I. E. S. " SAN ISIDRO "

Calificación

Asignatura.. Fecha ....

Alumno/a HOJA 2 .... Curso.................. Nº............

Apellidos Nombre

1.- Estudia la convergencia de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\sqrt{n}}$ Sea $z_n = \dfrac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{\sqrt{n}}$ el término general

Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

$|z_n| = \dfrac{|e^{\frac{\pi i}{n}}|}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no converge porque la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge sí y solo sí $p > 1$.

Además $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\cos(\pi/n) + i\,\operatorname{sen}(\pi/n)\right)$ y sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge sí y solo sí la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$ converge.

En este caso

$\operatorname{Re}(z_n) = \dfrac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{n}}$ que si la comparamos con $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ por el criterio del cociente para $n > 2$ (todos los términos de $\operatorname{Re}(z_n)$ son positivos)

$$\frac{\frac{\cos(\pi/n)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n)$ converge sí y solo sí converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ no converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n)$ no converge

y $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, sen\, in}{3^n}$

Sea $z_n = \frac{n \, sen\, in}{3^n} = \frac{n}{3^n} \cdot \frac{e^{i^2 n} - e^{-i^2 n}}{2i} = \frac{n}{3^n} \frac{e^{-n} - e^{n}}{2i}$

Ahora $|z_n| = \frac{n}{3^n} \cdot \frac{|e^{-n} - e^{n}|}{|2i|} \underset{\substack{e^n > e^{-n} \\ \forall n \in \mathbb{N}}}{=} \frac{n(e^n - e^{-n})}{2 \cdot 3^n} < \frac{n}{2 \cdot 3^n} e^n = \frac{n}{2}\left(\frac{e}{3}\right)^n$

Por el criterio del cociente

$$\frac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{e}{3}\right)^{n+1}}{\frac{n}{2}\left(\frac{e}{3}\right)^{n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{e}{3}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{e}{3} < 1$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}\left(\frac{e}{3}\right)^n$ converge y por el criterio de comparación

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{senh(\sqrt{n}\, i)}{sen(in)}$

Sea $z_n = \frac{senh(\sqrt{n}\, i)}{sen(in)} = \frac{\frac{e^{\sqrt{n} i} - e^{-\sqrt{n} i}}{2}}{\frac{e^{i^2 n} - e^{-i^2 n}}{2i}} = i \cdot \frac{e^{\sqrt{n} i} - e^{-\sqrt{n} i}}{e^{-n} - e^{n}}$

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.......... Fecha ....

Alumno/a .... Curso.......... Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

$$|z_n| = \left| i \cdot \frac{e^{\sqrt{n}i} - e^{-\sqrt{n}i}}{e^{-n}-e^{n}} \right| = |i| \cdot \frac{|e^{\sqrt{n}i}-e^{-\sqrt{n}i}|}{|e^{-n}-e^{n}|} = \frac{|e^{\sqrt{n}i}-e^{-\sqrt{n}i}|}{e^{n}-e^{-n}} \leq$$

$$\leq \frac{|e^{\sqrt{n}i}|+|e^{-\sqrt{n}i}|}{e^{n}-e^{-n}} = \frac{2}{e^{n}-e^{-n}}$$

Por el criterio de comparación con el límite

$$\frac{\frac{2}{e^{n}-e^{-n}}}{\frac{1}{e^{n}}} = 2\frac{e^{n}}{e^{n}-e^{-n}} = 2\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{-n}}{e^{n}}} = 2\cdot\frac{1}{1-e^{-2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^{n}-e^{-n}}$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n}}$ converge y como esta última sabemos que lo hace entonces concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{tg(i\pi n)}$

Sea $z_n = \frac{n}{tg(i\pi n)} = n\cdot cotg(i\pi n) = n\cdot i\cdot\frac{e^{i^2\pi n}+e^{-i^2\pi n}}{e^{i^2\pi n}-e^{-i^2\pi n}} =$

$$= n\cdot i\cdot \frac{e^{-\pi n}+e^{\pi n}}{e^{-\pi n}-e^{\pi n}} \; ;$$

$$|z_n| = n\cdot\frac{e^{-\pi n}+e^{\pi n}}{|e^{-\pi n}-e^{\pi n}|} = n\cdot\frac{e^{\pi n}+e^{-\pi n}}{e^{\pi n}-e^{-\pi n}} = n\cdot\frac{1+\frac{e^{-\pi n}}{e^{\pi n}}}{1-\frac{e^{-\pi n}}{e^{\pi n}}} =$$

$$= n \cdot \frac{1+e^{-2\pi n}}{1-e^{-2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Como $|z_n| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no es convergente.

$z_n = -i \cdot |z_n| \Rightarrow Re(z_n) = 0$ y

$Im(z_n) = -|z_n|$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n)$ convergen y $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ no converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n)$ no converge y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ tampoco

---

Resumen	Converge $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$	Converge $\sum_{n=0}^{\infty} \lvert z_n \rvert$
a)	No	No
b)	Sí	Sí
c)	Sí	Sí
d)	No	No