Además, si tomamos un punto (x,y,z) que pertenece a

$$A \setminus \left(\{(0,0,0)\} \cup \{x \geq 0,\ y=0\} \cup \{x^2+y^2+z^2=2ax\}\right) = \hat{A}$$

Podemos tomar $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ y como $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ pertenece al círculo unitario existe un $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que.

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad y \quad sen\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{array}$$

Ahora tenemos que comprobar que este par $(r,\theta) \in D$.

Como $y \neq 0$ o $\cos\theta < 0 \Rightarrow \theta \neq 0 \Rightarrow \theta \in (0, 2\pi)$

Falta ver que $r < a\cos\theta$.

Como (x,y,z) pertenece al cono $x^2+y^2=z^2 \Leftrightarrow r^2 = z^2 \underset{z \geq 0}{\Leftrightarrow} r = z$

Como (x,y,z) pertenece a la esfera $x^2+y^2+z^2 < 2ax \Leftrightarrow$

$$r^2 + r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow 2r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r < a\cos\theta.$$

Esto prueba que $\hat{A} \subset \Phi(D)$

Si ahora tomamos un par $(r,\theta) \in D$ hay que ver si $\Phi(r,\theta) \in \hat{A}$.

Sea $(r,\theta) \in D \Rightarrow \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,sen\,\theta, r)$

Se tiene que verificar:

$(r\cos\theta)^2 + (r\,sen\,\theta)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = r^2$ OK

$(r\cos\theta)^2 + (r\,sen\,\theta)^2 + r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow 2r^2 < 2ar\cos\theta \Leftrightarrow r < a\cos\theta$ OK

$(r\cos\theta, r\,sen\,\theta, r) \neq (0,0,0) \Leftrightarrow r \neq 0 \Leftarrow r > 0$ OK

$(r\,sen\,\theta \neq 0$ o $r\cos\theta < 0) \Leftrightarrow \neg(r\,sen\,\theta = 0$ y $r\cos\theta \geq 0) \Leftrightarrow \neg\begin{pmatrix} sen\,\theta = 0 \\ \cos\theta \geq 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg(\theta = 0) \Leftrightarrow \theta \neq 0$ OK