Temas 3 y 4: Conjuntos, funciones y relaciones. Segunda parte

David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

RELACIONES N-ÁDICAS, N-ARIAS O DE N ARGUMENTOS

DEF:

Para cualquier $n \geq 2$ y cualesquiera conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$

- *Si $\mathcal{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, decimos que $\mathcal{R}$ es una* **relación n-ádica** *entre $A_1, A_2, \cdots, A_n$.*
- *Si $\mathcal{R} \subseteq A^n$, decimos que $\mathcal{R}$ es una* **relación n-aria** *sobre A.*
- *Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathcal{R}$, escribimos $\mathcal{R}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, y decimos que $x_1, x_2, \cdots, x_n$* **están relacionados** *por $\mathcal{R}$ o que la tupla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$* **cumple** *$\mathcal{R}$.*

Cuando $n = 2$ entonces se las llama **relaciones binarias** (conjuntos de pares ordenados).
Cuando $n = 3$ entonces se las llama **relaciones ternarias** (conjuntos de ternas ordenadas).

Siendo A y B dos conjuntos, y $\mathcal{R} \subseteq A \times B$,

- Si $(x, y) \in \mathcal{R}$, escribimos $\mathcal{R}(x, y)$, o bien $x\mathcal{R}y$, y decimos que x se relaciona con y o que x está relacionado con y según (o vía, o por, o mediante) $\mathcal{R}$, o que (x, y) cumple $\mathcal{R}$.
- Escribiremos $(x, y) \notin \mathcal{R}$, o $x \not\mathcal{R}\, y$ cuando x no se relaciona con y según (o vía, o por, o mediante) $\mathcal{R}$.
- $A \times B$ es en sí misma una relación: la relación universal que contiene todos los pares posibles. El caso opuesto es el de la relación vacía , que no contiene ningún par. Entre estos dos casos extremos se encuentran todas las demás relaciones entre A y B.

Definición de relaciones n-arias a partir de predicados n-arios (condición característica):

$$\mathcal{R}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv_{def} \cdots \text{ condición dependiente de } x_1, x_2, \cdots, x_n.$$

Ejs:

- Dado el predicado $casados(x, y)$, que es verdadero si y sólo si x e y están casados el uno con el otro, podemos definir a partir de él la correspondiente relación binaria:

$$M = \{(x, y)/casados(x, y)\}$$

- La relación de orden estricto $<$ entre números naturales es una relación binaria sobre $\mathbb{N}$.

$$x\mathcal{R}y \equiv_{def} x < y \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / x < y\} \qquad \mathcal{R} \equiv_{not} < .$$

- Para $A = \{2, 3, 4, 6\}$, si definimos $x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \mid y \quad (x, y \in A)$, tendríamos

$$\mathcal{R} = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(6,6)\}$$

- Relación ternaria sobre $\mathbb{Z}$:

$mcd(x, y, z) \equiv_{def} z$ es el máximo común divisor de $x, y \quad (x, y, z \in \mathbb{Z})$

$$mcd = \{(x, y, z) / \, z = m.c.d.(x, y)\}$$

Siendo $\mathcal{R}$ una relación entre A y B, a A se le denomina espacio de dominio de $\mathcal{R}$ y a B espacio de rango. El dominio y rango de $\mathcal{R}$ serán subconjuntos más precisos de esos dominios.

Def:

Siendo $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación binaria entre A y B,

- *El* **dominio** *de $\mathcal{R}$ es*

$$dom(\mathcal{R}) = \{x \in A / \; x\mathcal{R}y \; \text{para algún } y \in B\}$$
$$= \{x \in A \;/\; \exists y \in B \;\; (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

- *El* **rango** *de $\mathcal{R}$ es*

$$ran(\mathcal{R}) = \{y \in B / \; x\mathcal{R}y \; \text{para algún } x \in A\}$$
$$= \{y \in B \;/\; \exists x \in A \;\; (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

Ejs.

- Para $x\mathcal{R}y \equiv_{def} x < y \quad (x, y \in \mathbb{N})$, tenemos

$$dom(<) = \mathbb{N}, \quad ran(<) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Siendo $A = \{2, 3, 4, 6\}, \quad x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \mid y \quad (x, y \in A)$,

$$dom(\mathcal{R}) = A, \quad ran(\mathcal{R}) = A$$

Def:

Dadas las relaciones $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq A \times B$, *se define:*

- **relación unión** $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$

$$x\,(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})\,y \equiv_{def} (x\mathcal{R}y) \vee (x\mathcal{S}y) \qquad ((x,y) \in A \times B)$$

- **relación intersección** $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$

$$x\,(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})\,y \equiv_{def} (x\mathcal{R}y) \wedge (x\mathcal{S}y) \qquad ((x,y) \in A \times B)$$

- **relación diferencia** $\mathcal{R} \setminus \mathcal{S}$

$$x\,(\mathcal{R} \setminus \mathcal{S})\,y \equiv_{def} (x\mathcal{R}y) \wedge (x \not\mathcal{S}\, y) \qquad ((x,y) \in A \times B)$$

- **relación complemento** $\setminus\mathcal{R} = (A \times B) \setminus \mathcal{R}$

$$x\,(\setminus\mathcal{R})\,y = x\,((A \times B) \setminus \mathcal{R})\,y \equiv_{def} (x \not\mathcal{R}\, y) \qquad ((x,y) \in A \times B)$$

Def:

Dadas las relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ *y* $\mathcal{S} \subseteq B \times C$, *se define:*

- **relación inversa** *de* $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{-1}$,
$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in (B \times A)/(x,y) \in \mathcal{R}\}, \text{ es decir}$$
$$y\, \mathcal{R}^{-1}\, x \sim x\mathcal{R}y$$
- **relación composición o producto** *de* $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$,
$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x,z) \in A \times C \;/\; \exists y \in B \;\; (x,y) \in \mathcal{R}, (y,z) \in \mathcal{S}\}$$
es decir
$$x\, (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\, z \sim \exists y \in B \;\; ((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{S}z))$$

Def:

Dado un conjunto A *se define la relación* id_A **identidad** *sobre* A *o* **diagonal** *de* A:
$$id_A = \{(x,x)/x \in A\}$$

Ej:

Espacios de dominio: $X = \{a, b, c\}, \quad Z = \{a, b\}$
Espacios de rango: $Y = \{A, B, C\}, \ V = \{B, C\}$
Relaciones: $\mathcal{R} \subseteq X \times Y, \quad \mathcal{S} \subseteq Z \times V \subseteq X \times Y$

$$\mathcal{R} = \{(a, A), (a, B), (b, C)\} \quad \mathcal{S} = \{(a, B), (b, C)\}$$

$$\backslash \mathcal{S} = (A \times V) \setminus \mathcal{S} = \{(a, C), (b, B)\}$$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(a, A), (a, B), (b, C)\}$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(a, B), (b, C)\}$$

$$\mathcal{R} \setminus \mathcal{S} = \{(a, A)\}$$

$$\mathcal{S}^{-1} = \{(B, a), (C, b)\}$$

$$id_Z = \{(a, a), (b, b)\}$$

Ej:

Espacios de dominio y de rango: $\mathbb{N}$
Relaciones: $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}^2$

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(3,4),(2,2)\} \quad \mathcal{S} = \{(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)\}$$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(1,5),(3,2),(2,5)\}$$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(4,2),(3,2),(1,4)\}$$

Luego la composición de relaciones **no es** en general conmutativa.

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \{(3,2)\} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(1,2),(2,2)\}$$

Algunas propiedades de la composición y la inversa de relaciones

Dadas las relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times B, \mathcal{S} \subseteq B \times C, \mathcal{T} \subseteq C \times D$, se tiene:

1. $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$
2. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$ (Asociatividad de $\circ$)
3. $id_A \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ id_B = \mathcal{R}$
4. $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$
5. $dom(\mathcal{R}^{-1}) = ran(\mathcal{R}), \quad ran(\mathcal{R}^{-1}) = dom(\mathcal{R})$

Dem de 2.:

$$
\begin{aligned}
x\,((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{T})\,z \quad &\sim \exists y\in C \quad ((x\,(\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\,y)\wedge(y\mathcal{T}z))\\
&\sim \exists y\in C \quad ((\exists w\in B \quad (x\mathcal{R}w)\wedge(w\mathcal{S}y))\wedge(y\mathcal{T}z))\\
&\sim \exists y\in C \quad \exists w\in B \quad ((x\mathcal{R}w)\wedge(w\mathcal{S}y)\wedge(y\mathcal{T}z))\\
&\sim \exists w\in B \quad ((x\mathcal{R}w)\wedge(\exists y\in C \quad (w\mathcal{S}y)\wedge(y\mathcal{T}z)))\\
&\sim \exists w\in B \quad ((x\mathcal{R}w)\wedge(w\,(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})\,z))\\
&\sim x\,(\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{T}))\,z
\end{aligned}
$$

Dem de 4.:

$$\begin{aligned} x\,((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})^{-1})\,y &\sim y\,(\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\,x \\ &\sim \exists z\in B \quad ((y\mathcal{R}z)\wedge(z\mathcal{S}x)) \\ &\sim \exists z\in B \quad ((z\mathcal{S}x)\wedge(y\mathcal{R}z)) \\ &\sim \exists z\in B \quad ((x\mathcal{S}^{-1}z)\wedge(z\mathcal{R}^{-1}y)) \\ &\sim x\,(\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{R}^{-1})\,y \end{aligned}$$

Algunas propiedades destacables que pueden cumplir las relaciones binarias sobre un conjunto A (1)

DEF:

Sea $\mathcal{R} \subseteq A \times A$; *decimos que* $\mathcal{R}$ *es*

- **reflexiva** *sii* $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$
- **antirreflexiva** *sii* $\nexists x \in A \quad x\mathcal{R}x$
- **simétrica** *sii* $\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \to y\mathcal{R}x$
- **antisimétrica** *sii* $\forall x, y \in A \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \to x = y)$
- **transitiva** *sii* $\forall x, y, z \in A \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z)$
- **conexa** *sii* $\forall x, y \in A, \quad x \neq y,$ *se cumple* $(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$

Ej:

- Dado $\mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \leq y \quad (x, y \in \mathbb{N})$
  Es reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa.
  Pero no es simétrica: $2 \leq 5$ pero $5 \not\leq 2$.
- Dado $C = \{A \in \wp(\mathbb{N}))/A \neq \phi\}$, $\quad A\,\mathcal{R}\,B \equiv_{def} (A \cap B = \phi)$
  Es antirreflexiva y simétrica.
  Pero no es transitiva y no es conexa: Para
  $A = \{1, 2\},\ B = \{3, 4\},\ C = \{1\} : A \cap B = B \cap C = \phi,\ A \cap C = \{1\}$
  Luego $A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C$ pero $A \not\mathcal{R} C$.
  ¿Es antisimétrica?
- Dado $A = \{1, 2\}$, $\quad \mathcal{R} = \{(1, 1)\}$
  No es reflexiva $((2, 2) \notin \mathcal{R})$ y no es antirreflexiva $((1, 1) \in \mathcal{R})$.
  Es simétrica, antisimétrica y transitiva.
  No es conexa: $(1 \not\mathcal{R}\, 2$ y $2 \not\mathcal{R}\, 1)$.

Ej:

- Dado $A = \{1, 2\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2)\}$, $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 1)\}$,

  $\mathcal{R}$ es simétrica, antisimétrica , reflexiva y transitiva.
  $\mathcal{R}$ no es conexa. $(1 \not\mathcal{R} 2$ y $2 \not\mathcal{R} 1)$

  $\mathcal{S}$ es simétrica, antirreflexiva y conexa.
  $\mathcal{S}$ no es transitiva ($(1, 2), (2, 1) \in \mathcal{S}$, pero $(1, 1) \notin \mathcal{S}$),
  ni antisimétrica: ($(1, 2), (2, 1) \in \mathcal{S}$, pero $1 \neq 2$).

Def:

Dado un conjunto A y $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, decimos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Notación: Para referirse a una relación de equivalencia suele utilizarse el símbolo $\sim$ en lugar de $\mathcal{R}$.

Ej: Las siguientes relaciones son de equivalencia:

1. Las identidades id_A, para todo conjunto A.
2. Sobre $\mathbb{Z}$, la relación $\mathcal{R} = \{(x, y)/ \, |x| = |y|\}$.
3. Sobre $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441\}$, la relación
   $x \sim y \equiv_{def}$ x e y tienen los mismos divisores primos.
4. Sobre $\mathbb{Z}$, dado $p \in \mathbb{N}_1$, la relación
   $$\equiv_p = \{(x, y) \; / \; p \,|\, (y - x)\}$$

Dem de 4.:

- **Reflexiva:** $x \equiv_p x$ ya que $p \,|\, (x-x)$ (Todo número entero es divisor del 0)
- **Simétrica:**

$$\begin{aligned} x \equiv_p y \quad & \sim \; p \,|\, (y-x) \\ & \sim \; \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = k \cdot p \\ & \rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} \quad x - y = k' \cdot p \\ & \sim \; p \,|\, (x-y) \\ & \sim \; y \equiv_p x \end{aligned}$$

- **Transitiva:**

$$\left.\begin{array}{lll} x \equiv_p y & \rightarrow \; \exists k \in \mathbb{Z} & y - x = k \cdot p \\ y \equiv_p z & \rightarrow \; \exists k' \in \mathbb{Z} & z - y = k' \cdot p \end{array}\right\} \rightarrow \exists k, k' \in \mathbb{Z} \quad z - x = (k' + k) \cdot p$$

$$\rightarrow \exists k'' \in \mathbb{Z} \quad z - x = k'' \cdot p$$

$$\sim \; x \equiv_p z$$

Ej: Las siguientes relaciones no son de equivalencia:

1. Sobre $\mathbb{N}$, $\mid = \{(x, y) \,/\, x \mid y\}$
   $\mid$ es reflexiva y transitiva,
   pero no es simétrica:
   $((1, 5) \in \mid$, pero $(5, 1) \notin \mid$, ya que $1|5$ pero $5 \not| 1)$

2. Sobre $\mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \equiv_{def} x \leq y$
   No es simétrica

3. Sobre $\mathbb{N}$, $x\mathcal{R}y \equiv_{def} x < y$
   No es ni reflexiva ni simétrica

4. Dado $C = \{A \in \wp(\mathbb{N}) \,/\, A \neq \phi\}$, $\quad A\mathcal{R}B \equiv_{def} (A \cap B = \phi)$
   No es transitiva

Def:

Sean un conjunto A y una relación de equivalencia $\sim$ sobre A. Para cada $x \in A$, la **clase de equivalencia** *de x se define como*

$$[x] =_{def} \{y \in A \,/ x{\sim}y\}$$

Notación: $[x]_{\sim}$ si fuese necesario por claridad.

Ej:

1) Para toda relación de identidad id_A:

$$[x] = \{x\} \quad \forall x \in A$$

2) Dados $\mathbb{Z}$ y $\mathcal{R} = \{(x, y) \,/\, |x| = |y|\}$

$$[x] = \{x, -x\} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$
$$[0] = \{0\}$$

3) Para $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441\}$ y la relación

$x \sim y \equiv_{def}$ x e y tienen los mismos divisores primos

$$[6] = [12] = [18] = \{6, 12, 18\}$$
$$[10] = [40] = \{10, 40\}$$
$$[21] = [441] = \{21, 441\}$$

4) Sobre $\mathbb{Z}$, dada $\equiv_2 \; = \{(x,y) \,/\, 2 \,|\, (y-x)\}$,

$$[0]_{\equiv_2} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \,|\, (y-0)\} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 2 \,|\, y\} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, y \text{ es par }\}$$

$$[1]_{\equiv_2} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, 2|(y-1)\} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, \exists c \in \mathbb{Z} \quad y-1 = 2 \cdot c\}$$

$$= \{y \in \mathbb{Z} \,/\, \exists c \in \mathbb{Z} \quad y = 2 \cdot c + 1\} = \{y \in \mathbb{Z} \,/\, y \text{ es impar }\}$$

Propiedades de las clases de equivalencia

Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto A, las clases de equivalencia $[x]$ inducidas por $\sim$ verifican las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y \in A$:

1. $x \in [x]$, y por tanto $[x] \neq \phi$
2. $x \sim y \leftrightarrow [x] = [y]$
3. $x \not\sim y \leftrightarrow [x] \cap [y] = \phi \leftrightarrow [x] \neq [y]$
4. Y por todo ello, las clases de equivalencia definen una partición de A.

Dem de 2:

$\rightarrow)$ $x \sim y \rightarrow [x] \subseteq [y]$ y $[y] \subseteq [x]$

$\subseteq)$ $z \in [x] \rightarrow x \sim z$ (def. de $[x]$)
$\rightarrow y \sim z$ ($x \sim y \rightarrow y \sim x$ por simetría de $\sim$ y transitividad de $\sim$)
$\rightarrow z \in [y]$ (def. de $[y]$)

Luego $[x] \subseteq [y]$

$\supseteq)$ Basta observar que $x \sim y \rightarrow y \sim x$

$\leftarrow)$ $[x] = [y] \rightarrow x \sim y$

$[x] = [y] \rightarrow y \in [x]$ (por 1))
$\rightarrow x \sim y$ (por def. de $[x]$)

Dem de 3:

$\rightarrow)$ Por contraposición: $[x] \cap [y] \neq \phi \rightarrow x \sim y$

$$\begin{aligned}
[x] \cap [y] \neq \phi \quad & \rightarrow \exists z \in [x] \cap [y] \\
& \rightarrow \exists z \;\; (x \sim z) \wedge (y \sim z) \\
& \rightarrow \exists z \;\; (x \sim z) \wedge (z \sim y) \\
& \rightarrow \;\; x \sim y
\end{aligned}$$

$\leftarrow)$ $[x] \cap [y] = \phi \rightarrow y \notin [x] \quad (por 1)$

$$\rightarrow x \nsim y$$

DEF:

Sean A un conjunto, y una relación de equivalencia $\sim$ sobre A. La familia de subconjuntos de A formada por todas las clases de equivalencia de $\sim$ se llama **conjunto cociente** *de A con respecto a $\sim$ y se denota por*

$$A/\sim \;=_{def} \{[x] \;/\; x \in A\}$$

Si $C \in A/\sim$ y $C = [x]$ se dice que x es un representante de la clase C.

Ej:

1) Dados un conjunto A y $\mathcal{R} = id_A$

$$A/\mathcal{R} = \{[x] \ / \ x \in A\} = \{ \ \{x\} \ / \ x \in A \ \}$$

2) Dados $\mathbb{Z}$ y $\mathcal{R} = \{(x, y) \, / \, |x| = |y|\}$

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{[x] \ / \ x \in \mathbb{Z}\} = \{ \ \{0\} \ \} \cup \{ \ \{x, -x\} \ / \ x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

3) Dado $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441\}$

$x \sim y \ \equiv_{def} \ x$ e y tienen los mismos divisores primos

$A/\sim \ = \{C_1, C_2, C_3\}$ donde $C_1 = [6] = \{6, 12, 18\}$
$C_2 = [10] = \{10, 40\}$
$C_3 = [21] = \{21, 441\}$

4) Sobre $\mathbb{Z}$, dada $\equiv_2 \ = \{ \, (x, y) \ / \ 2 \, | \, (y - x) \, \}$

$$\mathbb{Z}/\equiv_2 \ = \{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\}$$

donde

$$[0]_{\equiv_2} = \{ \, y \in \mathbb{Z} \ / \ y \text{ es par } \}$$

$$[1]_{\equiv_2} = \{ \, y \in \mathbb{Z} \ / \ y \text{ es impar } \}$$

Teorema

1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto A, entonces $A/\sim$ es una partición de A.
2. Si $C = \{B_1, B_2, \cdots\}$ es una partición de A, entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ sobre A tal que $A/\sim = C$.

Dem de 1: En virtud de las propiedades de las clases de equivalencia, tenemos

1) $\forall x \in A \;\; x \in [x]$
y
2) $\forall x, y \in A \;\; [x] \neq [y] \leftrightarrow x \not\sim y \leftrightarrow [x] \cap [y] = \phi$

Es decir dos clases de equivalencia distintas son disjuntas y todo elemento de A pertenece a alguna clase de equvalencia y ninguna clase de equivalencia está vacía.

Luego $A/\sim$ es una partición de A.

Dem de 2:

Como C es partición de A se tiene que $\forall x \in A$ existe un único i tal que $x \in B_i$. Llamémosle B_x.
Defino $\sim \subseteq A \times A$ así:

$$x \sim y \equiv_{def} \exists i \ \ ((x \in B_i) \wedge (y \in B_i))$$

$$\leftrightarrow B_x = B_y$$

- $\sim$ es claramente de equivalencia
- $\forall x \in A \quad [x]_\sim = B_x$

  Dem: $\forall x \in A \quad [x]_\sim = \{y \in A \ / \ x \sim y\} = \{y \in A \ / \ B_x = B_y\}$
  Veamos $[x]_\sim = \{y \in A \ / \ B_x = B_y\} = B_x$

  $\subseteq$) $y \in [x]_\sim \to y \in B_y = B_x$
  $\supseteq$) $y \in B_x \to B_x \cap B_y \neq \phi \to B_x = B_y$ (C es partición de A) $\to y \in [x]_\sim$

  Luego $A/\!\sim\, = C$
- $\sim$ es la única relación de equivalencia tal que $A/\!\sim\, = C$
  Ej: Demuestra esta última afirmación por reducción al absurdo.

DEF:

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ *y* $p \in \mathbb{Z}_1$ *decimos que a es congruente con b módulo p, y lo denotamos* $a \equiv_p b$ *(o* $a \equiv b \pmod{p}$*), si* $p \mid (b - a)$.

Ej: $3 \equiv_2 7, \quad -28 \equiv_3 17, \quad 32 \equiv_7 25$

Teorema Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{Z}_1$

1. $a \equiv_p b \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \;\; b = a + k \cdot p$
2. $a \equiv_p b \leftrightarrow a \bmod p = b \bmod p$