Examen Estadística

Pregunta 1.-

$$f(x|\theta) = \theta x\, e^{-\frac{\theta}{2}x^2} \qquad x>0 \quad \theta>0$$

mas $(X_1 - - X_n)$

a) Estadístico suficiente y completo y distribución.

$$f(x_1 - - x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i\, e^{-\frac{\theta}{2}x_i^2} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por el Teorema de factorización, el estadístico

$T(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es suficiente.

Como estamos en la familia exponencial uniparamétrica, será además completo si la imagen de $q(\theta) = -\frac{\theta}{2}$ contiene un rectángulo abierto de $\mathbb{R}$. Esto es así ya que

$Im(q) = (-\infty, 0)$ que contiene un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Por tanto $T(X_1 - - X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ es un estadístico suficiente y completo.

Para calcular su distribución realizamos el cambio $Y = X^2$ y calculamos primero la distribución de Y.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) \underset{\underset{y>0}{\uparrow}}{=} P(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}).$$

Juan Carlos Llamas Núñez Juan Carlos 11867802-D