MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Problemas
Hoja 6. Resolución de ecuaciones no lineales

1 Utilizar el método de la bisección para aproximar una raíz de la ecuación

$$\sqrt{x}\,\mathrm{sen}(x) - x^3 + 2 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ con un error menor que $\dfrac{1}{30}$.

2 Comprobar que se puede aplicar el teorema del Punto Fijo a las siguientes funciones en los intervalos dados:

$$\text{a) } f(x) = \frac{\cos(x)}{8} + \frac{x^2}{4} \text{ en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \qquad \text{b) } g(x) = \frac{x - x^2 + 1}{5} \text{ en } [0, 1].$$

3 Determinar un intervalo y una función para poder aplicar el método del Punto Fijo a las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } x^3 - x - 1 = 0. \qquad \text{b) } 4 - x - \tan(x) = 0. \qquad \text{c) } x = -\ln(x).$$

Determinar, en cada caso, el número de iteraciones necesario para que el error cometido sea inferior a 10^{-5}.

4 Se considera la ecuación $x^2 - 1 - \mathrm{sen}(x) = 0$.

a) Probar que dicha ecuación tiene, al menos, una raíz positiva.

b) Encontrar un intervalo en el que la iteración

$$x_n = \sqrt{1 + \mathrm{sen}(x_{n-1})},\ n \in \mathbb{N}$$

converja, para cualquier valor inicial x_0 de dicho intervalo, a una raíz positiva de la ecuación anterior. ¿Cuántos pasos deben darse, a partir de $x_0 = \frac{\pi}{2}$, para obtener una aproximación de la raíz con un error inferior a la milésima?

5 Se considera la función

$$g(x) = \mathrm{sen}^2(x),\ x \in [0, \pi].$$

Aplicar el teorema del Punto Fijo a la función

$$f(x) = 2 + \frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}$$

en el intervalo $[1.6, 2]$ para determinar el valor del punto ζ para el que se verifica que

$$\int_0^\zeta g(t)dt = 1$$

de forma que el error cometido sea inferior a 10^{-4}.

6 Sea $F : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \dfrac{x-1}{x} - e^{-x}$.

a) Dibujar la gráfica de F y determinar el número de raíces reales de la ecuación $F(x) = 0$, localizando cada raíz entre dos enteros consecutivos.

b) Para cada una de las funciones siguientes:

$$f_1(x) = 1 + xe^{-x}, \quad f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad f_3(x) = (x-1)e^x$$

consideramos el siguiente método iterativo: dado $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario sea

$$x_n = f_i(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Estudiar cuáles de estas sucesiones convergen hacia alguna de las raíces de la ecuación $F(x) = 0$.

c) Elegir intervalos y puntos iniciales adecuados para que el método de Newton converja a cada una de las raíces.

7 Dados un número natural n y un número positivo α, una forma de calcular las raíces reales n–ésimas de α sin usar radicales es aplicar el *método de Newton* a la ecuación

$$x^n - \alpha = 0.$$

Encontrar un intervalo y un valor inicial para los que el método sea convergente.

8 Demostrar que la ecuación

$$e^x \ln(x) + x^3 - 2 = 0$$

tiene una única raíz positiva. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el método de Newton converja a dicha raíz.

9 Demostrar que la ecuación

$$\cos(x) - 3x = \frac{\pi}{2}$$

tiene una única raíz real. Determinar un intervalo y un valor inicial para los que el método de Newton converja a dicha raíz.

10 Calcular las raíces de la ecuación $x^3 - x^2 + 3x = 3$.

11 Calcular las raíces del polinomio

$$P(x) = 5x^5 - 17x^4 - 79x^3 + 269x^2 - 34x - 24.$$

12 Calcular las raíces reales de la ecuación algebraica $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0$.

13 Dada la ecuación algebraica $x^5 + x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 13x - 10 = 0$,

a) Determinar el número de raíces positivas.

b) Encontrar una raíz racional negativa.

c) Hallar el número de raíces reales y complejas de la ecuación anterior.

d) Determinar un intervalo donde se pueda aplicar el método de Newton para aproximar la raíz positiva más pequeña, así como los dos primeros términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que determina dicho método.