

Lógica Matemática para Informáticos

Ejercicios propuestos

Teresa Hortalá González

Narciso Martí Oliet

Miguel Palomino Tarjuelo

Mario Rodríguez Artalejo

Rafael del Vado Vírseda

*Departamento de Sistemas Informáticos y Computación
Universidad Complutense de Madrid*

Parte I

LÓGICA PROPOSICIONAL



SINTAXIS Y SEMÁNTICA

CAPÍTULO

1

1.1. PREGUNTAS DE TEST

- 1.1.** La cadena de símbolos $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$ formada usando $\Sigma = \{p, q\}$
(a) es una fórmula proposicional (b) no es una fórmula proposicional (c) no se puede saber
- 1.2.** La cadena de símbolos $(p \vee q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p)$ formada usando $\Sigma = \{p, q\}$
(a) es una fórmula proposicional (b) no es una fórmula proposicional (c) no se puede saber
- 1.3.** La cadena de símbolos $(p \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$ formada usando $\Sigma = \{p, q, r\}$
(a) es una fórmula proposicional (b) no se puede saber (c) no es una fórmula proposicional
- 1.4.** La cadena de símbolos $((p \leftrightarrow \neg q) \wedge p) \wedge \neg q$ formada con $\Sigma = \{p, q\}$
(a) no es una fórmula proposicional (b) no se puede saber (c) es una fórmula proposicional
- 1.5.** Sabiendo que $\llbracket (p \rightarrow q) \rightarrow p \rrbracket^v = 0$, ¿qué se puede asegurar acerca de $v(p)$?
(a) $v(p)$ debe valer 1 (b) $v(p)$ debe valer 0 (c) $v(p)$ puede valer 0 o 1
- 1.6.** Sabiendo que $\llbracket \neg(p \rightarrow q) \rrbracket^v = 1$, se puede asegurar:
(a) $v(p) = 0$ (b) $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$ (c) $v(q) = 1$
- 1.7.** Sabiendo que $\llbracket q \rightarrow \neg p \rrbracket^v = 0$, se puede asegurar:
(a) $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$ (b) $v(p) = 1$ y $v(q) = 1$ (c) $v(p) = 0$
- 1.8.** Sabiendo que $\llbracket (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \rrbracket^v = 0$,
(a) debe ser $v(p) = 1$ (b) debe ser $v(p) = 0$ (c) puede ser $v(p) = 1$ o $v(p) = 0$

1.9. Sabiendo que $\llbracket \neg p \rightarrow (q \rightarrow p) \rrbracket^v = 0$, se puede asegurar:

- (a) $v(p) = 1$ (b) $v(p) = 0$ y $v(q) = 1$ (c) $v(q) = 0$

1.10. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \vee \neg r) \rightarrow \neg p)$ y una valoración v tal que $v(p) = v(q) = 0$, para que $\llbracket \varphi \rrbracket^v$ valga 1, ¿cuánto debe valer $v(r)$?

- (a) No depende de $v(r)$ (b) $v(r) = 1$ (c) $v(r) = 0$

1.11. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = (p \rightarrow q) \wedge ((\neg p \rightarrow r) \rightarrow q)$ y una valoración v tal que $v(p) = v(q) = 0$, para que $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 1$, ¿cuánto debe valer $v(r)$?

- (a) No depende de $v(r)$ (b) $v(r) = 1$ (c) $v(r) = 0$

1.12. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = \neg((\neg p \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r))$ y la valoración $v(p) = 0$, para que $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 1$, ¿cuánto debe valer $v(r)$?

- (a) No depende de $v(r)$ (b) $v(r) = 1$ (c) $v(r) = 0$

1.13. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = \neg(p \rightarrow r) \rightarrow (q \vee r)$ y la valoración $v(p) = v(q) = 0$, para que $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 1$, ¿cuánto debe valer $v(r)$?

- (a) No depende de $v(r)$ (b) $v(r) = 1$ (c) $v(r) = 0$

1.14. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = (p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$ y la valoración $v(p) = v(q) = 0$, para que $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 1$, ¿cuánto debe valer $v(r)$?

- (a) $v(r) = 0$ (b) $v(r) = 1$ (c) No depende de $v(r)$

1.15. Dadas la fórmula proposicional $\varphi = (q \rightarrow r) \rightarrow \neg(q \vee r)$ y la valoración $v(q) = 0$, ¿cuánto vale $\llbracket \varphi \rrbracket^v$?

- (a) Depende de $v(r)$ (b) $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 1$ (c) $\llbracket \varphi \rrbracket^v = 0$

1.2. EJERCICIOS

1.16. Considera las siguientes fórmulas:

- (a) $\neg p \vee q \wedge \neg r$
 (b) $\neg q \wedge p \rightarrow r$
 (c) $\neg p \vee q \wedge \neg r \rightarrow \neg q \wedge p \rightarrow r$
 (d) $\neg p \vee q \wedge \neg r \rightarrow \neg q \wedge p \rightarrow r \leftrightarrow \neg s$

Para cada fórmula, escríbela en forma no abreviada, indicando cómo construirla mediante las reglas de formación, y dibuja su árbol estructural.

1.17. Escribe una definición recursiva de la aplicación *sub* que hace corresponder a cada fórmula proposicional $\varphi \in L_\Sigma$ el conjunto finito *sub*(φ) formado por todas las subfórmulas de φ .

1.18. Calcula el conjunto de todas las subfórmulas de las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.19. El *vocabulario* de una fórmula proposicional $\varphi \in L_\Sigma$ se define como el conjunto finito formado por todos los símbolos de proposición $p \in \Sigma$ que aparecen en φ . Escribe una definición recursiva de la aplicación *voc* que hace corresponder a cada fórmula φ su vocabulario $\text{voc}(\varphi)$.

1.20. Usando la definición del ejercicio 1.19, calcula el vocabulario de las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$
- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.21. Dada una fórmula proposicional $\varphi \in L_\Sigma$, sea $bn(\varphi)$ el número de apariciones de conectivas binarias en φ y sea $at(\varphi)$ el número de apariciones de \perp , \top y de símbolos de proposición $p \in \Sigma$ en φ . Define recursivamente las funciones bn y at , y demuestra por inducción sobre la estructura de φ que $at(\varphi) = bn(\varphi) + 1$ se cumple para toda fórmula $\varphi \in L_\Sigma$.

1.22. Usando la definición del ejercicio 1.21, calcula el valor de la función at para las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$
- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.23. Usando la definición del ejercicio 1.21, calcula el valor de la función bn para las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$
- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.24. Dada una fórmula proposicional $\varphi \in L_\Sigma$, sea $pf(\varphi)$ la profundidad de una fórmula, es decir, la longitud de la rama más larga del árbol estructural de φ , y sea $cn(\varphi)$ el número de apariciones de conectivas unarias y binarias en φ (es decir, sin contar las constantes \perp y \top). Define recursivamente las funciones pf y cn , y demuestra por inducción sobre la estructura de φ que $pf(\varphi) \leq cn(\varphi)$ se cumple para cualquier fórmula $\varphi \in L_\Sigma$.

1.25. Usando la definición del ejercicio 1.24, calcula el valor de la función pf para las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$
- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.26. Usando la definición del ejercicio 1.24, calcula el valor de la función cn para las siguientes fórmulas:

- (a) $(\neg p \vee (q \wedge \neg r))$
- (b) $((\neg q \wedge p) \rightarrow r)$
- (c) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r))$
- (d) $((\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow ((\neg q \wedge p) \rightarrow r)) \leftrightarrow \neg s$
- (e) $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$

1.27. Un *prefijo propio* de una fórmula proposicional φ es cualquier cadena de símbolos no vacía u tal que φ se pueda expresar como la concatenación de u con otra cadena de símbolos no vacía v ; es decir, $\varphi = uv$ con $u, v \neq \varepsilon$. Escribe todos los prefijos propios de la fórmula $\neg \neg((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \neg r))$.

1.28. Demuestra sucesivamente:

- (a) Ninguna fórmula proposicional φ está formada exclusivamente por signos de negación.
- (b) Cualquier fórmula proposicional contiene el mismo número de apariciones del símbolo '(' que del símbolo ')'
- (c) Si u es un prefijo propio (véase el ejercicio 1.27) de una fórmula proposicional φ , entonces o bien u es una cadena de signos de negación, o bien u contiene más veces el símbolo '(' que el símbolo ')'
- (d) Un prefijo propio de una fórmula proposicional nunca es a su vez una fórmula proposicional.

1.29. Apoyándote en el último apartado del ejercicio 1.28, demuestra que el *principio de unicidad de estructura* para fórmulas proposicionales es válido.

1.30. Construye dos *fórmulas proposicionales* φ y ψ y dos *cadenas de símbolos* u y v , de tal modo que $(\varphi \vee \psi)$ y $(u \vee v)$ sean idénticas como cadenas de símbolos, y sin embargo se tenga $\varphi \neq u$ y $\psi \neq v$. ¿Puede ocurrir esto en el caso de que u y v sean fórmulas proposicionales? Razona tu respuesta.

1.31. De las cadenas de símbolos que siguen determinar cuáles son fórmulas proposicionales de L_Σ y cuáles no lo son. Razona la respuesta, suponiendo $p, q, r \in \Sigma$.

- (a) $(\neg p \wedge (q \vee r))$
- (b) $((p \vee q) \wedge (\neg r))$
- (c) $((p \vee q) \wedge (\neg r))$
- (d) $(p \rightarrow \wedge q)$

1.32. En la valoración v para $\Sigma = \{p, q, r\}$ tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 1$, calcula el valor veritativo de las fórmulas siguientes:

- (a) $p \vee \neg p$

- (b) $p \wedge \neg p$
- (c) $p \leftrightarrow \neg \neg p$
- (d) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
- (e) $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$
- (f) $(p \vee q) \wedge r \rightarrow (q \leftrightarrow p)$

1.33. Estudia mediante una tabla veritativa si los conjuntos de fórmulas indicados a continuación son satisfactibles o insatisfactibles.

- (a) $\{p \rightarrow q, \neg q\}$
- (b) $\{p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$
- (c) $\{p \vee q \rightarrow r, \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r)\}$

1.34. Perico, Quique y Raimundo son sospechosos de tráfico ilegal de bolas de anís en el patio de los Escolapios. Supón que p , q y r simbolizan los enunciados “Perico es inocente”, “Quique es inocente” y “Raimundo es inocente”, respectivamente. Construye fórmulas proposicionales que simbolicen los enunciados siguientes y estudia en cada caso qué valoraciones hacen verdadera la fórmula.

- (a) Hay a lo sumo un inocente.
- (b) Hay a lo sumo un culpable.
- (c) Si hay algún culpable, entonces hay más de uno.
- (d) Hay más culpables que inocentes.
- (e) Hay más inocentes que culpables.

1.35. Se dice que dos valoraciones v_1 y v_2 coinciden sobre una fórmula $\varphi \in L_\Sigma$ si y solo si $v_1(p) = v_2(p)$ para cualquier $p \in \text{voc}(\varphi)$ (véase el ejercicio 1.19 para la definición del vocabulario de una fórmula). Demuestra por inducción sobre la estructura de φ que si v_1 y v_2 coinciden sobre φ , entonces $\llbracket \varphi \rrbracket^{v_1} = \llbracket \varphi \rrbracket^{v_2}$. Este resultado se conoce como *lema de coincidencia*.

1.36. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n \in L_\Sigma$ y una valoración v , demuestra por inducción sobre $n \geq 2$ que

- (a) $v \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1} \wedge \varphi_n \iff v \models \varphi_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1, n\}$.
- (b) $v \models \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_{n-1} \vee \varphi_n \iff v \models \varphi_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n-1, n\}$.



FORMALIZACIÓN. TÉCNICAS DE RAZONAMIENTO

CAPÍTULO 2

2.1. PREGUNTAS DE TEST

- 2.1.** La fórmula proposicional $\varphi = p \rightarrow \neg p$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.2.** La fórmula proposicional $\varphi = p \wedge \neg p$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.3.** La fórmula proposicional $\varphi = p \vee \neg p$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.4.** La fórmula proposicional $\varphi = p \leftrightarrow \neg p$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.5.** La fórmula proposicional $\varphi = p \rightarrow (q \rightarrow p)$ es una:
(a) contradicción (b) tautología (c) contingencia
- 2.6.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.7.** La fórmula $\varphi = (p \vee q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.8.** La fórmula proposicional $\varphi = \neg(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia

- 2.9.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \rightarrow \neg q) \wedge p \wedge q$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.10.** La fórmula proposicional $\varphi = p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.11.** La fórmula proposicional $\varphi = (q \rightarrow r) \rightarrow \neg(q \vee r)$ es una:
(a) tautología (b) contradicción (c) contingencia
- 2.12.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \rightarrow (q \vee p)) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.13.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.14.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.15.** La fórmula proposicional $\varphi = (p \vee q) \rightarrow (q \wedge r)$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.16.** La fórmula proposicional $\varphi = \neg((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.17.** Si φ es una tautología, entonces $\neg\neg\varphi$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.18.** Si φ_1 y φ_2 son tautologías, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.19.** Si φ_1 es una contradicción y φ_2 es una fórmula proposicional cualquiera, entonces $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.20.** Si φ_1 es una tautología y φ_2 es una contradicción, entonces $\varphi_1 \vee \varphi_2$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología
- 2.21.** Si φ_1 y φ_2 son contradicciones, entonces $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ es una:
(a) contradicción (b) contingencia (c) tautología

2.22. Si φ_1 es una contradicción y φ_2 es una tautología, entonces $(\varphi_1 \rightarrow \perp) \rightarrow \varphi_2$ es una:

- (a) contradicción (b) contingencia (c) tautología

2.2. EJERCICIOS

2.23. Demuestra que todas las fórmulas de las formas indicadas a continuación son tautologías, donde $\varphi, \psi, \eta \in L_\Sigma$ son fórmulas proposicionales cualesquiera.

- (a) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
- (b) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
- (c) $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- (d) $(\varphi \rightarrow \eta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \eta) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \eta))$
- (e) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- (f) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

2.24. Usando sus tablas veritativas, demuestra que:

- (a) $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$ es una contingencia.
- (b) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología.
- (c) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (p \vee \neg q)$ es una contingencia.
- (d) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ es una contradicción.

2.25. Estudia las fórmulas siguientes y determina en cada caso si se trata de una tautología, una contradicción o una contingencia.

- (a) $p \wedge (p \rightarrow \neg p)$
- (b) $(p \leftrightarrow \neg q) \vee q$
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \rightarrow p)$
- (d) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
- (e) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- (f) $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$

2.26. Para las tres fórmulas proposicionales que siguen construye sus tablas veritativas y averigua cuál es tautología, cuál contradicción y cuál contingencia. Para esta última escribe las valoraciones que la hagan cierta y las que la hagan falsa.

- (a) $\varphi_1 = ((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$
- (b) $\varphi_2 = ((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$
- (c) $\varphi_3 = \neg((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$

2.27. Para las tres fórmulas proposicionales que siguen construye sus tablas veritativas y averigua cuál es tautología, cuál contradicción y cuál contingencia. Para esta última escribe las valoraciones que la hagan cierta y las que la hagan falsa.

- (a) $\varphi_1 = \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (b) $\varphi_2 = (p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg r)$

$$(c) \varphi_3 = \neg((p \rightarrow q \vee r) \wedge \neg(q \rightarrow p \vee r))$$

2.28. Para cada uno de los enunciados que siguen, relativos a fórmulas de la lógica proposicional, decide si es verdadero o falso, justificando adecuadamente la respuesta.

- (a) Si φ y ψ son contingencias, entonces el conjunto $\{\varphi, \psi\}$ es satisfactible.
- (b) Si φ es una tautología y ψ es una contingencia, entonces el conjunto $\{\varphi, \psi\}$ es satisfactible.
- (c) φ es una contingencia si y solo si $\neg\varphi$ lo es también.
- (d) Si $\varphi \not\models \psi$, entonces $\varphi \models \neg\psi$.

2.29. Dada una fórmula φ de la lógica proposicional, demuestra las tres propiedades siguientes:

- (a) φ es una tautología si y solo si para toda fórmula ψ se tiene $\psi \models \varphi$.
- (b) φ es una contradicción si y solo si para toda fórmula ψ se tiene $\varphi \models \psi$.
- (c) φ es una contingencia si y solo si hay una fórmula ψ_1 de la que φ no es consecuencia lógica (es decir, $\psi_1 \not\models \varphi$) y hay una fórmula ψ_2 que no es consecuencia de φ (es decir, $\varphi \not\models \psi_2$).

2.30. Para cada una de las siguientes afirmaciones, determina si es válida o no:

- (a) $p \rightarrow q \models \neg q \rightarrow \neg p$,
- (b) $p \rightarrow q \models q$,
- (c) $p \vee q \rightarrow r, \neg r \models \neg p$,
- (d) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \models p$.

2.31. Demuestra las siguientes propiedades de la relación de consecuencia lógica, donde $\Phi, \Psi \subseteq L_\Sigma$ son conjuntos de fórmulas y $\varphi, \psi, \chi \in L_\Sigma$ son fórmulas.

- (a) Si $\Phi \models \varphi$, entonces $\Phi \cup \Psi \models \varphi$.
- (b) Si $\varphi \in \Phi$, entonces $\Phi \models \varphi$.
- (c) Si $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ y $\Phi \models \varphi$, entonces $\Phi \models \psi$.
- (d) Si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \chi$, entonces $\varphi \models \chi$.

2.32. Estudia si las afirmaciones que siguen son o no correctas, donde la notación Φ, φ abrevia la unión de conjuntos de fórmulas $\Phi \cup \{\varphi\}$.

- (a) Si $\Phi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$, entonces $\Phi, \varphi_1 \models \psi$ y $\Phi, \varphi_2 \models \psi$.
- (b) Si $\Phi, \varphi \models \psi$ y $\Phi, \varphi \models \neg\psi$, entonces $\Phi \models \neg\varphi$.
- (c) Si $\Phi, \varphi_1 \models \psi$ o $\Phi, \varphi_2 \models \psi$, entonces $\Phi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$.
- (d) Si $\Phi \models \psi_1 \vee \psi_2$, entonces $\Phi \models \psi_1$ o $\Phi \models \psi_2$.
- (e) $\Phi, \varphi_1 \vee \varphi_2 \models \psi$ si y solo si $\Phi, \varphi_1 \models \psi$ y $\Phi, \varphi_2 \models \psi$.
- (f) Si $\Phi \models \psi_1$ o $\Phi \models \psi_2$, entonces $\Phi \models \psi_1 \vee \psi_2$.
- (g) Si $\Phi, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$, entonces $\Phi, \varphi_1 \models \psi$ o $\Phi, \varphi_2 \models \psi$.

2.33. En todos los apartados de este ejercicio utilizamos la signatura $\Sigma = \{p, q, r\}$, entendiendo que:

- p formaliza el enunciado “Zipi puede robar la tarta”,

- q formaliza el enunciado “Zape vigila la puerta”,
- r formaliza el enunciado “Don Pantuflo se descuida”.

- (a) Construye razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los siguientes enunciados:
- φ_1 : “Si Zape vigila la puerta y Don Pantuflo se descuida, entonces Zipi puede robar la tarta”.
- φ_2 : “Si Zipi puede robar la tarta, entonces Zape vigila la puerta y Don Pantuflo se descuida”.
- φ_3 : “Si Zape vigila la puerta, entonces Don Pantuflo no se descuida”.
- φ_4 : “Zipi no puede robar la tarta”.
- (b) Construye la tabla veritativa de las fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y φ_4 .
- (c) Usando la tabla veritativa construida en el apartado (b), demuestra que las fórmulas que formalizan los enunciados φ_1 y φ_2 no significan lo mismo, viendo que las valoraciones que las satisfacen no son las mismas.
- (d) Usando la tabla veritativa construida en el apartado (b), demuestra que el razonamiento que tiene como premisas los enunciados φ_1 y φ_3 y como conclusión el enunciado φ_4 no es válido.
- (e) Usando la tabla veritativa construida en el apartado (b), demuestra que el razonamiento que tiene como premisas los enunciados φ_2 y φ_3 y como conclusión el enunciado φ_4 sí es válido.

2.34. Considera la siguiente argumentación:

Si la gente no estuviera embrutecida, rechazaría el mundo en que vivimos o desesperaría.
 Por otra parte, la gente no rechaza este mundo.

\therefore Luego, la gente anda embrutecida o desesperada.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

2.35. Considera el siguiente razonamiento:

Si los secuestradores se cansan, se ponen nerviosos.
 Si los secuestradores están armados y se ponen nerviosos,
 la vida de los rehenes corre peligro.
 Los secuestradores están cansados y armados.

\therefore Por consiguiente, la vida de los rehenes corre peligro.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

2.36. Dado el siguiente razonamiento:

Si hay vida inteligente en Marte entonces, suponiendo que tuviera una forma que pudiéramos reconocer, ya deberíamos haberla descubierto.

Si no hemos descubierto vida inteligente en Marte, debe ser porque tienen una forma que no podemos reconocer.

De hecho, no hemos descubierto ninguna forma de vida inteligente en Marte.

\therefore Por consiguiente, o no existen marcianos inteligentes, o existen pero en ese caso son muy distintos de nosotros.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

2.37. Dada la argumentación:

Si el cocinero fuese competente y los ingredientes no estuvieran caducados,
la tarta que prepararía resultaría deliciosa.
Es así que el cocinero es competente.

 \therefore Por consiguiente, si la tarta no es deliciosa se debe a que los ingredientes están caducados.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

2.38. Dada la argumentación:

Si es día festivo y no llueve, Juan sale a pasear.
Si no llueve, Juan no sale a pasear.

 \therefore Por consiguiente, si es día festivo, entonces llueve.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

2.39. En un texto de Lewis Carroll, el tío Joe y el tío Jim discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Allen, Brown y Carr. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

- Si Carr no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Allen, Brown tendrá que estar para atender al establecimiento.
- Si Allen no está, tampoco estará Brown que siempre le acompaña.

El tío Joe concluye de todo esto que Carr no puede estar ausente, mientras que el tío Jim afirma que solo puede concluirse que Carr y Allen no pueden estar ausentes a la vez. Decide cuál de los dos tiene razón, formalizando en la lógica proposicional las dos posibles argumentaciones, con los siguientes pasos:

- (a) Define una signatura Σ que sirva para realizar las formalizaciones y construye razonadamente fórmulas proposicionales de L_Σ que formalicen las premisas y las dos conclusiones posibles.
- (b) Construye la tabla veritativa de las fórmulas necesarias para demostrar cuál de los dos razonamientos es válido.

2.40. La validez lógica de una argumentación solo nos obliga a aceptar como verdadera su conclusión si aceptamos como verdaderas todas sus premisas. Estudia esta idea formalizando la siguiente argumentación, considerando todas las valoraciones posibles que falsifican la conclusión, y comprobando que en cada una de ellas se hace falsa al menos una premisa. La argumentación es:

“Los matrimonios podrían ser buenos, al menos durante un cierto tiempo, si hubiera en ellos armonía y satisfacción sexual. Pero para que esto ocurriera haría falta una educación que favoreciera la sexualidad, una experiencia sexual prenupcial y una emancipación con respecto a la moral convencional. Ahora bien: estos mismos factores, que son los que permitirían realizar buenos matrimonios, significan al mismo tiempo la condena de esta institución. Luego en los matrimonios no hay armonía y satisfacción sexual”.

La idea de este ejercicio es de Alfredo Deaño. La argumentación está inspirada en las opiniones de Wilhelm Reich.

- 2.41.** Habiendo desaparecido el collar de perlas finas de la Sra. Condesa, el Sr. Conde procede a interrogar a sus tres criados, que responden como sigue:

- *Agapito*: Ni Hilario ni yo hemos sido.
- *Bartolo*: Agapito está mintiendo.
- *Hilario*: Agapito no es el ladrón.

Suponiendo que los inocentes digan la verdad y que haya a lo sumo un culpable, ¿puedes deducir cuál de los fámulos es el ladrón? Para ello:

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_{Σ} que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites, deduce cuál de los tres es el ladrón.

- 2.42.** Dada la argumentación:

Tres famosos políticos pronuncian un discurso en televisión.
Podemos estar seguros de que si cualquiera de los tres miente,
también lo hará alguno de los restantes.
Por otra parte, es indudable que alguno de los tres será un mentiroso.

 \therefore Por consiguiente, podemos concluir que en el mejor de los casos
uno solo de entre los tres es digno de crédito.

- (a) Define la signatura Σ adecuada para construir razonadamente fórmulas proposicionales de L_{Σ} que formalicen los enunciados anteriores.
- (b) Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites deduce si la argumentación es o no válida.

- 2.43.** Una patrulla de policía está buscando alienígenas en el barrio de Malasaña. Interrogan a tres sujetos sospechosos, que responden lo siguiente:

- *Pepe*: Raimundo y yo somos terrícolas.
- *Quique*: Pepe miente.
- *Raimundo*: Pepe es terrícola.

- (a) Los policías suponen que si un sujeto es terrícola, entonces su declaración es verdadera. Teniendo esto en cuenta, construye tres fórmulas de la lógica proposicional que representen la información obtenida en este interrogatorio.
- (b) Los policías sospechan de Quique, pero no son capaces de probar que no es terrícola. Demuestra usando una tabla veritativa que en efecto, tomando como premisas las fórmulas construidas en el apartado (a), no se puede deducir que Quique no es terrícola.
- (c) El jefe de la patrulla sugiere aceptar como hipótesis adicional que a lo sumo uno de los tres sospechosos es alienígena (es decir, no es terrícola). Aprovechando la tabla ya construida en el apartado anterior y usando la nueva hipótesis, demuestra que en efecto Quique es alienígena.

- 2.44.** Un pastor sale al campo y encuentra tres lobos. Buen conocedor de las costumbres de las alimañas, el pastor sabe que si uno cualquiera de los tres lobos ataca, también atacarán los otros dos. Se pregunta si será válido concluir que ninguno de los tres lobos va a atacar.

- (a) Formaliza las premisas “si uno cualquiera de los tres lobos ataca, también atacarán los otros dos” y la conclusión “ninguno de los tres lobos ataca”, mediante fórmulas de la lógica de proposiciones.
- (b) Construyendo una tabla veritativa para las fórmulas que necesites, demuestra que (por desgracia para el pastor) la conclusión no se deduce de las premisas.
- (c) A partir de la tabla obtenida en el apartado (b), construye una valoración de las premisas que falsifique la conclusión.
- (d) ¿Qué premisa habría que añadir para que sí sea posible deducir la conclusión? Averígualo inspeccionando la tabla del apartado (b), añade la nueva premisa y demuestra que la argumentación es correcta.

2.45. Considera la siguiente argumentación:

Si Barrabás es enano, entonces también es paticorto o jorobado.
 Si Barrabás es paticorto, entonces no es feliz.
 Si Barrabás es feliz, entonces no es jorobado.

 \therefore Si Barrabás es enano, entonces no es feliz.

- (a) Formaliza las premisas y la conclusión como fórmulas proposicionales del lenguaje L_{Σ} y, usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites, demuestra que la argumentación es válida.
- (b) Considera ahora otra argumentación con las mismas premisas que en el apartado anterior, pero donde la conclusión es ahora “Si Barrabás es enano, entonces no es jorobado”. Usando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites, demuestra que esta argumentación no es válida y construye una valoración que sirva de contraejemplo.

2.46. Considera la siguiente argumentación:

Si Romeo ama a Julieta y Julieta no le corresponde,
 entonces Romeo se suicida o Julieta se alegra.
 Si Romeo ama a Julieta, entonces Romeo no se suicida.
 Si Julieta se alegra, entonces Julieta corresponde a Romeo.

 \therefore Por consiguiente, Julieta corresponde a Romeo.

- (a) Formaliza las premisas y la conclusión como fórmulas proposicionales de L_{Σ} . Utilizando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites demuestra que la argumentación no es válida y encuentra una valoración que sirva de contraejemplo.
- (b) Utilizando la tabla veritativa de las fórmulas que necesites, demuestra ahora que la argumentación del apartado anterior sí sería válida si se mantuviesen las mismas premisas y se cambiase la conclusión por el enunciado “Si Romeo ama a Julieta entonces Julieta le corresponde”.



EQUIVALENCIA LÓGICA. LEYES BOOLEANAS

CAPÍTULO 3

3.1. PREGUNTAS DE TEST

3.1. La fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ es lógicamente equivalente a:

- (a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ (b) $\neg p \vee (r \vee \neg q)$ (c) Ninguna de las dos

3.2. Dada la fórmula proposicional $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow r)$, su FND puede ser:

- (a) $(\neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)$ (b) $(\neg p \vee q) \wedge \neg r$ (c) $(p \wedge \neg q) \vee r$

3.3. La fórmula proposicional $(q \rightarrow p) \rightarrow \neg(q \vee p)$ es lógicamente equivalente a:

- (a) $\neg q$ (b) p (c) $\neg p$

3.4. La fórmula proposicional $\neg((p \rightarrow q) \vee \neg(\neg p \vee q))$ es lógicamente equivalente a:

- (a) \top (b) \perp (c) $\neg(p \rightarrow q)$

3.5. Dada la fórmula proposicional $\neg(p \leftrightarrow q)$, su FND puede ser:

- (a) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ (c) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3.6. Dada la fórmula proposicional $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$, su FNC puede ser:

- (a) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ (c) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

3.7. Dadas las fórmulas proposicionales $\varphi = p \leftrightarrow q$ y $\psi = \neg(p \wedge \neg q)$, se cumple:

- (a) $\varphi \models \psi$ (b) $\psi \models \varphi$ (c) $\varphi \sim \psi$

3.8. ¿Cuál de las tres fórmulas siguientes define la conectiva \vee a partir de $\{\perp, \rightarrow\}$?

- (a) $(\perp \rightarrow p_1) \rightarrow p_2$ (b) $p_2 \rightarrow (p_1 \rightarrow \perp)$ (c) $(p_1 \rightarrow \perp) \rightarrow p_2$

3.9. ¿Cuál de las tres fórmulas siguientes es equivalente a $p \wedge q$?

(a) $\neg(\neg q \rightarrow p)$

(b) $\neg(p \rightarrow \neg q)$

(c) $\neg(p \vee q)$

3.2. EJERCICIOS

3.10. Demuestra, usando las tablas veritativas, que dos de las fórmulas siguientes son contradicciones y que las otras dos son lógicamente equivalentes entre sí.

(a) $(r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow r)$

(b) p

(c) $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(d) $\neg((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$

3.11. De entre las fórmulas proposicionales siguientes, dos son tautologías y las otras dos son lógicamente equivalentes entre sí. Construye sus tablas veritativas y localiza de ese modo los dos grupos de fórmulas.

(a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(b) p

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

3.12. Demuestra usando leyes de equivalencia lógica:

(a) $\models (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

(b) $\models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

(c) $\models (\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)) \rightarrow \neg\varphi$

(d) $\models (\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

(e) $\models \varphi \rightarrow \psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

(f) $\models ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$

3.13. Sean las siguientes fórmulas en lógica proposicional: $\varphi = (p \rightarrow r) \rightarrow q$, $\psi = p \vee r$, $\delta = p \rightarrow q$, $\chi = \neg q \rightarrow \neg p$.

(a) Estudia si φ y ψ son lógicamente equivalentes.

(b) Estudia si δ y χ son lógicamente equivalentes.

3.14. Usa las leyes de la equivalencia lógica para simplificar las fórmulas siguientes:

(a) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi$

(b) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee \neg\varphi$

(c) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$

(d) $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

(e) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$

3.15. Dada una fórmula proposicional φ , se define la *fórmula complementaria* φ^c como el resultado de sustituir en φ cada aparición de un símbolo de proposición p por $\neg p$. Demuestra que φ es una tautología si y solo si lo es φ^c .

- 3.16.** Dada una fórmula proposicional φ que use exclusivamente las conectivas \perp , \top , \neg , \wedge y \vee , se define la *fórmula dual* φ^d como el resultado de reemplazar en φ todas las apariciones de \perp , \top , \wedge , \vee por \top , \perp , \vee , \wedge , respectivamente. Demuestra por inducción estructural que φ^d y $\neg\varphi^c$ son lógicamente equivalentes, donde φ^c es la fórmula complementaria definida en el ejercicio 3.15.
- 3.17.** Utilizando la definición de fórmula dual en el ejercicio 3.16, demuestra que el siguiente *principio de dualidad* se verifica para fórmulas proposicionales construidas usando solamente las conectivas \perp , \top , \neg , \wedge y \vee :
- (a) $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología si y solo si lo es $\psi^d \rightarrow \varphi^d$.
 - (b) φ y ψ son lógicamente equivalentes si y solo si lo son φ^d y ψ^d .
- 3.18.** Transforma la fórmula $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ en otra lógicamente equivalente tal que:
- (a) solo utilice las conectivas \rightarrow y \neg ;
 - (b) solo use las conectivas \rightarrow y \perp .
- 3.19.** Construye una fórmula equivalente a $p \rightarrow q$ que solamente use \uparrow y otra que solo use \downarrow .
- 3.20.** Demuestra que el conjunto de conectivas $\{\neg, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo. *Indicación:* Demuestra por inducción estructural que la tabla de cualquier fórmula φ construida usando p_1 , p_2 , \neg y \leftrightarrow toma el valor 1 un número par de veces. Concluye que $\{\neg, \leftrightarrow\}$ no permite definir \rightarrow .
- 3.21.** Demuestra que el conjunto de conectivas $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo usando la siguiente idea. Prueba por inducción sobre $n \geq 1$ que cualquier función booleana n -aria f puede definirse mediante una fórmula proposicional que use solamente las conectivas \neg , \wedge , \vee y n símbolos de proposición p_1, \dots, p_n .
- 3.22.** Demuestra que los siguientes conjuntos de conectivas son funcionalmente completos:
- (a) $\{\neg, \wedge\}$
 - (b) $\{\neg, \vee\}$
 - (c) $\{\neg, \rightarrow\}$
 - (d) $\{\uparrow\}$
 - (e) $\{\downarrow\}$
- 3.23.** La conectiva de *minoría* se especifica por medio de la siguiente tabla:

| p_1 | p_2 | p_3 | $m \ p_1 p_2 p_3$ |
|-------|-------|-------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Determina fórmulas en FND y FNC que definan esta conectiva. Trata de simplificarlas.

3.24. Una cláusula se llama *trivial* si contiene dos literales opuestos de la forma p y $\neg p$. Demuestra:

- (a) Una fórmula en FND es una contradicción si y solo si todas sus cláusulas son triviales.
- (b) Una fórmula en FNC es una tautología si y solo si todas sus cláusulas son triviales.

3.25. Convierte φ en FND y FNC, tratando de simplificar el resultado, cuando φ es:

- (a) $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$
- (b) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
- (c) $(p \rightarrow q) \wedge ((q \rightarrow r) \rightarrow r)$
- (d) $\neg((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow q))$

3.26. Sea \oplus una conectiva definida por la siguiente tabla:

| p_1 | p_2 | p_3 | $\oplus p_1 p_2 p_3$ |
|-------|-------|-------|----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Transforma la fórmula $(\oplus \neg p_2 p_1 p_2) \rightarrow \neg p_3$ en otra lógicamente equivalente que solo utilice las conectivas $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

3.27. Se define por recursión estructural la siguiente función sobre fórmulas proposicionales:

| φ | φ^+ |
|---------------------------------------|--|
| \perp | \perp |
| \top | \top |
| p | p |
| $\neg \varphi_1$ | $\varphi_1^+ \rightarrow \perp$ |
| $\varphi_1 \square \varphi_2$ | $\varphi_1^+ \square \varphi_2^+$ |
| $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ | $(\varphi_1^+ \rightarrow \varphi_2^+) \wedge (\varphi_2^+ \rightarrow \varphi_1^+)$ |

donde $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Demuestra que $\varphi \sim \varphi^+$.

3.28. Demuestra por inducción estructural que cualquier fórmula proposicional φ admite FND y FNC.

3.29. De entre las fórmulas proposicionales siguientes, dos son lógicamente equivalentes a \top (es decir, tautologías), y las otras dos son lógicamente equivalentes entre sí. Localiza los dos grupos de fórmulas y demuestra las equivalencias usando leyes conocidas de la equivalencia lógica.

- (a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- (b) p
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

- 3.30.** La siguiente tabla especifica el comportamiento de un circuito lógico con tres entradas e_1, e_2, e_3 y dos salidas s_1, s_2 :

| e_1 | e_2 | e_3 | s_1 | s_2 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

- (a) Usando los símbolos de proposición p, q y r para representar las tres entradas, construye una fórmula en FNC que represente la primera salida y simplifícala de modo que finalmente quede una fórmula en FNC con solo dos cláusulas.
- (b) Usando los símbolos de proposición p, q y r para representar las tres entradas, construye una fórmula en FND que represente la segunda salida y simplifícala de modo que finalmente quede una fórmula en FND con solo dos cláusulas.

- 3.31.** Considera la siguiente argumentación:

| |
|---|
| Si es día festivo y no llueve, Juan sale a pasear. |
| Si no llueve, Juan no sale a pasear. |
| ∴ Por consiguiente, si es día festivo, entonces llueve. |

- (a) Construye fórmulas φ_1, φ_2 y ψ de la lógica de proposiciones tales que φ_1 y φ_2 formalicen las dos premisas y ψ formalice la conclusión de la argumentación.
- (b) Calculando paso a paso con leyes conocidas de la equivalencia lógica, transforma la fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ a fórmulas equivalentes en FND y FNC lo más simples que puedas.
- (c) Sea φ la FND de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ obtenida en el apartado anterior. Calculando con leyes de equivalencia lógica, demuestra que $\varphi \wedge \neg\psi \sim \perp$ y concluye que la argumentación es válida.



CÁLCULO LÓGICO CON TABLEAUX

CAPÍTULO

4

4.1. PREGUNTAS DE TEST

- 4.1.** Sea $\Phi = \{\neg p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$. Comprueba con un tableau si:
- (a) Φ tiene un único modelo (b) Φ tiene dos modelos (c) Φ tiene tres o más modelos
- 4.2.** Sea $\Phi = \{q \rightarrow p, \neg r \vee \neg p, p \wedge \neg r\}$. Comprueba con un tableaux si:
- (a) Φ tiene un único modelo (b) Φ tiene dos modelos (c) Φ tiene más de dos modelos
- 4.3.** Sea $\Phi = \{p \rightarrow q \vee r, \neg q, \neg(p \rightarrow r)\}$. Un tableau terminado para Φ necesariamente:
- (a) tiene dos ramas (b) es cerrado (c) es abierto
- 4.4.** Sea $\Phi = \{\neg(p \rightarrow q), \neg q \vee r, \neg p \vee \neg r\}$. Construye un tableau terminado T para Φ y comprueba si:
- (a) T no tiene ramas cerradas (b) T tiene ramas abiertas (c) T es cerrado
- 4.5.** Sea $\Phi = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q, \neg r\}$. Cualquier tableau terminado T para Φ cumple que:
- (a) T no tiene ramas cerradas (b) T tiene ramas abiertas (c) T es cerrado
- 4.6.** Sea $\Phi = \{\neg\neg p \rightarrow \neg q, \neg p, q \vee r\}$. Cualquier tableau terminado T para Φ cumple que:
- (a) T no tiene ramas cerradas (b) T tiene ramas abiertas (c) T es cerrado

4.2. EJERCICIOS

- 4.7.** Decide con ayuda de tableaux cuáles de entre los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfactibles.
- (a) $\{p \rightarrow q, \neg q\}$
(b) $\{p \rightarrow q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$
(c) $\{p \vee q \rightarrow r, r, \neg p\}$
(d) $\{(p \vee q) \rightarrow r, \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee r)\}$

- 4.8.** Demuestra mediante el método de los tableaux que todas las fórmulas de la forma que se indica a continuación son tautologías.
- (a) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
 - (b) $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
 - (c) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$
 - (d) $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- 4.9.** Demuestra mediante el método de los tableaux que todas las fórmulas de la forma que se indica a continuación son tautologías.
- (a) $\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi$
 - (b) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
 - (c) $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)$
 - (d) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- 4.10.** Usando el procedimiento de los tableaux decide cuáles de entre las fórmulas siguientes son tautologías. Para aquellas que no lo sean, encuentra un modelo de la negación.
- (a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
 - (b) $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
 - (c) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$
 - (d) $(p \vee q) \wedge r \rightarrow (q \leftrightarrow p)$
- 4.11.** Supón que extendiésemos la sintaxis de la lógica de proposiciones de forma que las conectivas ‘ \uparrow ’ y ‘ \downarrow ’ se admitiesen para la formación de fórmulas. Razona qué nuevas fórmulas conjuntivas y disyuntivas obtendríamos y cuáles serían sus constituyentes.
- 4.12.** Describe y justifica un método para decidir si una fórmula es una tautología, una contradicción o una contingencia utilizando tableaux.
- 4.13.** Demuestra utilizando el método de los tableaux que se cumplen las siguientes relaciones de consecuencia lógica.
- (a) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \neg\psi \models \neg\varphi$
 - (b) $\varphi \rightarrow \psi \vee \chi, \psi \rightarrow \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \chi$
 - (c) $\varphi \vee \psi, \psi \rightarrow \varphi \vee \chi \models \varphi \vee \chi$
 - (d) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi, \neg\varphi \rightarrow \eta \models \psi \rightarrow \chi \vee \eta$
- 4.14.** Estudia utilizando el método de los tableaux si la fórmula $\chi \vee \neg\varphi \rightarrow \psi$ es consecuencia lógica de $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \vee \chi\}$.
- 4.15.** Formaliza la argumentación siguiente en lógica de proposiciones y usa el método de los tableaux para probar su validez.

Si la gente no estuviera embrutecida, rechazaría el mundo en que vivimos o desesperaría.
 Por otra parte, la gente no rechaza este mundo.

\therefore Luego, la gente anda embrutecida o desesperada.

- 4.16.** Formaliza la argumentación siguiente en lógica de proposiciones y usa el método de los tableaux para probar su validez.

Si el cocinero fuese competente y los ingredientes no estuvieran caducados,
la tarta que prepararía resultaría deliciosa.
Es así que el cocinero es competente.

∴ Por consiguiente, si la tarta no es deliciosa se debe a que los ingredientes están caducados.

- 4.17.** Formaliza la argumentación siguiente en lógica de proposiciones y usa el método de los tableaux para probar su validez.

Tres famosos políticos pronuncian un discurso en televisión.
Podemos estar seguros de que si cualquiera de los tres miente,
también lo hará alguno de los restantes.
Por otra parte, es indudable que alguno de los tres será un mentiroso.

∴ Por consiguiente, podemos concluir que en el mejor de los casos
uno solo de entre los tres es digno de crédito.

- 4.18.** Decide por el procedimiento de los tableaux cuáles de entre las siguientes relaciones de consecuencia lógica son válidas:

(a) $p \rightarrow q, q \vee r \models r \vee \neg p \rightarrow q$

(b) $p \vee q \rightarrow r, \neg r \models \neg p$

(c) $p \leftrightarrow q, p \vee q \models \neg p \wedge \neg q$

(d) $p \leftrightarrow q, p \vee q \models p \wedge q$

- 4.19.** En un texto de Lewis Carroll, el tío Joe y el tío Jim discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Allen, Brown y Carr. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

- Si Carr no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Allen, Brown tendrá que estar para atender al establecimiento
- Si Allen no está, tampoco estará Brown que siempre le acompaña.

El tío Joe concluye de todo esto que Carr no puede estar ausente, mientras que el tío Jim afirma que solo puede concluirse que Carr y Allen no pueden estar ausentes a la vez. Decide con el método de los tableaux cuál de los dos tiene razón.

- 4.20.** Formaliza en lógica proposicional las premisas y la conclusión de la siguiente argumentación, y emplea el procedimiento de los tableaux para estudiar si la argumentación es o no válida. En caso de que no lo sea, trata de encontrar una conclusión “razonable” que sí se siga de las premisas.

Luis vive con su padre, su abuelo y su bisabuelo. Cualquiera de los tres primeros está en casa si y solamente si su padre no está. Además, si Luis o su bisabuelo está en casa, está también el padre de Luis. ¿Hay alguien que no esté en casa?

- 4.21.** Formaliza en lógica proposicional las premisas y la conclusión de la siguiente argumentación, y emplea el procedimiento de los tableaux para estudiar si la argumentación es o no válida. En caso de que no lo sea, trata de encontrar una conclusión “razonable” que sí se siga de las premisas.

Si la inversión privada permanece constante,
 entonces aumenta el gasto público o surge paro.
 Si no aumenta el gasto público, pueden rebajarse los impuestos.
 Si la inversión privada permanece constante y los impuestos pueden rebajarse,
 entonces no surge paro.

\therefore Ergo: aumenta el gasto público.

- 4.22.** Formaliza el siguiente razonamiento en lógica proposicional y utiliza el método de los tableaux para comprobar su validez.

Si hay vida inteligente en Marte entonces, suponiendo que tuviera una forma
 que pudiéramos reconocer, ya deberíamos haberla descubierto.
 Si no hemos descubierto vida inteligente en Marte, debe ser porque tienen
 una forma que no podemos reconocer.

De hecho, no hemos descubierto ninguna forma de vida inteligente en Marte.
 \therefore Por consiguiente, o no existen marcianos inteligentes, o existen pero en ese caso
 son muy distintos de nosotros.

- 4.23.** Una patrulla de policía está buscando alienígenas en el barrio de Malasaña. Interrogan a tres sujetos sospechosos, que responden lo siguiente:

- *Pepe*: Raimundo y yo somos terrícolas.
- *Quique*: Pepe miente.
- *Raimundo*: Pepe es terrícola.

- (a) Los policías sospechan de Quique, pero no son capaces de probar que no es terrícola. Demuestra por medio de un tableau que en efecto no se puede deducir que Quique no es terrícola.
- (b) El jefe de la patrulla sugiere aceptar como hipótesis adicional que a lo sumo uno de los tres sospechosos es alienígena (es decir, no es terrícola). Aprovechando el tableau ya construido en el apartado anterior y usando la nueva hipótesis, completa otro tableau que demuestre que en efecto Quique es alienígena.

- 4.24.** Un pastor sale al campo y encuentra tres lobos. Buen conocedor de las costumbres de las alimañas, el pastor sabe que si uno cualquiera de los tres lobos ataca, también atacarán los otros dos. Se pregunta si será válido concluir que ninguno de los tres lobos va a atacar.

- (a) Formaliza las premisas “si uno cualquiera de los tres lobos ataca, también atacarán los otros dos” y la conclusión “ninguno de los tres lobos ataca”, mediante fórmulas de la lógica de proposiciones.
- (b) Construyendo un tableau, demuestra que (por desgracia para el pastor) la conclusión no se deduce de las premisas.
- (c) A partir del tableau obtenido en el apartado (b), construye un modelo de las premisas que falsifique la conclusión.
- (d) ¿Qué premisa habría que añadir para que sí sea posible deducir la conclusión? Averígualo inspeccionando el tableau del apartado (b), añade la nueva premisa y completa otro tableau que demuestre la conclusión.

- 4.25.** Suponiendo que φ , ψ y χ sean fórmulas de la lógica proposicional, demuestra utilizando un único tableau que $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$.

- 4.26.** Usa tableaux para transformar φ a FND y FNC, donde φ es:

- (a) $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$
- (b) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
- (c) $(p \rightarrow q) \wedge ((q \rightarrow r) \rightarrow r)$
- (d) $\neg((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow q))$

- 4.27.** (a) Aplica el método de transformación de una fórmula dada a FND utilizando un tableau a la fórmula $(p \leftrightarrow \neg q) \vee (q \leftrightarrow \neg r)$ para obtener una FND suya.
- (b) Aplica el método de transformación de una fórmula dada a FNC utilizando un tableau a la fórmula $\neg(p \leftrightarrow (q \wedge \neg r))$ para obtener una FNC suya.

- 4.28.** Sean las fórmulas $\varphi = p \wedge q \rightarrow r$ y $\eta = (p \rightarrow q) \rightarrow r$.

- (a) Demuestra que $\eta \models \varphi$ con ayuda de un tableau.
- (b) Construyendo otro tableau, calcula una fórmula en FND lógicamente equivalente a $\varphi \wedge \neg \eta$ y simplifícala lo más posible.
- (c) Utilizando el tableau del apartado anterior, razona si es cierto o no que $\varphi \sim \eta$.

resuelve cada uno de los apartados siguientes:

- (a) Cada una de las cuatro fórmulas dadas sirve para formalizar uno de los cuatro enunciados siguientes. Indica para cada enunciado cuál es la fórmula que lo formaliza correctamente.
- (A): Cualquier trucha come a algún gusanillo.
 - (B): Ninguna trucha come a todos los gusanillos.
 - (C): Hay una trucha que no come a todos los gusanillos.
 - (D): Hay una trucha que no come a ningún gusanillo.
- (b) Dibuja el árbol estructural de φ_1 .
- (c) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, calcula una fórmula φ'_1 lógicamente equivalente a φ_1 que no utilice ni \forall ni \rightarrow .
- (d) Usando pasos de equivalencia lógica basados en leyes conocidas, transforma $\varphi_3 \wedge \varphi_4$ a otra fórmula lógicamente equivalente que esté en forma prenexa.
- (e) Demuestra que $\varphi_1 \not\models \varphi_2$ construyendo una interpretación que sirva de contraejemplo.

10.107. Demuestra utilizando resolución que la siguiente argumentación es correcta:

Los caracoles cuadrados no existen. Luego todos los caracoles cuadrados viven en California.

10.108. Determina si son válidas o no las argumentaciones comprendidas entre los ejercicios 10.95 y 10.105 utilizando resolución.