$f(0)=0$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{(z+2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z-0)^n \overset{\downarrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cancel{n!}(n-1)}{2^n}\cdot\frac{1}{\cancel{n!}}\cdot z^n =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n(n-1) \qquad \forall z\in D(0,2).$$

$\boxed{d)}$ $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$ $\qquad z_0=-1.$

holomorfa en $D(-1,2)$

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}=\frac{z^2-2z+1+2z-1}{z^2-2z+1}=1+\frac{2z-1}{(z-1)^2}=1+\frac{2}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}$$

Veamos que $f^{(n)}(z)=2(-1)^n n!\,(z-1)^{-n-1}+(-1)^n(n+1)!\,(z-1)^{-n-2}$.

Para $n=1$

$$f'(z)=2(-1)(z-1)^{-2}+(-2)\cdot(z-1)^{-3}=2\cdot(-1)\cdot 1!\cdot(z-1)^{-1-1}+(-1)\cdot 2!\cdot(z-1)^{-1-2}$$

Supuesto para n

$$f^{(n+1)}(z)=\frac{\partial}{\partial z}\left(2(-1)^n n!\,(z-1)^{-n-1}+(-1)^n(n+1)!\,(z-1)^{-n-2}\right)=$$

$$=2(-1)^n n!(-n-1)(z-1)^{-n-1-1}+(-1)^n(n+1)!(-n-2)(z-1)^{-n-2-1}=$$

$$=2(-1)^{n+1}(n+1)!\,(z-1)^{-(n+1)-1}+(-1)^{n+1}(n+2)\,(z-1)^{-(n+1)-2}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(-1)=2(-1)^n n!\,(-2)^{-n-1}+(-1)^n(n+1)!\,(-2)^{-n-2}=$$

$$=(-1)^n n!\,(-2)^{-n-1}\left(2+\frac{n+1}{2}\right)=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}}n!\left(\frac{n+5}{2}\right)=$$

$$=-\frac{(n+5)\cdot n!}{2^{n+2}}$$

I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura........ Fecha ....

Alumno/a .... Curso........ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

Por tanto

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(-1)}{n!}(z+1)^n \overset{f(-1)=1/4}{=} \frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(n+5)\,n!}{2^{n+2}}\frac{1}{n!}(z+1)^n=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+5)\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$$

3.- Sea f una función entera tal que $|f(z)|\geq|z|$ $\forall z\in\mathbb{C}$. ¿Qué se puede decir de f?

Si $z\neq 0 \iff |z|>0 \implies |f(z)|\geq|z|>0 \implies f(z)\neq 0$

Veamos que $f(0)=0$

Si $f(0)\neq 0$ entonces f no se anula en $\mathbb{C}$

Por tanto la función $g(z)=\dfrac{z}{f(z)}$ es entera, pero

$$|g(z)|\leq 1 \iff \left|\frac{z}{f(z)}\right|\leq 1 \iff |z|\leq|f(z)|$$

Por el Teorema de Liouville $g(z)$ es constante

Pero $g(0)=0$ y $g(1)=\dfrac{1}{f(1)}\neq 0$!!

Por tanto $f(0)=0$. Como f tiene un cero en 0

$\implies f(z)=z\cdot h(z)$ con $h(z)$ una función entera.

$$|f(z)|=|z\cdot h(z)|=|z|\cdot|h(z)|\geq|z| \implies |h(z)|\geq 1.$$