I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura........ Fecha ....

Alumno/a .... Curso........ Nº........

Apellidos Nombre

Calificación

$\boxed{2.-}$ Demuestra que si la serie $\sum c_n$ converge y $|\arg c_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ entonces la serie converge absolutamente.

Sabemos que una serie de números complejos converge si y solo si convergen su parte real y su parte imaginaria.

Por tanto, $\sum Re(c_n)$ y $\sum Im(c_n)$ convergen.

Además $\arg(c_n) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Como

$$c_n = |c_n| \cdot \left(\cos(\arg(c_n)) + i \,\mathrm{sen}(\arg(c_n)) \right) = Re(c_n) + i\, Im(c_n)$$

y el $\cos x > 0$ si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow Re(c_n) > 0$

Por tanto $\sum Re(c_n)$ converge absolutamente

Por otro lado

$$\frac{Im(c_n)}{Re(c_n)} = tg(\arg(c_n)) \Leftrightarrow Im(c_n) = tg(\arg(c_n))\, Re(c_n)$$

$$|Im(c_n)| = |tg(\arg(c_n))|\, |Re(c_n)| \underset{\uparrow}{=} tg(|\arg(c_n)|) \cdot Re(c_n) \underset{\uparrow}{\leq} tg(\alpha) \cdot Re(c_n)$$

Si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\arg(c_n) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y

$$|tg\, x| = \left\{ \begin{array}{ll} tg\, x & si\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -tg\, x & si\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \end{array} \right\} \underset{\uparrow}{=} tg|x|$$

tg impar

$tg(x)$ creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Como la serie $\sum Re(c_n)$ converge y $tg(\alpha)$ es una constante positiva entonces la serie $\sum Im(c_n)$ converge absolutamente.

Por tanto

$|c_n| = |Re(c_n) + i\, Im(c_n)| \leq |Re(c_n)| + |Im(c_n)|$. Como $\sum Re(c_n)$ y $\sum Im(c_n)$ convergen absolutamente entonces $\sum |c_n|$ converge.

$\boxed{3.-}$ Supongamos que las series $\sum c_n$ y $\sum c_n^2$ convergen. Demuestra que si $Re(c_n) \geq 0$ entonces la serie $\sum |c_n|^2$ también converge.

Sabemos que una serie de números complejos converge si y solo si la serie de su parte real y la serie de su parte imaginaria converge.

Por tanto $\sum Re(c_n)$, $\sum Im(c_n)$, $\sum Re(c_n^2)$ y $\sum Im(c_n^2)$ convergen.

Sabemos que si una serie numérica de reales $a_n \geq 0$ converge entonces la serie de sus cuadrados a_n^2 también converge.

Esto es claro porque si $\sum a_n$ converge entonces $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ y a partir de un n_0 suficientemente grande $a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n < 1$.

Como $\sum a_n$ converge, por el criterio de comparación $\sum a_n^2$ también converge.