Matemática Discreta y Lógica Matemática

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

HOJA 3.3. - EJERCICIOS SOBRE FUNCIONES — Curso 2018/2019

---

1. La relación binaria $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$, viene dada por $R = \{(1,2),(1,3),(2,1)\}$. Determina el enunciado correcto y razona porqué ese es el caso:

   a) R es función, pero R^{-1} no lo es.

   b) R no es función, pero R^{-1} sí lo es.

   c) R y R^{-1} son funciones.

   d) ni R ni R^{-1} son funciones.

2. Demuestra que las dos funciones que se definen a continuación son biyecciones:

   a) $f : \mathbb{N} - \rightarrow \mathbb{N}$, donde

   $$f(n) = \begin{cases} \text{n + 1} & \text{si n es par} \\ \text{n - 1} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

   b) $g : \mathbb{Z} - \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $g(n) = (-1)^{|n|} * n$

3. La función $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} - \rightarrow \mathbb{Z}$, donde

   $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n es par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

   es:

   a) inyectiva, pero no suprayectiva

   b) suprayectiva, pero no inyectiva

   c) biyectiva

4. La función $f : \mathbb{N} - \rightarrow \mathbb{Z}$, donde

   $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n es par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

   es:

   a) inyectiva, pero no suprayectiva

   b) suprayectiva, pero no inyectiva

   c) biyectiva

5. Sea $f : A \rightarrow B$. Demuestra que las dos condiciones siguientes son equivalentes:

   a) f es inyectiva.

   b) Para cualquier par de funciones $g_1, g_2 : C \rightarrow A$: $(g_1 \circ f = g_2 \circ f) \Rightarrow g_1 = g_2$.

6. Demuestra que si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces $f^{-1} : B \rightarrow A$ también es biyectiva.

7. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestra que:

   a) Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.
   b) Si f y g son suprayectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.
   c) Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

8. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} - \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ es inyectiva. Encuentra su dominio, rango y da una descripción explícita de su inversa f^{-1}.

9. Sea X un conjunto fijado. Para cada subconjunto $A \subseteq X$, la *función característica* de A se define como la función $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

   Demuestra que la función $f : \mathcal{P}(X) \to (X \to \{0, 1\})$ que hace corresponder a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ su función característica χ_A, es una biyección.

10. Sea $f : A - \to B$.

    a) Dados $S, T \subseteq A$ demuestra que:
       1) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
       2) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
       3) $f(S) \setminus f(T) \subseteq f(S \setminus T)$

       Demuestra además, mediante contraejemplos, que en 2) y 3) no siempre se da la igualdad.

    b) Dados $S, T \subseteq B$ demuestra que:
       1) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
       2) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$
       3) $f^{-1}(S \setminus T) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T)$