Primera Entrega

Juan Carlos Llamas Núñez

Ejercicio 1.-

$(X_1 \cdots X_n)$ mas $X \sim U(\theta, 4\theta)$. Demostrar que el estadístico $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente pero no completo.

$$F(x|\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \frac{x-\theta}{3\theta} & \text{si } x \in [\theta, 4\theta) \\ 1 & \text{si } x \geq 4\theta \end{cases} \Rightarrow f(x|\theta) = \frac{1}{3\theta} I_{[\theta, 4\theta)}(x)$$

Veamos cuál es la distribución conjunta de la muestra

$$f(x_1 \cdots x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3\theta} I_{[\theta,4\theta)}(x_i) = \left(\frac{1}{3\theta}\right)^n \cdot I_{(-\infty,4\theta)}(x_{(n)}) \cdot I_{[\theta,\infty)}(x_{(1)}).$$

Por el teorema de factorización, el estadístico $T(X_1 \cdots X_n) = (X_{(1)}, X_{(n)})$ es suficiente.

Sin embargo, no es completo. Un estadístico es completo si $\forall g(x_1 \cdots x_n)$ función real se verifica que $E_\theta[g(T)] = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ casi seguro.

Vamos a encontrar una función g que verifique que $E_\theta[g(T)] = 0$ pero g va a ser distinta de cero.

Primero vamos a calcular $E[X_{(1)}]$ y $E[X_{(n)}]$. Para ello necesitamos conocer las distribuciones de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - P\{x < X_{(1)}\} = 1 - P\{x < X_1, x < X_2 \cdots x < X_n\} =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(x < X_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} 1 - P(X_i \leq x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = -n(1-F(x))^{n-1} \cdot (-f(x)) = n\left(1 - \frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3\theta} \cdot I_{[\theta,4\theta)}(x).$$

De manera análoga

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = P\{X_1 \leq x, \cdots X_n \leq x\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leq x\} = F(x)^n$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = n\, F(x)^{n-1} \cdot f(x) = n \cdot \left(\frac{x-\theta}{3\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3\theta} I_{[\theta,4\theta)}(x).$$