I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.............................. Fecha ....

Alumno/a .... Curso.............. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

Para el caso $R>2$ no podemos definir una determinación del logaritmo pero si $R<2$ $0 \notin D\left(\frac{R^2+4}{4-R^2}, \frac{4R}{|4-R^2|}\right)$ porque

$$\left|\frac{R^2+4}{4-R^2}\right| > \frac{4R}{|4-R^2|} \iff R^2+4>4R \iff R^2-4R+4>0 \iff$$

$$\iff (R-2)^2>0.$$

Por tanto estamos en un disco abierto donde sí podemos definir una determinación del logaritmo.

Por tanto $f(z) = \log\frac{2+z}{2-z}$ es holomorfa en $D(0,R)$ con $R<2$

$$f'(z) = \frac{1}{\frac{2+z}{2-z}} \cdot \frac{(2-z)+(2+z)}{(2-z)^2} = \frac{4}{(2+z)(2-z)} = \frac{1}{2+z} + \frac{1}{2-z} =$$

$$= (2+z)^{-1} + (2-z)^{-1}$$

Veamos que $f^{n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(2+z)^{-n} + (n-1)!(2-z)^{-n}$

Para $n=1$ ya está probado.

Si lo suponemos para $n \geq 1$

$$f^{n+1)}(z) = \frac{\partial}{\partial z} f^{n)}(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left((-1)^{n-1} n \,(2+z)^{-n} + (n-1)!\,(2-z)^{-n}\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (-n) \cdot (2+z)^{-n-1} + (n-1)! \cdot (-n) \cdot (2-z)^{-n-1} (-1) =$$

$$= (-1)^n \, n! \, (2+z)^{-(n+1)} + n! \, (2-z)^{-(n+1)}$$

$$f^{n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 2^{-n} + (n-1)! \, 2^{-n} = \frac{(n-1)!}{2^n} \cdot \left((-1)^{n-1}+1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{(n-1)!}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$