DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 18–19.
Los números reales. Propiedades de cuerpo y orden. Hoja 2

23 *Utilizando las propiedades algebraicas del cuerpo* $\mathbb{K}$ *probar que si* a, b *representan elementos de* $\mathbb{K}$ *se tiene*
i) $(-1) \cdot (-1) = 1$
ii) $-a = (-1) \cdot a$
iii) $-(a + b) = (-a) + (-b)$
iv) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
v) $1/(-a) = -(1/a)$
vi) $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$ *si* $b \neq 0$.
vii) Si $a \cdot a = a$ *entonces* $a = 0$ *ó* $a = 1$.

24 *Resolver las siguientes ecuaciones en* $\mathbb{R}$, *justificando cada paso refiriendose a propiedades conocidas o teoremas:*
i) $2x + 5 = 8$ *ii)* $x^2 = 2x$ *iii)* $(x - 1)(x + 2) = 0$

25 *i) Demostrar que la ecuación* $x^2 = 2$ *no la satisface ningún número racional.*
ii) Si $p \in \mathbb{N}$ *es un número primo, la ecuación* $x^2 = p$ *no la satisface ningún número racional.*
iii) Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *no es racional.*
iv) Probar que $\sqrt{n}$ *no es racional para cualquier* $n \in \mathbb{N}$ *que no sea cuadrado perfecto.*

26 *Demostrar que si* $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ *y* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *entonces* $r + x$ *y* rx *son irracionales.*

27 *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$ *demostrar que*
i) Si $a > 1$ *entonces* $1 < a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n$, $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $0 < a < 1$ *entonces* $1 > a > a^2 > a^3 > \ldots > a^n$, $n \in \mathbb{N}$.
¿Qué pasa si $a < 0$*?.*

28 *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$.
i) Probar que $a < b$ *si y sólo si* $a^n < b^n$.
ii) Probar que si $a < b$ *entonces* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.
iii) Si $a > 1$ *probar que* $\sqrt[n]{a} < a$.
iv) Si $0 < a < 1$ *probar que* $\sqrt[n]{a} > a$.
v) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

29 *Probar que si* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $0 < a < b$ *entonces* $a < \sqrt{ab} < b$.

30 *Probar por inducción que para todo* $n \geq 1$ *se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

31 *Demuestra que para todos* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$$

32 *Demuestra la desigualdad de Bernoulli: para todo* $x > -1$ *se tiene*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demuestra también la desigualdad de Bernoulli generalizada:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

donde x_1, x_2,.., x_n *son números reales, todos ellos del mismo signo y verificando* $x_k > -1$ *para todo* k.

33 *Si $a_1, \ldots, a_n$ son positivos probar que*

$$\Big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\Big)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big) \geq n^2$$

34 *Demostrar por inducción en el número de elementos, que todo conjunto finito de $\mathbb{R}$ se puede ordenar de manera creciente.*

Concluir que todo conjunto finito posee un elemento **máximo** *(pertenece al conjunto y es mayor que todos los elementos del conjunto) y un elemento* **mínimo** *(pertenece al conjunto y es menor que todos los elementos del conjunto).*

35 *Supongamos que una sucesión de números verifica*

$$a_{n+1} = ka_n, \quad a_0 \text{ dado}, \ n = 1, 2 \ldots \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Encuentra y demuestra por inducción una expresión general para a_n.

36 *Si*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}, \quad a_0, a_1 \text{ dados}, \ n = 1, 2 \ldots$$

con $0 < a_0, a_1 < 2$, probar que $0 < a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

37 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que se tiene que $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Probar que se tiene $a \leq b$.*

38 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Probar que se tiene*
i) $|a| = \sqrt{a^2}$ *ii)* $|a/b| = |a|/|b|$

39 *Probar que $|x - a| < \varepsilon$ si y sólo si $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.*

40 *Si $a < x < b$ y $a < y < b$ entonces $|x - y| < b - a$. Interpreta geométricamente este resultado.*

41 *Encuentra todos los números reales que verifican*
i) $x^2 < 2x$, *ii)* $x^2 > 3x+4$, *iii)* $1 < x^2 < 4$, *iv)* $\frac{1}{x} < x$, *v)* $\frac{1}{x} < x^2$, *vi)* $|x-1|-|x-2| = 0$, *vii)* $|x|+|x-1| = 1$, *viii)* $|4x-5| < 13$, *ix)* $|x^2-1| = 3$, *x)* $|x-1| > |x+1|$, *xi)* $|x|+|x+1| < 2$.

42 *Demostrar que*

$$|z + w| \leq |z| + |w|, \qquad |zw| = |z||w|, \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

43 *Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ entonces*

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

y que por tanto el inverso de z es $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Dibuja el inverso y escribelo en términos de las partes real e imaginaria de z.

Probar que en forma polar, si $z = re^{i\theta}$ entonces $\bar{z} = re^{-i\theta}$ y $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

44 *Probar que la exponencial compleja verifica*

$$e^z e^w = e^{z+w}, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

45 *Calcular las raices complejas de la unidad: $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n = 1$ con $n = 2, 3, 4 \ldots$ y dibujarlas.*