DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO Y MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Análisis de Variable Real. Curso 18–19.
Conjuntos y funciones. Principio de Inducción. Hoja 1

1 *Sea* $A = \{n : n \in \mathbb{N}, n \leq 20\}$, $B = \{3n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ *and* $C = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. *Describir los conjuntos:*

i) $A \cap B \cap C$, *ii)* $(A \cap B) \setminus C$ *iii)* $(A \cap C) \setminus B$

2 *Mediante diagramas, identifica los siguientes conjuntos:*

i) $A \setminus (B \setminus A)$, *ii)* $A \setminus (A \setminus B)$, *iii)* $A \cap (B \setminus A)$.

3 *Sea* $f : A \to B$ *una función.*

i) Probar que si $E, F \subset A$ *entonces se tiene* $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$ *y* $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.

ii) Comprobar que si tenemos la función $f(x) = x^2$ *y definimos los conjuntos* $E = [-1, 0]$, $F = [0, 1]$ *se tiene* $f(E \cap F) \subsetneq f(E) \cap f(F)$.

iii) Probar que si además f *es inyectiva entonces se tiene* $f(E \cap F) = f(E) \cap f(F)$.
iv) Generaliza lo anterior para una familia arbitraria de conjuntos $E_i \subset A$, $i \in I$ *(conjunto de indices), probando que*

$$f(\cup_{i\in I} E_i) = \cup_{i\in I} f(E_i), \qquad f(\cap_{i\in I} E_i) \subset \cap_{i\in I} f(E_i)$$

y que si f *es inyectiva se da la igualdad en la última expresión.*

4 *Sean* A *e* B *son dos conjuntos y* $f : A \to B$ *una aplicación (o función). Si* $G \subset B$ *definimos la preimagen de* G *por* f *como*

$$f^{-1}(G) = \{x \in A, \ f(x) \in G\} \subset A.$$

Si $G, H \subset B$ *probar que entonces se tiene*

$$f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H), \qquad f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$$

Probar que para una familia arbitraria de conjuntos $C_i \subset B$, $i \in I$ *(conjunto de indices), se tiene*

$$f^{-1}(\cup_{i\in I} C_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \qquad f^{-1}(\cap_{i\in I} C_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(C_i)$$

5 *Consideremos la función* $f(x) = 1/x^2$ *definida para* $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
i) Si $E = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$, *calcular la imagen de* E *mediante* f, *es decir* $f(E)$.
ii) Si $G = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$, *calcular la imagen inversa de* G, *es decir* $f^{-1}(G)$.
Interpretar ambos resultados utilizando la gráfica aproximada de la función f.

6 *Con* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, \ x > 0\}$, *¿es la aplicación* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *definida por* $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ *inyectiva? ¿Es suprayectiva?*

7 *Estudiar si las siguientes funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *son inyectivas, suprayectivas, biyectivas. Calcular en cada caso el rango de la función:*
i) e^x *ii)* e^{-x} *iii)* $\operatorname{sen}(x)$ *iv)* $\cos(x)$ *v)* e^{-x^2} *vi)* $\frac{1}{1+x^2}$

8 *Encontrar una aplicación biyectiva entre* $A = \{x \in \mathbb{R}, \ 2 < x < 3\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{R}, \ 5 < x < 10\}$

9 *Comprueba que* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ *es una biyección de* $\mathbb{R}$ *en* $I = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$.
A partir de este ejemplo construye una biyección entre $\mathbb{R}$ *e* $I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

10 *Construye una biyección entre el conjunto de los números naturales* $\mathbb{N}$ *y*
i) El conjunto de los números naturales pares.
ii) El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$
iii) El conjunto de los cuadrados: $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$
iv) El conjunto de los números naturales impares mayores que 10

11 *Dar un ejemplo de una colección numerable de conjuntos finitos cuya unión no es finita.*

12 *Dar una demostración rigurosa del siguiente resultado: si* S *y* T *son conjuntos numerables disjuntos entonces* $S \cup T$ *es un conjunto numerable. ¿Y si no son disjuntos?*

13 *Un polinomio con coeficientes enteros de grado* $n \in \mathbb{N}$ *es una función* $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de la forma:*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_j \in \mathbb{Z}$ *para todo* $j = 0, 1, \ldots, n$ *y* $a_n \neq 0$. *Un número algebraico es un número real que es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros. Un número transcendente es un número real que no es algebraico.*

Se pide:
i) Probar que para n *fijo el conjunto* $\mathbb{P}_n = \{P_n$*, polinomio de grado* n *con coeficientes enteros*$\}$ *es un conjunto numerable.*
ii) Utilizando que un polinomio de grado n *tiene como máximo* n *raices reales, probar que el conjunto de números algebraicos es numerable y por tanto el conjunto de los números transcendentes es no numerable.*

14 *Dado el conjunto* S *siguiente, escribir en detalle el conjunto* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *(el conjunto de las partes de* S*) y calcular el número de elementos que tiene:*
i) $S := \{1, 2\}$ *ii)* $S := \{1, 2, 3\}$ *iii)* $S := \{1, 2, 3, 4\}$

15 *Probar por inducción que si un conjunto* S *tiene* n *elementos entonces* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *tiene* 2^n *elementos. Concluir del Ejercicio 18 que para todo conjunto finito* $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *tiene más elementos que* S.

16 *Demostrar que*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Usando esto, deducir y demostrar una fórmula para la suma de los N *primeros numeros pares y otra para la de los* N *primeros numeros impares.*

17 *Probar por inducción lo siguiente:*
i) $n^3 + 5n$ *es divisible por 6 para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) $5^{2n} - 1$ *es divisible por 8 para todo* $n \in \mathbb{N}$.

18 *Prueba que*
i) $n < 2^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) $2^n < n!$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

19 *Probar por inducción lo siguiente:*
i) $\displaystyle \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) $\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
iii) $\displaystyle 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = [\frac{1}{2} n(n+1)]^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Relaciona este resultado con el del Ejercicio 16.*
iv) $\displaystyle \sum_{i=0}^{n} z^i = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
v) $\displaystyle \sum_{n=N}^{M} z^n = \frac{z^N - z^{M+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1$ *para todo* $N, M \in \mathbb{N}$, *con* $M > N$.

20 *Los números combinatorios se definen como* $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{(n-j)!\,j!}$ *para* $j, n = 0, 1, \ldots$ *y con* $j \leq n$*, siendo* $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots 2 \cdot 1$ *y con el convenio de que* $0! = 1$*. Se pide,*

i) Calcular los números combinatorios para $0 \leq j \leq n \leq 5$*.*

ii) Probar que para $0 \leq j \leq n$*, se tiene* $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$.

iii) Probar que para $1 \leq j \leq n-1$*, se tiene* $\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}$.

iv) Probar por inducción la fórmula conocida como el Binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}\, y^j, \qquad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

21 *Demuestra que*

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2n = \prod_{j=1}^{n} 2j = 2^n n! \qquad y \qquad 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) = \prod_{j=1}^{n} (2j+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

22 *Halla todos los numeros naturales* n *que verifican* $n^2 < 2^n$*.*