{sen } \theta)(-y', x')) = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que la función f es constante y, ya que $f(s_0) = 0$, que f es idénticamente nula, de lo que se deduce que $\mathbf{t}(s) = (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s))$ para todo s . Por otra parte, cualquier otra determinación continua $\hat{\theta}(s)$ del ángulo tiene la propiedad de que la diferencia $\hat{\theta}(s) - \theta(s)$ toma valores enteros múltiplos de 2π , lo que por continuidad implica que esa diferencia es constante, y en consecuencia $\hat{\theta}(s) = \theta(s) + 2k\pi$ para algún número entero k . ■

Para las curvas planas se tiene el siguiente resultado que da sentido geométrico al signo de la curvatura con signo. Se trata de una discusión del estilo de la del signo de la torsión en la lección 5.

La recta $L = \alpha(s_0) + [t(s_0)]$, tangente a α en el punto $\alpha(s_0)$, divide el plano \mathbb{R}^2 en dos semiplanos

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - \alpha(s_0))n(s_0) > 0\} \text{ y } H^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - \alpha(s_0))n(s_0) < 0\}$$

(insistimos en que el vector normal $n(s_0)$ es el de la definición 6.1). Nótese que el primero es el que contiene al punto $\alpha(s_0) + n(s_0)$, es decir, hacia el que apunta el vector $n(s_0)$; hacia el segundo apunta $-n(s_0)$. Vamos a analizar si la curva *atraviesa* o no la recta tangente, es decir, si pasa de un semiplano al otro o no lo hace. En este momento sugerimos al lector que compruebe lo siguiente: *si la recta L pasa por el punto en cuestión pero no es tangente, entonces la curva ciertamente la atraviesa en el punto*. Después de esta preparación, tenemos:

Teorema 6.8. *Sea $\kappa(s_0)$ la curvatura con signo de α .*

(1) *Si $\kappa(s_0) > 0$, existe un entorno I_0 de s_0 tal que la traza $\alpha(I_0)$ de la restricción $\alpha|_{I_0}$, salvo $\alpha(s_0)$, está en el semiplano H^+ .*

(2) *Si $\kappa(s_0) < 0$, existe un entorno I_0 de s_0 tal que la traza $\alpha(I_0)$ de la restricción $\alpha|_{I_0}$, salvo $\alpha(s_0)$, está en el semiplano H^- .*

Demostración. Consideremos el desarrollo de Taylor de la función $\alpha(s)$ en s_0

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + (s - s_0)\alpha'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\alpha''(s_0) + O(s),$$

donde $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{O(s)}{(s - s_0)^2} = 0$. Se tiene entonces

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (s - s_0)t(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa(s_0)n(s_0) + O(s).$$

Multiplicando ahora por $n(s_0)$ obtenemos

$$(\alpha(s) - \alpha(s_0))n(s_0) = \frac{1}{2}(s - s_0)^2\kappa(s_0) + O(s)n(s_0),$$

y de aquí deducimos, si $s \neq s_0$, que

$$\begin{aligned} \text{signo}[(\alpha(s) - \alpha(s_0))n(s_0)] &= \text{signo}\left[\frac{(\alpha(s) - \alpha(s_0))n(s_0)}{(s - s_0)^2}\right] \\ &= \text{signo}\left[\frac{1}{2}\kappa(s_0) + \frac{O(s_0)n(s_0)}{(s - s_0)^2}\right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta aquí que $\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{O(s)}{(s - s_0)^2} = 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{signo}[(\alpha(s) - \alpha(s_0))n(s_0)] = \text{signo}[\kappa(s_0)]$$

para $|s - s_0| < \varepsilon$. De aquí se deduce que $\alpha(s)$ está, para los valores de s anteriores, en el semiplano al que apunta $\mathbf{n}(s_0)$ cuando ese signo es positivo y en el otro semiplano cuando ese signo es negativo. ■

Complementamos lo anterior con el siguiente comentario. El vector normal de la teoría general es

$$\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|} = \frac{\kappa(s)}{|\kappa(s)|} \mathbf{n}(s) = \text{signo}[\kappa(s)] \mathbf{n}(s),$$

luego si la curvatura es positiva los dos vectores normales coinciden, y si es negativa son opuestos. En particular, la fórmula $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s)$ se sigue cumpliendo.

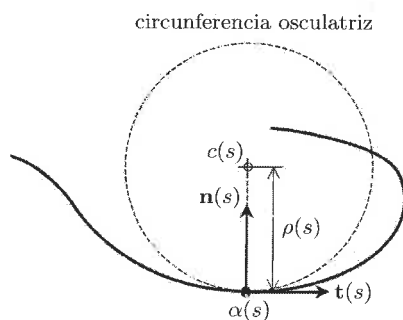
Asimismo, se tienen las versiones para curvas planas de otros conceptos introducidos en la lección 4 para curvas arbitrarias.

Definición 6.9. Se llama *centro de curvatura en el punto $\alpha(s)$* de la curva plana α al punto

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{n}(s).$$

El número $\rho(s) = 1/|\kappa(s)| > 0$ es el *radio de curvatura en $\alpha(s)$* y la circunferencia de centro $c(s)$ y radio $\rho(s)$ es la *circunferencia oscultriz* a α en el punto $\alpha(s)$.

Por el comentario previo, este centro de curvatura y este radio de curvatura coinciden con los de la lección 4 para curvas arbitrarias. Obsérvese además que por el Teorema 6.8, el centro de curvatura y la curva están del mismo lado de la tangente, y por tanto la circunferencia oscultriz está también de ese mismo lado. Si la circunferencia oscultriz se parametriza de modo que su vector tangente unitario coincide con el de α en el punto de contacto, entonces también tiene la misma curvatura con signo que α en ese punto. La circunferencia oscultriz debe ser entendida como la circunferencia que mejor aproxima a la curva α en las cercanías del punto $\alpha(s)$ (véase el Problema 5 de esta lección).



Ejemplo 6.10. Calculemos ahora la curvatura de la parábola $y = x^2$. La podemos parametrizar por $\beta(t) = (t, t^2)$, pero ésta no es una parametrización por la longitud del arco. En efecto, $\beta'(t) = (1, 2t)$ y $\|\beta'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$ luego hay

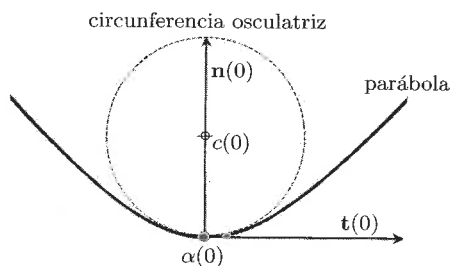
que hacer el cambio $s = \psi(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2} du$ (Proposición 3.9 y su demostración). Entonces la parametrización por el arco $\alpha(s)$ cumple $\alpha(\psi(t)) = \beta(t)$, lo que permite calcular la curvatura fácilmente. Tenemos

$$\begin{cases} (1, 2t) = \beta'(t) = \psi'(t)\alpha'(s), \\ (0, 2) = \beta''(t) = \psi''(t)\alpha'(s) + \psi'^2(t)\alpha''(s), \end{cases}$$

y como para $t = 0$ es $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ y $\psi''(0) = 0$, resulta

$$\begin{cases} (1, 0) = \beta'(0) = \psi'(0)\alpha'(0) = \alpha'(0), \\ (0, 2) = \beta''(0) = \psi''(0)\alpha'(0) + \psi'^2(0)\alpha''(0) = \alpha''(0). \end{cases}$$

Así pues, $\mathbf{t}_\alpha(0) = (1, 0)$ y $\mathbf{n}_\alpha(0) = (0, 1)$, y $\kappa_\alpha(0) = \alpha''(0)\mathbf{n}_\alpha(0) = 2$. De este modo la circunferencia oscultriz en $\alpha(0) = (0, 0)$ tiene radio $\frac{1}{2}$ y centro $(0, \frac{1}{2})$. La situación es pues la siguiente:



Esto muestra que la circunferencia oscultriz está encerrada por la parábola. Recordando ahora la discusión geométrica del signo de la torsión y la figura correspondiente de la p. 49, queda justificada plenamente la afirmación hecha allí sobre el significado de la concavidad de la circunferencia oscultriz, y precisada aún más, pues confirmamos que la curva *envuelve* a la circunferencia.

En este último ejemplo hemos eludido reparametrizar por el arco para calcular la curvatura. En la lección 11 trataremos este asunto con detenimiento.

Problemas

Número 1. Se consideran las circunferencias

$$\begin{cases} \alpha(s) = (\sin s, \cos s) \\ \beta(s) = (\cos(s - \frac{1}{2}\pi), 2 + \sin(s - \frac{1}{2}\pi)). \end{cases}$$

Hallar sus vectores tangentes, sus vectores normales, sus curvaturas con signo y sus circunferencias oscultrices. ¿Qué ocurre en el punto $\alpha(0) = \beta(0)$?

El teorema fundamental

En esta lección presentamos, en primer lugar, el teorema fundamental de la teoría de las curvas planas, uno de los resultados más importantes de dicha teoría, que nos dice que éstas están esencialmente determinadas por su curvatura. A continuación formulamos el correspondiente teorema para curvas alabeadas, en el que se establece un resultado similar que involucra además a la torsión. Estos resultados están precedidos por un ejercicio, que se propone al lector resolver, en el que se exponen algunas propiedades de los movimientos rígidos directos que se utilizan en las demostraciones posteriores.

Ejercicio 9.1. **movimiento rígido directo** Un *movimiento rígido directo* es una aplicación $\sigma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es composición de una traslación y una aplicación lineal $\vec{\sigma}$ que es ortogonal (es decir, conserva el producto escalar) y directa (es decir, tiene determinante positivo o, equivalentemente, conserva la orientación).

cúaderno (1) Demostrar que $\vec{\sigma}$ transforma el producto vectorial de dos vectores en el producto vectorial de sus imágenes.

Ahora, sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud del arco y $\beta = \sigma \circ \alpha$ la curva imagen por σ . Entonces β también está parametrizada por el arco, y para todo valor del parámetro s se cumple:

$$(2) \vec{\sigma}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = \mathbf{t}_\beta(s), \vec{\sigma}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = \mathbf{n}_\beta(s) \text{ y } \vec{\sigma}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = \mathbf{b}_\beta(s), \text{ y}$$

$$(3) \kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s), \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s).$$

Este ejercicio admite una versión más simple en dimensión 2 que el lector puede establecer sin esfuerzo. Type text here

Podemos ya sin más preámbulo enunciar el *Teorema fundamental de las curvas planas*:

Teorema 9.2. Sea $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(1) Existe una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por la longitud del arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ para todo $s \in I$.

(2) Esta curva es única salvo movimientos rígidos directos: si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva parametrizada por la longitud del arco con esa propiedad, entonces $\beta = \sigma \circ \alpha$ para cierto movimiento rígido directo $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Demostración. Fijemos $s_0 \in I$. Sea $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du$ (recuérdese 6.6, p. 65), y sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva definida por

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(u) du, \int_{s_0}^s \sin \theta(u) du \right).$$

Entonces, $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ y $\|\alpha'(s)\| = 1$ y, por tanto, α está parametrizada por la longitud del arco. Su vector tangente unitario es $\mathbf{t}_\alpha(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ y su vector normal (considerando α como curva plana) es $\mathbf{n}_\alpha(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$. Por otra parte, su curvatura $\kappa_\alpha(s)$ está definida por $\mathbf{t}'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s) \mathbf{n}_\alpha(s)$ y como

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'_\alpha(s) &= \alpha''(s) = (-\theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s) \cos \theta(s)) \\ &= \theta'(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s) \mathbf{n}_\alpha(s), \end{aligned}$$

concluimos que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$. Esto prueba (1)

Supongamos ahora que β es otra curva parametrizada por la longitud del arco tal que $\kappa_\beta(s) = \kappa(s)$ para todo s . Fijemos $s_0 \in I$ y tomemos las dos siguientes referencias cartesianas del plano:

- (i) \mathcal{R}_α , que tiene como origen de coordenadas el punto $\alpha(s_0)$, y como base ortonormal de \mathbb{R}^2 los vectores $\mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0)$, y
- (ii) \mathcal{R}_β , que tiene como origen de coordenadas el punto $\beta(s_0)$, y como base ortonormal de \mathbb{R}^2 los vectores $\mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0)$.

Consideremos el movimiento rígido directo $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lleva la primera referencia a la segunda. Es decir, el movimiento definido por las condiciones

$$\begin{cases} \sigma(\alpha(s_0)) = \beta(s_0), \\ \vec{\sigma}(\mathbf{t}_\alpha(s_0)) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \vec{\sigma}(\mathbf{n}_\alpha(s_0)) = \mathbf{n}_\beta(s_0) \end{cases}$$

Sea $\gamma = \sigma \circ \alpha$ la imagen de α por ese movimiento. Sabemos que

$$\begin{cases} \vec{\sigma}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = \mathbf{t}_\gamma(s), \vec{\sigma}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = \mathbf{n}_\gamma(s), \\ \kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s). \end{cases}$$

En particular, para $s = s_0$, tenemos

$$\begin{cases} \gamma(s_0) = \sigma(\alpha(s_0)) = \beta(s_0), \\ \mathbf{t}_\gamma(s_0) = \vec{\sigma}(\mathbf{t}_\alpha(s_0)) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\gamma(s_0) = \vec{\sigma}(\mathbf{n}_\alpha(s_0)) = \mathbf{n}_\beta(s_0). \end{cases}$$

Si demostramos que $\gamma = \beta$ entonces habremos demostrado (2). Para ello hacemos uso de una función auxiliar: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \|\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2.$$

Se tiene que $f(s_0) = 0$ y derivando

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s))(\mathbf{t}'_\gamma(s) - \mathbf{t}'_\beta(s)) + 2(\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s))(\mathbf{n}'_\gamma(s) - \mathbf{n}'_\beta(s)) \\ &= 2(\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s))(\kappa_\gamma(s)\mathbf{n}_\gamma(s) - \kappa_\beta(s)\mathbf{n}_\beta(s)) \\ &\quad + 2(\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s))(-\kappa_\gamma(s)\mathbf{t}_\gamma(s) + \kappa_\beta(s)\mathbf{t}_\beta(s)) \\ &= 2(-\kappa_\beta(s)\mathbf{t}_\gamma(s)\mathbf{n}_\beta(s) - \kappa_\gamma(s)\mathbf{t}_\beta(s)\mathbf{n}_\gamma(s)) \\ &\quad + 2(\kappa_\beta(s)\mathbf{n}_\gamma(s)\mathbf{t}_\beta(s) + \kappa_\gamma(s)\mathbf{n}_\beta(s)\mathbf{t}_\gamma(s)) = 0, \end{aligned}$$

pues $\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(s)$. Por tanto, f es la función idénticamente nula, lo cual implica que $\mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{t}_\beta(s)$ (y $\mathbf{n}_\gamma(s) = \mathbf{n}_\beta(s)$) para todo s . Se deduce que $\gamma'(s) = \beta'(s)$, y como $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$, concluimos que $\gamma(s) = \beta(s)$ para todo s . Como dijimos, esto concluye la prueba de (2). ■

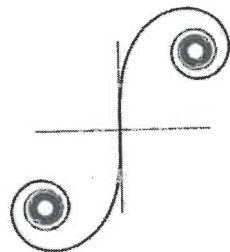
Así pues, si aceptamos que dos curvas que difieren en un movimiento rígido directo son la “misma” curva, el teorema fundamental nos dice que las curvas planas están totalmente determinadas por su curvatura.

Ejemplos 9.3. (1) Incluso con funciones de curvatura extremadamente simples se pueden presentar ejemplos de curvas complicadas. Por ejemplo, partiendo de la función de curvatura $\kappa(s) = s$, la construcción del teorema anterior nos lleva a

$$\theta(s) = \int_0^s u du = \frac{1}{2}s^2 \quad (\text{con } s_0 = 0),$$

y, por tanto,

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos \frac{1}{2}u^2 du, \int_0^s \sin \frac{1}{2}u^2 du \right).$$



Pero estas integrales no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales. La curva resultante (que se obtiene computando las integrales numéricamente) se llama *espiral de Cornu*, o *clotoide*, o *radioide de arcos*.

(2) Supongamos ahora $\kappa(s) = 1/s$, $s \in I = (0, \infty)$. De nuevo seguimos los pasos de la demostración del teorema anterior. Así $\theta(s) = \int_1^s \frac{1}{u} du = \log s$, y

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \left(\int_1^s \cos \log u \, du, \int_1^s \sin \log u \, du \right) \\ &= \frac{1}{2}s(\cos \log s + \sin \log s, \sin \log s - \cos \log s) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

El término $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ puede ser eliminado de la expresión anterior, ya que estamos interesados en curvas definidas salvo movimientos rígidos directos. Si ahora hacemos el cambio de parámetro $s = e^\theta$ obtenemos la expresión

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2}e^\theta(\cos \theta + \sin \theta, \sin \theta - \cos \theta) = \frac{1}{2}e^\theta(\sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4})),$$

donde seguimos denotando α la curva reparametrizada. Finalmente haciendo el cambio de parámetro $\omega = \theta - \frac{\pi}{4}$ obtenemos

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}e^{\omega + \frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos \omega, \sqrt{2}\sin \omega) = ce^\omega(\cos \omega, \sin \omega),$$

con $c = e^{\frac{\pi}{4}}/\sqrt{2}$, que es una espiral logarítmica (Ejemplo 1.5(5), p.7). ■

El resultado que acabamos de establecer para curvas de \mathbb{R}^2 , tiene una versión para curvas de \mathbb{R}^3 , el *teorema fundamental para curvas alabeadas*, que presentamos a continuación. En este caso es necesario hacer uso no sólo de la curvatura sino también de la torsión.

Teorema 9.4. Sean $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, con $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$.

(1) Existe una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por la longitud del arco, tal que $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ y $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$ para todo $s \in I$.

(2) Esta curva es única salvo movimientos rígidos directos: si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva parametrizada por la longitud del arco con esa propiedad, entonces $\beta = \sigma \circ \alpha$ para cierto movimiento rígido directo $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Demostración. Comencemos probando (2), es decir, que la curvatura y la torsión determinan la curva salvo movimientos rígidos directos. Fijemos $s_0 \in I$ y sea σ el movimiento rígido directo que lleva la referencia

$$\mathcal{R}_\alpha = \{\alpha(s_0); \mathbf{t}_\alpha(s_0), \mathbf{n}_\alpha(s_0), \mathbf{b}_\alpha(s_0)\}$$

a la referencia

$$\mathcal{R}_\beta = \{\beta(s_0); \mathbf{t}_\beta(s_0), \mathbf{n}_\beta(s_0), \mathbf{b}_\beta(s_0)\}.$$

Definimos, como en el teorema para curvas planas, la curva $\gamma = \sigma \circ \alpha$ y queremos demostrar que $\gamma = \beta$.

Tenemos las igualdades

$$\begin{cases} \gamma(s_0) = \sigma(\alpha(s_0)) = \beta(s_0), \\ \kappa_\gamma(s) = \kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s), \\ \tau_\gamma(s) = \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) \end{cases}$$

para todo s . Además

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\gamma(s_0) = \vec{\sigma}(\mathbf{t}_\alpha(s_0)) = \mathbf{t}_\beta(s_0), \\ \mathbf{n}_\gamma(s_0) = \vec{\sigma}(\mathbf{n}_\alpha(s_0)) = \mathbf{n}_\beta(s_0), \\ \mathbf{b}_\gamma(s_0) = \vec{\sigma}(\mathbf{b}_\alpha(s_0)) = \mathbf{b}_\beta(s_0). \end{cases}$$

Consideremos la función auxiliar $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = \|\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s)\|^2 + \|\mathbf{b}_\gamma(s) - \mathbf{b}_\beta(s)\|^2.$$

Se tiene que $f(s_0) = 0$ y que

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\mathbf{t}_\gamma(s) - \mathbf{t}_\beta(s))(\mathbf{t}'_\gamma(s) - \mathbf{t}'_\beta(s)) \\ &\quad + 2(\mathbf{n}_\gamma(s) - \mathbf{n}_\beta(s))(\mathbf{n}'_\gamma(s) - \mathbf{n}'_\beta(s)) \\ &\quad + 2(\mathbf{b}_\gamma(s) - \mathbf{b}_\beta(s))(\mathbf{b}'_\gamma(s) - \mathbf{b}'_\beta(s)). \end{aligned}$$

A partir de aquí simplificamos la notación: escribimos κ y τ para designar la curvatura y la torsión comunes de las curvas α , β y γ , y omitimos el parámetro s . Aplicando las fórmulas de Frenet-Serret, la expresión anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2(\mathbf{t}_\gamma - \mathbf{t}_\beta)(\kappa \mathbf{n}_\gamma - \kappa \mathbf{n}_\beta) \\ &\quad + 2(\mathbf{n}_\gamma - \mathbf{n}_\beta)(-\kappa \mathbf{t}_\gamma - \tau \mathbf{b}_\gamma + \kappa \mathbf{t}_\beta + \tau \mathbf{b}_\beta) \\ &\quad + 2(\mathbf{b}_\gamma - \mathbf{b}_\beta)(\tau \mathbf{n}_\gamma - \tau \mathbf{n}_\beta), \end{aligned}$$

que, como se advierte inmediatamente al desarrollar los productos, es una expresión idénticamente nula. Por tanto, f es constante, y de hecho $f \equiv f(s_0) = 0$. De aquí se deduce que $\mathbf{t}_\gamma(s) = \mathbf{t}_\beta(s)$, o sea, $\gamma'(s) = \beta'(s)$. Como $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$ concluimos que $\gamma = \beta$.

Para probar la parte (1) del teorema, esto es, que existe la curva α con la curvatura y la torsión prescritas, observemos que las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \tau(s)\mathbf{b}(s), \quad \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s),$$

escritas en coordenadas (tres por cada vector del triedro) definen un sistema de 9 ecuaciones diferenciales lineales. Aquí vamos a apelar al *teorema de Picard* de existencia y unicidad de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial dada. Si se suponen conocidas las funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, por la existencia del citado teorema, dado $s_0 \in I$, existe una solución $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ del sistema anterior que verifica la condición inicial de que $\{\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)\}$ sea la base estándar de \mathbb{R}^3 . Entonces consideramos la *matriz de Gramm* de los vectores $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, que es la matriz de sus productos escalares:

$$M(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s)\mathbf{t}(s) & \mathbf{t}(s)\mathbf{n}(s) & \mathbf{t}(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{n}(s)\mathbf{t}(s) & \mathbf{n}(s)\mathbf{n}(s) & \mathbf{n}(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}(s)\mathbf{t}(s) & \mathbf{b}(s)\mathbf{n}(s) & \mathbf{b}(s)\mathbf{b}(s) \end{pmatrix}.$$

Resulta que esta matriz satisface la ecuación diferencial (para ser más precisos, sus coeficientes satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales escrito en forma matricial)

$$M'(s) = F(s)M(s) - M(s)F(s),$$

donde $F(s)$ es la matriz de Frenet-Serret

$$F(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $M(s_0)$ es la matriz unidad I de orden 3 y que la función matricial constante I satisface también la ecuación diferencial anterior, la unicidad del teorema de Picard asegura que $M(s) = I$ y, por tanto, que la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es ortonormal para todo s . Además, como el determinante de esa base para $s = s_0$ es $\det(\mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}(s_0)) = +1$, y para todo s es $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)) = \pm 1$, por continuidad el determinante es siempre $+1$, y la base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ está positivamente orientada para todo s .

A continuación, definimos la curva

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(u) du.$$

Puesto que $\alpha'(s) = \mathbf{t}(s)$ es un vector unitario, α está parametrizada por la longitud del arco y $\mathbf{t}(s)$ es su vector tangente unitario. Ahora, como $\mathbf{t}(s)$ es el vector tangente unitario de α y satisface la ecuación $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, se tiene que $\kappa_\alpha(s) = \|\mathbf{t}'(s)\| = \kappa(s)$ y que $\mathbf{n}(s)$ es el vector normal de α . Como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ es una base ortonormal positivamente orientada, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$, que es el vector binormal de α . En fin, ya que $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$, deducimos que $\tau(s)$ es la torsión de α . Esto completa la demostración de la existencia de α . \blacksquare

Ejemplo 9.5. Con ayuda del teorema fundamental es posible identificar todas las curvas con curvatura constante $\kappa > 0$ y torsión constante $\tau \neq 0$. En efecto, es suficiente con encontrar una curva de tales características ya que las restantes se obtienen por movimientos rígidos directos a partir de ésta. Por otra parte, el teorema de Lancret (8.5, p. 86) nos dice que tales curvas son necesariamente hélices generalizadas. Concretando más, si en la hélice circular (parametrizada por la longitud del arco según el ejemplo 3.10(2), p. 37)

$$\beta(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

tomamos $a = \kappa/(\kappa^2 + \tau^2)$ y $b = -\tau/(\kappa^2 + \tau^2)$ vemos que la curvatura y la torsión de β son respectivamente κ y τ (4.11, p. 47). En el caso particular en que $\tau = 0$, razonando del mismo modo veríamos que la curva sería un arco de circunferencia, es decir una curva plana con curvatura constante no sólo tiene su traza contenida en una circunferencia como asegura la proposición 5.1, p. 55, sino que es exactamente un arco de circunferencia. \blacksquare

Dada una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, las ecuaciones $\kappa = \kappa(s)$ y $\tau = \tau(s)$ se denominan *ecuaciones intrínsecas* de α ; las funciones κ y τ se denominan *coordenadas intrínsecas* de α . Esta nomenclatura tiene sentido gracias al teorema fundamental, pues α queda determinada por sus coordenadas intrínsecas salvo movimiento rígido directo. El caso de las curvas planas corresponde a torsión $\tau \equiv 0$, pues cualquier plano de \mathbb{R}^3 se lleva al plano coordenado $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mediante un movimiento rígido directo. Sin embargo, encontrar la expresión analítica de una curva conocidas sus coordenadas intrínsecas no es, en general, un problema fácil pues implica la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales (el *sistema de Frenet-Serret*) discutido en la demostración del teorema fundamental 9.4, p. 100. Históricamente se ha utilizado un procedimiento clásico para reducir ese sistema de 9 ecuaciones diferenciales a uno de tres ecuaciones diferenciales *de Ricatti*, pues este tipo de ecuaciones es familiar en la literatura matemática. Esta reducción, en

general, simplifica el problema, pero no lo resuelve verdaderamente. La solución general de una ecuación de Ricatti se puede determinar a partir de una solución particular, pero desgraciadamente no existe un procedimiento general para encontrar tal solución. A continuación explicamos brevemente como se puede hacer la reducción.

(9.6) Reducción del sistema de Frenet-Serret. Retomamos las notaciones de la demostración del teorema fundamental 9.4. Expresemos en coordenadas los vectores del triedro de Frenet

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3), \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

donde t_ℓ, n_ℓ, b_ℓ ($1 \leq \ell \leq 3$) son funciones diferenciables que dependen del parámetro s . Observamos que puesto que el triedro de Frenet es una base ortonormal, la matriz 3×3 de sus coordenadas es una matriz ortogonal, de modo que se cumple $t_\ell^2 + n_\ell^2 + b_\ell^2 = 1$ ($1 \leq \ell \leq 3$).

Introduzcamos la función compleja auxiliar

$$w = \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{1 - b_1},$$

también dependiente de s . A continuación realizamos un simple cálculo, en el que se utilizan las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \frac{1}{1 - b_1} \left(\frac{dt_1}{ds} + \sqrt{-1} \frac{dn_1}{ds} \right) + \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} \frac{db_1}{ds} \\ &= \frac{1}{1 - b_1} (\kappa n_1 + \sqrt{-1} (-\kappa t_1 - \tau b_1)) + \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} \tau n_1 \\ &= -\sqrt{-1} \kappa w - \tau \frac{\sqrt{-1} b_1}{1 - b_1} + \tau \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} n_1. \end{aligned}$$

Ahora, usando la relación $t_1^2 + n_1^2 + b_1^2 = 1$, obtenemos para los dos últimos sumandos de la expresión anterior la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} -\tau \frac{\sqrt{-1} b_1}{1 - b_1} + \tau \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} n_1 &= \tau \frac{-\sqrt{-1} b_1 + \sqrt{-1} (1 - t_1^2) + t_1 n_1}{(1 - b_1)^2} \\ &= \tau \frac{\sqrt{-1}}{1 - b_1} - \tau \frac{\sqrt{-1} t_1 (t_1 + \sqrt{-1} n_1)}{(1 - b_1)^2}. \end{aligned}$$

Hallando la semisuma de

$$-\tau \frac{\sqrt{-1} b_1}{1 - b_1} + \tau \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} n_1 \quad \text{y} \quad \tau \frac{\sqrt{-1}}{1 - b_1} - \tau \frac{\sqrt{-1} t_1 (t_1 + \sqrt{-1} n_1)}{(1 - b_1)^2}$$

(que como son la misma cosa coincide con la primera de las expresiones) deducimos fácilmente que

$$-\tau \frac{\sqrt{-1} b_1}{1 - b_1} + \tau \frac{t_1 + \sqrt{-1} n_1}{(1 - b_1)^2} n_1 = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \tau - \frac{1}{2} \sqrt{-1} \tau w^2.$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial, llegamos a

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2} \sqrt{-1} \tau - \sqrt{-1} \kappa w - \frac{1}{2} \sqrt{-1} \tau w^2,$$

que es una ecuación de Ricatti.

Si se conoce una solución w de esta ecuación, es inmediato computar las coordenadas t_1, n_1, b_1 por las fórmulas

$$t_1 = \frac{w + \bar{w}}{1 + w\bar{w}}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{-1}(\bar{w} - w)}{1 + w\bar{w}}, \quad b_1 = \frac{w\bar{w} - 1}{1 + w\bar{w}}.$$

La discusión es idéntica para las ternas (t_2, n_2, b_2) y (t_3, n_3, b_3) , de manera que hemos reducido el sistema de Frenet-Serret a tres ecuaciones de Ricatti. ■

Problemas

Número 1. Sea α una curva plana cuya coordenada intrínseca κ verifica la ecuación $\frac{1}{\kappa^2} + 1 = e^{-2s}$. Probar que α es una tractriz.

Número 2. Hallar la curva plana cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa(s) = 1/\sqrt{2as}$, $s \in (0, \infty)$, con $a > 0$.

Número 3. Probar que la curva de ecuaciones intrínsecas $\kappa(s) = \tau(s) = \sqrt{2}/(s^2 + 4)$ es una hélice generalizada.

Número 4. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas birregulares parametrizadas por la longitud del arco y con torsión no nula en todo punto. Supongamos que $\mathbf{n}_\alpha(s) = \mathbf{n}_\beta(s)$ para todo s . Probar que existe un movimiento rígido directo que lleva α a β .

Número 5. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ curvas birregulares parametrizadas por la longitud del arco y con torsión positiva en todo punto. Supongamos que $\mathbf{b}_\alpha(s) = \mathbf{b}_\beta(s)$ para todo s . Probar que existe un movimiento rígido que lleva α a β .

Curvas no parametrizadas por la longitud del arco

Desde la lección tercera, en que definimos el arco, hasta la anterior, todos los conceptos y los resultados principales han sido para curvas parametrizadas por el arco. En esta lección analizamos qué se hace cuando el parámetro no es el arco.

Supongamos que $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco y sea β una reparametrización de α por la longitud del arco mediante el cambio de parámetro $t = \varphi(s)$ (o $s = \psi(t)$). Definimos la curvatura de α en $t = \varphi(s)$ como la curvatura de β en s :

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s).$$

Si $\kappa_\alpha(t) \neq 0$, $t = \varphi(s)$, se define el triedro de Frenet como

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \mathbf{t}_\beta(s), \quad \mathbf{n}_\alpha(t) = \mathbf{n}_\beta(s), \quad \mathbf{b}_\alpha(t) = \mathbf{b}_\beta(s).$$

Análogamente, definimos la torsión

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s), \quad t = \varphi(s).$$

Se comprueba inmediatamente que la definición es independiente de la reparametrización elegida. En el caso de las curvas planas, la curvatura con signo se define análogamente.

Así pues, todo consiste en reparametrizar por el arco. Es, sin embargo, muy útil contar con fórmulas explícitas que nos permitan calcular la curvatura y la torsión así como los vectores normal y binormal sin necesidad de hacerlo (pues ya sabemos que puede ser dificultoso).

Teorema 10.1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco. Entonces la curvatura y la torsión de α en t son

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Además, los vectores normal y binormal vienen dados por las expresiones

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \wedge \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \|\alpha'(t)\|}, \quad \mathbf{b}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}.$$

Estas fórmulas se pueden reescribir mediante la identidad

$$(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t))\alpha'''(t) = \det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)).$$

Demostración. Consideremos una reparametrización $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ por la longitud del arco con $\beta = \alpha \circ \varphi$ y $\alpha = \beta \circ \psi$, donde $\varphi : J \rightarrow I$ y $\psi = \varphi^{-1} : I \rightarrow J$ son difeomorfismos que conservan la orientación y, por tanto, tienen derivada positiva en todo punto. Entonces

$$\alpha'(t) = \psi'(t)\beta'(\psi(t)) = \psi'(t)\mathbf{t}_\beta(\psi(t)),$$

de donde se deduce que $\|\alpha'(t)\| = \psi'(t)$, pues $\psi'(t) > 0$. Así,

$$\mathbf{t}_\beta(\psi(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Ahora, derivando obtenemos

$$\alpha''(t) = \psi'(t)^2 \mathbf{t}'_\beta(\psi(t)) + \psi''(t) \mathbf{t}_\beta(\psi(t)),$$

y por tanto $\kappa_\alpha(t) = 0$ si y sólo si $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son ambos paralelos a $\mathbf{t}_\beta(\psi(t))$, es decir, si y sólo si su producto vectorial $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ es nulo. En ese caso se cumple la fórmula de la curvatura del enunciado, pero ni existe torsión, ni vector normal, ni vector binormal que calcular. Por tanto, suponemos a partir de ahora $\kappa_\alpha(t) \neq 0$. Entonces la fórmula anterior se puede escribir como sigue:

$$\alpha''(t) = \psi'(t)^2 \kappa_\beta(\psi(t)) \mathbf{n}_\beta(\psi(t)) + \psi''(t) \mathbf{t}_\beta(\psi(t)),$$

luego

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \psi'(t)^3 \kappa_\beta(\psi(t)) \mathbf{b}_\beta(\psi(t)).$$

Ya que $\|\mathbf{b}_\beta(\psi(t))\| = 1$ y la curvatura de β y la derivada de ψ son positivas se sigue que

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \psi'(t)^3 \kappa_\beta(\psi(t)).$$

En consecuencia

$$\mathbf{b}_\alpha(t) = \mathbf{b}_\beta(\psi(t)) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}$$

y

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \mathbf{n}_\beta(\psi(t)) = \mathbf{b}_\beta(\psi(t)) \wedge \mathbf{t}_\beta(\psi(t)) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \wedge \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| \|\alpha'(t)\|}.$$

Además, puesto que $\|\alpha'(t)\| = \psi'(t)$, se tiene que

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(\psi(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Para calcular la torsión, seguimos derivando:

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= \psi'(t)^3 \kappa'_\beta(\psi(t)) \mathbf{n}_\beta(\psi(t)) + 2\psi'(t)\psi''(t) \kappa_\beta(\psi(t)) \mathbf{n}_\beta(\psi(t)) \\ &\quad + \psi'(t)^3 \kappa_\beta(\psi(t)) (-\kappa_\beta(\psi(t)) \mathbf{t}_\beta(\psi(t)) - \tau_\beta(\psi(t)) \mathbf{b}_\beta(\psi(t))) \\ &\quad + \psi'''(t) \mathbf{t}_\beta(\psi(t)) + \psi''(t)\psi'(t) \kappa_\beta(\psi(t)) \mathbf{n}_\beta(\psi(t)). \end{aligned}$$

De esto se sigue que

$$(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \alpha'''(t) = -(\psi'(t)^3 \kappa_\beta(\psi(t)))^2 \tau_\beta(\psi(t)),$$

y, por tanto,

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(\psi(t)) = -\frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Ejemplo 10.2. (1) Vamos a hacer uso de las fórmulas anteriores para probar que la curva

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{1}{t}(1+t), \frac{1}{t}(1-t^2)\right),$$

definida en el intervalo $(0, \infty)$, es una curva plana. Para ello calculamos las derivadas sucesivas

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2}(1+t^2)\right), \\ \alpha''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right), \\ \alpha'''(t) = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right). \end{cases}$$

Tenemos

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right),$$

es distinto de cero y, por tanto, la curva tiene curvatura distinta de cero; de hecho, calculando un poco resulta:

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{t^3}{\sqrt{(1+t^2+t^4)^3}}.$$

En cuanto a la torsión, es cero puesto que

$$(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t))\alpha'''(t) = \left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right) \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4}\right) = 0,$$

de lo cual se deduce que α es efectivamente una curva plana. ■

Como sabemos, para las curvas planas existe una definición específica de curvatura, la curvatura con signo, y una fórmula con un determinante para su cómputo cuando el parámetro es el arco (6.4, p. 65). A continuación se da una fórmula para su cálculo que vale para parámetro arbitrario.

Proposición 10.3. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, entonces

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Demostración. Sea $t = \varphi(s)$ el difeomorfismo que realiza la reparametrización por la longitud del arco s y sea $\beta = \alpha \circ \varphi$ la curva reparametrizada. Según sabemos, la curvatura viene dada por la primera fórmula de Frenet $\mathbf{t}'_\beta(s) = \kappa_\beta(s)\mathbf{n}_\beta(s)$. Ahora bien, si

$$\mathbf{t}_\beta(s) = \beta'(s) = (\alpha \circ \varphi)'(s) = \varphi'(s)\alpha'(\varphi(s)) = \varphi'(s)(x'(\varphi(s)), y'(\varphi(s))).$$

Entonces

$$\mathbf{t}'_\beta(s) = \varphi'(s)^2(x''(\varphi(s)), y''(\varphi(s))) + \varphi''(s)(x'(\varphi(s)), y'(\varphi(s))),$$

y en particular

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(\varphi(s))\|} = \frac{1}{(x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2)^{1/2}}.$$

Además

$$\mathbf{n}_\beta(s) = \varphi'(s)(-y'(\varphi(s)), x'(\varphi(s))).$$

Teniendo en cuenta el valor anterior de $\varphi'(s)$ resulta que

$$\kappa_\beta(s) = \mathbf{t}'_\beta(s)\mathbf{n}_\beta(s) = \frac{x'(\varphi(s))y''(\varphi(s)) - x''(\varphi(s))y'(\varphi(s))}{(x'(\varphi(s))^2 + y'(\varphi(s))^2)^{3/2}}.$$

Ya que $t = \varphi(s)$, se sigue de aquí que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}. \quad \text{■}$$

Ejemplos 10.4. (1) Calculemos la curvatura de la elipse

$$\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

Como $\alpha'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$ y $\alpha''(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$ aplicando la fórmula anterior resulta:

$$\kappa(t) = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

(2) Calculemos ahora la curvatura de la tractriz

$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \log \tan \frac{1}{2}t),$$

que consideramos definida en $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Hemos visto (1.5, p. 5) que su vector tangente es

$$\alpha'(t) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t} \right)$$

y, por tanto,

$$\alpha''(t) = \left(-\sin t, \frac{-2 \cos t \sin^2 t - \cos^3 t}{\sin^2 t} \right) = \left(-\sin t, \frac{-\cos t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t} \right),$$

de modo que aplicando la fórmula de la curvatura obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{\frac{-\cos^2 t(\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t} + \cos^2 t}{(\cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t})^{3/2}} = \frac{\frac{-\cos^2 t}{\sin^2 t}}{(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t})^{3/2}} = -\tan t.$$

(3) Como tercer ejemplo, calculemos la curvatura de la bruja de Agnesi (1.5, p. 6)

$$\alpha : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (2a \tan t, 2a \cos^2 t).$$

Operando según la fórmula 10.3, p. 112, se obtiene:

$$\kappa(t) = \frac{(3 - 4 \cos^2 t) \cos^4 t}{a(1 + 4 \sin^2 t \cos^6 t)^{3/2}}.$$

Observamos que la curvatura se anula exactamente para $t = \pm\pi/6$. Para entender esto, observamos que la curvatura es negativa en el intervalo $(-\pi/6, \pi/6)$ y positiva en los intervalos $(-\pi/2, -\pi/6) \cup (\pi/6, \pi/2)$, mientras que el vector normal $\mathbf{n}(t)$ (como curva plana) se obtiene dividiendo el vector siguiente por su norma

$$\left(4a \sin t \cos t, \frac{2a}{\cos^2 t} \right).$$

Por tanto, $\kappa(t)$ siempre tiene ordenada positiva. Esto significa que el centro de curvatura está por debajo de la curva en el intervalo $(-\pi/6, \pi/6)$ y por encima en el intervalo $(-\pi/2, -\pi/6) \cup (\pi/6, \pi/2)$. Por ejemplo, para $t = 0$ el centro de curvatura es $(0, a)$. Obsérvese además que los vectores normales como curva plana y como curva alabeada coinciden donde la curvatura es positiva.

(4) Ahora, recordemos que ya hemos calculado la curvatura de la espiral logarítmica

$$\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

reparametrizándola por la longitud del arco $s = \sqrt{2}(e^t - 1)$ (7.4, p. 76). Haciendo los cálculos directamente se obtiene

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}e^t},$$

y escribiendo e^t en función del arco s se obtiene la fórmula ya conocida. ■

Como ilustración de las fórmulas anteriores para el cálculo de la curvatura se propone al lector demostrar que *la curvatura de una curva alabeada α en un punto coincide con la que en ese punto tiene la curva plana β que se obtiene al proyectar α ortogonalmente sobre su plano osculador en el punto dado.*

En ocasiones una curva plana viene dada de forma implícita, es decir mediante una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$, de modo que es necesario hacer uso del teorema de la función implícita para asegurar su existencia. Veamos como se tratan las curvas así dadas.

(10.5) Curvas planas definidas implícitamente. Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $p = (x_0, y_0) \in f^{-1}(0)$ tiene derivada parcial $f_y(p) \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existe una función diferenciable $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p = (t_0, h(t_0))$, donde $t_0 = x_0 \in I$, $h(t_0) = y_0$ y $f(t, h(t)) = 0$ para todo $t \in I$, es decir, el grafo de h coincide con $f^{-1}(0)$ en un entorno de p . Así efectivamente tenemos una curva regular, a saber $\alpha(t) = (t, h(t))$. Analizamos a continuación sus vectores tangente y normal y su curvatura. Para evitar ambigüedad con el signo de la curvatura, suponemos elegida f para que $f_y > 0$ (cambiando f por $-f$ si es preciso).

(1) Derivando la igualdad anterior $f(t, h(t)) = 0$, se sigue que

$$f_x(t, h(t)) + h'(t)f_y(t, h(t)) = 0.$$

A partir de ahora simplificaremos lo más posible la notación, de manera que la igualdad anterior será $f_x + h'f_y = 0$. Deducimos

$$h' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Resulta pues

$$\mathbf{t} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(1, h')}{\sqrt{1 + h'^2}} = \frac{(f_y, -f_x)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}.$$

Por tanto, el vector normal de α como curva plana es

$$\mathbf{n} = \frac{(f_x, f_y)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}.$$

El vector $\nabla f = (f_x, f_y)$ se denomina *gradiente de f* y da la dirección normal; tiene el mismo sentido que el vector normal.

El lector notará en estos cálculos la intervención de la hipótesis $f_y > 0$. De no cumplirse, el vector tangente y el vector normal serían los opuestos de los anteriores, y el normal tendría sentido opuesto al del gradiente.

(2) Derivando nuevamente obtenemos

$$f_{xx} + 2h'f_{xy} + h'^2f_{yy} + h''f_y = 0,$$

de modo que

$$h''(t) = -\frac{f_{xx} + 2h'f_{xy} + h'^2f_{yy}}{f_y} = -\frac{f_y^2f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + f_x^2f_{yy}}{f_y^3}.$$

Con estos cálculos hechos, y como

$$\alpha'(t) = (1, h'(t)), \quad \alpha''(t) = (0, h''(t)),$$

podemos utilizar la fórmula de la proposición 10.3 para obtener la curvatura de α , que es

$$\kappa(x, y) = -\frac{f_y^2f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + f_x^2f_{yy}}{\|\nabla f\|^3}.$$

También aquí se utiliza la hipótesis $f_y > 0$. Si no se cumple, se suprime el signo negativo.

Para terminar, señalemos que si en lugar de $f_y(p) \neq 0$ lo que se tiene es $f_x(p) \neq 0$ el proceso es totalmente análogo, y por simetría, sale lo mismo salvo signos (permutar las coordenadas del plano invierte la orientación). En resumen la condición necesaria para que la ecuación $f = 0$ defina una curva que pase por p es que $\nabla f(p) \neq 0$.

Ejemplos 10.6. (1) Veamos qué curvatura tiene una parábola de ecuación $y = ax^2$. Consideramos $f(x, y) = y - ax^2$, de modo que

$$f_x = -2ax, f_y = 1 > 0; \quad f_{xx} = -2a, f_{xy} = 0, f_{yy} = 0.$$

Por tanto

$$\kappa = \frac{2a}{(4a^2x^2 + 1)^{3/2}}.$$

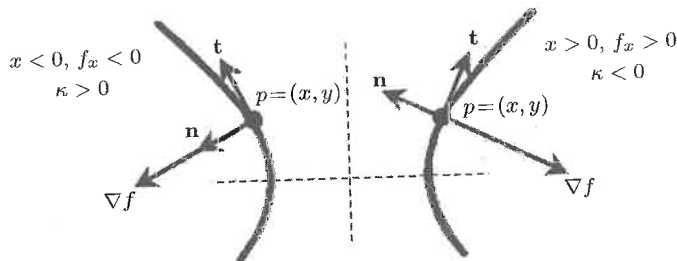
El lector comparará este ejemplo con 6.10, p.68.

(2) Consideremos ahora una hipérbola definida por la ecuación implícita $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Tomemos $f(x, y) = x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1$, de manera que

$$f_x = 2x/a^2, f_y = -2y/b^2; \quad f_{xx} = 2/a^2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -2/b^2.$$

Aquí observamos que f_y puede ser positiva, negativa o nula. Por esto último, debemos utilizar la otra derivada parcial $f_x = 2x/a^2$: ningún punto (x, y) de la hipérbola tiene nula la primera coordenada. Por otra parte, $f_x > 0$ si y sólo si $x > 0$, de manera que también conocemos qué signo debe tener la curvatura. Así pues, dependiendo del signo de x , tenemos:

$$\kappa = \pm \frac{a^2b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}} = \mp \frac{a^4b}{((a^2 + b^2)x^2 - a^4)^{3/2}}$$



La figura refleja el comportamiento de los signos.

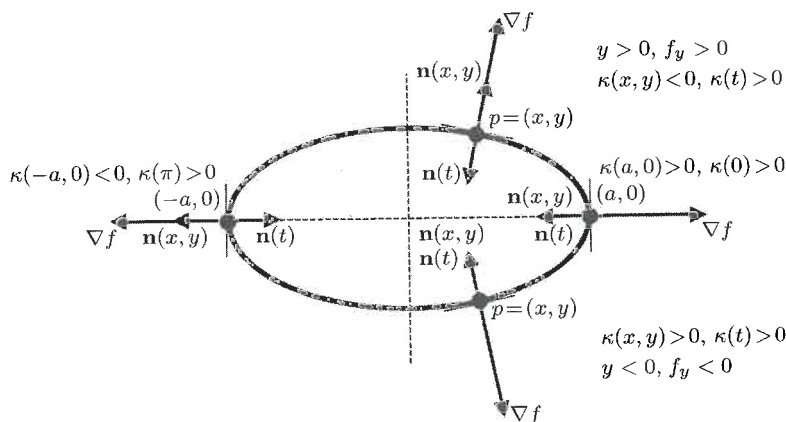
(3) Ya hemos calculado la curvatura de la elipse mediante una parametrización; hagámoslo ahora de forma implícita y comparemos los resultados. Tomamos la ecuación $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, con lo que

$$f_x = 2x/a^2, f_y = 2y/b^2; \quad f_{xx} = 2/a^2, f_{xy} = 0, f_{yy} = 2/b^2.$$

Para $f_y > 0$ (es decir, $y > 0$) resulta

$$\kappa = -\frac{a^2 b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2)}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}} = -\frac{a^4 b}{((b^2 - a^2)x^2 + a^4)^{3/2}}.$$

Si $f_y < 0$ (esto es, $y < 0$) el resultado es el mismo sin el signo negativo. Para $y = 0$ sólo dejamos dos puntos $(\pm a, 0)$ en los que $f_x \neq 0$, y expresando x en función de y , resulta $\kappa = \pm a/b^2$ según $x > 0$ o $x < 0$. Calculado esto, para comparar con los resultados de 10.4, p.113, denotaremos $\kappa(t)$ la curvatura allí obtenida y $\kappa(x, y)$ la obtenida aquí; de manera análoga distinguimos los vectores normales $\mathbf{n}(t)$ y $\mathbf{n}(x, y)$. La figura que sigue resume la situación.



Problemas

Número 1. Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos curvas birregulares no necesariamente parametrizadas por la longitud del arco. Se dice que son un par de *curvas de Bertrand* si para todo t la recta afín normal a α en t y la recta afín normal a β en t coinciden. Probar que dos circunferencias en el plano con el mismo centro son curvas de Bertrand.

Número 2. Sean α y β un par de curvas de Bertrand y sea $s = f(t)$ una reparametrización de α por la longitud del arco. Expresemos $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\mathbf{n}_\alpha(s)$ (obsérvese que $\beta(s)$ no