Estadística. Grupo m3
Hoja 1. Distribuciones muestrales

1. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(0,1)$. Hallar la distribución en el muestreo de la variable aleatoria $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Hallar su esperanza y su varianza.

2. Sean $X, X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$. Hallar la distribución en el muestreo de la variable aleatoria $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$.

3. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu, \sigma^2)$. Hallar la distribución en el muestreo de la media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

4. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu, \sigma^2)$. Hallar la distribución en el muestreo de la variable aleatoria $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, donde S^2 es la cuasivarianza muestral $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$.

5. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $N(\mu, \sigma^2)$. Hallar la distribución en el muestreo de la variable aleatoria $T = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{S}$.

6. Sea $(X_1, \ldots, X_{25})$ una muestra aleatoria simple de una población $N(0, \sigma = 4)$ e $(Y_1, \ldots, Y_{25})$ una muestra aleatoria simple e independiente de la anterior de una población $N(0, \sigma = 3)$. Calcular $P(\bar{X} > \bar{Y})$.

7. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una población $U(0,1)$. Hallar la esperanza y la varianza de $X_{(j)}$.

8. Dada una muestra aleatoria $(X_1, \ldots, X_n)$ de una población $U(0,1)$, encontrar la probabilidad de que el rango $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ sea menor que $1/2$.

9. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de una distribución F. Sea $F_n(x)$ la función de distribución empírica de la muestra.

   (a) Demostrar que

   $$P(|F_n(x) - F(x)| > \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}) \leq \epsilon^{-2}$$

   (b) Para x e y fijos, calcular la covarianza entre $F_n(x)$ y $F_n(y)$.