Hoja 1

Introducción al Cálculo de Probabilidades

Curso de Probabilidad (UCM) - 2017/2018

Ej. 1. *Dados el conjunto* $B \subset \Omega$ *y las sucesiones* $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *y* $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$*, se pide:*

(a) *Demostrar la igualdad* $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

(b) *Si* $A_n \downarrow$*, demostrar que existe* $\lim_{n\to\infty} A_n$ *y que* $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(c) *Demostrar que* $\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}$ *y* $\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}$.

(d) *Demostrar que* $\limsup(B - A_n) = B - \liminf A_n$ *y* $\liminf(B - A_n) = B - \limsup A_n$.

(e) *Demostrar que* $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$ *y* $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.

(f) *Demostrar que* $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$ *y* $\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$.

(a) Demostramos la igualdad recurriendo al método de probar el doble contenido. Para ello definimos los conjuntos auxiliares $\sigma_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, $\forall k \geq 1$.

$\subset$: Sea $\omega \in \limsup A_n$. Por definición, ω pertenece a infinitos conjuntos A_n. Si existiera $k_0 \geq 1$ tal que $\omega \notin \sigma_{k_0}$, entonces ω a lo sumo estaría en los primeros $A_1, \dots, A_{k_0-1}$ conjuntos (¡una cantidad finita!), por lo que se tiene que $\forall k \geq 1$, $\omega \in \sigma_k$. De esta forma, $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$.

$\supset$: Sea $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ y se tiene que $\forall k \geq 1$, $\omega \in \sigma_k$. Si ω estuviera a lo sumo en una cantidad finita de conjuntos A_n, entonces $\exists k_0 \geq 1$ tal que $\forall k \geq k_0$, $\omega \notin A_k$ y en particular $\omega \notin \sigma_{k_0}$ (¡contradicción!), por lo que necesariamente ω pertenece a infinitos conjuntos A_n. De esta forma, $\omega \in \limsup A_n$.

(b) Definimos los conjuntos auxiliares $\delta_k := \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ y $\sigma_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, $\forall k \geq 1$.

Fijado $k \geq 1$, como $A_n \downarrow$, entonces $\forall n > k$, $A_k \supset A_n$ y podemos deducir que $\sigma_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A_k$. Por tanto:

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por otra parte, fijado $k \geq 1$, como $A_n \downarrow$, entonces $\forall n < k$, $A_k \subset A_n$ y podemos deducir que $\delta_k = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por tanto:

$$\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \delta_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Se tiene entonces que $\limsup A_n = \liminf A_n$, por lo que existe $\lim_{n\to\infty} A_n$ y éste adopta el valor de los límites inferior y superior, es decir, $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(c) $\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}$:

$$\begin{aligned}
\omega \in \limsup A_n &\iff \omega \text{ está en infinitos } A_n \\
&\iff \text{ó} \begin{cases} \omega \text{ está en infinitos } A_{2n} \\ \omega \text{ está en infinitos } A_{2n-1} \end{cases} \\
&\iff \text{ó} \begin{cases} \omega \in \limsup A_{2n} \\ \omega \in \limsup A_{2n-1} \end{cases} \\
&\iff \omega \in \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}
\end{aligned}$$

$\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}$:

$$\begin{aligned}
\omega \in \liminf A_n &\iff \omega \text{ está en todo } A_n, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito} \\
&\iff \text{y} \begin{cases} \omega \text{ está en todo } A_{2n}, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito} \\ \omega \text{ está en todo } A_{2n-1}, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito} \end{cases} \\
&\iff \text{y} \begin{cases} \omega \in \liminf A_{2n} \\ \omega \in \liminf A_{2n-1} \end{cases} \\
&\iff \omega \in \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}
\end{aligned}$$

Este resultado puedo extenderse fácilmente para $k \geq 1$ como:

$$\limsup A_n = \limsup A_{kn} \cup \limsup A_{kn-1} \cup \ldots \cup \limsup A_{kn-(k-1)}$$
$$\liminf A_n = \liminf A_{kn} \cap \liminf A_{kn-1} \cap \ldots \cap \liminf A_{kn-(k-1)}$$

(d) Basta recordar las leyes de De Morgan para conjuntos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\limsup (B - A_n) &= \textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (B - A_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (B \cap A_n^c) = \\
&= \textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} (B \cap \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n^c) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (B \cap (\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)^c) = \\
&= \textstyle B \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)^c = B \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \\
&= \textstyle B - \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = B - \liminf A_n
\end{aligned}$$

Y análogamente:

$$\begin{aligned}\liminf\,(B - A_n) &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(B - A_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(B \cap A_n^c) = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}(B \cap \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(B \cap (\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c) = \\ &= B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c = B \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \\ &= B - \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = B - \limsup A_n\end{aligned}$$

(e) Recurriendo de nuevo a las leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned}(\limsup A_n)^c &= (\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}(A_n)^c = \liminf A_n^c\end{aligned}$$

Y análogamente:

$$\begin{aligned}(\liminf A_n)^c &= (\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)^c = \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}(A_n)^c = \limsup A_n^c\end{aligned}$$

(f) $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$:

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup(A_n \cup B_n) &\iff \omega \text{ está en infinitos } A_n \cup B_n \\ &\iff \text{ó}\begin{cases}\omega \text{ está en infinitos } A_n \\ \omega \text{ está en infinitos } B_n\end{cases} \\ &\iff \text{ó}\begin{cases}\omega \in \limsup A_n \\ \omega \in \limsup B_n\end{cases} \\ &\iff \omega \in \limsup A_n \cup \limsup B_n\end{aligned}$$

$\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$:

$$\begin{aligned}\omega \in \liminf(A_n \cap B_n) &\iff \omega \text{ está en todo } A_n \cap B_n, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito} \\ &\iff \text{y}\begin{cases}\omega \text{ está en todo } A_n, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito} \\ \omega \text{ está en todo } B_n, \text{menos un n}^{\text{o}} \text{ finito}\end{cases} \\ &\iff \text{y}\begin{cases}\omega \in \liminf A_n \\ \omega \in \liminf B_n\end{cases} \\ &\iff \omega \in \liminf A_n \cap \liminf B_n\end{aligned}$$

Ej. 2. *Determinar los límites inferiores y superiores de* $\{A_n : n \geq 1\}$ *cuando:*

(a) $A_{2n-1} = \mathbb{Q} \cap [\frac{1}{n}, \frac{5n}{2n+2}]$ *y* $A_{2n} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (-\frac{2}{n}, \frac{7n+3}{9n}]$.

(b) $A_{3n-2} = (\frac{n-1}{5n+3}, \frac{2n-1}{n}]$, $A_{3n-1} = (\frac{3n}{5n+1}, \frac{3n+2}{n})$ *y* $A_{3n} = [1, \frac{2n^2+1}{n+2})$.

(c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\}$.

(a) Podemos hacer uso del resultado probado en (1c). De esta forma simplificaremos el problema estudiando por separado cada una de las subsucesiones indicadas.

A_{2n-1}: Démonos cuenta de que $\{A_{2n-1} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_{2n-1} \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{Q} \cap [\tfrac{1}{n},\tfrac{5n}{2n+2}]) = \mathbb{Q} \cap (0,\tfrac{5}{2})$$

A_{2n}: Démonos cuenta de que $\{A_{2n} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona decreciente, es decir, $A_{2n} \downarrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty}((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (-\tfrac{2}{n},\tfrac{7n+3}{9n}]) = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,\tfrac{7}{9}]$$

Aplicando (1c):

$$\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1} =$$
$$= \big((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,\tfrac{7}{9}]\big) \cup \big(\mathbb{Q} \cap (0,\tfrac{5}{2})\big) = (0,\tfrac{7}{9}] \cup \big(\mathbb{Q} \cap (\tfrac{7}{9},\tfrac{5}{2})\big)$$

$$\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1} =$$
$$= \big((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,\tfrac{7}{9}]\big) \cap \big(\mathbb{Q} \cap (0,\tfrac{5}{2})\big) = \emptyset$$

(b) Nuevamente, podemos recurrir al resultado demostrado en (1c) para simplificar el problema.

A_{3n-2}: A diferencia de las del apartado (a), esta sucesión no es monótona y debemos calcular sus límites superior e inferior. Así:

$$\limsup A_{3n-2} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_{3n-2} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty}(\tfrac{n-1}{5n+3},\tfrac{2n-1}{n}] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(\tfrac{k-1}{5k+3},2) = [\tfrac{1}{5},2)$$

$$\liminf A_{3n-2} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_{3n-2} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty}(\tfrac{n-1}{5n+3},\tfrac{2n-1}{n}] = \bigcup_{k=1}^{\infty}[\tfrac{1}{5},\tfrac{2k-1}{k}] = [\tfrac{1}{5},2)$$

Dado que los límites superior e inferior coinciden, la sucesión es convergente y $\lim_{n\to\infty} A_{3n-2} = [\frac{1}{5},2)$.

A_{3n-1}: Démonos cuenta de que $\{A_{3n-1} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona decreciente, es decir, $A_{3n-1} \downarrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{3n-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{3n-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(\tfrac{3n}{5n+1},\tfrac{3n+2}{n}) = [\tfrac{3}{5},3]$$

A_{3n}: Démonos cuenta de que $\{A_{3n} : n \geq 1\}$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_{3n} \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{3n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{3n} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[1,\tfrac{2n^2+1}{n+2}) = [1,\infty)$$

Aplicando (1c):

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \limsup A_{3n} \cup \limsup A_{3n-1} \cup \limsup A_{3n-2} = \\ &= [1,\infty) \cup [\tfrac{3}{5},3] \cup [\tfrac{1}{5},2) = [\tfrac{1}{5},\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf A_n &= \liminf A_{3n} \cap \liminf A_{3n-1} \cap \liminf A_{3n-2} = \\ &= [1,\infty) \cap [\tfrac{3}{5},3] \cap [\tfrac{1}{5},2) = [1,2) \end{aligned}$$

(c) Démonos cuenta de que $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = [\frac{1}{n},3-\frac{1}{n}]$ es una sucesión monótona creciente, es decir, $A_n \uparrow$. Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup A_n = \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{n},3 - \tfrac{1}{n}] = (0,3)$$

Ej. 3. *Supongamos* $\Omega = \mathbb{R}^2$*. Calcular los conjuntos* $\lim_{n\to\infty} E_n$*,* $\lim_{n\to\infty} E_n^c$*,* $\lim_{n\to\infty} F_n$*,* $\lim_{n\to\infty} F_n^c$ *y* $\lim_{n\to\infty}(E_n \cap F_n^c)$*, donde* $E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n}\}$ *y* $F_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{n}{n+1}\}$.

Atendiendo a su interpretación geométrica, E_n comprende el círculo de radio $\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ excluyendo el borde y F_n el de radio $\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}$ incluído el borde. Con esto en mente, es sencillo comprobar que la sucesión E_n es monótona decreciente ($E_n \downarrow$) mientras que F_n es monótona creciente ($F_n \uparrow$). Por tanto, tiene sentido hablar de sus límites. Atendiendo a su monotonía:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \textstyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Para calcular el límite de sus sucesiones complementarias, hacemos uso del resultado en (1e):

$$\lim_{n\to\infty} E_n^c = (\lim_{n\to\infty} E_n)^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n^c = (\lim_{n\to\infty} F_n)^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Finalmente, para calcular el de $(E_n \cap F_n^c)$, recurrimos al apartado (1f):

$$\lim_{n\to\infty}(E_n \cap F_n^c) = \lim_{n\to\infty} E_n \cap \lim_{n\to\infty} F_n^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Ej. 4. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} A_n$ *en los siguientes casos:*

(a) $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{n}\}$.

(b) $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\}$.

(a) Geométricamente, A_n consiste en la corona entre las circunferencias de radio $\sqrt{\frac{1}{n}}$ y $\sqrt{4-\frac{1}{n}}$ incluídos los bordes. Con esta intuición, es fácil comprobar que la sucesión A_n es monótona creciente ($A_n \uparrow$). Por tanto converge y su límite es:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$$

(b) Geométricamente, A_n es el círculo de radio $\sqrt{\frac{1}{n}}$ incluído el borde. Sabiendo esto, se comprueba rápidamente que la sucesión A_n es monótona decreciente ($A_n \downarrow$). Por tanto converge y su límite es:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 0\} = \{(0,0)\}$$

Ej. 5. *Estudiar la convergencia de la sucesión $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ en los siguientes casos:*

(a) $A_n = (-\frac{1}{n},1]$ *si n es par y* $(-1,\frac{1}{n}]$ *si n es impar.*

(b) $A_n = (0,1-\frac{1}{n}]$ *si n es impar y* $[\frac{1}{n},1)$ *si n es par.*

(a) Hacemos uso del resultado en (1c), simplificando el problema.

A_{2n}: Démonos cuenta de que $\{A_n : n \text{ es par}\} = (-\frac{1}{n},1]$ es una sucesión monótona decreciente ($A_{2n} \downarrow$). Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\tfrac{1}{n},1] = [0,1]$$

A_{2n-1}: Démonos cuenta de que $\{A_n : n \text{ es impar}\} = (-1,\frac{1}{n}]$ es una sucesión monótona decreciente ($A_{2n-1} \downarrow$). Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-1,\tfrac{1}{n}] = (-1,0]$$

Aplicando (1c):

$$\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1} = [0,1] \cup (-1,0] = (-1,1]$$

$$\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1} = [0,1] \cap (-1,0] = \{0\}$$

Como $\limsup A_n \neq \liminf A_n$, la serie diverge y no tiene límite.

(b) Una vez más recurrimos al resultado de (1c) para simplificar el problema.

A_{2n-1}: Démonos cuenta de que $\{A_n : n \text{ es impar}\} = (0{,}1 - \frac{1}{n}]$ es una sucesión monótona creciente ($A_{2n-1} \uparrow$). Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0{,}1 - \tfrac{1}{n}] = (0{,}1)$$

A_{2n}: Démonos cuenta de que $\{A_n : n \text{ es par}\} = [\frac{1}{n}{,}1)$ es una sucesión monótona creciente ($A_{2n} \uparrow$). Por tanto, la sucesión tiene límite y se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tfrac{1}{n}{,}1) = (0{,}1)$$

Aplicando (1c):

$$\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1} = (0{,}1) \cup (0{,}1) = (0{,}1)$$

$$\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1} = (0{,}1) \cap (0{,}1) = (0{,}1)$$

Como $\limsup A_n = \liminf A_n$, la serie converge y su límite es $(0{,}1)$.