ENTREGA 1. EEAA. GRUPO M3 (19-20).
CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.

Fecha límite: 4-X-2019.

Entregar en la hora de problemas en mano o enviar por correo: andonide@ucm.es.

Problema 1. Sean $(A, +, \cdot)$ un anillo y $(\mathrm{End}((A, +, \cdot)), +, \circ)$ sus endomorfismos con la suma definida por $+ : \mathrm{End}((A, +, \cdot)) \times \mathrm{End}((A, +, \cdot)) \longrightarrow \mathrm{End}((A, +)); (f, g) \mapsto f + g$, donde $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$ para cada $a \in A$[1], y el producto definido por la composición usual. Se trata de probar que, en general, este satisface **todas** las propiedades de los anillos unitarios **salvo dos** (una está explicada a pie de página). ¿Qué pasa si el anillo A es de Boole?

Problema 2. Sea A un anillo conmutativo y unitario.

(1) Probar que los elementos nilpotentes de A forman un ideal (llamado *nilradical* de A).
(2) Un *ideal* $\mathfrak{a}$ propio de A se dice *radical* si, para todo $a \in A$, se cumple que, si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^n \in \mathfrak{a}$, entonces $a \in \mathfrak{a}$. Probar que un ideal $\mathfrak{a}$ propio de A es radical si, y sólo si, el nilradical de $A/\mathfrak{a}$ es trivial. Deducir que todo ideal primo de A es radical. Encontrar un ejemplo de ideal NO primo que sea radical en $\mathbb{Z}$.
(3) Dado $\mathfrak{a}$ un ideal de A arbitrario, se define su *radical* como el conjunto
$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a^n \in \mathfrak{a}\}.$$
Demostrar que el radical de un ideal es el menor ideal radical que contiene a $\mathfrak{a}$.

Problema 3. Consideremos $f : A \longrightarrow B$ un **epimorfismo de anillos** y $\mathfrak{a}$ un ideal de A.

(1) Probar que la imagen por f de $\mathfrak{a}$ es ideal en B. ¿Qué sucede si f NO es sobreyectiva?

Supongamos ahora que f es biyectiva y sea $\mathfrak{b} = f(\mathfrak{a})$.

(2) Probar que se tiene el isomorfismo $A/\mathfrak{a} \cong B/\mathfrak{b}$.
(3) Deducir que f establece una biyección entre los ideales de A y los de B; y que, en esta biyección, los ideales primos, maximales y radicales de A[2] se corresponden con los ideales primos, maximales y radicales, respectivamente, de B.

Problema 4.

(1) Usando que todo subconjunto no vacío de los enteros positivos tiene un elemento mínimo (**Teorema del Buen Orden**) y el **Teorema de la División**, probar que todo ideal de $\mathbb{Z}$ es principal; esto es, está generado por los múltiplos de un elemento.
(2) Utilizando el **Ejercicio** 13 de la primera **Hoja de Problemas**, deducir que un ideal propio de $\mathbb{Z}$ es primo si, y sólo si, es maximal. Concluir que los ideales primos de $\mathbb{Z}$ (distintos del trivial) son aquellos generados por un número primo.

[1] ¡OJO! La suma de endomorfismos así definida NO es endomorfismo de anillos; esto es, en general, se tiene que $f + g \notin \mathrm{End}((A, +, \cdot))$, pues puede ser que $(f + g)(ab) \neq (f + g)(a)(f + g)(b)$ para ciertos $a, b \in A$.

[2] Se sobreentiende que para esta parte se suponen sobre A y B todas las condiciones necesarias para que estas tres nociones tengan sentido. A saber, que estos dos son anillos conmutativos y unitarios (pues, de lo contrario, no tiene sentido hablar de ideales radicales).

Problema EXTRA. (en sustitución del **Problema** 1)

(1) Define la noción de *álgebra sobre un cuerpo* (buscar en algún libro o por internet; y decir cuál ha sido la referencia empleada). ¿Cómo está relacionada esta noción con las ya conocidas de **anillo** y **espacio vectorial sobre un cuerpo**? Dar un ejemplo de anillo que NO sea álgebra sobre un cuerpo, y otro que SÍ lo sea.

(2) ¿Qué es un álgebra asociativa? ¿Y conmutativa? ¿Y unitaria? Demostrar que los endomorfismos $\mathrm{End}(V)$ de un espacio vectorial $(V, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$ satisface los axiomas para las álgebras asociativas y unitarias, con las operaciones suma $+ : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V); (f, g) \mapsto f+g$, donde $(f+g)(v) := f(v)+g(v)$ para cada $v \in V$, y producto $\circ$ dado por la composición usual. ¿Es conmutativa?