Hoja 4

Ejercicio 1

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a.:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 150$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	5	2	1	0	0	150
x_4	2	3	0	1	0	100
x_5	2	1	0	0	1	40
	3	2	0	0	0	$z-0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	–1/2	1	0	–5/2	50
x_4	0	2	0	1	–1	60
x_1	1	1/2	0	0	1/2	20
	0	1/2	0	0	–3/2	$z - 60$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	1/4	–11/4	65
x_2	0	1	0	1/2	–1/2	30
x_1	1	0	0	–1/4	3/4	5
	0	0	0	–1/4	–5/4	$z-75$

Solución óptima única:

$$x_1^* = 5, \quad x_2^* = 30, \quad x_3^* = 65, \quad x_4^* = 0, \quad x_5^* = 0$$

Valor óptimo de la función objetivo:

$$z^* = 75$$

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a.:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$10x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	3	2	1	0	12
x_4	10	3	0	1	30
	3	2	0	0	$z-0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	11/10	1	–3/10	3
x_1	1	3/10	0	1/10	3
	0	11/10	0	–3/10	$z - 9$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	10/11	–3/11	30/11
x_1	1	0	–3/11	2/11	24/11
	0	0	–1	0	$z - 12$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	3/2	1	1/2	0	6
x_4	11/2	0	–3/2	1	12
	0	0	–1	0	$z - 12$

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 12$

El conjunto de soluciones óptimas es la envoltura convexa de las dos soluciones básicas factibles óptimas obtenidas:

$$x^*(\lambda) = \lambda \begin{pmatrix} 24/11 \\ 30/11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \text{para todo} \lambda \in [0, 1]$$

$$\min \quad z = -3x_1 - 2x_2 - x_3$$

s.a.:

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$$

$$3x_1 + 4x_2 \qquad\quad \leq 11$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

La variable x_1 se substituye por

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-, \quad x_1^+ \geq 0, \quad x_1^- \geq 0.$$

	x_1^+	x_1^-	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	2	–2	5	1	1	0	12
x_5	3	–3	4	0	0	1	11
	–3	3	–2	–1	0	0	$z - 0$

	x_1^+	x_1^-	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	0	7/3	1	1	–2/3	14/3
x_1^+	1	–1	4/3	0	0	1/3	11/3
	0	0	2	–1	0	1	$z-(-11)$

	x_1^+	x_1^-	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	7/3	1	1	–2/3	14/3
x_1^+	1	–1	4/3	0	0	1/3	11/3
	0	0	13/3	0	1	1/3	$z - (-47/3)$

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = -\frac{47}{3}$

Solución óptima única:

$$x_1^* = x_1^{*+} - x_1^{*-} = \frac{11}{3},$$

$$x_2^* = 0, \qquad x_3^* = \frac{14}{3}, \qquad x_4^* = 0, \qquad x_5^* = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 0 \\ 0 \\ 14/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} + \mu \\ \mu \\ 0 \\ 14/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall \mu \geq 0$$

$$\max \quad z = 5x_1 + 3x_2$$

s.a.:

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$4x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	2	1	1	0	0	6
x_4	4	1	0	1	0	10
x_5	1	1	0	0	1	4
	5	3	0	0	0	$Z-0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1/2	1	–1/2	0	1
x_1	1	1/4	0	1/4	0	5/2
x_5	0	3/4	0	–1/4	1	3/2
	0	7/4	0	–5/4	0	$z - 25/2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	$-1/3$	$-2/3$	0
x_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	0	1	0	$-1/3$	$4/3$	2
	0	0	0	$-2/3$	$-7/3$	$z - 16$

Solución óptima única:

$$x_1^* = 2, \qquad x_2^* = 2, \qquad x_3^* = 0, \qquad x_4^* = 0, \qquad x_5^* = 0$$

Valor óptimo de la función objetivo:

$$z^* = 16$$

Hoja 4

Problema 2

En las siguientes tablas del Método del Simplex, para problemas de la forma

$$\text{opt } \{z = c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

extraer las conclusiones que se deducen de ellas. Considerar independientemente los casos de minimizar y maximizar en cada tabla. Si, en alguna tabla, alguno de los problemas (minimizar o maximizar) tiene solución óptima múltiple, identificar dicho caso. Si, en alguna tabla, alguno de los problemas (minimizar o maximizar) tiene solución no acotada, indicar la dirección extrema que pone de relieve la no acotación.

a)

Tab1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	0	-1	1	2	7
x_2	0	1	0	0	-1	2
x_1	1	0	-4	0	1	3
	0	0	-3	0	0	$z-8$

i) Se considera que el problema es de minimización. Por ser el coste reducido de la variable x_3 negativo y ser todas las componentes del vector Y_3 menores o iguales que cero, se concluye que **el problema tiene solución no acotada**.

Se pueden considerar soluciones factibles de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \\ x_3(\mu) \\ x_4(\mu) \\ x_5(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu \geq 0$$

donde el valor de la función objetivo es

$$c^t x(\mu) = 8 + (-3)\mu \qquad \mu \geq 0$$

ii) Se considera que el problema es de maximización. Por ser el coste reducido de todas las variables no básicas menor o igual que cero, se concluye que **la tabla presenta solución básica factible óptima**. El valor óptimo de la función objetivo es: $\boldsymbol{z^* = 8}$.

Por ser nulo el coste reducido de la variable no básica x_5, se puede efectuar un pivotaje para obtener una **solución básica factible óptima alternativa**.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	– 2	0	7	1	0	1
x_2	1	1	– 4	0	0	5
x_5	1	0	– 4	0	1	3
	0	0	– 3	0	0	z – 8

El conjunto de soluciones óptimas es la envoltura convexa de las dos soluciones básicas factibles óptimas obtenidas.

b)

Tab2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	– 2	– 1	1	1	0	2
x_5	– 3	0	0	5	1	5
	0	– 1	0	– 6	0	z – (– 4)

i) Se considera que el problema es de minimización. Por ser el coste reducido de la variable x_2 negativo y ser todas las componentes del vector Y_2 menores o iguales que cero, se concluye que **el problema tiene solución no acotada**.

Se pueden considerar soluciones factibles de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \\ x_3(\mu) \\ x_4(\mu) \\ x_5(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu \geq 0$$

donde el valor de la función objetivo es

$$c^t x(\mu) = (-4) + (-1)\mu \qquad \mu \geq 0$$

ii) Se considera que el problema es de maximización. Por ser el coste reducido de todas las variables no básicas menor o igual que cero, se concluye que **la tabla presenta solución básica factible óptima**. El valor óptimo de la función objetivo es: $\boldsymbol{z^* = -4}$.

Por ser el coste reducido de la variable x_1 nulo y ser todas las componentes del vector Y_1 menores o iguales que cero, se concluye que **la solución óptima obtenida no es única**. Se identifica una dirección extrema que permite mantener la optimalidad.

Conjunto de soluciones óptimas:

$$\begin{pmatrix} x_1(\mu) \\ x_2(\mu) \\ x_3(\mu) \\ x_4(\mu) \\ x_5(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mu \geq 0$$

Problema 3

Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Sea N la matriz no básica asociada a una solución básica óptima.

$$N = \left(a_{N_1}, \dots, a_{N_{n-m}}\right)$$

¿Pueden existir dos índices r y s tales que $\bar{c}_{N_r} > 0$ y $\bar{c}_{N_s} < 0$?.

b) ¿Una variable que ha salido de la base en una iteración del Algoritmo del Simplex, puede volver a entrar en la siguiente iteración?.

c) ¿Una solución óptima de un problema con m restricciones puede tener más de m componentes estrictamente positivas?.

a) Si la solución básica óptima es no degenerada (todas las variables básicas toman valores mayores que cero) no puede ocurrir, puesto que mediante un pivotaje se podría mejorar el valor de la función objetivo.

Si la solución básica óptima es degenerada (alguna variable básica toma el valor cero) sí puede ocurrir. Al efectuar un pivotaje, introduciendo en la base la variable cuyo coste reducido no verifica la condición de optimalidad, se obtiene la misma solución.

b) No. Recordando la fórmula del nuevo coste reducido después del pivotaje.

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \frac{y_{lj}}{y_{lk}}\,\bar{c}_k$$

el nuevo coste reducido de la variable x_l es

$$\bar{c}'_l = 0 - \frac{1}{y_{lk}}\,\bar{c}_k > 0 \qquad (y_{lk} > 0,\ \bar{c}_k < 0)$$

por tanto, la variable x_l no es candidata a entrar en la base.

c) Sí, si la solución óptima del problema no es única.