ENTREGA 1. GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES. 2021/2022.

E. FERNÁNDEZ Y J. M. SANJURJO.

Problema 1. (6 puntos) Sea $\alpha : (-a,a) \to \mathbb{R}^3$ una curva PPA birregular tal que $k_\alpha(s) = k_\alpha(-s)$ y $\tau_\alpha(s) = \tau_\alpha(-s)$. Demostrar que la traza de α es simétrica respecto a su recta normal en $s = 0$.

Problema 2. (3 puntos)

(i) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana regular. Supongamos que existe $t_0 \in I$ con $||\alpha'(t_0)|| = 1$. Probar que [1]

$$k_\alpha(t_0) = \alpha''(t_0) \cdot n_\alpha(t_0).$$

(ii) Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular PPA, $t_0 \in I$ un tiempo fijo y $\beta : I \to \Pi^{osc}_{\alpha(t_0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ la curva obtenida al proyectar ortogonalmente α sobre su plano osculador en $\alpha(t_0)$. Demostrar que la curvatura $k^{\mathbb{R}^2}_\beta(t_0)$ de β como curva plana[2] en t_0 coincide con la curvatura $k_\alpha(t_0)$ de α en t_0. Esto es,

$$k^{\mathbb{R}^2}_\beta(t_0) = k_\alpha(t_0).$$

Problema 3. (1 punto) Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva PPA y $\mathbb{D}^2(0;R) \subseteq \mathbb{R}^2$ el disco cerrado de radio R. Supongamos que la traza de α está contenida en $\mathbb{D}^2(0;R)$ y existe cierto tiempo $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) \in \partial\mathbb{D}^2(0;R) = \mathbb{S}^1(0;R)$. Demostrar que

$$|k^{\mathbb{R}^2}_\alpha(t_0)| \geq 1/R.$$

Problema extra. (Hasta 1 punto) Sea $A : I \to \mathrm{SO}(3)$ un camino diferenciable de matrices, esto es, tal que todas sus entradas son funciones diferenciables.

(i) Demostrar que existe un camino de matrices $B : I \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A' = AB.$$

Aquí A' denota la matriz $\frac{d}{ds}A(s) = (a'_{ij}(s))_{1\leq i,j\leq 3}$ donde $A(s) = (a_{ij}(s))_{1\leq i,j\leq 3}$.

(ii) Probar que la matriz B de (i) es antisimétrica, es decir,

$$B + B^t = 0.$$

(iii) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular cualquiera. Sabiendo que $t'_\alpha(s) = k_\alpha(s)n_\alpha(s)$ y que $b'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s)n_\alpha(s)$ usar (ii) para deducir el valor que $n'_\alpha(s)$.

[1] Recordar que el normal de una curva plana regular β viene dado por $Jt_\beta(t)$, donde $t_\beta(t)$ es el tangente unitario y $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la rotación de ángulo $\pi/2$ en sentido antihorario (la multiplicación por el número complejo i en $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$).

[2] Asumimos que el plano osculador se orienta vía la base *ortonormal* ordenada $\langle t_\alpha(t_0), n_\alpha(t_0)\rangle$.