Como la función de distribución, en función de θ, es continua y monótona, entonces,

$$T(X_1 \cdots X_n, \theta) = -2 \sum_{i=1}^{n} Ln(F_\theta(X_i)) \sim \chi^2_{2n}$$

Por tanto $T = -2 \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i^\theta) = -2\theta \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i) \sim \chi^2_{2n}$.

Podemos escribir

$$P\{a \leq -2\theta \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i) \leq b\} = 1-\alpha$$

Es decir, $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1-\alpha$

$$a \leq -2\theta \sum_{i=1}^{n} Ln(X_i) \leq b \iff -\frac{a}{2\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)} \leq \theta \leq -\frac{b}{2\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)}$$

$-\sum Ln X_i > 0$ porque $X_i \in (0,1)$

Como este intervalo tiene que ser de longitud mínima, hay que minimizar la función $L(a,b) = -\frac{b}{2\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)} + \frac{a}{2\sum Ln(X_i)} =$

$$= \frac{1}{2\sum_{i=1}^{n} Ln(X_i)} (a-b).$$

Además tenemos la restricción $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) = 1-\alpha$, es decir, $F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) - 1 + \alpha = 0$.

Si consideramos la función $g(a,b) = F_{\chi^2_{2n}}(b) - F_{\chi^2_{2n}}(a) - 1 + \alpha$ podemos aplicar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange a la función $L(a,b)$ con la restricción $g(a,b) = 0$.