Método de la Restricción Artificial

El Método de la Restricción Artificial, se utiliza para resolver un problema de programación lineal mediante el Algoritmo Dual del Simplex, cuando no se dispone inicialmente de una solución básica factible-dual. La utilidad del Método de la Restricción Artificial, respecto del Algoritmo Dual del Simplex, es análoga a la del Método de las Penalizaciones, respecto del Algoritmo Primal del Simplex.

Se considera el problema (P) de minimización en forma estándar

$$\begin{aligned} \min \quad & c^t x \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y se considera, la base B de la matriz A, como base inicial para la resolución del problema. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la base B está formada por las m primeras columnas de A, formulándose el problema en la forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & (c_B^t,\ c_N^t)\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \\ \text{s.a.:} \quad & Bx_B + Nx_N = b \\ & x_B \geq 0,\ x_B \geq 0. \end{aligned}$$

Se supone que la solución básica asociada a la base B

$$\bar{x}_B = B^{-1}b\,, \quad \bar{x}_N = 0$$

no es solución básica factible-dual.

Es decir, el vector

$$\bar{\lambda}^t := c_B^t B^{-1}$$

no es solución factible del problema dual.

Se puede modificar el problema anterior, añadiendo una restricción adicional que permite generar una solución básica factible-dual. A partir de dicha solución, se puede aplicar el Algoritmo Dual del Simplex para resolver el problema.

La restricción que se añade es:

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_j \leq M$$

siendo M una constante positiva tan grande como se quiera. Se denota por x_0 a la variable de holgura de la restricción anterior (restricción artificial).

Denotamos por P_M al problema resultante de añadir al problema P la restricción artificial, es decir, se añade al problema P

$$x_0 + \sum_{j=m+1}^{n} x_j = M, \quad x_0 \geq 0 .$$

La tabla del Simplex del problema P, asociada a la base B, es de la forma

	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$\cdots$	$y_{1,k}$	$\cdots$	$y_{1,n}$	$\overline{x}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_l	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$y_{l,m+1}$	$\cdots$	$y_{l,k}$	$\cdots$	$y_{l,n}$	$\overline{x}_l$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$\cdots$	$y_{m,k}$	$\cdots$	$y_{m,n}$	$\overline{x}_m$
	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\overline{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\overline{c}_k$	$\cdots$	$\overline{c}_n$	$z - c_B^t \overline{x}_B$

Puesto que la solución básica, asociada a la base B, no es factible-dual, algún coste reducido es negativo.

Añadiendo la restricción artificial, como primera restricción, y considerando x_0 como primera variable básica, tenemos la tabla del Simplex del problema P_M , asociada a la base resultante de ampliar la base B con una primera columna asociada a la variable x_0 .

	x_0	x_1	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_0	1	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	1	$\ldots$	1	M
x_1	0	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$y_{1,m+1}$	$\cdots$	$y_{1,k}$	$\cdots$	$y_{1,n}$	$\overline{x}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_l	0	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$y_{l,m+1}$	$\cdots$	$y_{l,k}$	$\cdots$	$y_{l,n}$	$\overline{x}_l$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$y_{m,m+1}$	$\cdots$	$y_{m,k}$	$\cdots$	$y_{m,n}$	$\overline{x}_m$
	0	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\overline{c}_{m+1}$	$\cdots$	$\overline{c}_k$	$\cdots$	$\overline{c}_n$	$z - c_B^t \overline{x}_B$

Se ejecuta un pivotaje en el que sale de la base la variable x_0 y entra en la base la variable x_k, determinándose k de la siguiente forma:

$$\bar{c}_k = \min_j \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j < 0 \}.$$

(Si el problema inicial es de maximización, se determina k, de forma que se verifique

$$\bar{c}_k = \max_j \{ \bar{c}_j \mid \bar{c}_j > 0 \}.)$$

Después del pivotaje, los nuevos costes reducidos verifican

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \bar{c}_k \geq 0 \quad \text{para } j = m+1, \ldots, n$$

siendo $\bar{c}'_0 = -\bar{c}_k$ el nuevo coste reducido de la variable x_0.

El pivotaje efectuado, permite encontrar una base factible-dual y, a partir de dicha base se resuelve el problema P_M aplicando el Algoritmo Dual del Simplex.

Observación: *P* es infactible, si y sólo si, P_M es infactible.

($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Si *P* es factible, siendo $\tilde{x}$ una solución factible. Definiendo

$$\tilde{x}_0 = M - \sum_{j=m+1}^{n} \tilde{x}_j$$

se tiene una solución factible de P_M, puesto que *M* se puede elegir suficientemente grande para que $\tilde{x}_0$ sea no negativo.

La aplicación del Algoritmo Dual del Simplex en la resolución del problema P_M, puede finalizar de alguna de las siguientes formas:

a) El problema P_M es infactible y, por tanto, *P* es infactible.

b) La última tabla del Simplex presenta solución óptima del problema P_M, siendo x_0 variable básica. En este caso, la base óptima es de la forma

$$\underline{B}_M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \beta^t \\ \hline 0 & \underline{B} \end{array}\right), \text{ siendo su inversa } \quad \underline{B}_M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\beta^t \underline{B}^{-1} \\ \hline 0 & \underline{B}^{-1} \end{array}\right)$$

Por tanto, la solución óptima del problema P_M es:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -\beta^t \underline{B}^{-1} \\ \hline 0 & \underline{B}^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} M \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - \beta^t \underline{B}^{-1} b \\ \underline{B}^{-1} b \end{pmatrix}$$

siendo el valor óptimo de la función objetivo:

$$c_{\underline{B}}^t \underline{B}^{-1} b \ .$$

Por tanto, el valor óptimo de la función objetivo no depende de *M*. La solución óptima de *P*, se obtiene, eliminando la componente asociada a x_0 de la solución óptima del problema P_M.

c) La última tabla del Simplex presenta solución óptima del problema P_M, no siendo x_0 variable básica. En esta situación, los valores de las variables básicas dependen de *M*. Pueden presentarse dos casos:

i) El valor óptimo de la función objetivo depende de *M*, por lo que dicho valor decrecerá infinitamente al aumentar *M*. En este caso, el problema *P* tiene solución no acotada.

ii) El valor óptimo de la función objetivo no depende de *M*, por tanto, el problema *P* tiene solución óptima. Al depender de *M*, los valores de las variables básicas, la solución óptima no es única.