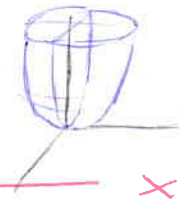
Ejercicio 4.- Calcular la integral de superficie

$\iint_S rot(3y, -xz, yz^2) \cdot d\vec{S}$ siendo S la superficie definida por

$2z = x^2 + y^2 \quad z \leq 2$



Sea $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$ un campo vectorial de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^3$.

Vamos a calcular esta integral de dos formas y veremos que los resultados son iguales. En primer lugar lo calcularemos directamente y en segundo lugar aplicando el Teorema de Stokes.

De la primera forma

$$\vec{G}(x,y,z) = rot(\vec{F}(x,y,z)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x)\vec{i} + 0\vec{j} + (-z-3)\vec{k}$$

y la superficie la podemos parametrizar como

$$\Phi_1 : (0, 2\pi) \times (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, r) \longrightarrow \Phi_1(\theta, r) = \left(r\cos\theta, r\,sen\theta, \frac{r^2}{2}\right)$$

Φ_1 es C_1 e inyectiva y $D = (0,2\pi) \times (0,2)$ es abierto y conexo y se verifica que $\Phi_1(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z = x^2 + y^2,\ z < 2\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ z \geq 0\}$ que el igual a S menos dos curvas en las que la integral no varía su cómputo.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= (-r\,sen\theta, r\cos\theta, 0) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= (\cos\theta, sen\theta, r) \end{aligned}\right\} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\,sen\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & sen\theta & r \end{vmatrix} =$$

$$= (r^2\cos\theta, r^2 sen\theta, -r)$$

Nótese que estamos considerando la normal exterior.