

---

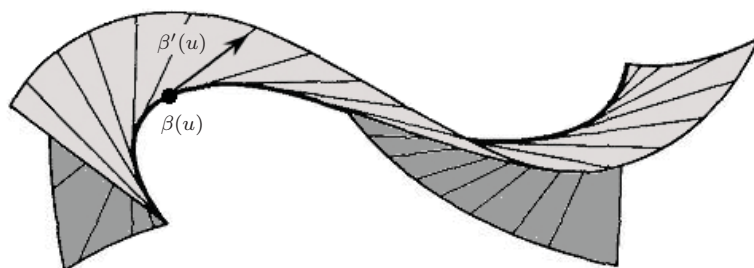
# Introducción a la Geometría Diferencial, II SUPERFICIES

---

José M. Rodríguez-Sanjurjo

Jesús M. Ruiz

Universidad Complutense de Madrid





*O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.  
O que há é pouca gente para dar por isso.*

Álvaro de Campos



---

## Prefacio

---

El presente volumen completa la introducción a la Geometría Diferencial comenzada en el anterior, dedicado a la teoría de curvas. Uno de los atractivos de esta materia es que, a un nivel relativamente elemental, se estudian algunos de los grandes teoremas de las matemáticas, debidos a autores eminentes. Otro aspecto interesante es que aquí confluyen gran parte de las ramas de las matemáticas: Geometría, Análisis, Álgebra Lineal, Topología, Ecuaciones Diferenciales... Además, en la teoría de superficies conviven en igual medida la profundidad matemática y la abundancia de imágenes visuales, algunas dotadas de gran belleza plástica. Este equilibrio entre rigor e intuición confiere a la Geometría Diferencial un valor eminentemente formativo.

Los temas tratados son los habituales en un curso de estas características: superficies y tangencias, cálculo diferencial e integral en superficies, primera y segunda forma fundamental, aplicación de Gauss y curvatura de Gauss, teorema egregio, geodésicas... Pero hemos querido tratar algunos temas más con especial detalle. Por ejemplo, damos una demostración completa del teorema fundamental de superficies, incluyendo la solución de las ecuaciones en derivadas parciales involucradas. También nos hemos detenido en el Umlaufsatz para superficies y en los resultados sobre triangulación de superficies diferenciables, requisitos necesarios para el teorema de Gauss-Bonnet. Quisiéramos haber conseguido escribir una demostración sin lagunas de este teorema clásico. Lo mismo decimos del teorema de Poincaré-Hopf, al que dedicamos la lección última del libro, después de haber introducido algunos fundamentos sobre singularidades de campos tangentes.

Como en el precedente sobre curvas, una característica de este volumen es la relevancia dada a los aspectos históricos, que ocupan gran parte de las notas finales de cada lección. Pueden servir a los lectores para descansar del estudio estricto de la materia presentada y descubrir otras vertientes de esa misma materia y de su evolución histórica. Digamos a este respecto que coincidimos plenamente con Isaac Isidor Rabi, Premio Nobel de Física de 1944, quien dice que *la ciencia debe ser enseñada de manera humanista, en el sentido de la biografía, la naturaleza de las personas que hicieron posible su construcción, sus triunfos, sus pruebas, sus tribulaciones*.

El libro está concebido para ser utilizado en los grados de Matemáticas y Físicas y en las Ingenierías, y los conocimientos previos requeridos se limitan a las asignaturas de Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e Integral y algunas nociones de Topología. Cada lección viene acompañada de una colección de diez problemas sobre los temas tratados en ella, que a veces recogen aspectos adicionales o refinamientos de esos temas.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a los compañeros con quienes hemos discutido en extenso cuestiones relativas a esta materia a lo largo de los años, y especialmente a Victor Fernández Laguna. También agradecemos a David Gómez, Manuel Navarro y Diego Chicharro que hayan leído con detenimiento parte del texto, señalado errores y formulado observaciones que nos han ayudado a mejorarlo.

Pozuelo de Alarcón, Majadahonda  
4 de noviembre de 2018

*J.M. Rodríguez-Sanjurjo, J.M. Ruiz*

---

# Contenido

---

<b>1. Definiciones básicas y ejemplos</b>	<b>1</b>
<i>Superficie diferenciable, coordenadas locales, parametrización local, entorno coordinado. Homeomorfismo local, difeomorfismo local. Atlas de una superficie. Líneas coordenadas. Planos, esferas, cilindros circulares, helicoides. Parametrizaciones globales. Proyecciones estereográficas. Latitud y longitud, paralelos y meridianos de una esfera. Superficies de revolución; paralelos y meridianos. Toro de revolución. Contraejemplos: conos, uniones de planos.</i>	
Problemas de la lección 1 . . . . .	13
Notas de la lección 1 . . . . .	14
<b>2. Ecuaciones locales de superficies</b>	<b>17</b>
<i>Superficies topográficas o grafos; parametrización de Monge. Ecuaciones explícitas de una superficie. Caracterización diferenciable de una parametrización local. Teorema de la función implícita. Valores regulares; puntos regulares. Superficies de nivel. Ecuaciones implícitas de una superficie. Elipsoides, hiperboloides de una o dos hojas; cilindros sobre curvas. Superficies de revolución como superficies de nivel.</i>	
Problemas de la lección 2 . . . . .	27
Notas de la lección 2 . . . . .	28
<b>3. Plano tangente</b>	<b>31</b>
<i>Curvas de una superficie; vectores tangentes a una superficie en un punto. Plano tangente a una superficie en un punto. Cálculo del plano tangente mediante una parametrización. Bases y cambios de coordenadas en el plano tangente; dirección normal. Cálculos mediante una ecuación explícita y mediante una ecuación implícita. Superficies transversales; intersección de superficies transversales. Plano tangente a una superficie de revolución</i>	
Problemas de la lección 3 . . . . .	41
Notas de la lección 3 . . . . .	42
<b>4. Cálculo diferencial en superficies</b>	<b>45</b>
<i>Aplicaciones diferenciables en una superficie. Alturas y distancias. Diferenciabilidad por localización. Derivada. Funciones constantes. Regla de la cadena.</i>	

*Localización y matriz jacobiana de una aplicación diferenciable entre superficies. Difeomorfismos. Difeomorfismos locales. Teorema de la función inversa para superficies. Inclusiones de superficies. Homogeneidad. Difeomorfismos de la esfera, aplicación antipodal. Difeomorfismos del toro de revolución.*

Problemas de la lección 4 . . . . . 52

Notas de la lección 4 . . . . . 53

## **5. La primera forma fundamental 57**

*Producto escalar en el espacio tangente. Primera forma fundamental. Coeficientes y determinante. Primera forma fundamental de una superficie topográfica, de un cilindro, de una esfera, de una superficie de revolución, del helicoides. Longitudes y ángulos en una superficie. Loxodromas de la esfera. Cálculo de áreas mediante la primera forma fundamental. Integral de una función.*

Problemas de la lección 5 . . . . . 68

Notas de la lección 5 . . . . . 69

## **6. La aplicación de Gauss 73**

*Vectores normales. Signo de un cambio de coordenadas. Atlas con cambios positivos. Aplicación de Gauss. Unicidad salvo signo de la aplicación de Gauss, diferenciabilidad. Aplicaciones de Gauss de grafos y de superficies de nivel. Orientación de planos tangentes. Superficie orientable, orientación de una superficie, superficie orientada. La banda de Möbius. Aplicaciones de Gauss de la esfera, del cilindro, de un paraboloides, de un helicoides, de una superficie de revolución.*

Problemas de la lección 6 . . . . . 82

Notas de la lección 6 . . . . . 83

## **7. La segunda forma fundamental 87**

*Derivada de la aplicación de Gauss; aplicación de Weingarten. Ejemplos: la esfera, el cilindro, un paraboloides, un helicoides, una superficie de revolución. La aplicación de Weingarten es un operador autoadjunto. La segunda forma fundamental. Coeficientes y determinante. La segunda forma fundamental de los ejemplos habituales.*

Problemas de la lección 7 . . . . . 95

Notas de la lección 7 . . . . . 96

## **8. Curvatura normal 99**

*Curvatura normal de una curva de una superficie. Teorema de Meusnier. Curvatura normal de una superficie. Secciones normales de una superficie. Curvatura y curvatura normal de una sección normal. Teorema espectral. Fórmula de Euler.*



*Extremos de la curvatura normal. Curvaturas principales y direcciones principales en un punto. Líneas de curvatura. Teorema de Olinde Rodrigues.*

Problemas de la lección 8 . . . . . 110

Notas de la lección 8 . . . . . 111

## 9. Curvatura de Gauss 115

*Clasificación de la segunda forma fundamental. Curvatura de Gauss. Puntos elípticos, parabólicos, planares, hiperbólicos. Caracterización del plano y de la esfera. Indicatriz de Dupin de un punto. Interpretación geométrica de la indicatriz según el tipo de punto. Direcciones asintóticas y líneas asintóticas. Teorema de la curvatura de Gauss. Curvatura de Gauss y áreas.*

Problemas de la lección 9 . . . . . 126

Notas de la lección 9 . . . . . 127

## 10. Ecuaciones de Weingarten 131

*Ecuaciones de Weingarten. Expresiones locales de las curvaturas. Diferenciabilidad de las curvaturas. Parametrizaciones cuyas líneas coordenadas son líneas de curvatura. Posición del plano tangente en un punto elíptico, posición en un punto parabólico. Existencia de puntos elípticos en superficies compactas. Falsa esfera; falso paraboloides hiperbólico. Pseudoesfera.*

Problemas de la lección 10 . . . . . 139

Notas de la lección 10 . . . . . 140

## 11. El teorema egregio de Gauss 145

*Propiedades intrínsecas de una superficie. Triedro de Gauss; símbolos de Christoffel. Naturaleza local de las propiedades intrínsecas. Cálculos explícitos. Teorema egregio de Gauss. Mapa; no lo hay fiable. Isometría. Conservación de las distancias. Conservación de la primera forma fundamental. Isometría local. Semejanzas. Semejanzas y curvatura de Gauss.*

Problemas de la lección 11 . . . . . 154

Notas de la lección 11 . . . . . 155

## 12. El teorema fundamental 161

*Movimientos rígidos. Ecuaciones de Gauss y de Mainardi-Codazzi. Ecuaciones de compatibilidad. Teorema fundamental: existencia y unicidad (local) de superficies. Isometrías restricción de movimientos rígidos. Isometrías de la esfera.*

Problemas de la lección 12 . . . . . 174

Notas de la lección 12 . . . . . 175

<b>13. Campos tangentes</b>	<b>179</b>
<i>Campos (vectoriales) tangentes. Campos coordenados. Expresión local de un campo tangente. Campos ortogonales, ortonormales, que definen las líneas de curvatura. Campos tangentes independientes. Coordenadas construidas mediante campos tangentes independientes. Curvas integrales y trayectorias de un campo tangente. Curvatura de Gauss en coordenadas ortogonales.</i>	
Problemas de la lección 13 . . . . .	187
Notas de la lección 13 . . . . .	187
<b>14. Superficies desarrollables</b>	<b>191</b>
<i>Superficies con curvatura de Gauss nula. Superficies regladas. Superficies regladas de revolución. Superficies regladas desarrollables. Superficies desarrollables clásicas: cilindros, conos y superficies tangenciales.</i>	
Problemas de la lección 14 . . . . .	202
Notas de la lección 14 . . . . .	203
<b>15. Geodésicas (I)</b>	<b>205</b>
<i>Geodésica de una superficie. Vector normal intrínseco de una curva de una superficie. Curvatura geodésica de una curva; relación con la curvatura normal de la superficie. Curvatura geodésica de una geodésica. Cálculo de la curvatura geodésica. Expresión local y carácter intrínseco. Conservación por isometrías de la curvatura geodésica y de las geodésicas.</i>	
Problemas de la lección 15 . . . . .	216
Notas de la lección 15 . . . . .	217
<b>16. Geodésicas (II)</b>	<b>221</b>
<i>Ecuaciones diferenciales de las geodésicas. Geodésicas de una superficie de revolución; relación de Clairaut. Origen y velocidad inicial de una geodésica. Existencia y unicidad de geodésicas. Campo tangente a lo largo de una curva. Campo paralelo. Norma y ángulos de campos paralelos. Existencia y unicidad de campos paralelos. Minimización de la distancia.</i>	
Problemas de la lección 16 . . . . .	231
Notas de la lección 16 . . . . .	233
<b>17. El Umlaufsatz en una superficie</b>	<b>235</b>
<i>Polígonos curvilíneos en una superficie. Ángulo de tangencia de una curva de Jordan; determinaciones del ángulo de tangencia. Curvatura geodésica y ángulo de tangencia. Ángulo de tangencia de un polígono curvilíneo; determinaciones.</i>	

*Variación del ángulo de tangencia. Índice de rotación respecto de una parametrización. Umlaufsatz. Signo del índice de rotación. Signo de las parametrizaciones de un polígono curvilíneo*

Problemas de la lección 17 . . . . . 247

Notas de la lección 17 . . . . . 248

## **18. Triangulación de superficies diferenciables 253**

*Regiones regulares simples; frontera e interior. Propiedades topológicas. Triángulos de una superficie; aristas y vértices. Caracterización topológica. Triangulaciones: caras, lados y vértices. Propiedad de adyacencia de las triangulaciones de una superficie. Números de caras, de lados y de vértices. Característica de Euler. Género. Teorema de triangulación diferenciable de superficies compactas. Triangulación diferenciable de esferas. Descomposición celular.*

Problemas de la lección 18 . . . . . 266

Notas de la lección 18 . . . . . 267

## **19. El teorema de Gauss-Bonnet 271**

*Teorema de Gauss-Bonnet local. Suma de los ángulos externos de un polígono curvilíneo. Suma de los ángulos internos. Polígonos geodésicos; exceso de la suma de los ángulos internos. Excesos en la esfera y en el cilindro. Triangulaciones e integración. Curvatura íntegra. Triangulaciones y orientación. Teorema de Gauss-Bonnet global. Superficies difeomorfas a la esfera. Superficies de curvatura positiva. Teorema de Hadamard. Teorema de Jordan para superficies convexas.*

Problemas de la lección 19 . . . . . 283

Notas de la lección 19 . . . . . 284

## **20. Singularidades de campos tangentes 287**

*Puntos singulares de un campo tangente. Índice de un campo tangente en un punto singular aislado: cálculo mediante una región regular simple. Punto regular de un campo tangente: índice en un punto regular. Fuente, sumidero, silla y circulación; valor de sus índices. Puntos singulares no degenerados. Índice de un campo en un punto singular no degenerado; independencia de la región regular simple. Número de vueltas de un polígono curvilíneo.*

Problemas de la lección 20 . . . . . 296

Notas de la lección 20 . . . . . 297

## **21. El teorema de Poincaré-Hopf 299**

*Fórmula local de Poincaré-Hopf. Teorema de Poincaré-Hopf. Existencia de campos tangentes sin ceros. Punto crítico de una función diferenciable; hessiana.*

*Puntos críticos no degenerados. Máximo, mínimo y silla de una función diferenciable. Campos gradientes. Fórmula de Poincaré-Hopf para funciones diferenciables: igualdad de Morse. Función de Morse.*

Problemas de la lección 21 . . . . . 308

Notas de la lección 21 . . . . . 309

**Bibliografía** . . . . . **313**

**Nombres propios** . . . . . **317**

**Figuras** . . . . . **323**

**Símbolos** . . . . . **325**

**Índice** . . . . . **333**

---

## Definiciones básicas y ejemplos

---

En esta lección se introducen algunas de las definiciones y propiedades básicas de la teoría de las superficies en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . El punto de vista adoptado es esencialmente diferente del empleado en el caso de las curvas: si las curvas han sido definidas como *aplicaciones*, las superficies son *subconjuntos* del espacio euclídeo, que se pueden *parametrizar localmente* mediante aplicaciones diferenciables definidas en abiertos del plano, es decir mediante dos parámetros independientes. Las parametrizaciones nos permiten trasladar conceptos y objetos geométricos del plano a las superficies y recíprocamente. La teoría que se establece así es *local*, en el sentido de que se estudian propiedades de la superficie en el entorno de un punto de la misma. Las parametrizaciones utilizadas cubren, en general, sólo una parte de la superficie y a menudo no es posible encontrar una parametrización que describa la superficie total. La esfera es el ejemplo más inmediato de esta situación.

**Definición 1.1.** Un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  recibe el nombre de *superficie (diferenciable)* si para cada punto  $p \in S$  existe una aplicación  $\varphi : U \rightarrow S$  definida en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , tal que:

- (1)  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $U$  sobre un entorno abierto  $W = \varphi(U)$  de  $p$  en  $S$  (es decir,  $W = V \cap S$  para cierto entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$ ),
- (2)  $\varphi$  es diferenciable, es decir, tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes (como aplicación  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ),
- (3) la aplicación lineal derivada  $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $q \in U$ .

En lo que sigue emplearemos la notación  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , donde  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  y  $z(u, v)$  son funciones reales de las variables  $u, v$ . A su vez,  $u$  y  $v$  reciben el nombre de *coordenadas locales* del punto  $\varphi(u, v)$  de  $S$ . Estas coordenadas desempeñan un papel semejante al de las coordenadas cartesianas en la geometría del plano. La aplicación lineal  $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está representada

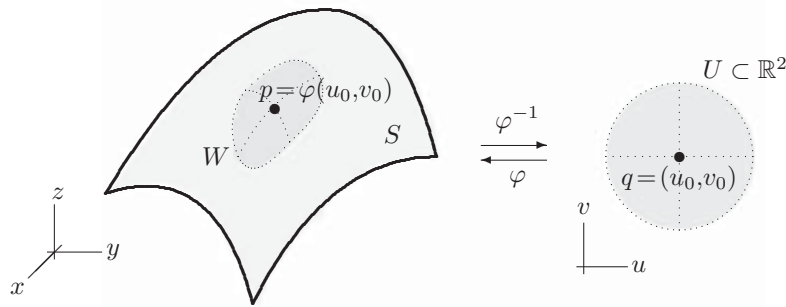
por la *matriz jacobiana*

$$J_\varphi(q) = \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix},$$

y la condición (3) de la definición anterior equivale a que  $J_\varphi(q)$  tenga rango 2.

Advertimos ahora ya que en este texto indicaremos casi siempre las derivadas parciales mediante subíndices:  $x_u$  por  $\frac{\partial x}{\partial u}$ ,  $x_v$  por  $\frac{\partial x}{\partial v}$ , etcétera. Es una notación muy sencilla que mejora enormemente la legibilidad, aunque algunas veces convenga utilizar también la notación estándar.

La aplicación  $\varphi : U \rightarrow S$  recibe el nombre de *parametrización (local) de  $S$* . De hecho,  $\varphi$  parametriza el entorno  $W$  de  $p$  que, en consecuencia, recibe el nombre de *entorno coordinado de  $p$* .



La condición (1) de la definición significa que el plano y  $S$  son *localmente homeomorfos*, y las dos condiciones adicionales (2) y (3) que son lo que más tarde denominaremos *localmente difeomorfos*. Hay aquí una importante distinción entre lo puramente topológico y lo diferencial. Por otra parte, la condición (1) no es consecuencia de (2) y (3), pero se tiene una implicación más débil que es útil para construir superficies:

**Proposición 1.2.** Sea  $V$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación diferenciable con derivada  $d_q\varphi$  inyectiva en un punto  $q \in V$ . Entonces ese punto tiene un entorno abierto  $U \subset V$  cuya imagen  $S = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie y  $\varphi|U$  una parametrización de  $S$ .

*Demostración.* En primer lugar,  $J_\varphi(q)$  tendrá un menor de orden 2 no nulo, por ejemplo el correspondiente a  $(x, y)$ , y reduciendo  $V$  podemos suponer que es no

nulo en todo punto de  $V$ . Así, es la condición (1) de la definición de superficie la que deseamos conseguir. Para ello definimos  $\tilde{\varphi} : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\tilde{\varphi}(u, v, w) = \varphi(u, v) + (0, 0, w)$ . Claramente, el determinante jacobiano de  $\tilde{\varphi}$  en  $(q, 0)$  es el menor de orden 2 de  $J_\varphi(q)$  que hemos seleccionado antes, y por tanto es no nulo. En consecuencia, por el teorema de inversión local  $\tilde{\varphi}$  es un difeomorfismo local en  $(q, 0)$ , es decir, existen entornos abiertos  $U \subset V$  de  $q$  y  $W \subset \mathbb{R}$  de 0 tales que  $\tilde{\varphi}(U \times W)$  es abierto en  $\mathbb{R}^3$  y  $\tilde{\varphi}$  induce por restricción un difeomorfismo de  $U \times W$  sobre  $\tilde{\varphi}(U \times W)$ . En particular, induce un homeomorfismo de  $U \times \{0\}$  sobre  $\tilde{\varphi}(U \times \{0\}) = \varphi(U)$  y por ello  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  es homeomorfismo. Ésta es la condición (1) deseada. ■

**Observación 1.3.** (1) Si  $h : U' \rightarrow U$  es un difeomorfismo entre dos abiertos del plano, la composición  $\psi = \varphi \circ h : U' \rightarrow S$  es otra parametrización local.

(2) Si  $\varphi : U \rightarrow S$  es una parametrización local entonces para todo abierto no vacío  $U_0 \subset U$  la restricción  $\varphi|_{U_0} : U_0 \rightarrow S$  es también una parametrización local. Esto se aplica por ejemplo a cualquier imagen inversa  $U_0 = \varphi^{-1}(W_0)$  de un subconjunto abierto  $W_0$  de  $W = \varphi(U)$ . También sirve para conseguir entornos  $U_0$  de  $q$  especiales (por ejemplo un disco).

(3) Dada la naturaleza local de las definiciones, cualquier subconjunto abierto de una superficie diferenciable es a su vez una superficie diferenciable. De hecho, un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  es una superficie diferenciable si y sólo si es unión de subconjuntos abiertos suyos que son superficies diferenciables. ■

En relación con la última observación, en ocasiones interesa trabajar con familias de parametrizaciones locales que conjuntamente recubren la totalidad de la superficie. En la siguiente definición fijamos este concepto.

**Definición 1.4.** Se llama *atlas* de una superficie  $S$  a una familia  $\mathcal{A}$  de parametrizaciones locales  $\varphi_i : U_i \rightarrow S$  tal que

$$S = \bigcup_i \varphi_i(U_i).$$

**(1.5) Cambios de coordenadas.** Como una superficie admite muchas parametrizaciones locales diferentes es necesario conocer la expresión que relaciona las coordenadas en aquellas regiones de la superficie en que dos parametrizaciones se solapan. Usaremos la siguiente terminología.

Sean  $\varphi : U \rightarrow S$  y  $\psi : U' \rightarrow S$  dos parametrizaciones de una superficie

diferenciable  $S$ . Si se cumple  $\varphi(U) \cap \psi(U') \neq \emptyset$  entonces la aplicación

$$\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \rightarrow \varphi^{-1}(\psi(U'))$$

es un homeomorfismo entre dos abiertos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$ . Este homeomorfismo se denomina *cambio de coordenadas*, pues expresa las coordenadas  $(u, v)$  definidas por la parametrización  $\varphi$  como funciones de las coordenadas  $(s, t)$  definidas por la parametrización  $\psi$ . De manera análoga se tiene el cambio inverso  $\psi^{-1} \circ \varphi$ . Más adelante volveremos sobre estos homeomorfismos. ■

**(1.6) Líneas coordenadas.** Consideremos de nuevo una parametrización local  $\varphi : U \rightarrow S$  de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Si fijamos un punto  $q = (u_0, v_0) \in U$ , tenemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon) \subset U,$$

de modo que la aplicación  $\Gamma : u \mapsto \varphi(u, v_0)$  define una curva parametrizada en el intervalo  $(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon)$ , cuya traza está contenida en  $W = \varphi(U) \subset S$  y pasa por el punto  $p = \varphi(u_0, v_0)$ . Esta curva recibe el nombre de *línea coordenada*  $v = v_0$ , y tiene como vector tangente en  $p$  el vector

$$\Gamma'(u_0) = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\varphi(u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{u - u_0} = \varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q));$$

denotaremos  $\varphi_{u,p}$ , o si no hay riesgo de confusión  $\varphi_u$ , este vector. Análogamente se define la línea coordenada  $u = u_0$ , cuyo vector tangente  $\varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$  denotamos  $\varphi_{v,p}$  o  $\varphi_v$ . Obsérvese que los vectores tangentes  $\varphi_{u,p}$  y  $\varphi_{v,p}$  son precisamente las columnas de la matriz de  $d_q\varphi$ :

$$\varphi_{u,p} = d_q\varphi(1, 0), \quad \varphi_{v,p} = d_q\varphi(0, 1).$$

Esto implica que los dos vectores son independientes y en particular ninguno es nulo, de modo que las dos curvas coordenadas son regulares. ■

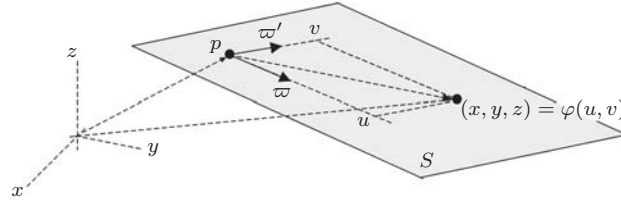
A continuación se presentan algunos ejemplos importantes de superficies.

**Ejemplos 1.7.** (1) Los planos son superficies diferenciables.

En efecto, sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el plano afín que pasa por el punto  $p \in \mathbb{R}^3$  con dirección  $\vec{S}$ . Sean  $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3)$  y  $\varpi' = (\varpi'_1, \varpi'_2, \varpi'_3)$  dos vectores unitarios perpendiculares entre sí que generan  $\vec{S}$  (una base ortonormal de  $\vec{S}$ ). El plano  $S$  se parametriza linealmente de la manera habitual mediante

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto p + u\varpi + v\varpi'.$$





Ésta es de hecho una parametrización global de  $S$  en el sentido de la definición de superficie diferenciable. Para verlo conviene observar que por ser  $\varpi$  y  $\varpi'$  unitarios y perpendiculares, las coordenadas  $u$  y  $v$  se expresan mediante productos escalares como sigue:

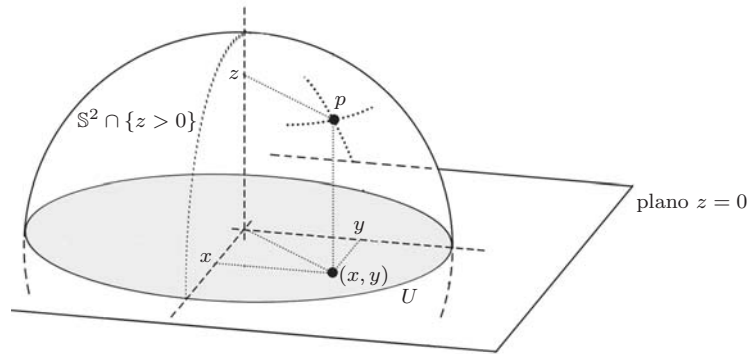
$$u = (x - p)\varpi, \quad v = (x - p)\varpi'.$$

lo que muestra que  $\varphi^{-1} : x \mapsto (u, v)$  es continua. La parametrización es diferenciable por ser lineal, y su matriz jacobiana tiene por columnas los vectores  $\varpi$  y  $\varpi'$  que son independientes, luego el rango es 2.

(2) La *esfera unidad* de  $\mathbb{R}^3$  es el subconjunto

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Este es un ejemplo importante de superficie. Una manera de justificar esta afirmación es proyectar la esfera sobre planos ecuatoriales. Por ejemplo, el hemisferio abierto superior  $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$  de la esfera se proyecta sobre el disco abierto  $U : x^2 + y^2 < 1$  del plano  $z = 0$ .



Esta proyección es un homeomorfismo cuyo inverso es la aplicación diferenciable  $\varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . La matriz jacobiana de esta aplicación es del

tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$$

luego tiene siempre rango 2. La esfera se puede recubrir en su totalidad mediante seis parametrizaciones análogas a la anterior (¿por qué tantas?) y, por 1.3(3), p. 3, es una superficie.

(3) Otra superficie familiar es el *cilindro circular*  $S \subset \mathbb{R}^3$  dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . En este caso podemos proyectar sobre planos que contengan al eje de las  $z$ 's. Por ejemplo, sobre dos planos, desde los dos lados de cada uno, cuatro proyecciones; o mejor sobre tres planos, desde un lado de cada uno, tres proyecciones.

(4) Si partimos de una hélice circular

$$\zeta(u) = (\cos u, \sin u, bu), \quad b > 0,$$

y consideramos la unión  $S$  de todas las rectas que pasan por puntos de esta hélice e intersecan ortogonalmente el eje  $z$ , es fácil ver que  $S$  es la imagen de la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (v \cos u, v \sin u, bu).$$

El conjunto  $S$  recibe el nombre de *helicoides* y es una superficie diferenciable. De hecho,  $\varphi$  es una parametrización de  $S$ . La aplicación  $\varphi$  es diferenciable y su matriz jacobiana en un punto dado es

$$\begin{pmatrix} -v \sin u & \cos u \\ v \cos u & \sin u \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

que como se comprueba inmediatamente, tiene siempre rango 2. En fin,  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  es biyectiva, con inversa dada por:

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left( \frac{z}{b}, \frac{x}{\cos(z/b)} \right) & \text{si } \cos(z/b) \neq 0, \\ \left( \frac{z}{b}, \frac{y}{\sin(z/b)} \right) & \text{si } \sin(z/b) \neq 0. \end{cases}$$

Esta misma expresión muestra que  $\varphi^{-1}$  es continua y  $\varphi$  es un homeomorfismo sobre  $S$ . Por tanto  $\varphi$  es una parametrización como se pretendía. ■



**Observación 1.8.** Para establecer que un conjunto  $S$  es una superficie diferenciable, se procede a recubrir con las parametrizaciones que hagan falta. En ocasiones

basta con una sola, que se califica de *global*. A este respecto hay que entender que minimizar el número de parametrizaciones depende en realidad de nuestra habilidad. Pero en última instancia, el número mínimo de parametrizaciones necesario tiene significado topológico, fuera del alcance en este texto, pero que puede ilustrarse en algunos ejemplos.

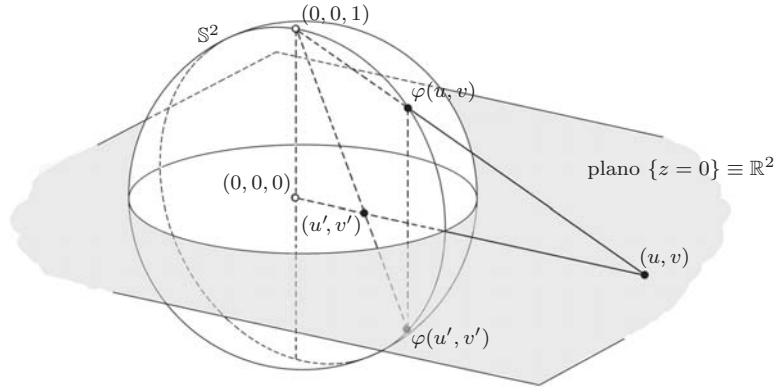
(1) La esfera puede cubrirse con dos parametrizaciones. En efecto, toda la esfera menos un punto puede parametrizarse mediante una *proyección estereográfica* desde el punto en cuestión. Por ejemplo, la proyección estereográfica desde el polo norte es la aplicación

$$W = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

cuya inversa es la parametrización

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow W : (u, v) \mapsto \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

La figura siguiente ilustra estas aplicaciones.



Esta parametrización junto con cualquier otra que contenga el polo norte  $(0, 0, 1)$  cubren la esfera. Y nunca basta una parametrización, pues, si bastara, la esfera sería homeomorfa a un abierto del plano, lo que es imposible por ser la esfera compacta.

(2) Un cilindro puede cubrirse con una parametrización global, de nuevo recurriendo a una proyección estereográfica. Por ejemplo, proyectando el tronco de cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z < 1$ , desde el punto  $(0, 0, 1)$  se obtiene un difeomorfismo

sobre el abierto del plano  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Obsérvese que el abierto  $U$  no es homeomorfo a un disco, de modo que aquí de nuevo interviene la topología. (Véase el prob. 7 de esta lección.) ■

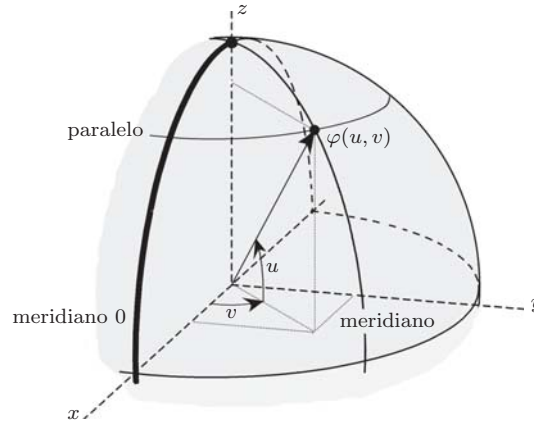
De la esfera conviene describir otra parametrización más, que apela a una terminología bien conocida.

**Ejemplo 1.9.** Vamos a formalizar en nuestro contexto los conceptos de *latitud* y *longitud*. Consideramos la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , y definimos la aplicación siguiente:

$$\varphi : U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u).$$

La imagen  $W = \varphi(U)$  se identifica fácilmente: es el complementario en  $\mathbb{S}^2$  del *meridiano cero*, formado por los puntos  $(x, 0, z) \in \mathbb{S}^2$  tales que  $x \geq 0$ .

Según vemos en la figura,  $u$  es la latitud y  $v$  la longitud del punto  $p = \varphi(u, v)$ , en el sentido habitual que conocemos en cartografía:



La aplicación  $\varphi$  es inyectiva, y que  $\varphi : U \rightarrow W$  es abierta, y por tanto homeomorfismo, es un ejercicio sencillo que dejamos al lector. En fin,  $\varphi$  es diferenciable, y su matriz jacobiana

$$J_{\varphi}(q) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 ( $\cos u \neq 0$  en  $U$ ). Por tanto,  $\varphi$  es una parametrización de la esfera.

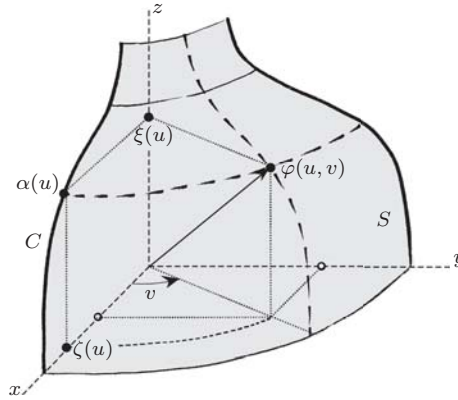
Las líneas coordenadas  $u = u_0$  (curvas de latitud constante) son por supuesto los *paralelos*, y las  $v = v_0$  (curvas de longitud constante) son los *meridianos*. ■

Los conceptos de meridiano y paralelo corresponden en realidad a la siguiente construcción general, que presentamos con alguna restricción técnica que no la limita sustancialmente.

**(1.10) Superficies de revolución.** (1) Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular cuya traza  $C$  está contenida en el semiplano  $xz$  con  $x > 0$ , y tal que  $\alpha : I \rightarrow C$  es un homeomorfismo (en otras palabras,  $\alpha$  es un arco de Jordan). En consecuencia, la curva se expresará como  $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$  con  $\zeta(u) > 0$ . Efectuemos una rotación alrededor del eje  $z$ , y designemos por  $v$  el ángulo de esa rotación (medido a partir del semieje positivo  $x$ ). Al variar el ángulo  $v$  obtenemos un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  descrito por las ecuaciones

$$x = \zeta(u) \cos v, \quad y = \zeta(u) \sin v, \quad z = \xi(u),$$

según ilustramos a continuación:



Decimos que  $S$  es la *superficie de revolución* generada por la curva  $C$ . Resulta que  $S$  es una superficie diferenciable.

En efecto, la aplicación

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)).$$

es, claramente, diferenciable, con matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \zeta'(u) \cos v & -\zeta(u) \sin v \\ \zeta'(u) \sin v & \zeta(u) \cos v \\ \xi'(u) & 0 \end{pmatrix};$$

esta matriz tiene rango 2 (como se comprueba fácilmente por ser  $\zeta(u) > 0$  y  $\alpha'(u) \neq 0$ ). En consecuencia,  $\varphi$  induce parametrizaciones locales en todos los abiertos  $U \subset \mathbb{R}^2$  en que induzca un homeomorfismo sobre la imagen, y ésta sea un subconjunto abierto de  $S$ . Afirmamos que esto pasa para los del tipo  $U = I \times (\theta, \theta + 2\pi)$ , para los que  $\varphi(U)$  es toda  $S$  salvo el corte con el plano vertical que forma un ángulo  $\theta$  con el plano coordenado  $y = 0$ .

Para verlo utilizaremos las parametrizaciones  $\alpha(t)$  de  $C$  y  $\Gamma(v) = (\cos v, \sin v)$ ,  $\theta < v < \theta + 2\pi$ , de la circunferencia menos el punto  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ; ambas parametrizaciones son homeomorfismos sobre su imagen. Ahora bien, para  $(x, y, z) = \varphi(u, v) \in \varphi(U)$  se tiene  $\zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , de modo que

$$u = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \quad v = \Gamma^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Esto muestra que  $\varphi|U : U \rightarrow \varphi(U)$  es inyectiva y que su inversa es continua.

(2) Las curvas  $v = v_0$ : las intersecciones de  $S$  con los semiplanos verticales que contienen al eje de rotación y forman un ángulo  $v_0$  con el plano  $xz$ . Sus vectores tangentes  $\varphi_u$  son los vectores tangentes a la curva obtenida al rotar  $C$  hasta ese plano, que se obtienen rotando los vectores  $\alpha'(u)$ . Naturalmente estas curvas son los *meridianos*. Por ejemplo, la imagen  $W = \varphi(U)$  es toda la superficie  $S$  salvo el meridiano  $v = \theta$ .

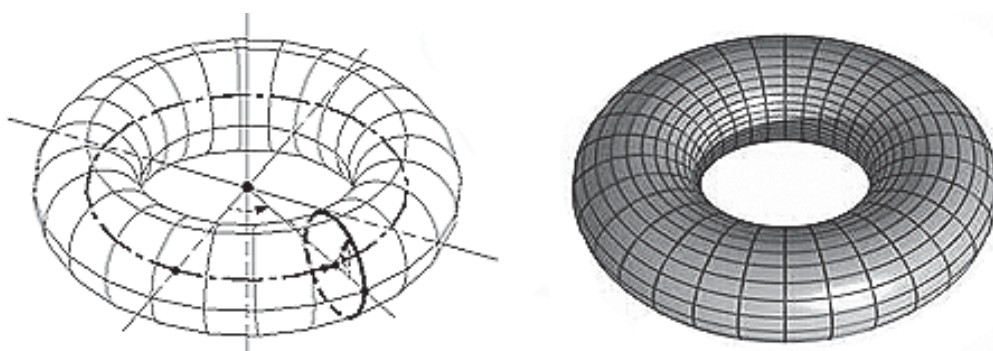
(3) Las curvas  $u = u_0$ : las intersecciones de  $S$  con los planos horizontales  $z = \xi(u)$ . Sus vectores tangentes son  $\varphi_v = \zeta(u)(-\sin v, \cos v, 0)$ , tangentes a la circunferencia en ese plano. Estas curvas se llaman, claro, *paralelos*. ■

Claramente la esfera *salvo los polos* es una superficie de revolución, y los paralelos y los meridianos son quienes deben ser. El cilindro circular es otro ejemplo sencillo de superficie de revolución. Pero, tal vez, la superficie de revolución más célebre es la siguiente:

**Ejemplo 1.11.** Se denomina *toro de revolución* la superficie generada por una circunferencia  $C$  contenida en el semiplano  $\{x > 0, y = 0\}$  que gira alrededor del

eje  $z$ . Por ejemplo, si  $C$  tiene centro  $(c, 0, 0)$  y radio  $r < c$ , el conjunto  $S$  se puede describir mediante las fórmulas

$$x = (c + r \cos u) \cos v, \quad y = (c + r \cos u) \sin v, \quad z = r \sin u.$$

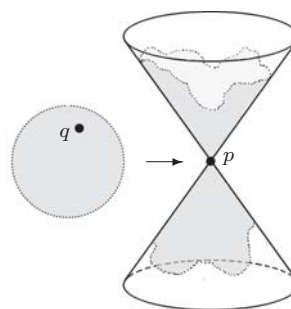


En la figura precedente se ve cómo se genera el toro, con sus meridianos y sus paralelos. El lector estudiará entre qué extremos deben variar las coordenadas  $u, v$  para definir auténticas parametrizaciones. ■

También hay que conocer ejemplos de subconjuntos  $S \subset \mathbb{R}^3$  que *no son* superficies diferenciables, y por qué no lo son. Terminamos con esto la lección.

**Contraejemplos 1.12.** (1) Consideremos el *cono doble*  $S \subset \mathbb{R}^3$  dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ . Este conjunto no es una superficie por una razón topológica: *no es localmente homeomorfo al plano*.

En efecto, si lo fuese, existiría un disco  $U \subset \mathbb{R}^2$  homeomorfo a un entorno abierto  $W \subset S$  del vértice del cono  $p = (0, 0, 0)$ . Si denotamos  $q$  el punto del disco que corresponde a  $p$  por el homeomorfismo que se tenga, los conjuntos  $U \setminus \{q\}$  y  $W \setminus \{p\}$  serían homeomorfos. Como  $p$  desconecta a  $W$  (pues desconecta a todo el cono),  $q$  debería desconectar al disco  $U$ , lo que es imposible (el lector debería dar una justificación de esta afirmación).

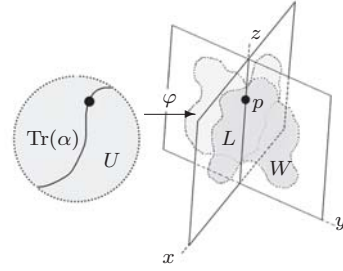


La única obstrucción en este ejemplo es el vértice:  $S \setminus \{p\}$  sí que es una superficie diferenciable. En efecto, al prescindir del vértice se obtienen dos abiertos

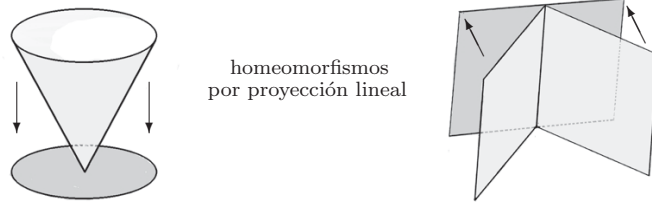
disjuntos cada uno de los cuales admite una parametrización global por proyección sobre el plano  $z = 0$ . Este ejemplo pone de manifiesto que las superficies no son necesariamente conexas, aunque no es difícil probar que cada componente conexa de una superficie es una superficie.

(2) Un contraejemplo más delicado es el caso de dos planos que se cortan en una recta, que tienen la obstrucción en los puntos de esa recta de intersección. Para fijar ideas, sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  la unión de los dos planos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ . Que  $S : xy = 0$  no es una superficie es otra vez una cuestión topológica:  $S$  no es localmente homeomorfo al plano. El argumento es más delicado que para el doble cono, y sólo lo esquematizamos, dejando los detalles al cuidado del lector.

Sea  $p$  un punto del eje  $z$ , y supongamos que existe una parametrización  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$  con  $p \in W = \varphi(U)$ . La restricción  $\alpha = \varphi^{-1}|_L : L = W \cap \{x = y = 0\} \rightarrow U$  es una curva diferenciable regular de  $U$ . Por hipótesis el par  $W \supset L$  es homeomorfo al par  $U \supset \text{Tr}(\alpha)$  vía  $\varphi$ , y por tanto las propiedades topológicas de ambos pares deben ser las mismas. Pero sabemos que una curva regular separa  $U$  localmente en 2 componentes (teorema del entorno tubular) mientras que  $L$  separa  $W$  localmente en al menos 4 componentes. Contradicción.



(3) Por último, proponemos dos contraejemplos que *no son de naturaleza topológica*. Si consideramos el semicono  $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ , tenemos un conjunto homeomorfo al plano, pero *no localmente difeomorfo a él*. Lo mismo pasa si consideramos dos semiplanos  $xy = 0, x + y > 0$ : tenemos un conjunto homeomorfo, pero no localmente difeomorfo, a un plano.



Sin embargo debemos esperar hasta el párrafo 3.10, p.40, para probar rigurosamente que ninguno de estos dos ejemplos es localmente difeomorfo al plano. Utilizaremos el plano tangente, que se habrá introducido en la lección 3. ■



## Problemas

**Número 1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el plano afín definido por la ecuación no nula  $ax + by + cz = d$ , y supongamos que se resuelve esta ecuación para obtener  $x = x(\lambda, \mu)$ ,  $y = y(\lambda, \mu)$ ,  $z = z(\lambda, \mu)$  en función de dos parámetros  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Mostrar que la aplicación  $\varphi(x, y, z) = (x(\lambda, \mu), y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu))$  es una parametrización del plano  $S$  como superficie diferenciable.

**Número 2.** Sea  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u, 0 < v < 2\pi\}$ . Probar que el conjunto

$$S = \{(u \cos v, u \sin v, u + v) : (u, v) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

es una superficie.

**Número 3.** Sea  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u, 0 < v\}$ . Probar que el conjunto

$$S = \{(u^2, uv, v^2) : (u, v) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

es una superficie.

**Número 4.** Probar que el conjunto

$$S = \{(u + v, u - v, uv) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

es una superficie y que coincide con el grafo de la función  $z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$ .

**Número 5.** Dado  $c \in \mathbb{R}$ , probar que las coordenadas polares, definidas por la aplicación  $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , con  $r > 0$ ,  $|\theta - c| < \pi$ , definen una parametrización local de  $\mathbb{R}^2$ . Determinar la imagen de  $\varphi$ .

**Número 6.** Sea  $S$  la imagen de la aplicación  $f : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}u \\ 0 \\ \sin \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Probar que las restricciones de  $f$  a dominios del tipo  $(a, a + 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  definen parametrizaciones locales de  $S$  que, por tanto, es una superficie (*banda de Möbius*). Esta superficie nos proporcionará en la lección 6 el ejemplo más importante de superficie no orientable.

**Número 7.** Completar los detalles del ejemplo 1.8(2), p. 7. Modificar la proyección estereográfica de ese ejemplo mediante un difeomorfismo  $h : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1)$  para obtener una parametrización global del cilindro de  $\mathbb{R}^3$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Número 8.** Describir una superficie no compacta que no sea homeomorfa a un abierto del plano.

**Número 9.** Dada una superficie arbitraria  $S$ , ¿es cierto que toda curva de  $S$  homeomorfa a la circunferencia desconecta  $S$ ? En caso negativo, ¿existe siempre alguna que la desconecta?

**Número 10.** Probar que una superficie compacta tiene un número finito de componentes conexas. ¿Existen superficies con infinitas componentes conexas?

## Notas

1. El desarrollo inicial de la teoría de superficies debe mucho a dos matemáticos que ya han sido mencionados en el primer volumen de esta obra, en concreto a LEONHARD EULER (1707–1783) y a GASPARD MONGE (1746–1818).

2. Euler trabajó desde su juventud en las aplicaciones del Cálculo a la Geometría, pero fue en su artículo de 1760, *Recherches sur la courbure des surfaces*, cuando presentó algunas de sus principales contribuciones a la teoría de superficies y a la Geometría Diferencial en tres dimensiones. En 1770 comenzó a estudiar las *superficies desarrollables*, esto es, las superficies que se pueden deformar sobre un plano sin sufrir en el proceso ninguna distorsión (ni pérdida de continuidad o diferenciabilidad ni tampoco alteración de distancias o áreas). Euler probó que las tangentes a una curva espacial arbitraria forman una superficie desarrollable.

Un hecho que causa admiración es la precocidad de Euler, que a los diecisiete años obtuvo el grado de Master en la Universidad de Basilea. Es, por otra parte, notable que una cosa así fuera posible, si lo comparamos con los estudios actuales de Matemáticas, que requieren un prolongado periodo de enseñanzas oficiales. En cualquier caso, JOHANN BERNOULLI (1667–1748) ya había adquirido en aquel momento la certeza de que su discípulo Euler era un genio. Él sería quien después le llamaría el “príncipe entre los matemáticos”. Euler no pudo encontrar trabajo en su ciudad natal, Basilea, y, por medio de DANIEL BERNOULLI (1700–1782) recibió una oferta de la Academia Imperial Rusa de Ciencias, en San Petersburgo, que aceptó. La Academia había sido fundada en 1725 por la reina Catalina I (esposa del difunto zar Pedro el Grande) para ser la primera institución científica de Rusia, y se distinguía por incorporar profesores extranjeros de renombre. Pero el mismo día de 1727 en que el matemático llegó a San Petersburgo moría la reina y Euler vivió la época convulsa que siguió a esa muerte, pues los nuevos gobernantes no apreciaban igual el talento foráneo. En todo caso, Euler aprendió la lengua rusa y escribió libros elementales y avanzados de matemáticas, y resolvió problemas prácticos planteados por el gobierno ruso como el diseño de un mapa del país. Fue asimismo entonces cuando formuló y resolvió *el problema de los siete puentes de Königsberg*, que supone la creación tanto de la Teoría de Grafos como de la Topología (aunque Euler usó el nombre *Analysis Situs*, término acuñado por GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) que Euler probablemente oyó a los Bernoullis). Este primer periodo en San Petersburgo duró 14 años, durante los cuales escribió 90 trabajos y ganó 12 veces el premio de la Academia de Ciencias de París. Pero cuando las circunstancias se hicieron especialmente difíciles, Euler aceptó la invitación de Federico el Grande, rey de Prusia, para trabajar en Postdam, en la Real Academia Prusiana de Ciencias (posteriormente Academia de Berlín), a donde llegó en 1741. Allí desarrolló el Cálculo de Variaciones, del cual encontraría aplicaciones a la teoría de *superficies minimales*, y también fue allí donde conjeturó la celeberrima fórmula  $C - A + V = 2$  que relaciona las caras, las aristas y los vértices de un

poliedro convexo y donde escribió las *Cartas a una princesa alemana*, uno de los escritos popularizadores de la ciencia que más éxito tuvo en el siglo XVIII.

A pesar de que Federico el Grande medía la utilidad de la ciencia por sus aplicaciones tecnológicas y militares, Euler tuvo, en un principio, mucho tiempo libre para trabajar de modo independiente. Esta situación terminó cuando se vio obligado a aceptar la responsabilidad de la dirección de la Academia y las consiguientes exigencias administrativas y económicas, y las tareas de supervisión de la ciencia aplicada, incluyendo balística, navegación, abastecimiento de aguas, mejora de canales e incluso administración de loterías. Esto fue demasiado para Euler que, a los 59 años, decidió regresar a San Petersburgo, no sin antes cerciorarse de que sus múltiples exigencias eran aceptadas por la entonces reina Catalina II (también conocida como Catalina la Grande). Estas exigencias incluían, aparte de un magnífico sueldo, alojamiento y medios materiales, una cátedra de Física para su hijo mayor Johann Albrecht y empleos adecuados para sus hijos Karl y Christoph en instituciones médicas y militares. Fue en esta segunda época en Rusia cuando sufrió mayores infortunios y desgracias: su casi total ceguera, el incendio de su casa y la pérdida de su mujer. Euler murió repentinamente en San Petersburgo a la edad de 76 años. El mismo día de su muerte había dado lecciones de matemáticas a uno de sus nietos, realizado cálculos sobre el ascenso de los globos y discutido con sus colaboradores detalles sobre la órbita del recién descubierto planeta Neptuno.

**3.** Ya hemos descrito en el volumen anterior la influencia decisiva de Monge en la creación de la Geometría Diferencial y de la Geometría Descriptiva. Demostró, en particular, una gran cantidad de resultados sobre superficies. Por ejemplo, que las evolutas de una curva espacial yacen en una superficie desarrollable y que son *geodésicas* de esa superficie. De hecho, fue un continuador de la obra de Euler en el campo de las superficies desarrollables. La obra de Monge se caracteriza por un fuerte sentido geométrico, interés en las cuestiones prácticas, gran habilidad analítica y la consideración simultánea de un problema desde los aspectos geométrico, analítico y aplicado. El uso del Análisis por parte de Monge sigue siempre una pauta geométrica, de modo que la integración de una ecuación en derivadas parciales lleva aparejada la construcción de un sistema geométrico en el espacio. Monge reconoció que una familia de superficies que tienen una propiedad geométrica común debería satisfacer una ecuación en derivadas parciales. La idea de conectar las ecuaciones en derivadas parciales con la geometría del espacio continúa siendo un método importante en nuestros días, especialmente en la escuela francesa.

Su enseñanza en la Escuela Politécnica de París conjugó su enorme intuición geométrica con las aplicaciones prácticas en ingeniería. La creación de la escuela no estuvo exenta de condicionamientos, debidos al agitado clima político de la época. Comenzó llamándose École Centrale des Travaux Publics y la labor inicial de Monge consistió en impartir “cursos revolucionarios” de Geometría Diferencial y en escribir artículos sobre temas militares, tales como la balística y los explosivos. Con el tiempo, sus clases serían la base para su texto *Application de l'Analyse à la Géométrie*. La Escuela Politécnica acabaría convirtiéndose en uno de los centros de enseñanza superior más prestigiosos del mundo y

sería el modelo, entre otras instituciones, para la Federal Technische Hochschule de Suiza y el Massachusetts Institute of Technology de Estados Unidos.

A pesar de sus inclinaciones republicanas, Monge acabó colaborando con Napoleón en varias empresas. Por ejemplo tomó parte en un episodio oscuro, la supervisión del saqueo de arte italiano por parte de las tropas francesas, y después acompañó a Napoleón en su expedición a Egipto, donde fue nombrado presidente del Instituto de Egipto en el Cairo en 1798. Durante su estancia en Egipto Monge investigó diversos temas, como la naturaleza de los espejismos y los métodos locales de industria y agricultura. El final de su vida estuvo marcado por la caída de Napoleon, que acabó arrastrando también a Monge, quien no pudo sobreponerse al hostigamiento de sus enemigos políticos y enfermó y murió el 28 de julio de 1818.

---

## Ecuaciones locales de superficies

---

En la lección anterior hemos ilustrado la noción de superficie con diversos ejemplos que se han analizado con argumentos específicos. En ésta vamos a describir dos construcciones generales de superficies: las *superficies topográficas* y las *superficies de nivel*. Ambas son en realidad modelos locales universales: localmente cualquier superficie es topográfica y es de nivel. Esto se puede reformular de una manera más intuitiva diciendo que toda superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  se puede describir localmente: (i) mediante una ecuación explícita  $z = f(x, y)$  (salvo reordenar las letras) y (ii) mediante una ecuación implícita  $g(x, y, z) = 0$  (la primera es la solución de la segunda). En última instancia, esto no es sino el teorema de la función implícita.

Los ejemplos anteriores ilustran cómo se decide si un conjunto es una superficie diferenciable. En particular, la proyección sobre los planos coordenados es un muy buen método, que formalizamos a continuación.

**(2.1) Superficies topográficas o grafos.** (1) Sea  $D$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Como es bien sabido, el grafo de  $f$  es el conjunto

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\},$$

y resulta que este conjunto (descrito abreviadamente por la ecuación  $z = f(x, y)$ ) es una superficie diferenciable.

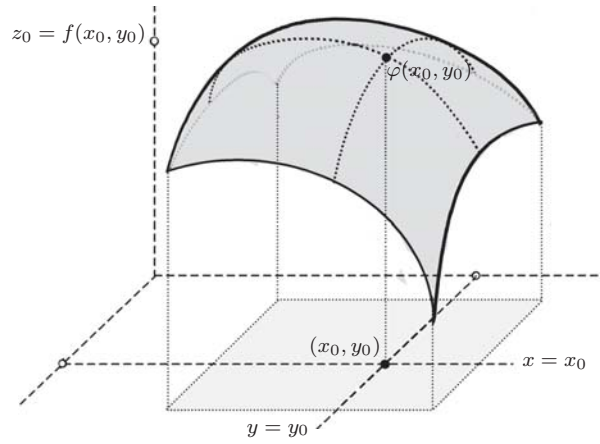
Para verlo basta una parametrización. En efecto, consideremos la aplicación biyectiva

$$\varphi : D \rightarrow S : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

En primer lugar esta aplicación es un homeomorfismo: su inversa es la restricción a  $S$  de la proyección lineal  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ , obviamente continua. Por otra parte,  $\varphi$  diferenciable, por serlo  $f$ . En fin, la matriz jacobiana de  $\varphi$  es

$$J_{\varphi}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix},$$

que tiene rango 2, de modo que  $d_q\varphi$  es inyectiva para todo  $q \in D$ .



(2) La parametrización anterior recibe el nombre de *parametrización de Monge*. Es una parametrización global.

(3) Las líneas coordenadas de la parametrización de Monge son las secciones de  $S$  por los planos paralelos a los dos planos  $y = 0$  y  $x = 0$ :

$$\varphi(y = y_0) = S \cap \pi^{-1}(y = y_0), \quad \varphi(x = x_0) = S \cap \pi^{-1}(x = x_0),$$

con vectores tangentes en  $p = \varphi(q)$ ,  $q = (x_0, y_0)$ :

$$\varphi_x = (1, 0, f_x(q)), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y(q)).$$

■

En la práctica es importante trabajar con parametrizaciones simples, y las parametrizaciones de Monge lo son. La proposición siguiente demuestra que todas las superficies se pueden parametrizar localmente de esta manera.

**Proposición 2.2.** *Sea  $S$  una superficie y sea  $p \in S$ . Entonces existe un entorno abierto  $W'$  de  $p$  en  $S$  que es un grafo. Con precisión, existe un abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  y una función diferenciable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $W'$  es uno de los grafos siguientes:*

$$\begin{aligned} &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x, z), (x, z) \in D\}, \\ &\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = f(y, z), (y, z) \in D\}. \end{aligned}$$

En otras palabras, *toda superficie*  $S \subset \mathbb{R}^3$  *se puede expresar localmente mediante una ecuación explícita*  $z = f(x, y)$  (salvo reordenar las variables).

*Demostración.* Según la definición de superficie, tenemos una parametrización local  $\varphi : U \rightarrow W = \varphi(U) \subset S$  de  $S$  con  $p \in W$ ; sea  $q = \varphi^{-1}(p)$ . Ya que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} = 2,$$

existe un menor de orden 2 no nulo; supongamos, sin pérdida de generalidad, que es el determinante de la submatriz:

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{pmatrix}.$$

Sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección sobre el plano  $xy$ . La matriz jacobiana en el punto  $q \in U$  de la aplicación diferenciable

$$\pi \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$$

es la matriz  $2 \times 2$  anterior. Como esa matriz tiene determinante no nulo, el teorema de la función inversa dice que existen un entorno abierto  $U' \subset U$  de  $q$  en  $\mathbb{R}^2$  y un entorno abierto  $D$  de  $d = \pi\varphi(q)$  en  $\mathbb{R}^2$  tales que  $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$  es un difeomorfismo.

Sea  $W' = \varphi(U')$ . Puesto que  $\varphi : U \rightarrow W$  es un homeomorfismo, se tiene que  $W'$  es abierto en  $S$ . Por la construcción  $D = \pi\varphi(U') = \pi(W')$  y  $\pi|_{W'} = (\pi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}|_{W'}$  es un homeomorfismo de  $W'$  sobre  $D$ . El homeomorfismo inverso es

$$F = \varphi \circ (\pi \circ \varphi)^{-1} : D \rightarrow W' : (x, y) \mapsto (h(x, y), g(x, y), f(x, y))$$

que es una aplicación diferenciable, y sus componentes  $h, g, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones diferenciables. El siguiente diagrama conmutativo resume la situación:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\varphi} & W' \subset S \subset \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \pi \circ \varphi & \uparrow F \quad \swarrow \pi \\ & & D \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Como  $\pi F(x, y) = (x, y)$  concluimos que  $F(x, y) = (x, y, f(x, y))$  y, por tanto,  $W' = F(D)$  es el grafo de  $f$ . Como  $p \in W'$  la proposición queda probada. ■

La construcción utilizada en la demostración anterior tiene otras consecuencias que que señalamos a continuación.

**Observaciones 2.3.** Sea  $S$  una superficie diferenciable y  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrización local suya. Consideremos un punto  $p \in \varphi(U) = W \subset S$ .

(1) Con las notaciones de la demostración última consideremos el entorno abierto  $V' \subset \pi^{-1}(D)$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $V' \cap S = W'$ , y la aplicación diferenciable

$$\mathcal{Y} = (\pi \circ \varphi|_{U'})^{-1} \circ \pi : V' \rightarrow U'.$$

Así, la restricción de  $\mathcal{Y}$  a  $V' \cap S = W'$  coincide con la de  $\varphi^{-1}$ . En otras palabras el homeomorfismo  $\varphi^{-1}|_{W'} : W' \rightarrow U'$  es la restricción de una aplicación diferenciable definida en un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , a saber,  $\mathcal{Y}$ . El diagrama conmutativo de la última demostración se convierte en el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{Y}|_{W'} = \varphi^{-1} & & W' \subset S \\ & \nearrow \varphi & & \searrow \varphi & \\ U' & & & & \cap \\ & \nwarrow \pi \circ \varphi & & \nearrow \mathcal{Y} & \\ \downarrow \pi \circ \varphi & & & & V' \subset \mathbb{R}^3 \\ D \subset \mathbb{R}^2 & & & \nwarrow \pi & \end{array}$$

(2) Supongamos ahora que tenemos otras coordenadas en  $p$ , es decir, otra parametrización  $\psi : E \rightarrow S$  con  $p \in \psi(E)$ . Consideramos el cambio de coordenadas

$$\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(\varphi(U)) \rightarrow \varphi^{-1}(\psi(E)),$$

Denotamos  $E' = \psi^{-1}(W')$ , y el diagrama conmutativo que tenemos ahora es

$$\begin{array}{ccccc} & & E' & \xrightarrow{\psi} & W' \subset S \\ & \nearrow \mathcal{Y} \circ \psi = \varphi^{-1} \circ \psi & \downarrow \varphi & & \searrow \varphi \\ & & U' & & \cap \\ & & \nwarrow \mathcal{Y} & & \nearrow \mathcal{Y} \\ & & & & V' \subset \mathbb{R}^3 \end{array}$$

En él aparece la composición de aplicaciones diferenciables

$$\mathcal{Y} \circ \psi : E' \xrightarrow{\psi} W' \subset V' \xrightarrow{\mathcal{Y}} U',$$

que coincide con el cambio  $\varphi^{-1} \circ \psi$  en el entorno abierto  $E'$  de  $\psi^{-1}(p)$ . En suma, el cambio de coordenadas es una aplicación diferenciable.

(3) Lo anterior vale también para el cambio inverso, que será también una aplicación diferenciable. Concluimos así que un cambio de coordenadas no es sólo un homeomorfismo sino un *difeomorfismo*. ■



Insistimos en que la discusión anterior es necesaria porque la noción de aplicación diferenciable sólo vale, de momento, para aplicaciones definidas en abiertos de un espacio afín. La extensión del cálculo diferencial a superficies será el tema de la lección 4.

El resultado siguiente supone una notable simplificación en la comprobación de que una determinada aplicación  $\varphi : U \rightarrow S$  sea una parametrización local de una superficie  $S$ . En efecto, resulta que si sabemos *a priori* que  $S$  es una superficie, entonces la condición de que  $\varphi$  sea un homeomorfismo sobre un abierto de  $S$ , se reduce a que  $\varphi$  sea inyectiva:

**Proposición 2.4.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable y sea  $\varphi : U \rightarrow S$ ,  $U$  abierto en  $\mathbb{R}^2$ , una aplicación que satisface las condiciones (2) y (3) de la definición 1.1, p.1. Si  $\varphi$  es inyectiva entonces  $\varphi$  es una parametrización.*

*Demostración.* Sea  $p \in W = \varphi(U)$ . Puesto que  $S$  es una superficie, por 2.2, p.18, existe un entorno abierto  $W'$  de  $p$  en  $S$  que es el grafo de una aplicación diferenciable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ ; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ .

Sea  $U' = \varphi^{-1}(W') \subset U$ . Obviamente  $U'$  es un subconjunto abierto de  $U$  y  $q = \varphi^{-1}(p) \in U'$ . Consideremos la aplicación  $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$ , donde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la proyección sobre el plano  $xy$ . Entonces su matriz jacobiana

$$J_{\pi \circ \varphi} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo en  $q$ . La justificación de este hecho es la siguiente. En  $W'$  se cumple  $z = f(x, y)$ , de modo que la matriz jacobiana de  $\varphi|_{U'}$  es

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ f_x(x, y)x_u + f_y(x, y)y_u & f_x(x, y)x_v + f_y(x, y)y_v \end{pmatrix}$$

La tercera fila de esta matriz es combinación lineal de las dos primeras, de modo que si la primera matriz mencionada no tuviese determinante distinto de 0 en  $q$ , sucedería que la matriz jacobiana de  $\varphi$  tendría rango  $< 2$  en  $q$ , contra la condición (3) de la definición de parametrización. Por otra parte, la matriz  $J_{\pi \circ \varphi}(q)$  es la matriz de la derivada de  $\pi \circ \varphi|_{U'} : U' \rightarrow D$  en el punto  $q$  y, por lo anterior, el teorema de la función inversa nos dice que  $\pi \circ \varphi$  induce por restricción un difeomorfismo de un entorno abierto  $U'' \subset U'$  de  $q$  sobre un entorno abierto  $E \subset$

$D$  de  $\pi\varphi(q)$ . Denotemos  $W'' = \varphi(U'') \subset W'$ . Como  $\pi(W'') = E$  y  $\pi|_{W'} : W' \rightarrow D$  es un homeomorfismo, se sigue fácilmente que  $W''$  es un entorno abierto de  $p = \varphi(q)$  en  $S$  y que  $\varphi$  induce por restricción un homeomorfismo de  $U''$  sobre  $W''$ . Puesto que  $p$  es cualquier punto de  $\varphi(U)$ , se concluye que la aplicación  $\varphi : U \rightarrow S$  es una aplicación abierta, y por tanto, si es inyectiva es un homeomorfismo sobre su imagen  $W$ . Ésta es la propiedad de  $\varphi$  que queríamos demostrar. ■

Lo anterior es en realidad un teorema de la función inversa para superficies diferenciables. La versión topológica es también cierta: *una aplicación continua inyectiva  $\phi : U \rightarrow S$  de un abierto  $U$  del plano en una superficie  $S$  es un homeomorfismo sobre un abierto de  $S$* . Este es el *teorema de invarianza del dominio*, un resultado muy profundo estrechamente ligado al teorema de Jordan para superficies.

**Ejemplo 2.5.** En 1.12(2), p.12, explicamos que la unión  $S \subset \mathbb{R}^3$  de los dos planos  $x = 0$  e  $y = 0$  no es una superficie diferenciable. Ahora podemos probar lo mismo más elegantemente. Supongamos que  $S : xy = 0$  fuera una superficie diferenciable, y consideremos la aplicación diferenciable  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S : (u, v) \mapsto (0, u, v)$ . Claramente su jacobiano tiene rango 2 en todos los puntos, luego como es inyectiva debería ser un homeomorfismo sobre un abierto de  $S$  (por la proposición anterior). Pero la imagen de  $\varphi$  es el plano  $x = 0$ , que no es abierto en  $S$ .

Este argumento es de naturaleza diferenciable, y lo que muestra es que  $S$  no es localmente *difeomorfo* al plano. El razonamiento de 1.12(2) era más topológico, y podría refinarse para probar que  $S$  no es localmente *homeomorfo* al plano. ■

En muchas ocasiones las superficies se definen mediante ecuaciones, es decir, como ceros de funciones diferenciables. Para constatar que se trata efectivamente de superficies se utiliza el *teorema de la función implícita*. Enunciamos ahora este teorema, que como se sabe es equivalente al de la función inversa.

**Teorema 2.6.** Sea  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un subconjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $p = (x_0, y_0, z_0)$  un punto de  $A$  y denotemos  $g(p) = a$ . Supongamos que  $g_z(p) \neq 0$ . Entonces existen un entorno abierto  $U$  de  $(x_0, y_0)$  en  $\mathbb{R}^2$ , un entorno abierto  $V$  de  $z_0$  en  $\mathbb{R}$  y una función diferenciable  $f : U \rightarrow V$  tales que

- (1)  $U \times V \subset A$ ,
- (2)  $f(x_0, y_0) = z_0$ , y
- (3)  $g^{-1}(a) \cap (U \times V)$  es el grafo de  $f$ .

Esto último significa que para cada punto  $(x, y, z)$  de  $U \times V$  las condiciones  $g(x, y, z) = a$  y  $z = f(x, y)$  son equivalentes, o en otras palabras, que para cada  $(x, y) \in U$ , la única solución en  $V$  de la ecuación  $g(x, y, z) = a$  es  $z = f(x, y)$ .

En las condiciones del teorema anterior, se dice que la función  $f$  está *implícitamente definida* por la ecuación  $g(x, y, z) = a$  o que la variable  $z$  se puede despejar en función de las otras dos.

**Definición 2.7.** Sea  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $a \in \mathbb{R}$ . Se dice que  $a$  es un *valor regular* de  $g$  si  $d_p g \neq 0$  para todo  $p \in g^{-1}(a)$ .

La condición  $d_p g \neq 0$  significa que al menos una de las tres derivadas parciales de  $g$  en  $p$  es distinta de cero; en otras palabras, el *gradiente*

$$\nabla_p g = (g_x(p), g_y(p), g_z(p))$$

es distinto de cero. Los puntos  $p$  que verifican esta condición  $\nabla_p g \neq 0$  se llaman *puntos regulares*.

Nuestro interés en el teorema de la función implícita y en las nociones anteriores se plasma en el siguiente resultado:

**Proposición 2.8.** Sea  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $A$  es un abierto de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $a \in g(A)$  es un valor regular de  $g$ , entonces  $g^{-1}(a)$  es una superficie.

*Demostración.* Si  $p \in S = g^{-1}(a)$ , se tiene que  $p$  es un punto regular. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $g_z(p) \neq 0$ . Aplicando el teorema de la función implícita y utilizando la notación de su enunciado, se tiene que  $W = g^{-1}(a) \cap (U \times V)$  es un entorno abierto de  $p$  en  $S$  y el grafo de una función diferenciable. Por 2.1(1), p. 17,  $S$  es una superficie. ■

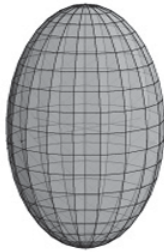
Una superficie definida del modo descrito en la proposición anterior se llama *superficie (diferenciable) de nivel* (de la función que se utilice). A continuación enumeramos algunos ejemplos (entre los que revisamos los de la lección anterior).

**Ejemplos 2.9.** (1) Un plano afín  $S$  es la superficie de nivel de una forma lineal  $g(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$  con algún coeficiente no nulo. Por tanto  $\nabla_p g = (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$  para cualquier  $p$ , y esto quiere decir que cualquier  $a \in \mathbb{R}$  es valor regular, y define la superficie de nivel  $S = g^{-1}(a)$ .

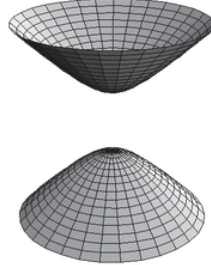
(2) Una esfera  $S \subset \mathbb{R}^3$  de radio  $r > 0$  tiene ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 > 0$ , luego es del tipo  $g^{-1}(r^2)$  para la función diferenciable  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Como  $\nabla_p g = (2x, 2y, 2z)$ , este gradiente sólo se anula para  $x = y = z = 0$ , luego si  $p \in S$  es no nulo. Por tanto  $a = r^2$  es un valor regular y tenemos la correspondiente superficie de nivel  $S = g^{-1}(r^2)$ .

(3) Más generalmente consideremos una función diferenciable  $g(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ , con algún coeficiente no nulo. El gradiente  $\nabla_p g = (2\alpha x, 2\beta y, 2\gamma z)$  se anula si y sólo si  $\alpha x = \beta y = \gamma z = 0$ , en cuyo caso  $\alpha x^2 = \beta y^2 = \gamma z^2 = 0$  y  $g(x, y, z) = 0$ . Por tanto  $a = 1$  es un valor regular de  $g$ , y tenemos la superficie de nivel  $S : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$  (no todos los coeficientes negativos, para que  $S \neq \emptyset$ ). Estas superficies de nivel son bien conocidas:

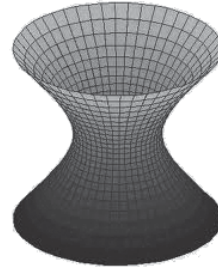
- (i) Para  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  son los *elipsoides*, que si  $\alpha = \beta = \gamma$  son esferas.
- (ii) Para  $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma > 0$  son los *hiperboloïdes de dos hojas*.
- (iii) Para  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$  son los *hiperboloïdes de una hoja*.



Elipsoide



Hiperboloïde de dos hojas



Hiperboloïde de una hoja

(4) Un cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = r^2 > 0$  es una superficie de nivel de  $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ . El gradiente  $\nabla_p g = (2x, 2y, 0)$  se anula sólo si  $x = y = 0$ , cosa que no pasa en ningún punto de  $S$ . Por tanto  $S$  se describe como la superficie de nivel  $g^{-1}(r^2)$  del valor regular  $a = r^2$ .

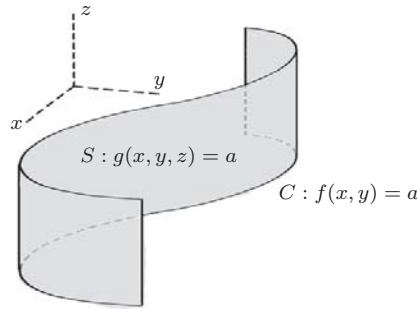
(5) Se pueden considerar cilindros más generales que el circular del ejemplo anterior. Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y sea  $a \in \mathbb{R}$  tal que en ningún punto  $(x, y) \in f^{-1}(a)$  se anulan ambas derivadas parciales  $f_x, f_y$ . Entonces  $a$  es un valor regular de la función

$$g : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y),$$

y la superficie de nivel

$$S = g^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, f(x, y) = a\}$$

es una superficie diferenciable.



Claramente, todas las secciones planas  $S \cap \{z = c\}$  por planos horizontales son copias de la curva  $C \subset U$  de ecuación  $f(x, y) = a$ , y de modo natural, denominamos  $S$  *cilindro (generalizado) sobre  $C$* .

(6) Analicemos el cono doble  $S : x^2 + y^2 = z^2$ . Sabemos que no es superficie diferenciable por su vértice  $p_0 = (0, 0, 0)$ . Representemos  $S$  como imagen inversa  $S = g^{-1}(0)$  de la función diferenciable  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$  y consideremos el gradiente  $\nabla_p g = (2x, 2y, -2z)$ . Resulta que el gradiente sólo se anula en el origen  $p_0$ . Esto explica que no podamos concluir que  $S$  sea superficie diferenciable, mientras que sí lo podemos concluir para  $S \setminus \{p_0\}$ . ■

Lo mismo que todas las superficies son localmente grafos (2.2), todas las superficies son localmente superficies de nivel:

**Proposición 2.10.** *Sea  $p$  un punto de la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces existe un entorno abierto  $W'$  de  $p$  en  $S$  que es una superficie de nivel. Con precisión, existen un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una función diferenciable  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $0$  es un valor regular de  $g$  y  $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$ .*

Es decir, toda superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  se puede expresar localmente mediante una ecuación implícita  $g(x, y, z) = 0$ .

*Demostración.* Por la proposición 2.2, p.18, existe un entorno abierto  $W'$  de  $p$  en  $S$  tal que  $W'$  es el grafo de una función diferenciable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida en

un abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Por ejemplo,  $W' = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$ . Sea  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $A \cap S = W'$  y definamos la función diferenciable

$$g : V = (D \times \mathbb{R}) \cap A \rightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto z - f(x, y).$$

Ya que  $g_z \equiv 1$  se tiene que 0 es un valor regular de  $g$  y, obviamente,  $W' = g^{-1}(0) = V \cap S$ . ■

En relación con la proposición anterior es posible demostrar que toda superficie conexa  $S$  que es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^3$  es una superficie de nivel. De hecho, existe una función diferenciable  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que tiene al cero como valor regular y tal que  $S = g^{-1}(0)$ . Este importante y nada sencillo resultado, que excede el alcance de este texto, es en esencia equivalente a la versión para superficies del *teorema de Jordan para curvas planas*.

Terminamos esta lección revisando las superficies de revolución como superficies de nivel.

**(2.11) Superficies de revolución como de nivel.** Sea  $C$  una curva contenida en el semiplano  $P = \{x > 0, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ . Supongamos que  $C$  viene dada por una ecuación implícita  $g(x, z) = 0$ , lo que significa que no se anulan simultáneamente las dos derivadas parciales  $g_x, g_z$ . Entonces el conjunto  $S$  obtenido rotando  $C$  alrededor del eje  $z$  es la superficie de nivel definida por la ecuación

$$f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

En efecto, esta función  $f$  es diferenciable en el abierto  $x^2 + y^2 \neq 0$ , que contiene al conjunto  $S$  (si  $p = (x, y, z) \in S$ , entonces  $q = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z) \in C \subset P$ ). Para ver que  $a = 0$  es un valor regular de  $f$  tenemos:

$$\nabla_p f = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} g_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} g_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), g_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \right).$$

Si la derivada parcial  $g_z$  no se anula,  $\nabla_p f \neq 0$ . En otro caso, es la otra parcial  $g_x$  la no nula, y como  $x^2 + y^2 \neq 0$  también concluimos que  $\nabla_p f \neq 0$ . En suma,  $a = 0$  es un valor regular y  $S$  una superficie diferenciable de nivel. ■

Aplicando lo anterior al toro de revolución  $S$  de 1.11, p. 10, lo podemos describir como superficie de nivel mediante la ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 + z^2 = r^2.$$

Es bueno comparar en este ejemplo las ventajas e inconvenientes de esta descripción y la parametrización

$$x = (r \cos u + c) \cos v, \quad y = (r \cos u + c) \sin v, \quad z = r \sin u.$$

## Problemas

**Número 1.** Demostrar que los *paraboloides*  $S : ax^2 + by^2 = z$ ,  $a, b \neq 0$ , son superficies diferenciables. ¿Tienen alguna parametrización global?

**Número 2.** Hallar un atlas del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  inspirándose en la parametrización de la esfera del Ejemplo 1.9, p. 8.

**Número 3.** Demostrar que  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^3 = 1\}$  es una superficie. Encontrar parametrizaciones locales que definan un atlas.

**Número 4.** Considérese el conjunto  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ . Probar que  $S$  es una superficie. Encontrar dos parametrizaciones que definan un atlas.

**Número 5.** Sea  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación diferenciable definida en un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ , y sea  $C$  el conjunto de sus puntos críticos; sea  $a \in \mathbb{R}$ . Probar que  $S = f^{-1}(a) \setminus C$  es una superficie (siempre que  $S \neq \emptyset$ ).

**Número 6.** Probar que las ecuaciones  $x^2 + y^2 z^2 = 1$  y  $x^2 + y^4 + z^6 = 1$  definen superficies. Estudiar su compacidad.

**Número 7.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el hiperboloide de una hoja de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Hallar unas ecuaciones de  $S$  como superficie de revolución.

**Número 8.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el hiperboloide de una hoja de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Mostrar que se puede expresar como imagen de la aplicación

$$\phi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \rightarrow (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v),$$

y que esta aplicación es biyectiva sobre  $S$ . Deducir que por cada punto de  $S$  pasa una recta totalmente contenida en  $S$ , correspondiendo a un valor fijo de  $u$ , y que dos cualesquiera de estas rectas tienen intersección vacía.

**Número 9.** Probar que el hiperboloide de dos hojas  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$  es una superficie que tiene exactamente dos componentes conexas.

**Número 10.** Sea  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación diferenciable de la que 0 es valor regular. Mostrar que la superficie de nivel  $S = g^{-1}(0)$  desconecta el espacio afín. (Recuérdese que en un extremo de una función diferenciable la derivada se debe anular).

## Notas

1. Una de las primeras ocasiones, si no la primera, en las que aparece en la literatura un problema relacionado con el *teorema de la función implícita* es el trabajo de SIR ISAAC NEWTON (1643–1727) *De Analysi per Aequationes Infinitas*, de 1669. Newton se refiere al problema de expresar la solución de la ecuación

$$Y^3 + a^2Y - 2a^3 + axY - x^3 = 0$$

como una serie en  $x$  que sea válida cerca de  $x = 0$  y que dé la raíz  $a \neq 0$  cuando  $x = 0$ . El cálculo efectivo de esa serie lo realiza en el párrafo titulado *Exempla per Resolutionem Aequationum Affectarum* y el método desarrollado le llevaría a la construcción del *polígono de Newton*, utilizado para estudiar las ecuaciones polinomiales.

Posteriormente, JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) se ocuparía de un problema de mecánica celeste que le llevaría a formular un resultado que se puede interpretar como un caso especial del teorema de la función inversa que, como sabemos, es formalmente equivalente al de la función implícita. Se conoce con el nombre de *teorema de inversión de Lagrange* y se refiere a funciones analíticas en el plano complejo. El teorema juega un papel importante en el estudio de la mecánica celeste, actividad central en la matemática de los siglos XVIII y XIX.

2. La primera demostración rigurosa del teorema de la función implícita se debe a AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789–1846), aunque está formulado, como en el caso de Lagrange, en el marco del análisis complejo. De hecho, el resultado de Lagrange fue una motivación importante para Cauchy. Se trata de un teorema de la función implícita para funciones holomorfas y proporciona una representación integral de la función implícita. El resultado forma parte de la llamada *Primera Memoria de Turín*, que Cauchy escribió durante su exilio en esa ciudad italiana. La memoria, como tal, nunca fue publicada, pero todos sus resultados están esparcidos en sus obras posteriores. Solo más tarde, cuando fue aumentando el interés por el análisis real, se probaría el teorema de la función implícita para un número arbitrario de variables reales, resultado que es debido a ULISSE DINI (1845–1918).

A partir de aquí, otros autores obtuvieron teoremas de la función implícita en varios contextos: el espacio euclídeo, variedades, espacios de Hilbert, espacios de Banach... Este teorema es un instrumento para resolver ecuaciones, que pueden aparecer planteadas en diferentes tipos de espacios e involucrar diferentes tipos de funciones. Una de las formas más potentes del teorema es debida a JOHN NASH (1928–2015) y JÜRGEN MOSER (1928–1999). Fue obtenido primero por Nash en su solución del problema de *inmersión de variedades riemannianas*. Más tarde, Moser aislaría el resultado del estricto marco del problema de inmersión y lo transformaría en un instrumento importante en Análisis Funcional, en Ecuaciones en Derivadas Parciales y en la Teoría de Funciones de Varias Variables Complejas.



**3.** Para dar una idea de la efectividad del teorema basta con decir que es un instrumento básico en la solución de Nash, que demostró que toda variedad riemanniana se sumerge *isométricamente* en el espacio euclídeo. El requisito de que la inmersión sea isométrica es el que confiere la máxima dificultad al problema, y lo conduce al campo de las ecuaciones en derivadas parciales. Cuando Nash lo resolvió, el problema llevaba mucho tiempo abierto y era considerado uno de los verdaderamente importantes. Digamos por otra parte que aun sin requerir la condición de isometría, la existencia de una inmersión diferenciable o topológica es un resultado muy significativo de HASSLER WHITNEY (1907–1989), con la famosa dimensión genérica de inmersión  $2n + 1$ . El propio Whitney mejoró esa dimensión a  $2n$  (aunque ya no genéricamente).

**4.** En la literatura científica existen muy pocas referencias a los aspectos históricos del teorema de la función implícita. Esta carencia ha sido remediada recientemente con el libro de STEVEN GEORGE KRANTZ (1951–) y HAROLD RAYMOND PARKS (1949–) titulado *The implicit function theorem. History, theory and applications*, de 2002. Aquí los autores plantean el prototipo o paradigma de teorema de la función implícita en los siguientes términos:

*Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos,  $F : X \times Y \rightarrow Z$  una función continua y  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ ,  $z_0 \in Z$  puntos tales que  $F(x_0, y_0) = z_0$ . Un teorema de la función implícita debe describir una condición satisfecha por  $F$  en  $(x_0, y_0)$  que implique la existencia de entornos  $U$  de  $x_0$ ,  $V$  de  $y_0$  y una función  $f : U \rightarrow V$  que satisfaga las condiciones: (1)  $f(x_0) = y_0$ , (2)  $F(x, f(x)) = z_0$  para todo  $x \in U$ . Además el teorema debe asegurar que la función  $f$  sea única y que tenga buen comportamiento en algún sentido apropiado.*

**5.** Lagrange nació en Turín en 1736. Su nombre italiano era Giuseppe Lodovico Lagrangia, aunque más tarde adoptaría la forma francesa. Lagrange fue en buena medida un autodidacta en el campo de las matemáticas, a pesar de lo cual cuando sólo tenía 19 años obtuvo importantes resultados en el cálculo de variaciones que merecieron el reconocimiento de Euler. Al final de su vida, Lagrange consideraría que estas investigaciones iniciales fueron su mejor trabajo. Como consecuencia de esta labor científica fue nombrado en 1755 profesor de la Escuela Real de Artillería de Turín. En 1763 fue invitado a París, donde fue muy bien recibido por los medios científicos y permaneció hasta principios de 1765. Sin embargo, sólo a partir de 1766, cuando recibió un oferta para suceder a Euler en Berlín, encontraría Lagrange una posición acorde con su categoría científica: ese año fue nombrado director de la Academia de Ciencias de Berlín. Permaneció en Berlín durante veinte años, manteniendo una producción científica de extraordinaria calidad, entre la que se incluyen varios premios de la Academia de Ciencias de París. En el año 1787 Lagrange se trasladó a París, en calidad de miembro de esa misma Academia. Allí participó activamente en las labores de estandarización de los pesos y medidas y enseñó Análisis en la Escuela Politécnica hasta 1799. Napoleón reconoció su labor científica otorgándole el título de Conde del Imperio.

Lagrange murió el 11 de abril de 1813 en París.

**6.** Una de las motivaciones de Lagrange era la aplicación de las Matemáticas a la Física. En particular, describió la trayectoria de un objeto sometido a ciertas fuerzas como la solución de un problema de optimización en el cálculo de variaciones. Su tratamiento de los problemas mecánicos se basaba en el *principio de la mínima acción*, que asegura que una partícula sigue siempre la trayectoria que minimiza dicha magnitud física.

Ya en Berlín, Lagrange hizo importantes contribuciones a la Mecánica Celeste, en particular al *problema de los tres cuerpos*. Su trabajo al respecto le valió compartir con Euler el premio de la Academia de Ciencias de París de 1772. Sus ideas configuran una visión original de la mecánica, la llamada *Mecánica Lagrangiana*, que supone una forma nueva de describir el universo físico y sigue siendo influyente en la Física Matemática actual. Fue durante su estancia en Berlín cuando escribió su celebre tratado *Mécanique analytique*, en el que se lleva a cabo la transformación de la mecánica en una rama del análisis matemático.

Pero Lagrange es autor de resultados muy importantes en otras variadas áreas de las matemáticas. Desde la Teoría de Números hasta la de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias pasando por el Análisis Matemático, donde contribuyó a la teoría de funciones encontrando desarrollos en serie de gran utilidad. También desarrolló la técnica de integración por partes, tan familiar en Cálculo Infinitesimal.

## Plano tangente

---

Los vectores tangentes desempeñan, según hemos visto, un papel fundamental en la teoría de curvas. El objetivo de esta lección es desarrollar el concepto completamente para superficies. En realidad, es fácil definir vector tangente:

**Definición 3.1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable. Una curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya traza está contenida en  $S$  se denota simplemente  $\alpha : I \rightarrow S$ , y decimos que  $\omega = \alpha'(t) \in \mathbb{R}^3$  es un vector *tangente a  $S$  en  $p = \alpha(t)$* . Dado  $p \in S$ , denotamos  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$  el conjunto de todos esos vectores tangentes.

Denominamos: (i) a  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$  *plano tangente* a la superficie en  $p$ , y (ii) a  $p + T_p S$  *plano afín tangente* a  $S$  en  $p$ .

A continuación justificamos la terminología anterior vía una descripción alternativa de  $T_p S$ .

**Proposición 3.2.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable y  $p$  un punto suyo. Sea  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrización de un entorno de  $p$ , con  $p = \varphi(q)$ . Entonces  $T_p S$  es la imagen de la aplicación lineal  $d_q \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En particular,  $T_p S$  es verdaderamente un plano vectorial de  $\mathbb{R}^3$  y  $d_q \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p S$  es un isomorfismo lineal.

*Demostración.* En primer lugar, observamos que la aplicación lineal  $d_q \varphi$  es inyectiva por ser  $\varphi$  una parametrización, luego su imagen es efectivamente un plano vectorial. Comprobemos ahora que  $T_p S = d_q \varphi(\mathbb{R}^2)$ .

Supongamos primero que tenemos un vector  $\omega \in d_q \varphi(\mathbb{R}^2)$ , es decir,  $\omega = d_q \varphi(w)$  para cierto  $w \in \mathbb{R}^2$ . Para  $|t|$  suficientemente pequeño la curva plana  $\beta(t) = q + tw$  tiene la traza contenida en  $U$  y la composición  $\alpha = \varphi \circ \beta$  es una curva de  $S$ . Claramente  $\alpha(0) = p$ , y

$$\alpha'(0) = d_q \varphi(\beta'(0)) = d_q \varphi(w) = \omega.$$

Por tanto  $\omega$  es un vector tangente a  $S$  en  $p$ .

Recíprocamente, sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva que pasa por  $p$ , digamos  $\alpha(t_0) = p$ . Debemos ver que  $\omega = \alpha'(t_0)$  está en  $d_q\varphi(\mathbb{R}^2)$ . Para ello, según 2.3(1), p.20, elegimos un entorno abierto  $W' \subset W = \varphi(U)$  de  $p$  tal que  $\varphi^{-1}|_{W'}$  tiene una extensión diferenciable  $\Upsilon : V' \rightarrow U$  definida en un entorno abierto  $V'$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$ ; reduciendo  $I$  podemos suponer que la traza de  $\alpha$  está contenida en  $W'$ . Entonces  $\beta = \Upsilon \circ \alpha : I \rightarrow U$  es una curva diferenciable plana con vector tangente  $w = \beta'(t_0)$  en  $q = \beta(t_0)$ . Como por construcción  $\alpha = \varphi \circ \beta$ , de la regla de la cadena deducimos

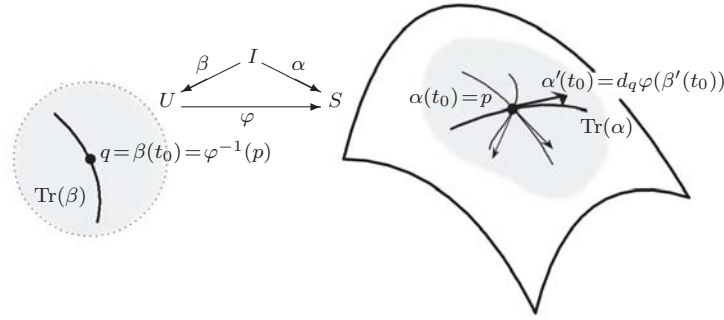
$$\omega = \alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0)) = d_q\varphi(w).$$

Así pues,  $\omega$  está efectivamente en la imagen de la aplicación lineal  $d_q\varphi$ . ■

**Observación 3.3.** Sean  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de nuestra superficie  $S$ ,  $p \in W$  y  $q = \varphi^{-1}(p)$ . En la demostración anterior se comparan curvas de  $U$  y de  $W$  vía  $\varphi$ : toda curva plana  $\beta : I \rightarrow U$  corresponde a una única curva de  $S$  definida por composición  $\alpha = \varphi \circ \beta : I \rightarrow W$ , que denotaremos

$$\alpha(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

La figura ilustra esta construcción:



Por la regla de la cadena tenemos  $\alpha'(t_0) = d_q\varphi(\beta'(t_0))$ , lo que se expresa en forma matricial así

$$\begin{pmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t_0) \\ v'(t_0) \end{pmatrix}.$$

La matriz  $3 \times 2$  anterior es la matriz jacobiana de la parametrización. ■

**(3.4) Bases del plano tangente.** Sea  $S$  una superficie diferenciable, y  $p \in S$  un punto suyo con plano tangente  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ . Como  $T_p S$  es un plano, es decir, tiene

dimensión 2, para determinarlo basta encontrar dos vectores tangentes independientes, es decir, encontrar dos curvas de la superficie con tangentes distintas; esos dos vectores tangentes serán una base del plano tangente. Aunque en casos concretos esto puede hacerse por tanteo muy rápidamente, lo más sencillo en general es tomar las líneas coordenadas de una parametrización de un entorno del punto dado  $p$ .

(1) Sea  $\varphi : U \rightarrow S$  una parametrización de  $S$ , y  $p = \varphi(q) \in S$  con  $q \in U$ . Como  $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$  es un isomorfismo lineal, transforma la base estándar  $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  en una base  $\mathcal{B}_\varphi$  de  $T_pS$ ; explícitamente:

$$\begin{cases} d_q\varphi(e_1) = \varphi_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) = \varphi_{u,p}, \\ d_q\varphi(e_2) = \varphi_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q)) = \varphi_{v,p}. \end{cases}$$

Como ya sabemos, estos vectores  $\varphi_{u,p}$  y  $\varphi_{v,p}$  son los vectores tangentes a las líneas coordenadas en el punto  $p$ . Por otra parte,  $T_pS$  se determina mediante su *dirección normal*, (o sea, ortogonal) dada por el producto vectorial

$$\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}.$$

Cuando no haya riesgo de confusión omitiremos los subíndices  $p$ .

(2) Las coordenadas respecto de esta base  $\mathcal{B}_\varphi$  se obtienen muy fácilmente. Todo vector  $\omega \in T_p(S)$  se escribe  $\omega = d_q\varphi(w)$  para un único  $w \in \mathbb{R}^2$ , y entonces las coordenadas de  $w$  respecto de la base estándar  $\mathcal{E}$  son las de  $\omega$  respecto de la base  $\mathcal{B}_\varphi = d_q\varphi\{e_1, e_2\}$ . Con un pequeño abuso de lenguaje podemos decir que  $(d_q\varphi)^{-1}(\omega)$  son las coordenadas de  $\omega$  respecto de la base  $\mathcal{B}_\varphi$ .

(3) Sea  $\psi$  otra parametrización de un entorno de  $p$ , digamos con  $p = \psi(r)$ , con coordenadas  $(s, t)$ . Tenemos entonces la base  $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$  de  $T_pS$  y queremos comparar las coordenadas respecto de  $\mathcal{B}_\psi$  y respecto de  $\mathcal{B}_\varphi$ . Para ello derivamos la composición  $\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \psi) = \psi$  y obtenemos

$$d_q\varphi \circ d_r(\varphi^{-1} \circ \psi) = d_r\psi,$$

lo que significa que para  $\omega \in T_pS$  se tiene

$$d_r(\varphi^{-1} \circ \psi)((d_r\psi)^{-1}(\omega)) = (d_q\varphi)^{-1}(\omega).$$

Teniendo en cuenta (2), esto significa que multiplicando coordenadas respecto de  $\mathcal{B}_\psi$  por la matriz jacobiana de  $\varphi^{-1} \circ \psi$  obtenemos coordenadas respecto de

$\mathcal{B}_\varphi$ . Esto es, la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}_\psi$  a  $\mathcal{B}_\varphi$  es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas  $\varphi^{-1} \circ \psi$ . O aún, las dos columnas de esa matriz jacobiana son respectivamente las coordenadas de  $\psi_s$  y de  $\psi_t$  respecto de  $\mathcal{B}_\varphi$ . ■

Estudiemos ahora los ejemplos 1.7, p.4, de la primera lección.

**Ejemplos 3.5.** (1) Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  un plano afín con dirección  $\vec{S}$ . Entonces el plano tangente a  $S$  en cualquier punto suyo  $p$  es  $T_p S = \vec{S}$ .

En efecto,  $S$  se puede parametrizar (1.7(1)) mediante

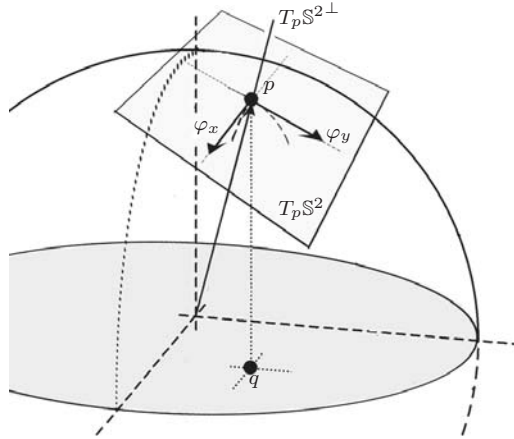
$$\varphi(u, v) = p + u\varpi + v\varpi', \quad \vec{S} = L[\varpi, \varpi'],$$

de modo que  $\varphi_u = \varpi$ ,  $\varphi_v = \varpi'$ , y  $T_p S = L[\varpi, \varpi']$ .

(2) La esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  se recubre con parametrizaciones del tipo

$$\varphi(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

(caso  $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} > 0$ , 1.7(2)),



de modo que

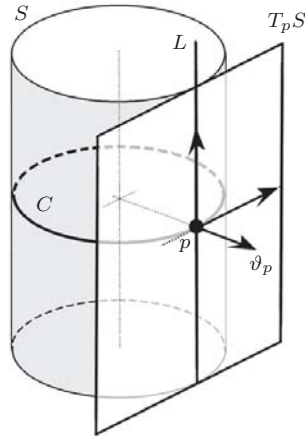
$$\begin{cases} \varphi_x = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = (1, 0, -\frac{x}{z}), \\ \varphi_y = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) = (0, 1, -\frac{y}{z}). \end{cases}$$

Estos dos vectores generan el plano tangente  $T_p\mathbb{S}^2$  en el punto  $p = (x, y, z)$ . Ese es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right),$$

o mejor, al vector  $(x, y, z)$ . En otras palabras, *el plano tangente a la esfera en  $p$  es perpendicular al rayo que une el centro de la esfera con  $p$ .*

(3) Estudiemos ahora el cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = 1$  con eje de rotación  $x = 0, y = 0$ . En este caso es fácil encontrar dos curvas de  $S$  que pasen por un punto  $p = (x_0, y_0, z_0)$  dado y tengan tangentes distintas: la circunferencia  $C : x^2 + y^2 = 1, z = z_0$  y la recta  $L : x = x_0, y = y_0$ .



Los vectores tangentes a esas curvas son  $(-y_0, x_0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ , y forman una base de  $T_p S$ . Como

$$\vartheta = (-y_0, x_0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (x_0, y_0, 0),$$

resulta que el plano tangente en cuestión es *perpendicular al rayo ortogonal al eje del cilindro que pasa por  $p$ .*

(4) En 1.7(4), p.6, parametrizamos el helicoides  $S \subset \mathbb{R}^3$  mediante

$$x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

de modo que el plano tangente en un punto arbitrario está generado por los vectores

$$\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0).$$

La dirección normal al plano tangente viene dada por

$$\vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \operatorname{sen} u, b \cos u, -v).$$

Pero como  $v^2 = x^2 + y^2$ , podemos escribir

$$\vartheta = \left( \frac{by}{\mp \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{bx}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \mp \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

(los signos se deben discutir según las coordenadas de  $p$ ). Desde el punto de vista geométrico se ve que el plano tangente contiene siempre la dirección ortogonal al eje del cilindro que pasa por  $p$ . ■

A continuación analizamos los planos tangentes a superficies descritas mediante ecuaciones locales según la lección 2.

**(3.6) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación explícita.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie definida por una ecuación  $z = f(x, y)$ , es decir, definida como el grafo de una función diferenciable  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideramos su parametrización de Monge  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , y vemos que el plano tangente en el punto  $p = (x, y, f(x, y))$  está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y);$$

es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta = \varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1). \quad \blacksquare$$

**(3.7) Cálculo del plano tangente mediante una ecuación implícita.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  la superficie definida por una ecuación implícita  $g(x, y, z) = a$ , es decir, como una superficie de nivel de la función diferenciable  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  según 2.8, p. 23. Para calcular el plano tangente  $T_p S$  en un punto  $p \in S$  recordamos que en un entorno de  $p$  la superficie de nivel tiene una ecuación explícita  $z = f(x, y)$  que la define como un grafo (suponemos por ejemplo que  $g_z(p) \neq 0$ ). Entonces sabemos por el apartado anterior que  $T_p S$  es el plano perpendicular al vector

$$\vartheta_p = (-f_x, -f_y, 1),$$

y debemos calcular esas derivadas parciales de  $f$ . Para ello derivamos implícitamente la igualdad  $g(x, y, f(x, y)) = a$  y obtenemos las dos igualdades siguientes:

$$g_x + g_z f_x = 0, \quad g_y + g_z f_y = 0.$$



Despejando los términos que interesan queda:

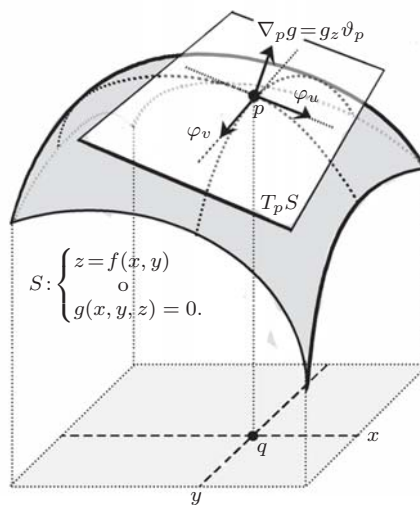
$$f_x = -g_x/g_z, \quad f_y = -g_y/g_z.$$

Por tanto,  $T_p S$  es perpendicular al vector

$$g_z \vartheta_p = (g_x, g_y, g_z) = \nabla_p g.$$

Es decir, el plano tangente a una superficie de nivel es *perpendicular al gradiente* de la ecuación implícita de la superficie. Otra forma de decir esto mismo es que  $T_p S$  es el núcleo de la aplicación lineal  $d_p g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

A continuación ilustramos la descripción de los dos párrafos anteriores:



El lector puede aplicar lo anterior a los ejemplos 2.9, p.23. Veamos a continuación una aplicación interesante:

**(3.8) Intersección de superficies.** Sean  $S, S' \subset \mathbb{R}^3$  dos superficies diferenciables que se cortan, y  $p \in S \cap S'$  un punto de ambas. Si los planos tangentes  $T_p S$  y  $T_p S'$  son iguales decimos que las superficies *son tangentes* en  $p$ , y si son distintos decimos que son *transversales* en  $p$ . La noción de transversalidad, que aparece constantemente en campos diversos de la Matemática, permite aquí describir la intersección  $S \cap S'$ . En efecto, se cumple

Si  $S$  y  $S'$  son transversales en un punto  $p \in S \cap S'$ , entonces  $p$  tiene un entorno abierto  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que la intersección  $S \cap S' \cap V$  es la traza de un arco de Jordan  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

En efecto, por 2.10, p. 25, existe una función diferenciable  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $S' \cap V = g^{-1}(0)$ , siendo 0 un valor regular de  $g$ . Consideremos ahora una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de un entorno  $W$  de  $p$  en  $S$ , con  $q = \varphi^{-1}(p)$ . Afirmamos que la función diferenciable  $h = g \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tiene alguna derivada parcial en  $q$  no nula.

Para verlo, observamos que

$$\begin{cases} h_u(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_1) = d_p g(\varphi_u), \\ h_v(q) = d_p(g \circ \varphi)(e_2) = d_p g(\varphi_v). \end{cases}$$

Si estas dos derivadas parciales fueran nulas, entonces la aplicación lineal  $d_p g$  se anularía en la base  $\mathcal{B}_\varphi$  de  $T_p S$ , es decir, se anularía en todo  $T_p S$ . Pero el núcleo de  $d_p g$  es el plano tangente  $T_p S'$ , luego  $T_p S \subset T_p S'$ , en contra de la transversalidad.

Probada la afirmación sobre  $h$ , sabemos que  $h(u, v) = 0$  es entonces la traza  $C$  de un arco de Jordan  $\beta : I \rightarrow U^q$  en un entorno  $U^q \subset U$  de  $q$ . Tomamos un entorno abierto  $V^p$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $S \cap V^p = \varphi(U^q)$  y concluimos que

$$S \cap S' \cap V^p = \varphi(C)$$

es la traza del arco de Jordan  $\alpha = \varphi \circ \beta$ . ■

Una consecuencia del resultado anterior es que si una superficie  $S$  y un plano afín  $H$  se cortan en un punto aislado  $p$ , entonces  $H$  es el plano afín tangente a  $S$  en el punto  $p$ .

En cuanto a las superficies de revolución, tenemos lo siguiente.

**(3.9) Plano tangente a una superficie de revolución.** Sea  $S$  una superficie de revolución, y  $p \in S$ . Vamos a calcular  $T_p S$  de dos maneras diferentes y ver cómo concuerdan. Debemos ser cuidadosos con las notaciones.

(1) En primer lugar consideramos  $S$  parametrizada como 1.10, p. 9, mediante  $\varphi(u, v) = (x, y, z)$  con

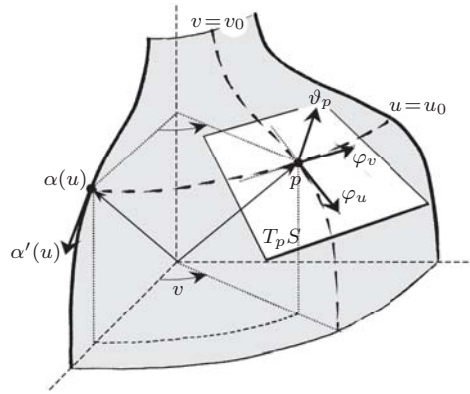
$$x = \zeta(u) \cos v, \quad y = \zeta(u) \sin v, \quad z = \xi(u); \quad \zeta(u) = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Entonces el plano tangente en un punto arbitrario de coordenadas  $(u, v)$  está generado por los vectores

$$\varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), \quad \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0),$$

y un vector perpendicular es

$$\vartheta_p = (-\xi'(u)\zeta(u) \cos v, -\xi'(u)\zeta(u) \sin v, \zeta'(u)\zeta(u)).$$



(2) Por otra parte sabemos que  $S$  se puede describir como una superficie de nivel (2.11, p.26). Para ello se considera una ecuación implícita  $G(x, z) = 0$  de la curva del plano  $y = 0$  que genera la superficie, y resulta que  $S$  viene dada por

$$F(x, y, z) = G(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Entonces  $T_p S$  es perpendicular al gradiente de esta función  $F$ , que es

$$\nabla_p F = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z), G_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \right).$$

(3) Por supuesto, los vectores  $\vartheta_p$  y  $\nabla_p F$  son proporcionales, pero comprobarlo es educativo. Para hacerlo derivamos la igualdad  $G(\zeta(u), \xi(u)) = 0$  y resulta:

$$G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \zeta'(u) + G_z(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \xi'(u) = 0,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \xi'(u) \nabla_p F &= G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) \left( \frac{x \xi'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y \xi'(u)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\zeta'(u) \right) \\ &= G_x(\sqrt{x^2 + y^2}, z) (\xi'(u) \cos v, \xi'(u) \sin v, -\zeta'(u)), \end{aligned}$$

que es claramente proporcional a  $\vartheta_p$ . ■

Una vez explicado abundantemente cómo se calculan planos tangentes, terminamos la lección con una observación importante. En 3.4(1), p.32, definimos para cada parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ , tres aplicaciones diferenciables

$$W \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, \vartheta_p$$

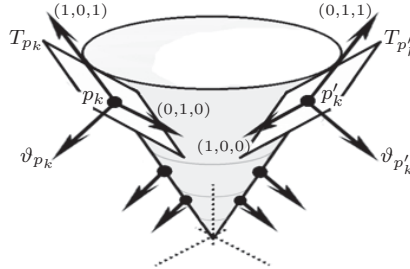
que determinan en cada  $p \in W$  el plano tangente (las dos primeras una base y la tercera su dirección normal). Por tanto podemos decir que el plano tangente (y con él su dirección normal) *depende diferenciablemente del punto*  $p \in W$ . Veamos cómo se usa esto.

**Ejemplo 3.10.** En 1.12(3), p.12, mencionamos los dos ejemplos siguientes: el semicono  $S : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ , y la unión de dos semiplanos  $S' : xy = 0, x + y > 0$ . Ambos conjuntos son homeomorfos al plano, pero no son superficies diferenciables. Entonces no podíamos probar esto; ahora ya sí.

Si se pudiera parametrizar (en cualquiera de los dos ejemplos) un entorno del origen, se tendría la aplicación diferenciable:  $p \mapsto \vartheta_p \neq 0$ , y

$$\lim_{p \rightarrow 0} \vartheta_p = \vartheta_0 \neq 0.$$

En consecuencia, para todas las sucesiones de puntos  $p_k \rightarrow 0$  obtendremos ese límite. Intentémoslo para el semicono. Fuera del origen el semicono sí es una superficie diferenciable, y sabemos calcular planos tangentes: (i) en puntos del tipo  $p_k = (x_k, 0, z_k), x_k > 0$  es  $T_{p_k}S : x = z$ , y (ii) en puntos del tipo  $p'_k = (0, y_k, z_k), y_k > 0$ , es  $T_{p'_k}S : y = z$ .



Es decir

$$\begin{cases} (1, 0, 1)\vartheta_{p_k} = (0, 1, 0)\vartheta_{p_k} = 0 & \text{para los } p_k, \\ (0, 1, 1)\vartheta_{p'_k} = (1, 0, 0)\vartheta_{p'_k} = 0 & \text{para los } p'_k. \end{cases}$$

En el límite común se deberá cumplir

$$(1, 0, 1)\vartheta_0 = (0, 1, 0)\vartheta_0 = (0, 1, 1)\vartheta_0 = (1, 0, 0)\vartheta_0 = 0,$$

que son demasiados productos escalares nulos para que  $\vartheta_0 \neq 0$ . Contradicción.

El lector imitará el razonamiento con el cono doble y con la unión de dos semiplanos (Ejemplos 1.12(1) y (2), p.11) para obtener la misma contradicción y concluir así también que esos dos conjuntos no son superficies diferenciables. ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  la esfera unidad de  $\mathbb{R}^3$  y  $p = (0, 1, 0) \in S$ . Calcular el plano tangente  $T_p\mathbb{S}^2$  y la base suya asociada a la parametrización por proyección estereográfica desde el polo norte. Calcular también la base asociada a la parametrización por proyección ortogonal sobre el plano  $xz$ . Escribir la matriz de cambio de coordenadas en  $T_p\mathbb{S}^2$  para las dos bases obtenidas.

**Número 2.** Sea  $S$  el paraboloide hiperbólico de ecuación  $z = x^2 - y^2$ . Hallar el plano tangente  $T_pS$  para un punto arbitrario  $p \in S$ . Considerar, en particular, el caso  $p = (0, 0, 0)$  y estudiar la intersección  $S \cap T_pS$  (observar que en ese caso el plano tangente y el plano afín tangente coinciden). Estudiar la situación en un punto arbitrario de  $S$ .

**Número 3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el hiperboloide de una hoja de ecuación  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . Hallar el plano tangente en un punto de  $S$  del tipo  $p = (a, b, 0)$ . Describir la estructura geométrica de la familia de planos que se obtienen de ese modo.

**Número 4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $T_pS$  el plano tangente en  $p \in S$ . Probar que para toda base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_pS$  existe una parametrización local  $\varphi : U \rightarrow S$  con  $\varphi_{u,p} = w_1$ ,  $\varphi_{v,p} = w_2$ .

**Número 5.** Proponer una definición plausible de recta normal a una superficie en un punto y probar que todas las rectas normales a una superficie de revolución alrededor del eje  $z$  cortan dicho eje.

**Número 6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie que no corta al eje  $z$  y tal que todas las rectas normales a  $S$  sí cortan a este eje.



(1) Probar que cada punto de  $S$  tiene un entorno abierto contenido en una superficie de revolución alrededor del eje  $z$ .

(2) Constrúyase una superficie  $S$  en las condiciones anteriores, y conexa, que no esté toda contenida en una superficie de revolución (la figura sugiere cómo hacer esto).

**Número 7.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  la superficie parametrizada por  $y = x \tan z$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Probar que la unión de las rectas normales a  $S$  a lo largo de la recta  $y = x$ ,  $z = \pi/4$  es una superficie. Identificar dicha superficie.

**Número 8.** Sea  $T \subset \mathbb{R}^3$  el conjunto que se obtiene al girar alrededor del eje  $z$  el grafo de la tractriz  $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\alpha(t) = (\sin t, 0, \cos t + \log \tan(t/2))$ , y sea  $P$  el plano  $z = 0$ .

Probar que  $T$  no es una superficie, pero sí lo son las componentes conexas de  $T \setminus P$ . Tales superficies se llaman *pseudoesferas*. (Véase el volumen 1, ejemplo 1.5(2), p. 5.)

**Número 9.** Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies en  $\mathbb{R}^3$ . Se dice que  $S$  y  $S'$  son *transversales* si son transversales en  $p$  para todo  $p \in S \cap S'$  (en particular, si las superficies no se cortan son transversales). Describir la intersección de dos superficies transversales utilizando el teorema de clasificación de curvas diferenciables (Vol.I, 15.3, p. 168).

**Número 10.** Se considera el toro de revolución  $S : (\sqrt{x^2 + y^2} - c)^2 + z^2 = r^2$ . Determinar todos los puntos  $p \in S$  en los que el vector  $(1, 0, 0)$  es tangente al toro.

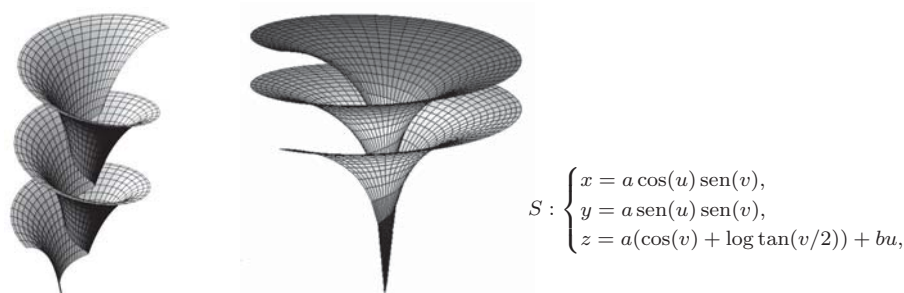
## Notas

**1.** Dini nació en Pisa, Italia, en 1845, en una época crucial de la historia de ese país, en la que tuvo lugar su proceso de unificación (el *Risorgimento*) que culminaría en 1870 con la incorporación de los últimos Estados Pontificios. Dini estudió en la Escuela Normal Superior de Pisa, donde tuvo la fortuna de contar entre sus maestros a ENRICO BETTI (1823–1892), quien le guiaría en sus investigaciones iniciales, dirigidas al estudio de la geometría diferencial de las superficies. Más tarde fue a París, donde estudió durante un año bajo la dirección de JOSEPH LOUIS FRANÇOIS BERTRAND (1822–1900) y CHARLES HERMITE (1822–1901). A su vuelta a Pisa fue nombrado profesor de Geodesia en la Universidad y, poco más tarde, en 1871, pasó a ocupar la cátedra de Análisis Matemático y Geometría Superior. Sin embargo, los acontecimientos políticos de la Italia de su tiempo marcarían a Dini y a toda su generación. Participó activamente en política, primero a nivel municipal y, más tarde, a partir de 1880, a nivel nacional, siendo elegido representante de Pisa en el Parlamento Nacional y senador del reino. Para Dini fue posible dedicarse en plenitud a dos actividades tan poco compatibles como la investigación y la política, aunque, a veces, su trabajo iba dirigido al fomento de la educación y la ciencia, como cuando fue vicepresidente del Consejo Nacional de Instrucción Pública.

Ulisse Dini fue rector de la Universidad de Pisa y director de la Escuela Normal Superior, cargo que desempeñaba cuando murió el 28 de octubre de 1918. Esta institución es el establecimiento de enseñanza superior más importante de Italia, con una historia verdaderamente distinguida desde su creación. Conjuntamente con el departamento de Matemáticas de la universidad de la misma Pisa, ha impulsado la investigación matemática en este país desde que GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826–1866), durante sus estancias en Italia, entre 1863 y 1865, estableció relaciones con Betti y con EUGENIO BELTRAMI (1835–1900). Para dar una idea de la importancia de la Escuela Normal Superior y de este departamento de Matemáticas basta con citar, aparte de los ya mencionados, los nombres de algunos matemáticos que allí se han formado o han sido profesores: GIULIO ASCOLI (1843–1896), EUGENIO BERTINI (1846–1933), CESARE ARZELÀ (1847–1912), SALVATORE PINCHERLE (1853–1936), LUIGI BIANCHI (1856–1928),

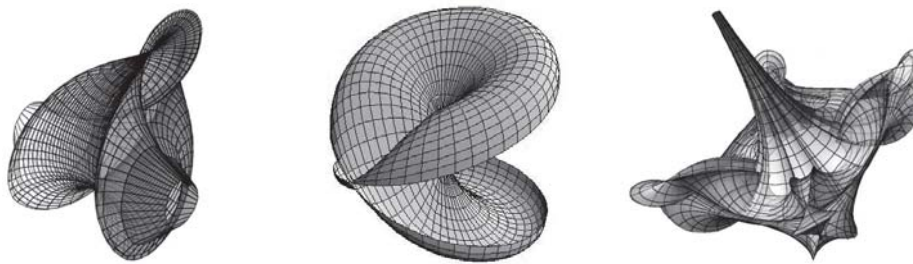
VITO VOLTERRA (1860–1940), CESARE BURALI-FORTI (1861–1931), LUIGI BERZOLARI (1863–1949), ABRAMO GIULIO UMBERTO FEDERIGO ENRIQUES (1871–1946), GIUSEPPE VITALI (1875–1932), GUIDO FUBINI (1879–1943), LEONIDA TONELLI (1885–1946), GIOVANNI SANSONE (1888–1979), LUIGI FANTAPPIÉ (1901–1956), ENNIO DE GIORGI (1928–1996), GUIDO STAMPACCHIA (1922–1978), EDOARDO VESENTINI (1928–), ENRICO BOMBIERI (1940–). La Escuela Normal Superior es un centro de excelencia también en otras materias. Por ejemplo, los premios Nobel de Física ENRICO FERMI (1901–1954) y CARLO RUBBIA (1934–) fueron alumnos de esta institución.

2. Las primeras publicaciones de Dini (hasta 18 artículos) están dedicadas a temas diversos de geometría diferencial, sobre todo a cuestiones relacionadas con la curvatura y las geodésicas de las superficies, algunas de ellas propuestas por Beltrami, también profesor en Pisa. Entre otros resultados obtuvo el teorema que se conoce hoy día con el nombre de *teorema de Dini-Lie*, que identifica aquellas superficies no isométricas entre las que se puede definir una aplicación que conserva las geodésicas. También se debe a Dini la llamada *Superficie de Dini*, una superficie de curvatura negativa constante de indudables cualidades estéticas.



Después Dini se sintió atraído por el Análisis Real y dedicó una considerable actividad a la fundamentación de esta rama de las matemáticas sobre bases rigurosas. El resultado fue su libro *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, que publicó en 1877 y se convirtió en un modelo cuya influencia se dejaría sentir por mucho tiempo. Baste decir que 25 años después de su publicación apareció una traducción al alemán debida a JAKOB LÜROTH (1844–1910) y ADOLF SCHEPP (1837–1905). Este tema le continuaría ocupando toda su vida, y poco antes de su muerte acabaría la publicación de su obra en varios volúmenes titulada *Lezioni di analisi infinitésimale*, en la que recogió muchas de sus contribuciones originales, en particular las dedicadas a una teoría general de las funciones implícitas. Probablemente, la investigación más influyente de Dini es la referida a la teoría de la convergencia, en particular de las *series de Fourier*, que dio lugar a otro libro titulado *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*. Aparte de esto, la lista de sus trabajos, que ha sido compendiada por Bianchi (uno de sus alumnos), asciende a unos 60 artículos, dedicados a Geometría Diferencial, Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales.

3. Las cualidades estéticas de las superficies, como la de Dini, son una inspiración recurrente para pintores, escultores y arquitectos. Incluimos a continuación algunos ejemplos que nos parecen singularmente bellos. De hecho, a su belleza contribuyen *las curvas de puntos singulares*, es decir, los puntos en los que *no son* realmente superficies.



Pero hay que decir que estas superficies surgen no simplemente de la búsqueda de ciertas cualidades estéticas, sino de la solución de problemas matemáticos significativos. Por ejemplo, la primera de las anteriores es la *superficie de Kuen*, que se distingue por la rara propiedad de tener curvatura de Gauss *constante* negativa. La segunda superficie es el *crosscap*, que se obtiene al intentar sumergir el plano proyectivo en  $\mathbb{R}^3$ . Éste es un problema que ha dado lugar a muchas otras superficies importantes como la *superficie de Steiner* o la *superficie de Boy*. En fin, la tercera de las que hemos representado es un *breather*, esto es, una solución de una ecuación en derivadas parciales de relevancia en Física (como la *ecuación de seno-Gordon* o la *ecuación no lineal de Schrödinger*).



---

## Cálculo diferencial en superficies

---

En esta lección generalizamos el cálculo diferencial para aplicarlo en nuestro estudio de las superficies diferenciables. El Análisis Matemático trata la diferenciabilidad de aplicaciones definidas en abiertos del espacio afín, y aquí necesitamos utilizar aplicaciones definidas en superficies.

**Definición 4.1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie.

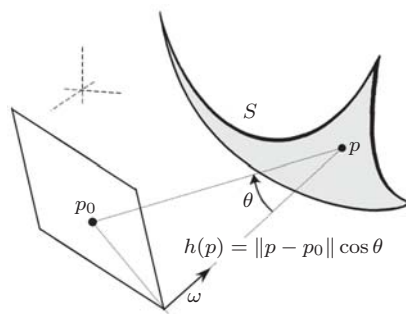
(1) Se dice que una aplicación  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *diferenciable* si en cada punto  $p \in S$  existe una *extensión local* diferenciable, esto es, una aplicación diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida en un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F|_{V \cap S} = f|_{V \cap S}$ .

(2) Se dice que una aplicación  $f : S \rightarrow S'$  con valores en una segunda superficie  $S' \subset \mathbb{R}^3$  es diferenciable si lo es como aplicación  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  con valores en  $\mathbb{R}^3$ .

Nótese que en un mismo punto puede haber muchas extensiones locales. Por otra parte, (1) es una definición de carácter local: basta encontrar una familia de extensiones locales diferenciables  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuyos dominios  $V$  cubran  $X$ . Claramente, la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable (la composición de extensiones locales es extensión de la composición). Es claro también que una aplicación diferenciable es continua.

**Ejemplos 4.2.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie.

(1) Dados un punto  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  y un vector  $\omega \in \mathbb{R}^3$ , con  $\|\omega\| = 1$ , la función  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por el producto escalar  $h(p) = (p - p_0)\omega$  se llama *función altura*, pues mide la altura sobre el plano afín ortogonal a  $\omega$  que pasa por  $p_0$  (véase la figura). Como la misma fórmula define una extensión diferenciable de  $h$  a todo  $\mathbb{R}^3$ ,  $h$  es diferenciable.



(2) Por similar razón es diferenciable la función  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(p) = \|p - p_0\|^2$ , donde  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  es un punto dado. (Esta función mide el cuadrado de la distancia al punto en cuestión.)

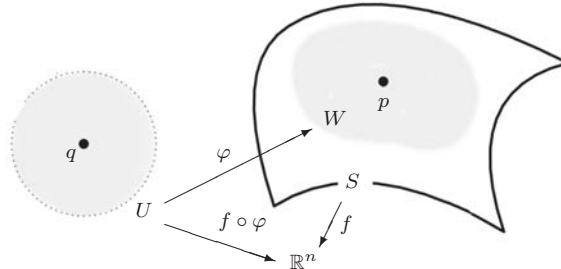
(3) Asimismo, si  $p_0 \notin S$ , la función  $\text{dist} : S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\text{dist}(p) = \|p - p_0\|$  también es diferenciable. ■

La diferenciabilidad se expresa mediante parametrizaciones de la manera siguiente.

**(4.3) Diferenciabilidad por localización.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie.

(1) Sea  $\varphi : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^3$  una parametrización de un abierto  $W$  de  $S$ . La observación 2.3(1), p. 20, dice exactamente que  $\varphi^{-1} : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene extensiones locales diferenciables  $\mathcal{T}$  (cuyos dominios recubren  $W$ ), luego dice que  $\varphi^{-1}$  es una *aplicación diferenciable*. Este hecho es fundamental.

(2) Una aplicación  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable si y sólo si lo son todas las *localizaciones*  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .



La condición necesaria se sigue de que la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable. Y lo mismo la condición suficiente: si todas las localizaciones  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  son diferenciables, lo son las composiciones  $f|_W = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ .

Nótese además que para comprobar la diferenciabilidad basta considerar las parametrizaciones  $\varphi$  de un atlas de  $S$ . ■

Inmediatamente introducimos la noción de derivada, según la idea de la *derivada direccional* del Análisis.

**Definición 4.4.** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable de una superficie  $S$ ; sean  $p \in S$  y  $p' = f(p) \in \mathbb{R}^n$ . La *derivada de  $f$  en  $p$*  es la aplicación lineal

$$d_p f : T_p S \rightarrow \mathbb{R}^n : \omega \mapsto (f \circ \alpha)'(t_0),$$

donde  $\alpha : I \rightarrow S$  es una curva diferenciable con  $\alpha(t_0) = p$  y  $\alpha'(t_0) = \omega$ .

Veamos que esta definición no depende de la elección de  $\alpha$ . Tomamos una extensión local diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $f$  a un entorno  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$ , y por la regla de la cadena para  $F \circ \alpha$  tenemos que

$$(f \circ \alpha)'(t_0) = (F \circ \alpha)'(t_0) = d_p F(\alpha'(t_0)) = d_p F(\omega).$$

y  $d_p F(\omega)$  no depende de  $\alpha$ . Esto también muestra que la derivada  $d_p f$  es una aplicación lineal, por ser la restricción de  $d_p F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$  que lo es. Además, así podemos calcular  $d_p f$  utilizando *cualquier* extensión  $F$  de  $f$ .

Remarquemos por otra parte que  $d_p f$  está determinada por la restricción de  $f$  a cualquier entorno de  $p$ .

**Ejemplo 4.5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable, y consideremos un punto  $p \in S$ . La superficie  $S$  tendrá una ecuación implícita  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  en un entorno  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  (2.10, p. 25). Entonces  $g|_{S \cap V} : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable constante, luego con derivada nula. Pero esa derivada es  $d_p(g|_S) = d_p g|_{T_p S}$ , luego  $d_p g$  se anula en  $T_p S$ . Como  $g$  es una ecuación implícita, la aplicación lineal  $d_p g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  no es nula, luego su núcleo es un plano, y por contener el plano tangente debe coincidir con él. Reencontramos lo que ya vimos en 3.7, p. 36. ■

El uso de parametrizaciones reduce las cuestiones *locales* sobre aplicaciones diferenciables al caso conocido de abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Hacemos a continuación una demostración que ilustra este principio.

**Proposición 4.6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie conexa y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable. Si la derivada  $d_p f$  es nula para todo punto  $p \in S$ , entonces la aplicación  $f$  es constante.

*Demostración.* Sea  $a \in \mathbb{R}$  un valor cualquiera que  $f$  alcance y consideremos el conjunto  $Q \neq \emptyset$  de los puntos de  $S$  cuya imagen es precisamente  $a$ . Ya que  $f$  es continua,  $Q$  es cerrado. Probemos que es también abierto, lo que por la conexión de  $S$  implicará  $Q = S$  y que  $f$  es constante ( $\equiv a$ ).

Sea  $p \in Q$ . Elegimos una extensión local diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $f$  a un entorno abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de un entorno abierto  $W$  de  $p$ . Podemos suponer que  $\varphi$  está definida en un disco abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y que  $S \cap V = W$ . Entonces  $f \circ \varphi = F \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación diferenciable

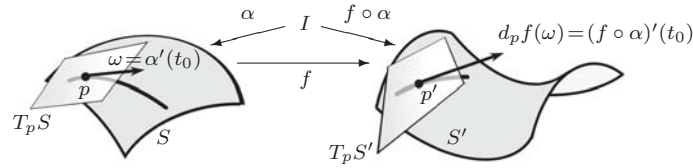
y, por la regla de la cadena para  $F \circ \varphi$ , en cada punto  $w = (u, v) \in U$  tenemos

$$d_w(f \circ \varphi) = d_w(F \circ \varphi) = d_{\varphi(w)}F \circ d_w\varphi = 0.$$

Por el resultado para abiertos afines,  $f \circ \varphi$  es constante en el disco  $U$ , y como  $\varphi$  es suprayectiva,  $f$  es constante en  $W$  y  $W \subset Q$ . En conclusión,  $Q$  es abierto como se quería. ■

Cuando una derivada  $d_p f$  de una aplicación diferenciable  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  es nula se dice que  $p$  es un *punto crítico de  $f$* . Esta noción es esencial en el estudio de los extremos locales de las *funciones* diferenciables (21.4, p.304): véase el prob.6 de esta lección, p.53.

Obsérvese ahora que si  $f : S \rightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable entre superficies, en la misma definición de la derivada, 4.4, p.46, vemos que  $d_p f(\omega) \in T_{p'}S'$ , luego tenemos de hecho una aplicación lineal entre los planos tangentes:  $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$ .



Inmediatamente de la definición se deduce que se cumple la *regla de la cadena*:

**Proposición 4.7.** Sean  $f : S \rightarrow S'$  y  $g : S' \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos aplicaciones diferenciables y  $p \in S$ ; denotamos  $p' = f(p)$ . Se cumple:

$$d_p(g \circ f) = d_{p'}g \circ d_p f.$$

En lo sucesivo no necesitaremos distinguir (como en razonamientos anteriores) si las aplicaciones están definidas en abiertos afines para aplicar esta regla de derivación.

Ahora concentramos nuestra atención en las aplicaciones diferenciables *entre superficies*. En primer lugar revisamos la forma de localización descrita en 4.3(2), p.46.

**(4.8) Localización de una aplicación diferenciable entre superficies.** Sea  $f : S \rightarrow S'$  una aplicación *continua* entre dos superficies diferenciables, y sea  $p \in S$ .

(1) Por la continuidad, existen parametrizaciones  $\varphi : U \rightarrow W$  de un entorno  $W$  de  $p$  en  $S$  y  $\psi : U' \rightarrow W'$  de un entorno  $W'$  de  $p' = f(p)$  en  $S'$  tales que  $f(W) \subset W'$  y por tanto está bien definida la composición  $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow U'$ . Ésta es otra forma de *localización de  $f$* .

Si denotamos  $(u, v)$  las coordenadas de un punto de  $(x, y, z) \in W \subset S$  respecto de  $\varphi$  y  $(s, t)$  las de  $f(x, y, z)$  respecto de  $\psi$  tenemos  $(s, t) = g(u, v)$ , que son las *ecuaciones de  $f$  en coordenadas locales*.

(2) Suponemos  $f : S \rightarrow S'$  diferenciable y dadas dos parametrizaciones  $\varphi : U \rightarrow S$  y  $\psi : U' \rightarrow S'$  como en (1). Denotamos  $q = \varphi^{-1}(p)$  y  $q' = \psi^{-1}(p')$  y recordamos que  $d_q\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pS$  y  $d_{q'}\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{p'}S'$  son isomorfismos lineales. Por la regla de la cadena se tiene

$$d_qg = (d_{q'}\psi)^{-1} \circ d_p f \circ d_q\varphi,$$

igualdad que vamos a usar para expresar  $d_p f$  mediante ecuaciones lineales. Elegimos en  $T_pS$  y  $T_{p'}S'$  las bases  $\mathcal{B}_\varphi$  y  $\mathcal{B}_\psi$  asociadas a las dos parametrizaciones dadas, y la igualdad anterior se escribe matricialmente así:

$$M(d_qg) = M(d_{q'}\psi)^{-1} M(d_p f) M(d_q\varphi)$$

Por supuesto, en  $\mathbb{R}^2$  se considera la base estándar, de modo que por la construcción de  $\mathcal{B}_\varphi$  y  $\mathcal{B}_\psi$  las dos matrices  $M(d_q\varphi)$  y  $M(d_{q'}\psi)$  son la identidad. Concluimos que  $M(d_qg) = M(d_p f)$ , es decir, que  $M(d_p f)$  es la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas locales  $(s, t) = g(u, v)$ :

$$M(d_p f) = \begin{pmatrix} s_u(q) & s_v(q) \\ t_u(q) & t_v(q) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es la *matriz jacobiana de  $f$  en coordenadas locales*. ■

En fin, he aquí otra definición fundamental.

**Definición 4.9.** Una aplicación  $f : S \rightarrow S'$  entre dos superficies de  $\mathbb{R}^3$  se llama *difeomorfismo* si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Si existe tal  $f$ , las superficies se denominan *difeomorfas*.

Claramente un difeomorfismo es un homeomorfismo. También es claro que la composición de difeomorfismos es de nuevo un difeomorfismo.

El ejemplo primero de difeomorfismo es cualquier parametrización  $\varphi : U \rightarrow S$  de una superficie diferenciable  $S$ : es un difeomorfismo de  $U$  sobre su imagen  $\varphi(U)$ ,

que es un abierto de  $S$ . En otras palabras todo punto de  $S$  tiene un entorno difeomorfo a un abierto  $U$  del plano, lo que resumimos diciendo que  $S$  es *localmente difeomorfa* al plano.

Sea  $f : S \rightarrow S'$  un difeomorfismo entre dos superficies de  $\mathbb{R}^3$ , y sean  $p \in S$ ,  $p' = f(p) \in S'$ . Aplicando la regla de la cadena a las dos composiciones  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_S$ ,  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{S'}$  resulta que  $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$  es un isomorfismo lineal, con inversa  $d_{p'}(f^{-1})$ . Evidentemente, para esta conclusión basta que  $f$  sea difeomorfismo de un entorno de  $p$  sobre uno de  $f(p')$ , caso en el que decimos que  $f$  es un *difeomorfismo local en  $p$* . De esta forma llegamos al *teorema de la función inversa*:

**Teorema 4.10.** *Sea  $f : S \rightarrow S'$  una aplicación diferenciable entre superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,  $f$  es un difeomorfismo local en un punto  $p \in S$  si y sólo si la derivada  $d_p f : T_p S \rightarrow T_{p'} S'$  es un isomorfismo lineal.*

*Demostración.* La condición suficiente ya la hemos probado. La necesaria (en realidad la equivalencia toda) se reduce al teorema de la función inversa para abiertos afines del plano mediante una localización:

$$g = \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : U \rightarrow U' \quad \text{con } p = \varphi(q), q \in U.$$

Baste decir para esa reducción que: (i) por ser  $\varphi$  y  $\varphi'$  difeomorfismos,  $g$  es difeomorfismo local en  $q$  si y sólo si  $f$  lo es en  $p$ , y (ii) por ser las derivadas de  $\varphi$  y  $\varphi'$  isomorfismos,  $d_q g$  lo es si y sólo si lo es  $d_p f$ . ■

Una consecuencia interesante de naturaleza topológica del resultado anterior es ésta:

**Corolario 4.11.** *Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $S \subset S'$ , entonces  $S$  es necesariamente una parte abierta de  $S'$ .*

*Demostración.* En efecto, sea  $p \in S$ . Es claro que, como aplicación diferenciable la inclusión  $f : S \subset S'$  tiene por derivada la inclusión  $d_p f : T_p S \subset T_{p'} S'$ . Como ambos espacios tangentes son planos vectoriales, deben coincidir, de modo que  $d_p f$  es un isomorfismo lineal. Por el teorema de la función inversa,  $p$  tiene un entorno abierto en  $S$  que también es abierto en  $S'$ . Como esto vale para todo  $p \in S$  concluimos que en efecto  $S$  es un abierto de  $S'$ . ■

Hasta aquí hemos considerado la noción de difeomorfismo solamente desde el punto de vista local. El estudio de los difeomorfismos globales entre superficies,

y en particular del *grupo* que forman los de una superficie sobre sí misma es de una gran importancia, y aunque no nos ocupa aquí, sí queremos comentar una propiedad interesante.

Ya sabemos que todo punto de una superficie  $S$  tiene un entorno difeomorfo a un abierto del plano afín, y reduciendo el entorno podemos suponer que es difeomorfo al disco unidad; en particular, dos puntos distintos de  $S$  tienen entornos difeomorfos. La cuestión global es si existe un difeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  de toda la superficie sobre sí misma que transforme uno de los puntos en el otro. Esta propiedad, conocida como *homogeneidad*, es en efecto cierta, y muestra la riqueza del grupo de difeomorfismos de una superficie. Comprobémoslo en dos ejemplos.

**Ejemplo 4.12.** Sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(1) Cualquier aplicación lineal ortogonal  $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (esto es, que conserve el producto escalar) induce un difeomorfismo  $f = \lambda|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ : es biyectiva, es diferenciable por restricción, y su inversa es también diferenciable por ser restricción de la aplicación lineal ortogonal  $\lambda^{-1}$ . En otras palabras *el grupo de difeomorfismos de la esfera contiene al grupo ortogonal*.

Pero advertimos que la esfera tiene muchos otros difeomorfismos.

(2) Un difeomorfismo importante es la aplicación *antipodal*:

$$\lambda : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z).$$

(3) Dos puntos de la esfera  $p, p' \in \mathbb{S}^2$  son dos vectores de norma 1, y siempre existe una aplicación ortogonal  $\lambda$  que transforma uno en otro. Entonces  $\lambda|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  un difeomorfismo de la esfera en sí misma que transforma  $p$  en  $p'$ . En otras palabras,  $\mathbb{S}^2$  es homogénea. ■

**Ejemplo 4.13.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el toro de revolución de ecuación

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$$

Es el toro de 1.11, p. 10, con  $r = 1$ ,  $c = 2$ .

(1) Para cualesquiera números reales  $a, b \in \mathbb{R}$  tenemos la parametrización  $\varphi : (a, a + 2\pi) \times (b, b + 2\pi) \rightarrow S$  de ecuaciones

$$x = (\cos u + 2) \cos v, \quad y = (\cos u + 2) \sin v, \quad z = \sin u.$$

Esta parametrización es un difeomorfismo sobre el abierto del toro obtenido eliminando un paralelo y un meridiano (¿cuáles?).

(2) Fijamos  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  y definimos una aplicación  $f : S \rightarrow S$  de la siguiente manera. Dado  $p \in S$  tomamos una parametrización  $\varphi$  del tipo anterior que cubra un entorno de  $p$ . Es decir,  $p = \varphi(u, v)$  con  $a < u < a + 2\pi$ ,  $b < v < b + 2\pi$ . Entonces ponemos

$$f(p) = ((\cos(u+u_0)+2) \cos(v+v_0), (\cos(u+u_0)+2) \sin(v+v_0), \sin(u+u_0)),$$

es decir,  $f(p) = \psi(u+u_0, v+v_0)$  donde

$$\psi : (a+u_0, a+u_0+2\pi) \times (b+v_0, b+v_0+2\pi) \rightarrow S$$

está definida por la misma expresión que  $\varphi$ . De la periodicidad de las funciones trigonométricas se sigue inmediatamente que esta definición de  $f$  no depende del par de valores  $a$  y  $b$ .

(3) Visto lo anterior, la diferenciabilidad de  $f$  es automática, porque la localización

$$\psi^{-1} f \varphi : (u, v) \mapsto (u+u_0, v+v_0),$$

es simplemente la restricción de una traslación.

(3) Ahora observamos que si repetimos la construcción anterior empezando con  $(-u_0, -v_0) \in \mathbb{R}^2$  la aplicación diferenciable  $g : S \rightarrow S$  que obtenemos cumple  $g \circ f = f \circ g = \text{Id}_S$ . Por tanto  $f : S \rightarrow S$  es un difeomorfismo (con inverso  $g$ ).

(4) Finalmente, dados dos puntos  $p$  y  $p'$  del toro tendremos

$$\begin{cases} p = ((\cos u + 2) \cos v, (\cos u + 2) \sin v, \sin u), \\ p' = ((\cos u' + 2) \cos v', (\cos u' + 2) \sin v', \sin u'), \end{cases}$$

para ciertos  $u, v, u', v'$ . Tomando  $u_0 = u' - u$ ,  $v_0 = v' - v$  en la construcción anterior obtenemos un difeomorfismo  $f$  de  $S$  que transforma  $p$  en  $p'$ .

En conclusión, el toro es efectivamente homogéneo. ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  la aplicación antipodal de la esfera en si misma. Calcular la derivada de  $f$  en un punto cualquiera. Calcular la matriz jacobiana de  $f$  en el polo sur utilizando dos parametrizaciones por proyección estereográfica, una desde el polo norte y otra desde el polo sur.



**Número 2.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y fijemos un punto  $p_0 \in \mathbb{R}^3$ . Se define la función diferenciable  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h(p) = \|p - p_0\|^2$ . Probar que un punto  $p \in S$  es un punto crítico de  $h$  si y sólo si la recta normal a  $S$  en  $p$  pasa a través de  $p_0$ .

**Número 3.** Deducir del problema anterior que si todas las rectas normales a una superficie conexa  $S$  se cortan en un punto, entonces  $S$  es una parte abierta de una esfera con centro en ese punto. Si además  $S$  es compacta, entonces  $S$  es toda la esfera.

**Número 4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie,  $p$  un punto de  $S$  y  $H$  el plano afín tangente a  $S$  en  $p$ . Probar, utilizando la proyección ortogonal  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$ , que existe un difeomorfismo  $\varphi$  de un entorno  $U$  de  $p$  en  $H$  sobre un entorno  $W$  de  $p$  en  $S$  cuyo inverso es  $\pi|_W$ . Este difeomorfismo se puede considerar como una parametrización local de  $S$ .

**Número 5.** Supongamos que la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  yace enteramente a un lado del plano afín  $H$ . Probar que si  $p \in S \cap H$  entonces  $H$  es el plano afín tangente a  $S$  en  $p$ .

**Número 6.** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Supongamos que  $p \in S$  es un *extremo local* de  $f$ , es decir,  $f(p)$  es el máximo o el mínimo de  $f$  en un entorno suficientemente pequeño de  $p$  en  $S$ . Probar que  $p$  es un punto crítico de  $f$ , usando el mismo resultado bien conocido en el plano.

**Número 7.** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie, y  $a \in \mathbb{R}^3$  un *valor regular* de  $f$ , esto es, que no es imagen de ningún punto crítico. Probar que  $f^{-1}(a)$  es localmente un arco de Jordan (supuesto que  $f^{-1}(a) \neq \emptyset$ ).

**Número 8.** Construir un difeomorfismo del hiperboloide de una hoja  $x^2 + y^2/2 - z^2/9 = 1$  sobre el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y hallar su diferencial en un punto  $p$  del hiperboloide.

**Número 9.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie de revolución, obtenida al girar un arco de Jordan. Probar que  $S$  es difeomorfa a un cilindro.

**Número 10.** Demostrar que un toro de revolución menos un meridiano es difeomorfo a un cilindro, y deducir que el toro se puede cubrir con dos parametrizaciones.

## Notas

1. El cálculo diferencial en superficies es una extensión natural del cálculo en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Del mismo modo, el cálculo diferencial en  $\mathbb{R}^n$  se extiende a las variedades diferenciables de dimensión  $n$ , que son la generalización natural de las superficies (que son las variedades de dimensión 2). Así se obtiene el *Cálculo en Variedades*, que es un instrumento fundamental de las matemáticas, básico para el estudio de las propias variedades diferenciables en Topología Diferencial o en Teoría del Grado, por ejemplo. Teoremas clásicos, como el *teorema de Stokes*, encuentran su lugar apropiado en este contexto. El desarrollo histórico de estos temas tuvo que abordar el problema de encontrar el lenguaje apropiado para manipular expresiones infinitesimales de modo riguroso. Así aparecieron las *Formas Diferenciales*, objetos formales que, a pesar de su carácter abstracto, permiten

una formulación simple de la Integración en Variedades. Esta teoría fue en gran parte desarrollada por el matemático francés ÉLIE JOSEPH CARTAN (1869–1951).

2. La primera referencia publicada sobre el teorema de Stokes apareció en 1854, con ocasión del *Premio Smith* de la Universidad de Cambridge. GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903) organizó este premio en varias ocasiones, y la demostración del teorema fue uno de los problemas propuestos aquel año. Se desconoce si el problema fue resuelto por alguno de los estudiantes. Sin embargo, el enunciado del teorema ya aparecía en una carta que WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) (1824–1907) dirigió a Stokes el 2 de julio de 1850. La primera demostración conocida del teorema aparece en un trabajo de HERMANN HANKEL (1839–1873) titulado *Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*, publicado en Gotinga en 1861. Hankel no menciona la existencia de ninguna demostración anterior a su trabajo. Otra demostración apareció en el *Treatise on Natural Philosophy* de Lord Kelvin y PETER GUTHRIE TAIT (1831–1901), publicado en Oxford en 1867. En 1871, JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) escribió a Stokes preguntándole sobre la historia del teorema. Parece claro que Stokes le contestó, pues en el libro de Maxwell *Treatise on Electricity and Magnetism* de 1871, aparece el teorema con la referencia al Premio Smith. Maxwell también enuncia y prueba aquí el *teorema de la divergencia*. Finalmente, Volterra fue el primero en incluir el teorema de Stokes junto con otros dos resultados estrechamente relacionados, la *fórmula de Green* y el *teorema de Gauss*, dentro de un único resultado general en su artículo de 1889 titulado *Delle variabili complesse negli iperspazi* publicado en los *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*.

3. E. Cartan nació el 9 de mayo de 1869 en Dolomieu (Isère), un pueblo del sur de Francia. Sus orígenes fueron muy humildes y solamente su excepcional talento, que fue reconocido por sus maestros, hizo posible que consiguiese ayudas del estado para obtener una educación de calidad. De este modo pudo estudiar en la Escuela Normal Superior de París, donde tuvo como maestros a Hermite, a JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917) y a CHARLES EMILE PICARD (1856–1941) y obtuvo su doctorado en 1894. El tema de su tesis, sobre *Grupos Continuos* a partir del trabajo de WILHELM KARL JOSEPH KILLING (1847–1923), fue sugerido por su compañero de estudios ARTHUR MARIE LÉOPOLD TRESSE (1868–1958), que había regresado de una estancia en Leipzig con MARIUS SOPHUS LIE (1842–1899).

Su carrera académica tuvo lugar en las Universidades de Montpellier, Lyon, Nancy y París. En 1912 obtuvo la cátedra de Cálculo Diferencial e Integral en la Sorbona. El informe para su promoción fue escrito por JULES HENRI POINCARÉ (1854–1912), y ésta es una de las cosas que, a pesar de su enorme modestia, siempre enorgulleció a E. Cartan. Este rasgo de su carácter, la modestia, no favoreció la recepción de sus ideas, a las que no se dio la debida importancia prácticamente hasta su jubilación. Fue entonces cuando HERMANN KLAUS HUGO WEYL (1885–1955) le calificó como «*el más grande maestro vivo de la geometría diferencial*». En 1931 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de París, de la cual llegaría a ser presidente. Murió en 1951.

4. E. Cartan trabajó en tres áreas: teoría de grupos, ecuaciones diferenciales y geometría.

Durante más de treinta años se mantuvo en el aislamiento, pues la mayor parte de sus colegas se dedicaba a la teoría de funciones. Esto le llevó a desarrollar métodos totalmente originales. De un modo u otro, casi toda su labor está relacionada con la teoría de los *grupos de Lie*. Uno de sus métodos principales fue el cálculo de las formas diferenciales exteriores, que aplicó a la resolución de diversos problemas de la geometría diferencial. Otro de sus métodos, el de las *referencias móviles*, fue gradualmente incorporado al acervo matemático. En 1913 descubrió los *espinores*, un tipo de vectores que utilizó para representar en dos dimensiones las rotaciones tridimensionales. Posteriormente los espinores jugarían un papel importante en Mecánica Cuántica. También estudió aquellos aspectos de los sistemas de ecuaciones diferenciales más susceptibles de tratamiento geométrico. De este modo, era capaz de ver el contenido geométrico subyacente a cálculos muy complicados e incluso obviar estos cálculos utilizando argumentos geométricos. Tal y como dijeron SHIING-SHEN CHERN (1911–2004) y CLAUDE CHEVALLEY (1909–1984) en su obituario, ésta es una facultad que sorprendió a sus lectores y que es la marca de un pensador geométrico.

**5.** E. Cartan es el padre de otro gran matemático: HENRI PAUL CARTAN (1904–2008). H. Cartan ingresa en la Escuela Normal Superior de París en 1923, donde coincide con otros nombres ilustres: ANDRÉ WEIL (1906–1998), JEAN DIEUDONNÉ (1906–1992), CHARLES EHRESMANN (1905–1979) y Chevalley. En 1928 obtiene el doctorado y comienza su carrera de profesor en Lille, de donde marcha a Estrasburgo y en 1940 a París, lugar en el que permanecerá hasta su jubilación en 1975. Cuando termina la Segunda Guerra Mundial, las matemáticas francesas han perdido su preeminencia anterior, la guerra había arruinado toda una generación de científicos. Pero son H. Cartan y otros matemáticos de su edad los que comienzan una revolución que vuelve a colocar a las matemáticas francesas en la cima. En 1948 H. Cartan crea su famoso Seminario en la Escuela Normal, en el que se estudian varios de los temas esenciales que han conformado las matemáticas modernas: Teoría de Haces, Métodos Homológicos, Geometría Algebraica y Geometría Analítica... Cada año, durante 15 hasta 1963, se elige un tema de estudio: el propio H. Cartan y otros matemáticos coetáneos o más jóvenes se ocupan de las *exposés* y al final del curso las notas se redactan bajo la supervisión rigurosa de H. Cartan, para poder ser publicadas. Todas las bibliotecas de matemáticas las tienen hoy en sus fondos, y siguen siendo una referencia fundamental. La enumeración de los matemáticos que se nutrieron de este seminario bajo la influencia de H. Cartan es elocuente: ROGER GODEMENT (1921–2016), JEAN-LOUIS KOSZUL (1921–), y ARMAND BOREL (1923–2003), RENÉ FRÉDÉRIC THOM (1923–2002), JEAN-PIERRE SERRE (1926–), ALEXANDER GROTHENDIECK (1928–2014), JOHN FRANK ADAMS (1930–1989), ADRIEN DOUADY (1935–2006), MAX KAROUBI (1938–).

Muchos de ellos eran oficialmente alumnos suyos, como Serre y Thom, medallas Field en 1954 y 1958 respectivamente. A este respecto y para calibrar la sencillez de H. Cartan, lo mejor es citar aquí unas palabras suyas: «*Beaucoup d'entre eux* [los alumnos de la Escuela Normal] *ont préparé des thèses sous ma direction. On dit habituellement "direction", mais dans ce cas, ma "direction" consistait à comprendre ce qu'ils avaient en tête. Alors, j'apprenais beaucoup*».

La considerable obra científica de H. Cartan se encuentra recogida en tres volúmenes publicados por Springer. Su asunto predilecto tal vez hayan sido las funciones de una y varias variables complejas (sus importantísimos *teoremas A y B*), pero cómo no mencionar sus trabajos en Topología Algebraica, Álgebra Homológica, Teoría del Potencial, Análisis Armónico... Su estilo se distingue por la manera en que clarifica los problemas que estudia, no sólo buscando las soluciones, sino el marco adecuado en el que mejor se entienden. Ésta es la cualidad de un gran escritor de matemáticas, y ha hecho que sus textos sean la mejor manera de estudiar los temas que tratan. ¿Quién no ha preferido su *Calcul différentiel* o sus *Formes différentielles*, ambos de 1967, sobre otros muchos libros anteriores y posteriores de la misma materia? Esta cualidad sintetizadora y organizativa de H. Cartan se revela también en su relación decisiva con NICOLAS BOURBAKI (1934–), un matemático legendario en el sentido literal del término.

Inevitablemente, H. Cartan ocupa a lo largo de su larga trayectoria cargos de máxima importancia en las organizaciones matemáticas francesas e internacionales: Presidente de la *Société Mathématique de France*, miembro del *Comité de las Medallas Field*, presidente de la *Unión Matemática Internacional*... Y con casi 90 años, presidente enérgico y entregado a llevar a buen puerto el primer *Congreso Europeo de Matemáticas*, que hoy es ya una tradición.

**6.** Mención aparte merece la preocupación de H. Cartan por las causas humanitarias y los derechos civiles. En 1943, uno de sus hermanos, miembro de la resistencia, es detenido, deportado y ejecutado, lo que la familia sólo sabrá en 1945. Y con este antecedente, desde 1946 en que por primera vez asiste a un congreso en Alemania, H. Cartan contribuye intensamente a la reconstrucción de las matemáticas alemanas. Este compromiso europeoista culminará en 1984 cuando figura a la cabeza de una lista en favor de los Estados Unidos de Europa.

En 1974, H. Cartan participa junto con LIPMAN BERS (1914–1993), LAURENT SCHWARTZ (1915–2002) y MICHEL BROUÉ (1946–) en la creación del *Comité de Matemáticos*, para presionar en favor de matemáticos perseguidos en unos u otros países por motivos políticos. Entre los matemáticos en cuyo favor ha intervenido este comité se deben citar LEONID PLIOUCHTCH (1939–), YOURI CHIKHANOVITCH (1948–), ANATOLI BORÍSOVICH SCHARANSKI (1948–), LUIS MASSERA (1915–2002) y SION ASSIDON (1948–).

---

## La primera forma fundamental

---

En esta lección introducimos algunas nociones de carácter métrico. Hay que empezar por *la primera forma fundamental*, que nos permite medir longitudes, ángulos y áreas en una superficie.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable. Ya que el plano tangente  $T_p S$  a la superficie  $S$  en un punto  $p$  suyo es un subespacio vectorial del espacio euclídeo, podemos hacer uso del producto escalar de ese espacio euclídeo para medir longitudes y ángulos de los vectores tangentes a la superficie en ese punto. Sea  $p \in S$ . Consideramos la restricción del producto escalar de  $\mathbb{R}^3$  al plano tangente

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R} : (\omega, \omega') \mapsto \omega \omega',$$

y la forma cuadrática asociada:

**Definición 5.1.** La forma cuadrática  $\mathbf{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathbf{I}_p(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2$$

es la *primera forma fundamental de  $S$  en  $p$* .

Como es sabido, el conocimiento de  $\mathbf{I}_p$  es equivalente al conocimiento del producto escalar en  $T_p S$ , pues

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_p(\omega + \omega') - \mathbf{I}_p(\omega) - \mathbf{I}_p(\omega')).$$

Hacemos la observación siguiente sobre la notación. Hasta ahora habíamos denotado como un producto ordinario  $\omega \omega'$  el producto escalar de dos elementos de  $\mathbb{R}^3$ , pues el contexto evita siempre las confusiones. A partir de ahora usaremos la escritura  $\langle \omega, \omega' \rangle_p$  para vectores tangentes, precisamente para hacer énfasis en que lo son. Además, normalmente omitiremos el subíndice  $p$ .

**(5.2) Expresión en coordenadas locales de la primera forma fundamental.** En la situación precedente, describamos  $\mathbf{I}_p$  mediante parametrizaciones.

(1) Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de un entorno  $W$  de  $p$  en  $S$ , a la que corresponde la base del espacio tangente de 3.4(1), p. 32,  $\mathcal{B}_\varphi = \{\varphi_u, \varphi_v\}$ . Sea  $\omega \in T_p S$  un vector de coordenadas  $(\lambda, \mu)$  respecto de esa base, es decir, que se tiene  $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_p(\omega) &= \langle \omega, \omega \rangle = \langle \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v, \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle + 2\lambda\mu \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle + \mu^2 \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle.\end{aligned}$$

En el futuro usaremos la notación

$$\begin{cases} E_p = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \|\varphi_u\|^2, \\ F_p = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \\ G_p = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \|\varphi_v\|^2, \end{cases}$$

con la que escribimos

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 E_p + 2\lambda\mu F_p + \mu^2 G_p,$$

o, en términos matriciales,

$$\mathbf{I}_p(\omega) = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}; \quad \text{denotamos } Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}.$$

La matriz  $Q_p$  es la *matriz de la primera forma fundamental* respecto de (la base  $\mathcal{B}_\varphi$  asociada a)  $\varphi$ . Como  $Q_p$  es la matriz de una forma bilineal simétrica definida positiva, se cumple

$$E_p > 0, \quad G_p > 0, \quad \det(Q_p) = E_p G_p - F_p^2 > 0.$$

Otra manera de escribir el determinante es la siguiente:

$$\begin{aligned}EG - F^2 &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 - \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2 \sin^2 \theta = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2\end{aligned}$$

(el ángulo  $\theta$  es el que forman los dos vectores tangentes  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$ ).

(2) Los *coeficientes*  $E_p, F_p, G_p$  describen completamente la primera forma fundamental y como veremos son dato suficiente para el tratamiento de los temas métricos relativos a la superficie. Claramente,  $E, F, G$  son tres funciones diferenciables cuyo dominio es  $U \subset \mathbb{R}^2$  o  $W \subset S$ , según convenga referirse a las

coordenadas en  $U$  o al punto en  $W$ ; estas imprecisiones en la notación son habituales y no suelen generar confusión. En cualquier caso los coeficientes dependen de la parametrización elegida. La notación que empleamos para designarlos es la clásica de Gauss. Una notación más moderna es la siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 g_{11} + 2\lambda\mu g_{12} + \mu^2 g_{22} = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \\ g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G, \end{cases}$$

(obsérvese que aquí incluso se omiten el punto y sus coordenadas).

(3) Por último, escribamos como afecta un cambio de coordenadas a la expresión local de la primera forma fundamental. Sea  $\psi$  otra parametrización de un entorno de  $p$ , digamos con  $p = \psi(r)$ . Tenemos entonces la base  $\mathcal{B}_\psi = \{\psi_s, \psi_t\}$  de  $T_p S$  y sabemos (3.4(3), p.33) que la matriz de cambio de  $\mathcal{B}_\psi$  a  $\mathcal{B}_\varphi$  es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas  $\varphi^{-1} \circ \psi$ ; denotaremos simplemente  $J$  esa matriz. Por otra parte, denotamos  $Q'$  la matriz de la primera forma fundamental respecto de  $\psi$ , es decir, respecto de  $\mathcal{B}_\psi$ , y  $E', F', G'$  sus coeficientes. Como es bien sabido,  $Q' = J^t Q J$ , lo que permite expresar los coeficientes  $E', F', G'$  en función de los coeficientes  $E, F, G$  y las derivadas parciales de las nuevas coordenadas respecto de las anteriores. Dejamos al lector que haga esto explícito, y a cambio observamos que para los determinantes se tiene

$$\det(Q') = \det(J^t Q J) = \det(Q) \det(J)^2.$$

Esta relación será útil más adelante. ■

A continuación se analizan unos cuantos ejemplos.

**Ejemplo 5.3.** Sea  $S$  una superficie topográfica definida como el grafo de una función diferenciable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y consideremos su parametrización de Monge  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  (2.1, p.17); ya hemos visto (3.6, p.36) que el plano tangente en el punto  $(x, y, f(x, y))$  está generado por los vectores

$$\varphi_x = (1, 0, f_x), \quad \varphi_y = (0, 1, f_y).$$

Por tanto, los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1 + f_x^2, \\ F = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = f_x f_y, \\ G = \langle \varphi_y, \varphi_y \rangle = 1 + f_y^2, \end{cases}$$

y, por tanto, si un vector tangente  $\omega$  tiene coordenadas  $\lambda, \mu$  respecto de la base correspondiente a esta parametrización de Monge, se tiene que

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(1 + f_x^2) + 2\lambda\mu f_x f_y + \mu^2(1 + f_y^2).$$

En particular el determinante es  $1 + f_x^2 + f_y^2$ . ■

**Ejemplo 5.4.** Consideremos el cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = 1$ . Como superficie de revolución se parametriza mediante las ecuaciones

$$x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v,$$

y la base correspondiente del plano tangente en un punto dado es

$$\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0), \quad \varphi_v = (0, 0, 1).$$

Deducimos que  $E = 1, F = 0, G = 1$ , y por tanto la primera forma fundamental en estas coordenadas se expresa de la más sencilla manera:  $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2$ ; el determinante es 1. Sugerimos al lector que haga estos cálculos para una parametrización distinta del cilindro. ■

Una expresión de la primera forma fundamental tan sencilla como en el ejemplo precedente no siempre es posible. De hecho, que esto sea posible es una propiedad muy singular: ya para la esfera no se da. Esta carencia de la esfera es la formulación matemática de que no hay mapas totalmente fidedignos de la tierra: o modifican las distancias, o las áreas, o ambas; Gauss fue quien lo descubrió. Aquí lo podremos demostrar después de desarrollar el concepto de curvatura para superficies.

**Ejemplo 5.5.** Al hilo del comentario precedente, estudiemos la primera forma fundamental de la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Una parametrización viene dada por las ecuaciones:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

La base asociada del plano tangente viene dada por los vectores

$$\begin{cases} \varphi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \\ \varphi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0), \end{cases}$$



y por tanto los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \sen^2 u \cos^2 v + \sen^2 u \sen^2 v + \cos^2 u = 1, \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = \sen u \cos v \sen v \cos u - \sen u \cos u \sen v \cos v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \cos^2 u \sen^2 v + \cos^2 u \cos^2 v = \cos^2 u, \end{cases}$$

En conclusión, la expresión de la primera forma fundamental de la esfera en estas coordenadas es

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 + \mu^2 \cos^2 u,$$

y el determinante es  $\cos^2 u$ . Como acababamos de pronosticar, la expresión de la primera forma fundamental no es tan simple como en el ejemplo previo, pero adviértase que de momento sólo podemos decir que no es tan simple *en estas coordenadas particulares*, mientras pretendemos que no lo será en *cualesquiera coordenadas* que se usen. ■

Tras los dos ejemplos anteriores, consideremos una superficie de revolución general.

**Ejemplo 5.6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie de revolución generada por una curva  $C$  como en 1.10, p.9, y 3.9, p.38. Si  $C$  es la traza de  $\alpha(u) = (\zeta(u), 0, \xi(u))$ , la superficie  $S$  tiene la parametrización

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sen v, \xi(u)),$$

de modo que

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sen v, \xi'(u)), \\ \varphi_v = (-\zeta(u) \sen v, \zeta(u) \cos v, 0). \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{cases} E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \zeta'^2(u) \cos^2 v + \zeta'^2(u) \sen^2 v + \xi'^2(u) = \zeta'^2(u) + \xi'^2(u), \\ F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = -\zeta(u) \sen v \zeta'(u) \cos v + \zeta(u) \cos v \zeta'(u) \sen v = 0, \\ G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = \zeta^2(u) \sen^2 v + \zeta^2(u) \cos^2 v = \zeta^2(u), \end{cases}$$

y la primera forma fundamental queda

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2 (\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2) + \mu^2 \zeta^2(u),$$

con determinante  $(\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2) \zeta^2(u)$ . Esta expresión se puede simplificar algo mediante la longitud del arco de  $\alpha$ . Si  $\alpha$  está parametrizada por la longitud del arco, entonces  $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$  y obtenemos  $\mathbf{I} = \lambda^2 + \mu^2 \zeta^2$  con determinante  $\zeta^2$ . ■

Veamos un último ejemplo antes de avanzar.

**Ejemplo 5.7.** Consideremos la parametrización global  $\varphi$  del helicoides estudiada en 1.7(4), p. 6, y 3.5(4), p. 35:  $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$ . Como

$$\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), \quad \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0),$$

resulta  $E = v^2 + b^2, F = 0, G = 1$ , luego  $\mathbf{I}_p(\omega) = \lambda^2(v^2 + b^2) + \mu^2$ , y el determinante es  $v^2 + b^2$ . ■

Expresaremos a continuación dos nociones métricas, la longitud de una curva y el ángulo formado por dos curvas, en términos de la primera forma fundamental.

**(5.8) Longitudes y ángulos en una superficie.** Como es habitual,  $S \subset \mathbb{R}^3$  es una superficie y  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$  una parametrización suya.

(1) Dada una curva  $\alpha : I \rightarrow W \subset S$  consideramos como en 3.3, p. 32, la curva  $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ . Tendremos  $\beta(t) = (u(t), v(t))$  y

$$\alpha'(t) = (\varphi \circ \beta)'(t) = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v.$$

Resulta que la longitud de la curva es

$$\begin{aligned} L_{t_0}^t(\alpha) &= \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{I}_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt \\ &= \int_{t_0}^t \sqrt{u'^2 E_{\alpha(t)} + 2u'v'F_{\alpha(t)} + v'^2 G_{\alpha(t)}} dt. \end{aligned}$$

(2) El ángulo  $\theta$  que forman en un punto  $p \in S$  dos curvas  $\alpha$  y  $\gamma$  de  $S$  que pasan por él, es el ángulo que forman sus vectores tangentes en  $p$ . Si es  $p = \alpha(t_0) = \gamma(s_0)$ . Como

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(s_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\gamma'(s_0)\|}$$

este ángulo está determinado por la primera forma fundamental.

Por ejemplo, el ángulo que forman en  $p$  las líneas coordenadas de la parametrización  $\varphi$  tiene por coseno

$$\cos \theta = \frac{\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_u\| \|\varphi_v\|} = \frac{F_p}{\sqrt{E_p} \sqrt{G_p}} = \frac{F_p}{\sqrt{E_p G_p}}.$$

(3) Acabamos de ver cómo la primera forma fundamental mide longitudes de curvas y ángulos de pares de curvas de la superficie dada. Recíprocamente, *la medida de longitudes de curvas de la superficie determina la primera forma fundamental*. Veámoslo.

Sea  $\omega$  un vector de  $T_p S$  y tomemos una curva en la superficie  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\alpha(t_0) = p$  y  $\alpha'(t_0) = \omega$  para un determinado valor del parámetro  $t_0 \in I$ ; consideremos la función diferenciable

$$L : I \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto L(t) = L_{t_0}^t(\alpha) = \int_{t_0}^t \|\alpha'\|.$$

Entonces la primera forma fundamental es el cuadrado de la derivada de esta función:

$$\mathbf{I}_p(\omega) = \|\omega\|^2 = \|\alpha'(t_0)\|^2 = L'(t_0)^2.$$

Considerando la longitud de las curvas un concepto intrínseco de la superficie, llegamos a la conclusión de que la primera forma fundamental es del mismo modo intrínseca. Esta idea es básica en la llamada *Geometría Intrínseca*.

A continuación calculamos como aplicación de los conceptos anteriores las *loxodromas* de la esfera, que son aquellas que forman ángulo constante con los meridianos.

**Ejemplo 5.9.** Calculemos las loxodromas  $\alpha(t)$  de la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  que forman un ángulo constante  $\theta$  con los meridianos. Partimos de las ecuaciones paramétricas de la esfera vistas en 1.9, p. 8:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u,$$

en las que  $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u$  (5.5, p. 60). En estas coordenadas tendremos  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , con vector tangente  $\alpha'(t)$ . Por otra parte, un meridiano  $v = v_0$  tiene por vector tangente  $\varphi_u$ . Las coordenadas de esos dos vectores tangentes respecto de la base  $\mathcal{B}_\varphi$  son respectivamente  $(u'(t), v'(t))$  y  $(1, 0)$ . Por tanto

$$\begin{cases} \langle \varphi_u, \alpha'(t) \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = u'(t), \\ \|\varphi_u\|^2 = 1, \quad \|\alpha'(t)\|^2 = u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t). \end{cases}$$

Como los dos vectores tangentes deben formar un ángulo constante  $\theta$ , obtenemos

$$\cos \theta = \frac{u'(t)}{\sqrt{u'(t)^2 + v'(t)^2 \cos^2 u(t)}}.$$

Elevando al cuadrado y operando un poco se obtiene que

$$v'(t)^2 \cos^2 u(t) \cos^2 \theta = u'(t)^2 (1 - \cos^2 \theta) = u'(t)^2 \sin^2 \theta,$$

Separando las funciones  $u$  y  $v$  tenemos

$$v'(t)^2 \cot^2 \theta = \frac{u'(t)^2}{\cos^2 u(t)}.$$

Omitimos una pequeña discusión de signos de  $u'$  y  $v'$ , tras la cual se puede escribir

$$v'(t) \cot \theta = \pm \frac{u'(t)}{\cos u(t)}.$$

En esta ecuación ambos miembros tiene primitivas conocidas, y queda

$$(v + c) \cot \theta = \pm \log \left( \frac{1 + \sin u}{\cos u} \right).$$

Hemos omitido el parámetro  $t$ , pues la anterior se puede ver como una ecuación implícita de la loxodroma  $\alpha$  en las coordenadas locales  $(u, v)$ , que son la latitud y la longitud. ■

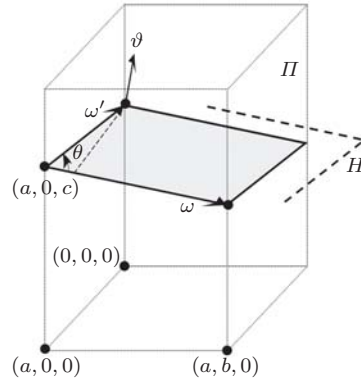
Terminaremos la lección mostrando que el cálculo de áreas depende, como el de longitudes y ángulos, de la primera forma fundamental. Vamos a utilizar una fórmula del Análisis para el cálculo del área de un grafo mediante una integral, pero para facilitar la tarea al lector la justificaremos antes.

**(5.10) Área de un grafo.** (1) En primer lugar resolvemos un problema de geometría elemental.

Consideremos un plano de  $\mathbb{R}^3$  perpendicular al vector  $\vartheta = (r, s, 1) \in \mathbb{R}^3$ , y sea  $\Pi$  un paralelepípedo cuya base rectangular tiene lados de longitudes  $a$  y  $b$ . Entonces  $\Pi$  define en el plano un paralelogramo de área

$$\sqrt{1 + r^2 + s^2} \, a b.$$

La figura describe la situación, y sirve de guía para la demostración. En efecto, el área buscada es  $\|\omega\| \|\omega'\| \sin \theta$ , que es la norma del

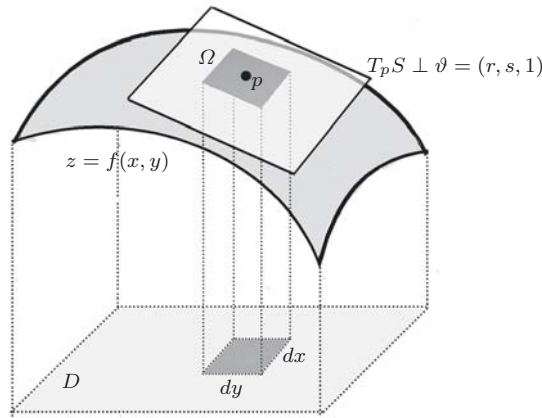


producto vectorial  $\omega \wedge \omega'$ . Podemos suponer que el origen de esos vectores  $\omega$  y  $\omega'$  es el punto  $(a, 0, c)$ , y obtener sus extremos respectivos intersectando el plano  $H$  perpendicular a  $\vartheta$  que pasa por  $(a, 0, c)$  con: (i) la recta vertical que pasa por  $(a, b, 0)$  y (ii) la recta vertical que pasa por  $(0, 0, 0)$ . Operando con cuidado se obtiene la fórmula anterior.

(2) Sea ahora  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en un abierto  $D$  del plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ , y consideremos su grafo  $T : z = f(x, y)$  en  $\mathbb{R}^3$ . El área de ese grafo es

$$\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

En efecto, argumentemos sin formalismos lo que en realidad es un problema de cálculo integral. El elemento de área que hay que integrar es el área  $\Omega$  de una sección como la del apartado anterior, aquí del plano tangente en un punto  $p = (x, y, f(x, y)) \in T$  con el paralelepípedo cuya base tiene lados  $dx$  e  $dy$ .



Es decir, el área es

$$\int_D \Omega = \int_D \sqrt{1 + r^2 + s^2} \, dx dy.$$

Pero en nuestro caso, según 3.7, p. 36, tenemos el vector  $\vartheta = (-f_x, -f_y, 1)$ , lo que da la fórmula deseada. ■

Después de esta preparación volvemos al discurso principal, para expresar mediante la primera forma fundamental el cálculo de áreas.

**(5.11) Áreas en una superficie.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$

una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para calcular áreas de subconjuntos de  $W$ .

(1) Como  $\varphi$  no tiene por qué ser una parametrización de Monge de un grafo, debemos empezar considerando otra que sí lo sea, que existe por 2.2, p. 18. Sea  $p \in W$ , y sea  $T \subset W$  un entorno suyo que es un grafo. Para facilitar la presentación, suponemos que  $T$  es del tipo  $z = f(x, y)$ . Vimos en 5.3, p. 59, que el determinante de la primera forma fundamental en la parametrización de Monge  $\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  es

$$\det(Q'(x, y)) = 1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2,$$

precisamente el radicando de la fórmula integral de 5.10(2), con lo que:

$$\text{área}(T) = \int_D \sqrt{\det(Q'(x, y))} \, dx dy.$$

(2) La fórmula anterior se cumple también para  $\varphi$ , es decir:

$$\text{área}(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u, v))} \, du dv.$$

En efecto, para comprobar que las dos integrales valen lo mismo, hacemos en la segunda el cambio de variables  $h = \varphi^{-1} \circ \psi : D \rightarrow U$ , y, como nos enseña el Análisis, queda:

$$\int_{\varphi^{-1}(T)} \sqrt{\det(Q(u, v))} \, du dv = \int_D \sqrt{\det(Q(h(x, y)))} \, |\det(J_h(x, y))| \, dx dy,$$

donde  $J_h$  es el jacobiano del cambio realizado. Pero vimos en 5.2(3), p. 59, que

$$\det(Q'(x, y)) = \det(Q(u, v)) \det(J_h(x, y))^2, \quad (u, v) = h(x, y),$$

luego el último integrando es precisamente  $\sqrt{\det(Q'(x, y))}$  y hemos terminado.

(3) Lo anterior muestra que para calcular áreas en un entorno del punto  $p$  hay que hacer en la región correspondiente de  $U$  la integral de la función  $\sqrt{\det(Q(u, v))}$ . Como esta función es la misma para todos los puntos  $p \in W$ , resulta al final que

$$\text{área}(\Sigma) = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \sqrt{\det(Q)} = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \sqrt{EG - F^2} = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$$

para cualquier subconjunto  $\Sigma \subset W$ . ■

La discusión del párrafo anterior contiene todo lo necesario para definir el concepto más general de integral de una función.

**(5.12) Integral de una función en una superficie.** Como antes, sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$  una parametrización suya. Vamos a utilizar lo anterior para definir la integral  $\int_{\Sigma} f$  de una función  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un subconjunto  $\Sigma$  de  $W$ .

Desde un punto de vista geométrico, la integral de la función  $f$  debe ser el volumen encerrado entre su grafo y la superficie, entendiendo que sobre cada elemento de área  $\Omega$  de la superficie en un punto  $p$  se eleva un paralelepípedo de altura  $f(p)$ . El volumen de ese paralelepípedo será  $f\Omega$ , y éste será el *elemento de volumen* cuya integral denotamos  $\int_{\Sigma} f$ . En coordenadas locales

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f(\varphi(u, v)) \sqrt{\det(Q(u, v))} \, dudv = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} f \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

(con un pequeño abuso de notación al final). Naturalmente, ésta fórmula es la definición, de la que el argumento previo es sólo una motivación. Por tanto, debe comprobarse que el resultado de la integral no depende de la parametrización. Eso resulta por cambio de variables, igual que para el cálculo de áreas en 5.11(2).

En particular, el área de  $\Sigma$  es la integral de la función constante igual a 1:  $\text{área}(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1$ , es decir, un volumen de altura 1 sobre  $\Sigma$ . ■

**Ejemplos 5.13.** (1) Calculemos el área de la esfera unidad  $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Será ocho veces el área de un octante  $\Sigma = \mathbb{S}^2 \cap \{x > 0, y > 0, z > 0\}$ . Para calcular este área usamos la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u,$$

para la que sabemos que  $\det(Q(u, v)) = \cos^2 u$ . Como  $\varphi^1(\Sigma)$  es el rectángulo  $0 < u < \frac{\pi}{2}, 0 < v < \frac{\pi}{2}$ , el área del octante es

$$\text{área}(\Sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \, dudv = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,  $\text{área}(\mathbb{S}^2) = 4\pi$ .

(2) Sea  $S$  la superficie de revolución parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

y para la que hemos calculado que  $\det(Q(u, v)) = (\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2)\zeta^2(u)$ . El dominio de la parametrización será  $(a, b) \times (0, 2\pi)$ , y por tanto

$$\text{área}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} du dv = 2\pi \int_a^b \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} du.$$

Por ejemplo, aplicando esta fórmula con  $\zeta(u) = c + r \cos u$ ,  $\xi(u) = r \sin u$ , se obtiene el área del toro de revolución, que es  $4\pi^2 rc$ .

Si la curva  $C$  es un grafo  $x = \zeta(z)$ , entonces  $z = \xi(u) = u$  y la fórmula anterior queda

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b \zeta(z) \sqrt{1 + \zeta'(z)^2} dz,$$

seguramente más familiar para el lector. ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el plano afín parametrizado por  $\varphi(u, v) = p + u\omega + v\omega'$ , donde  $\omega$  y  $\omega'$  son vectores independientes. Expresar la primera forma fundamental en estas coordenadas y calcular su determinante. Deducir una fórmula para el área de un rectángulo de lados paralelos a  $\omega$  y  $\omega'$  con longitudes  $a$  y  $b$ .

**Número 2.** Sea  $S$  el grafo de la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4$  y consideremos la correspondiente parametrización de Monge. Hallar la primera forma fundamental.

**Número 3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  la superficie definida por la parametrización global  $\varphi: \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow S$  dada por  $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ . Hallar la primera forma fundamental y deducir que las curvas coordenadas de esta parametrización son ortogonales en todo punto.

**Número 4.** Sea  $\varphi$  una parametrización de una superficie  $S$  tal que  $E \equiv 1$  y  $F \equiv 0$ . Probar que las curvas coordenadas  $u = u_0, u = u_1$  definen sobre las curvas coordenadas  $v = v_0, v = v_1$  segmentos de igual longitud.

**Número 5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Hallar las curvas de  $S$  que cortan a las generatrices en un ángulo constante.

**Número 6.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el hiperboloide de ecuación  $z = axy$ .

- (1) Hallar el ángulo con que se cortan las curvas coordenadas  $x = x_0, y = y_0$ .
- (2) Encontrar la familia de curvas que intersectan ortogonalmente a las curvas  $x = \text{constante}$ .

**Número 7.** Sean  $\varphi: U \rightarrow S_1$  y  $\psi: U \rightarrow S_2$  parametrizaciones de dos superficies; sean  $E, F, G$  y  $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$  los coeficientes de la primera forma fundamental de  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente. Probar que  $\psi^{-1} \circ \varphi$  conserva áreas si y sólo si las funciones  $EG - F^2$  y  $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2$  son iguales.

**Número 8.** Utilizar el problema anterior para demostrar que la aplicación antipodal  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  dada por  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  conserva áreas.



**Número 9.** Sea  $S$  el grafo de una función diferenciable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un abierto conexo  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Probar que la proyección  $\pi : S \rightarrow U$ ,

- (1) No aumenta áreas:  $\text{área}(\pi(W)) \leq \text{área}(W)$  para cualquier abierto  $W \subset S$ , y
- (2) Conserva áreas si y sólo si  $S$  está contenida en un plano horizontal.

**Número 10.** Calcular el área de una esfera de radio arbitrario.

## Notas

1. El cálculo de áreas y volúmenes es uno de los problemas más antiguos de las matemáticas, pues está relacionado con las necesidades de la vida ordinaria. Los babilonios conocían una serie de reglas para calcular áreas y volúmenes de algunas figuras lineales. Los egipcios, según HERODOTO (484–425 a.C.), necesitaban la geometría para volver a determinar cada año los bordes de las tierras que eran inundadas por el Nilo; sin embargo, sus conocimientos geométricos no iban mucho más allá de los de los babilonios. Los griegos utilizaron el llamado *método de exhaustión*, inventado por EUDOXO DE CNIDO (390–337 a.C.), para el cálculo de áreas de superficies y volúmenes de figuras limitadas por superficies. Este método consiste en inscribir o circunscribir figuras lineales en la superficie, polígonos por ejemplo, que se aproximan cada vez más a ella, de modo que la superficie se puede considerar como límite de estas figuras, aunque los griegos no utilizaron la noción de límite (de hecho, tenían aversión hacia la noción de infinito y hacia los infinitesimales). La clave del método consiste en probar que la diferencia entre el área de la superficie y el área de cualquier polígono que la aproxima suficientemente se puede hacer tan pequeña como se desee. El principal defecto de este método es que se necesita conocer a priori el valor del área o volumen para después demostrar rigurosamente que, efectivamente, el valor es el supuesto. Al conocimiento de esa magnitud se llega por otros procedimientos, por ejemplo mecánicos. El libro XII de los *Elementos* de EUCLIDES (325–265 a.C.) contiene 18 teoremas sobre áreas y volúmenes de figuras geométricas basados en este método. ARQUÍMEDES (287–212 a.C.) calculó el área de la esfera y de otras superficies sin tener, al igual que sus antecesores, una definición precisa de las nociones de área y volumen. Ese hecho no es infrecuente en matemáticas y, en el caso de las superficies, sólo se contaría con definiciones satisfactorias en el siglo XX. Sin embargo, no se debe deducir de ello que los métodos de Arquímedes no fueran rigurosos. Según el historiador de las matemáticas MORRIS KLINE (1908–1992), su rigor es muy superior al que se puede encontrar en las obras de Newton y Leibniz. Después de Arquímedes, habría que esperar hasta CHRISTIAAN HUYGENS para conocer las áreas de otras superficies, como el hiperboloide y algunas superficies de revolución. La invención del cálculo infinitesimal supuso un avance decisivo en el viejo problema del cálculo de áreas y volúmenes.

2. Arquímedes es el mayor matemático de la antigüedad y uno de los más importantes de todos los tiempos. Nació en Siracusa, Sicilia, pero recibió su formación en Alejandría,

Egipto, lugar en el que, después de la muerte de Alejandro Magno, se dieron las circunstancias propicias para que florecieran la ciencia, la cultura y la técnica en un grado tal que las allí producidas han dejado una huella indeleble en la civilización. De acuerdo con el deseo de Alejandro, aquella ciudad se convirtió en un centro cultural cosmopolita en el que confluieron griegos, persas, árabes, romanos, judíos, etíopes, indios... La famosa biblioteca de la ciudad contaba con 750.000 volúmenes, entre los que se incluían los procedentes de las bibliotecas personales de ARISTÓTELES (384–322 a.C.) y TEOFRASTO (371–287 a.C.). En el año 290 a.C., durante el reinado de Tolomeo I, se construyó un centro que albergaba a poetas, filósofos, historiadores, geógrafos, filólogos, astrónomos, médicos, artistas y matemáticos. A este centro, dedicado a las musas, se le puso el nombre de *Museo*. Ciñéndonos al campo estricto de las matemáticas, en Alejandría se formaron o realizaron su obra, aparte de Arquímedes, NICOMEDES (280–210 a.C.), ERATÓSTENES DE CIRENE (276–194 a.C.), HIPARCO DE RODAS (190–120 a.C.), HERÓN (10–75), MENE-LAO (70–130), CLAUDIO TOLOMEIO (85–165), DIOFANTO (200–284) y PAPPUS (290–350). También fueron profesores allí Euclides y APOLONIO DE PERGA (262–190 a.C.), aunque a estos se les considera pertenecientes al periodo anterior de la cultura helenística. Resulta asombroso que una iniciativa como la de Alejandría fuera posible, especialmente si tenemos en cuenta las siguientes palabras de SIR GEOFFREY ERNEST RICHARD LLOYD (1933–) en su libro *Early Greek Science: Thales to Aristotle* de 1970: «la ciencia fue objeto de interés sólo para un puñado de individuos, y los científicos fueron ciertamente raros y escasos. No había incentivos económicos para ser un científico, y la ciencia no recibió ningún apoyo estatal. La idea que domina ahora nuestra sociedad actual de que la ciencia tiene las llaves del progreso material era del todo ajena al mundo antiguo, y, sin esa idea, la escala de la actividad científica fue siempre muy pequeña, al menos según los parámetros modernos. Todos los científicos mencionados en estas páginas serían superados en número por la nómina de profesores de una universidad actual de tipo medio».

Después de su estancia en Alejandría, Arquímedes volvió a Siracusa, donde realizaría la mayor parte de su actividad, que no se restringiría sólo a las matemáticas. Sus descubrimientos en Mecánica e Hidrodinámica tuvieron aplicaciones inmediatas y le proporcionaron un gran respeto entre sus contemporáneos. A pesar de tener orígenes nobles, Arquímedes llevó siempre una vida frugal y modesta, como se pone de manifiesto en los muchos testimonios que se escribieron sobre él. Cicerón, por ejemplo, lo describe como «un homúnculo de modesta condición que trazaba figuras en la arena». Su talento se puso al servicio de la defensa de su ciudad cuando fue asediada por los romanos a las órdenes del cónsul Marcelo. La multitud de inventos de Arquímedes, como catapultas, armamento mecánico, espejos incendiarios y artificios balísticos ayudaron decisivamente a que la ciudad fuera impenetrable durante mucho tiempo. Sin embargo, después de tres años de resistencia cayó finalmente en manos de los asaltantes y, a pesar de las estrictas órdenes de Marcelo, Arquímedes moriría a manos de uno de ellos. Así relata MESTRIO PLUTARCO (48–120) en sus *Vidas Paralelas* esa muerte: «Lo que principalmente afligió a Marcelo fue lo que ocurrió con Arquímedes: hallábase éste casualmente entregado al examen de cierta figura matemática, y fijos en ella su ánimo y su vista, no sintió la invasión de los romanos ni la toma de la ciudad. Presentósele repentinamente un soldado, dándole

*orden de que le siguiera a casa de Marcelo; pero él no quiso antes de resolver el problema y llevarlo hasta la demostración; con lo que, irritado, el soldado desenvainó la espada y le dio muerte».*

**3.** Las matemáticas de Arquímedes parten de la base firme de la obra de sus antecesores, especialmente de la gran compilación de geometría griega elemental realizada por Euclides en sus *Elementos*. Esta geometría es obra de los matemáticos de la *Academia de PLATÓN* (427–347 a.C.), y se puede considerar fruto del idealismo platónico que, en cierto modo, marcaba una separación muy estricta entre la teoría y la práctica. La geometría pertenecía al mundo de las ideas puras, y no debía sufrir contaminación de la realidad. Los *Elementos* se consideraban como una introducción al estudio de la geometría según las ideas de la escuela platónica, y constituían una preparación para los estudios filosóficos. También para Arquímedes son los *Elementos* un punto de partida imprescindible. Tiene un conocimiento exhaustivo de los mismos y los utiliza constantemente. Sin embargo, la visión matemática de Arquímedes trascendería el punto de vista platónico, pues no desdénó ningún procedimiento, incluso aquellos que provenían de la más tosca experiencia, para elaborar sus resultados matemáticos.

**4.** La producción matemática de Arquímedes consta de los siguientes libros:

- [1] *Sobre la esfera y el cilindro*. Dedicado a la discusión de temas relacionados con el área y el volumen de estas figuras así como del cono.
- [2] *Medida del círculo*. Donde, entre otras cosas, prueba la equivalencia entre el área del círculo y la del triángulo de base la circunferencia y altura el radio.
- [3] *Sobre conoides y esferoides*. Extensión a las cuádricas de revolución de los resultados de *Sobre la esfera y el cilindro*.
- [4] *Sobre las espirales*. Estudio de la *espiral de Arquímedes* y cálculo de áreas de diversas regiones limitadas por partes de esta curva.
- [5] *Cuadratura de la parábola*. Diversos resultados sobre la cuadratura de un segmento de parábola.
- [6] *Sobre el equilibrio de los planos*. Estudio de los centros de gravedad de diversas figuras planas y condiciones de equilibrio de los cuerpos geométricos.
- [7] *Sobre los cuerpos flotantes*. Estudio de la posición de equilibrio de un casquete esférico sumergido en un fluido. Incluye el celeberrimo *Principio de Arquímedes* de la Hidrostática, y es el precedente más ilustre de la Ingeniería Naval.

El trabajo de Arquímedes tiene dos partes, descubrimiento y demostración. En la primera, que podríamos llamar matemático-experimental, no desdeña ningún procedimiento heurístico que le permita averiguar la solución de los problemas que quiere resolver. En particular, los métodos mecánicos que le servirían para fabricar aparatos sorprendentes también le sirvieron para encontrar la solución correcta a sus problemas geométricos. Esto lo explicaría en su libro *El método sobre los teoremas mecánicos*. Naturalmente estos métodos no proporcionan una demostración, pero son un paso imprescindible para poder aplicar el método de exhaustión, que satisface todos los requisitos exigibles de rigor. Arquímedes es un antecesor del cálculo infinitesimal e integral, pero sintió de modo más

agudo que los primeros practicantes de estas técnicas la necesidad de rigor, que en el caso del cálculo sólo se conseguiría siglos después de su descubrimiento.

Abundante información sobre diferentes aspectos de la vida y la obra de este grandísimo matemático aparece en las *Obras escogidas de Arquímedes*, editadas para la *Real Sociedad Matemática Española* por ANTONIO JOSÉ DURÁN (1962–) con ocasión del *Congreso Internacional de Matemáticos* celebrado en Madrid en 2006.

---

## La aplicación de Gauss

---

En esta lección comenzamos el estudio de algunas de las nociones más importantes de la Geometría Diferencial de Superficies, que giran en torno a la denominada *aplicación de Gauss*.

Ya hemos definido anteriormente la dirección normal en un punto de una superficie, pero ahora es el momento de realizar un análisis cuidadoso de este concepto.

**(6.1) Vectores normales al plano tangente.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable y  $p \in S$ .

(1) Como hemos visto (3.4(1), p. 33), cada parametrización  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$  de un entorno de  $W$  de  $p$  determina la dirección normal al plano tangente  $T_p S$  mediante el producto vectorial  $\vartheta_p = \varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}$ . El plano tangente determina completamente su dirección normal, pero el vector no nulo  $\vartheta_p$  sólo está determinado *salvo proporcionalidad*. Para mejorar esa salvedad consideramos el vector *unitario* (esto es, de norma uno)

$$\eta_p = \frac{\vartheta_p}{\|\vartheta_p\|}.$$

Este vector se denomina *vector normal*, y está determinado *salvo signo*.

(2) Sea  $\psi$  otra parametrización con coordenadas  $(s, t)$  que cubre  $p$  y sea  $\eta'_p$  el correspondiente vector normal. Se tiene  $\eta'_p = \pm \eta_p$ , y queremos determinar ese signo. Consideramos la matriz jacobiana de cambio de coordenadas  $\varphi^{-1} \circ \psi$ :

$$J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Vimos en 3.4(3), p. 33, que

$$\psi_{s,p} = a \varphi_{u,p} + b \varphi_{v,p}, \quad \psi_{t,p} = c \varphi_{u,p} + d \varphi_{v,p},$$

luego

$$\begin{aligned}\vartheta' &= \psi_s \wedge \psi_t = (a\varphi_u + b\varphi_v) \wedge (c\varphi_u + d\varphi_v) \\ &= ac\varphi_u \wedge \varphi_u + ad\varphi_u \wedge \varphi_v + bc\varphi_v \wedge \varphi_u + bd\varphi_v \wedge \varphi_v \\ &= (ad - bc)\varphi_u \wedge \varphi_v = (ad - bc)\vartheta,\end{aligned}$$

y nótese que  $ad - bc = \det(J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p)))$ . Por tanto, al calcular los vectores normales para obtener el signo de la relación  $\eta'_p = \pm \eta_p$  resulta que es el *signo del determinante jacobiano del cambio de coordenadas*. ■

La discusión anterior muestra que dos parametrizaciones de una misma superficie definen los mismos vectores normales si y sólo si el determinante jacobiano del cambio de coordenadas es siempre positivo; en ese caso decimos simplemente que *el cambio de coordenadas es positivo*. Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 6.2.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable. Son equivalentes:*

- (1) *Existe una aplicación continua  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  que asigna a cada  $p \in S$  un vector no nulo  $N(p)$  ortogonal al plano tangente  $T_p S$ .*
- (2) *Existe un atlas de  $S$  cuyos cambios de coordenadas son todos positivos.*

**Demostración.** Que (2) implica (1) resulta de la discusión precedente, pues al ser todos los cambios de coordenadas positivos, dos parametrizaciones definen los mismos vectores normales en los puntos comunes, y podemos definir consistentemente  $p \mapsto \eta_p$ , eligiendo para cada  $p$  el vector normal asociado a cualquier parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  del atlas con  $p \in W$ .

Recíprocamente, supongamos que existe  $N$ . Entonces  $\|N\|$  es una función continua nunca nula, y podemos dividir  $N$  por ella para suponer que cada vector  $N_p$  es unitario, esto es, es un vector normal a  $T_p S$ . Fijemos un punto  $p_0 \in S$ , y elijamos una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$  de un entorno conexo  $W$  de  $p_0$  definida en el disco unidad  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Afirmamos que la aplicación diferenciable  $\eta : W \rightarrow \mathbb{R}^3 : p \mapsto \eta_p$  coincide con  $N|_W$  salvo signo.

En efecto, por la continuidad de  $N$  y  $\eta$ , los conjuntos disjuntos

$$W^+ = \{p \in W : N_p = \eta_p\} \quad \text{y} \quad W^- = \{p \in W : N_p = -\eta_p\}$$

son cerrados, y por la unicidad salvo signo de los vectores normales,  $W = W^+ \cup W^-$ , luego son también abiertos. Como  $W$  es conexo, uno de ellos es todo  $W$ . Esto prueba nuestra afirmación.

Visto lo anterior, si  $N|W = \eta$ , no hacemos nada. Si por el contrario  $N = -\eta$ , consideramos la parametrización

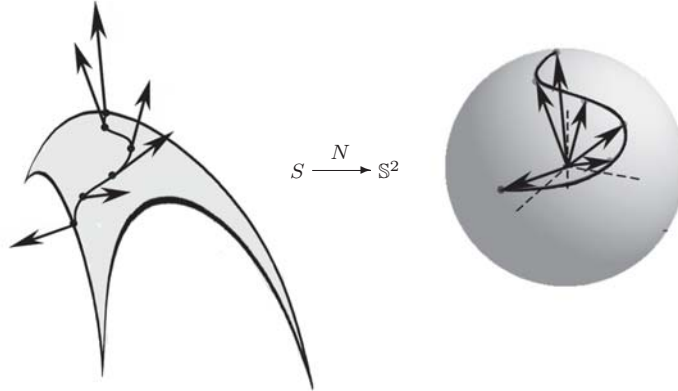
$$\psi : U \rightarrow W : (u, v) \mapsto \psi(u, v) = \varphi(v, u),$$

que está bien definida en  $U$  porque  $U$  es un disco. Claramente  $\psi_u = \varphi_v$  y  $\psi_v = \varphi_u$ , lo que tiene el efecto de que los vectores normales  $\eta'_p$  de  $\psi$  son opuestos a los  $\eta_p$  de  $\varphi$ , y por tanto  $N|W = \eta'$ .

En todo caso, hemos obtenido una parametrización de un entorno  $W$  de  $p_0$  que define en él los mismos vectores normales que  $N$ . Como esto vale para cada  $p_0 \in S$ , hemos obtenido un atlas en el que cada par de parametrizaciones definen en los puntos comunes los mismos vectores normales, y por tanto, tienen cambio de coordenadas positivo. Hemos terminado. ■

Después de establecer el resultado básico anterior definimos ya la aplicación de Gauss:

**Definición 6.3.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable y sea  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la esfera unidad. Una *aplicación de Gauss* es una aplicación continua  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  que asigna a cada punto  $p \in S$  un vector  $N(p) \in \mathbb{S}^2$  normal a  $T_p S$ .



Una aplicación de Gauss, si existe, es *única salvo signo* en el sentido siguiente. Si  $N, N' : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  son dos aplicaciones de Gauss,  $S$  es unión de los puntos donde  $N' = N$  y los puntos donde  $N' = -N$ . Como esas condiciones definen dos conjuntos cerrados disjuntos, cada uno es una unión de componentes conexas de  $S$ . En otras palabras, en cada componente conexa hay dos aplicaciones de Gauss, que son opuestas. La demostración del criterio nos dice además que una aplicación

de Gauss está definida localmente mediante parametrizaciones adecuadas, luego *es una aplicación diferenciable*.

**Observaciones 6.4.** (1) Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización local de una superficie  $S$ . La aplicación  $p \rightarrow \eta_p$  asociada a  $\varphi$  no es más que una aplicación de Gauss de  $W$  (que es una superficie diferenciable). Por ello, si  $S$  tiene una parametrización global, entonces tiene una aplicación de Gauss. En particular los grafos, que tienen la parametrización global de Monge (véase 3.6, p. 36).

(2) También conviene recordar que toda superficie  $S$  es localmente una superficie de nivel: cada punto tiene un entorno  $V$  en  $\mathbb{R}^3$  en el que está definida una ecuación implícita  $g(x, y, z) = a$  cuyo gradiente  $\nabla_p g \neq 0$  es ortogonal  $T_p S$  para todo  $p \in W = S \cap V$ . Resulta que la aplicación:  $p \mapsto \frac{\nabla_p g}{\|\nabla_p g\|}$  es una aplicación de Gauss de  $W$ . Así, si  $S$  tiene una ecuación implícita global, entonces tiene una aplicación de Gauss. ■

Inmediatamente hay que decir que no siempre existen aplicaciones de Gauss. Hemos visto antes el criterio de existencia de un atlas con cambios de coordenadas positivos. Esta condición está directamente relacionada con la noción de orientación del plano y del espacio vectorial. El Álgebra Lineal define la orientación de un espacio vectorial mediante la elección de una base, o, con más precisión, de todas las bases relacionadas con la elegida por matrices de cambio con determinante positivo (lo que recuerda el criterio del atlas). En nuestra superficie  $S$  podemos adoptar un punto de vista parecido eligiendo una orientación en cada plano tangente, siempre y cuando las orientaciones así elegidas varíen continuamente en función del punto de tangencia.

**(6.5) Orientación de los planos tangentes.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable.

(1) Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización local de  $S$ . Para cada punto  $p$  del abierto  $W$  tenemos la base  $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}\}$  de  $T_p S$ . Esta base determina una orientación  $[\varphi]_p$  del plano  $T_p S$  y, ya que los vectores de la base dependen continuamente de  $p$ , podemos considerar que también la orientación tiene esta propiedad. Formalmente, la aplicación  $[\varphi] : p \mapsto [\varphi]_p$  es continua en  $W$ .

(2) Consideremos otra parametrización  $\psi : U' \rightarrow W'$ , y un punto  $p \in W \cap W'$ . En  $T_p S$  tenemos las dos orientaciones  $[\varphi]_p$  y  $[\psi]_p$ , que coinciden cuando el cambio de base correspondiente tiene determinante positivo. Pero la matriz de ese cambio de base es la jacobiana  $J_{\varphi^{-1} \circ \psi}(\psi^{-1}(p))$  del cambio de coordenadas  $\varphi^{-1} \circ \psi$  (3.4(3)),



luego  $\varphi$  y  $\psi$  definen la misma orientación en  $W \cap W'$  si y sólo si el determinante jacobiano de  $\varphi^{-1} \circ \psi$  es siempre positivo.

(3) Resulta de lo anterior que si existe un atlas  $\mathcal{A}$  de  $S$  cuyos cambios de coordenadas son todos positivos, entonces existe una *elección continua de orientación* en todos los planos tangentes:  $p \mapsto [\varphi]_p$ , tomando cualquier parametrización  $\varphi$  del atlas que parametrice un entorno de  $p$ . ■

Así, nos hemos encontrado el mismo criterio que para la existencia de aplicación de Gauss, que justifica la siguiente definición:

**Definición 6.6.** Una superficie  $S$  se llama *orientable* si tiene una aplicación de Gauss. En ese caso una *orientación* de  $S$  es la elección de una tal aplicación, y hecha esa elección se dice que la superficie está *orientada*.

Tal vez sea bueno recordar aquí la demostración de 6.2, p. 74, donde mediante una aplicación de Gauss  $N$  se construía un atlas con todos sus cambios positivos, es decir, una elección continua de orientación en toda la superficie. La clave era elegir parametrizaciones  $\varphi: U \rightarrow W$  tales que  $\eta_p = N(p)$  para todo  $p \in W$ ; decimos en ese caso que  $\varphi$  es *compatible con  $N$* , o que es *compatible con la orientación*.

Presentemos por fin una superficie no orientable, es decir, que no tiene aplicaciones de Gauss:

**Ejemplo 6.7.** Éste es el ejemplo por excelencia: la *banda de Möbius*. Podemos definirla como la imagen  $S$  de la aplicación diferenciable  $f: \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}u \\ 0 \\ \sin \frac{1}{2}u \end{pmatrix}.$$

Es fácil entender la dinámica de esta definición. Como la matriz  $3 \times 3$  es la de una rotación de ángulo  $u$  alrededor del eje de las  $z$ , el segundo sumando traza un cierto segmento  $I_u$  de longitud 1 centrado en el punto  $(\cos u, \sin u, 0)$  de la circunferencia unidad en el plano  $xy$ .

(1) Las restricciones de  $f$  a dominios del tipo  $(a, a + 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  son parametrizaciones de  $S$ , y para tener un atlas de  $S$  basta tomar las dos siguientes:

$$\begin{cases} \varphi = f|U : U \rightarrow f(U) = W, & U = (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \\ \psi = f|U' : U' \rightarrow f(U') = W', & U' = (\pi, 3\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{cases}$$

El abierto  $W$  consiste en toda la banda  $S$  salvo el segmento  $I_0$ , y  $W'$  en toda la banda salvo  $I_\pi$ .

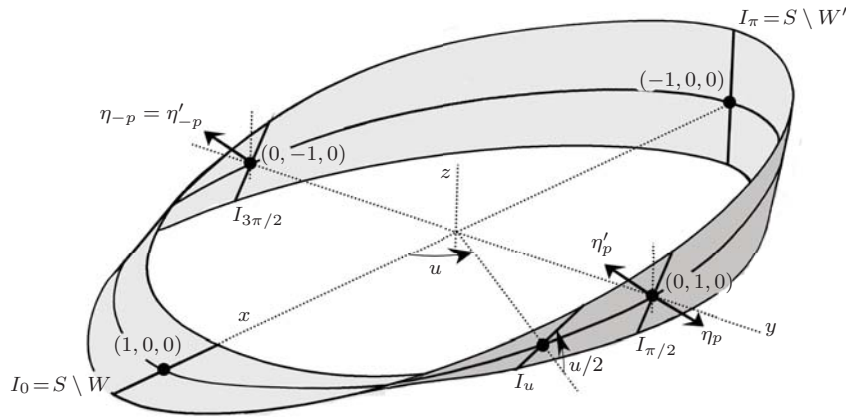
Consideramos ahora los puntos  $p = (0, 1, 0)$  y  $-p = (0, -1, 0)$ , ambos en  $W \cap W'$ :

$$p = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \psi\left(\frac{5\pi}{2}, 0\right), \quad -p = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = \psi\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right),$$

en los que tenemos los siguientes vectores normales (cálculense)

$$\begin{cases} \eta_p = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta_{-p} = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}); \\ \eta'_p = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), & \eta'_{-p} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Lo importante aquí es que  $\eta_p = -\eta'_{-p}$  y  $\eta_{-p} = \eta'_{-p}$ .



(2) Supongamos ahora que existe una aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Como  $W$  es conexo,  $N|W$  y  $\eta$  o bien son iguales o bien son opuestos. Cambiando  $N$  por su opuesto  $-N$  si es necesario, podemos suponer  $N|W = \eta$ , luego

$$N_p = \eta_p = -\eta'_{-p}, \quad N_{-p} = \eta_{-p} = \eta'_{-p}.$$

Ahora, como también  $W'$  es conexo,  $N|W'$  y  $\eta'$  tienen que ser iguales u opuestos, pero: (i) no pueden ser iguales, pues no coinciden en  $p$ , (ii) no pueden ser opuestos, pues coinciden en  $-p$ .

De esta manera concluimos que la banda de Möbius no tiene aplicación de Gauss, es decir, no es orientable. ■

Insistimos en que todas las superficies son *localmente* orientables, es decir, todo punto tiene un entorno abierto que es una superficie orientable. Sin embargo, el concepto de orientabilidad es global, pues se refiere a la superficie en su totalidad, como bien se ve con la banda de Möbius.

Volviendo al concepto de aplicación de Gauss, como una tal aplicación recoge la variación de los vectores normales a los planos tangentes de la superficie, recoge la manera en que esos mismos planos varían, y puede dar una idea de la forma de la superficie. El caso extremo es que no haya variación ninguna:

**Proposición 6.8.** *Una superficie conexa  $S \subset \mathbb{R}^3$  es un abierto de un plano afín si y sólo si tiene una aplicación de Gauss  $N$  constante.*

*Demostración.* La condición necesaria es evidente, pues un abierto de un plano afín tiene la misma dirección normal en todos sus puntos: la de plano; en consecuencia tiene una aplicación de Gauss constante. El recíproco es un ejercicio ilustrativo de las ventajas de disponer de cálculo diferencial en superficies. Supongamos que  $S$  tiene una aplicación de Gauss constante, digamos  $N \equiv (a, b, c) \in \mathbb{S}^2$ ; afirmamos que la aplicación diferenciable  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = ax + by + cz$  es constante.

En efecto, como  $S$  es conexa, basta ver que todas las derivadas  $d_p f$  son nulas (4.6, p.47). Pero  $f$  es la restricción de la aplicación lineal  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por la misma fórmula, luego

$$d_p f(\omega) = (d_p F)(\omega) = F(\omega) = \langle N(p), \omega \rangle = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_p S.$$

En fin, que  $f$  sea constante, digamos  $f \equiv d$ , significa que  $S$  está contenida en el plano  $ax + by + cz = d$ , y por 4.11, p.50, concluimos que  $S$  es un abierto de ese plano. ■

Analizamos a continuación algunos ejemplos en los que la variación de la aplicación de Gauss es significativa.

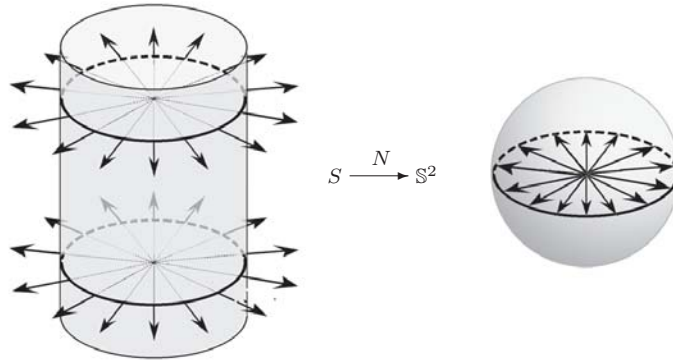
**Ejemplos 6.9.** (1) Las dos aplicaciones de Gauss de la esfera unidad son la identidad y la aplicación antipodal, que denotamos  $\pm N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Obviamente son difeomorfismos, lo que señalamos aquí como indicador de la mucha variación del vector normal.

(2) Consideremos ahora el cilindro  $S \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Como tiene ecuación implícita global, obtenemos inmediatamente una aplicación de

Gauss vía el gradiente. En este caso el gradiente es  $(2x, 2y, 0)$ , que tiene norma  $\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2$  (pues estamos en puntos del cilindro). Concluimos que

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

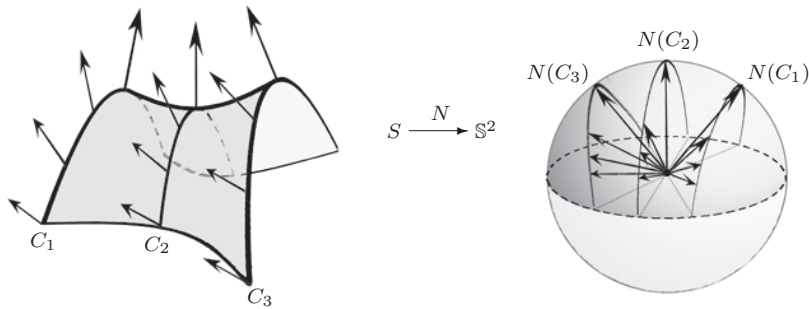
es una aplicación de Gauss.



Esta aplicación transforma todo el cilindro  $S$  en el ecuador  $z = 0$  de  $\mathbb{S}^2$ , lo que dista mucho de ser un difeomorfismo. Podemos decir que el vector normal varía muy poco.

(3) Estudiemos el paraboloide hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$ . La parametrización de Monge de esta ecuación *explícita* tiene vector normal  $\vartheta = (2x, -2y, 1)$  (3.6, p.36), y dividiendo por la norma se obtiene una aplicación de Gauss. También podemos utilizar el gradiente de la ecuación *implícita*  $x^2 - y^2 + z = 0$ , que es el mismo  $(2x, -2y, 1)$ . En cualquier caso, una aplicación de Gauss es

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$



Es fácil comprobar que esta aplicación es un difeomorfismo sobre el abierto  $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$ . Obsérvese en la figura cuáles son las imágenes de las curvas  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  por la aplicación de Gauss, y que a lo largo de esas curvas el vector normal nunca apunta hacia el hemisferio sur. Por tanto, el vector normal varía más en este paraboloides que en el cilindro, pero bastante menos que en la esfera.

(4) Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el helicoides, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

con

$$\begin{cases} \varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b), & \varphi_v = (\cos u, \sin u, 0). \\ \vartheta = \varphi_u \wedge \varphi_v = (-b \sin u, b \cos u, -v) \end{cases}$$

(véase 3.5(4), p. 35). Como  $\|\vartheta\|^2 = b^2 + v^2$ , la aplicación de Gauss, en las coordenadas globales  $(u, v)$ , es

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}}(-b \sin u, b \cos u, -v).$$

En este caso es más costoso obtener una expresión de  $N$  en las coordenadas  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  (pero es un ejercicio que recomendamos al lector). Para entender cómo se comporta  $N$  observamos que  $N(\varphi(u, v)) \in \mathbb{S}^2$  es el vector que resulta de dividir por su norma la suma

$$(-b \sin u, b \cos u, 0) + v(0, 0, -1).$$

Fijemos  $u$ . El primer sumando es un vector de norma  $b$  del plano  $xy$ , y se le suman todos los vectores  $v(0, 0, -1)$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , con lo que se obtiene todo el plano generado por el primer sumando y el eje de las  $z$ , *salvo precisamente ese eje*. Por tanto, al dividir por la norma obtenemos el corte de ese plano con la esfera (un meridiano), excepto los polos norte y sur. Vemos así que al variar  $u$ , obtenemos toda la esfera menos los polos norte y sur. La aplicación no es suprayectiva, pero por dos puntos nada más. Por otra parte, es un aplicación claramente periódica en  $u$ , luego no es inyectiva. Se puede ver que es un difeomorfismo local, pero sobre esto volveremos en la lección siguiente. ■

Terminamos la lección describiendo la aplicación de Gauss de una superficie de revolución.

**(6.10) Aplicación de Gauss de una superficie de revolución.** Sea  $S$  una superficie de revolución como en 3.9, p. 38, de donde tomamos toda la notación. Si  $\alpha(u) =$

$(\zeta(u), 0, \xi(u))$ ,  $\zeta(u) > 0$ ,  $u \in I$ , es la curva generatriz, la aplicación

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u))$$

proporciona parametrizaciones de la superficie por restricción a dominios del tipo  $I \times (a, a + 2\pi)$ . Es fácil ver que los cambios de coordenadas resultantes son traslaciones en  $\mathbb{R}^2$ , que tienen determinante jacobiano  $\equiv 1 > 0$ . Por tanto, podemos definir una aplicación de Gauss mediante estas coordenadas  $(u, v)$ . En primer lugar

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), & \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0), \\ \vartheta = (-\zeta(u) \xi'(u) \cos v, -\zeta(u) \xi'(u) \sin v, \zeta(u) \zeta'(u)). \end{cases}$$

Como

$$\|\vartheta\| = \zeta(u) \sqrt{\zeta'(u)^2 + \xi'(u)^2} = \zeta(u) \|\alpha'(u)\|$$

supondremos la curva generatriz parametrizada por el arco, para que la aplicación de Gauss sea

$$N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)).$$

Para entender el comportamiento de  $N$ , recurrimos a la misma matriz de la banda de Möbius:

$$N(\varphi(u, v)) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\xi'(u) \\ 0 \\ \zeta'(u) \end{pmatrix}.$$

Como el vector sobre el que actúa la matriz en cuestión es el vector normal  $\mathbf{n}_\alpha(u)$  a la curva generatriz, fijado  $u$ ,  $N$  rota a lo largo del paralelo correspondiente, con un ángulo  $\theta$  respecto de la vertical dado por

$$\cos \theta = (0, 0, 1) \mathbf{n}_\alpha(u) = \zeta'(u).$$

La variación de  $N$  depende así de la del vector normal a la curva generatriz. ■

## Problemas

**Número 1.** Estudiar la aplicación de Gauss del paraboloide elíptico  $z = x^2 + y^2$ , primero como superficie topográfica y luego como superficie de revolución.

**Número 2.** Determinar una aplicación de Gauss para la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $z = e^{xy}$ . Estudiar para qué valores  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  el vector  $(\lambda, 0, \mu)$  es tangente a  $S$  en el punto  $(0, 0, 1)$ .

**Número 3.** Estudiar la aplicación de Gauss del toro. Hallar las imágenes de los meridianos y los paralelos. ¿Qué puntos de  $\mathbb{S}^2$  son imágenes de exactamente dos puntos del toro?

**Número 4.** Sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difeomorfismo entre superficies. Probar que si  $S_1$  es orientable entonces  $S_2$  también lo es. ¿Es cierta la misma afirmación si  $f$  es sólo un difeomorfismo local suprayectivo?

**Número 5.** Sea  $f : S_1 \rightarrow S_2$  un difeomorfismo local entre superficies. Probar que si  $S_2$  es orientable entonces  $S_1$  también es orientable.

**Número 6.** Probar que si una superficie  $S$  es unión de dos superficies orientables con intersección conexa, entonces  $S$  es orientable.

**Número 7.** Enunciar y demostrar un resultado que generalice el problema anterior para más de dos superficies.

**Número 8.** Sea  $S$  el subconjunto de la banda de Möbius formado por los puntos que, según la notación del ejemplo 6.7, p. 77, tienen coordenadas  $(u, v)$  con  $v \neq 0$ ; en otras palabras,  $S$  es toda la banda de Möbius menos la circunferencia central. Probar que  $S$  es una superficie conexa y orientable.

**Número 9.** Demostrar que si una superficie  $S$  contiene un conjunto abierto difeomorfo a la banda de Möbius entonces  $S$  es no orientable.

**Número 10.** Calcular la aplicación de Gauss de una superficie de revolución utilizando una ecuación implícita de la curva generatriz.

## Notas

1. La orientabilidad, o mejor, la no orientabilidad de las superficies es un tema que trasciende el ámbito estricto de las matemáticas, y que ha fascinado a muchos escritores atraídos por la ciencia. Una de las fábulas científicas más famosas, que comenzó dedicada a otro tema intrigante, la existencia de dimensiones superiores, acabó proporcionando el contexto apropiado para referirse también a la orientabilidad.

El autor de esa fábula es EDWIN ABBOTT ABBOTT, que nació el 20 de diciembre de 1838 en Marylebone, Middlesex, Inglaterra. Realizó sus estudios universitarios en la Universidad de Cambridge y se ordenó sacerdote en 1863. Su principal actividad profesional tuvo lugar en la City of London School, de la cual fue director durante 24 años. Murió el 12 de octubre de 1926 en Hampstead, que en aquella época era un barrio de las afueras de Londres. Abbott es autor de varios libros de carácter escolar y religioso, pero el que nos interesa especialmente aquí lleva por título *Flatland: a romance of many dimensions*, que publicó en 1884 bajo el seudónimo *A. Square*, que es el supuesto narrador.

En el libro se describe un mundo bidimensional, algo así como una vasta hoja de papel poblada por seres con forma de segmentos, triángulos, cuadrados, pentágonos, etc., que

se mueven libremente en la superficie sin poder situarse por encima o por debajo de ella. Los habitantes de este mundo no pueden ver más que los bordes de los polígonos y es, precisamente, el número de lados de éstos el que determina su categoría social. Las mujeres son segmentos, los obreros y soldados son triángulos isósceles, los comerciantes son triángulos equiláteros, la clase media, a la que pertenece el narrador, está representada por los cuadrados. A más lados, más elevada la clase. La clase más alta, el límite, es la de los círculos, que está formada por eclesiásticos.

Un día, en sueños, el narrador tiene una visión de Lineland, un mundo unidimensional poblado por puntos y segmentos que viven en la más inconcebible estrechez. A. Square mantiene una conversación con uno de sus habitantes, al que trata de convencer de que él procede de un mundo plano en el que todos los seres tienen la percepción de una segunda dimensión. Su testimonio es rechazado como el de un loco peligroso. Otro día Flatland es visitada por una esfera, que aparece a los ojos del narrador primero como un punto que, después, se va agrandando hasta formar un disco. Este ser extraño mantiene una conversación con él en la que, vanamente, trata de convencerle de la existencia de un espacio tridimensional, que es su morada habitual. Para ilustrar su esencia, hace varias demostraciones prácticas en las que el narrador ve como el disco se reduce rápidamente hasta el tamaño de un punto y acaba por desaparecer. A. Square se niega a admitir el testimonio de su interlocutor y le rechaza airadamente. Éste utiliza un recurso más contundente: extraerlo de su mundo plano y llevarle al mundo de tres dimensiones, Spaceland. Allí A. Square adquiere la percepción inmediata y sumamente asombrada de la tercera dimensión. Desde allí puede ver Flatland desde una nueva perspectiva, lo que le deja atónito. En Spaceland contempla los diferentes sólidos y concibe rápidamente una hipótesis audaz: que puede haber otros mundos con cuatro o más dimensiones que resulten inaccesible para estos seres del espacio. Estos pensamientos son inmediatamente rechazados por la esfera, que los califica de absurdos. Cuando A. Square vuelve a su mundo y trata de compartir lo que ha conocido con sus conciudadanos, estos se burlan de él y le encierran en una prisión, donde escribe este libro de memorias.

**2.** Este libro admite más lecturas, especialmente la sátira social de la Inglaterra victoriana, con su clasismo estricto y su discriminación de la mujer. En Flatland las clases bajas están representadas por los triángulos isósceles, que poseen un ángulo punzante inferior a  $60^\circ$  y suponen un riesgo para la seguridad pública. Mucha mayor aprensión causan las mujeres, representadas por segmentos que pueden resultar invisibles cuando aparecen transversalmente, y que suponen un riesgo mortal. Como señala RUDOLF VON BITTER RUCKER (1946–) en su libro *The Fourth Dimension*, la obra de Abbott también se puede interpretar como la alegoría de un viaje espiritual. El personaje se aleja del mundo ordinario y vuelve transformado: «*El viaje de A. Square a las dimensiones superiores es una metáfora perfecta para la experiencia mística de una realidad superior*».

**3.** También se ha interpretado la obra de Abbot como una advertencia a la comunidad científica del siglo XIX. Los científicos de aquel momento, aupados a hombros de Newton, podían caer en una cierta autocomplacencia. Que no puede tacharse de injustificada, cuando se consideran sus nombres y sus obras: la Teoría Atómica de JOHN DALTON



(1766–1844) y LORENZO ROMANO AMEDEO CARLO AVOGADRO (1776–1856), la Termodinámica según WILLIAM THOMSON (CONDE DE RUMFORD) (1753–1814), JAMES PRESCOTT JOULE (1818–1889), RUDOLF JULIUS EMMANUEL CLAUSIUS, (1822–1888) Kelvin..., la Electricidad y el Magnetismo explicados por Maxwell, las Leyes de la Herencia de GREGOR JOHANN MENDEL (1822–1884), la organización de la tabla periódica de DMITRI IVÁNOVICH MENDELÉIEV (1834–1907). Pero la complacencia debe ser precavida, como no lo son el rey de Lineland o la esfera de Spaceland cuando A. Square les habla de dimensiones más allá de la suyas. La primera sorpresa para la ciencia del XIX llegaría apenas diez años después de la publicación de Flatland, cuando WILHELM CONRAD RÖNTGEN (1845–1923) descubre los *rayos X* (de *incógnita*), y la segunda un año después cuando los átomos de uranio y radio se desintegran... El culmen de estas sorpresas se produce otros diez años después, cuando ALBERT EINSTEIN (1879–1955) propone una nueva teoría del tiempo, inconcebible para los reyes de Lineland del momento (que consta los hubo). Y el propio Einstein incurre en la intolerancia de la esfera de Spaceland cuando años después expresa su disgusto ante *el gato de Schrödinger*. Aunque tal vez Abbot no fuera adivino, sino simplemente un observador acertado de la naturaleza humana.

4. La historia de Flatland sería retomada un siglo más tarde por JEFFREY RENWICK WEEKS (1956–), que en su libro *The Shape of Space* narra cómo los habitantes de una localidad de Flatland llamada Flatsburgh deciden conocer algo del mundo exterior, más allá de los estrechos confines de su país, y nombran una comisión formada por expedicionarios a los que encargan realizar un estudio. Cuando, después de mucho tiempo, los exploradores regresan a Flatsburgh de su largo periplo, lo hacen de forma accidentada. Primero colisionan (sin graves consecuencias) con un habitante del lugar, que circula por el lado incorrecto de la carretera. Luego, llegando a la población, ven los carteles con el nombre de la ciudad escritos al revés, cosa que interpretan como la broma de unos chiquillos. Su sorpresa es, sin embargo, mayúscula, cuando ya en la ciudad ven que todas las señales escritas al revés, y que toda la gente circula por el lado contrario del habitual. En fin, se dan cuenta de que ven una imagen especular de la anterior a su viaje. Por su parte, los habitantes de la ciudad se extrañan de las afirmaciones de los retornados, que no reconocen el mundo que habían dejado y, aún más se extrañan de la forma que tenían de escribir. Después de muchas especulaciones y de nuevas expediciones, los habitantes de Flatsburgh acaban por concebir la banda de Möbius, que les proporciona una explicación de la estructura geométrica de su mundo y de los extraños fenómenos experimentados por los exploradores.

Indudablemente A. Square habría visto esa estructura al contemplar su mundo desde el exterior con la privilegiada perspectiva tridimensional. Sin embargo, debió comprender que tendrían que pasar varias generaciones hasta que ese hecho fuese admitido por sus conciudadanos, y se abstuvo de mencionarlo en sus memorias que con lo que incluían ya le proporcionaban suficientes problemas.

5. La banda de Möbius se llama así en honor del matemático alemán AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790–1868), a quien citamos en el volumen 1 (nota 2 de la lección 15,

p. 174). Möbius realizó importantes investigaciones sobre la orientación de superficies, y en particular consideró la banda que luego llevaría su nombre, aunque no fuera él su descubridor. En efecto, como indicamos en aquella nota, el primero en estudiar la banda de Möbius fue JOHANN BENEDICT LISTING (1808–1882), a quien algunos consideran el fundador de la Topología. Listing, alumno de JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855), es autor del primer libro publicado sobre esa materia en 1847, que lleva por título *Vorstudien zur Topologie*.

**6.** El lector habrá advertido que ya hemos mencionado a Gauss en muy numerosas ocasiones: exactamente, en 116. Esas 116 menciones ascenderán a más de 300, ya que la impronta de Gauss en la teoría de curvas y superficies es verdaderamente extraordinaria. De hecho, cuatro lecciones de este texto llevan por título un concepto o un teorema suyos: esta misma, la 9, la 11 y la 19. Es pues obligado incluir una semblanza suya, pero preferimos diferirla a la lección 11, dedicada a su *teorema egregio*.

## *La segunda forma fundamental*

---

En esta lección introducimos otra forma cuadrática en los planos tangentes: la denominada *segunda forma fundamental*. Para ello debemos avanzar en el estudio de la aplicación de Gauss, así que en lo sucesivo limitaremos nuestra atención *exclusivamente a las superficies orientables*.

Sea  $S$  una superficie orientable, con una orientación fijada, es decir, con una determinada aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

**(7.1) Derivada de la aplicación de Gauss.** La aplicación de Gauss  $N$  es diferenciable y su derivada  $d_p N$  en  $p$  es una aplicación lineal definida entre los planos tangentes  $T_p S$  y  $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ . Ahora bien, ambos planos vectoriales son perpendiculares al vector  $N(p)$  (para  $S$  por definición de  $N$ , para la esfera por 3.5(2), p. 34), y, en consecuencia, los dos planos coinciden. Por tanto, la derivada de la aplicación de Gauss puede ser entendida como una aplicación lineal

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_p S.$$

Esta aplicación se llama *aplicación de Weingarten*. ■

Cambiar la orientación de  $S$  significa cambiar el signo de su aplicación de Gauss, y entonces el signo de la derivada  $d_p N$  cambia de la misma manera. Por tanto, *al cambiar la orientación cambia el signo de la aplicación de Weingarten*. Señalemos que en muchos textos se utiliza  $-d_p N$  como aplicación de Weingarten; nosotros hemos preferido no introducir ese signo menos.

Consideremos una curva  $\alpha(t)$  en  $S$  con  $\alpha(t_0) = p$ ,  $\alpha'(t_0) = \omega \in T_p S$ . Resulta que

$$d_p N(\omega) = (N \circ \alpha)'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{N(\alpha(t)) - N(\alpha(t_0))}{t - t_0}.$$

Así, igual que  $N$  refleja la variación de los vectores tangentes y con ellos la de los planos tangentes, la derivada  $d_p N$ , mide las correspondientes *variaciones infinitesimales* en  $p$  (según cualquier dirección tangente  $\omega$ ). Con ello mide cómo se dobla la superficie en las proximidades de  $p$ .

Veamos dos ejemplos sencillos.

**Ejemplos 7.2.** (1) Una aplicación de Gauss de la esfera unidad es la identidad. Su derivada en cualquier punto  $p \in \mathbb{S}^2$  es por tanto también la identidad en  $T_p\mathbb{S}^2$ . Obsérvese que aunque sea la identidad para todos los puntos  $p \in \mathbb{S}^2$ , su dominio (el plano tangente) varía con el punto.

(2) Consideremos ahora el cilindro  $S \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Como vimos en 6.9(2), p. 79,

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = (x, y, 0).$$

es una aplicación de Gauss de  $S$ . Es la restricción de la proyección lineal  $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ , luego  $d_p N = (d_p \pi)|_{T_p S} = \pi|_{T_p S}$ , esto es:

$$d_p N : T_p S \rightarrow T_p S : \omega = (a, b, c) \mapsto \pi(\omega) = (a, b, 0).$$

Calculemos la matriz  $L_p$  de esta aplicación lineal respecto de una base de  $T_p S$ . Elegimos la formada por los vectores  $(-y, x, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  (3.5(3), p. 35), y tenemos

$$d_p N(-y, x, 0) = (-y, x, 0), \quad d_p N(0, 0, 1) = (0, 0, 0),$$

con lo que  $L_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Vemos que  $d_p N$  no es isomorfismo lineal, como ya sabíamos: si lo fuera, el teorema de la función inversa implicaría que la imagen de  $N$  tiene interior no vacío en la esfera. ■

Los dos ejemplos que siguen son más elaborados.

**Ejemplos 7.3.** (1) Estudiemos el paraboloides hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$ . Una aplicación de Gauss de  $S$  es (6.9(3), p. 80)

$$N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 : p = (x, y, z) \mapsto N(p) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, -2y, 1).$$

Para calcular la derivada  $d_p N$  podemos calcular la de la extensión  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por la misma fórmula, y restringir a  $T_p S$ . En lugar de eso vamos a emplear una parametrización para obtener directamente una base de  $T_p S$  y la matriz de  $d_p N$  respecto de ella. Como grafo,  $S$  tiene la parametrización de Monge  $\varphi(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$ , a la que corresponde la base  $\mathcal{B}_\varphi$  de  $T_p S$  formada por

las derivadas parciales  $\varphi_x = (1, 0, -2x)$  y  $\varphi_y = (0, 1, 2y)$ . Resulta

$$\begin{aligned} d_p N(\varphi_x) &= (N \circ \varphi)_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4y^2 + 1, 4xy, -2x), \\ d_p N(\varphi_y) &= (N \circ \varphi)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{(2x, -2y, 1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \\ &= \frac{-2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4xy, 4x^2 + 1, 2y). \end{aligned}$$

Calculemos la matriz  $L_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  de  $d_p N$  respecto de nuestra base  $\mathcal{B}_\varphi$ . Debe ser

$$d_p N(\varphi_x) = a\varphi_x + b\varphi_y,$$

esto es

$$\frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} (4y^2 + 1, 4xy, -2x) = a(1, 0, -2x) + b(0, 1, 2y).$$

Mirando las dos primeras componentes se deduce

$$a = \frac{2(4y^2 + 1)}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}}, \quad b = \frac{8xy}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}}.$$

Análogamente se obtienen los otros dos coeficientes  $c$  y  $d$ , y al final la matriz buscada es

$$L_p = \frac{2}{(4x^2 + 4y^2 + 1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4y^2 + 1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el helicoides, que tiene la parametrización global

$$\varphi : x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu,$$

con  $\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, b)$ ,  $\varphi_v = (\cos u, \sin u, 0)$ , y con aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2 + v^2}} (-b \sin u, b \cos u, -v)$$

(véase 6.9(4), p.81). Para calcular la matriz de  $d_p N$  procedemos como con el paraboloides anterior. Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (N \circ \varphi)_u = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + v^2}} (\cos u, \sin u, 0) = \frac{-b}{\sqrt{b^2 + v^2}} \varphi_v, \\ d_p N(\varphi_v) = (N \circ \varphi)_v = \frac{-b}{(b^2 + v^2)^{3/2}} (-v \sin u, v \cos u, b) = \frac{-b}{(b^2 + v^2)^{3/2}} \varphi_u, \end{cases}$$

para concluir que la matriz buscada es

$$L_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{b^2+v^2}} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-b}{(b^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b^2+v^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante no nulo, luego  $d_p N$  es un isomorfismo. Deducimos del teorema de la función inversa que  $N$  es un difeomorfismo local. ■

Por último analizamos las superficies de revolución.

**Ejemplos 7.4.** (1) Sea  $S$  una superficie de revolución como en 6.10, p. 81. Suponemos su curva generatriz parametrizada mediante  $(\zeta(u), 0, \xi(u))$  con  $\zeta(u) > 0$ . También suponemos que  $u$  es el arco, es decir, que  $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ , y por tanto  $\zeta'\zeta'' + \xi'\xi'' = 0$ . La aplicación

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u))$$

parametriza la superficie, y

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta'(u) \cos v, \zeta'(u) \sin v, \xi'(u)), & \varphi_v = (-\zeta(u) \sin v, \zeta(u) \cos v, 0), \\ N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)). \end{cases}$$

Tenemos

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (-\xi''(u) \cos v, -\xi''(u) \sin v, \zeta''(u)) = a(u) \varphi_u, \\ d_p N(\varphi_v) = (\xi'(u) \sin v, -\xi'(u) \cos v, 0) = b(u) \varphi_v \end{cases}$$

donde

$$a(u) = \frac{-\xi''(u)}{\zeta'(u)} = \frac{\zeta''(u)}{\xi'(u)}, \quad b(u) = \frac{-\xi'(u)}{\zeta'(u)}.$$

Se concluye que la matriz de  $d_p N$  es diagonal

$$L_p = \begin{pmatrix} a(u) & 0 \\ 0 & b(u) \end{pmatrix}.$$

(2) Veamos el caso del toro de revolución generado por una circunferencia del plano  $xz$  (1.11, p. 10). Parametrizamos esa circunferencia por la longitud del arco mediante

$$\zeta(u) = c + r \cos \frac{1}{r}u, \quad \xi(u) = r \sin \frac{1}{r}u \quad \text{con } (0 < r < c).$$

Escribimos por comodidad  $t = \frac{1}{r}u$ , y derivamos:

$$\zeta'(u) = -\sin t, \quad \xi'(u) = \cos t, \quad \xi''(u) = -\frac{1}{r} \sin t.$$

En consecuencia, la matriz de la segunda forma fundamental del toro es

$$L_p = \begin{pmatrix} -1/r & 0 \\ 0 & -\frac{\cos t}{c+r \cos t} \end{pmatrix}.$$

Se observa que uno de los coeficientes es constante. Más adelante entenderemos el significado de este hecho (9.4(6), p. 119). ■

Volviendo a la situación general, establecemos una propiedad básica de la aplicación de Weingarten:

**Proposición 7.5.** *Sea  $S$  nuestra superficie orientada con aplicación de Gauss  $N$  y sea  $p \in S$ . La aplicación de Weingarten  $d_p N : T_p S \rightarrow T_p S$  cumple la identidad*

$$\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle = \langle \omega, d_p N(\omega') \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_p S.$$

La propiedad anterior tiene nombre propio: se dice que  $d_p N$  es un *operador autoadjunto de  $T_p N$* .

*Demostración.* Por linealidad, basta comprobar la igualdad para los vectores de una base de  $T_p S$ . Por tanto, consideramos una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de un entorno  $W$  de  $p$ , y la base del plano tangente formada por los vectores  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$ , y vamos a ver que

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = \langle \varphi_u, d_p N(\varphi_v) \rangle.$$

Derivando la identidad  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$  respecto de  $u$  tenemos

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle + \langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle = 0,$$

luego

$$\langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle.$$

Análogamente, derivando  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$  respecto de  $v$ , se deduce que

$$\langle d_p N(\varphi_v), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uv} \rangle.$$

En fin, por la regla de Schwarz  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ , y se sigue lo que se quiere. ■

Llegamos por fin a la segunda forma fundamental. Consideremos un punto  $p \in S$ . Por ser  $d_p N$  un *operador autoadjunto*, podemos definir una forma *bilineal simétrica*  $B_p$  en el plano tangente mediante

$$B_p(\omega, \omega') = -\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle, \quad \omega, \omega' \in T_p S,$$

y tenemos la correspondiente forma cuadrática:

**Definición 7.6.** La forma cuadrática  $\mathbf{II}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle$$

es la *segunda forma fundamental de  $S$  en  $p$* .

La introducción de un signo negativo en la definición anterior es de naturaleza técnica, y quedará justificada en la lección siguiente.

Igual que la primera forma fundamental y el producto escalar se determinan mutuamente, también ocurre así con  $\mathbf{II}_p$  y  $B_p$ , y por la misma relación:

$$B_p(\omega, \omega') = \frac{1}{2}(\mathbf{II}_p(\omega + \omega') - \mathbf{II}_p(\omega) - \mathbf{II}_p(\omega')).$$

Otra consideración que hay que tener presente es que si cambiamos la orientación de  $S$ , la segunda forma fundamental cambia de signo (pues como ya hemos dicho, cambia de signo la aplicación de Weingarten).

**Ejemplos 7.7.** (1) Si  $S \subset \mathbb{R}^3$  es un abierto conexo de plano afín, entonces  $N$  es constante, su derivada en cualquier punto  $p \in S$  es nula, y la segunda forma fundamental también. Recíprocamente, supongamos que una superficie conexa  $S$  tiene nulas todas las segundas formas fundamentales  $\mathbf{II}_p \equiv 0$ . Entonces para todo  $p \in S$ , la forma bilineal simétrica asociada es también nula, es decir,  $\langle d_p N(\omega), \omega' \rangle = 0$  para cualesquiera  $\omega, \omega' \in T_p S$ . Eso sólo es posible si  $d_p N(\omega) = 0$  para todo  $\omega \in T_p S$ , es decir, si  $d_p N \equiv 0$ . Concluimos que todas las derivadas de  $N$  son nulas, y como  $S$  es conexa, que  $N$  es constante. Por 6.8, p. 79,  $S$  es un abierto de un plano afín.

(2) La esfera. Tomando como  $N$  la identidad, cada derivada  $d_p N$  es la identidad, y  $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$ , de modo que  $\mathbf{II}_p$  es definida negativa. Si tomamos como  $N$  la aplicación antipodal,  $\mathbf{II}_p = \mathbf{I}_p$  es definida positiva. Esto pasa en general: si cambiamos de signo  $N$ , cambiamos del mismo modo  $\mathbf{II}_p$ , pero no  $\mathbf{I}_p$ .



(3) El cilindro  $S : x^2 + y^2 = 1$  con aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$  y derivada  $d_p N(a, b, c) = (a, b, 0)$  (7.2(2), p. 88). Tenemos

$$\mathbf{II}_p(a, b, c) = -\langle (a, b, 0), (a, b, c) \rangle = -a^2 - b^2.$$

Vemos que  $\mathbf{II}_p$  es muy diferente de  $\mathbf{I}_p$ : ésta es definida positiva y aquélla es semidefinida negativa. ■

Los ejemplos anteriores son sencillos, y los hemos analizado con datos globales. En general, hay que utilizar expresiones locales.

### (7.8) Expresión en coordenadas locales de la segunda forma fundamental.

Seguimos con nuestra superficie  $S$ , orientada con aplicación de Gauss  $N$ , y con un punto  $p \in S$  dado.

(1) Recordemos la expresión matricial de  $\mathbf{II}_p$  respecto de una base  $\mathcal{B} = \{\varpi, \varpi'\}$  de  $T_p S$ . Si  $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi' \in T_p S$ , entonces

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} B_p(\varpi, \varpi) & B_p(\varpi, \varpi') \\ B_p(\varpi', \varpi) & B_p(\varpi', \varpi') \end{pmatrix}.$$

Esta matriz  $M_p$  clasifica  $\mathbf{II}_p$  como forma cuadrática: si es definida positiva o negativa, semidefinida positiva o negativa, o indefinida. La orientación influye aquí, pues, al cambiarla cambia de signo la matriz. Sin embargo, por ser una matriz de orden par, *no cambia el signo de su determinante*. Veremos que éste será el invariante más interesante.

(2) Consideremos una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de un abierto  $W$  de  $S$ , la base  $\mathcal{B}_\varphi$  de  $T_p S$  correspondiente. La matriz  $M_p$  de  $\mathbf{II}_p$  respecto de  $\mathcal{B}_\varphi$  es

$$M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} e_p = -\langle d_p N(\varphi_{u,p}), \varphi_{u,p} \rangle, \\ f_p = -\langle d_p N(\varphi_{u,p}), \varphi_{v,p} \rangle = -\langle d_p N(\varphi_{v,p}), \varphi_{u,p} \rangle, \\ g_p = -\langle d_p N(\varphi_{v,p}), \varphi_{v,p} \rangle. \end{cases}$$

Estos *coeficientes* determinan completamente la segunda forma fundamental, pero insistimos en que dependen de la parametrización, aunque  $\mathbf{II}_p$  no lo haga.

(3) En la demostración de 7.5, p. 91, derivamos  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$  respecto de  $u$  y  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$  respecto de  $v$  para obtener

$$\begin{cases} \langle d_p N(\varphi_u), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uv} \rangle & \text{y} \\ \langle d_p N(\varphi_v), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vu} \rangle. \end{cases}$$

Análogamente podemos derivar  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_u \rangle \equiv 0$  y  $\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_v \rangle \equiv 0$  respecto de  $u$  la primera y respecto de  $v$  la segunda, para obtener

$$\begin{cases} \langle d_p N(\varphi_u), \varphi_u \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{uu} \rangle & \text{y} \\ \langle d_p N(\varphi_v), \varphi_v \rangle = -\langle N(\varphi(u, v)), \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

En consecuencia tenemos (una vez más descargando la notación):

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vu} \rangle, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle. \end{cases}$$

Para terminar la lección, vemos cómo se aplican estas fórmulas en los ejemplos habituales.

**Ejemplos 7.9.** (1) El cilindro  $S : x^2 + y^2 = 1$ , con aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$  (6.9(2), p. 79). Ya lo hemos considerado antes (7.7(3), p. 93), pero ahora lo parametrizamos mediante  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , de manera que  $N(x, y, z) = (x, y, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$ . Tenemos:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (-\cos u, -\sin u, 0) \rangle = -1, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \langle (\cos u, \sin u, 0), (0, 0, 1) \rangle = 0. \end{cases}$$

Así, la matriz de  $\mathbf{II}_p$  respecto de la base  $\mathcal{B}_\varphi$  asociada a  $\varphi$  es  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Confirmamos que  $\mathbf{II}_p$  es semidefinida negativa.

(2) El paraboloide hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$ , con su parametrización de Monge  $\varphi(x, y) = (x, y, -x^2 + y^2)$  y con aplicación de Gauss

$$N(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x, -2y, 1)$$

(6.9(3), p. 80). Resulta

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{xx} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, -2) \rangle = \frac{-2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{xy} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, 0) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{yy} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \langle (2x, -2y, 1), (0, 0, 2) \rangle = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}. \end{cases}$$

y la matriz de  $\mathbf{II}_p$  es  $M_p = \frac{-2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Así,  $\mathbf{II}_p$  es indefinida.

(3) El helicoides  $S \subset \mathbb{R}^3$ , con  $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu)$  y aplicación de Gauss

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}}(-b \sin u, b \cos u, -v).$$

(6.9(4), p. 81). Procedemos como en los dos casos anteriores:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (-v \cos u, -v \sin u, 0) \rangle = 0, \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (-\sin u, \cos u, 0) \rangle = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}}, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \frac{1}{\sqrt{b^2+v^2}} \langle (-b \sin u, b \cos u, -v), (0, 0, 0) \rangle = 0. \end{cases}$$

Obtenemos la matriz  $M_p = \frac{b}{\sqrt{b^2+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , y vemos que  $\mathbf{II}_p$  es indefinida.

(4) Consideramos ahora la superficie de revolución  $S \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

donde  $(\zeta(u), 0, \xi(u))$  es una parametrización por el arco de la curva generatriz de la superficie (o sea,  $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ ) con  $\zeta(u) > 0$ . La aplicación de Gauss es

$$N(\varphi(u, v)) = (-\xi'(u) \cos v, -\xi'(u) \sin v, \zeta'(u)) \quad (6.10, \text{ p. 81}),$$

y por tanto:

$$\begin{cases} e = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uu} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (\zeta'' \cos v, \zeta'' \sin v, \xi'') \rangle = -\zeta'' \xi' + \zeta' \xi'', \\ f = \langle N \circ \varphi, \varphi_{uv} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (-\zeta' \sin v, \zeta' \cos v, 0) \rangle = 0, \\ g = \langle N \circ \varphi, \varphi_{vv} \rangle = \langle (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'), (-\zeta \cos v, -\zeta \sin v, 0) \rangle = \zeta \xi'. \end{cases}$$

La matriz de  $\mathbf{II}_p$  es pues

$$M_p = \begin{pmatrix} -\zeta'' \xi' + \zeta' \xi'' & 0 \\ 0 & \zeta \xi' \end{pmatrix}.$$

Como se ve, que sea definida, semidefinida o indefinida depende de la curva generatriz de  $S$ . ■

## Problemas

**Número 1.** Calcular la segunda forma fundamental del paraboloides elíptico  $S \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $z = x^2 + y^2$  en un punto  $p \in S$ . Clasificarla como forma cuadrática.

**Número 2.** Calcular la segunda forma fundamental de la superficie  $S$  de ecuación  $z = x^2 + y^3$  en un punto  $p \in S$ . Clasificarla como forma cuadrática distinguiendo los diferentes casos.

**Número 3.** Calcular la segunda forma fundamental de la superficie  $S$  de ecuación  $z = x^3 + x^4 + y^3$  en un punto  $p \in S$ . Clasificarla como forma cuadrática distinguiendo los diferentes casos.

**Número 4.** Calcular la segunda forma fundamental de la *pseudoesfera*, que es la superficie de revolución generada por la *tractriz*. (Véase el prob. 8, lecc. 3, p. 41.)

**Número 5.** Calcular la segunda forma fundamental de la superficie  $S$  de ecuación  $z = x^3 - 3xy^2$ . Esta superficie recibe el nombre de *silla del mono* (*monkey saddle*).

**Número 6.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación  $(u, v) \mapsto (3u - u^3 + 3uv^2, -3v + v^3 - 3vu^2, u^2 - v^2)$ . La imagen  $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$  no es una superficie (¿por qué?). Sin embargo, cada  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tiene un entorno  $U$  tal que la restricción  $\varphi|_U$  sí define una parametrización de  $\varphi(U)$ . Por ello, y a pesar de lo dicho,  $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$  recibe el nombre de *superficie de Enneper*. Calcular la segunda forma fundamental de las parametrizaciones  $\varphi|_U : U \rightarrow \varphi(U)$ .

**Número 7.** Sea  $S$  una superficie y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una afinidad. Probar que  $S' = f(S)$  es una superficie y hallar la relación que existe entre la segunda forma fundamental de  $S$  y la de  $S'$  en los dos casos siguientes: (1)  $f$  es una traslación, (2)  $f$  es una homotecia.

**Número 8.** Resolver el mismo problema anterior cuando  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una isometría.

**Número 9.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie topográfica  $z = f(x, y)$ . Dado un punto  $p = (x, y, z) \in S$ , se considera en  $T_p S$  la base correspondiente a la parametrización de Monge. Mostrar que la matriz de la segunda forma fundamental  $\mathbf{II}_p$  respecto de esa base es

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se denomina *hessiana de  $f$* .

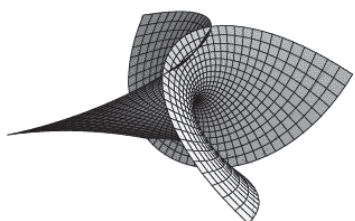
**Número 10.** Generalizar el problema anterior para una superficie definida implícitamente por una ecuación  $F(x, y, z) = 0$ .

## Notas

**1.** JULIUS WEINGARTEN (1836–1910) nació en Berlín, en una familia de origen polaco, y estudió matemáticas en la Universidad de esa misma ciudad, donde tuvo a JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859) como profesor. Al terminar sus estudios se vio obligado a trabajar en una escuela, trabajo que, con grandes dificultades, pudo compatibilizar con su labor investigadora en teoría de superficies, en particular sobre temas ligados a la curvatura. Sus resultados le llevarían a obtener un doctorado en la Universidad de Halle, y a partir de entonces dedicó gran parte de su actividad al problema de identificar todas las superficies isométricas a una superficie dada. Weingarten redujo

este problema al de encontrar las soluciones de una ecuación en derivadas parciales *de tipo Monge-Ampère*.

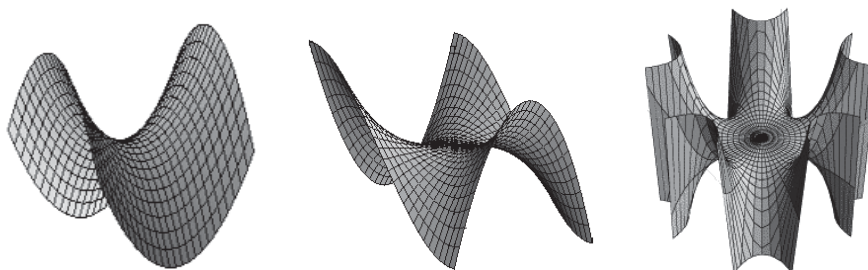
El trabajo de Weingarten mereció el aprecio de Darboux, que lo alabó como *digno de Gauss*. La categoría matemática de Weingarten fue reconocida con el gran premio de la Academia de Ciencias de París de 1894. Sin embargo, su trayectoria profesional fue insatisfactoria durante mucho tiempo, y el puesto de máximo nivel que llegó a alcanzar en Berlín, en la Technische Hochschule, distaba de estar a su altura. Después cayó enfermo y se fue, por esta razón, a Freiburg im Breisgau, donde fue nombrado profesor honorario. Allí ejerció su docencia desde 1902 hasta 1908, en el que fue el mejor periodo de su vida profesional. Otro geómetra de la época que tuvo relación científica con Weingarten, fue LUIGI BIANCHI (1856–1928). Además de sus trabajos de investigación, Darboux y Bianchi eran ambos excelentes profesores y escribieron textos de referencia en su campo. En particular queremos citar aquí las *Lezioni di geometria differenziale* del segundo, un curso de curvas y superficies publicado en 1893.



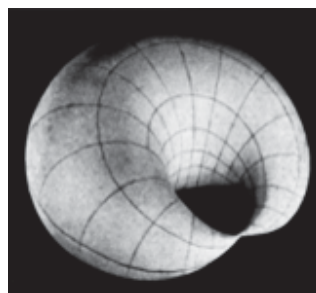
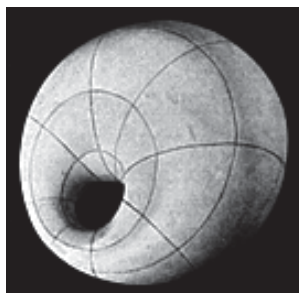
**2.** La superficie de Enneper debe su nombre al matemático alemán ALFRED ENNEPER (1830–1885). Se trata de una superficie minimal difícil de visualizar, pues tiene autointersecciones. Naturalmente es en los puntos de autointersección donde la superficie no es localmente difeomorfa al plano, por lo que no es una verdadera superficie. La imagen de la superficie incluida a la izquierda muestra esas intersecciones.

La superficie de Enneper se puede también describir mediante una ecuación *polinomial*  $F(x, y, z) = 0$  de grado 9.

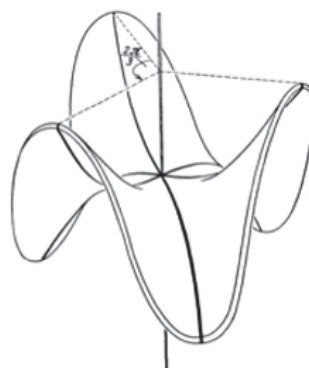
**3.** La *monkey saddle* se llama así porque una silla de montar para un mono requiere tres depresiones, dos para las piernas y una para la cola. Es parte de una familia de superficies *de tipo silla* sobre las que el muy célebre matemático GRIGORI PERELMAN (1966–) escribió su tesis doctoral. La más sencilla es el paraboloide hiperbólico, la genuina silla de montar, que es la primera de las figuras siguientes; la segunda es la monkey saddle, y la tercera una silla más general con cinco depresiones.



4. En realidad el concepto de silla es de naturaleza local. Estrictamente hablando es silla un punto determinado, y las figuras anteriores son diversas posibilidades para una superficie en torno a un punto silla. Es un concepto que ya se conoce del Análisis: *una silla es un punto crítico local que no es extremo*. Esto se refiere a una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , pero concierne geoméricamente a su grafo, que es una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Además, ya sabemos que toda superficie es un grafo en un entorno de cualquiera de sus puntos. El lector puede distinguir en las dos superficies siguientes los puntos que son silla y los que no.



5. Nos hemos permitido copiar las imágenes anteriores del muy recomendable libro titulado *Anschauliche Geometrie*, de DAVID HILBERT (1862–1943) y STEFAN EMMANUILOVICH COHN-VOSSEN (1902–1936) cuya primera edición data de 1932. Se puede traducir por *Geometría Descriptiva*, un término con sabor antiguo y sugerente. Su cuarto capítulo está dedicado a las curvas y las superficies diferenciables, y sus muchas imágenes están llenas de estímulos visuales e imaginativos. Reproducimos a la derecha su bello dibujo de la monkey saddle, que muchos preferimos a la representación por ordenador incluida en la anterior nota 3.



6. Perelman alcanzó la fama científica al resolver a principios del siglo XXI la *conjetura de Poincaré*, incluida por el Instituto Clay en 2000 entre sus *siete problemas del milenio*. Desde el siglo XIX se sabía que la esfera  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  de  $\mathbb{R}^3$  es la superficie caracterizada salvo homeomorfismo (y de hecho difeomorfismo) por poderse en ella deformar a un punto cualquiera de sus lazos, y en 1904 Poincaré postuló lo mismo para la esfera  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  de  $\mathbb{R}^4$ . Pero tras resolver esta conjetura en 2003 Perelman ganó otra clase de fama con su renuncia desilusionada al reconocimiento de una comunidad científica que le había tratado desconsideradamente: no recogió la medalla Fields que se le concedió en el ICM de Madrid. Tampoco, hasta donde se sabe, ha aceptado Perelman ninguna recompensa económica, incluido el millón de dólares con que el Instituto Clay premia cada uno de los siete problemas denominados del milenio.

## Curvatura normal

En esta lección se estudian nociones relativas a la curvatura de las superficies o de ciertas curvas de las superficies. Para curvas, la curvatura se definía a partir de la variación del vector tangente, y empezaremos con este punto de vista para definir cierta noción de curvatura de la superficie en una determinada dirección (definida por una recta vectorial del plano tangente en un punto).

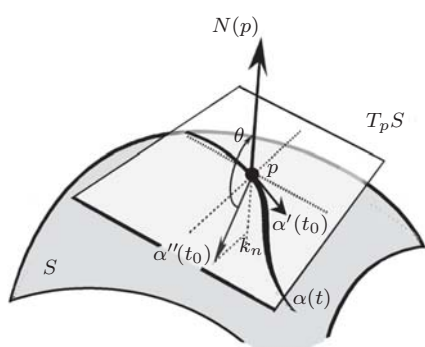
Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable orientada, con aplicación de Gauss  $N$ , y consideremos un punto  $p$  de  $S$ .

**(8.1) Curvatura normal de una curva de una superficie.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva regular de la superficie  $S$ , parametrizada por el arco, que pasa por  $p$ , digamos  $\alpha(t_0) = p \in S$ . En tal situación  $\alpha''(t_0)$  es ortogonal al vector tangente  $\mathbf{t}_\alpha(t_0) = \alpha'(t_0)$ , y la curvatura de  $\alpha$  en  $t_0$  es  $\kappa_\alpha(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|$ . Como la curva está en  $S$ ,  $\alpha'(t_0)$  es tangente a  $S$  en  $p$ , es decir, ortogonal al vector normal  $N(p)$  en  $p$  (lo que no garantiza que  $N(p)$  tenga siquiera la dirección de  $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$ ). En fin, la *curvatura normal de  $\alpha$  en  $p$*  es por definición

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle.$$

Si  $\alpha''(t_0) \neq 0$  y  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{n}_\alpha(t_0)$  y  $N(p)$ , entonces  $k_n(\alpha) = \kappa_\alpha(t_0) \cos \theta$ .

De esta manera,  $k_n(\alpha)$  es la longitud *con signo* de la proyección del vector  $\alpha''(t_0)$  sobre la dirección normal a la superficie. Ese signo se determina respecto de  $N(p)$ , de manera que si se cambia la orientación (esto es, el signo de la aplicación de Gauss), se cambia el signo de la curvatura normal. ■



El siguiente es un resultado clásico que da idea de la naturaleza de la no-

ción anterior, trayendo a escena la segunda forma fundamental. Se conoce como *teorema de Meusnier*:

**Teorema 8.2.** *Sea  $\alpha$  una curva regular de  $S$ , parametrizada por el arco, que pasa por  $p$ , digamos  $\alpha(t_0) = p$ , y con vector tangente  $\alpha'(t_0) = \omega \in T_p S$ . Su curvatura normal en  $p$  es*

$$k_n(\alpha) = \mathbf{II}_p(\omega).$$

*En particular, todas las curvas regulares de  $S$  (parametrizadas por el arco) que pasan por  $p$  con una dirección tangente dada, tienen la misma curvatura normal en  $p$ .*

*Demostración.* Derivando la identidad  $\langle N(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$  obtenemos

$$0 = \langle (N \circ \alpha)'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle = \langle d_p N(\omega), \omega \rangle + \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle,$$

de modo que

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle = \langle N(p), \alpha''(t_0) \rangle = k_n(\alpha).$$

Visto esto, si dos curvas parametrizadas por el arco tienen en  $p$  la misma dirección tangente, su vector tangente está determinado salvo signo, digamos que es  $\pm\omega$ , y como  $\mathbf{II}_p$  es una forma cuadrática,  $\mathbf{II}_p(w) = \mathbf{II}_p(-w)$ . ■

Para curvas de  $S$  cuyo plano osculador en  $p$  no coincide con el tangente a la superficie en ese punto, se puede extraer el siguiente corolario.

**Corolario 8.3.** *Sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  curvas de  $S$  que pasan por  $p$ . Si ambas curvas tienen la misma tangente y los mismos planos osculadores en  $p$  y éstos son distintos de  $T_p S$ , entonces tienen la misma curvatura en  $p$ .*

*Demostración.* Supongamos  $p = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$ , y denotemos de la manera obvia  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  los vectores tangentes y normales de las curvas en  $p$ . Las hipótesis significan que  $\mathbf{t}_1 = \pm\mathbf{t}_2$  y  $\mathbf{n}_1 = \pm\mathbf{n}_2$ , y que los vectores normales forman con  $N(p)$  ángulos  $\theta_1, \theta_2 \neq \frac{1}{2}\pi$ . Por el teorema de Meusnier, las curvaturas normales de ambas curvas en  $p$  coinciden, es decir,

$$\langle \alpha_1''(t_1), N(p) \rangle = \langle \alpha_2''(t_2), N(p) \rangle,$$

y en consecuencia

$$\|\alpha_1''(t_1)\| \cos \theta_1 = \|\alpha_2''(t_2)\| \cos \theta_2.$$



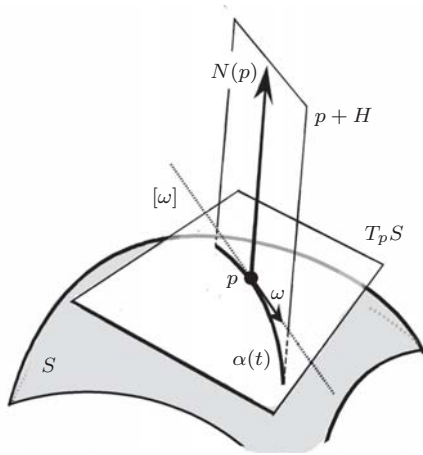
Aquí, sabemos que esos cosenos no son nulos, y puesto que  $\mathbf{n}_1 = \pm \mathbf{n}_2$  o coinciden o son opuestos. Pero la igualdad muestra que los dos cosenos tienen el mismo signo, luego deben ser iguales. Con ello deducimos  $\|\alpha_1''(t_1)\| = \|\alpha_2''(t_2)\|$ , esto es, que las curvaturas de las dos curvas son iguales. ■

El teorema de Meusnier muestra que la curva influye poco en el valor de su curvatura normal, lo que sugiere la siguiente definición:

**Definición 8.4.** Sea  $[\omega]$  una dirección tangente a  $S$  en  $p$ . Se denomina *curvatura normal de  $S$  en  $p$  en la dirección  $[\omega]$*  a la curvatura normal en  $p$  de todas las curvas de  $S$  (parametrizadas por el arco) que pasan por  $p$  con dirección tangente  $[\omega]$ .

Obviamente, para calcular una curvatura normal de  $S$  en el punto  $p$  se puede elegir cualquier curva tangente a la dirección de que se trate. Hay una manera muy natural de elegir esa curva.

**(8.5) Secciones normales.** (1) Consideremos una dirección tangente  $[\omega]$  de  $T_p S$ . Entonces tenemos el plano vectorial  $H$  generado por  $\omega$  y el vector normal  $N(p)$ ,



y su trasladado el plano afín  $p + H$  paralelo a  $H$  que pasa por  $p$ ; estos planos vectorial y afín se llaman *normales a  $S$  en la dirección  $[\omega]$* . Como  $H = T_p(p + H)$  es evidentemente transversal a  $T_p S$ , la intersección  $S \cap (p + H)$  es localmente la traza de un arco de Jordan (3.8, p.37). Así, existe una curva regular  $\alpha : I \rightarrow S$  parametrizada por el arco que es un homeomorfismo sobre un entorno de  $p$  en  $H \cap S$ ; tendremos  $p = \alpha(t_0)$  para cierto  $t_0 \in I$ . Como la traza de  $\alpha$  yace en  $S$ ,  $\alpha'(t_0) \in T_p S$ , y como también yace en  $p + H$ ,  $\alpha'(t_0) \in T_p(p + H) = H$ . Así,  $\alpha'(t_0) \in [\omega]$ , y  $[\omega]$  es la dirección tan-

gente de  $\alpha$  en  $p$ . Esta curva  $\alpha$  es una *sección normal de  $S$  en el punto  $p$  en la dirección  $[\omega]$* .

(2) Con las notaciones anteriores, resulta que  $k_n(\alpha)$  es la curvatura normal de  $S$  en la dirección  $[\omega]$ . Veamos que ésta es también la curvatura de  $\alpha$  como curva plana.

En efecto, orientemos el plano vectorial  $H$  mediante la base  $\{\omega, N(p)\}$  y la sección normal de modo que  $\alpha'(t_0)$  y  $\omega$  apunten en el mismo sentido. Con estas orientaciones,  $N(p)$  es el vector normal a  $\alpha$  en  $p$  como curva plana, y entonces la curvatura  $\kappa(t_0)$  de  $\alpha$  en  $p$  como curva plana está definida por la relación

$$\alpha''(t_0) = \kappa(t_0)N(p).$$

(es una curvatura con signo). Concluimos que

$$k_n(\alpha) = \langle \alpha''(t_0), N(p) \rangle = \langle \kappa(t_0)N(p), N(p) \rangle = \kappa(t_0),$$

esto es, la curvatura normal de  $S$  en  $p$  en la dirección  $[\omega]$  es la curvatura con signo de la sección normal de  $S$  en esa dirección. ■

Tras las consideraciones geométricas precedentes, volvemos con la segunda forma fundamental  $\mathbf{II}_p$  en el punto  $p \in S$ . Puesto que  $\mathbf{II}_p$  expresa las curvaturas normales de  $S$ , interesa estudiar cómo se puede calcular. Para ello utilizaremos un resultado básico de la teoría de formas cuadráticas, el denominado *teorema espectral*. Según este teorema, por ser la aplicación de Weingarten  $d_p N$  un operador autoadjunto se cumple que:

**Teorema 8.6.** *El plano tangente  $T_p S$  tiene bases ortonormales formadas por autovectores de la aplicación de Weingarten  $d_p N$ .*

En particular,  $d_p N$  tiene dos autovalores reales (posiblemente iguales). Si los autovalores son iguales, entonces  $d_p N$  es una homotecia, todos los vectores son autovectores, y cualquier base ortonormal sirve. Si los autovalores son distintos, entonces dos autovectores cualesquiera de uno y otro autovalor son ortogonales, y basta dividirlos por sus normas para obtener la base ortonormal requerida.

Explicado lo anterior, volvemos al cálculo de las curvaturas normales.

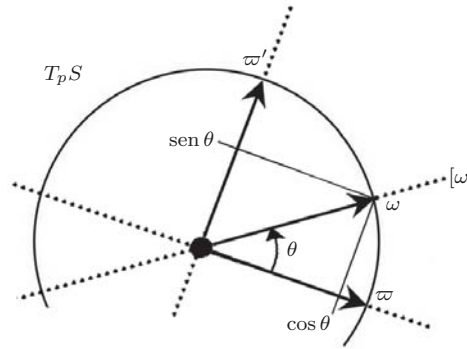
**(8.7) Fórmula de Euler.** Sean  $S$  nuestra superficie y  $p \in S$ . Como acabamos de decir,  $T_p S$  tiene una base ortonormal  $\{\varpi, \varpi'\}$  formada por dos autovectores de  $d_p N$ , digamos  $d_p N(\varpi) = \nu\varpi$ ,  $d_p N(\varpi') = \nu'\varpi'$ ; por conveniencia notacional que será evidente de inmediato, consideramos  $k = -\nu$  y  $l = -\nu'$ .

(1) Una dirección tangente a  $S$  en  $p$  se representa por uno cualquiera de los dos vectores unitarios que la generan; sea  $\omega \in T_p S$  uno de ellos (el otro es su opuesto). Se tiene que  $\omega = (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi'$  para cierto ángulo  $\theta$  entre 0 y

$2\pi$ . De esta manera la curvatura normal en la dirección de  $\omega$  es una función de ese ángulo que representaremos  $k_n(\theta) = \mathbf{II}_p(\omega)$ . Por ejemplo, se tiene

$$k_n(0) = \mathbf{II}_p(\varpi) = k \quad \text{y} \quad k_n(\tfrac{1}{2}\pi) = \mathbf{II}_p(\varpi') = l.$$

Claramente con  $0 \leq \theta < \pi$  se representan todas las direcciones tangentes en  $p$ .



(2) Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} k_n(\theta) &= \mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N((\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi'), (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= -\langle (\cos \theta)\nu\varpi + (\sin \theta)\nu'\varpi', (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= \langle (\cos \theta)k\varpi + (\sin \theta)l\varpi', (\cos \theta)\varpi + (\sin \theta)\varpi' \rangle \\ &= (\cos^2 \theta)k\langle \varpi, \varpi \rangle + (\cos \theta \sin \theta)k\langle \varpi, \varpi' \rangle \\ &\quad + (\sin \theta \cos \theta)l\langle \varpi', \varpi \rangle + (\sin^2 \theta)l\langle \varpi', \varpi' \rangle, \end{aligned}$$

y como la base elegida es ortonormal, queda

$$k_n(\theta) = k \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta.$$

Ésta es la denominada *Fórmula de Euler*. También se puede escribir:

$$k_n(\theta) = (k - l) \cos^2 \theta + l = k - (k - l) \sin^2 \theta.$$

(3) Supongamos por ejemplo que  $\nu \leq \nu'$ , o sea, que  $k \geq l$ . Resulta:

$$k_n(\theta) = k \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta \quad \begin{cases} \leq k \cos^2 \theta + k \sin^2 \theta = k = k_n(0), \\ \geq l \cos^2 \theta + l \sin^2 \theta = l = k_n(\tfrac{1}{2}\pi). \end{cases}$$

Por tanto  $k$  y  $l$  son respectivamente las curvaturas normales máxima y mínima en  $p$ .

(4) Ya hemos dicho que el intervalo de ángulos que interesa es entre  $0$  y  $\pi$ , y de todo lo anterior se sigue fácilmente que la curvatura normal  $k_n(\theta)$  es decreciente entre  $0$  y  $\frac{1}{2}\pi$  (de  $k$  a  $l$ ) y creciente entre  $\frac{1}{2}\pi$  y  $\pi$  (de  $l$  a  $k$ ). Por continuidad, alcanza todos los valores intermedios entre sus extremos. ■

A la vista de lo anterior, las curvaturas extremas se distinguen de las demás, y reciben nombre propio:

**Definición 8.8.** Las *curvaturas principales* de  $S$  en  $p$  son las curvaturas normales extremas en  $p$ , y las *direcciones principales* son las direcciones tangentes en que se alcanzan esas curvaturas normales extremas.

Esta noción depende de la orientación, es decir, de la elección de la aplicación de Gauss: si cambiamos de signo de ésta, cambian de signo sus derivadas, sus autovalores y sus curvaturas principales.

Todo lo anterior se resume así: *las curvaturas principales son los valores opuestos de los autovalores de la aplicación de Weingarten, y se alcanzan en direcciones ortogonales, que se corresponden con los autovectores asociados a esos autovalores.*

Revisemos a continuación las superficies  $S$  de las que conocemos la aplicación de Gauss  $N$  y su aplicación de Weingarten  $d_p N$  en un punto  $p$ . Empezamos por las dos más sencillas.

**Ejemplos 8.9.** (1) La esfera, orientada con aplicación de Gauss la identidad. La aplicación de Weingarten en cualquier punto es la identidad, todos los vectores tangentes son autovectores de autovalor  $+1$ , y cualquier base ortonormal cumple el teorema espectral. En este caso extremo, sólo hay una curvatura principal, que vale  $-1$ , y cualquier dirección es principal. Si pensamos en la segunda forma fundamental,  $\mathbf{II}_p = -\mathbf{I}_p$ , que vale  $-1$  en cualquier vector unitario.

Razonemos ahora con secciones normales. Es claro que las secciones normales de la esfera son los círculos máximos (de radio 1), cuya curvatura como curvas planas es  $\pm 1$  según la orientación. Ahora bien, la curvatura normal es una función continua, luego sólo puede tomar uno de los valores, y es constante  $\equiv \pm 1$ . Este razonamiento geométrico no permite decidir el signo, pues no hace uso específico de la aplicación de Gauss, es decir, de la orientación, elegida. Esta ambigüedad se evita observando directamente que para cualquier parametrización  $\alpha$  de un círculo máximo con  $\alpha(0) = p$ , los vectores  $N(p)$  y  $\alpha''(0)$  apuntan en sentidos opuestos, de donde se sigue que  $k_n(\alpha) = -1$ .

(2) Pasemos al cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = 1$ . En 7.2(2), p. 88, calculamos la matriz  $L_p$  de  $d_p N$  respecto de la base de  $T_p S$  formada por los vectores  $\varpi = (-y, x, 0)$  y  $\varpi' = (0, 0, 1)$ . Es inmediato comprobar que esa base es ortonormal, y la matriz  $L_p$  dice que  $\varpi$  es un autovector del autovalor 1 y  $\varpi'$  es un autovector del autovalor 0. Por tanto, las curvaturas principales son  $-1$  y  $0$ , y las direcciones principales corresponden a  $\varpi$  y  $\varpi'$ . La formula de Euler que se obtiene es

$$k_n(\theta) = -\cos^2 \theta.$$

Utilizando la matriz  $M_p$  de  $\mathbf{II}_p$  respecto de esa misma base obtenida en 7.9(1), p. 94, se confirma inmediatamente el comportamiento de la curvatura normal. En efecto, si  $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$  tenemos

$$\mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu)M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -\lambda^2.$$

Pero como la base es ortonormal,  $\|\omega\| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$  (compruébese con los datos de este caso). En consecuencia, si esa norma es 1, el valor de  $\mathbf{II}_p(\omega)$  varía entre el máximo 0 y el mínimo  $-1$ .

Utilicemos ahora secciones normales en un punto  $p$ . Las dos evidentes son la circunferencia del plano horizontal que pasa por  $p$ , y la recta vertical que pasa por el punto. Estas dos secciones tiene curvatura  $\pm 1$  (según la orientación) y  $0$ . Las demás secciones normales son elipses con ejes distintos  $e > e' = 1$  y curvatura  $\pm 1/e^2$ . Así, la curvatura normal empieza valiendo  $\pm 1$  en la sección horizontal, varía continuamente hasta  $0$  en la sección vertical, sigue variando hasta valer otra vez  $\pm 1$  en la sección horizontal. En el primer tramo hasta  $0$  el signo no puede cambiar, pues la curvatura normal no se anula ahí, y en el segundo tampoco por lo mismo. Pero el último valor coincide con el primero, y concluimos que el signo es constante. Por tanto, la curvatura normal varía entre  $1$  y  $0$ , o entre  $-1$  y  $0$ . Concluimos que las curvaturas principales son  $+1$  y  $0$ , o  $-1$  y  $0$ ; las direcciones principales son las de las secciones normales correspondientes. De nuevo, la indecisión del signo se debe a que en este argumento no interviene la aplicación de Gauss. ■

Veamos otro ejemplo importante.

**(8.10) Curvaturas principales de una superficie de revolución** Sea  $S$  una superficie de revolución con la parametrización habitual

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

(1) En 7.4(1), p. 90, se describe la aplicación de Weingarten con la hipótesis de que la curva generatriz esté parametrizada por el arco (para simplificar cálculos). Con esa hipótesis, respecto de la base del plano tangente asociada a  $\varphi$  la matriz de la aplicación de Weingarten era diagonal, con autovalores  $-\xi''/\zeta'$  y  $-\xi'/\zeta$ . Por tanto las curvaturas principales son  $k = \xi''/\zeta'$  y  $l = \xi'/\zeta$ , y las direcciones principales corresponden al meridiano y al paralelo que pasan por el punto. Dejamos al lector que escriba la fórmula de Euler.

Fijémonos en  $k$  y su dirección principal, dada por  $\varphi_u$ , es la del meridiano. La sección normal correspondiente a ella es el meridiano por el punto, cuya curvatura como curva plana es por tanto  $k$ . Por otra parte es claro que la curvatura del meridiano como curva plana es la curvatura  $\kappa_\alpha$  de la curva generatriz. Esto lo confirman las fórmulas, pues  $\mathbf{t}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$  con  $\mathbf{t}_\alpha = (\zeta', \xi')$  y  $\mathbf{n}_\alpha = (-\xi', \zeta')$  (aquí es cómodo que  $u$  sea el arco).

Analicemos la otra curvatura principal  $l$ , cuya dirección principal es la de  $\varphi_v$ , es decir la del paralelo. Ahora bien, el paralelo es efectivamente una sección plana, pero no necesariamente una sección normal, y sólo en ése caso sabemos que  $l$  coincide con la curvatura como sección plana. Ahora bien, como curva plana la curvatura del paralelo es la de una circunferencia de radio  $\zeta(u)$ , luego la coincidencia se da sólo si  $l = \pm 1/\zeta(u)$ , es decir,  $\xi'(u) = \pm 1$ . Al estar la curva generatriz parametrizada por el arco, deducimos  $\zeta'(u) = 0$ , y ésa es la tercera componente de  $N(\varphi(u, v))$  (6.10, p. 81). Por tanto, el vector normal a la superficie está en el plano  $xy$ , y el plano del paralelo es un plano normal a la superficie. En conclusión, si la curvatura principal  $l$  coincide con la curvatura del paralelo, éste es una sección normal (y recíprocamente). Además, esto corresponde a que el vector tangente a la curva generatriz en el punto correspondiente al paralelo en cuestión sea vertical.

(2) La información cualitativa de la discusión precedente se puede utilizar para calcular las curvaturas  $k$  y  $l$ , sin suponer que  $u$  sea el arco de la curva generatriz. En efecto, lo que sabemos en todo caso es que las direcciones principales son los meridianos y los paralelos. Por tanto, los vectores tangentes  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$  son siempre, sea o no  $u$  el arco, autovectores:

$$d_p N(\varphi_{u,p}) = -k\varphi_{u,p}, \quad d_p N(\varphi_{v,p}) = -l\varphi_{v,p}.$$

Estas igualdades permiten obtener  $k$  y  $l$ . Primero tenemos (aligerando la notación):

$$\begin{cases} \varphi_u = (\zeta' \cos v, \zeta' \sin v, \xi'), & \varphi_v = (-\zeta \sin v, \zeta \cos v, 0), \\ N(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} (-\xi' \cos v, -\xi' \sin v, \zeta'). \end{cases}$$

(aquí aparece  $\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}$ , no necesariamente  $\equiv 1$ ). Ahora basta utilizar las primeras componentes de los vectores involucrados, que son

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{-\xi' \cos v}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} = -k\zeta' \cos v, \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{-\xi' \cos v}{\sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}} = l\zeta' \sin v.$$

Operando y despejando las curvaturas se concluye:

$$k = \frac{\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi'}{(\zeta'^2 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta' \sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}}.$$

Por supuesto, si  $u$  es el arco obtenemos los valores de (1): para  $l$  salta a la vista, y para  $k$  nótese que derivando  $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$  se obtiene  $\zeta' \zeta'' + \xi' \xi'' = 0$ . ■

Los ejemplos que siguen requieren otro tipo de cálculos, que ilustran el procedimiento general.

**Ejemplos 8.11.** (1) El paraboloide hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$ . En 7.3(1), p. 88, elegimos su parametrización global  $\varphi$  como grafo y calculamos la matriz de  $d_p N$  respecto de la correspondiente base  $\mathcal{B}_\varphi$  de  $T_p S$ . La situación varía según el punto.

(i) Para  $p = (0, 0, 0)$  la base es  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ , que es ortonormal, y la matriz respecto de ella es diagonal, luego los vectores de la base son autovectores con autovalores  $\pm 2$  (*loc. cit.*). En consecuencia las curvaturas principales son  $\mp 2$  y las direcciones principales corresponden a los vectores de la base. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = -2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta = -4 \cos^2 \theta + 2.$$

(ii) Para un punto  $p$  del tipo  $(x, 0, z)$ , la base es sólo ortogonal, pero la matriz es diagonal (*loc. cit.*). Por ello, los dos vectores de la base son autovectores, y determinan las direcciones principales: sólo hay que dividirlos por sus normas para tener una base ortonormal en las condiciones del teorema espectral. La fórmula de Euler es

$$k_n(\theta) = \frac{-2}{(4x^2+1)^{3/2}} \cos^2 \theta + \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \sin^2 \theta.$$

Análogamente se trataría un punto del tipo  $(0, y, z)$ .

(iii) Para un punto  $p$  con  $xy \neq 0$  hay que buscar una nueva base por aplicación directa del teorema espectral. Es un problema de Álgebra Lineal que resolvemos

para el punto  $p = (1, 1, 0)$ . Para ese punto la base de  $T_p S$  y la matriz de  $d_p N$  que tenemos para empezar son

$$\mathcal{B}_\varphi = \{(1, 0, -2), (0, 1, 2)\} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} 10/27 & -8/27 \\ 8/27 & -10/27 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de la matriz es  $P(T) = T^2 - 4/81$ , que tiene por raíces  $\nu = \pm 2/9$ . Estos son los autovalores, y para cada uno encontramos sus autovectores resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 10/27 - \nu & -8/27 \\ 8/27 & -10/27 - \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para  $\nu = +2/9$  resulta  $(\lambda, \mu) = (2, 1)$  y para  $\nu = -2/9$  resulta  $(\lambda, \mu) = (1, 2)$  (soluciones no nulas salvo proporcionalidad, claro). Hay que entender que  $(\lambda, \mu)$  son las coordenadas de los autovectores *respecto de la base dada*. Así obtenemos los dos autovectores siguientes

$$\varpi = 2(1, 0, -2) + (0, 1, 2) = (2, 1, -2), \quad \varpi' = (1, 0, -2) + 2(0, 1, 2) = (1, 2, 2).$$

Como predice el teorema espectral, son ortogonales, y basta dividirlos por su norma 3 para obtener una base ortonormal. Las curvaturas principales son  $\mp 2/9$  y las direcciones principales corresponden a los dos vectores  $\varpi$  y  $\varpi'$ . La fórmula de  $\kappa$  es

$$\kappa_n(\theta) = -\frac{2}{9} \cos^2 \theta + \frac{2}{9} \sin^2 \theta = -\frac{4}{9} \cos^2 \theta + \frac{2}{9}.$$

(2) El helicoides  $S \subset \mathbb{R}^3$  parametrizado por  $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$ . En 7.3(2), p. 89, la base del plano tangente es ortogonal, pero la matriz no es diagonal. Hay pues que proceder como en el apartado anterior. Hagámoslo para un punto  $p$  con  $v = 0$ . En ese caso, la base de  $T_p S$  y la matriz de  $d_p N$  con las que empezamos son

$$\mathcal{B}_\varphi = \{(0, 0, b), (\cos u, \sin u, 0)\} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} 0 & -1/b^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es  $P(T) = T^2 - 1/b^2$ , de modo que los autovalores son  $\pm 1/b$ . Obtenemos como autovectores asociados  $(1, -b)$  y  $(1, b)$ , esto es, obtenemos los autovectores

$$\begin{cases} \varpi = (0, 0, b) - b(\cos u, \sin u, 0) = (-b \cos u, -b \sin u, b), \\ \varpi' = (0, 0, b) + b(\cos u, \sin u, 0) = (b \cos u, b \sin u, b). \end{cases}$$



Son dos autovectores ortogonales con norma  $b\sqrt{2}$ , luego divididos por ella forman la base ortonormal buscada. Las curvaturas principales son  $\mp 1/b$  y las direcciones principales las de los vectores  $\varpi$  y  $\varpi'$ . La fórmula de Euler queda

$$k_n(\theta) = -\frac{1}{b} \cos^2 \theta + \frac{1}{b} \sin^2 \theta = -\frac{2}{b} \cos^2 \theta + \frac{1}{b}.$$

Las direcciones principales dan lugar al concepto siguiente:

**Definición 8.12.** Una curva regular en  $S$  se llama *línea de curvatura* si su vector tangente en todo punto define una dirección principal en ese punto.

Obsérvese que ésta noción no depende de la parametrización de la curva. El siguiente resultado clásico, conocido como *teorema de Olinde Rodrigues*, proporciona un criterio útil para reconocer las líneas de curvatura.

**Teorema 8.13.** Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular  $\alpha$  de  $S$  sea una línea de curvatura es que exista una función diferenciable  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(N \circ \alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t).$$

En tal caso  $k(t) = -\nu(t)$  es la curvatura principal a lo largo de  $\alpha(t)$ .

*Demostración.* Si  $\alpha(t)$  es una línea de curvatura, entonces  $\alpha'(t)$  genera una dirección principal y, por tanto, es un autovector de  $d_{\alpha(t)}N$ , es decir,

$$(N \circ \alpha)'(t) = d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t)) = \nu(t)\alpha'(t),$$

siendo  $k(t) = -\nu(t)$  la correspondiente curvatura principal. La función  $\nu(t)$  se puede expresar como

$$\nu(t) = \frac{\langle (N \circ \alpha)'(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}$$

y, ya que  $\alpha(t)$  es regular,  $\nu(t)$  es diferenciable.

Recíprocamente, si se tiene una igualdad  $(N \circ \alpha)'(t) = \nu(t)\alpha'(t)$ , entonces  $\alpha'(t)$  es un vector propio de  $d_{\alpha(t)}N$  y define una dirección principal correspondiente a la curvatura principal  $k(t) = -\nu(t)$ . ■

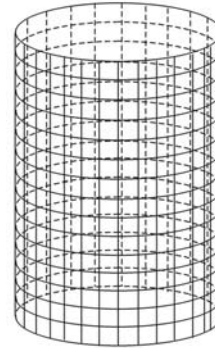
El cálculo de líneas de curvatura no es asunto fácil. Veamos a continuación algunos ejemplos accesibles.

**Ejemplos 8.14.** (1) La esfera, con aplicación de Gauss la identidad. En este caso, cualquier curva  $\alpha$  es línea de curvatura, pues  $N \circ \alpha = \alpha$ , y la condición del teorema anterior se cumple trivialmente.

(2) El cilindro circular  $x^2 + y^2 = 1$  con aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ . En este caso, las curvaturas principales son  $-1$  y  $0$ . Ahora bien, una curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es línea de curvatura si existe una función diferenciable  $\nu(t)$  tal que

$$(N \circ \alpha)'(t) = (x'(t), y'(t), 0) = \nu(t)(x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Como  $-\nu(t)$  debe ser una curvatura principal, por continuidad sólo puede ser  $\nu \equiv 1$  o  $\nu \equiv 0$ . En el primer caso obtenemos  $z'(t) \equiv 0$ , es decir la curva tiene constante su tercera coordenada en  $\mathbb{R}^3$ ; esto significa que es la circunferencia intersección del cilindro con un plano horizontal  $z = z_0$ . En el segundo caso,  $x'(t) = y'(t) \equiv 0$ , y la curva tiene constantes sus dos primeras coordenadas en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, la curva es una recta vertical.



(3) Según 8.10(1), p.105, las direcciones principales en un punto de una superficie de revolución corresponden a los meridianos y los paralelos, luego éstos son las líneas de curvatura de la superficie. Se puede ver una representación de las del toro en la figura de 1.11, p.10. ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $S$  el cilindro circular con aplicación de Gauss  $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Utilizar la expresión  $\mathbf{II}_p(a, b, c) = -a^2 - b^2$  de 7.7(3), p. 93, para deducir la fórmula de Euler  $k_n(\theta) = -\cos^2 \theta$  del ejemplo 8.9(2), p. 105. Deducirla también utilizando la curvatura de las elipses obtenidas como secciones normales según se describen en ese ejemplo.

**Número 2.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva de una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  con la propiedad de que para todo  $t \in I$  la curva es una sección normal de  $S$  en  $\alpha(t)$ . ¿Es  $\alpha$  una línea de curvatura de  $S$ ?

**Número 3.** Sea  $\alpha$  una curva regular de una superficie  $S$ . Supongamos que  $\alpha$  es plana, es decir, que su traza está contenida en un plano  $P$ . Probar que  $\alpha$  es una línea de curvatura si y sólo si  $S$  y  $P$  se cortan con ángulo constante a lo largo de  $\alpha$ . Enunciar y demostrar un resultado más general válido para la intersección de dos superficies.

**Número 4.** Sea  $\alpha$  una curva regular intersección de dos superficies transversales  $S_1$  y  $S_2$ . Probar que la curvatura  $k = \kappa_\alpha(p)$  de  $\alpha$  en un punto  $p$  cumple  $k^2 \sin^2 \theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta$ , donde

$k_1$  y  $k_2$  son las curvaturas normales de  $\alpha$  en el punto  $p$  respecto de las superficies  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente y  $\theta$  es el ángulo con que se cortan las superficies en dicho punto.

**Número 5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $p \in S$ . Demostrar que, salvo cambio ortonormal de coordenadas,  $p = (0, 0, 0)$  y en un entorno suyo la superficie es el grafo de una función diferenciable  $f(x, y) = \frac{1}{2}(kx^2 + ly^2) + \dots$ , donde  $k$  y  $l$  son las curvaturas principales de  $S$  en  $p$ .

**Número 6.** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Sea  $p \in S$  un punto crítico de  $f$ . La Hessiana de  $f$  en  $p$  es la aplicación  $H_p(f) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  tal que si  $\omega = \alpha'(0)$  es un vector tangente en  $p$  entonces  $H_p(f)(\omega) = (f \circ \alpha)''(0)$ . Expresar  $H_p(f)(\omega)$  en coordenadas locales y deducir que  $H_p(f)$  es una forma cuadrática bien definida (no depende de  $\alpha$ ).

**Número 7.** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable y  $p$  un punto crítico de  $f$ . Demostrar que si  $f$  tiene un máximo local en  $p$  entonces la forma cuadrática  $H_p(f)$  es semidefinida negativa. En sentido contrario, probar que si  $H_p(f)$  es definida negativa entonces  $f$  tiene un máximo local en  $p$ . Formular los enunciados correspondientes para mínimos locales.

**Número 8.** Sean  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie,  $p \in S$  y  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  la función altura relativa al plano tangente en  $p$  respecto al vector  $N(p)$ . Probar que la segunda forma fundamental  $\mathbf{II}_p$  coincide con la Hessiana  $H_p(h)$ .

**Número 9.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta. Utilizar los problemas 6, 7, 8 anteriores para probar que para cada dirección  $\nu \in \mathbb{R}^3$  existe un punto  $p \in S$  tal que  $\nu \perp T_p S$  y las curvaturas principales en  $p$  son ambas  $\geq 0$  o ambas  $\leq 0$ .

**Número 10.** Encontrar dos líneas de curvatura del paraboloides hiperbólico  $z = -x^2 + y^2$  que pasen por el punto  $(0, 0, 0)$ .

## Notas

1. JEAN BAPTISTE MEUSNIER DE LA PLACE (1754–1793) nació en Tours, Francia. Su familia deseaba darle una educación religiosa y, ante la imposibilidad de que ingresara como alumno con los jesuitas (pues todas sus escuelas en Francia fueron cerradas en 1762), decidieron darle una educación privada y, más tarde, ingresó en la Escuela de Ingeniería Militar de Mézières. En esta escuela era profesor Monge, quien dejó el siguiente testimonio sobre su alumno: «El mismo día de su llegada a Mézières, Meusnier vino a verme por la tarde, y me expresó su deseo de que le propusiera un problema que me permitiera conocer el nivel de sus conocimientos y juzgar sus aptitudes. Para complacerle, le hablé sobre la teoría de Euler acerca de los radios de curvatura máxima y mínima, le expuse los principales resultados y le pedí que pensase una demostración. Al día siguiente, por la mañana, me entregó una pequeña hoja de papel que contenía la demostración. Pero lo más notable es que los argumentos que empleaba eran más directos y rápidos que los de Euler. La elegancia de esta solución y el poco tiempo que le había costado me permitieron hacerme una idea de la sagacidad y de la percepción exquisita de la naturaleza de las cosas de que daría múltiples pruebas en todos los trabajos emprendidos después. Le indiqué

entonces el volumen de la Academia de Berlín en el que aparecía la memoria de Euler sobre este tema y pronto se dio cuenta de que sus métodos eran más directos que los de Euler y de que deberían ser más fecundos y le permitirían llegar a resultados que se habían escapado a Euler».

2. En aquellos momentos Monge se ocupaba de un problema difícil, la integración de la ecuación en derivadas parciales de segundo orden planteada por Lagrange que caracteriza a las superficies minimales. Monge tardaría diez años en resolver este problema pero entonces recibió la inestimable ayuda de Meusnier, que encontró la solución en dos casos particulares descubriendo, al mismo tiempo, dos nuevas superficies. Una de ellas, la *catenoide*, resolvió el problema para las superficies de revolución. La otra superficie, el helicoides (1.7, p. 6), tiene la propiedad de ser, aparte del plano, la única superficie minimal reglada. Fueron, durante mucho tiempo, las únicas superficies minimales conocidas. No debemos olvidar que toda esta actividad de Meusnier, que tenía 21 años, era fruto de su trabajo en el escaso tiempo libre que le dejaban sus estudios en la escuela militar. Sus resultados serían expuestos más tarde en una memoria presentada en la Academia de Ciencias de París, que contenía el célebre teorema de Meusnier que se demuestra en esta lección y una teoría nueva de la curvatura de las superficies. A partir de ese momento comienza una colaboración regular con la Academia, obteniendo una licencia de sus obligaciones militares de seis meses cada año para dedicarse al trabajo científico.

En esos mismos años los hermanos JOSEPH-MICHEL (1740–1810) y JACQUES-ÉTIENNE (1745–1799) MONTGOLFIER, realizaron las primeras experiencias aerostáticas. El 5 de junio de 1783 un aerostato se elevaba por primera vez en Annonay provocando un entusiasmo general. El 21 de noviembre siguiente tuvo lugar el primer viaje aéreo tripulado. El 3 de diciembre de ese mismo año, Meusnier leyó en la Academia un trabajo titulado *Mémoire sur l'équilibre des machines aérostatiques, sur les différents moyens de les faire monter et descendre, et spécialement sur celui d'exécuter ces manoeuvres sans jeter de lest et sans perdre d'air inflammable, en ménageant dans le ballon une capacité particulière destinée à renfermer de l'air atmosphérique*. Este trabajo marca una etapa decisiva en la historia de la Aerostática, pues expone con absoluta precisión los movimientos verticales de los globos y las reglas para maniobrarlos.

Meusnier también realizó contribuciones a la Química. Aún estaba vigente entonces la doctrina de los cuatro elementos, según la cual el agua, el aire, la tierra y el fuego son sustancias elementales que no admiten descomposición en otras más simples. El 24 de abril de 1784, conjuntamente con ANTOINE-LAURENT DE LAVOISIER (1743–1794), Meusnier presenta ante la Academia pruebas concluyentes de que el agua es una sustancia compuesta de oxígeno e hidrógeno. La memoria correspondiente lleva por título *Mémoire où l'on prouve par la décomposition de l'eau que ce fluide n'est point une substance simple et qu'il y a plusieurs moyens d'obtenir en grand l'air inflammable qui y entre comme principe constituant*. En el curso de estas investigaciones Meusnier inventó el *gasómetro*, mecanismo que empleó para medir el peso de los fluidos consumidos en sus experimentos y que jugó un papel relevante en su argumentación.

3. Meusnier no fue ajeno a los importantes acontecimientos políticos que se desarrollaron en su época. Fue un ardiente partidario de la revolución y, al igual que su amigo Monge, se afilió a la Sociedad de los Jacobinos. Sin embargo, él era un militar y su lugar estaba en el campo de batalla en unos momentos en los que éstas no escaseaban. En 1793 es destinado a la región del Rhin, lugar donde se desarrolla la guerra contra Alemania. Participa en acciones militares en Kostheim, Cassel y Maguncia. El 5 de junio de ese año, atravesando el Rhin en barca es alcanzado por un proyectil de los cañones enemigos, a consecuencia del cual se le amputa una pierna y después de varios días de agonía muere el 13 de junio. No llegó a tener noticia de su nombramiento como general de división, efectuado un mes antes.

4. BENJAMIN OLINDE RODRIGUES (1795–1851) nació en Burdeos, Francia. A pesar del reconocimiento de matemáticos como Klein o Darboux, según quien el trabajo de Olinde Rodrigues era fundamental en la teoría de las líneas de curvatura, su estatura matemática no ha sido suficientemente reconocida. Tampoco se tenía información fidedigna sobre su vida hasta muy recientemente, cuando tras un congreso celebrado en 2001 en el Imperial College de Londres se ha investigado con más interés su figura. El año 2005 se publicó un libro, editado por SIMON LEONARDO ALTMANN (1924–) y EDUARDO L. ORTIZ (1931–) para la American Mathematical Society y titulado *Mathematics and social utopies in France. Olinde Rodrigues and his times*, en el que varios matemáticos e historiadores de la ciencia ponen de manifiesto su gran categoría humana y científica.

5. SIMON LEONARDO ALTMANN (1924–), DAVID JONATHAN SIMINOVITCH (1950–) y BARRIE MICHAEL RATCLIFFE (1940–) describen la trayectoria de Olinde Rodrigues en la época especialmente efervescente de la historia de Francia que le tocó vivir. De familia judía, su bisabuelo Isaac nació en España, y emigró a Burdeos en el siglo XVIII. La familia Rodrigues se dedicó a actividades relacionadas con la banca y las finanzas, en las que alcanzaron una posición influyente. Olinde Rodrigues estudió en la Sorbona, donde obtuvo su doctorado, probablemente bajo la dirección de SYLVESTRE-FRANÇOIS LACROIX (1765–1843), un antiguo discípulo de Monge. Sin embargo, nunca desarrolló una actividad profesional en la Universidad. En contra de las afirmaciones de que en Francia no existía discriminación racial en el sistema educativo, Ratcliffe presenta evidencia concluyente de que existían instrucciones de los niveles más altos de la burocracia para que los judíos no fueran aceptados como profesores (ni tan siquiera en las escuelas). Ésta fue, posiblemente, la razón de que Olinde Rodrigues no siguiera una carrera académica, y es notable que esta circunstancia no menguara su interés hacia las matemáticas ni frustrara su actividad investigadora. La consecuencia de todo esto es que fue una figura insólita en el mundo de las matemáticas. Además de matemático, fue banquero y financiero, y quiso utilizar estas circunstancias para redimir a los humildes y luchar contra la pobreza. Su existencia estuvo guiada por un ideal utópico, al que dio forma la doctrina del *saint-simonismo*.

6. CLAUDE HENRI DE ROUVROY, CONDE DE SAINT-SIMON (1760–1825), fue un aristócrata visionario que luchó en la revolución americana y sobrevivió la época del Terror en Francia. Cuando ya tenía 38 años estudió Física Matemática en la Escuela Politécnica,

donde Monge, Lagrange y JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717–1783) fueron, no sólo sus profesores, sino sus amigos. Saint-Simon diseñó un programa para la organización de la sociedad con arreglo a líneas utópicas, socialistas y científicas. Olinde Rodrigues abrazó estos ideales, y como banquero, financiero y saint-simoniano preparó los fundamentos sociales para el tratamiento justo de los trabajadores, para la abolición de la esclavitud, para el reconocimiento de los derechos de la mujer y para controlar el poder del capital. Fue un amigo muy cercano de Saint-Simon y un soporte esencial en los últimos años de vida de éste.

**7.** La muy útil fórmula de Olinde Rodrigues para las líneas de curvatura que se presenta en esta lección aparece en todos los textos de Geometría Diferencial. Sus trabajos en este área corresponden, en parte, a su tesina de licenciatura y a su tesis de doctorado, y fueron publicados antes de 1816. En ellos aparecen resultados sobre la curvatura de las superficies que, totalmente desapercibidos en ese momento, más tarde serían atribuidos a Gauss. Además, su tesis contenía una fórmula para la generación de los *polinomios de Legendre*. A esta época corresponden, asimismo, otros trabajos relacionados con el movimiento de una partícula. Olinde Rodrigues muestra como obtener las ecuaciones de Lagrange mediante una aplicación cuidadosa del Cálculo de Variaciones. Sus trabajos de esta primera época consisten, en total, en 9 publicaciones, y pasan 25 años hasta que aparecen otras 5, ahora dedicadas a problemas de tipo combinatorio. Olinde Rodrigues se mantenía informado de la actividad matemática leyendo la revista de JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882), el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, y la de AUGUST LEOPOLD CRELLE (1780–1855), el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. En estas revistas se plantearon algunos problemas relacionados con la inversión de permutaciones. Rodrigues los resolvió, y encontró la expresión del número de permutaciones de  $n$  elementos con  $k$  inversiones. Sus trabajos fueron nuevamente ignorados, y se repite sistemáticamente en la literatura posterior el intento de resolver problemas que él ya había cerrado. En 1840 publicó un notable artículo sobre rotaciones de la esfera, cuya importancia no sería advertida hasta el advenimiento de la Mecánica Cuántica en 1920. En el artículo se prefigura el concepto de los *cuaterniones*, introducidos por SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865) tres años más tarde. El descubrimiento de Hamilton fue de tipo algebraico y desde este punto de vista es extraordinario, uno de los más ingeniosos del siglo XIX. Sin embargo, la interpretación geométrica dada por Hamilton estaba equivocada, y la confusión resultante ha llegado a nuestros días. Incluso en los diccionarios de Oxford han aparecido definiciones erróneas de los cuaterniones, aunque, por iniciativa de Altmann, el comité matemático de los diccionarios, encabezado por SIR MICHAEL FRANCIS ATIYAH (1929–), ha corregido el error. Esta historia está contada por Altmann en su artículo *Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal*, donde muestra que las ideas de Olinde Rodrigues proporcionaban, a priori, el marco adecuado para la interpretación geométrica. En palabras de JEREMY J. GRAY (1947–), el artículo de Olinde Rodrigues es quizás el primero en estudiar los grupos de movimientos. Sus últimos artículos están dedicados a problemas trigonométricos y fracciones continuas.

## Curvatura de Gauss

---

En su momento dijimos que la clasificación de la segunda forma fundamental es importante para conocer la geometría de una superficie, y explicamos que el determinante sería el invariante más importante. Nos dedicamos a ello aquí. Como es habitual, consideraremos una superficie *orientada*, pero los conceptos que introduzcamos en esta lección *serán independientes de la orientación*.

Sea  $S$  una superficie orientada, con aplicación de Gauss  $N$ .

**(9.1) Clasificación de la segunda forma fundamental.** En cada punto  $p \in S$  tenemos la segunda forma fundamental  $\mathbf{II}_p$ . Como ponen de manifiesto los ejemplos vistos en las lecciones anteriores, las curvaturas principales en el punto  $p$  clasifican  $\mathbf{II}_p$ . Veamos por qué.

(1) Para simplificar al máximo el argumento, elijamos una base ortonormal  $\{\varpi, \varpi'\}$  de  $T_p S$  formada por autovectores de  $d_p N$ , digamos  $d_p N(\varpi) = \nu \varpi$  y  $d_p N(\varpi') = \nu' \varpi'$ . Entonces, como vimos al calcular la fórmula de Euler,

$$B_p(\varpi, \varpi) = \mathbf{II}_p(\varpi) = -\nu = k, \quad B_p(\varpi', \varpi') = \mathbf{II}_p(\varpi') = -\nu' = l,$$

y por ser  $\varpi$  y  $\varpi'$  ortogonales

$$B_p(\varpi, \varpi') = B_p(\varpi', \varpi) = -\langle d_p N(\varpi'), \varpi \rangle = -\langle \nu' \varpi', \varpi \rangle = 0.$$

De esta manera la matriz de  $\mathbf{II}_p$  es diagonal, y en su diagonal aparecen las dos curvaturas principales.

En particular se ve que la matriz de la segunda forma fundamental y la de la aplicación de Weingarten son *diagonales y opuestas* cuando se calculan respecto de una base como esta  $\{\varpi, \varpi'\}$ .

(2) Según lo anterior la forma cuadrática  $\mathbf{II}_p$  se escribe  $k\lambda^2 + l\mu^2$  en coordenadas  $(\lambda, \mu)$  respecto de la base elegida, y obtenemos inmediatamente la clasificación siguiente según los signos de las curvaturas principales. Suponemos por ejemplo que  $k \geq l$ :

$k$	$l$	$\mathbf{II}_p$	$k \cdot l$
+	+	definida positiva	+
+	0	semidefinida positiva	0
+	−	indefinida	−
0	0	idénticamente nula	0
0	−	semidefinida negativa	0
−	−	definida negativa	+

Hemos añadido el signo del producto de las curvaturas por la explicación que sigue. ■

Observemos cómo influye la orientación en este resultado. Sabemos que al cambiar la orientación las curvaturas principales cambian de signo, con la consecuencia de que en la clasificación anterior los términos *positiva* y *negativa* se intercambian. Este intercambio corresponde a la elección arbitraria que hagamos de la aplicación de Gauss, elección que no influye en qué forma tenga nuestra superficie. Por tanto los calificativos antedichos no serán esenciales, y debemos fijarnos más bien en que la forma sea definida o indefinida, semidefinida o nula. Resulta que esto queda determinado por el signo del determinante (aparte el caso en que  $\mathbf{II}_p \equiv 0$ ). De hecho, ese determinante es la curvatura con nombre más ilustre:

**Definición 9.2.** La *curvatura de Gauss*  $K(p)$  de  $S$  en  $p$  es el producto de sus dos curvaturas principales en  $p$ .

Tal vez sea ésta la noción de curvatura más importante, que además, por lo explicado anteriormente, *no depende de la orientación*. Como toda superficie es *localmente* orientable, deducimos que la curvatura de Gauss se puede definir para superficies no orientables.

Para recuperar a partir de  $K$  las curvaturas principales, hay que conocer también la denominada *curvatura media*  $H(p)$  de  $S$  en  $p$ , que es la semisuma de las curvaturas principales  $k(p)$  y  $l(p)$ . Aquí conviene señalar que esta curvatura media se puede también definir en superficies no orientables, pero sólo *salvo signo* (de nuevo por ser toda superficie localmente orientable).

Obsérvese que si escribimos  $\nu(p) = -k(p)$ ,  $\nu'(p) = -l(p)$ , el polinomio característico de  $d_p N$  se escribe:

$$P(T) = (T - \nu(p))(T - \nu'(p)) = T^2 + 2H(p)T + K(p),$$



y resulta que:

- (i)  $K(p) = \det(d_p N)$ ,  $H(p) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(d_p N)$ ,
- (ii)  $k(p), l(p) = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$ .

**(9.3) Clasificación de los puntos de una superficie.** Los puntos de la superficie  $S$  se clasifican atendiendo a su curvatura como sigue.

$K$	$H$	$\mathbf{II}_p$	punto
+	$\pm$	definida	<i>elíptico</i>
0	$\neq 0$	semidefinida	<i>parabólico</i>
0	0	idénticamente nula	<i>planar</i>
-	$\pm$	indefinida	<i>hiperbólico</i>

Vemos que la curvatura media sólo es relevante para distinguir los puntos parabólicos de los planares, y aún en ese caso sólo interesa si es o no nula, lo que no depende de la orientación.

Adicionalmente, un punto se llama *umbílico* si sus dos curvaturas principales son coincidentes, lo cual es compatible, tan sólo, con el caso elíptico y el caso planar. Obsérvese que la coincidencia de las dos curvaturas principales tampoco depende de la orientación, y la podemos expresar mediante la igualdad  $H^2 = K$ . ■

El dato interesante en la tabla precedente es el signo de  $K$ . Ese signo es el del determinante de la matriz de  $\mathbf{II}_p$  respecto de cualquier base de  $T_p S$ . En efecto, aunque para encontrar  $k, l$  y  $K = k \cdot l$  haya que cambiar de base, los determinantes de  $\mathbf{II}_p$  antes y después del cambio coinciden salvo el cuadrado del determinante del cambio. Por ello, aunque el determinante de  $\mathbf{II}_p$  depende de la base, su signo no.

Analicemos ahora las superficies de referencia habituales.

**Ejemplos 9.4.** (1) Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  un plano afín. Como la aplicación de Gauss es constante, su derivada es siempre nula, luego su único autovalor es 0 y su determinante 0 también. Así, un plano afín tiene curvatura de Gauss igual a cero, y todos sus puntos son planares.

(2) La esfera  $S = \mathbb{S}^2$ . Elegimos como aplicación de Gauss la identidad, de modo que su derivada también es la identidad, que tiene 1 por único autovalor,

y el determinante 1. Por tanto la esfera tiene curvatura de Gauss constante igual a 1, y todos sus puntos son umbílicos.

Una esfera de radio  $r > 0$  arbitrario tiene curvatura de Gauss constante igual  $1/r^2$  (es fácil ver que su aplicación de Weingarten es una homotecia de radio  $1/r$ ). En la lección 11 entenderemos la relación entre las curvaturas de dos esferas de radio diferente.

(3) El cilindro circular  $S : x^2 + y^2$ , como en 8.9(2), p.105. Allí vimos que sus curvaturas principales eran  $-1$  y  $0$ . Por tanto, la curvatura de Gauss es constante igual a  $0$ , y todos sus puntos son parabólicos. La curvatura media con esta orientación es  $-\frac{1}{2}$ .

(4) El paraboloide hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$ . En 8.11(1), p.107, calculamos las curvaturas principales en algunos de sus puntos, pero no en general por la dificultad de las operaciones. Sin embargo, el cálculo de la curvatura de Gauss es más sencillo, pues podemos utilizar la matriz de la aplicación de Weingarten que calculamos en 7.3(1), p.88, a saber:

$$L_p = \frac{2}{(4x^2+4y^2+1)^{3/2}} \begin{pmatrix} 4y^2+1 & -4xy \\ 4xy & -4x^2-1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es la curvatura de Gauss, y vale

$$K = \frac{-4}{(4x^2+4y^2+1)^2} < 0,$$

de manera que todos los puntos de la superficie son hiperbólicos. La curvatura media es la traza de la matriz:

$$H = \frac{8(-x^2+y^2)}{(4x^2+4y^2+1)^2} = \frac{8z}{(4x^2+4y^2+1)^2};$$

el último numerador muestra cómo cambia de signo  $H$  según varía la altura  $z$ .

(5) El helicoide  $S$  parametrizado por  $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$ . En 7.3(2), p.89, se obtuvo la matriz  $L_p$  de la aplicación de Weingarten, y su determinante se calcula inmediatamente: es

$$K = \frac{-b^2}{(b^2+v^2)^2} < 0.$$

Como en el caso anterior, resulta que todos los puntos son hiperbólicos. Por otra parte, al calcular la traza de  $L_p$  obtenemos que la curvatura media  $H$  del helicoide

es constante igual a 0, o sea que en todo punto las dos curvaturas principales son no nulas y opuestas.

(6) Sea  $S$  la superficie de revolución generada por una curva  $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ ,  $\zeta(u) > 0$ , no necesariamente parametrizada por el arco. En 8.10(2), p. 107, vimos que las curvaturas principales de  $S$  son

$$k = \frac{\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi'}{(\zeta'^2 + \xi'^2)^{3/2}}, \quad l = \frac{\xi'}{\zeta \sqrt{\zeta'^2 + \xi'^2}},$$

y por tanto, la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{\xi'(\zeta' \xi'' - \zeta'' \xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

(el lector puede escribir la curvatura media).

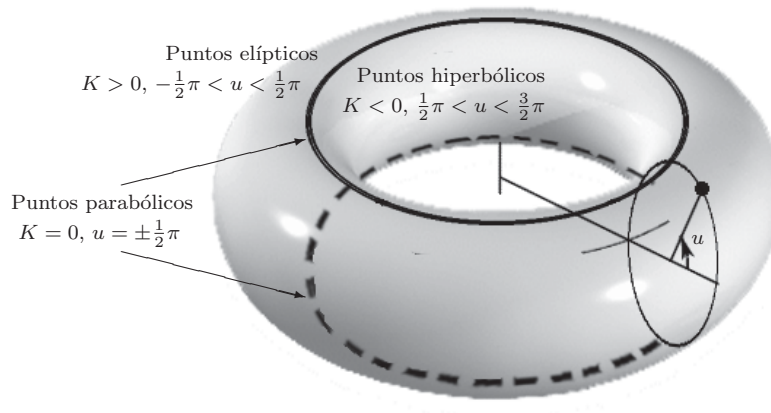
Veamos un ejemplo importante (1.11, p. 10): el toro de revolución generado por una circunferencia del plano  $xz$ , parametrizada por

$$\zeta(u) = c + r \cos u, \quad \xi(u) = r \sin u \quad (0 < r < c).$$

Las fórmulas anteriores proporcionan las siguientes curvaturas:

$$k = \frac{1}{r}, \quad l = \frac{\cos u}{c + r \cos u}; \quad K = \frac{\cos u}{r(c + r \cos u)}$$

(comparar con 7.4(2), p. 91). Veamos qué tipos de puntos tiene este toro. En primer lugar, no tiene puntos umbílicos, pues si  $k = l$  resulta  $c + r \cos t = r \cos t$ , esto es,  $c = 0$ . Como  $k > 0$ , tampoco hay puntos planares. Por otra parte, el denominador de  $K$  siempre es positivo, luego el signo de  $K$  es el de su numerador  $\cos t$ , y obtenemos:



Es decir, los puntos elípticos forman la *cara exterior* del toro, los parabólicos sus *circunferencias superior e inferior*, y los hiperbólicos su *cara interior*. ■

La siguiente proposición se refiere a superficies cuyos puntos son umbílicos en su totalidad.

**Proposición 9.5.** *Sea  $S$  una superficie orientable conexa que tiene todos sus puntos umbílicos, entonces  $S$  es un abierto de un plano o de una esfera.*

**Demostración.** Sea  $N$  una aplicación de Gauss de  $S$ . Dado  $p \in S$  arbitrario, puesto que las dos curvaturas principales coinciden, coinciden los dos autovalores de  $d_p N$ , que es por tanto una homotecia; digamos  $d_p N(\omega) = \nu(p)\omega$  para todo  $\omega \in T_p S$ . Esto define una aplicación  $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

Consideremos una parametrización  $p = \varphi(u, v)$  cualquiera de  $S$ . Entonces

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_u = d_p N(\varphi_u) = (\nu \circ \varphi)\varphi_u, \\ (N \circ \varphi)_v = d_p N(\varphi_v) = (\nu \circ \varphi)\varphi_v. \end{cases}$$

Estas expresiones muestran que  $\nu \circ \varphi$  es una función diferenciable, pues de ellas se deduce, por ejemplo, que

$$\nu \circ \varphi = \frac{\langle (N \circ \varphi)_u, \varphi_u \rangle}{\|\varphi_u\|^2},$$

y el vector  $\varphi_u$  no se anula nunca. Por tanto, podemos derivar respecto de  $v$  y  $u$  respectivamente, y obtenemos

$$\begin{cases} (N \circ \varphi)_{vu} = (\nu \circ \varphi)_v \varphi_u + (\nu \circ \varphi)\varphi_{vu}, \\ (N \circ \varphi)_{uv} = (\nu \circ \varphi)_u \varphi_v + (\nu \circ \varphi)\varphi_{uv} \end{cases}$$

Restando ambas expresiones y teniendo en cuenta la regla de Schwarz (de las derivadas cruzadas) deducimos que

$$(\nu \circ \varphi)_v \varphi_u - (\nu \circ \varphi)_u \varphi_v \equiv 0$$

y, ya que los vectores  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$  son linealmente independientes, obtenemos que las dos derivadas parciales de  $\nu \circ \varphi$  se anulan idénticamente en  $U$ , o en otras palabras, que  $d_p \nu \equiv 0$ .

Lo anterior demuestra que la aplicación  $\nu : S \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y tiene todas sus derivadas nulas, y como  $S$  es conexo,  $\nu$  es constante (4.6, p. 47). Si ocurre

que  $\nu \equiv 0$ , entonces  $d_p N \equiv 0$  para todo  $p \in S$ , luego la aplicación de Gauss  $N$  es constante, y ya sabemos que esto implica que  $S$  es un abierto de un plano afín (6.8, p. 79). Por tanto, supondremos  $\nu$  constante no nula, y demostraremos que  $S$  es un abierto de una esfera.

Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación  $f(p) = p - \frac{1}{\nu}N$ . Es diferenciable, y su derivada en cualquier punto  $p \in S$  es nula:

$$d_p f(\omega) = \omega - \frac{1}{\nu}d_p N(\omega) = \omega - \frac{1}{\nu}\nu\omega = 0 \quad \text{para todo } \omega \in T_p S.$$

En consecuencia,  $f$  es constante en  $S$ , digamos  $f \equiv p_0$ . Esto significa que todo punto  $p$  de  $S$  cumple la relación  $p - p_0 = \frac{1}{\nu}N(p)$ , y por tanto

$$\|p - p_0\| = \frac{1}{\nu}\|N(p)\| = \frac{1}{\nu}.$$

En otras palabras,  $p$  está en la esfera  $S_\nu$  de centro  $p_0$  y radio  $\frac{1}{\nu}$ . Pero visto así ya que  $S$  está contenida en la esfera  $S_\nu$ , se deduce que  $S$  es un abierto de esa esfera (4.11, p. 50). ■

El teorema anterior contiene la caracterización siguiente de la esfera, debida a Meusnier: *una superficie compacta cuyos puntos son todos umbílicos es una esfera.*

A continuación introducimos otro concepto independiente de la orientación. Sea como siempre  $S$  nuestra superficie (con una aplicación de Gauss  $N$ ) y  $p \in S$ .

**Definición 9.6.** Se llama *indicatriz de Dupin* el subconjunto del plano tangente  $T_p S$  definido por la ecuación  $\mathbf{II}_p = \pm 1$ .

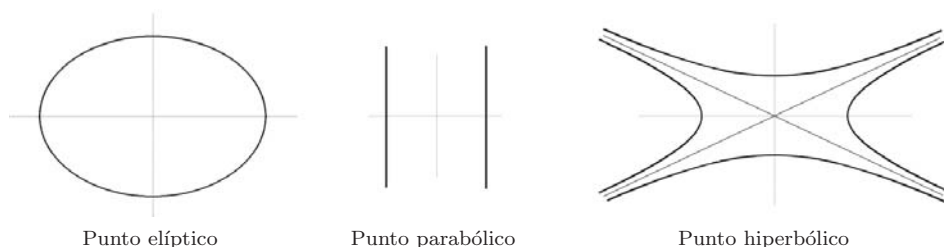
El doble signo en esta definición hace que no dependa de la orientación. Para entender de qué tipo de objeto se trata, consideremos una base ortonormal  $\{\varpi, \varpi'\}$  de  $T_p S$  formada por autovectores de  $d_p N$ :  $d_p N(\varpi) = \nu\varpi$ ,  $d_p N(\varpi') = \nu'\varpi'$ . Las curvaturas principales son  $k = -\nu$  y  $l = -\nu'$ , y como ya hemos calculado otras veces, dado un vector  $\omega = \lambda\varpi + \mu\varpi'$  se tiene

$$\mathbf{II}_p(\omega) = k\lambda^2 + l\mu^2.$$

Por tanto, la indicatriz de Dupin es un par de cónicas del plano tangente. Los posibles casos son los siguientes:

$K$	indicatriz de Dupin	punto
+	dos elipses, una real y una imaginaria	elíptico
0	dos pares de rectas paralelas, uno real y uno imaginario	parabólico
0	dos cónicas vacías	planar
-	dos hipérbolas con las mismas asíntotas	hiperbólico

El siguiente dibujo representa los casos relevantes.



Veamos cómo la indicatriz de Dupin pone de manifiesto la curvatura de la superficie cerca del punto de que se trate.

**(9.7) Interpretaciones geométricas.** (1) Supongamos que una determinada dirección del plano tangente está representada por un vector  $\omega$  de la indicatriz de Dupin (es decir,  $\mathbf{II}_p(\omega) = \pm 1$ ). Puesto que la curvatura normal en esa dirección es  $k_n = \mathbf{II}_p(\omega/\|\omega\|) = \pm 1/\|\omega\|^2$ , resulta que cuanto mayor es la norma de  $\omega$ , o sea, cuanto más lejano al origen es el punto de la indicatriz de Dupin en la dirección dada, más pequeña en valor absoluto es la curvatura normal en esa dirección. Distingamos los posibles casos:

(i) En un punto elíptico nos fijamos en la elipse real de la indicatriz. Su excentricidad es el cociente de las curvaturas principales, y determina la relación entre los dos ejes de la elipse. Confirmamos que cuanto mayor sea ese cociente, más varía la curvatura normal alrededor del punto.

(ii) En un punto parabólico tenemos un par de rectas paralelas reales. Todas las direcciones del plano tangente, excepto la del propio par de rectas, cortan a una de ellas. Cuando esas direcciones se aproximan a la del par de rectas, los puntos de corte con el par se alejan del origen, y corresponden a curvaturas normales cada vez menores. En el límite obtenemos que la curvatura normal en la dirección del par de rectas es nula.

(iii) En un punto hiperbólico aparecen un par de hipérbolas con las mismas asíntotas. Arbitariamente próximas a esas asíntotas hay direcciones representadas por puntos de las hipérbolas arbitrariamente lejanos del origen y, por tanto, la curvatura normal en esas direcciones es arbitrariamente pequeña, y nula en el límite. En suma, en las direcciones de las asíntotas la curvatura normal es nula.

(2) Una interpretación clásica de la indicatriz de Dupin, que no desarrollaremos aquí, se basa en la observación de que si se toma el plano tangente  $T_p S$  a un punto  $p$  de una superficie  $S$  entonces la intersección de la superficie con un plano paralelo y cercano a  $T_p S$  es “aproximadamente” la indicatriz de Dupin de  $S$  en  $p$ . El lector puede visualizar fácilmente ejemplos sencillos considerando un elipsoide, un paraboloides hiperbólico y un cilindro circular. ■

A la vista de las consideraciones anteriores, quedan justificadas las siguientes definiciones.

**Definición 9.8.** Las *direcciones asintóticas* de  $S$  en  $p$  son las direcciones tangentes en que se anula la curvatura normal. Una curva regular de  $S$  se llama *línea asintótica* si su vector tangente en todo punto define una dirección asintótica en ese punto.

Naturalmente, para que haya líneas asintóticas tiene que haber direcciones de curvatura nula, luego debe ser  $K \leq 0$ . Por ejemplo, como la curvatura de Gauss de una esfera es positiva, no tiene líneas asintóticas. Veamos algunos ejemplos en que sí las hay:

**Ejemplos 9.9.** (1) En el plano todas las curvaturas normales son 0, luego todas las curvas son líneas asintóticas.

(2) En el cilindro circular una de las curvaturas principales es 0, y la otra siempre es  $\neq 0$ . La curvatura principal nula corresponde siempre a la dirección vertical  $(0, 0, 1)$ , luego las líneas asintóticas son las rectas verticales contenidas en el cilindro (todas líneas de curvatura además).

(3) Analicemos el toro de revolución del ejemplo 9.4(6), p. 119. En primer lugar, según se vio allí, la curvatura normal no se anula nunca en puntos de la cara exterior del toro, luego en esa parte del toro no hay ninguna dirección asintótica, luego ninguna línea asintótica. Esa región externa está limitada por las dos circunferencias de puntos parabólicos, que ellas mismas son líneas de curvatura con curvatura nula (8.14(3), p. 110), luego son líneas asintóticas. En fin, en la cara interior del toro habrá direcciones asintóticas, pues las curvaturas principales en

esa cara interior tienen signos contrarios, luego algún valor intermedio nulo. Así en esta parte del toro habrá líneas asintóticas, pero no serán líneas de curvatura. ■

Terminamos la lección mostrando otra manera en que la curvatura de Gauss está ligada a la forma de la superficie. Se trata de un resultado del propio Gauss, y se conoce como *teorema de la curvatura de Gauss*.

**Teorema 9.10.** *Sea  $S$  una superficie orientada con aplicación de Gauss  $N$ , y sea  $p$  un punto de la superficie en el que la curvatura de Gauss no se anula. Entonces se tiene:*

$$|K(p)| = \lim_{W \rightarrow p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)},$$

donde el límite  $W \rightarrow p$  se toma según cualquier base de entornos  $W$  de  $p$ .

*Demostración.* Como  $K(p)$  es el determinante de la aplicación de Weingarten  $d_p N$ , resulta del teorema de la función inversa (4.10, p. 50), que  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  es un difeomorfismo local en  $p$ , esto es, que si  $W$  es suficientemente pequeño, su imagen  $N(W)$  es abierto en  $\mathbb{S}^2$ , y  $N|_W : W \rightarrow N(W)$  es un difeomorfismo. Dicho esto, podemos suponer dada una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  del entorno  $W$ , con  $p = \varphi(q)$ . En nuestra situación,  $\psi = N \circ \varphi : U \rightarrow N(W)$  es una parametrización de  $N(W)$ . Vamos a usar estas parametrizaciones para calcular las áreas de  $W$  y  $N(W)$ .

Según se explicó en 5.11(3), p. 66, esas áreas son

$$\text{área}(W) = \int_U \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, du dv, \quad \text{área}(N(W)) = \int_U \|\psi_u \wedge \psi_v\| \, du dv.$$

En nuestra situación  $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_p S$ , luego

$$\psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \quad \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v,$$

para ciertos coeficientes  $a, b, c, d$ . Por tanto

$$\|\psi_u \wedge \psi_v\| = \|(a\varphi_u + b\varphi_v) \wedge (c\varphi_u + d\varphi_v)\| = |ad - bc| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|.$$

Ahora bien,

$$\begin{cases} d_p N(\varphi_u) = (N \circ \varphi)_u = \psi_u = a\varphi_u + b\varphi_v, \\ d_p N(\varphi_v) = (N \circ \varphi)_v = \psi_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \end{cases}$$



con lo que  $K(p) = \det(d_p N) = ad - bc$ . Con todo esto el cociente que nos interesa queda

$$\frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \frac{\int_U |K \circ \varphi| h \, dudv}{\int_U h \, dudv},$$

donde  $h = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$  nunca se anula. El teorema del valor medio del Cálculo Integral dice que el último cociente vale

$$\frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1) \int_U \, dudv}{h(q_2) \int_U \, dudv},$$

con  $q_1, q_2 \in U$ . Por tanto

$$\lim_{W \rightarrow p} \frac{\text{área}(N(W))}{\text{área}(W)} = \lim_{U \rightarrow q} \frac{|K(\varphi(q_1))| h(q_1)}{h(q_2)} = |K(p)|,$$

pues  $W \rightarrow p$  significa que  $U \rightarrow q$  y por tanto  $q_1, q_2 \rightarrow q$ . ■

Así, el valor absoluto de la curvatura de Gauss en un punto  $p$  puede ser interpretado como *el límite de un cociente de áreas*, la de la imagen esférica de un entorno de  $p$  y la de dicho entorno, cuando éste se va haciendo más y más pequeño. Obsérvese que cuanto mayor sea el cociente, más superficie esférica se recorrerá en un entorno de  $p$ , y para esto más debe curvarse la superficie en ese entorno. Gauss determinó el signo de  $K$  en función de la orientación de  $S$ .

La demostración anterior contiene el siguiente resultado, que merece ser enunciado separadamente:

**Corolario 9.11.** *Sea  $S$  una superficie orientada con aplicación de Gauss  $N$ , y sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de un abierto  $W \subset S$  tal que  $N \circ \varphi : U \rightarrow N(W)$  sea un difeomorfismo sobre un abierto  $N(W)$  de  $\mathbb{S}^2$ . Sea  $\Sigma$  un subconjunto conexo de  $W$ . Entonces*

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \left| \int_{\Sigma} K \right|.$$

*Demostración.* Por la prueba precedente,

$$\text{área}(N(\Sigma)) = \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} |K \circ \varphi| \sqrt{\det(Q)} \, dudv,$$

y esta última integral es por definición (5.12, p.67)  $\int_{\Sigma} |K|$ . Ahora bien,  $K$  no puede anularse en  $W$ , pues es el determinante de la derivada de  $N$ , y  $N|_W$  es

difeomorfismo. Como  $\Sigma$  es conexo, se deduce que  $K$  tiene signo constante en  $\Sigma$ , y el valor absoluto sale de la integral, como en el enunciado. ■

En otras palabras, *la integral del valor absoluto de la curvatura de Gauss en una región  $\Sigma$  es el área de su imagen esférica* (con ciertas hipótesis sobre  $\Sigma$ ).

## Problemas

**Número 1.** Calcular la curvatura de Gauss de los paraboloides elípticos  $z = x^2 + y^2$  y  $z = x^2 + 4y^2$ .

**Número 2.** Probar que toda recta contenida en una superficie  $S$  es una curva asintótica. Deducir que si por el punto  $p \in S$  pasa una recta contenida en  $S$  entonces la curvatura de Gauss en  $p$  no puede ser positiva.

**Número 3.** Sea  $p$  un punto de una superficie  $S$  tal que la curvatura media de  $S$  se anula en  $p$ . Probar que existen dos direcciones asintóticas ortogonales en el plano tangente en  $p$  (que son únicas si  $p$  no es planar). ¿Es cierta la afirmación recíproca?

**Número 4.** Calcular la curvatura de Gauss de la superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  definida por la ecuación  $\cos x + \sin y + \sin z = 0$ . Describir qué tipos de puntos tiene  $S$ .

**Número 5.** Calcular la indicatriz de Dupin y las direcciones asintóticas en el origen de la superficie dada por la ecuación  $z = x^2 - 2y^2$ .

**Número 6.** Sea  $p$  un punto de una superficie  $S$  tal que la intersección del plano tangente afín  $p + T_p S$  con  $S$  contiene una curva regular  $\alpha$ . Probar que la recta tangente a  $\alpha$  en  $p$  define una dirección asintótica en  $T_p S$ . Un caso particular de uso frecuente es el de un punto hiperbólico: si el plano tangente en él a la superficie la corta en dos curvas transversales, entonces esas curvas definen las dos direcciones asintóticas en el punto.

**Número 7.** Sea  $S$  una superficie y  $p$  un punto de  $S$ . Supongamos que  $S$  contiene tres rectas distintas que pasan por  $p$ . Probar que  $p$  es un punto planar. Deducir que si  $S$  es conexa entonces  $S$  es una parte abierta de un plano si y sólo si por cada punto de  $S$  pasan tres rectas distintas contenidas en  $S$ .

**Número 8.** Sea  $S$  una superficie, no necesariamente orientable, con curvatura de Gauss (definible también en el caso no orientable) positiva en todo punto. Probar que  $S$  es orientable y es posible escoger la orientación de modo que las curvaturas principales sean positivas en todo punto.

**Número 9.** Sea  $S$  una superficie, no necesariamente orientable, de manera que su curvatura media se puede definir salvo signo. Probar que si la curvatura media no se anula en ningún punto entonces  $S$  es orientable.

**Número 10.** ¿Cuándo tiene puntos planares una superficie de revolución? Describirlos en ese caso.

## Notas

1. La noción de curvatura de Gauss, como tantos otros hallazgos en Geometría, es debida a Olinde Rodrigues. Él fue el primero en comparar un elemento de superficie con su imagen esférica situándose, por tanto, en el umbral de la investigación posterior, debida al propio Gauss.

2. PIERRE-CHARLES-FRANÇOIS DUPIN (1784–1873) nació en Varzy, localidad de Borgoña, Francia, el 6 de Octubre de 1784. Fue probablemente el geómetra diferencial más importante entre los discípulos directos de Monge. Estudió ingeniería naval en la Escuela Politécnica y en todo momento estuvo guiado por las posibles aplicaciones de la geometría a la técnica. Uno de sus primeros descubrimientos fue una familia de superficies llamadas *cíclides*, caracterizadas por el hecho de que sus líneas de curvatura son exclusivamente círculos. Este tipo de superficies sería más tarde estudiado por ERNST EDUARD KUMMER (1810–1893) y por Darboux, entre otros. En 1813 Dupin publicó un texto titulado *Développements de géométrie*, que contenía aplicaciones a la estabilidad de los barcos, a las excavaciones y fortificaciones, y a la óptica geométrica. En 1822 escribiría otro libro titulado *Applications de géométrie et de mécanique*. La primera sección de *Développements* contiene la teoría de la indicatriz. Como hemos comentado anteriormente, la indicatriz de Dupin en un punto  $p$  es una cónica que proporciona una primera aproximación a la forma de la superficie alrededor de  $p$ . Las líneas de curvatura que pasan por  $p$  tienen como tangentes los ejes de la indicatriz. La teoría general de la indicatriz lleva de forma natural al estudio de los puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos y a la introducción de las direcciones asintóticas.

Dupin continuó la tradición de Monge, utilizando tanto los métodos puramente geométricos como los analíticos. Prueba casi todos sus resultados de dos formas diferentes, según cada uno de esos dos enfoques. Monge, había definido nociones básicas también de esa doble manera. Por ejemplo, las líneas de curvatura son, desde el punto de vista geométrico, curvas a lo largo de las cuales las normales a la superficie forman una superficie desarrollable y, desde el analítico, curvas a lo largo de las cuales la curvatura normal alcanza valores extremos.

Dupin es autor de un celebrado teorema, usualmente conocido con el nombre de *teorema de Dupin*, referido a familias de superficies *triplemente ortogonales*. Se dice que tres familias de superficies son triplemente ortogonales a través de un abierto  $U$  del espacio euclídeo si por cada punto  $p$  de  $U$  pasa una única superficie de cada familia y las tres superficies que pasan por  $p$  son mutuamente ortogonales. El teorema de Dupin afirma que estas superficies se intersecan en líneas de curvatura.

3. Muchos de los resultados de Dupin fueron concebidos y desarrollados en situaciones difíciles, motivadas por su condición de ingeniero militar, que le llevaría a diferentes lugares de la geografía europea. Por ejemplo, su teoría de la indicatriz fue iniciada en 1806, en un viaje entre Holanda e Italia. Él mismo escribiría: «*Me vi obligado a realizar mi labor*

*matemática casi sin ayuda ni libros. Siempre ocupado por las mil tareas diferentes que tuve que afrontar, mi trabajo es fruto de la labor de un ingeniero y no de las meditaciones de un sabio».*

Por otra parte, Dupin jugó en etapas posteriores de su larga vida un papel importante en el establecimiento de la Estadística como método de análisis económico, social y político. Su labor en este campo da muestras de gran ingenio y, al mismo tiempo, de una cierta veleidad intelectual pues, probablemente, sólo vio los aspectos instrumentales de esta ciencia y no la concibió como un cuerpo de conocimiento autónomo.

**4.** En 1816 Dupin realizó la que sería la primera de sus visitas a Gran Bretaña. Su intención, como la de muchos viajeros de la época, era obtener conocimiento de las innovaciones tecnológicas e información útil para que su país pudiese ponerse a la altura de Gran Bretaña en industria y producción. Es notable que gran parte de las innovaciones técnicas eran realizadas por hombres sin formación superior y los muchos ingenieros franceses que visitaron el país después de la caída de Napoleón, reanudando las comunicaciones rotas desde el comienzo de la revolución francesa, vieron con asombro los inmensos progresos que se habían registrado. Las informaciones así obtenidas serían útiles a Francia en muchos aspectos, por ejemplo en el desarrollo de los ferrocarriles. Dupin se estableció por seis meses en la que él llamaba “isla de la melancolía”, y la experiencia y conocimiento adquiridos en esta época quedan reflejados en su libro *Mémoires sur la marine et les ponts-et-chaussées de France et d’Angleterre*.

Dupin realizó seis visitas a Gran Bretaña, la segunda, por un periodo de 8 meses, comenzada en 1817. En esta ocasión estableció contactos con la *Royal Society* de Londres. Esta sociedad se interesó por sus trabajos sobre ingeniería naval y publicó en sus *Philosophical Transactions*, en francés, uno de ellos, titulado *Structure des vaisseaux anglais considérée dans ses derniers perfectionnements*. También estableció relaciones personales con algunos *fellows* de esa sociedad, por ejemplo con William Somerville y su esposa, Mary. MARY FAIRFAX GREIG SOMERVILLE (1780–1872) fue una de las raras matemáticas de la época, autora de trabajos como *Mechanism of the Heavens*, y tuvo un papel importante en la decisión de AUGUSTA ADA BYRON, LADY LOVELACE (1815–1852), de dedicarse a las matemáticas.

**5.** Dupin tomó conciencia en Gran Bretaña de la superioridad técnica y económica de ese país, que en gran parte se basaba en la calidad de su mano de obra. Concibió a partir de entonces que el progreso de Francia pasaba por imitar a Gran Bretaña en el aspecto tecnológico y en el papel preponderante que el capitalismo desempeñaba, así como en la formación y educación de los obreros. También aspiraba a un cambio que hiciese las instituciones francesas más parecidas a las inglesas, y ello por la vía de la reforma, opuesta a la agitación revolucionaria que, bajo la presión de los extremistas, no podía llevar a Francia, en opinión de Dupin, más que a una nueva época de Terror, nombre con el que, en mayúsculas, se designaba alguno de los periodos del pasado reciente. Según Dupin era más útil saber las razones por las que Gran Bretaña había adelantado a Francia que permanecer vanamente satisfecho con los logros de su país cuando éste, en realidad,

permanecía estancado o progresaba muy lentamente. A la vista de esto, no es de extrañar que, como consecuencia de sus opiniones, fuera acusado de anglomanía y algunos de sus trabajos, en particular el titulado *Force militaire de la Grande-Bretagne*, que habían indignado al gobierno francés, fueron censurados.

Dupin fue un pionero en la formación técnica de los obreros y propugnó la educación de éstos en las virtudes del trabajo y del ahorro, de modo que esta educación les mantuviera alejados de la intemperancia. La situación en la Francia de aquel tiempo era que los empresarios que querían emplear maquinaria moderna se veían obligados a contratar trabajadores extranjeros que fuesen capaces de manejarla. Esto le llevó a ser el principal fundador del Conservatorio Real de Artes y Oficios. Dupin estaba imbuido de una misión social y allí desempeñó una cátedra dedicada a la formación profesional de los obreros, impartiendo cursos de mecánica aplicada y de geometría aplicada (es de destacar que otro geómetra, el general JEAN VICTOR PONCELET (1788–1867) también participó en iniciativas de este tipo).

También actuó Dupin en política, siendo un activo parlamentario entre 1827 y 1870 en la cámara de diputados y en la de pares y senador, defendiendo por estos medios sus convicciones: educación libre, formación de los obreros, ahorro popular (fue propagandista de las Cajas de Ahorro), inversiones en carreteras y canales, protección de los niños frente a su explotación en el mundo del trabajo. Dupin fue, en el más amplio sentido de la palabra, un educador, no sólo un profesor, en todas las esferas en que participó: la enseñanza, la economía y la política. Como anécdota curiosa mencionemos que fue también ministro de marina en 1834 por el exiguo periodo de nueve días. Aquel año hubo cinco ministros de marina diferentes, lo que da una idea de la agitación política del periodo. Fue una mezcla de sabio y de político que recogió la herencia del siglo de las luces, partidario de un progreso basado en la ciencia y la técnica y en unas relaciones sociales justas, aunque alejado de las ideas socialistas. Su doble preocupación científica y social fue reconocida con los honores de miembro de la Academia de Ciencias y de la Academia de Ciencias Morales y Políticas.

**6.** Para terminar nuestra semblanza de este interesante personaje diremos que el novelista H.B. Stendhal se refiere en más de una ocasión a Dupin en términos muy laudatorios, situándolo, en virtud de su conciencia moral y cívica, muy por encima del resto de los científicos de su tiempo. Por otra parte, según algunos autores, Edgar Allan Poe se inspiró en Charles Dupin para crear la figura del chevalier Auguste Dupin, detective con cualidades analíticas modeladas sobre las del matemático francés (ver M. Harrison, *The Exploits of the Chevalier Dupin*, Sauk City, Wisconsin, Mycroft & Moran, 1968, y M. Pearl, *The Poe Shadow: A Novel*, New York, Random House, 2006).



## Ecuaciones de Weingarten

---

En las lecciones anteriores hemos utilizado la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental para estudiar la manera en que una superficie se dobla o curva en el espacio. Las mismas definiciones de estos dos objetos expresan la estrecha relación que los une, pero si los cotejamos en los muchos ejemplos analizados, los encontraremos más o menos parecidos según los casos. Dedicamos esta lección a expresar explícitamente con ecuaciones la relación entre la aplicación de Weingarten y la segunda forma fundamental. Esas ecuaciones explican esos parecidos, a veces nada aparentes, otras, como en la situación del teorema espectral, verdaderamente evidentes.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie orientada, con aplicación de Gauss  $N$ .

**(10.1) Ecuaciones de Weingarten.** Retomamos la expresión local de la segunda forma fundamental tal y como se desarrolló en el párrafo 7.8, p. 93. Teníamos allí una parametrización  $\varphi$  de  $S$  compatible con la orientación (esto es,  $\eta = N$ ), y la base  $\mathcal{B}_\varphi$  del plano tangente correspondiente. Consideramos, respecto de esa base, las matrices de  $\mathbf{I}_p$ ,  $\mathbf{II}_p$  y  $d_p N$ , respectivamente:

$$Q_p = \begin{pmatrix} E_p & F_p \\ F_p & G_p \end{pmatrix}, \quad M_p = \begin{pmatrix} e_p & f_p \\ f_p & g_p \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad L_p = \begin{pmatrix} a_p & c_p \\ b_p & d_p \end{pmatrix}.$$

Si denotamos  $(\lambda, \mu)$  las coordenadas respecto de  $\mathcal{B}_\varphi$  de un vector  $\omega \in T_p S$  y  $(\lambda', \mu')$  las de  $\omega' = d_p N(\omega)$ , tenemos

$$\langle \omega, \omega' \rangle_p = (\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II}_p(\omega) = (\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{II}_p(\omega) = -\langle d_p N(\omega), \omega \rangle_p = -\langle \omega', \omega \rangle_p = -\langle \omega, \omega' \rangle_p,$$

resulta

$$(\lambda, \mu) M_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = -(\lambda, \mu) Q_p L_p \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

y en consecuencia,

$$M_p = -Q_p L_p, \quad \text{o mejor,} \quad L_p = -Q_p^{-1} M_p.$$

Así pues, calculamos  $Q_p^{-1}$  y multiplicamos por  $M_p$  para obtener los siguientes valores de los coeficientes de la matriz  $L_p$  (olvidando subíndices):

$$a = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad b = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad c = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad d = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Las expresiones anteriores, que se denominan *ecuaciones de Weingarten*, determinan por completo la aplicación de Weingarten en términos de la primera y la segunda formas fundamentales. ■

La igualdad  $M_p = -Q_p L_p$  expresa la dependencia entre las matrices de la segunda forma fundamental y la aplicación de Weingarten. Por ejemplo, si la base de  $T_p S$  es ortonormal, entonces  $M_p = -L_p$ . Y hemos visto aún más: si la base cumple el teorema espectral las dos matrices son *diagonales y opuestas*.

Las ecuaciones de Weingarten dependen por supuesto de la parametrización utilizada pero tienen la ventaja de ser fácilmente calculables a partir de dicha parametrización. Sugerimos al lector que las compruebe en todos los ejemplos habituales vistos en las lecciones anteriores: el cilindro, el paraboloides hiperbólico, el helicoides y las superficies de revolución.

Una vez obtenidas las ecuaciones de Weingarten, podemos utilizarlas para calcular todas las curvaturas.

**(10.2) Expresión en coordenadas locales de las curvaturas.** (1) Sea  $\varphi$  una parametrización de nuestra superficie  $S$ . Usando las ecuaciones de Weingarten que acabamos de obtener, se deducen las siguientes fórmulas con los coeficientes de las dos formas fundamentales (5.2, p.57, y 7.8, p.93):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K &= \det(d_p N) = ad - bc = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \\ \text{(ii)} \quad H &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(d_p N) = -\frac{1}{2}(a + d) = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Destaquemos la circunstancia sobre la que insistimos siempre: todos estos coeficientes con los que operamos dependen de  $\varphi$ , pero el resultado final son las curvaturas  $K$  y  $L$ , que no dependen.



(2) Las fórmulas anteriores muestran además que  $K$  y  $H$  son funciones *diferenciables en  $S$* . Se sigue que las curvaturas principales  $k, l = H \pm \sqrt{H^2 - K}$  son funciones *continuas*, y son diferenciables en el subconjunto abierto de  $S$  definido por la desigualdad  $H^2 \neq K$ , esto es, son *diferenciables fuera del conjunto de los puntos umbílicos*.

En particular, el conjunto de los puntos elípticos ( $K > 0$ ) es abierto en  $S$ , y también lo es el de los puntos hiperbólicos ( $K < 0$ ). Los puntos planares ( $K = H = 0$ ) forman un conjunto cerrado, así como los umbílicos ( $H^2 = K$ ). ■

El lector puede aplicar las fórmulas anteriores para confirmar los resultados de los ejemplos 9.4, p. 117.

En ocasiones es interesante utilizar parametrizaciones locales cuyas curvas coordenadas sean líneas de curvatura, que en particular son coordenadas *ortogonales*. Más adelante veremos cómo se pueden obtener. En la siguiente proposición encontramos una sencilla caracterización cuando la parametrización no cubre puntos umbílicos.

**Proposición 10.3.** *Sea  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$  una parametrización de un abierto  $W$  que no contiene puntos umbílicos. Entonces las líneas coordenadas son líneas de curvatura si y sólo si  $F = f = 0$  en todo punto de  $W$ .*

*Demostración.* Como en  $W$  no hay puntos umbílicos, la aplicación de Weingarten tiene en todo punto de  $W$  dos autovalores distintos, y por tanto direcciones principales ortogonales. Por otra parte, la condición  $F = 0$  equivale a que los vectores  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$  sean ortogonales. En consecuencia, basta probar el resultado con la hipótesis inicial de que  $F = 0$ , que hacemos a partir de aquí.

Ahora bien, las líneas coordenadas de  $\varphi$  son líneas de curvatura si y sólo si en todo punto  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$  definen direcciones principales, es decir, son autovectores de la aplicación de Weingarten. Esto equivale a que sea diagonal la matriz  $L$  de esa aplicación respecto de la base  $\mathcal{B}_\varphi$ . Pero  $L$  viene dada por las ecuaciones de Weingarten, de las que nos interesan las siguientes

$$L = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{cases} b = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = -\frac{fE}{EG}, \\ c = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = -\frac{fG}{EG} \end{cases}$$

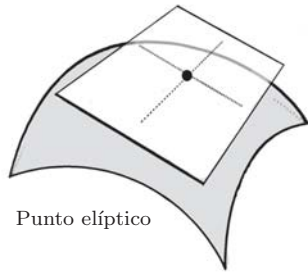
(habida cuenta que  $F = 0$ ). Así que  $L$  es diagonal si y sólo si  $fE = fG = 0$ , si y sólo si  $f = 0$ , pues  $EG > 0$ . ■

La siguiente proposición pone de manifiesto cómo el signo de la curvatura de Gauss nos permite obtener información sobre la posición relativa de la superficie y su plano tangente en un punto. Si la curvatura de Gauss en un punto es positiva, entonces todas las curvaturas normales tienen el mismo signo, lo que geoméricamente se traduce en que todas las secciones normales en ese punto se curvan hacia el mismo lado del plano tangente. Si, por el contrario, la curvatura de Gauss es negativa entonces hay curvaturas normales de signos opuestos, lo que se traduce en la existencia de secciones normales que se curvan hacia lados opuestos del plano tangente.

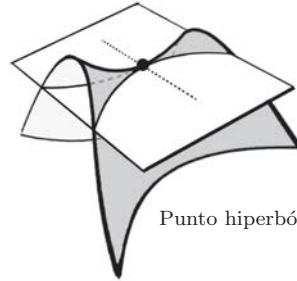
**Proposición 10.4.** *Sea  $p$  un punto de nuestra superficie orientada  $S$ .*

(1) *Si  $p$  es elíptico, entonces tiene un entorno en  $S$  cuyos puntos están todos del mismo lado del plano tangente  $T_p S$ . Además,  $p$  es el único punto de contacto entre el plano tangente y la superficie en ese entorno.*

(2) *Si  $p$  es hiperbólico, entonces en todo entorno de  $p$  existen puntos de uno y de otro lado del plano tangente  $T_p S$ .*



Punto elíptico



Punto hiperbólico

**Demostración.** Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de un entorno  $W$  de  $p$  en  $S$ , compatible con la orientación; por simplificar supondremos que  $\varphi(0,0) = p$ . Vamos a estudiar la distancia *con signo* al plano afín tangente  $p + T_p S$  de los puntos de  $W$ . Esa distancia viene dada por la función altura

$$h : U \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto (\varphi(u, v) - p)N(p).$$

(4.2, p.45). La función  $h$  es diferenciable, se anula en  $(0,0)$  y derivando se ve inmediatamente que  $h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$ . El enunciado se puede reformular diciendo:

(1) Si  $p$  es elíptico,  $h$  tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo.

(2) Si  $p$  es hiperbólico,  $h$  cambia de signo en todo entorno del origen.

De esta manera formulado, se trata de un problema de extremos de una función diferenciable en  $U$ . Vamos a explicar cómo lo resuelve el Análisis.

La función  $h$  se puede desarrollar, en un entorno del origen, en la forma:

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(0, 0) + h_u(0, 0)u + h_v(0, 0)v \\ &\quad + \frac{1}{2}(h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2) + \text{resto integral} \\ &= \frac{1}{2}(h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2) + \text{resto integral}, \end{aligned}$$

pues  $h(0, 0) = h_u(0, 0) = h_v(0, 0) = 0$ . Además, por 7.8, p. 94,

$$\begin{cases} h_{uu}(0, 0) = \langle \varphi_{uu}(0, 0), N(p) \rangle = e_p, \\ h_{uv}(0, 0) = \langle \varphi_{uv}(0, 0), N(p) \rangle = f_p, \\ h_{vv}(0, 0) = \langle \varphi_{vv}(0, 0), N(p) \rangle = g_p, \end{cases}$$

con lo que

$$h(u, v) = \frac{1}{2}(e_p u^2 + 2f_p uv + g_p v^2) + \text{resto integral}.$$

La forma cuadrática entre paréntesis es la *hessiana* de  $h$  en el origen, y el número  $e_p g_p - f_p^2$  es su *discriminante*. Es un resultado de Análisis Matemático que:

(1') Si  $e_p g_p - f_p^2 > 0$ , entonces  $h$  tiene un cero aislado en el origen y no cambia de signo en un entorno suyo. (El origen es extremo local estricto.)

(2') Si  $e_p g_p - f_p^2 < 0$ , entonces  $h$  cambia de signo en todo entorno del origen. (El origen no es extremo local.)

Dicho lo anterior, recordamos la fórmula 10.2(i), p. 132:

$$K(p) = \frac{e_p g_p - f_p^2}{E_p G_p - F_p^2},$$

y como  $E_p G_p - F_p^2 > 0$ , el punto  $p$  es:

(1'') Elíptico ( $K > 0$ ) si y sólo si  $e_p g_p - f_p^2 > 0$ .

(2'') Hiperbólico ( $K < 0$ ) si y sólo si  $e_p g_p - f_p^2 < 0$ .

En conclusión, de (1') y (1'') resulta (1), y de (2') y (2'') resulta (2). Hemos terminado. ■

Después de describir la forma de una superficie en un punto elíptico y en un punto hiperbólico, hay que analizar cuándo una superficie tiene, si es que los

tiene, puntos de esos tipos. Vemos a continuación una condición global topológica que garantiza la existencia de puntos elípticos.

**Proposición 10.5.** *Toda superficie orientada compacta tiene algún punto con curvatura de Gauss positiva.*

**Demostración.** Supongamos que  $S$  es una superficie orientada compacta, con aplicación de Gauss  $N$ . Para demostrar la proposición elegimos un punto cualquiera  $p_0 \in \mathbb{R}^3$  y consideramos la función diferenciable

$$h : S \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto \|p - p_0\|^2 \quad (4.2, \text{ p. 46}).$$

Como  $S$  es compacta, esta función  $h$  alcanza un máximo absoluto en un punto  $q \in S$  que será consecuentemente un punto crítico de  $h$ . Por tanto, para todo  $\omega \in T_q S$ :

$$0 = d_q h(\omega) = 2(q - p_0)\omega.$$

Esto significa que el vector  $q - p_0$  es ortogonal a  $T_q S$ , es decir,  $q - p_0 = \lambda N(q)$  para cierto  $\lambda \neq 0$ . Vamos a demostrar que  $q$  es un punto elíptico, es decir, que todas las curvaturas normales en  $q$  son no nulas del mismo signo (en este caso será el opuesto al de la constante  $\lambda$ ). Sea ahora  $\omega$  un vector tangente unitario en  $T_q S$ , y calculemos la curvatura normal  $\mathbf{II}_q(\omega)$ . Según vimos en la demostración del teorema de Meusnier (8.2, p. 100), se toma cualquier curva  $\alpha$  de la superficie parametrizada por el arco, que pase por  $q$ , digamos  $\alpha(t_0) = q$ , con  $\alpha'(t_0) = \omega$ , y es

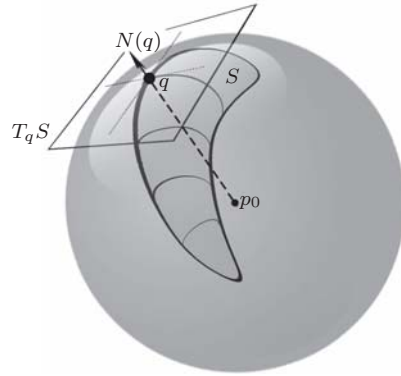
$$\mathbf{II}_q(\omega) = \langle N(q), \alpha''(t_0) \rangle.$$

Ahora bien, en nuestra situación, la función  $h \circ \alpha$  tiene un máximo en  $t = t_0$ , luego  $(h \circ \alpha)''(t_0) \leq 0$ . Derivando:

$$0 \geq (h \circ \alpha)''(t_0) = 2\|\alpha'(t_0)\|^2 + 2(\alpha(t_0) - p_0)\alpha''(t_0),$$

y puesto que  $\alpha$  está parametrizada por el arco y  $\alpha(t_0) - p_0 = q - p_0 = \lambda N(q)$  concluimos que

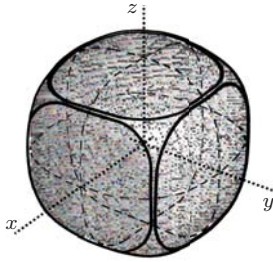
$$0 \geq 2 + 2\lambda N(q)\alpha''(t_0) = 2 + 2\lambda \mathbf{II}_q(\omega).$$



Para esto es necesario que  $\lambda \mathbf{II}_p(\omega) < 0$ , luego la curvatura normal  $\mathbf{II}_q(\omega)$  no se anula, y su signo es siempre opuesto al de  $\lambda$ . Hemos terminado. ■

Así pues, una superficie (orientada) compacta tiene siempre puntos elípticos, y puede que no tenga de otro tipo: la esfera unidad ( $K \equiv 1$ ) es el ejemplo más sencillo de ello. También hay superficies compactas que tienen puntos elípticos, parabólicos e hiperbólicos: el toro (9.4(6), p. 119). Naturalmente, si una superficie compacta conexa tiene puntos hiperbólicos, como los tiene seguro elípticos y la curvatura de Gauss es continua, también tiene puntos parabólicos. Si la superficie no es compacta, puede que tenga solamente puntos parabólicos (cilindro circular, 9.4(3), p. 118) o solamente puntos hiperbólicos (el paraboloide hiperbólico y el helicoides, 9.4(4) y (5), p. 118). Para completar la casuística veamos dos ejemplos más.

**Ejemplos 10.6.** (1) Una superficie compacta con puntos parabólicos y sin puntos hiperbólicos. Consideremos la superficie de nivel  $S \subset \mathbb{R}^3$  de ecuación  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ , que se parece mucho a la esfera unidad (y de hecho es difeomorfa a ella). Una aplicación de Gauss se obtiene del gradiente de la ecuación:



$$N(x, y, z) = \frac{(x^3, y^3, z^3)}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}.$$

Como aplicación definida en  $\mathbb{R}^3$  esta aplicación tiene la siguiente matriz jacobiana en  $p = (x, y, z)$ :

$$\frac{1}{(x^6 + y^6 + z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6 + z^6) & -3x^3y^5 & -3x^3z^5 \\ -3x^5y^3 & 3y^2(x^6 + z^6) & -3y^3z^5 \\ -3x^5z^3 & -3y^5z^3 & 3z^2(x^6 + y^6) \end{pmatrix}.$$

Así, la aplicación de Weingarten es la restricción a  $T_p S$  de la aplicación lineal definida por la matriz jacobiana anterior. Para calcular una matriz de esa restricción, elegimos en  $T_p S$  la base formada por los vectores  $\omega = (-z^3, 0, x^3)$ ,  $\omega' = (0, -z^3, y^3)$  (a partir de este momento  $z \neq 0$ ). Operando con cuidado se deduce que la matriz de la aplicación de Weingarten con respecto a esa base es

$$L_p = \frac{1}{(x^6 + y^6 + z^6)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3x^2(y^6 + z^6) + 3x^6z^2 & -3x^3y^5 + 3x^3y^3z^2 \\ -3x^5y^3 + 3x^3y^3z^2 & 3y^2(x^6 + z^6) + 3y^6z^2 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante

$$K = \frac{9x^2y^2z^2(x^{10} + y^{10} + z^{10} + x^6(y^4 + z^4) + y^6(x^4 + z^4) + z^6(x^4 + y^4))}{(x^6 + y^6 + z^6)^3}.$$

Como en  $S$  se cumple  $y^4 + z^4 = 1 - x^4$ ,  $x^4 + z^4 = 1 - y^4$ ,  $x^4 + y^4 = 1 - z^4$ , la expresión anterior se simplifica hasta quedar

$$K = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6 + y^6 + z^6)^2} \geq 0.$$

Esta fórmula vale para  $S \setminus \{z = 0\}$ , que es un subconjunto denso de  $K$ , luego por continuidad vale en toda la superficie.

Así resulta que esta superficie no tiene puntos hiperbólicos. Pero sí parabólicos: forman los tres *falsos meridianos* (pues no es una superficie de revolución)

$$S \cap \{x = 0\}, \quad S \cap \{y = 0\}, \quad S \cap \{z = 0\}.$$

(2) Una superficie no compacta con puntos parabólicos y puntos hiperbólicos. Se trata del falso paraboloides hiperbólico  $S$  de ecuación  $z = -x^4 + y^4$ . Con esta imitación se procede como con el paraboloides hiperbólico auténtico (9.4(4), p. 118), y se obtiene la curvatura de Gauss siguiente:

$$K = \frac{-144x^2y^2}{(16x^6 + 16y^6 + 1)^2} \leq 0.$$

Vemos que todos los puntos de  $S$  son hiperbólicos, excepto las dos curvas planas  $S \cap \{x = 0\}$  y  $S \cap \{y = 0\}$ , cuyos puntos son puntos parabólicos de  $S$ . ■

Terminamos la lección con un ejemplo singular de gran importancia teórica.

**(10.7) La pseudoesfera.** Existe una superficie no compacta con curvatura constante  $-1$  (luego todos los puntos son hiperbólicos): la *pseudoesfera* (prob. 8, lecc. 3, p. 41). Es la superficie de revolución  $S$  que se obtiene a partir de la *tractriz*. Recordemos que una parametrización de esta curva es:

$$u \mapsto (\sin u, \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u).$$

En lo que sigue tomaremos sólo la parte superior de la tractriz, es decir consideramos la parametrización anterior definida en el intervalo  $I = (\frac{1}{2}\pi, \pi)$ , con lo

que la parametrización es regular. Con la notación habitual para las superficies de revolución,  $S$  está parametrizada por

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \\ \zeta(u) = \sin u, \quad \xi(u) = \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u, \end{cases}$$

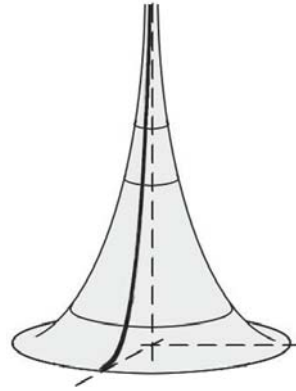
y su curvatura de Gauss es (8.10(2), p. 107):

$$K = \frac{\xi'(\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')}{\zeta(\zeta'^2 + \xi'^2)^2}$$

En nuestro caso:

$$\begin{cases} \zeta = \sin u, \quad \zeta' = \cos u, \quad \zeta'' = -\sin u, \\ \xi' = \frac{\cos^2 u}{\sin u}, \quad \xi'' = \frac{-\cos u(1+\sin^2 u)}{\sin^2 u}, \end{cases}$$

y, sustituyendo en la fórmula de  $K$ , obtenemos a la postre que la curvatura  $K$  de la pseudoesfera es constante e igual a  $-1$ .



Utilizando en lugar de la tractriz la curva

$$u \mapsto \rho(\sin u, \cos u + \log \tan \frac{1}{2}u)$$

con  $\rho > 0$  se obtiene una superficies de curvatura constante  $K = -1/\rho^2 < 0$ , que es una *pseudoesfera de curvatura  $K$* . ■

## Problemas

**Número 1.** Se considera la función  $h(u, v) = eu^2 + 2fuv + gv^2$  para ciertas constantes  $e, f, g \in \mathbb{R}$ ,  $e \neq 0$ , y se escribe  $eh(u, v) = (eu + fv)^2 + (eg - f^2)v^2$ . Probar que: (i) si  $eg - f^2 > 0$ ,  $h$  no cambia de signo en las proximidades del origen, y (ii) si  $eg - f^2 < 0$ ,  $h$  cambia de signo arbitrariamente cerca del origen.

**Número 2.** ¿Es constante la curvatura media de la pseudoesfera? Calcularla.

**Número 3.** La aplicación  $\varphi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(u, v) = (u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + vu^2, u^2 - v^2),$$

es una parametrización de una parte de la *superficie de Enneper* (ver prob.6, lecc.7, p.96). Hallar las curvaturas principales en los puntos cubiertos por esta parametrización y probar que las curvas coordenadas son líneas de curvatura.

**Número 4.** Supongamos que en un punto  $p$  de una superficie  $S$  las dos primeras formas fundamentales son proporcionales:  $\mathbf{II}_p = \lambda \mathbf{I}_p$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Probar que, entonces  $dN_p = -\lambda \text{Id}$  y, por tanto,  $p$  es un punto umbílico. Estudiar el recíproco.

**Número 5.** Sea  $S$  una superficie compacta. Probar que existe un punto de  $S$  en el que la curvatura media no se anula. Una superficie se llama *mínima* si su curvatura media es idénticamente nula. Por tanto, *no existen superficies compactas mínimas*.

**Número 6.** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por la longitud del arco y sea  $\varphi : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación definida por  $\varphi(s, t) = \alpha(s) + t\mathbf{n}(s)$ , donde  $\mathbf{n}(s)$  es el vector normal de  $\alpha$  en  $s$ .

- 1) Estudiar bajo qué condiciones  $\varphi$  define una parametrización de una superficie  $S$ .
- 2) Calcular las ecuaciones de Weingarten de esta parametrización en los puntos del tipo  $p = \varphi(s, 0)$ .

**Número 7.** Utilizar las ecuaciones de Weingarten para dar otra demostración de que las superficies conexas que tienen exclusivamente puntos planares son partes abiertas de un plano.

**Número 8.** Probar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de las secciones normales a una superficie  $S$  en un punto  $p$  es: a) un segmento finito que yace a un lado de la superficie cuando  $p$  es elíptico, b) dos segmentos infinitos, uno a cada lado de la superficie, cuando  $p$  es hiperbólico. Identificar en qué recta están contenidos los segmentos anteriores.

**Número 9.** Sea  $p$  un punto de la superficie  $S$ . La aplicación  $\mathbf{III}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\mathbf{III}_p(v) = \langle dN_p(v), dN_p(v) \rangle$  recibe el nombre de *tercera forma fundamental*. Probar que  $\mathbf{III}_p$  es una forma cuadrática que verifica la relación  $K\mathbf{I}_p - 2H\mathbf{II}_p + \mathbf{III}_p = 0$  (*teorema de Cayley-Hamilton*). Utilizar las ecuaciones de Weingarten para encontrar una expresión en coordenadas de la tercera forma fundamental.

**Número 10.** Demostrar que la curvatura de Gauss de la falsa esfera  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$  del ejemplo 10.6, p. 137, alcanza su máximo en los ocho puntos en que la esfera corta las rectas  $\pm x = \pm y = \pm z$ , y que ese máximo es  $K = 3\sqrt{3}$ . ¿Cómo se advierte su existencia en la imagen de la superficie? Esos ocho puntos se llaman *vértices*.

## Notas

1. Es conveniente hacer notar aquí que la pseudoesfera no es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^3$ . Un importante teorema de Hilbert afirma que *no existen superficies cerradas de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura negativa constante*. A efectos puramente informativos diremos que PHILLIP HARTMAN (1915–2015) y LOUIS NIRENBERG (1925–) probaron que las únicas superficies cerradas con curvatura idénticamente nula son los planos y los cilindros, y que se deduce de un teorema de KARL OTTO HEINRICH LIEBMANN (1874–1939) que las superficies cerradas de  $\mathbb{R}^3$  con curvatura constante positiva son las esferas. Hilbert daría posteriormente otra prueba diferente del resultado de Liebmann. El teorema de Hilbert sobre las superficies de curvatura negativa fue publicado en 1901 en el artículo *Über Flächen*



*von konstanter Gausscher Krümmung* y fue objeto de muchas redemostraciones, reformulaciones y generalizaciones posteriores debidas, entre otros, a ERIK ALBERT HOLMGREN (1872–1943), NIKOLAI VLADIMIROVICH EFIMOV (1910–1982) y TILLA KLOTZ MILNOR (1934–2002).

2. David Hilbert nació el 23 de Enero de 1862 en Wehlau, cerca de Königsberg, Prusia Oriental. Königsberg era la ciudad en la que Kant había vivido y trabajado toda su vida y su universidad contaba con una respetable tradición matemática. Allí estudió Hilbert y allí realizó su tesis doctoral bajo la dirección de CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN (1852–1939), bien conocido por su prueba de la trascendencia del número  $\pi$ . Desde el primer momento, Hilbert supo que su vocación era exclusivamente académica, quería dedicar su vida a las matemáticas y alcanzar la prestigiosa posición de catedrático. El puesto de catedrático en una universidad alemana tenía una consideración social e intelectual tan elevada que algunos catedráticos eran enterrados con su diploma. Hilbert desempeñó esta posición en dos universidades a lo largo de su vida. Primero en Königsberg y luego en Gotinga. Dos ilustres contemporáneos de Hilbert en Königsberg fueron HERMANN MINKOWSKI (1864–1909) y ARNOLD JOHANNES WILHELM SOMMERFELD (1868–1951), que también serían catedráticos en el futuro, el primero de ellos, colega de Hilbert en Gotinga.

3. La primera etapa de la labor investigadora de Hilbert es de naturaleza esencialmente algebraica. Había un importante problema abierto en el ámbito de los invariantes de las transformaciones algebraicas que en aquellos momentos ocupaba a muchos de los más famosos matemáticos, como JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814–1897), ARTHUR CAYLEY (1821–1895), RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833–1872) y PAUL ALBERT GORDAN (1837–1912). El problema consistía en dilucidar si existe un sistema finito de invariantes en términos de los cuales se puedan expresar todos los demás. El gran resultado de Gordan había sido demostrar que esto es así para las formas binarias. Sin embargo, el problema permaneció abierto por mucho tiempo para varias variables. Todos los intentos ensayados hasta entonces por matemáticos alemanes, franceses, ingleses e italianos fracasaban porque tenían que afrontar una insuperable complejidad algorítmica. Los artículos que se publicaban consistían exclusivamente en fórmulas que llenaban decenas de páginas. Hilbert tuvo su primer gran éxito en la resolución de este problema. Prescindió de todos los elementos superfluos y, una vez simplificado, dio una prueba de existencia. Muchos matemáticos no aceptaron este planteamiento. Gordan exigía una demostración constructiva, pues, dictaminó, la solución de Hilbert «*no son matemáticas. Es teología*». Sin embargo, algún tiempo después, Hilbert fue capaz de dar la construcción exigida por sus críticos, encontrando un sistema completo de invariantes en términos de los cuales todos los demás pueden ser representados. En su demostración Hilbert incorporaba de modo esencial su prueba anterior de existencia. Este procedimiento dio un ímpetu decisivo al empleo de los métodos existenciales en matemáticas. Gordan concedió al final: «*Me he convencido de que la teología también tiene sus méritos*». Las ideas de Hilbert trascenderían con mucho la teoría de invariantes y reaparecerían en forma abstracta y general en la teoría de cuerpos, anillos y módulos.

El modo de proceder de Hilbert se resume en la siguiente frase de Courant: «*Hilbert era un matemático concreto e intuitivo que inventó y usó el principio de que para resolver un problema el primer paso es despojarlo de todo lo que no es esencial. Simplificarlo, especializarlo tanto como se pueda sin que pierda su carácter y después resolverlo*».

4. Poco después de transformar el estado de la teoría de invariantes, Hilbert abordó una situación que había causado muchos sinsabores en algunas ramas de las matemáticas. Estaba relacionada con el llamado *principio de Dirichlet*, que era un método que permitía resolver ciertos problemas de ecuaciones en derivadas parciales transformándolos en problemas variacionales. Este principio, que fue usado por Riemann en su tesis doctoral para fundamentar su teoría geométrica de funciones, estaba basado en consideraciones físicas, pero no se conocía una demostración del mismo. KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815–1897) criticó este estado de cosas y dijo que ese procedimiento no estaba legitimado matemáticamente. Riemann no se preocupó demasiado, pues pensaba que el principio, casi obvio en situaciones físicas, se acabaría demostrando matemáticamente. Sin embargo, algunos años después de la muerte de Riemann, Weierstrass demostró que el principio no era válido y se abandonó su uso. Eso supuso un notable empobrecimiento de ciertas partes de la Física Matemática y otras ramas de las matemáticas en las que el principio era esencial. Ante esa situación, Hilbert retomó el problema 50 años después de la muerte de Riemann y probó que, asumiendo ciertas hipótesis adicionales, podía demostrar una forma del principio de Dirichlet que permitía recuperar todos los resultados de Riemann basados en él y también un uso prácticamente equivalente al del anterior en Física Matemática. A continuación Hilbert inició una etapa de estudio e investigación en el cálculo de variaciones. Sus ideas servirían para dar una nueva fundamentación al área.

5. Es imposible comentar en detalle las contribuciones de Hilbert en casi todas las ramas de las matemáticas. Muchas quedaron transformadas después de su tránsito por ellas. Su trabajo en teoría de números abrió el paso a la utilización de métodos algebraicos generales en ese campo. Su teoría de las ecuaciones integrales es un instrumento potente utilizado habitualmente en física. Su teoría de los espacios de Hilbert es un método unificador que trasciende el ámbito del análisis. Su axiomatización de los fundamentos de la geometría impulsó y organizó la investigación geométrica y tuvo, incluso, repercusiones en la física pues fue contemplada por muchos como un modelo de claridad y orden al que debería aspirar esta ciencia.

Hilbert condujo durante años, en colaboración con Minkowski, un seminario de física en Gotinga. El año 1905 estuvo dedicado al estudio de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento. Justamente ese año aparecieron unos artículos sorprendentes sobre ese tema publicados por un oscuro funcionario de la oficina de patentes en Berna llamado Albert Einstein. Minkowski reconoció inmediatamente a su antiguo alumno de la Universidad de Zurich y quedó sorprendido de que el estudiante perezoso que había rehuído sus clases fuera el autor de tal hazaña. De hecho, todos los antecedentes personales y académicos de Einstein presagiaban un futuro poco prometedor para él. Realmente Einstein cometió un error despreciando la oportunidad de formarse con Minkowski y otros de sus profesores en Zurich, como ADOLF HURWITZ (1859–1919). En su obra utilizó esencialmente las

matemáticas desarrolladas previamente por TULLIO LEVI-CIVITA (1873–1941). De hecho, Einstein no concedía gran valor a las ideas de Hilbert sobre el espacio. A partir de ese año, Minkowski se concentraría casi exclusivamente en el estudio de la electrodinámica.

**6.** Hilbert creía que la docencia era un vehículo excelente para su propia educación matemática, por lo que pasó a través de todas las materias posibles en sus explicaciones. Además pensaba que nada se entiende verdaderamente si no se estudia varias veces. De hecho, más de la mitad de cada una de sus clases estaba dedicada a repasar la clase anterior. A Hermann Weyl le aconsejaba repetir hasta cinco veces el estudio de las nuevas ideas y demostraciones. El propio Hilbert no tenía una mente rápida, lo que a menudo le creaba problemas en un entorno de matemáticos brillantes que se impacientaban ante su morosidad. A veces los seminarios se tenían que detener para que el expositor y los asistentes participasen en la tarea de hacer que Hilbert comprendiese algún concepto. RICHARD COURANT (1888–1972) dijo de él: «*Científicamente, Hilbert no entendía inmediatamente las cosas complicadas, ni las absorbía. No tenía este talento. Tenía que ir hasta el fondo de las cosas*». En una ocasión Hilbert explicó a HARALD AUGUST BOHR (1887–1951): «*Si he sido capaz de hacer algo en matemáticas, realmente se debe a que siempre las he encontrado muy difíciles. Cuando leo algo o escucho a alguien casi siempre me parece difícil y prácticamente imposible entenderlo. Siempre me pregunto si no se puede hacer más simple. Y en muchas ocasiones he encontrado que, efectivamente, es más simple*». De hecho, la simplicidad era una de las características que Hilbert exigía a un problema para que fuera realmente grande y fructífero. Según él, los problemas significativos son claros y fáciles de entender. Decía que «*lo complicado repele*».

**7.** Hilbert vivió una vida plena, rodeado del respeto y la admiración de sus colegas y estudiantes en Gotinga y disfrutando del reconocimiento internacional, que le consideraba el primer matemático del mundo después de la muerte de Poincaré. Su poderosa visión matemática le debe de haber deparado muchos momentos de satisfacción intelectual. También era un ávido apreciador de la música, a la que dedicaba mucho tiempo cada día. Eso no le evitó momentos oscuros a lo largo de su vida. En su madurez, en 1908, sufrió una profunda depresión que le llevó a ser hospitalizado por varios meses en un sanatorio de las montañas del Harz. FELIX CHRISTIAN KLEIN (1849–1925) había tenido una experiencia parecida, que le mantuvo inactivo por más de un año. Los últimos diez años de la vida de Hilbert coincidieron con el periodo nazi y tuvo que contemplar como la mayor parte de sus colegas iban desapareciendo, engullidos por el terror y el odio, hasta que no quedó nada del instituto de matemáticas en el que había pasado su vida. Murió en Gotinga el 13 de Febrero de 1943, en plena guerra mundial.

En 1962, en el centenario de su nacimiento celebrado en Gotinga, Courant pronunció las siguientes palabras: «*La matemática viva descansa en la fluctuación entre los poderes antitéticos de la intuición y de la lógica, entre la individualidad de los problemas concretos y la generalidad de las abstracciones. Debemos evitar que su desarrollo se limite a uno solo de los polos de esta antítesis vital. Hilbert ha mostrado que tales peligros se pueden evitar, que no hay diferencia entre la matemática pura y la aplicada y que se debe establecer una comunidad fructífera entre las matemáticas y la ciencia*».



---

## El teorema egregio de Gauss

---

Esta lección está dedicada a un teorema central de la teoría de superficies, como tantas otras cosas debido a Gauss: su *teorema egregio*. Ese teorema establece que *la curvatura de Gauss de una superficie es una propiedad intrínseca de la misma*. Para entender esta afirmación, aceptemos que la operación intrínseca por excelencia es la medición de longitudes de curvas de la superficie: según una imagen muy usada, unos hipotéticos habitantes de la superficie que no tengan noción del espacio exterior podrían medir esas longitudes. Consecuentemente, calificamos de intrínseco todo aquello que sólo dependa de esas longitudes. Ahora bien, y ya más rigurosamente, el conocimiento de las longitudes de las curvas de la superficie es equivalente al conocimiento de la primera forma fundamental (5.8, p.62), de manera que *intrínseco será aquello que se pueda calcular en función exclusivamente de la primera forma fundamental*. En estos términos, que la curvatura de Gauss sea intrínseca no se corresponde bien con su definición misma, que involucra la variación de la normal a la superficie en el espacio afín que la contiene; es un resultado, como mínimo, inesperado.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie orientada, con aplicación de Gauss  $N$ .

**(11.1) Triedro de Gauss y símbolos de Christoffel.** Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de un abierto  $W$  de  $S$ . Es claro que  $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ , que denominamos *triedro de Gauss*. Es la contrapartida, para superficies, del triedro de Frenet de las curvas alabeadas.

La base  $\{\varphi_{u,p}, \varphi_{v,p}, N(p)\}$  es positiva si y sólo si  $\varphi$  es compatible con la orientación, es decir, si

$$N(p) = \frac{\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}}{\|\varphi_{u,p} \wedge \varphi_{v,p}\|}.$$

En ese caso diremos que el triedro de Gauss es *positivo*. Es una forma de decir que la aplicación de Gauss se obtiene mediante el producto vectorial de  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$ .

Cualquier vector de  $\mathbb{R}^3$  se puede escribir mediante el triedro de Gauss, y

hacemos esto en particular con las derivadas segundas de la parametrización:

$$(\text{Ch}) \quad \begin{cases} \varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_{11}N, \\ \varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_{12}N, \\ \varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_{21}N, \\ \varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_{22}N. \end{cases}$$

Los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  se llaman *símbolos de Christoffel*. Como  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ , se tiene que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \quad L_{12} = L_{21}. \quad \blacksquare$$

Los términos  $L_{ij}$  son fáciles de calcular: multiplicando todas las ecuaciones por  $N$ , que es ortogonal a  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$ , obtenemos

$$L_{11} = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = e, \quad L_{12} = L_{21} = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = f, \quad L_{22} = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = g.$$

(7.8(3), p. 94); en lo sucesivo ya no escribiremos más  $L_{ij}$ , sino el valor  $e, f$  o  $g$  que corresponda. Vemos que los  $L_{ij}$  no son más que la segunda forma fundamental, y la definición hacía prever que efectivamente dependieran de ésta. Contrariamente, los símbolos de Christoffel sólo dependen de la primera forma fundamental. Para justificar esta afirmación hacen falta algunos cálculos.

**(11.2) Cálculo de los símbolos de Christoffel.** Vamos a resolver el sistema (Ch) del párrafo anterior, considerando los símbolos de Christoffel como incógnitas. Para ello se derivan sucesivamente respecto de  $u$  y respecto de  $v$  los coeficientes de la primera forma fundamental,

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle,$$

y se utilizan las ecuaciones (Ch) para hacer aparecer los  $\Gamma_{ij}^k$ . Por ejemplo, derivando respecto de  $u$  el coeficiente  $E$  resulta:

$$E_u = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = 2\langle \varphi_u, \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN \rangle = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2.$$

Al final se obtiene el sistema lineal siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_u = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle & = 2E\Gamma_{11}^1 + 2F\Gamma_{11}^2, \\ E_v = 2\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle & = 2E\Gamma_{12}^1 + 2F\Gamma_{12}^2, \\ F_u = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle & = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 + E\Gamma_{21}^1 + F\Gamma_{21}^2, \\ F_v = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle & = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 + E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ G_u = 2\langle \varphi_v, \varphi_{vu} \rangle & = 2F\Gamma_{21}^1 + 2G\Gamma_{21}^2, \\ G_v = 2\langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle & = 2F\Gamma_{22}^1 + 2G\Gamma_{22}^2. \end{array} \right.$$

Las *incógnitas*  $\Gamma_{ij}^k$  están ordenadas teniendo en cuenta las simetrías  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , de modo que en realidad hay seis incógnitas en las seis ecuaciones. La solución es única, y se obtiene operando así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}E_u = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2, \\ F_u - \frac{1}{2}E_v = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}E_v = E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2, \\ \frac{1}{2}G_u = F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} F_v - \frac{1}{2}G_u = E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2, \\ \frac{1}{2}G_v = F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2. \end{array} \right.$$

Observamos que cada uno de estos tres sistemas lineales tiene por matriz la matriz de la primera forma fundamental, que tiene determinante  $EG - F^2 > 0$ . En consecuencia, los tres sistemas tienen solución única, como anunciamos. Esas soluciones expresan los símbolos de Christoffel en función de los coeficientes  $E, F, G$ , y de sus derivadas, como habíamos anunciado. ■

El hecho que acabamos de poner de manifiesto es clave, pues significa que los símbolos de Christoffel son de naturaleza intrínseca. Pero conviene remarcar que por aparecer derivadas, esa naturaleza intrínseca no depende de conocer la primera forma fundamental en el punto, sino *en todo un entorno suyo*. Este matiz es muy importante: se depende de la primera forma fundamental *localmente*, no *puntualmente*.

Antes de revelar el papel que los símbolos de Christoffel juegan en el cálculo de la curvatura de Gauss, veamos algunos ejemplos.

**Ejemplos 11.3.** (1) En un plano afín,  $E, G \equiv 1$  y  $F \equiv 0$  (con la identidad por parametrización). Por tanto los tres sistemas de 11.2, p. 147, se reducen a

$$0 = \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2, \quad 0 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2, \quad 0 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2,$$

es decir, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos.

(2) Para la parametrización del cilindro considerada en 5.4, p.60, tenemos  $E, G \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$ , como para el plano. Así que los símbolos de Christoffel son también nulos.

(3) Consideramos la parametrización de la esfera por la latitud y la longitud:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

Según 5.5, p.60,  $E \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$  y  $G \equiv \cos^2 u$ . Los sistemas para los símbolos de Christoffel son en consecuencia:

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_{11}^1, & 0 = \cos^2 u \Gamma_{11}^2, \\ 0 = \Gamma_{12}^1, & -\sin u \cos u = \cos^2 u \Gamma_{12}^2, \\ \sin u \cos u = \Gamma_{22}^1, & 0 = \cos^2 u \Gamma_{22}^2, \end{cases}$$

de modo que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = -\tan u, \quad \Gamma_{22}^1 = \sin u \cos u.$$

(4) El helicoides  $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$ . Según 5.7, p.62,  $E = v^2 + b^2$ ,  $F \equiv 0$  y  $G \equiv 1$ . Resulta que los símbolos no nulos son

$$\Gamma_{11}^2 = -v, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{v}{v^2 + b^2}.$$

(5) Para una superficie de revolución parametrizada

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)),$$

con  $\zeta'^2 + \xi'^2 = 1$ , tenemos  $E \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$  y  $G = \zeta^2$  (5.6, p.61), y se deduce fácilmente que los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'.$$

■

Abordemos ya el hecho de que la curvatura de Gauss es un concepto de naturaleza intrínseca, en el sentido que hemos ido estableciendo previamente. Se trata de demostrar el teorema egregio de Gauss:

**Teorema 11.4.** *La curvatura de Gauss se expresa mediante la fórmula*

$$K = \frac{1}{E}(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u).$$

*En particular,  $K$  sólo depende de la primera forma fundamental.*



*Demostración.* Vamos a usar la identidad  $\varphi_{uvv} = \varphi_{vvu}$ , previo el cálculo de cada uno de sus miembros. Utilizaremos las igualdades de (Ch) y las ecuaciones de Weingarten (10.1, p.132), que recordamos aquí para facilitar la lectura:

$$\begin{cases} N_u = a\varphi_u + b\varphi_v, & N_v = c\varphi_u + d\varphi_v, \\ a = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & b = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad c = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad d = \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Empezamos por  $\varphi_{uvv}$ . Teniendo en cuenta el valor de  $\varphi_{uu}$  en (Ch) queda:

$$\begin{aligned} \varphi_{uvv} &= (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN)_v \\ &= \Gamma_{11}^1 \varphi_{uv} + \Gamma_{11}^2 \varphi_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + e_v N. \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta expresión las igualdades adecuadas de (Ch) y el valor de  $N_v$ , resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{uvv} &= \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN) + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN) + e(c\varphi_u + d\varphi_v) \\ &\quad + (\Gamma_{11}^1)_v \varphi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \varphi_v + e_v N \\ &= (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v) \varphi_u + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v) \varphi_v \\ &\quad + (\Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v) N. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \varphi_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN)_u = \dots \\ &= (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u) \varphi_u + (\Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u) \varphi_v \\ &\quad + (\Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u) N. \end{aligned}$$

Una vez obtenidas estas expresiones mediante el triedro de Gauss  $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ , como el triedro es una base, la igualdad  $\varphi_{uvv} = \varphi_{uvu}$  de las derivadas cruzadas implica que

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ec + (\Gamma_{11}^1)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fa + (\Gamma_{12}^1)_u, \\ \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ed + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 + fb + (\Gamma_{12}^2)_u, \\ \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g + e_v = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f + f_u. \end{cases}$$

Recíprocamente, estas igualdades implican, *sin apelar a que el triedro de Gauss sea una base*, que  $\varphi_{uvv} = \varphi_{uvu}$ . Dicho esto, de la segunda igualdad deducimos

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u = fb - ed.$$

Casi mágicamente, el primer miembro de esta igualdad es el largo numerador del enunciado del teorema egregio, así que bastará ver que el segundo miembro es  $EK$  (recuérdese que  $E > 0$ ). Pero por las ecuaciones de Weingarten:

$$fb - ed = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} = E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK$$

(la última igualdad por la expresión local de la fórmula de Gauss, 10.2(i), p. 132). Hemos terminado. ■

El teorema egregio tiene implicaciones profundas, de la que tal vez la más popular es el hecho de que no pueden trazarse mapas fiables de la tierra, es decir, mapas que permitan medir exactamente las distancias. Esta afirmación vale para mapas de cualquier porción de la Tierra, y no sólo para mapamundis. El hecho lo descubrió Gauss, como consecuencia de su teorema egregio, y lo formalizamos a continuación antes de entrar en la exploración más sistemática de su significado.

**(11.5) Mapas de la Tierra.** Consideramos que la Tierra es una esfera  $S$  de cierto radio  $r$ , y entendemos por *mapa* cualquier parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  de un abierto  $W$  de  $S$ . Decir que en el mapa se puedan medir distancias con exactitud es decir que la longitud de una curva  $\alpha : I \rightarrow S$  es proporcional a la de su correspondiente curva plana del mapa,  $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ , con una escala de proporcionalidad  $\rho > 0$  fija.

Supongamos por reducción al absurdo que existe tal  $\varphi$ . Fijamos un punto cualquiera  $p = \varphi(q) \in W$ ,  $q \in U$ . Para  $w \in \mathbb{R}^2$  dado, consideramos las curvas  $\beta(s) = q + sw$  y  $\alpha(s) = \varphi(q + sw)$ , ambas definidas para  $|s|$  suficientemente pequeño. Por la hipótesis sobre las distancias resulta

$$L_0^t(\alpha) = \rho L_0^t(\beta) = \rho \int_0^t \|\beta'(s)\| ds = \rho \|w\| t,$$

y por 5.8(3), p. 63,

$$\mathbf{I}_p(\alpha'(0)) = \left( \frac{d}{dt} L_0^t(\alpha) \Big|_{t=0} \right)^2 = \rho^2 \|w\|^2.$$

Ahora bien,  $\alpha'(0) = d_p \varphi(w)$ , luego para  $w = (1, 0), (0, 1)$  y  $(1, 1)$  obtenemos  $\alpha'(0) = \varphi_u, \varphi_v$  y  $\varphi_u + \varphi_v$ , con lo que

$$\begin{cases} E_p = \mathbf{I}_p(\varphi_u) = \rho^2 \|(1, 0)\|^2 = \rho^2, & G_p = \mathbf{I}_p(\varphi_v) = \rho^2 \|(0, 1)\|^2 = \rho^2, \\ F_p = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_p(\varphi_u + \varphi_v) - \mathbf{I}_p(\varphi_u) - \mathbf{I}_p(\varphi_v)) = \frac{1}{2} \rho^2 (\|(1, 1)\|^2 - \|(1, 0)\|^2 - \|(0, 1)\|^2) = 0. \end{cases}$$

Como esto vale para cualquier  $p \in W$ , concluimos que  $E, G \equiv \rho^2$  y  $F \equiv 0$ , de donde, por las fórmulas 11.2, p.146, todos los símbolos de Christoffel son idénticamente nulos en  $W$ , y por tanto  $K \equiv 0$  en  $W$  por el teorema egregio. Pero la curvatura de una esfera no es nunca nula, pues  $K \equiv 1/r^2$  (9.4(2), p.117), así que hemos llegado a una contradicción.

Concluimos que ciertamente no puede existir ningún mapa de la Tierra que conserve las distancias. O, en la práctica, que al medir distancias sobre un plano siempre hay un margen de error. ■

Para explorar las ideas que el ejemplo precedente pone en juego, y, en general, para tratar de manera organizada las cuestiones intrínsecas, se introduce el concepto de *isometría de superficies*. El epíteto isometría significa literalmente que se conservan las longitudes de curvas, pero la definición se hace en términos del producto escalar:

**Definición 11.6.** Un difeomorfismo  $h : S \rightarrow S'$  entre dos superficies se llama *isometría* si para todo  $p \in S$  y para todo par de vectores  $\omega, \omega' \in T_p S$  se tiene  $\langle d_p h(\omega), d_p h(\omega') \rangle = \langle \omega, \omega' \rangle$ .

Si existe tal  $h$ , las superficies se denominan *isométricas*.

Recordemos ahora que el producto escalar determina y es determinado por la primera forma fundamental (p.57), y que el conocimiento de ésta última equivale al de las longitudes de las curvas de la superficie (lo acabamos de utilizar). Por tanto las dos condiciones siguientes son equivalentes a que  $h : S \rightarrow S'$  sea una isometría:

$$(1) \mathbf{I}_{h(p)}(d_p h(\omega)) = \mathbf{I}_p(\omega) \text{ para cualesquiera } \omega \in T_p S \text{ y } p \in S.$$

$$(2) L_{t_0}^t(\alpha) = L_{t_0}^t(h \circ \alpha) \text{ para toda curva } \alpha \text{ de } S.$$

En especial destacamos que, según los comentarios iniciales, *las propiedades intrínsecas de las superficies se conservan por isometrías*. Analicemos esto explícitamente.

**(11.7) Conservación de la primera forma fundamental.** Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies orientadas de  $\mathbb{R}^3$ , y consideremos dos puntos  $p \in S$ ,  $p' \in S'$ .

(1) Supongamos que los dos puntos tienen entornos isométricos, es decir, tienen dos entornos  $W \subset S$  y  $W' \subset S'$ , entre los que existe una isometría  $h : W \rightarrow W'$ . Podemos suponer dada una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  del entorno

$W$  de  $p$ , y entonces  $\psi = h \circ \varphi : U \rightarrow W'$  es una parametrización de  $W'$ . De esta manera las coordenadas  $(u, v)$  de un punto de  $(x, y, z) \in W$  son las mismas que tiene su imagen  $h(x, y, z) \in W'$ , y se cumple

$$d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) = \psi_u, \quad d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) = \psi_v.$$

Calculemos los coeficientes  $E, F, G$  y  $E', F', G'$  de las primeras formas fundamentales de  $S$  y de  $S'$  en las coordenadas  $(u, v)$ , teniendo en cuenta que  $h$  es isometría:

$$\begin{cases} E' = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_u) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E, \\ F' = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_u), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = F, \\ G' = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \langle d_{(x,y,z)}h(\varphi_v), d_{(x,y,z)}h(\varphi_v) \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = G. \end{cases}$$

Esta es la forma explícita en que se presenta la conservación de la primera forma fundamental: para un punto de  $W$  y su imagen en  $W'$  coinciden todos cálculos que involucren los coeficientes de la primera forma fundamental en entorno de los puntos.

Es esencial que se tenga coincidencia en entornos y no sólo en los puntos. Ciertamente, en los cálculos importantes (símbolos de Christoffel, curvatura de Gauss) intervienen no sólo los coeficientes de la primera forma fundamental, sino también sus derivadas sucesivas: éstas coincidirán *en un punto* si los coeficientes coinciden *en un entorno*.

(2) El argumento anterior es en realidad una equivalencia. Supongamos dadas dos parametrizaciones  $\varphi : U \rightarrow W$ ,  $\psi : U \rightarrow W'$  de entornos  $W$  de  $p$  en  $S$  y  $W'$  de  $p'$  en  $S'$ , definidas en un mismo abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Si los coeficientes de las primeras formas fundamentales de las dos variedades coinciden en  $U$ , entonces  $h = \psi \circ \varphi^{-1} : W \rightarrow W'$  es una isometría.

En efecto, por hipótesis, en esas coordenadas las matrices  $Q$  y  $Q'$  de las primeras formas fundamentales  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{I}'$  coinciden (calculadas en  $(x, y, z)$  y  $h(x, y, z)$  respectivamente). Ahora, para  $\omega = \lambda\varphi_u + \mu\varphi_v \in T_{(x,y,z)}S$ , tenemos

$$d_{(x,y,z)}h(\omega) = \lambda\psi_u + \mu\psi_v,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{I}(\omega) = (\lambda, \mu)Q \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}(d_{(x,y,z)}h(\omega)) = (\lambda, \mu)Q' \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Como  $Q = Q'$ , concluimos que  $h$  es una isometría.

(3) En particular, una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  es una isometría entre el abierto  $U$  del plano y el abierto  $W$  de  $S$  si y sólo si los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de  $\varphi$  son  $E, G \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$ . ■

El problema global de si dos superficies  $S$  y  $S'$  son isométricas es un asunto muy delicado. Por supuesto, si no son homeomorfas ni difeomorfas, no pueden ser isométricas. Es el caso de una esfera y el plano, o de una esfera y un cilindro, o de un cilindro circular y el plano: la compacidad distingue la esfera, la contractibilidad distingue al cilindro circular del plano (véase también el prob. 8 de esta lección). Pero por otra parte tenemos las consideraciones anteriores, que en realidad discuten si  $S$  y  $S'$  son *localmente isométricas*. Obsérvese que dos superficies cualesquiera son siempre localmente difeomorfas, luego estamos utilizando un criterio más riguroso para distinguirlas. Por ejemplo, el hecho de que no haya mapas fiables se traduce en que una esfera y el plano no son localmente isométricos en ningún punto. En cambio, el cilindro circular y el plano lo son en todos sus puntos (por 5.4, p. 60).

Para terminar la lección, vamos a presentar la variante de la noción de isometría que está detrás del concepto de mapa fiable como hemos explicado en 11.5, p. 150. Desde aquel punto de vista, las isometrías son demasiado exigentes, y se introduce la siguiente:

**Definición 11.8.** Sea  $\rho > 0$  un número real positivo. Un difeomorfismo  $h : S \rightarrow S'$  entre dos superficies se llama *semejanza de escala  $\rho$*  si para todo  $p \in S$  y para todo par de vectores  $\omega, \omega' \in T_p S$  se tiene  $\langle d_p h(\omega), d_p h(\omega') \rangle = \rho^2 \langle \omega, \omega' \rangle$ .

Si existe tal  $h$ , las superficies se denominan *semejantes*.

No entraremos en detalles, pero es fácil ver que esto equivale a que  $h$  multiplica las longitudes de las curvas por la escala  $\rho$ , como queríamos para los mapas. También tenemos la correspondiente noción de semejanza local, que no formalizamos. Ahora es claro que la imposibilidad de mapas fiables significa que en ningún punto es una esfera localmente semejante al plano.

Ilustramos las propiedades de las semejanzas con un resultado sencillo (del que ya hemos visto un ejemplo en 10.7, p. 139):

**Proposición 11.9.** Sea  $h : S \rightarrow S'$  una semejanza de escala  $\rho$ . Entonces las curvaturas de Gauss  $K$  y  $K'$  de las superficies cumplen

$$K'(h(p)) = K(p)/\rho^2 \quad \text{para todo } p \in S.$$

**Demostración.** Que  $h$  sea una semejanza de escala  $\rho$  implica que

$$\mathbf{I}_{h(p)}(d_p h(\omega)) = \rho^2 \mathbf{I}_p(\omega)$$

para  $\omega \in T_p S$  y  $p \in S$ . Localizando  $h$  como en 11.7(1), p.151, el resultado ahora es que los coeficientes de la primera forma fundamental de  $S'$  se obtienen multiplicando por  $\rho^2$  los de  $S$ . Esto no afecta a los sistemas 11.2, p.147, que proporcionan los símbolos de Christoffel, que en consecuencia son exactamente iguales para las dos superficies. Así que al aplicar la fórmula del teorema egregio para calcular  $K$  y  $K'$ , tenemos el mismo numerador y denominadores  $E$  y  $E' = \rho^2 E$  respectivamente. Concluimos que  $K' = K/\rho^2$ . ■

Digamos para terminar que en realidad las semejanzas no son muy diferentes de las isometrías, y su estudio se puede referir al de éstas (prob. 10 de esta lección).

## Problemas

**Número 1.** Comprobar que los símbolos de Christoffel de una superficie topográfica  $z = f(x, y)$  para su parametrización de Monge son

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xx}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xx}, \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{xy}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\delta} f_x f_{yy}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{xy}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{\delta} f_y f_{yy}. \end{cases}$$

donde  $\delta = 1 + \|\nabla f\|^2$ .

**Número 2.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  superficies y  $h : S_1 \rightarrow S_2$  una aplicación diferenciable. Se dice que  $h$  es una *isometría local* si para todo punto  $p \in S_1$  existen un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $S_1$  y un entorno abierto  $V$  de  $h(p)$  en  $S_2$  tales que  $h|U : U \rightarrow V$  es una isometría. Probar que  $h$  es una isometría local si y sólo si conserva la longitud de los vectores tangentes de las curvas  $\alpha : I \rightarrow S_1$  o, equivalentemente, si y sólo si conserva las longitudes de tales curvas.

**Número 3.** La noción anterior puede ser generalizada del siguiente modo: se dice que  $S_1$  es *localmente isométrica* a  $S_2$  si todo punto  $p \in S_1$  tiene un entorno abierto  $U$  en  $S_1$  isométrico a un abierto de  $S_2$ . Encontrar dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  tales que  $S_1$  sea localmente isométrica a  $S_2$  pero  $S_2$  no sea localmente isométrica a  $S_1$ .

**Número 4.** Mostrar que la parametrización  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  del cilindro  $S : x^2 + y^2 = 1$  es una isometría local cuyo efecto es envolver el plano alrededor del cilindro de modo que las líneas horizontales van a las secciones circulares del cilindro y las verticales se transforman en las generatrices del mismo.

**Número 5.** Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de una superficie conexa  $S$  y consideremos la colección de todas las curvas  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(1) = q$ . Se llama *distancia intrínseca* de  $p$  a

$q$  al ínfimo de las longitudes de todas esas curvas  $\alpha$ . Probar que las isometrías locales pueden disminuir pero no aumentar la distancia intrínseca.

**Número 6.** Sea  $S$  una superficie con una parametrización global  $\varphi : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow S$  tal que los coeficientes de la primera forma fundamental son  $E(u, v) = G(u, v) = v$ ,  $F(u, v) = 0$ . Probar que  $S$  no es localmente isométrica a una esfera.

**Número 7.** Las parametrizaciones

$$\begin{cases} \varphi : (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \rightarrow S, & \varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u), \\ \psi : (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \rightarrow \tilde{S}, & \psi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \log v), \end{cases}$$

definen respectivamente una parte abierta del helicoides y una superficie de revolución. Demostrar que  $K \circ \varphi = \tilde{K} \circ \psi$ , donde  $K$  y  $\tilde{K}$  denotan las correspondientes curvaturas de Gauss, y que  $\psi \circ \varphi^{-1}$  no es una isometría. Por tanto, *un difeomorfismo que conserva la curvatura de Gauss puede no ser una isometría*.

**Número 8.** Demostrar que en el plano el complementario de un conjunto compacto sólo tiene una componente conexa no acotada (con adherencia no compacta). Deducir que un cilindro no es homeomorfo al plano.

**Número 9.** Sea  $S$  la falsa esfera  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ . Se llaman *polos* los seis puntos de intersección de los tres *meridianos* de  $S$  definidos por  $x = 0, y = 0, z = 0$ , y se llaman *vértices* los ocho puntos de  $S$  en las rectas  $\pm x = \pm y = \pm z$ . Resulta que *las isometrías  $h : S \rightarrow S$  son las restricciones de los 24 movimientos (simetrías y rotaciones) de  $\mathbb{R}^3$  que permutan esos vértices*. Para entender por qué, recuérdese que los meridianos son los puntos de curvatura nula (10.6, p. 137) y los vértices los de curvatura máxima (prob. 10, lecc. 10, p. 140), y justifíquese sucesivamente que, por conservar curvatura y longitudes: (i)  $h$  deja invariante la unión de los meridianos y permuta los vértices, y por ello también permuta los polos, (ii) existe un movimiento  $\varrho$  de esos 24 que devuelve los vértices a su lugar, y consecuentemente también los polos, (iii) la composición  $\varrho_i \circ h$  deja fijos todos los puntos de los meridianos, y a la postre es la identidad en  $S$ .

**Número 10.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie y  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una homotecia afín de razón  $\rho$  y centro  $q \in \mathbb{R}^3$  (esto es,  $T(p) = q + \rho(p - q)$ ). Demostrar que  $S' = T(S)$  es una superficie diferenciable y que  $h = T|_S : S \rightarrow S'$  es una semejanza de razón  $\rho$ . Mostrar que toda semejanza entre dos superficies es composición de una isometría y una semejanza del tipo anterior.

## Notas

1. Gauss nació el 30 de Abril de 1777 en Brunswick (o Braunschweig), Alemania, en el seno de una familia muy humilde. Su padre era albañil y se opuso en todo momento a que su hijo adquiriese una educación esmerada, a pesar de que desde su niñez dio pruebas de una capacidad muy fuera de lo común. Afortunadamente, pudo realizar sus estudios contando con la ayuda de Carl Wilhem Ferdinand, duque de Brunswick, desde que éste tuvo noticia de las excepcionales dotes del joven Gauss. El duque pagó sus estudios en el Collegium Carolinum, donde Gauss estudió a partir de los 15 años y se familiarizó con

las lenguas clásicas y con los trabajos de Euler, Lagrange y Newton. Allí comenzó, por sus propios medios, sus investigaciones en Aritmética, pero al mismo tiempo sentía una fuerte atracción por la Filología, de modo que cuando se matriculó en la Universidad de Gotinga a los 18 años, también con la ayuda del duque, aún no había decidido cual sería el rumbo de sus estudios. Esta Universidad había sido fundada en 1737 por el rey Jorge II de Inglaterra, del cual tomó el nombre de Georgia Augusta. La preferencia de Gauss por esta universidad estaba motivada por su biblioteca, que estaba bien provista en las disciplinas que le interesaban. Se conserva la lista de libros que tomó prestados durante sus estudios, entre los años 1795 y 1798. Allí están presentes obras de la antigüedad clásica, por ejemplo de LUCIANO DE SAMOSATA (125–181) y MARCO TULIO CICERÓN (106–43 a.C.), y de maestros de la matemática como Euler, Newton, PIERRE DE FERMAT (1601–1665) y EDWARD WARING (1736–1798), que progresivamente van imponiéndose en sus preferencias.

2. Gauss se decantó por las matemáticas a pesar de que el nivel en Gotinga era relativamente mediocre. El profesor de matemáticas allí era ABRAHAM GOTTHELF KÄSTNER (1719–1800) pero Gauss fue estimulado en mayor medida por el físico GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG (1744–1799). Se conoce la fecha en que Gauss tomó la decisión de dedicarse a las matemáticas: fue el 30 de Marzo de 1796, exactamente el día en que descubrió que el polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás, un descubrimiento geométrico que reposa en una comprensión profunda de la naturaleza algebraica del problema. Gauss tenía 18 años y este resultado es el primero que aparece en su diario matemático (*Notizenjournal*), uno de los documentos más importantes de la historia de las matemáticas. Siempre consideró que este era uno de sus mejores descubrimientos y deseaba que adornase su tumba, cosa que no sucedió, aunque sí que aparece un dibujo en la base del monumento dedicado a él en Brunswick. El mismo año 1796 Gauss registra en su diario 49 entradas, y 33 el año siguiente, la mayor parte de ellas relativas a la teoría de números y el álgebra. En total aparecen 146 entradas con enunciados muy breves que demuestran su prioridad en muchos descubrimientos atribuidos a otros y que él nunca reclamó como suyos, pues el diario era un documento estrictamente privado. Solamente en 1898, cuarenta y tres años después de la muerte de Gauss, se conocería la magnitud de su labor oculta. Muchos de estos resultados nunca aparecieron publicados porque no los consideraba suficientemente pulidos. No eran, aún, una obra de arte perfecta, que fue a lo que aspiró siempre, fiel a su máxima *Pauca sed matura*. Según él, el resultado final no debía conservar ninguna huella de la larga batalla que había sido necesaria para obtenerlo. De este modo, la perfección lograda por Gauss no era de fácil acceso. Sólo los más dotados entre sus contemporáneos podían entenderle. El resto hubo de esperar a que éstos interpretasen sus resultados y los hicieran comprensibles para ellos.

Los tres años de estudio en la Universidad de Gotinga fueron los más prolíficos de la existencia de Gauss. Además allí comenzó su amistad con WOLFGANG FARKAS BOLYAI (1775–1856), una amistad que duraría toda su vida. Irónicamente, el hijo de Bolyai, JÁNOS (JOHANN) BOLYAI (1802–1860), estaba destinado a recorrer un camino a través



de la Geometría no-Euclídea que ya había sido recorrido por Gauss previamente, aunque János, igual que el resto de la humanidad, desconocía en aquellos momentos este hecho.

3. Los años de Gotinga produjeron un fruto maduro, las *Disquisitiones Arithmeticae*, aunque el libro tardaría algunos años en ser publicado. Los temas tratados son la teoría de congruencias, la teoría de los residuos cuadráticos, en particular la *ley de reciprocidad cuadrática*, la teoría de formas binarias cuadráticas y diversas aplicaciones, por ejemplo una discusión de la ecuación algebraica  $x^n = 1$ . En esta obra la teoría de números, que había sido hasta el momento un agregado de resultados inconexos, asumió por primera vez coherencia y orden, adoptando una estructura propia. Como todas las obras de Gauss las *Disquisitiones* no son de fácil lectura. Dirichlet solía leer un párrafo antes de irse a la cama y dormía con el libro bajo su almohada. Frecuentemente se despertaba en medio de la noche y descubría que después de releer el párrafo lograba, por fin, entenderlo. En el libro no se discute el *teorema de Fermat*. Gauss confesaba que este problema tenía poco interés para él por tratarse de una proposición aislada, y que se podrían enunciar muchas proposiciones semejantes con un nivel parecido de dificultad. El libro fue completado el otoño de 1798 durante una estancia en la Universidad de Helmstedt en la que Gauss residió en casa de JOHANN FRIEDRICH PFAFF (1765–1825), el matemático alemán más conocido de su tiempo.

4. El siguiente paso en la carrera matemática de Gauss sería en una dirección completamente diferente. A principios del siglo XIX el astrónomo de Palermo GIUSEPPE PIAZZI (1746–1826) descubrió un pequeño planeta, que recibiría el nombre de Ceres, y que aumentaría a 8 el número de planetas conocidos. Ceres se encontraba en una posición que hacía muy difícil su observación y que convertía el cálculo de su trayectoria en un reto matemático de primer orden. Gauss realizó ese cálculo con éxito, lo que le valió un reconocimiento instantáneo, mucho mayor del conseguido con sus *Disquisitiones*, aun cuando el valor de esta obra es incomparablemente superior. A partir de este momento, Gauss dedicaría una gran parte de su tiempo a cálculos astronómicos y publicaría un libro titulado *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* sobre la determinación de las órbitas de los planetas a partir de datos observados. Su labor en este campo le valió el nombramiento de director del observatorio astronómico de Gotinga. Es paradójico que el descubrimiento de Ceres había sido precedido, poco tiempo antes, por un ensayo de Hegel en el que atacaba a los astrónomos por su presuntuosa búsqueda de un octavo planeta cuando, según él, razonamientos filosóficos llevaban a concluir que el número de planetas ha de ser exactamente siete. Este hecho y los escritos de Kant acerca de la naturaleza del espacio llevarían a Gauss muchos años después, cuando ya había desarrollado los fundamentos de su Geometría no-Euclídea, a cuestionarse las opiniones científicas de los filósofos y en particular de Kant, cuyas distinciones entre proposiciones analíticas y sintéticas consideraba triviales o falsas. Estos hechos, sin embargo, no afectaban a su respeto por las cuestiones verdaderamente filosóficas y, a pesar de todo, manifestaba aprecio hacia la filosofía.

5. El trabajo en el observatorio requería una dedicación constante a cuestiones prácticas, a las que Gauss se entregaba con placer. Así inventó un aparato, el *heliotropo*, utilizado en

Geodesia para transmitir señales por medio de la luz reflejada, y el *telégrafo eléctrico*, con el cual se comunicaba con su colega WILHELM EDUARD WEBER (1804–1891). La obra de Gauss sobre superficies está motivada por su trabajo en mediciones geodésicas, para el cual había sido comisionado por los gobiernos de Hannover y Dinamarca. Los resultados fundamentales sobre superficies aparecen en *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, donde Gauss utilizó de forma sistemática las representaciones paramétricas mediante coordenadas curvilineas. La noción fundamental allí estudiada, la curvatura de Gauss, es una propiedad intrínseca de la superficie y por ello se puede calcular a través de mediciones en la propia superficie, sin prestar atención al espacio ambiente. Cualquier deformación isométrica puede modificar la forma de la superficie, pero no la curvatura de Gauss en un punto. El propio Gauss comentaba a este respecto que si consideramos a las superficies como flexibles pero no extensibles, entonces existen propiedades que presuponen una forma definida de la superficie en el espacio, mientras que otras son independientes de las diversas formas que la superficie puede adquirir en el espacio. El teorema egregio establece mediante una fórmula explícita que la curvatura de Gauss es precisamente del segundo tipo. Gauss llegó a ella en 1825, tras varias páginas de cálculos, y en ella basó gran parte de su desarrollo de la teoría de superficies. No resistimos la tentación de reproducir aquí el texto original de Gauss en latín, en el que manifiesta la importancia de su hallazgo: «*Formula itaque articuli precedentis sponte perducit ad egregium THEOREMA. Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur curvaturae in singulis punctis invariata manet*». Poco después comenzaría sus investigaciones en el campo de la Geometría no-Euclídea. No es posible comentar aquí las muy numerosas contribuciones de Gauss a las Matemáticas y a la Física, que van desde la teoría de series (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*) y la integración hasta el estudio del magnetismo terrestre, pasando por el estudio de los estimadores estadísticos.

**6.** Gauss no tenía unas obligaciones docentes definidas en la Universidad de Gotinga, aunque se esperaba de él que participase en las enseñanzas oficiales. De este modo, explicó cursos de Astronomía, Geodesia, Teoría de Números, Teoría de Superficies, Teoría de Probabilidades, Magnetismo, Ecuaciones Numéricas y Cristalografía. Esa actividad no le complacía. En una carta a HEINRICH WILHELM MATTHÄUS OLBERS (1758–1840) manifiesta profesar *verdadera aversión hacia la enseñanza*, actividad que considera de escasa utilidad pues la mayoría de los estudiantes adquieren, según él, una información superficial y los verdaderamente dotados no se sienten atraídos por las clases, sino que aspiran a formarse a sí mismos. Por otra parte, en una carta de 1808 a Bolyai afirmaba que no es el conocimiento y su posesión lo que proporciona placer, sino el acto de aprender y de adquirirlo el que garantiza el máximo gozo. También decía: «*Cuando he clarificado y agotado completamente un tema, me aparto de él y me sumerjo nuevamente en la oscuridad*». No se complacía en la visión de una estructura ya completa sino que ansiaba comenzar la construcción de otra.

Fuera de su actividad científica, Gauss tenía una gran afición a la lectura. Estimaba la literatura rusa, que ponía a la altura de la inglesa, su preferida. Los lenguajes eran muy importantes para él. Para conservar la plasticidad de su mente adquiriría un nuevo

lenguaje. A los 62 años comenzó con el ruso por sus propios medios como un recurso para conservar su mente joven. También se mantenía al tanto de la política internacional leyendo el Times de Londres en el museo literario de Gotinga. Su punto de vista era conservador y hechos como la revolución de París de 1848 le horrorizaban.

Gauss obtuvo todos los honores académicos y científicos posibles. En la relación confeccionada por GUY WALDO DUNNINGTON (1906–1974) se enumeran 72 nombramientos y reconocimientos honoríficos de Universidades, Academias e instituciones científicas de todo el mundo. De especial interés para la Matemática española es su nombramiento en 1850 como Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias. Una de sus últimas actividades científicas fue su participación en el tribunal que juzgó la tesis de habilitación de Riemann. Gauss murió apaciblemente en 1855 a los 77 años de edad.

---

## Geodésicas (I)

---

Esta es una lección sobre ciertas curvas de las superficies, las *geodésicas*, que juegan un papel análogo al de las rectas en el plano. La analogía se refiere a diversos aspectos, unos de naturaleza cinemática, otros más geométricos.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable.

Desde un punto de vista cinemático, una recta del plano, recorrida con velocidad constante, puede ser vista como una curva plana regular  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  con aceleración  $\beta''$  idénticamente nula. Podríamos sentirnos tentados de extender esta definición, sin cambios, a las superficies y adoptarla como definición de geodésica. Ahora bien, una curva regular  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow S$  en una superficie cualquiera  $S$  tal que  $\beta'' \equiv 0$  es también una recta (de  $\mathbb{R}^3$ ), por lo que, si adoptásemos esta definición, las geodésicas serían simplemente las rectas contenidas en la superficie. Sin embargo, para un hipotético ser bidimensional que habitase en la superficie, una trayectoria  $\alpha$  descrita por un punto material sería percibida como una recta si cumpliera la condición más débil de ser idénticamente nula la componente de  $\alpha''$  que ese ser puede percibir, que es la tangencial. Esta condición equivale a que  $\alpha''$  sea ortogonal al plano tangente, esto es, coincida con su componente normal, que es la responsable de mantener el punto en la superficie. Esta es una motivación para la definición habitual de geodésica, que damos a continuación.

**Definición 15.1.** Una *geodésica* de la superficie  $S$  es una curva regular  $\alpha : I \rightarrow S$  tal que  $\alpha''(t)$  es perpendicular a  $T_p S$  para todo  $p = \alpha(t)$ .

La primera proposición nos dice que si una curva es geodésica entonces el módulo de su velocidad es constante.

**Proposición 15.2.** Si  $\alpha$  es una geodésica de  $S$  entonces  $\|\alpha'(t)\| \equiv c$  para cierta constante  $c > 0$ .

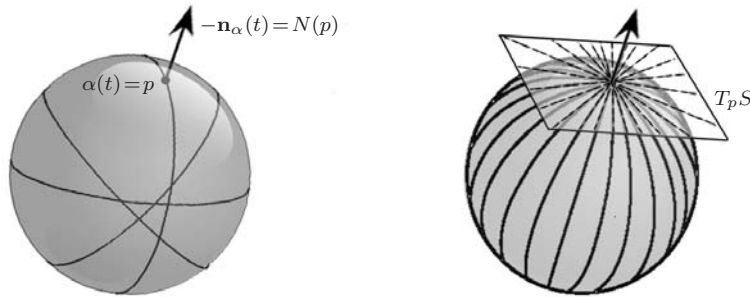
*Demostración.* La derivada de  $\|\alpha'(t)\|^2$  es  $2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0$ , ya que  $\alpha''(t)$  es perpendicular a  $T_{\alpha(t)} S$ . En consecuencia la función  $\|\alpha'(t)\|^2$  es constante, y por tanto también lo es  $\|\alpha'(t)\|$ . ■

A la vista de este resultado, haciendo el cambio de parámetro  $s = ct$  se consigue que  $\alpha$  esté parametrizada por la longitud del arco. Nótese que las geodésicas tienen su vector normal proporcional al de la superficie, propiedad que es característica para las curvas parametrizadas por la longitud del arco. Teniendo todo esto en cuenta, *una curva no parametrizada por el arco se considera geodésica si reparametrizada por el arco lo es.*

**Ejemplos 15.3.** (1) Si  $\alpha : I \rightarrow S$  tiene una ecuación  $\alpha(t) = c + at$ , es decir, si es una recta en la superficie, entonces su segunda derivada es idénticamente nula y la curva es una geodésica. Si  $S$  es un plano afín, entonces no hay más geodésicas que las rectas.

En efecto, un plano afín tendrá una ecuación  $ax + by + cz = d$ , y  $(a, b, c)$  es un vector ortogonal a  $S$  en todos sus puntos. Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es una curva del plano, se cumple  $ax(t) + by(t) + cz(t) = d$ , y derivando  $ax''(t) + by''(t) + cz''(t) = 0$ . Pero si la curva es una geodésica, el vector  $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$  debe ser ortogonal al plano, luego proporcional a  $(a, b, c)$ , digamos  $\alpha''(t) = \rho(t)(a, b, c)$ . Sustituyendo en la igualdad anterior deducimos que  $\rho(t)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ , luego  $\rho \equiv 0$  y  $\alpha'' \equiv 0$ . En consecuencia,  $\alpha' \equiv \omega$  para cierto vector  $\omega \in \mathbb{R}^3$ , y  $\alpha(t) = p + \omega t$  para un punto  $p \in \mathbb{R}^3$ . Es decir,  $\alpha$  es una recta.

(2) Cualquier círculo máximo  $\alpha : I \rightarrow S$  de una esfera  $S$  es una geodésica, pues su vector normal  $\mathbf{n}_\alpha(t)$  en  $p = \alpha(t)$  es igual u opuesto al normal  $N(p)$  de la esfera en ese punto. En particular vemos que por todos los puntos de la esfera pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.



Veamos que no hay otras geodésicas. Denotamos  $q$  el centro de  $S$  y  $r$  su radio. Sea  $\alpha(s)$  una geodésica parametrizada por el arco. Por ser  $\alpha$  geodésica,  $\alpha''$  es ortogonal a la esfera, es decir, proporcional a  $\alpha - q$ , digamos  $\alpha'' = \rho(\alpha - q)$ . Por

tanto el vector normal de la curva es

$$\mathbf{n}_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\rho(\alpha - q)}{\|\rho(\alpha - q)\|} = \pm \frac{1}{r}(\alpha - q),$$

y su derivada

$$\mathbf{n}'_\alpha = \pm \frac{1}{r}\alpha' = \pm \frac{1}{r}\mathbf{t}_\alpha.$$

De la tercera fórmula de Frenet se sigue que  $\alpha$  tiene torsión nula, luego es plana, y su curvatura es constante  $1/r$ . Concluimos que es una circunferencia de radio  $r$ , y como está contenida en  $S$ , tiene que ser uno de sus círculos máximos.

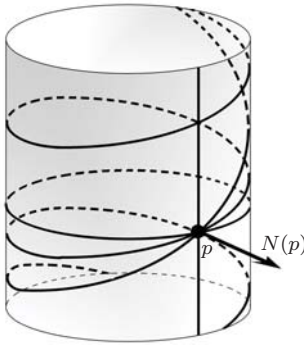
(3) Consideremos el cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = 1$ . Recordemos que en un punto  $p = (x, y, z) \in S$ , un vector normal es  $N(p) = (x, y, 0)$ . Es claro que las rectas verticales son geodésicas, y también que lo son las circunferencias  $S \cap \{z = z_0\}$ .

Más interesante es señalar que las hélices

$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \sin(c + at), d + bt),$$

(con  $a, b \neq 0$ ), son geodésicas, pues

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= (-a^2 \cos(c + at), -a^2 \sin(c + at), 0) \\ &= -a^2(x, y, 0). \end{aligned}$$



Fijemos el punto  $p = \alpha(0) = (\cos c, \sin c, d)$ . Por ese punto pasan: (i) una recta vertical con tangente  $(0, 0, 1)$ , (ii) una circunferencia  $z = d$  con tangente  $(-y, x, 0)$ , y (iii) todas las hélices anteriores con

tangente  $(-ay, ax, b)$ . Hemos enumerado así todas las direcciones tangentes al cilindro en  $p$ , y podemos concluir que por  $p$  pasan geodésicas con todas las posibles direcciones tangentes.

(4) Sea  $S$  el paraboloides hiperbólico  $z = -x^2 + y^2$ . Vamos a enumerar algunas geodésicas de  $S$  y algunas curvas que no pueden serlo. El plano tangente a  $S$  en el origen (que es un punto de  $S$ ) es  $z = 0$ , y su intersección con  $S$  es el par de rectas  $x = \pm y$ , que serán dos geodésicas. Afirmamos que otras dos geodésicas son las parábolas  $z + x^2 = y = 0$  y  $z - y^2 = x = 0$ . Como los cálculos son completamente análogos, los detallamos para la segunda.

La parametrización más sencilla de  $z - y^2 = x = 0$  es  $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ , pero no es una parametrización por el arco. Así pues, será  $\alpha(s) = \gamma(t)$  con un cambio de parámetro  $t = t(s)$ . Vamos a calcular  $\alpha''(s)$  sin explicitar ese cambio de

parámetro. Entonces,

$$\alpha'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{(0, 1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}},$$

y podemos derivar

$$\alpha''(s) = t' \frac{d}{dt} \frac{(0, 1, 2t)}{\sqrt{1+4t^2}} = t' \frac{(0, -4t, 2)}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

Ahora bien, un vector ortogonal a  $S$  en  $p = (x, y, z)$  es  $N(p) = (2x, -2y, 1)$  (no hace falta un vector unitario para estudiar ortogonalidades), luego como para nuestro  $p$  es  $x = 0, y = t$ , el vector  $\alpha''(s)$  es proporcional a  $N(p)$  y hemos terminado.

(5) El helicoides  $S \subset \mathbb{R}^3$  parametrizado por  $x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$ , contiene las rectas perpendiculares al eje vertical que pasan por el punto  $(x, y, z)$ , y por tanto esas rectas son geodésicas. El helicoides también contiene las hélices  $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , pero estas curvas *no son geodésicas*. Como  $\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$  tiene norma constante ( $\|\alpha'\| \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$ ) no hace falta reparametrizar, y tenemos

$$\alpha''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Este vector es tangente al helicoides, luego la hélice no es geodésica. ■

Volvamos a nuestra superficie  $S$ , con aplicación de Gauss  $N$ .

**(15.4) Curvatura geodésica.** Sea  $\alpha(s)$  una curva de  $S$ , parametrizada por la longitud del arco. Consideremos un punto  $p = \alpha(s) \in S$ .

(1) El vector unitario  $\alpha'(s)$  es tangente a la superficie en  $p$ , y también lo es el vector unitario  $N(p) \wedge \alpha'(s)$ . Este último vector es además ortogonal a la curva en  $p$ , se denomina *vector normal intrínseco* de  $\alpha$  en  $p$ , y se denota  $\mathbf{n}_i(s)$ .

Así tenemos los tres vectores  $\alpha'(s), \mathbf{n}_i(s)$  y  $N(p)$ , que por construcción son una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ . Por ello,

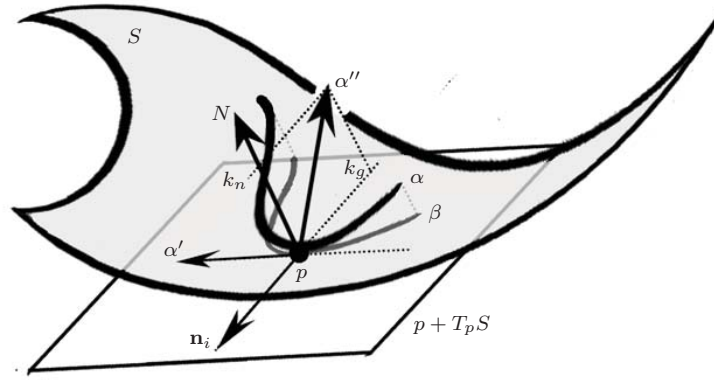
$$\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle \alpha'(s) + \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle \mathbf{n}_i(s) + \langle \alpha''(s), N(p) \rangle N(p).$$

De estos coeficientes sabemos que el primero es 0, por ser  $s$  el arco, y el último es la curvatura normal de  $S$  según la dirección de  $\alpha$  en  $p$ . Escribiremos

$$\alpha''(s) = k_g(s) \mathbf{n}_i(s) + k_n(s) N(p)$$

y denominaremos al coeficiente  $k_g(s) = \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle$  *curvatura geodésica de  $\alpha$  en  $p$* .

El vector  $k_n(s)N(p)$  es la proyección ortogonal sobre la normal en  $p$ , y el vector  $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$  es la proyección ortogonal de  $\alpha''(s)$  sobre el plano  $T_p S$  tangente en  $p$ .



(2) Sea ahora  $\beta$  la curva plana obtenida proyectando  $\alpha$  sobre el plano afín tangente  $p + T_p S$ . Como la proyección ortogonal de punto  $q \in \mathbb{R}^3$  sobre  $p + T_p S$  es

$$\pi_p(q) = q - \langle q - p, N(p) \rangle N(p),$$

la curva plana en cuestión es  $\beta = \pi_p \circ \alpha$ . De la fórmula de anterior para  $\pi_p$  se deduce que

$$\beta''(s) = \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), N(p) \rangle N(p) = \alpha''(s) - k_n(s)N(p) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s),$$

y en consecuencia,  $k_g(s)$  es la curvatura de  $\beta$  en  $p$  (para la orientación adecuada).

(3) Puesto que  $\mathbf{n}_i(s)$  y  $N(p)$  son ortogonales unitarios, la curvatura de  $\alpha$  se expresa muy sencillamente:

$$\kappa_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{k_g^2(s) + k_n^2(s)}.$$

Insistiendo sobre la interpretación de los conceptos anteriores, analicemos qué dos sumandos aparecen en

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(p).$$



El primero puede ser entendido como la parte del vector curvatura  $\alpha''(s)$  que se puede percibir en la superficie, pues yace en el plano tangente a ella. Se entiende que, desde el punto de vista de la superficie, la componente normal de  $\alpha''(s)$  no aporta ninguna contribución a la curvatura, pues su función es mantener la curva en  $S$ . De este modo, tan sólo la curvatura geodésica se entendería como una verdadera curvatura *en la superficie*.

Si una curva regular no está parametrizada por la longitud del arco, definimos su curvatura geodésica como la de su reparametrización por la longitud del arco *mediante un cambio de parámetro positivo*. Es fácil ver que esta definición es consistente. También es fácil ver que si el cambio es negativo, la curvatura geodésica cambia de signo. Se tiene la siguiente caracterización de las geodésicas.

**Proposición 15.5.** *Una curva regular  $\alpha$  es una geodésica si y sólo cumple una de las dos condiciones equivalentes siguientes:*

- (i) *La curvatura geodésica de  $\alpha$  es idénticamente nula.*
- (ii) *La curvatura de  $\alpha$  es igual al valor absoluto de su curvatura normal en la superficie.*

**Demostración.** Una curva es geodésica si y sólo si lo es al reparametrizarla por el arco, y las dos condiciones del enunciado no dependen de la parametrización. Por tanto, podemos suponer que  $\alpha$  está parametrizada por el arco, y tenemos

$$\alpha''(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s) + k_n(s)N(\alpha(s)) \quad (15.4(1), \text{ p. 208}).$$

Decir que  $\alpha$  es una geodésica equivale a que la componente tangencial  $k_g(s)\mathbf{n}_i(s)$  se anule para todo  $s$ , o sea, que la curvatura geodésica  $k_g(s)$  sea idénticamente nula. Esta es la condición (i), que equivale a la (ii) porque  $\kappa_\alpha^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s)$  (15.4(3), p. 209). ■

**Ejemplo 15.6.** Sea  $S$  una superficie de revolución. En 8.10(1), p. 106, se probó que la curvatura normal de un meridiano coincide con su curvatura, luego es una geodésica. En cuanto a los paralelos (*loc. cit.*), curvatura y curvatura normal coinciden si y sólo si corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical: es pues en ese caso exactamente cuando los paralelos son geodésicas. ■

A continuación encontramos una fórmula fácilmente calculable de la curvatura geodésica, válida para el caso general en que la curva no se suponga parametrizada por la longitud del arco.

**(15.7) Cálculo de la curvatura geodésica.** Sea  $\gamma(t)$  una curva regular no necesariamente parametrizada por la longitud del arco y  $\alpha(s) = \gamma(t)$  una reparametrización por la longitud del arco  $s$ , de modo que  $t = t(s)$  es un difeomorfismo entre intervalos de la recta que conserva la orientación. Entonces

$$\alpha'(s) = t'(s)\gamma'(t), \quad \alpha''(s) = t'^2\gamma''(t) + t''\gamma'(t).$$

Resulta que

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t).$$

Ahora calculamos la curvatura geodésica de  $\alpha$ , que es la de  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \langle \alpha''(s), \mathbf{n}_i(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(p) \wedge \alpha'(s) \rangle \\ &= \det(\alpha''(s), N(p), \alpha'(s)) = \det(N(p), \alpha'(s), \alpha''(s)) = \\ &= \langle N(p), \alpha'(s) \wedge \alpha''(s) \rangle = \langle N(p), t'^3\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle \\ &= t'^3 \langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $1 = \|\alpha'(s)\| = t'\|\gamma'(t)\|$ , concluimos:

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \langle N(p), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det(N(p), \gamma'(t), \gamma''(t)),$$

que es la fórmula buscada. ■

La fórmula anterior es extremadamente útil. Lo ilustramos a continuación.

**Ejemplos 15.8.** (1) Sea  $S : x^2 + y^2 = 1$  el cilindro circular. Vamos a calcular la curvatura geodésica de una curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in S$  parametrizada por el arco. En los cálculos que siguen omitimos el parámetro  $s$ . Derivando las identidades  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$  obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 0 = x x' + y y', \\ 0 = x''x' + y''y' + z''z', \end{cases}$$

con incógnitas  $(x', y', z')$ . Si  $z'' \neq 0$  o  $xy'' - yx'' \neq 0$  el sistema tiene rango 2, y solución

$$(x', y', z') = \rho(yz'', -xz'', xy'' - yx'').$$

Como  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ , resulta

$$1 = \rho^2(y^2 z''^2 + x^2 z''^2 + (xy'' - yx'')^2) = \rho^2(z''^2 + (xy'' - yx'')^2),$$

con lo que

$$\rho^2 = \frac{1}{z''^2 + (xy'' - yx'')^2} \neq 0$$

(obsérvese que nuestra hipótesis es que el denominador no se anula). Ahora, con el vector normal  $N = (x, y, 0)$ , queda:

$$\begin{aligned} k_g &= \det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} = \rho \det \begin{pmatrix} x & yz'' & x'' \\ y & -xz'' & y'' \\ 0 & xy'' - yx'' & z'' \end{pmatrix} \\ &= -\rho(z''^2 + (xy'' - yx'')^2) = -1/\rho. \end{aligned}$$

Esta elegante fórmula nos dice en particular que la curvatura geodésica no se anula, recuérdese, si  $z'' \neq 0$  o  $xy'' - yx'' \neq 0$ . Pero si  $z'' = xy'' - yx'' = 0$  debe ser  $(x'', y'') = \delta(x, y)$  para cierto  $\delta$ , y

$$k_g = \det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ 0 & z' & z'' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x' & \delta x \\ y & y' & \delta y \\ 0 & z' & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Una vez completados estos cálculos, supongamos que la curva  $\alpha$  es una geodésica. Entonces  $k_g \equiv 0$ , y por la discusión precedente,  $z'' \equiv 0$ . En consecuencia, existen dos constantes  $b, d$  tales que  $\alpha(s) = (x(s), y(s), d + bs)$  y por ser  $s$  el arco,

$$1 \equiv \|\alpha'\|^2 = x'^2 + y'^2 + b^2.$$

Deducimos que  $x'^2 + y'^2 \equiv 1 - b^2 \geq 0$ . Si  $b^2 = 1$ , entonces  $x' = y' \equiv 0$ ,  $x$  e  $y$  son constantes, y la curva es una recta vertical. Si  $b^2 < 1$ , entonces  $(x(s), y(s))$  es una parametrización de la circunferencia (recuérdese que  $x^2 + y^2 = 1$ ) por un múltiplo del arco. Es pues del tipo  $x = \cos(c + at)$ ,  $y = \sin(c + at)$  para ciertas constantes  $a, c$ . Concluimos que la curva es (i) una circunferencia del plano  $z = d$  si  $b = 0$ , o (ii) una hélice como en 15.3(3), p. 207, si  $b \neq 0$ . Hemos demostrado así que las geodésicas descritas en aquél ejemplo son todas las que tiene el cilindro.

(2) Según vimos en 15.3(4), p. 207, dos geodésicas del paraboloide hiperbólico  $S : z = -x^2 + y^2$  son las parábolas  $z + x^2 = y = 0$  y  $z - y^2 = x = 0$ . Entonces tuvimos que razonar por intermedio del arco. Usemos en cambio la fórmula anterior, por ejemplo para la segunda parábola. Una parametrización suya es  $\gamma(t) = (0, t, t^2)$ , que no es por el arco. Tenemos

$$\gamma' = (0, 1, 2t), \quad \gamma'' = (0, 0, 2) \quad \text{y} \quad \gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0).$$

Un vector ortogonal a  $S$  es  $\vartheta = (2x, -2y, 1)$ , y en nuestro caso  $x = 0$ , luego  $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$ , y como  $N$  es proporcional a  $\vartheta$ ,

$$k_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle N, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 0$$

Así que  $\gamma$  tiene curvatura geodésica idénticamente nula, y es por tanto una geodésica (cuando se reparametrice por el arco).

Además, ahora vemos fácilmente que  $z - y^2 = x = 0$  es la única geodésica de  $S$  obtenida intersecando  $S$  con un plano  $x = c$ . En efecto, si  $c \neq 0$ , se parametriza una tal intersección con  $\gamma(t) = (c, t, -c^2 + t^2)$  y se obtiene como en el caso anterior  $\gamma' \wedge \gamma'' = (2, 0, 0)$ , pero ahora  $\vartheta = (2c, -2y, 1)$ , de modo que  $\langle \vartheta, \gamma' \wedge \gamma'' \rangle = 4c \neq 0$ , y por tanto  $k_g \neq 0$ . Análogamente se ve que ninguna intersección con un plano  $y = c \neq 0$  es geodésica. ■

La fórmula de la curvatura geodésica nos va a permitir encontrar una expresión local que revelará su naturaleza intrínseca, en el sentido que damos a este término al establecer el teorema egregio de Gauss.

**(15.9) Expresión local de la curvatura geodésica.** Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización local de  $S$ , compatible con la aplicación de Gauss  $N$ , y sea  $\gamma(t)$  una curva de  $W$  no necesariamente parametrizada por el arco. Vamos a calcular la curvatura geodésica de  $\gamma$  en función de las coordenadas  $(u, v)$  de la parametrización dada. La curva  $\gamma$  vendrá expresada en términos de  $\varphi$  como  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ , y para aplicar la fórmula del párrafo 15.7, p. 211, hacemos los cálculos siguientes.

Derivando dos veces respecto de  $t$  tenemos

$$\begin{aligned}\gamma' &= u' \varphi_u + v' \varphi_v, \\ \gamma'' &= u'' \varphi_u + v'' \varphi_v + u'^2 \varphi_{uu} + 2u'v' \varphi_{uv} + v'^2 \varphi_{vv},\end{aligned}$$

y expresando las segundas derivadas de  $\varphi$  mediante los símbolos de Christoffel (ecuaciones (Ch) de 11.1, p. 146), queda:

$$\begin{aligned}\gamma'' &= u'' \varphi_u + v'' \varphi_v + u'^2 (\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN) \\ &\quad + 2u'v' (\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN) + v'^2 (\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN) \\ &= (u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1) \varphi_u \\ &\quad + (v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2) \varphi_v + (u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g) N.\end{aligned}$$

Para simplificar el desarrollo, escribimos  $\gamma'' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$ . Entonces, por las bien conocidas propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned}
 k_g &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \det(N, \gamma', \gamma'') \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \det(N, u'\varphi_u + v'\varphi_v, A\varphi_u + B\varphi_v + CN) \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} (\det(N, u'\varphi_u, B\varphi_v) + \det(N, v'\varphi_v, A\varphi_u)) \\
 &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} (u'B - v'A) \det(N, \varphi_u, \varphi_v) \\
 &= \frac{\det(N, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\gamma'\|^3} \det \begin{pmatrix} u' & A \\ v' & B \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, como  $\varphi$  es compatible con la orientación,

$$\begin{aligned}
 \det(N, \varphi_u, \varphi_v) &= \langle N, \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}, \varphi_u \wedge \varphi_v \right\rangle \\
 &= \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}
 \end{aligned}$$

(5.2, p. 57), y

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = \langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, u'\varphi_u + v'\varphi_v \rangle = u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G.$$

Juntando todo obtenemos

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(u'^2 E + 2u'v'F + v'^2 G)^{3/2}} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

En el caso de que la curva está parametrizada por la longitud del arco (esto es,  $\|\gamma'\| \equiv 1$ ), la expresión de la curvatura geodésica se simplifica algo:

$$k_g = \sqrt{EG - F^2} \det \begin{pmatrix} u' & u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 \\ v' & v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$$

■

Como anunciábamos, la fórmula anterior pone de manifiesto que *la curvatura geodésica sólo depende de la primera forma fundamental*, es decir, es un concepto intrínseco. Este resultado se debe a Minding. Se deduce que:

**Corolario 15.10.** *La curvatura geodésica se conserva por isometrías locales. En particular, las isometrías locales transforman geodésicas en geodésicas.*

*Demostración.* Sea  $h : S \rightarrow S'$  una isometría local: todo punto  $p \in S$  tiene un entorno abierto  $W$  tal que  $W' = h(W)$  es un entorno abierto de  $p' = h(p)$  y la restricción  $h|_W : W \rightarrow W'$  es una isometría. Fijemos  $p$  y sea  $\gamma(t)$  una curva que pasa por  $p$ . Podemos suponer que tenemos una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  y entonces  $\psi = h \circ \varphi : U \rightarrow W'$  es una parametrización de  $S'$  con las mismas coordenadas  $(u, v)$ . Por ser  $h|_W$  isometría, los coeficientes  $E, F, G$  de la primera forma de  $S$  respecto de  $\varphi$  coinciden en todo  $U$  con los coeficientes  $E', F', G'$  de  $S'$  respecto de  $\psi$ , y en consecuencia al usar la fórmula anterior para calcular las curvaturas geodésicas de  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  y de  $h \circ \gamma$  en  $h(\gamma(t))$  obtenemos el mismo resultado. ■

Este hecho proporciona una mejor comprensión de la naturaleza de las geodésicas.

**Ejemplo 15.11.** (1) El cilindro circular  $S : x^2 + y^2 = 1$  tiene la parametrización global  $\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , que es una isometría, pues como vimos en 5.4(2), p. 60, los coeficientes  $E, F, G$  respecto de  $\varphi$  son constantes iguales a 1, 0, 1 respectivamente. Por tanto, las geodésicas del cilindro se obtienen transformando por  $\varphi$  las rectas afines  $u = c + at, v = d + bt$ . Obtenemos las curvas

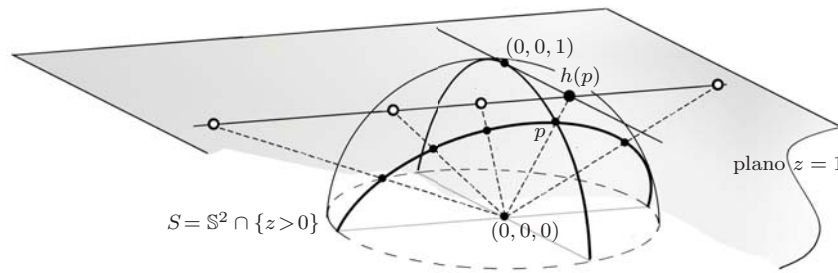
$$\alpha(t) = (\cos(c + at), \sin(c + at), d + bt).$$

Para  $a = 0$  son rectas verticales, para  $b = 0$  son circunferencias en  $z = d$ , y en otro caso son hélices. Naturalmente, la lista coincide con la de 15.3(3), p. 207, y prueba de nuevo (ya lo hicimos en 15.8(1), p. 212) que no hay más.

(2) Las isometrías conservan las geodésicas, pero no es cierto que si un difeomorfismo conserva las geodésicas sea una isometría. Sea  $S$  el hemisferio superior de la esfera unidad:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , y  $S'$  el plano afín  $z = 1$ , que es tangente a  $S$  en el polo norte. La *proyección central*

$$h : S \rightarrow S' : p = (x, y, z) \mapsto (x/z, y/z, 1)$$

es un difeomorfismo:  $h(p)$  es la proyección de  $p$  sobre el plano, con centro el origen.



Con esta descripción geométrica es claro que transforma círculos máximos de  $S$  en rectas de  $S'$  (pues un círculo máximo es la intersección de  $S$  con un plano *que pasa por el origen*). Por tanto,  $h$  transforma geodésicas en geodésicas. Pero no es una isometría, pues como ya sabemos, no las hay entre abiertos de una esfera y de un plano. ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $\alpha(s)$  una curva parametrizada por el arco en una superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Probar que  $\alpha$  es una geodésica plana si y sólo si  $\|N'(s)\| = \kappa(s)$  para cada valor del parámetro  $s$ .

**Número 2.** Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular parametrizada por la longitud del arco que define un homeomorfismo con su traza (es decir  $\gamma$  es un arco de Jordan). Probar que existe una superficie  $S$  tal que  $\gamma$  es una geodésica de  $S$ .

**Número 3.** Sean  $p = (x_0, y_0, z_0)$  y  $q = (x_1, y_1, z_1)$  puntos del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  con  $z_0 \neq z_1$ . Probar que existen infinitas geodésicas del cilindro que pasan por ambos puntos.

**Número 4.** Sea  $S$  una superficie conexa tal que toda geodésica de  $S$  es una curva plana. Probar que  $S$  es un abierto de un plano o de una esfera.

**Número 5.** Sea  $S$  una superficie de revolución. Probar que la curvatura geodésica es constante a lo largo de los paralelos de  $S$ . Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Número 6.** Sea  $S$  el semicono  $z = +\sqrt{x^2 + y^2} > 0$ . Calcular la curvatura geodésica de las secciones planas  $z = c$ , donde  $c$  es una constante positiva. Estudiar si dichas secciones son geodésicas.

**Número 7.** Sea  $S$  la superficie  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ . Estudiar si alguna sección de  $S$  por un plano  $z = ay$  es una geodésica.

**Número 8.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 < z < 1$ . Determinar para qué pares de puntos  $p, q \in S$  existe una isometría  $S \setminus \{p\} \rightarrow S \setminus \{q\}$ , y describirla.

**Número 9.** Sea  $\varphi$  una parametrización de una superficie  $S$  tal que  $E \equiv 1$  y  $F \equiv 0$ . Probar que las curvas coordenadas  $u \mapsto \varphi(u, v_0)$  (para cada  $v_0$  fijado) son geodésicas.

**Número 10.** Demostrar que una semejanza de superficies diferenciables conserva las geodésicas. ¿Qué efecto tiene en la curvatura geodésica?

## Notas

1. El término *geodésica* procede de la Geodesia, ciencia que tiene como objeto estudiar las magnitudes de regiones del globo terrestre y construir mapas de ellas. Fue CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–1851) el primero que empleó la expresión *curva geodésica* en su estudio de este tipo de curvas en el elipsoide de rotación. Posteriormente Liouville adoptó ese nombre que, a partir de él, se impuso en la literatura matemática.

2. Liouville nació el 24 de Marzo de 1809 en Saint-Omer, Francia, en el momento álgido de la era napoleónica. Vivió uno de los periodos más agitados de la historia de ese país, que experimentó seis cambios dinásticos violentos durante su vida.

Fue alumno de la Escuela Politécnica a partir de 1825. En aquellos momentos el curso más relevante para los alumnos con inclinaciones matemáticas era el curso de Análisis y Mecánica, que era impartido de manera rotativa por ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775–1836) y por Cauchy. Aunque su profesor fue Ampère, la influencia de Cauchy era dominante en la enseñanza de esa materia, pues se habían establecido a partir de él nuevas exigencias de rigor, aboliendo el uso generalizado de las series divergentes, introduciendo nociones claras de convergencia y continuidad y basando la definición de derivada en el concepto de límite. Liouville estudió, sin duda, los apuntes de Cauchy, que serían el precedente de sus famosos libros de análisis. Se graduó en 1827.

3. Liouville quiso desde el primer momento dedicar su vida a las matemáticas, lo que suponía adentrarse en un mundo muy competitivo y plagado de rivalidades y disputas. NIELS HENRIK ABEL (1802–1829) describió la situación cuando visitó París en 1826: «*Los franceses me gustan menos que los alemanes. Los franceses son extremadamente reservados con los extranjeros y es muy difícil adquirir confianza con ellos. Todos trabajan para sí mismos sin importarles los demás. Todos quieren enseñar. Nadie quiere aprender. El más absoluto egoísmo reina por todas partes*».

Perseguir su vocación requirió un gran esfuerzo para Liouville. En sus años juveniles tenía que simultanear su docencia en la Escuela Politécnica, la Escuela Normal y cinco o seis liceos e instituciones privadas para poder sostenerse económicamente. Según su biógrafo JESPER LÜTZEN (1951–), probablemente daba unas cuarenta horas de clase por semana. Esta situación se prolongó hasta que en 1938 obtuvo un puesto estable en la Escuela Politécnica, donde fue nombrado profesor de Análisis y Mecánica, y después otro en 1940 en el Bureau des Longitudes. También en esa época, en 1839, fue elegido miembro



de la Academia de Ciencias. En 1950 consiguió una cátedra en el Colegio de Francia y en 1857 otra cátedra en La Sorbona.

Sin embargo, aún cuando tuvo una situación estable, Liouville no alcanzó la paz deseada para consagrarse tranquilamente a la investigación, pues a las tareas docentes se sumaron las obligaciones administrativas y las exigencias editoriales. Tan sólo la época estival le permitía una relativa liberación de estas actividades.

**4.** Como decimos, su carrera académica fue tortuosa a veces. En 1936 parecía el candidato para una plaza en la Escuela Politécnica (la cátedra del fallecido CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785–1836)) y sin embargo la consiguió JEAN-MARIE CONSTANT DUHAMEL (1797–1872). En 1937 sólo pudo obtener un puesto de sustituto de JEAN BAPTISTE BIOT (1774–1862) en el Colegio de Francia, y si bien Liouville llegaría a ocupar una cátedra en esta institución, lo hizo de manera rocambolésca trece años después. Primero, en 1943, al morir SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX (1765–1843), Liouville concurrió para ocupar su plaza en el Colegio de Francia. No tuvo éxito, pues la ocupó el CONDE GUGLIELMO LIBRI CARUCCI DALLA SOMMAJA (1803–1869). Tras este resultado, Liouville escribió que estaba «*profundamente humillado como persona y como geómetra*», y renunció al puesto que tenía en el Colegio. Parece claro que desde el punto de vista académico Liouville tenía motivos para esta reacción. Los conflictos con Libri venían de antes: ya en 1939 Libri se opuso fuertemente a su elección para la Academia.

Libri era miembro de una de las familias nobles florentinas más antiguas, y educado en Pisa desarrolló luego una carrera matemática distinguida en París, aunque salpicada de enemistades con muchos de sus colegas. Uno de sus intereses principales era la historia y ello implicaba disponer de fuentes originales: llegó a disponer de 40.000 libros y manuscritos raros. En consonancia con estos intereses, en 1941 fue nombrado Inspector de Bibliotecas. Siete años después, debido a un confuso asunto de robo de libros, Libri escapó de París a Londres, llevándose consigo 30.000 de ¿sus? incunables: los ingleses le recibieron con los brazos abiertos, y seguramente no sólo por pretender ser un refugiado político. Hay quien supone que su condición de italiano le condicionó siempre en el mundo académico francés, pero otros escribieron duros juicios sobre su comportamiento. Poco después de su muerte, se escribió que había tenido todas las virtudes mundanas y académicas: «*elegante, bien humorado, amistoso y afable, gran escritor en francés e italiano, matemático profundo, historiador exhaustivo, experto bibliófilo*», para concluir descarnadamente que sólo tuvo un defecto: «*era esencialmente un ladrón*».

Pues bien, tras la huida de Libri, su cátedra en el Colegio de Francia fue declarada vacante en 1950, y entonces la obtuvo por fin Liouville, si bien en dura competencia con Cauchy.

**5.** En 1836, cuando sólo tenía 26 años, Liouville fundó una nueva revista, el *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Esta revista, conocida también como *el Liouville*, estaba destinada a convertirse en una de las más importantes de la historia de las matemáticas. Ya desde el primer volumen se puso de manifiesto su calidad, pues contaba con contribuciones de algunos de los matemáticos franceses más famosos, como GASPARD

GUSTAVE DE CORIOLIS (1792–1843), GABRIEL LAMÉ (1795–1870), JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (1803–1855), Chasles, Ampere, HENRI LÉON LEBESGUE (1875–1941) y el propio Liouville, y también con la contribución de dos matemáticos alemanes, Jacobi y JULIUS PLÜCKER (1801–1868). Más tarde publicarían allí artículos SIMÉON DENIS POISSON (1781–1840), Cauchy, Cayley, Dirichlet, FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823–1852), Gauss, LEOPOLD KRONECKER (1823–1891) y Kummer, entre muchos otros. Esta revista jugó un papel muy importante en el descubrimiento de la obra de ÉVARISTE GALOIS (1811–1832), pues Liouville publicó allí sus trabajos en 1846 después de haber resaltado en la Academia de Ciencias la importancia de los mismos (como no, en disputa con Libri). La estrecha supervisión de todos los artículos publicados en su revista daría a Liouville una visión inigualable de las matemáticas de su tiempo.

**6.** En sus clases de Análisis en la Escuela Politécnica, Liouville se proclamó seguidor del rigor de Cauchy. Sin embargo, en la práctica, no siempre fue fiel a este principio. Usaba los infinitésimos de modo profuso y confundía la convergencia y la convergencia *absoluta*. Raramente estudiaba los dominios de convergencia e, incluso, descuidaba las hipótesis exactas requeridas para la demostración de sus teoremas, aunque en todos estos aspectos fue mejorando con el tiempo, llegando incluso a advertir y corregir un error de Cauchy relativo al intercambio de límites en el cálculo de un doble límite.

Otro de los grandes temas de su tiempo era la controversia entre los métodos analíticos y los sintéticos en el estudio de la Geometría. Liouville se alineó con los analíticos, pero no menospreció la importancia de los sintéticos y elogió a algunos matemáticos que, como Steiner, los practicaban. Pensaba que «*los métodos analíticos y los sintéticos no se excluyen ni se repelen; por el contrario ambos son indispensables para vencer las grandes dificultades de la materia*».

**7.** El año 1850 fue testigo de importantes cambios en la política del gobierno francés respecto de la Escuela Politécnica. En un decreto oficial se planteaba que el objetivo de la Escuela era formar *ingenieros antes que profesores*. En consecuencia se determinaba *restringir el estudio de las matemáticas*, eliminando las teorías abstractas que no producen aplicaciones a los servicios públicos e introduciendo en su lugar cuestiones prácticas. Como consecuencia de esta nueva orientación, muchos de los profesores de la escuela, entre los que se contaban Liouville, Chasles y Sturm, se encontraron en una situación que pronto juzgaron inaceptable y la abandonaron, alguno de ellos por despido. En el caso de Sturm, los hechos tendrían serias consecuencias pues le ocasionarían una grave crisis psicológica, que derivaría en una enfermedad mental y su muerte a los 52 años. A esto hay que añadir las continuas querellas de carácter científico que tenían lugar entre los matemáticos de París, que producían un clima muy agrio. Celos profesionales e incompatibilidades humanas provocaban disputas de prioridad, acusaciones de plagio, severas críticas descalificadoras entre algunos de los matemáticos más respetados de la historia. En el caso de Liouville destacan sus ya citadas desavenencias con Libri y otras con le Verrier. Incluso sus relaciones con Cauchy fueron tensas en muchos momentos. Todo ello ocurría en el ámbito de pasiones políticas desbocadas de la Segunda República, a las que el propio Liouville no era ajeno.

**8.** La obra matemática de Liouville se caracteriza por una lenta evolución desde la matemática aplicada hacia la matemática pura. Gracias a él se conocieron las obras de Gauss en Francia, lo que no era fácil en un ambiente científico ensimismado que no veía más allá de lo que se producía en París. De hecho, el propio Liouville dio una nueva demostración del teorema egregio. También encontró nuevas fórmulas que expresan la curvatura de Gauss en coordenadas isotermas. A Liouville se debe la introducción del término *curvatura geodésica*, noción que más tarde jugaría un papel central en el célebre teorema de Gauss-Bonnet con este mismo nombre. Liouville obtuvo varias fórmulas para esta curvatura e insistió en el carácter intrínseco de la misma, que ya había sido probado por Minding (que nunca utilizó esta terminología). La propia definición de Liouville ya era intrínseca, a diferencia de la de Minding. De hecho, Liouville fue uno de los primeros matemáticos que advirtió la importancia del punto de vista intrínseco en Geometría Diferencial.

Asimismo, Liouville es autor de una abundantísima producción en Teoría de Números, a la que contribuyó con aproximadamente 200 artículos dedicados, entre otros temas, a cuestiones relativas a la reciprocidad cuadrática y a la teoría de números trascendentes. No logró probar que el número  $e$  es trascendente, pero demostró la existencia de una clase infinita de tales números. Un número trascendente famoso es conocido con el nombre de *número de Liouville*.

También se dedicó Liouville a la investigación sobre integración de *funciones algebraicas*, tema en el que encontró algunas conexiones con la obra de Abel. Asimismo introdujo y desarrolló el cálculo fraccionario. Definió operadores diferenciales  $D^t$  donde  $t$  puede tomar valores racionales, irracionales e, incluso complejos, a diferencia de las situaciones estudiadas hasta aquel momento, en que  $t$  tomaba exclusivamente valores enteros.

En ecuaciones diferenciales es importante la *teoría de Sturm-Liouville*, dedicada al estudio de problemas de contorno de ecuaciones de segundo orden. La teoría estudia los autovalores y autofunciones de este tipo de ecuaciones y los desarrollos de funciones generales en serie infinita de autofunciones de una ecuación dada. Se trata de la primera teoría cualitativa en el área de las ecuaciones diferenciales y es, en este sentido, un precedente de la obra de Poincaré. También se puede decir que esta teoría señala uno de los primeros pasos del Análisis Funcional.

**9.** En los últimos años de su vida Liouville obtuvo un reconocimiento prácticamente universal. Aparte de las instituciones científicas de su país, múltiples academias extranjeras, entre ellas la Academia de Ciencias de Madrid, le contaron como miembro. Sin embargo, estos años están marcados por las enfermedades que padeció. En sus diarios califica sus sufrimientos como «*crueles*». Los dolores llenaban el día y la noche y apenas le permitían trabajar, lo que para él era el mayor sufrimiento de todos. No es extraño que la entrada de su diario del 22 de julio de 1876 terminase con las palabras «*Muerte, ¡qué liberación!*». Tenía 67 años, y esa liberación tardaría en llegar: murió un 8 de Septiembre a la edad de 73 años en su apartamento de la rue de Savoie de París.

## Geodésicas (II)

---

En esta lección describimos las geodésicas como las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales que dependen de los símbolos de Christoffel (luego solamente de la primera forma fundamental). Es esta descripción la que permite establecer localmente la existencia y unicidad de las geodésicas. Después presentamos el concepto de campo paralelo, que proporciona una caracterización alternativa de las geodésicas y está regulado mediante ecuaciones diferenciales similares. Terminamos la lección con otro aspecto de la analogía entre rectas y geodésicas: la minimización de la distancia sobre la superficie.

Sea  $S$  una superficie diferenciable.

**(16.1) Ecuaciones diferenciales de las geodésicas.** Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización de un abierto  $W$  de  $S$ . Sea  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  una curva de  $W$ . Es posible sacar aún más partido de los cálculos realizados en la lección anterior, y, en concreto, de la siguiente expresión encontrada en 15.9, p. 213,

$$\begin{aligned} \gamma''(t) = & (u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1) \varphi_u \\ & + (v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2) \varphi_v + (u'^2 e + 2u'v' f + v'^2 g) N. \end{aligned}$$

La curva  $\gamma(t)$  será una geodésica si y sólo si la proyección de  $\gamma''(t)$  sobre el plano tangente es nula, es decir, si en la anterior fórmula los coeficientes de  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$  se anulan:

$$(\text{EDG}) \quad \begin{cases} u'' + u'^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + v'^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + u'^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + v'^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Éstas son las denominadas *ecuaciones diferenciales de las geodésicas*. ■

Como aplicación de estas ecuaciones vamos a estudiar el comportamiento de las geodésicas de las superficies de revolución.

**Ejemplo 16.2.** Consideremos una superficie de revolución  $S$  parametrizada mediante

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)) \quad (\zeta(u) > 0),$$

donde  $u$  es el arco de la curva generatriz  $(\zeta(u), 0, \xi(u))$ , es decir, se cumple  $\zeta'^2 + \xi'^2 \equiv 1$ . Los coeficientes de la primera forma fundamental de esta parametrización son  $E \equiv 1$ ,  $F \equiv 0$  y  $G = \zeta^2$  (5.6, p. 61), y los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{12}^2 = \zeta'/\zeta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\zeta\zeta'$$

(11.3(5), p. 148). Por tanto las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son, en este caso

$$\begin{cases} u'' - \zeta(u)\zeta'(u)v'^2 = 0, \\ v'' + 2\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)}u'v' = 0. \end{cases}$$

Utilizando estas ecuaciones podemos discutir ciertas geodésicas de  $S$ .

(1) Ya sabemos (15.6, p. 210) que los meridianos son siempre geodésicas, y los paralelos cuando corresponden a un punto de la curva generatriz con tangente vertical. Vamos a obtener esto otra vez usando las ecuaciones diferenciales anteriores.

Un meridiano se parametriza mediante  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v_0)$ , luego  $v' = v'' \equiv 0$  y su vector tangente es

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = u'\varphi_u, \quad \|\gamma'\|^2 = u'^2E = u'^2.$$

Si  $t$  es múltiplo del arco,  $\|\gamma'\|$  es constante, luego  $u'$  lo es también, y  $u'' = 0$ . Así pues, las ecuaciones diferenciales se satisfacen trivialmente, y el meridiano es una geodésica.

Consideremos un paralelo  $\gamma(t) = \varphi(u_0, v(t))$ . En este caso es  $u' = u'' \equiv 0$ ,

$$\gamma' = u'\varphi_u + v'\varphi_v = v'\varphi_v \quad \text{y} \quad \|\gamma'\|^2 = v'^2G = v'^2\zeta^2(u_0).$$

Si  $\|\gamma'\|$  es constante,  $v'$  lo es también, y  $v'' \equiv 0$ . Las ecuaciones diferenciales se reducen a la primera que queda

$$\zeta(u_0)\zeta'(u_0)v'^2 = 0.$$

Como  $v$  no puede ser constante y  $\zeta(u_0) > 0$ , concluimos que esta ecuación se satisface, y el paralelo es geodésica, si y sólo si  $\zeta'(u_0) = 0$ , que es la condición de que la tangente a la curva en  $u = u_0$  sea vertical.

(2) Volviendo al sistema en general, reescribimos la segunda ecuación como sigue

$$0 = \zeta^2(u)v'' + 2\zeta(u)\zeta'(u)u'v' = \frac{d}{dt}(\zeta^2(u)v'),$$

luego para cada geodésica existe una constante  $c$  tal que a lo largo de la geodésica se tiene que  $\zeta^2(u)v' = c$ . Si la geodésica está parametrizada por la longitud del arco  $s$  y llamamos  $\theta$  al (menor) ángulo que forma  $\gamma'(s)$  con  $\varphi_v$ , es decir con el paralelo que pasa por  $\alpha(s)$ , tenemos que

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma'(s), \varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\|} = \frac{\langle u'\varphi_u + v'\varphi_v, \varphi_v \rangle}{\|\varphi_v\|} = v'\sqrt{G} = \zeta(u)v',$$

luego  $\zeta(u)\cos \theta = \zeta^2(u)v' = c$ . Teniendo en cuenta que  $\zeta(u)$  es el radio del paralelo correspondiente, obtenemos que para cada geodésica parametrizada por la longitud del arco  $\gamma(s)$  existe una constante  $c$  (que depende sólo de la geodésica) tal que se verifica la llamada *relación de Clairaut*

$$r \cos \theta = c,$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\gamma'(s)$  y  $\varphi_v$  en cualquier punto de la curva y  $r$  es el radio del paralelo que pasa por ese punto. Obsérvese que el signo de  $c$  cambia con la orientación de la geodésica. Esta relación es muy útil para visualizar la forma de las geodésicas en las superficies de revolución cuando no somos capaces de encontrar la expresión analítica de las mismas. Si, por ejemplo,  $c \geq 0$ , la geodésica no puede abandonar la región de la superficie en que  $r \geq c$ . Además, se deduce que si  $c > 0$  el ángulo  $\theta$  aumenta en sentido creciente de los radios de los paralelos. ■

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas sirven para probar un teorema de existencia local. La idea geométrica es que la situación que hemos comprobado en el caso de la esfera y el cilindro se cumple siempre: fijado un punto  $p \in S$  y una dirección tangente en él, existe una única geodésica de  $S$  que pasa por  $p$  con esa dirección. Dado el papel que juegan las parametrizaciones, conviene detallar bien el sentido de esta afirmación.

**(16.3) Reparametrización de geodésicas y condiciones iniciales.** (1) Una curva de nuestra superficie  $S$  es una geodésica si y sólo si su curvatura geodésica es idénticamente nula. La curvatura geodésica se calcula sin necesidad de reparametrizar por el arco, de modo que su anulación no depende de la parametrización. Sin embargo la condición que inicialmente define las geodésicas es que su vector curvatura no tenga componente tangencial, es decir, sea ortogonal a la superficie, y esta condición sí depende de la parametrización.

(2) Si una curva es una geodésica, cualquier parametrización suya,  $\gamma(t)$ , respecto de un múltiplo del arco cumple el requisito del vector curvatura, y, en

coordenadas locales, esas parametrizaciones son soluciones de las ecuaciones diferenciales (EDG). Las condiciones iniciales que distinguen entre esas soluciones son las siguientes.

En primer lugar, es claro que las traslaciones del parámetro son irrelevantes, luego se conviene que el origen  $t = 0$  es siempre un punto del intervalo de definición de  $\gamma$ . En segundo lugar, sabemos cuales son todas las otras reparametrizaciones que cumplen el requisito del vector curvatura, o más explícitamente, que son soluciones de las ecuaciones diferenciales: exactamente las del tipo  $\alpha(s) = \gamma(cs)$  para constantes  $c \neq 0$ . Obsérvese que esta reparametrización no altera el origen  $t = 0$  y que  $\alpha'(0) = c\gamma'(0)$ , de modo y manera que las parametrizaciones se distinguen por sus vectores tangentes. Así, caracterizamos las parametrizaciones por su *origen*  $p = \alpha(0)$  y su *velocidad inicial*  $\omega = \alpha'(0)$ .

(3) Si fijamos un punto  $p \in S$ , una geodésica que pase por  $p$  determina una dirección tangente en ese punto, y las reparametrizaciones de la curva con origen en  $p$  que cumplen las ecuaciones diferenciales se corresponden biyectivamente con los vectores no nulos  $\omega$  en esa dirección. ■

Tras las explicaciones precedentes, enunciamos el *teorema de existencia y unicidad de geodésicas*:

**Teorema 16.4.** *Fijemos un punto  $p \in S$  y un vector tangente no nulo  $\omega \in T_p S$ . Existe una geodésica  $\alpha : I \rightarrow S$  definida en un intervalo abierto que contiene el origen tal que:*

$$(1) \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \omega.$$

(2) Si  $\gamma : J \rightarrow S$  es otra geodésica con  $0 \in J$ ,  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = w$ , entonces  $J \subset I$  y  $\gamma(t) = \alpha(t)$  para todo  $t \in J$ .

En otras palabras, dados un punto y un vector tangente en él, existe una única *geodésica máxima* con origen ese punto y velocidad inicial ese vector tangente.

**Demostración.** Es una aplicación directa del *teorema de Picard* de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para hacerlo evidente reescribimos el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas (EDG) utilizando más variables de la manera bien conocida. Denotamos

$$\mathbf{x}_1 = u, \mathbf{x}_2 = v, \mathbf{x}_3 = u', \mathbf{x}_4 = v',$$

y (EDG) se convierte en

$$\begin{cases} \mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_3, \\ \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_4, \\ \mathbf{x}'_3 = -\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_3^2 - 2\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 - \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_4^2, \\ \mathbf{x}'_4 = -\Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_3^2 - \Gamma_{12}^2 2\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 - \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_4^2. \end{cases}$$

Así que tenemos efectivamente una ecuación diferencial  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ . Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{x}_1(0) = u(0), \mathbf{x}_2(0) = v(0), \mathbf{x}_3(0) = u'(0), \mathbf{x}_4(0) = v'(0),$$

es decir, el punto  $p \in S$  y el vector tangente  $\omega \in T_p S$  cuyas coordenadas son respectivamente  $(u(0), v(0))$  y  $(u'(0), v'(0))$ . Así pues, se aplica el teorema de Picard a la ecuación  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$  y se obtiene lo que se quiere. ■

Revisemos a la luz de este resultado los ejemplos que hemos analizado previamente.

**Ejemplos 16.5.** (1) Para la esfera y para el cilindro, encontramos geodésicas para cada punto y cada dirección, y probamos además que esas eran todas las geodésicas (15.3(2), p. 206, y 15.3(3), p. 207, 15.8(1), p. 212). Esto último no era realmente necesario, pues lo garantiza la unicidad del teorema anterior.

(2) Del toro de revolución  $S$  sabemos por las propiedades generales de las superficies de revolución (16.2(1), p. 221) que los meridianos son geodésicas y de los paralelos sólo los máximos, que están en el plano  $z = 0$ . Se puede obtener alguna información sobre las restantes geodésicas utilizando la relación de Clairaut (*loc. cit.*(2)). Si consideramos la parametrización habitual del toro

$$\varphi(u, v) = ((c + r \cos u) \cos v, (c + r \cos u) \sin v, r \sin u) \quad (c > r > 0),$$

la relación de Clairaut dice que  $(c + r \cos u) \cos \theta$  es constante, donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\gamma'$  y  $\varphi_v$ . Si  $\gamma$  es, en un punto dado, tangente al paralelo superior  $u = \pi/2$  (es decir, si  $\theta = 0$ ), vemos que  $c$  es precisamente la constante anterior. Como  $c + r \cos u > 0$ , resulta que  $0 \leq \cos \theta \leq 1$ , y tenemos que  $r \cos u + c \geq c$  y  $\cos u \geq 0$ . Esto significa que la geodésica está confinada a la cara externa del toro (de hecho, se sigue de la relación de Clairaut que la geodésica oscila entre el paralelo superior y el inferior). ■

Las geodésicas se han definido imitando en la superficie en la que yacen el comportamiento de las rectas en el plano. Vamos ahora utilizar el mismo punto



de vista intrínseco para desarrollar otro concepto relacionado con la geometría de las rectas del plano: el paralelismo.

Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable. A continuación utilizamos una noción curvilínea de campo tangente. Si  $\alpha : I \rightarrow S$  es una curva de  $S$ , un *campo (vectorial) tangente a lo largo de  $\alpha$*  es una aplicación diferenciable  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\Phi(t) \in T_{\alpha(t)}S$  para todo  $t \in I$ . El primer ejemplo es el campo  $\Phi(t) = \alpha'(t)$ .

**Definición 16.6.** Un campo tangente  $\Phi$  a lo largo de una curva  $\alpha : I \rightarrow S$  se llama *paralelo* si  $\Phi'(t)$  es ortogonal a  $T_{\alpha(t)}S$  para todo  $t \in I$ .

La motivación de la definición anterior parte, como en el caso de las geodésicas, del supuesto de que los hipotéticos habitantes de la superficie sólo perciben la componente tangencial de los vectores, es decir su proyección sobre el plano tangente a la superficie en un punto dado. Si  $\Phi'(t)$  es ortogonal a  $S$  (esto es, a  $T_{\alpha(t)}S$ ),  $\Phi'(t)$  se anula para esos habitantes que, por tanto, no percibirían variación alguna de  $\Phi$ . Es decir, verían dos vectores  $\Phi(t_1)$  y  $\Phi(t_2)$  iguales con distintos orígenes  $\alpha(t_1)$  y  $\alpha(t_2)$ , o sea, los verían *paralelos*.

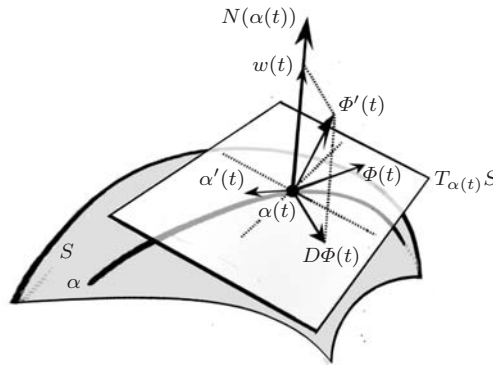
Por otra parte, es claro que las geodésicas no son otra cosa que *las curvas cuyo campo tangente es paralelo*.

Para entender mejor la definición que acabamos de dar, es conveniente introducir el concepto siguiente.

**Definición 16.7.** Dado un campo tangente  $\Phi$  a lo largo de la curva  $\alpha : I \rightarrow S$ , se llama *derivada covariante* de  $\Phi$  al campo tangente  $D\Phi$  definido por

$$D\Phi(t) = \pi_{\alpha(t)}(\Phi'(t)),$$

donde  $\pi_{\alpha(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\alpha(t)}S$  es la proyección lineal ortogonal sobre el plano tangente a  $S$  en  $\alpha(t)$ .



Mediante la derivada covariante, se puede reformular la noción de campo paralelo  $\Phi$  como aquél que verifica  $D\Phi = 0$ . En particular, las geodésicas se caracterizan como *las curvas cuyo campo tangente tiene derivada covariante nula*.

Se sigue de la definición que  $\Phi'(t) = D\Phi(t) + w(t)$ , donde  $w(t)$  es un vector ortogonal a  $S$  en  $\alpha(t)$ . Si  $\Psi$  es un segundo campo tangente a lo largo de la curva  $\alpha$ , es útil la relación

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi, \Psi\rangle = \langle D\Phi, \Psi\rangle + \langle\Phi, D\Psi\rangle,$$

que se prueba inmediatamente haciendo uso de la expresión anterior. Se deduce la siguiente propiedad:

**Corolario 16.8.** *Sea  $\Phi$  paralelo a lo largo de la curva regular  $\alpha$ . Entonces  $\|\Phi(t)\|$  es constante. Si  $\Psi$  es otro campo paralelo a lo largo de  $\alpha$  entonces el ángulo entre  $\Phi(t)$  y  $\Psi(t)$  es constante.*

*Demostración.* Si tenemos dos campos paralelos  $\Phi$  y  $\Psi$ , sus derivadas covariantes se anulan idénticamente, y por tanto

$$\frac{d}{dt}\langle\Phi, \Psi\rangle = \langle D\Phi, \Psi\rangle + \langle\Phi, D\Psi\rangle = 0.$$

En consecuencia, la función  $\langle\Phi, \Psi\rangle$  es constante. Para  $\Phi = \Psi$ , obtenemos que las normas de  $\Phi$  y de  $\Psi$  son constantes. Se sigue que el ángulo  $\theta$  que forman los campos, que tiene coseno

$$\cos \theta = \frac{\langle\Phi, \Psi\rangle}{\|\Phi\| \|\Psi\|},$$

es también constante. ■

Añadimos a esta sucinta presentación del paralelismo en superficies el teorema de existencia y unicidad de campos paralelos.

**Teorema 16.9.** *Sea  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$  una curva regular y  $\omega$  un vector tangente a  $S$  en  $\alpha(a)$ . Entonces existe un único campo tangente paralelo  $\Phi$  a lo largo de  $\alpha$  con  $\Phi(a) = \omega$ .*

*Demostración.* La demostración es parecida a la de existencia y unicidad de geodésicas, de manera que la describimos a grandes rasgos. En primer lugar se observa que la traza de la curva  $\alpha$ , por ser compacta, se puede cubrir con una cantidad finita de parametrizaciones  $\varphi : U \rightarrow W$ . Esas parametrizaciones se pueden ordenar para tener una partición finita de subintervalos  $[a', b']$  de  $[a, b]$  de

manera que para una cierta amplitud  $\varepsilon > 0$  sea  $\alpha([a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]) \subset W$ . Entonces, si sabemos resolver el problema en cada  $[a' - \varepsilon, b' + \varepsilon]$ , es fácil unir soluciones para obtener la que está definida en todo  $[a, b]$ . Aquí es importante la unicidad, y para poder usarla es para lo que se ha especificado el pequeño solapamiento de amplitud  $\varepsilon$ . Todo esto significa que podemos suponer simplemente que  $\alpha([a, b]) \subset W$ .

Eso supuesto, se procede a reformular el problema mediante ecuaciones diferenciales. El campo que buscamos será

$$\Phi(t) = X(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + Y(t)\varphi_v(u(t), v(t)),$$

y derivando

$$\Phi' = X'\varphi_u + Y\varphi_v + Xu'\varphi_{uu} + (Xv' + Yu')\varphi_{uv} + Yv'\varphi_{vv}.$$

Reemplazando las segundas derivadas por sus expresiones con los símbolos de Christoffel obtenemos  $\Phi' = A\varphi_u + B\varphi_v + CN$ , y para que el campo sea paralelo debe cumplirse  $A = B = 0$ . En nuestro caso resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$(CP) \begin{cases} X' = -(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)X - (u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1)Y, \\ Y' = -(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)X - (u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2)Y. \end{cases}$$

La existencia y unicidad de las soluciones  $X, Y$  de este sistema de ecuaciones lineales proporciona la existencia y unicidad del campo tangente  $\Phi$ . Las condiciones iniciales de una solución son  $X(a), Y(a)$ , esto es, las coordenadas de  $\omega$  en la parametrización  $\varphi$ . ■

Para terminar la lección, volvemos a nuestro tema principal, que son las geodésicas. Ya que se han definido a imitación de las rectas, es importante ver en qué medida las emulan, siendo las curvas de longitud mínima de la superficie. El siguiente resultado trata esta propiedad. Para enunciarlo recordemos que una aplicación continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una *curva diferenciable a trozos* si existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que la restricción de  $\gamma$  a cada subintervalo  $[t_{k-1}, t_k]$  es una curva diferenciable en el sentido usual. La longitud de  $\gamma$  se define como la suma de las longitudes de las restricciones  $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ .

**Proposición 16.10.** *Sea  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$  una curva parametrizada por la longitud del arco cuya longitud  $L_a^b(\alpha)$  es menor o igual que la de cualquier curva diferenciable a trozos que une los puntos  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$ . Entonces  $\alpha$  es una geodésica.*

*Demostración.* La demostración por reducción al absurdo utiliza ideas que pertenecen al Cálculo de Variaciones. Supongamos que  $\alpha$  no es una geodésica y que, por tanto, existe un valor  $s_0$  del parámetro tal que  $k_g(s_0) \neq 0$ , por ejemplo  $k_g(s_0) > 0$ . Entonces existen  $a'$  y  $b'$  con  $a < a' < b' < b$ , tales que  $k_g(s) > 0$  para todo  $s \in [a', b']$ . Podemos suponer que  $\alpha([a', b'])$  está cubierto por una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$ . La curva  $\alpha|_{[a', b']}$  debe ser la curva más corta entre los puntos  $\alpha(a')$  y  $\alpha(b')$ . En efecto, en caso contrario, reemplazando  $\alpha$  entre  $a'$  y  $b'$  por otra curva sería posible obtener una curva diferenciable a trozos que une los puntos  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$  que fuera más corta que  $\alpha$ .

Así pues, en lo que sigue podemos suponer simplemente  $a = a'$  y  $b = b'$ , esto es, que toda la traza de  $\alpha$  está cubierta por una parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  y que  $k_g(s) > 0$  para todo  $s$ . La curva se expresa en coordenadas locales en la forma  $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ .

Tomemos una función diferenciable  $\zeta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\zeta(s) > 0$  para todo  $s \in (a, b)$  y  $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$ . Sea  $n_i(s)$  la normal intrínseca de  $\alpha$  y expresemos analíticamente el campo tangente  $\zeta(s)n_i(s)$  en términos de  $\varphi_u$  y  $\varphi_v$ . Resulta que

$$\zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v,$$

para ciertas funciones diferenciables  $X, Y$  (13.3(2), p. 180). Consideramos la aplicación

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)),$$

para  $|t| < \varepsilon$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que la expresión anterior tenga sentido. Para cada  $t$  fijo, la aplicación  $s \mapsto \gamma(s, t)$  es una curva de la superficie definida en el intervalo  $[a, b]$  que une  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$ . Por tanto, la longitud de esa curva es mayor o igual que la de  $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$ . En términos analíticos, la función

$$L(t) = \int_a^b \left\| \frac{\partial}{\partial s} \gamma(s, t) \right\| ds = \int_a^b \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| ds$$

tiene un mínimo para  $t = 0$ . Ahora bien,

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\| = \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} L'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle} ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle} ds = \int_a^b \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\|^{-1} \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Evaluable en  $t = 0$ , y como  $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$  está parametrizada por la longitud del arco se tiene  $\|\frac{\partial \gamma}{\partial s}\| = 1$  para  $t = 0$ , con lo que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial s}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle ds = \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0} - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} \right) ds \\ &= \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0, s=b} - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right\rangle \Big|_{t=0, s=a} - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} ds \end{aligned}$$

Computemos separadamente los últimos dos sumandos.

De las expresiones

$$\gamma(s, t) = \varphi(u(s) + tX(s), v(s) + tY(s)), \quad \zeta(s)n_i(s) = X(s)\varphi_u + Y(s)\varphi_v$$

deducimos que  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} = \zeta(s)n_i(s)$ , y, teniendo en cuenta que  $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$ , resulta

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_{t=0, s=b}^{t=0, s=b} = \zeta(s)n_i(s) \Big|_{s=a}^{s=b} = 0,$$

con lo que el primero de los dos sumandos es nulo. Pasemos al segundo. Como  $\alpha(s) = \gamma(s, 0)$ , es

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \Big|_{t=0} = \alpha''(s) = k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N,$$

y deducimos

$$\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right\rangle \Big|_{t=0} = \langle \zeta(s)n_i(s), k_g(s)n_i(s) + k_n(s)N \rangle = \zeta(s)k_g(s).$$

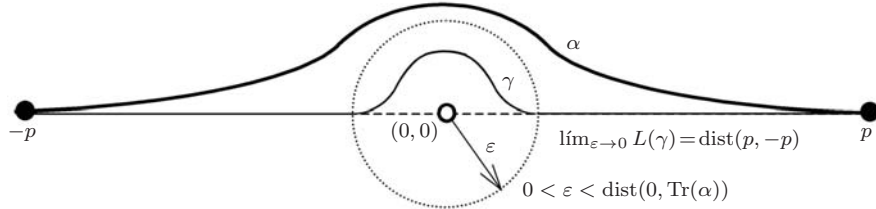
En consecuencia:

$$L'(0) = - \int_a^b \zeta(s)k_g(s) < 0,$$

pues tenemos la condición  $k_g(s) > 0$  para todo  $s$ . Esto es imposible, pues  $L$  tiene un mínimo en  $t = 0$ .

De esta contradicción se sigue que no existe  $s_0$  con  $k_g(s_0) \neq 0$  y, por tanto,  $\alpha$  es una geodésica. ■

Es conveniente observar que no siempre existe la curva más corta entre dos puntos. Por ejemplo, si  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $p \in S$  es un punto arbitrario, dada cualquier curva  $\alpha$  de  $S$  que una  $p$  y  $-p$  siempre existe otra  $\gamma$  estrictamente más corta que los une.



La superficie de este ejemplo, sin embargo, no es cerrada en  $\mathbb{R}^3$  y es posible probar que en una superficie cerrada de  $\mathbb{R}^3$  todo par de puntos puede ser unido por una curva de longitud mínima. Las superficies cerradas también tienen la propiedad de que toda geodésica  $\alpha : I \rightarrow S$  se extiende indefinidamente, es decir, se extiende a una geodésica  $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow S$  definida en toda la recta real. Ambas propiedades anteriores son consecuencia del llamado *teorema de Hopf-Rinow*. Por otra parte, tampoco es siempre cierto que una geodésica defina la distancia más corta entre dos puntos. Por ejemplo, un segmento de círculo máximo de la esfera unidad de longitud mayor que  $\pi$  (que, como sabemos, es una geodésica) no define la mínima distancia entre sus extremos (que es definida a través del segmento complementario). Sin embargo, es posible probar que una curva parametrizada por el arco  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow S$  es una geodésica si y sólo si minimiza distancias localmente, es decir, si y sólo si para todo  $c \in I$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que la restricción  $\alpha|_{[c+\varepsilon, c-\varepsilon] \cap I}$  es la curva de mínima longitud en  $S$  entre sus extremos.

## Problemas

**Número 1.** Se considera la parametrización de la esfera unitaria dada por

$$\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Fijado  $u_0$  consideremos la correspondiente curva de latitud,  $\alpha(v) = \varphi(u_0, v)$ , y el campo tangente  $X = \varphi_u$  a lo largo de ella (es decir,  $X(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v)$ ). Determinar para qué valores de  $u_0$  el campo  $X$  es paralelo.

**Número 2.** Sea  $S$  una superficie de revolución parametrizada como es usual por

$$\varphi(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \zeta(u) \sin v, \xi(u)), \quad \zeta(u) > 0.$$

Mostrar que si  $\varphi$  transforma en una geodésica alguna recta  $v = mu + n$ ,  $m \neq 0$ , la superficie es un cilindro de ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ . ¿Es entonces  $\varphi$  una isometría?, ¿y una semejanza?

**Número 3.** Sea  $\gamma : I \rightarrow S$  una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie  $S$ . Probar las siguientes *fórmulas de Frenet para la curvatura geodésica*:

$$D\gamma'(s) = k_g(s)\mathbf{n}_i(s), \quad D\mathbf{n}_i(s) = -k_g(s)\gamma'(s).$$

**Número 4.** Sea  $\gamma : I = [s_0, s_1] \rightarrow S$  una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie  $S$  y sea  $w_0$  un vector unitario contenido en  $T_{\gamma(s_0)}S$ . Escojamos  $\vartheta_0$  tal que  $w_0 = \cos \vartheta_0 \gamma'(s_0) + \sin \vartheta_0 \mathbf{n}_i(s_0)$  y definamos

$$\vartheta(s) = \vartheta_0 - \int_{s_0}^s k_g(s) ds.$$

Probar que  $w(s) = \cos \vartheta(s) \gamma'(s) + \sin \vartheta(s) \mathbf{n}_i(s)$  es un campo paralelo a lo largo de  $\gamma$  tal que  $w(s_0) = w_0$ . Este resultado se puede considerar un *teorema de existencia del transporte paralelo*.

**Número 5.** Sea  $\gamma : I = [s_0, s_1] \rightarrow S$  una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie  $S$ . Probar, sin hacer uso del teorema de unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales, que si  $w(s)$  es un campo unitario paralelo a lo largo de  $\gamma$  y para cierto  $\vartheta_0$  es  $w(s_0) = \cos \vartheta_0 \gamma'(s_0) + \sin \vartheta_0 \mathbf{n}_i(s_0)$ , entonces  $w(s) = \cos \vartheta(s) \gamma'(s) + \sin \vartheta(s) \mathbf{n}_i(s)$ , donde  $\vartheta(s) = \vartheta_0 - \int_{s_0}^s k_g(s) ds$ . Este resultado se puede considerar un *teorema de unicidad del transporte paralelo*.

**Número 6.** Sea  $\gamma : I = [s_0, s_1] \rightarrow S$  una curva parametrizada por la longitud del arco en la superficie  $S$ . Denotemos por  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva de  $k_g(s)$ ; decimos que  $\theta$  es una *función ángulo* de  $\gamma$ . Sea  $w$  un campo unitario paralelo a lo largo de  $\gamma$ . Probar que

$$\gamma'(s) = \cos(\theta(s) + \theta_0) w(s) + \sin(\theta(s) + \theta_0) w^\perp(s), \text{ con } 0 < \theta_0 < 2\pi,$$

donde  $w^\perp(s) \in T_{\gamma(s)}S$  y  $\{w(s), w^\perp(s), N(s)\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  positivamente orientada. En consecuencia, la curvatura geodésica de  $\gamma$  se puede interpretar como la velocidad con la que cambia la dirección de su vector tangente  $\gamma'$  respecto de un campo paralelo a lo largo de  $\gamma$ . El número  $\Delta\theta = \theta(s_1) - \theta(s_0)$  se llama *desplazamiento angular* a lo largo de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  es una curva cerrada (o sea, si  $\gamma(s_0) = \gamma(s_1)$ ),  $\Delta\theta$  mide el ángulo entre un vector  $w_0 \in T_{\gamma(s_0)}S$  y su transportado paralelo a  $T_{\gamma(s_1)}S = T_{\gamma(s_0)}S$  (este ángulo puede ser mayor que  $2\pi$  y no es necesariamente múltiplo de  $2\pi$ ).

**Número 7.** Parametrizamos la esfera unitaria mediante  $\varphi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$ , con  $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$  y  $0 < v < 2\pi$  y consideramos la curva de latitud  $u_0$ ,  $\gamma(s) = \varphi(u_0, \frac{s}{\cos u_0})$ , que está parametrizada por la longitud del arco. Calcular el desplazamiento angular a lo largo de  $\gamma$ .

**Número 8.** Sea  $\gamma$  una curva regular cuya traza yace en la intersección de dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  que son tangentes en todos los puntos de esa traza. Probar que el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  coincide para las dos superficies.

**Número 9.** Sea  $w$  un campo vectorial unitario a lo largo de una curva regular  $\alpha : I \rightarrow S$  de la superficie  $S$ . Probar que  $Dw(t) = \lambda(t)N(\alpha(t)) \wedge w(t)$ , es decir, que  $Dw$  es proporcional a  $N \wedge w$ . El coeficiente  $\lambda$  se llama *valor algebraico de la derivada covariante* de  $w$  y se representa por  $[Dw]$ . Observar que si  $w$  es el campo de vectores tangentes de  $\alpha$  (parametrizada por el arco) entonces  $[Dw]$  es la curvatura geodésica de  $\alpha$ .

**Número 10.** Mostrar que en un cilindro circular la mínima longitud de una curva que une dos puntos se alcanza para una única geodésica (¿hay excepciones?), y calcular esa longitud mínima.

## Notas

1. Minding nació el 23 de Enero de 1806 en Kalisz, una ciudad que ahora es polaca pero que entonces pertenecía al imperio ruso. Su familia tenía raíces alemanas y cuando Minding tenía tan sólo un año cambió su residencia a Hirschberg, una ciudad de Prusia que ahora también pertenece a Polonia con el nombre de Jelenia Góra.

Minding estudió Filosofía en las universidades de Halle y Berlín. En este segundo lugar tuvo la oportunidad de asistir a los cursos de Hegel. Aunque sus estudios se centraban en filosofía, Minding estudió matemáticas de modo autodidacta, e incluso fue profesor de esta materia durante algunos años en el Gymnasium de Elberfeld. Al mismo tiempo que enseñaba matemáticas en la escuela elaboró por sus propios medios una tesis doctoral sobre aproximación de integrales dobles, obteniendo el título de doctor por la Universidad de Halle. Es, sin duda, un hecho extraordinario que Minding fuera capaz de formarse a sí mismo como matemático y como investigador. Su tesis sería publicada en la revista de Crelle en 1830 y le abriría las puertas para comenzar a enseñar matemáticas como *Privatdozent* en la Universidad de Berlín, donde dio clases de cálculo baricéntrico (siguiendo el enfoque de Möbius) y de Teoría de Números, materia sobre la que escribió un libro: *Anfangsgründe der höheren Arithmetik*. El libro está fuertemente influido por las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss y presenta la ley de reciprocidad cuadrática como «el resultado más importante de la alta aritmética».

Minding también ejerció su docencia en la Escuela de Arquitectura de Berlín, un lugar en el que Dirichlet había enseñado tiempo atrás. Sin embargo, sus intentos de lograr una promoción adecuada en Berlín no tuvieron éxito y en 1843 aceptó una plaza de catedrático en la Universidad de Dorpat, hoy Tartu (Estonia). Esta universidad, a pesar de encontrarse en un territorio perteneciente en aquellos tiempos a Rusia, se desenvolvía en el ámbito de la cultura alemana. La lengua utilizada era el alemán y la mayoría de sus profesores también lo eran. Allí fue colega de CARL EDUARD SENFF (1810–1849), a quien hemos mencionado anteriormente [CD, Nota 7, lecc.4, p.54] en relación con las fórmulas de Frenet. Tanto Minding como Senff fueron allí profesores de Peterson, a quien también hemos citado (Nota 5, lecc.12, p.176) en relación con su tesis *Über die Biegung der Flächen*, dirigida por Minding. Peterson sería más tarde el fundador de la escuela de geometría de Moscú.

La Universidad de Dorpat se incorporó con el tiempo al mundo de la cultura y la lengua rusas. El propio Minding adquirió esa ciudadanía y, poco después, fue elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Minding murió en Dorpat el 3 de Mayo de 1885. La universidad tomaría en 1898 el nombre ruso de Universidad de Yuryev y, a partir de 1919, su nombre actual, Universidad de Tartu, adoptando como lengua oficial el estonio.

2. Aunque el término *curvatura geodésica* es debido a Liouville, el concepto había sido introducido y estudiado previamente por Minding, quien probó que es intrínseco. También



se interesó por las superficies de curvatura constante, probando en 1839 el teorema que hoy lleva su nombre (Nota 2, lecc. 14, p. 203): dos superficies de curvatura constante son localmente isométricas si y sólo si sus curvaturas son iguales. Este importante resultado apareció en la revista de Crelle en 1839, en el artículo titulado *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht*. Como ya hemos dicho (*loc. cit.*) este resultado va mucho más allá que nuestra caracterización de las superficies localmente desarrollables de la lección 14. Minding estudió especialmente el caso de las superficies con curvatura negativa constante, en particular las pseudoesferas, y obtuvo resultados que le llevaron muy cerca de las geometrías no euclídeas, pero no fue consciente de ello. Beltrami utilizaría más tarde los resultados de Minding para dar una nueva interpretación de la Geometría Hiperbólica. Otros temas tratados por Minding fueron las ecuaciones diferenciales y el Cálculo de Variaciones.

**3.** El Cálculo de Variaciones nació con el problema de la *braquistócrona*, propuesto por Johann Bernoulli en junio de 1696 en el *Acta Eruditorum*. El problema preguntaba cuál es la curva de descenso más rápido entre dos puntos. Al cabo de seis meses no se habían recibido soluciones. El 29 de enero de 1697 a las 4 de la madrugada Newton encontró en su correo una carta de Johann Bernoulli con el desafío y dedicó esa noche a encontrar una solución, que inmediatamente comunicó de forma anónima a Bernoulli. Éste la estudió, y supo sin dudarle quién era su autor, pues «*se reconoce al león por la marca de su zarpa*». Además de la de Newton, al final se recibirían cinco soluciones: de Jakob Bernoulli, de Leibniz, de EHRENFRIED WALTHER VON TSCHIRNHAUS (1651–1708) y del MARQUÉS GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE DE L'HÔPITAL (1661–1704).

Se considera a Euler el padre del Cálculo de Variaciones como rama del Análisis Matemático (el nombre alemán, *Variationsrechnung*, fue propuesto por él). Su objeto es encontrar extremos de *funcionales*, es decir, encontrar funciones que minimizan o maximizan ciertos operadores, como en el problema de la braquistócrona. El primero de estos problemas no es el de la braquistócrona, sino otro resuelto anteriormente (1687) por Newton: encontrar el sólido de revolución que experimenta la menor resistencia al desplazarse en un fluido. Naturalmente, nuestro problema variacional es encontrar las curvas que minimizan la distancia. En el desarrollo del Cálculo de Variaciones destacan las contribuciones de Lagrange y de ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752–1833). En realidad casi todos los matemáticos del siglo XIX, desde Gauss a Weierstrass trabajaron en problemas variacionales. Hoy éste es un campo de investigación fundamental.

**4.** La hipótesis de que el segmento que une dos puntos del plano mide la distancia más corta entre ellos es un axioma asumido por Arquímedes en su tratado *Sobre la esfera y el cilindro*. La minimización de la distancia es, históricamente, la principal motivación para el estudio de las geodésicas. Johann Bernoulli y Gauss utilizaban la expresión latina *linea brevissima* para referirse a estas curvas. Euler fue quien primero publicó las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en su artículo de 1732 *De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente*. Había sido Johann Bernoulli quien propuso a Euler encontrar la línea más corta entre dos puntos de una superficie, dando lugar con ello a este artículo esencial.

## El teorema de Gauss-Bonnet

---

En esta lección obtenemos uno de los teoremas más bellos de la geometría, como se acepta de manera unánime. Veremos primero la versión local, que requiere el Umlaufstaz para superficies de la lección 17, y después la versión global, que involucra el concepto puramente topológico de característica de Euler. También hay que utilizar los conceptos introducidos en la lección anterior. Sólo con eso, es decir, sólo con ser capaces de hacer entender bien el alcance del resultado, consideraríamos alcanzado un objetivo principal de este texto. La lección termina con algunas consecuencias del teorema, relacionando curvatura, convexidad y topología.

Sea  $S$  una superficie diferenciable. Empezamos con el *teorema de Gauss-Bonnet local*:

**Teorema 19.1.** *Sea  $K$  la curvatura de Gauss de la superficie  $S$ . Sea  $\Sigma \subset S$  una región regular simple contenida en el entorno coordenado  $W$  de una parametrización ortogonal  $\varphi : U \rightarrow W \subset S$ . Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  una parametrización positiva por la longitud del arco de la frontera  $\partial\Sigma$  de  $\Sigma$ ; denotamos por  $\triangle\theta_1, \dots, \triangle\theta_n$  sus ángulos externos y por  $k_g(s)$  su curvatura geodésica (definida a trozos). Entonces*

$$\int_{\Sigma} K + \int_a^b k_g(s) ds = 2\pi - \sum_k \triangle\theta_k.$$

*Demostración.* Calculemos la integral curvilínea de la curvatura geodésica. Si  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$  son los vértices de  $\alpha$ , esa integral curvilínea es

$$\int_{\alpha} k_g = \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s) ds.$$

Por la fórmula de 17.3, p. 237, tenemos

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} k_g(s) ds = \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \left( \theta'_k + \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') \right) ds,$$

donde  $\theta_k$  es una determinación del ángulo de tangencia de  $\alpha$  en  $[s_{k-1}, s_k]$ . Fijamos un ángulo inicial  $\theta_1(s_0)$  y elegimos los siguientes  $\theta_{k+1}(s_k)$  mediante los ángulos externos

$$\theta_{k+1}(s_k) = \theta_k(s_k) + \triangle\theta_k,$$

incluyendo  $\theta_{n+1}(s_n) = \theta_n(s_n) + \triangle\theta_n$ , de manera que tenemos una determinación  $\theta$  del ángulo de tangencia de  $\alpha$  (17.4, p.238). Resulta

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \theta'_k ds &= \sum_k (\theta_k(s_k) - \theta_k(s_{k-1})) \\ &= \theta_{n+1}(s_n) - \sum_k (\theta_{k+1}(s_k) - \theta_k(s_k)) - \theta_1(s_0) \\ &= (\theta_{n+1}(s_n) - \theta_1(s_0)) - \sum_k \triangle\theta_k = 2\pi i(\alpha) - \sum_k \triangle\theta_k = 2\pi - \sum_k \triangle\theta_k, \end{aligned}$$

la última igualdad por el Umlaufsatz (17.7, p.240) y ser la parametrización  $\alpha$  positiva. Así:

$$(*) \quad \int_{\alpha} k_g = 2\pi - \sum_k \triangle\theta_k + \sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds.$$

Pasemos el sumatorio de integrales. En el abierto  $U = \varphi^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^2$  consideramos el compacto  $R = \varphi^{-1}(\Sigma)$  y su frontera  $\partial R = \varphi^{-1}(\partial\Sigma)$ . Escribiendo

$$v' ds = dv, \quad u' ds = du, \quad A = \frac{1}{2\sqrt{EG}} G_u, \quad B = \frac{1}{2\sqrt{EG}} E_v,$$

obtenemos

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds = \int_{\partial R} A dv - B du.$$

En la última integral,  $\partial R$  está orientado como frontera de  $R$ , pues  $\alpha$  es una parametrización positiva de  $\partial\Sigma$ . Tras esta preparación podemos aplicar la *fórmula de Green*, según la cual

$$\int_{\partial R} A dv - B du = \int_R \left( \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \right) dudv.$$

En nuestro caso, por ser las coordenadas ortogonales, la fórmula 13.8, p.185, hace aparecer la curvatura de Gauss:

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -K\sqrt{EG},$$

y concluimos que

$$\sum_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds = - \int_{\varphi^{-1}(\Sigma)} K \sqrt{EG} dudv = - \int_{\Sigma} K,$$

la última igualdad por la definición misma de integral de una función en una superficie (5.12, p.67). Sustituyendo esto en la igualdad (\*) anterior se obtiene la del enunciado. ■

La fórmula anterior se puede reescribir para expresar la suma de los ángulos internos de un polígono curvilíneo. Esos ángulos son  $\phi_k = \pi - \Delta\theta_k$  (17.9, p.246), luego:

$$\sum_k \phi_k = (n-2)\pi + \left( \int_{\Sigma} K + \int_a^b k_g(s) ds \right).$$

Por ejemplo, si la superficie es el plano, y el polígono curvilíneo un polígono lineal, los sumandos entre paréntesis son nulos, y obtenemos una fórmula clásica de la geometría elemental

$$\sum_k \phi_k = (n-2)\pi.$$

Veamos la contrapartida de esto en una superficie arbitraria.

**(19.2) Polígonos geodésicos.** Sea  $\varphi : U \rightarrow W$  una parametrización ortogonal de un abierto  $W$  de  $S$ . Un polígono curvilíneo  $\alpha$  se denomina *geodésico* cuando está formado por geodésicas. Si una región regular simple  $\Sigma \subset W$  tiene por frontera un polígono geodésico, la suma de los ángulos internos es

$$\sum_k \phi_k = (n-2)\pi + \int_{\Sigma} K.$$

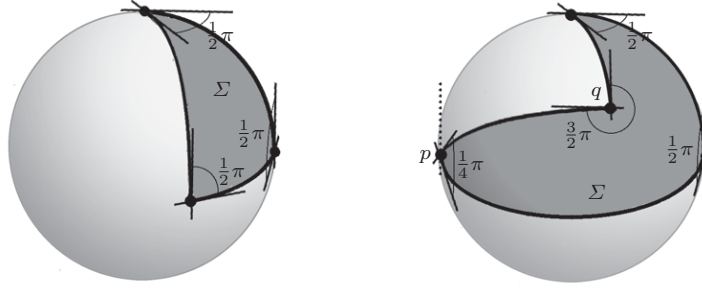
Así, esta integral de la curvatura de Gauss es la diferencia con  $(n-2)\pi$  de la suma de los ángulos internos del polígono. Esta diferencia se denomina *exceso* del polígono curvilíneo (que puede ser negativo, es decir, puede ser un defecto). Si la curvatura de Gauss es  $\equiv 0$  el exceso es nulo, y se tiene la misma igualdad de la geometría elemental. Si  $K \geq 0$ , el exceso es  $\geq 0$ , y si  $K \leq 0$  el exceso es  $\leq 0$ . ■

**Ejemplos 19.3.** (1) Consideremos la esfera unidad  $\mathbb{S}^2$ . Parametrizada como superficie de revolución, las líneas coordenadas son los meridianos y los paralelos, así que son ortogonales. De esta manera, un abierto  $W$  que excluya un semi-meridiano cerrado tiene siempre una parametrización ortogonal. Sea entonces  $\Sigma \subset W$  una región regular simple cuya frontera sea un polígono geodésico, es

decir, un polígono formado por trozos de círculos máximos. Como  $K \equiv 1$ , es  $\int_{\Sigma} K = \text{área}(\Sigma)$  (caso particular de 9.11, p.125), así que

$$\sum_k \phi_k = (n-2)\pi + \text{área}(\Sigma), \quad \text{área}(\Sigma) = \sum_k \phi_k - (n-2)\pi.$$

Veamos dos ilustraciones de esta fórmula. El efecto práctico de usar ángulos internos es que podemos despreocuparnos de orientaciones.



La primera región es un octante, limitado por un triángulo. Todos los ángulos internos valen  $\frac{1}{2}\pi$ , luego el área del octante es

$$\text{área}(\Sigma) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi - (3-2)\pi = \frac{1}{2}\pi$$

(como ya sabíamos, 5.13(1), p.67).

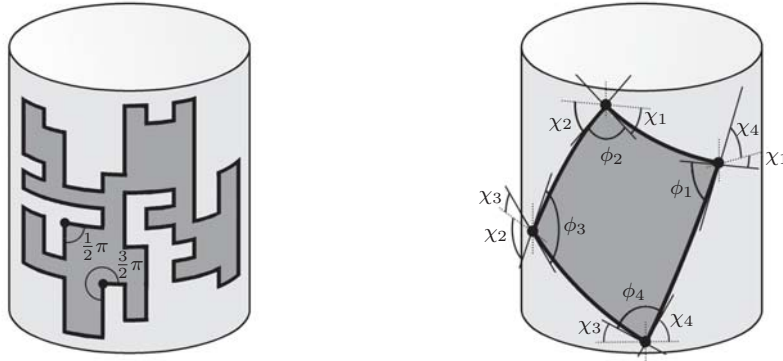
La segunda región es un cuadrilátero. En realidad es un octante y la mitad de otro, así que su área es  $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$ . Confirmémoslo. Los ángulos internos son  $\frac{1}{4}\pi$  en  $p$ ,  $\frac{3}{2}\pi$  en  $q$ , y  $\frac{1}{2}\pi$  los otros dos. El área es la prevista:

$$\text{área}(\Sigma) = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi - (4-2)\pi = \frac{3}{4}\pi.$$

(2) Sea  $S$  el cilindro unidad  $x^2 + y^2 = 1$ . Como la esfera, si lo parametrizamos como superficie de revolución, obtenemos coordenadas ortogonales en cualquier abierto  $W$  que excluya una recta generatriz vertical. Si  $\Sigma \subset W$  es una región regular simple con frontera geodésica, obtenemos

$$\sum_k \phi_k = (n-2)\pi,$$

pues la curvatura de Gauss del cilindro es idénticamente nula. Por tanto, en este caso la suma de los ángulos internos sólo depende de  $n$ . Por ejemplo, para triángulos geodésicos ( $n = 3$ ), la suma es siempre  $\pi$ . Por otra parte, las geodésicas del cilindro son las circunferencias horizontales, las rectas verticales, y las hélices. Veamos dos ejemplos.



En el primer caso el polígono consiste de circunferencias y rectas. Los ángulos internos valen  $\frac{1}{2}\pi$  o  $\frac{3}{2}\pi$ , digamos que hay  $a$  de los primeros y  $b$  de los segundos. Entonces

$$(n-2)\pi = \sum_k \phi_k = a\frac{1}{2}\pi + b\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}(a+3b)\pi.$$

Como  $n = a + b$ , operando un poco resulta  $a - b = 4$ . Es decir, sea cómo sea este polígono, *los vértices agudos son cuatro más que los obtusos*.

En el segundo ejemplo consideramos un cuadrilátero cuyos lados son cuatro hélices con ángulos característicos  $\chi_k$  diferentes. Mirando la figura vemos que los ángulos internos son

$$\phi_k = \chi_1 + \chi_4, \pi - \chi_1 - \chi_2, \chi_2 + \chi_3, \pi - \chi_3 - \chi_4.$$

Por tanto:

$$(n-2)\pi = \sum_k \phi_k = 2\pi,$$

lo que efectivamente se cumple pues  $n = 4$ . ■

Una vez establecido el teorema de Gauss-Bonnet local debemos preparar el enunciado del teorema global. Este teorema global expresa la característica de Euler de una superficie mediante la integral de la curvatura de Gauss. Para la formulación debemos primero ser capaces de definir esa integral, para lo cual también recurrimos a las triangulaciones.

**(19.4) Triangulaciones e integración.** La definición que hemos dado de integral de una función vale para integrar en dominios  $\Sigma$  globalmente parametrizados. Para hacerlo en dominios arbitrarios recurrimos a una triangulación como sigue.

Sea  $S$  una superficie compacta. Sea  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida en un conjunto  $\Sigma \subset S$ . Por el teorema de triangulación diferenciable 18.7, p. 257, podemos elegir una triangulación  $S = \bigcup_{\ell} T_{\ell}$  de manera que cada triángulo cerrado  $T_{\ell}$  esté cubierto por una parametrización  $\varphi_{\ell} : U_{\ell} \rightarrow W_{\ell}$ . Lo que sabemos calcular es la integral  $\int_{\Sigma \cap T_{\ell}} f$  y esta integral coincide con  $\int_{\Sigma \cap T_{\ell}^o} f$ , pues lo que se excluye es la integral sobre los lados del triángulo, que vale 0, pues esos lados son curvas diferenciables a trozos. Por otra parte, los interiores de los triángulos son disjuntos, luego podemos definir

$$\int_{\Sigma} f = \sum_{\ell} \int_{\Sigma \cap T_{\ell}} f.$$

En realidad, habría que probar que esta definición no depende de la triangulación, pero ni siquiera hace falta, pues sólo usaremos la definición para calcular una integral muy concreta, y el mismo resultado será independiente del uso que hagamos de triangulaciones y parametrizaciones. ■

Ahora podemos definir:

**Definición 19.5.** Sea  $S$  una superficie compacta orientable de  $\mathbb{R}^3$ , y  $K$  su curvatura de Gauss. Se denomina *curvatura íntegra de  $S$*  la integral  $\int_S K$ .

De esta manera, ya podemos enunciar el *teorema de Gauss-Bonnet global*:

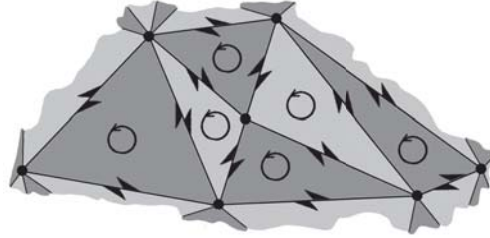
**Teorema 19.6.** Sea  $S$  una superficie compacta orientable. Entonces se tiene que

$$\int_S K = 2\pi\chi$$

La demostración del teorema de Gauss-Bonnet global depende de todo el trabajo realizado hasta este momento. Lo único que nos falta es describir cómo las triangulaciones plasman la orientación de la superficie.

**(19.7) Orientación de triangulaciones.** Supongamos fijada una orientación en  $S$  vía una aplicación de Gauss  $N$ , y elegimos un atlas  $\mathcal{A}$  de  $S$  cuyas parametrizaciones son todas compatibles con esa orientación. Sea  $S = \bigcup_{\ell} T_{\ell}$  una triangulación de  $S$  tal que cada cara  $T = T_{\ell}$  está contenida en el entorno coordenado  $W$  de cierta parametrización  $\varphi : U \rightarrow W$  del atlas  $\mathcal{A}$ . También podemos suponer que  $T$  es una región regular simple, cuya frontera  $\partial T$  es el triángulo curvilíneo formado por las tres aristas de la cara (teorema de triangulación diferenciable 18.7, p. 257).

En esta situación, elegimos una parametrización positiva  $\alpha$  de una arista  $L$  de  $\partial T$  utilizando la parametrización  $\varphi$ . Sabemos que esto significa que al girar el vector tangente  $\alpha'$  según la orientación de  $\varphi$  apunta a la cara abierta  $T^0$ . Ahora bien la orientación de  $\varphi$  coincide con la definida por  $N$ , de modo que girar  $\alpha'$  es hacer el producto vectorial  $N \wedge \alpha'$ . Esto define la orientación de la arista como frontera de  $T$ , *sin apelar a  $\varphi$* . Ahora bien, nuestra arista  $L$  es además arista de una segunda cara  $T' = T_{\ell'}$  adyacente a  $T$ , y la podemos orientar como tal frontera. Como apuntar hacia el interior de  $T$  es hacerlo hacia el exterior de  $T'$ , la orientación de  $L$  como frontera de  $T'$  es la opuesta que como frontera de  $T$ .



En suma:

*Si se orientan positivamente las fronteras de todas las caras de la triangulación, dos caras adyacentes inducen orientaciones opuestas en su arista común.*

■

Finalmente:

**Demostración del teorema de Gauss-Bonnet global.** Por el teorema de triangulación diferenciable 18.7, p.257, podemos tomar una triangulación de la superficie  $S$  tal que todo triángulo cerrado  $T_\ell$  sea un triángulo curvilíneo contenido en una parametrización ortogonal compatible con la orientación de  $S$  y orientemos positivamente los bordes de todos los triángulos. En esta situación aplicamos el teorema de Gauss-Bonnet local a cada triángulo  $T_\ell$  y obtenemos (19.1, p.271):

$$\int_{T_\ell} K + \int_{a_\ell}^{b_\ell} k_g^\ell(s) ds = 2\pi - \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^\ell.$$

Sumemos todas estas expresiones. Tenemos que: (i) la suma de las integrales de la curvatura de Gauss es la curvatura íntegra de  $S$  (19.4, p.275), y (ii) los términos correspondientes a la curvatura geodésica se cancelan dos a dos puesto que cada lado de un triángulo es recorrido dos veces en sentidos contrarios, según 19.7, p.



277. En definitiva, como hay  $F$  triángulos obtenemos

$$\int_S K = 2\pi F - \sum_{\ell=1}^F \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^\ell.$$

Por otra parte

$$\sum_{\ell=1}^F \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^\ell = 3\pi F - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_k^\ell,$$

donde  $\phi_k^\ell = \pi - \Delta\theta_k^\ell$  son los ángulos internos de los triángulos. Ahora bien, como  $3F = 2E$  (18.4(2), p. 256)

$$\sum_{\ell=1}^F \sum_{k=1}^3 \Delta\theta_k^\ell = 2\pi E - \sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_k^\ell.$$

Por último, calculemos la suma de los ángulos internos en un vértice cualquiera. Esos ángulos son todos positivos en la dirección de la orientación en el vértice (17.9, p. 246) y las caras cuyas aristas confluyen en el vértice cubren todo un entorno del mismo. Según esto, al ir sumando los ángulos internos empezando en la tangente de una arista de partida, vamos avanzando de tangente en tangente hasta volver a la inicial, y concluimos que los ángulos internos suman  $2\pi$ . Por tanto al extender la suma a todos los  $V$  vértices obtenemos

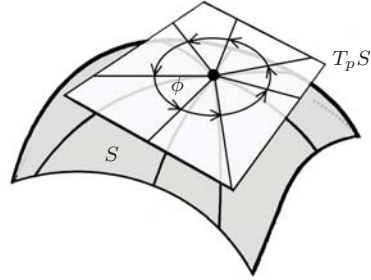
$$\sum_{j=1}^F \sum_{k=1}^3 \phi_k^\ell = 2\pi V.$$

Juntando todos estos valores,

$$\int_S K = 2\pi F - 2\pi E + 2\pi V = 2\pi\chi.$$

y queda probado el teorema. ■

El teorema de Gauss-Bonnet establece una vinculación profunda entre la geometría y la topología de las superficies compactas y de él se desprende que la curvatura íntegra es un invariante *topológico* de las superficies. Más aún, se deduce que la curvatura íntegra clasifica las superficies compactas, pues permite



calcular su característica de Euler. Por ejemplo, una superficie compacta es difeomorfa a un toro si su curvatura íntegra es nula, y es difeomorfa a una esfera si su curvatura íntegra es  $4\pi$ . En general, la curvatura íntegra de una superficie compacta de género  $g$  es  $4\pi(1 - g)$ , y vemos que la curvatura íntegra es positiva si y sólo si la superficie es difeomorfa a la esfera. En particular, si una superficie tiene curvatura de Gauss no negativa no idénticamente nula es difeomorfa a la esfera. En realidad, en este caso el teorema de Gauss-Bonnet nos dice más:

**Proposición 19.8.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta conexa y orientable, con curvatura de Gauss  $K > 0$ . Entonces la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  es un difeomorfismo.*

**Demostración.** Como  $K(p)$  es el determinante de la derivada  $d_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ , la hipótesis implica que esa derivada es un isomorfismo lineal. Se deduce entonces del teorema de la función inversa que  $N$  es un difeomorfismo local en  $p$ . Esto vale para cualquier punto de  $S$ , así que resta ver que  $N$  es biyectiva. Ahora bien, es abierta por ser difeomorfismo local, luego  $N(S)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{S}^2$  y como es compacto, es cerrado. Como  $\mathbb{S}^2$  es conexa, concluimos que  $N(S) = \mathbb{S}^2$  y  $N$  es suprayectiva. Veamos que es inyectiva, con lo que habremos terminado.

Por reducción al absurdo, supongamos que existen dos puntos distintos  $p \neq q$  con la misma imagen. Entonces por ser  $N$  difeomorfismo local en ambos, tienen entornos abiertos  $W^p$  y  $W^q$  tales que  $N(W^p) = N(W^q)$ . Se deduce que  $N(W^p) \subset N(S \setminus W^p)$ , y por tanto  $N(S \setminus W^p) = N(S) = \mathbb{S}^2$ . Ahora elegimos un atlas  $\mathcal{A}$  de  $S$  formado por parametrizaciones ortogonales, con la condición de que  $p$  esté sólo en uno de los entornos coordenados, que a su vez esté contenido en  $W^p$ . Consideremos una triangulación  $S = \bigcup_{\ell} T_{\ell}$ , cuyos triángulos cerrados estén contenidos en los entornos coordenados de  $\mathcal{A}$ , y  $p$  esté en el interior de uno de ellos (triangulación diferenciable 18.7, p. 257). De esta manera, el triángulo  $T_{\ell_0}$  que contiene a  $p$  está necesariamente contenido en  $W^p$ , y por tanto

$$\bigcup_{\ell \neq \ell_0} N(T_{\ell}) = N(S \setminus T_{\ell_0}) \supset N(S \setminus W^p) = \mathbb{S}^2.$$

Se sigue que

$$4\pi = \text{área}(\mathbb{S}^2) \leq \sum_{\ell \neq \ell_0} \text{área}(N(T_{\ell})),$$

y teniendo en cuenta que  $K > 0$ , de 9.11, p. 125, deducimos

$$\int_S K = \sum_{\ell} \int_{T_{\ell}} K = \sum_{\ell} \text{área}(N(T_{\ell})) \geq 4\pi + \text{área}(N(T_{\ell_0})) > 4\pi,$$

pues  $N(T_{\ell_0})$  tiene interior no vacío, luego área positiva. Pero el teorema de Gauss-Bonnet dice que la curvatura íntegra es  $2\pi\chi$ , luego  $\chi > 2$ , lo que es imposible. ■

La superficies de curvatura positiva tienen propiedades especiales, además de ser difeomorfos a la esfera. Ya sabemos que, localmente, quedan a un lado de sus planos tangentes (10.4(1), p. 134). Pues bien, esta propiedad es global, como establece el *teorema de convexidad de Hadamard*:

**Teorema 19.9.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta, orientable y conexa con curvatura de Gauss  $K > 0$  en todo punto. Entonces  $S$  corta a cada plano tangente suyo  $T_p S$  sólo en el punto de tangencia  $p$ , y está totalmente contenida en uno de los dos semiespacios cerrados en los que  $T_p S$  divide al espacio  $\mathbb{R}^3$ .*

Por este comportamiento, denominaremos *convexa* a una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss positiva.

*Demostración.* Por el resultado anterior, la aplicación de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  es un difeomorfismo, y en particular inyectiva. Fijemos un punto  $p \in S$  para ver que la superficie está enteramente contenida en uno de los dos semiespacios (cerrados) en los que  $T_p(S)$  divide a  $\mathbb{R}^3$  y que el único punto de contacto que tiene con este plano es precisamente  $p$ . Recurrimos a la misma función altura que en la demostración de 10.4(1), que da la distancia con signo al plano afín tangente  $p + T_p S$ :

$$h_p : S \rightarrow \mathbb{R} : q \mapsto (q - p)N(p).$$

Lo que debemos probar es que  $h_p$  sólo se anula en  $p$  y que fuera de  $p$  tiene signo constante. En caso de no ser así,  $h_p$  alcanza un máximo y un mínimo en puntos  $q_1$  y  $q_2$  distintos de  $p$ . En esos puntos se anulará la derivada de  $h_p$ , es decir, la aplicación lineal  $\omega \mapsto \omega N(p)$  será idénticamente nula en  $T_{q_1} S$  y  $T_{q_2} S$ . En consecuencia,  $N(p)$ ,  $N(q_1)$  y  $N(q_2)$  coinciden salvo signo, luego al menos dos son iguales. Esto contradice la inyectividad de  $N$ . ■

El teorema anterior tiene una segunda parte, que formulamos separadamente por su naturaleza puramente topológica, y que puede denominarse *teorema de Jordan para superficies convexas de  $\mathbb{R}^3$* .

**Teorema 19.10.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta convexa. Entonces  $S$  desconecta  $\mathbb{R}^3$  en dos componentes convexas que la tienen por frontera común, siendo una de las componentes acotada y convexa.*

**Demostración.** Para cada  $p \in S$  consideramos la función altura  $h_p : S \rightarrow \mathbb{R}$  de la demostración precedente. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $h_p \geq 0$  para cierto  $p \in S$ , y decimos que  $h_{p'} \geq 0$  para cualquier otro punto  $p' \in S$ . En efecto, sea  $p''$  un tercer punto de  $S$  distinto de  $p$  y  $p'$ . Entonces la función

$$q \mapsto (p'' - q)N(q)$$

es continua y nunca nula en el conexo  $S \setminus \{p''\}$ , luego tiene signo constante en él. Como  $(p'' - p)N(p) = h_p(p'') \geq 0$ , resulta que  $h_{p'}(p'') = (p'' - p')N(p') \geq 0$ . En fin,  $h_{p'}$  no se anula en  $S \setminus \{p'\}$ , luego tiene signo constante, y por tanto  $h_{p'} \geq 0$ . Así, cada plano tangente  $T_p S$  divide  $\mathbb{R}^3$  en dos semiespacios abiertos

$$V_p : h_p < 0, \quad A_p : h_p > 0,$$

tales que

$$V_p \cap S = \emptyset, \quad A_p \cap S = S \setminus \{p\}.$$

Vamos a probar que los conjuntos

$$V = \bigcup_p V_p, \quad A = \bigcap_p A_p,$$

son las dos componentes conexas en que  $S$  separa  $\mathbb{R}^3$  según establece (2). Obsérvese que  $V$  y  $A$  no se cortan, ni cortan a  $S$ .

Vayamos con  $A$ . Por ser  $N$  suprayectiva, existe un punto  $p = (x_1, y_1, z_1) \in S$  tal que  $N(p) = (1, 0, 0)$  y por tanto  $A_p$  es el semiespacio  $x > x_1$ . Esto acota *inferiormente* la primera variable de todos los puntos de  $A$ . Mediante un punto  $p'$  tal que  $N(p') = (-1, 0, 0)$  se acota *superiormente* esa primera variable. Análogamente se acotan la segunda variable, con puntos en los que  $N$  valga  $(0, \pm 1, 0)$ , y la tercera, con puntos en los que  $N$  sea  $(0, 0, \pm 1)$ . En suma,  $A$  es un conjunto acotado, contenido en el cubo  $\Pi = [x_1, x'_1] \times [y_2, y'_2] \times [z_3, z'_3]$ . Además  $A$  es convexo por ser intersección de semiespacios. Veamos que es abierto. Dado  $q \in A$ , la función  $p \mapsto (q - p)N(p)$  no se anula en  $S$ , que es compacta, luego alcanza su mínimo  $\delta > 0$  en  $S$ . Entonces, si  $q' \in \mathbb{R}^3$  dista de  $q$  menos que  $\delta$ , para todo  $p \in S$  tenemos:

$$(q' - p)N(p) = (q - p)N(p) + (q' - q)N(p) \geq \delta - \|q' - q\| \|N(p)\| > 0,$$

luego  $q' \in A_p$ . Por tanto,  $A$  es abierto.

Pasemos a  $V$ . Las acotaciones anteriores para  $V$  nos sirven de nuevo. Significan que  $V$  contiene los semiespacios

$$x < x_1, \quad x > x'_1, \quad y < y_2, \quad y > y'_2, \quad z < z_3, \quad z > z'_3,$$

cuya unión  $U \subset V$  es el exterior del cubo  $\Pi$  anterior. Claramente  $U \subset V$  es un conjunto conexo que corta a todos los  $V_p$ , que son conexos a su vez. Se sigue que  $V$  es conexo. Y es abierto por ser unión de semiespacios abiertos.

Estudiemos la frontera de  $V$ . Ya que  $\Lambda$  es abierto, su complementario  $\mathbb{R}^3 \setminus \Lambda$  es un cerrado que contiene a  $V$ . Deducimos

$$\overline{V} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Lambda = \mathbb{R}^3 \setminus \bigcap_p A_p = \bigcup_p \overline{V_p} \subset \overline{V},$$

de modo que  $\overline{V} = \mathbb{R}^3 \setminus \Lambda$ . Así la frontera de  $V$  es  $\overline{V} \setminus V = \mathbb{R}^3 \setminus V \cup \Lambda$ , y

$$\overline{\Lambda} \setminus \Lambda \subset \mathbb{R}^3 \setminus V \cup \Lambda = \overline{V} \setminus V.$$

Ahora probaremos que  $S \subset \overline{\Lambda}$ , de donde  $S \subset \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ . Fijemos un punto  $p \in S$  y un vector unitario  $w$  tal que  $wN(p) > 0$ . Para cada  $t > 0$  consideramos el punto  $p_t = p + tw$ . Sea  $W$  un entorno abierto de  $p$  en  $S$  tal que  $wN(q) > 0$  para todo  $q \in W$ . Como  $S \setminus W$  es compacto (cerrado en  $S$ ), se deduce que

$$\varepsilon = \min\{(p - q)N(q) : q \in S \setminus W\} > 0,$$

y resulta que para  $0 < t < \varepsilon$ ,  $p_t \in \Lambda$ . Para probarlo, dado  $q \in S$  escribimos

$$(p_t - q)N(q) = (p_t - p)N(q) + (p - q)N(q) = twN(q) + (p - q)N(q).$$

En la última suma el segundo sumando es  $h_q(p) \geq 0$ . Si  $q \in W$  el primer sumando es positivo, luego  $(p_t - q)N(q) > 0$ . Si  $q \in S \setminus W$ , como  $N(q)$  y  $w$  son unitarios, tenemos

$$twN(q) + (p - q)N(q) \geq (p - q)N(q) - t \geq \varepsilon - t > 0,$$

y también  $N(q)(p_t - q) > 0$ . Como  $p_t \rightarrow p$  cuando  $t \rightarrow 0$ , se sigue que  $p \in \overline{\Lambda}$ .

Para terminar la demostración del teorema sólo falta ver que  $\mathbb{R}^3 \setminus V \cup \Lambda \subset S$ . Pero si  $q \notin V \cup \Lambda$ , existe  $p \in S$  tal que  $h_p(q) = 0$ , es decir  $(q - p)N(p) = 0$ . En consecuencia  $q - p$  es un vector tangente a  $S$  en  $p$ , y como  $d_p N$  es biyectiva, existe otro  $\omega$  tal que  $d_p N(\omega) = q - p$ . Representamos  $\omega$  mediante una curva  $\alpha(t)$ , con  $\alpha(t_0) = p$  y  $\alpha'(t_0) = \omega$ . La función diferenciable  $g(t) = (q - \alpha(t))N(\alpha(t))$  se anula en  $t_0$  y su derivada

$$g'(t) = -\alpha'(t)N(\alpha(t)) + (q - \alpha(t))d_{\alpha(t)}N(\alpha'(t))$$

vale  $\|q - p\|^2$  en  $t_0$  por construcción. Vemos que si  $q \neq p$ , entonces  $g'(t_0) > 0$  y  $g(t)$  sería creciente, luego negativa para  $t < t_0$  cerca de  $t_0$ . Esto proporcionaría puntos  $\alpha(t)$  de  $S$  para los que  $q \in V_{\alpha(t)}$ . Contradicción y fin:  $q = p \in S$ . ■

## Problemas

**Número 1.** Sea  $\Sigma$  una región regular simple de una superficie  $S$  cuya frontera es una geodésica cerrada. Mostrar que la integral  $\int_{\Sigma} K$  es  $2\pi$ , luego independiente de  $\Sigma$ .

**Número 2.** Sea  $S$  una superficie con curvatura de Gauss  $K \leq 0$  en todo punto. Sea  $\Sigma \subset S$  un polígono geodésico contenido en un entorno coordenado  $W$  de una parametrización ortogonal  $\varphi : U \rightarrow W$ . Probar que  $\Sigma$  tiene al menos tres vértices.

**Número 3.** Utilizar el teorema de Gauss-Bonnet local (19.1, p. 271) para calcular el área de la pseudoesfera (10.7, p. 138) que queda por encima de un plano  $z = c > 0$ .

**Número 4.** Sea  $S$  una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss  $K \geq 0$ . Probar que  $S$  es homeomorfa a la esfera.

**Número 5.** Sea  $S$  una superficie compacta y conexa no homeomorfa a una esfera. Probar que  $S$  contiene puntos con curvatura de Gauss positiva, negativa y nula.

**Número 6.** Hallar la curvatura total  $\int_S K$  de la superficie  $S$  de ecuación  $x^6 + y^2 + z^{18} = 1$ .

**Número 7.** Un subconjunto compacto y conexo  $\Sigma \subset S$  se llama *región regular* si: (i)  $\Sigma$  es la adherencia de  $\overset{\circ}{\Sigma}$  y (ii)  $\partial\Sigma$  es unión de una cantidad finita de curvas de Jordan diferenciables a trozos, regulares y sin cúspides, que no se cortan. A diferencia de las regiones regulares simples, en esta definición *no se supone* que  $\Sigma$  ni las curvas que componen su borde estén contenidas en entornos coordenados. Los conceptos de ángulo externo y orientación positiva de las curvas del borde de  $\Sigma$  se pueden definir fácilmente en los mismos términos que para los polígonos curvilíneos estudiados en el texto. Mostrar mediante un ejemplo que el análogo de la fórmula del teorema de Gauss-Bonnet local,

$$\int_{\Sigma} K + \sum \int_{a_i}^{b_i} k_g^i(s) ds + \sum \Delta\theta_k = 2\pi,$$

donde las sumas se extienden a todas las curvas del borde y a todos sus ángulos externos, no es cierto en general para regiones regulares.

**Número 8.** Dar un ejemplo de un subconjunto abierto y conexo  $A$  del plano tal que  $\Sigma = \overline{A}$  es una región regular pero  $A$  no es el interior de  $\Sigma$ .

**Número 9.** El teorema de triangulación diferenciable (18.7, p. 257) se puede refinar para demostrar que una región regular  $\Sigma$  se puede expresar como unión finita  $\bigcup_{\ell} T_{\ell}$  de triángulos  $T_{\ell}$ , cubierto cada uno de ellos por una parametrización  $\varphi_{\ell} : U_{\ell} \rightarrow W_{\ell}$ , de modo que si dos triángulos se encuentran lo hacen en una arista común o en un vértice. Además esta triangulación satisface las propiedades adicionales de que si un triángulo corta el borde  $\partial\Sigma$  lo hace en un vértice o en un lado del triángulo y todo vértice del borde de  $\Sigma$  es vértice de al menos un triángulo; con tal triangulación se define la característica de Euler  $\chi(\Sigma)$ . Admitiendo esto y utilizando la notación de esta lección, probar el *Teorema de Gauss-Bonnet local generalizado*:

$$\int_{\Sigma} K + \sum \int_{a_i}^{b_i} k_g^i(s) ds + \sum \Delta\theta_k = 2\pi\chi(\Sigma),$$

donde las sumas se extienden a todos los polígonos curvilíneos que componen el borde y a sus ángulos externos.

**Número 10.** Sea  $S$  una superficie compacta con curvatura de Gauss  $K \leq 0$  en todo punto. Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  geodésicas que parten del mismo punto  $p$  y que se vuelven a encontrar en otro punto distinto  $q$ . Supongamos que las trazas de estas geodésicas forman el borde de una región regular  $\Sigma \subset S$ . Probar que  $\Sigma$  no puede ser homeomorfa a un disco.

## Notas

1. El último resultado de esta lección es un caso particular del *teorema de Jordan en dimensión 3*, según el cual *toda superficie compacta* (sin hipótesis de convexidad) *desconecta el espacio*. Aún más, este hecho es cierto en cualquier dimensión, y generaliza el teorema de la curva de Jordan [CD, 13.1, p. 147].

2. El más ilustre representante español de la Geometría Diferencial es LUIS ANTONIO (LLUÍS ANTONI en catalán) SANTALÓ SORS (1911–2001). Nació en Gerona un 9 de Octubre y realizó sus estudios secundarios en el instituto de esa ciudad. En 1927 completó estos estudios e inició los de matemáticas en la Universidad Central de Madrid (hoy Universidad Complutense). En Madrid se alojó en la Residencia de Estudiantes, uno de los centros neurálgicos de la cultura de su época, donde pudo conocer de cerca a algunas de las figuras señeras de la ciencia y las artes. Entre sus profesores en la Universidad, Santaló recordaría a BLAS CABRERA Y FELIPE (1878–1945), ODÓN DE BUEN Y DEL COS (1863–1945) y ESTEBAN TERRADAS ILLA (1883–1950). Sin embargo, el profesor que jugaría un papel determinante en su carrera científica sería JULIO REY PASTOR (1888–1962). Al finalizar sus estudios en 1934, Santaló simultaneó el cargo de profesor auxiliar en la Universidad de Madrid con el de profesor interino del Instituto Lope de Vega. Fue entonces cuando obtuvo una beca de la Junta de Ampliación de Estudios para estudiar en Hamburgo con el geómetra WILHELM JOHANN EUGEN BLASCHKE (1885–1962), contacto que le proporcionó Rey Pastor. Uno de sus compañeros en Hamburgo fue Chern quien, con el tiempo, se convertiría en uno de los grandes maestros de la Geometría Diferencial del siglo XX. Ambos asistían, juntamente con un pequeño grupo de estudiantes, al seminario de Blaschke, quien en aquellos momentos se encontraba dando los primeros pasos de una nueva área de la geometría: la Geometría Integral. Santaló comenzó su actividad investigadora en este seminario, donde demostró resultados relacionados con la *desigualdad isoperimétrica* [CD, 14.10, p. 162] y colaboró desde el primer momento con Blaschke en el desarrollo de esta geometría. A pesar de que eran tiempos difíciles, en los que era imposible no percibir una atmósfera amenazadora en la que iba cristalizando el nazismo, Hamburgo no era uno de los puntos de más tensión en este aspecto. A su vuelta a Madrid, Santaló tenía ya buena parte del material para su tesis doctoral que presentaría en 1936 bajo la dirección de PEDRO PINEDA Y GUTIÉRREZ (1891–1983) con el título *Nuevas aplicaciones del concepto de medida cinética en el plano y en el espacio*, y que se publicaría también en 1936 en el volumen 33 de la revista de la Academia de Ciencias de Madrid.

**3.** Poco después estalló la guerra civil española y este hecho tuvo para Santaló, como para tantos otros, consecuencias decisivas. Hizo la guerra en la zona republicana, asignado al ejército del aire, donde alcanzaría el grado de capitán. Fue destinado a la base aérea de Los Alcázares, próxima a Cartagena. Allí realizó tareas técnicas en las que resultaban útiles sus conocimientos matemáticos. En este tiempo se interesó por temas relacionados con la aviación, sobre los que adquirió abundante información en la biblioteca de aquel lugar, que le permitiría escribir dos libros: *Elementos de Aviación* e *Historia de la Aeronáutica*. Ambos libros verían la luz años más tarde en Argentina.

Al finalizar la guerra, Santaló se vio obligado a tomar el camino del exilio. Estuvo algún tiempo detenido en el campo de concentración de Argelés sur Mer en el sur de Francia, lugar del que consiguió evadirse para, después de una serie de peripecias, llegar a la Argentina, a donde pudo viajar gracias a los buenos oficios e, incluso, al dinero que Rey Pastor le proporcionó para pagar el pasaje. Cabe mencionar que a su paso por Francia, y en circunstancias de gran zozobra, Santaló impartió una serie de conferencias en el Instituto Henri Poincaré de París por invitación de E. Cartan.

Una vez en Argentina, recibió una oferta para trabajar en el Instituto de Matemática de la Universidad Nacional de Litoral, con sede en Rosario, a orillas del río Paraná. El director del instituto era el matemático italiano BEPPO LEVI (1875–1961), que había llegado a Argentina en circunstancias similares a las de Santaló, huyendo del fascismo que le había expulsado de su cátedra de la Universidad de Bolonia. En Rosario encontró Santaló la estabilidad que le permitió concentrarse en su trabajo y conocer a la que después sería su mujer, Hilda Rossi, con quien se casaría en 1945. Santaló llegaría a ser subdirector del instituto, pero la atmósfera creada por el advenimiento del peronismo en 1946 hizo desagradable su permanencia en aquel cargo y decidió trasladarse a la Universidad de La Plata y, posteriormente, a la de Buenos Aires.

**4.** En 1947 obtuvo una beca de la Fundación Guggenheim para estudiar Geometría Diferencial e Integral en Princeton. Primero pasó algún tiempo en la Universidad de Chicago, donde impartió un curso de Geometría Integral por iniciativa de MARSHALL HARVEY STONE (1903–1989), profesor de esa universidad. Este curso sería la base para su libro *Introduction to Integral Geometry*, que en 1953 publicaría en París la editorial Hermann y en 1956 se traduciría el ruso. Después iría al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde tuvo oportunidad de tratar a algunos de los mejores matemáticos de aquella época, entre los que se encontraban Alexander, HAROLD CALVIN MARSTON MORSE (1892–1977) y Weyl.

Al finalizar su estancia en Princeton, Santaló recibió algunas ofertas de universidades americanas pero, en parte debido a su situación familiar, decidió regresar a la Argentina, primero a la Universidad de La Plata y a partir de 1957 a la de Buenos Aires. Aún son recordados entre sus alumnos los cursos de Geometría Proyectiva y Geometría Diferencial que impartió en esta Universidad. Sus enseñanzas, aunque rigurosas, apelaban sobre todo a la intuición geométrica en una época de gran influencia bourbakista. Su *Geometría Proyectiva* se ha convertido en un clásico que es usado con gran provecho en nuestros



días. Su labor de investigación cubría, en sus propias palabras, seis áreas: Geometría Diferencial, Geometría Integral, Geometría de los cuerpos convexos, Teoría de Números, Teoría de probabilidades geométricas y Teoría del campo unificado. En todas ellas ha publicado trabajos de gran calidad en revistas como los *Annals of Mathematics*, *Duke Mathematical Journal* o el *Bulletin of the American Mathematical Society*, sin olvidar otras del ámbito español o latinoamericano como la revista de la Academia de Ciencias de Madrid o la de la Unión Matemática Argentina. En estos trabajos se encuentran importantes contribuciones a la geometría diferencial e integral de las curvas, superficies y espacios más generales, en particular a la caracterización geométrica de diferentes *invariantes afines y diferenciales*, a la fórmula de Gauss-Bonnet en espacios de curvatura constante, a la geometría diferencial e integral en espacios *hermitianos, proyectivos e hiperbólicos*, etc. Su libro *Integral Geometry and Geometric Probability*, publicado en 1976 como el primer título de la *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* de Addison- Wesley, es una referencia indispensable en este área. También son importantes sus contribuciones a la Estereología, una parte de la geometría integral que tiene por objeto reconocer cuerpos sólidos cuando sólo se conocen sus secciones planas.

5. Los méritos científicos de Santaló fueron reconocidos, aunque con retraso, en España. En 1955 fue nombrado Académico Correspondiente de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y en 1983 se le concedió el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica. La Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense programa todos los años la *Conferencia Santaló* en honor del que fue alumno y profesor de este centro. Esta conferencia marca el comienzo del año escolar y es impartida por un ilustre matemático que, con tal ocasión, escribe un artículo panorámico que se publica posteriormente en la *Revista Matemática Complutense*.

6. Respecto a la figura humana de Santaló reproducimos aquí el testimonio de CLAUDI ALSINA I CATALÁ (1952–): «Santaló fue siempre un trabajador solitario y de fondo. Ya a primera hora de la mañana se sentaba a escribir en su vieja máquina, cuyo tecleo era el hilo musical de su hogar [...] Cabe notar también la habilidad de Santaló por mantenerse al margen de cargos y de actividades políticas, lo que le permitió adquirir un enorme prestigio y ser siempre un referente en situaciones políticas muy cambiantes».

El propio Santaló resumió en pocas palabras lo que él entendía que había sido su vida: «El destino hizo que mi vida estuviera dividida en dos patrias igualmente queridas: la España de mis padres en la que pasé mi infancia y mi adolescencia en tierras catalanas, mi época de estudiante en Madrid y los años de la guerra en las costas de Murcia, y la patria Argentina en la que encontré manos tendidas de amor [...] Fue la patria de mi mujer y de mis hijas [...] Se van alejando las esperanzas de ver florecer nuevas primaveras, pero siento el consuelo de conservar intactos y eternos los sentimiento afectivos: el amor a mis tierras, la de acá y la de allá, la amistad y gratitud a los amigos, y el cariño a los familiares, también tanto los de este lado como los del otro lado de los mares».

Luis Santaló murió el 22 de noviembre de 2001 en Buenos Aires.