De esta manera

$$\Pi(\theta|x_1 \dots x_n) = \frac{e^{-\theta} I_{(0,\infty)}(\theta) \cdot e^{n\theta} \cdot \cancel{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}} \cdot I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta} e^{n\theta} \cancel{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}} I_{(-\infty, x_{(1)})}(\theta)\, d\theta} =$$

$$= \frac{e^{-(1-n)\theta} \quad I_{(0,x_{(1)})}(\theta)}{\int_0^{x_{(1)}} e^{-(1-n)\theta}\, d\theta} \underset{n\neq 1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{e^{-(1-n)\theta}}{\left. \frac{e^{-(1-n)\theta}}{n-1} \right]_{\theta=0}^{\theta=x_{(1)}}} \cdot I_{(0,x_{(1)})}(\theta) =$$

$$= \frac{e^{(n-1)\theta}}{e^{-(1-n)x_{(1)}} - e^0} (n-1) \cdot I_{(0,x_{(1)})}(\theta) = \frac{e^{(n-1)\theta} \quad (n-1)}{e^{(n-1)x_{(1)}} - 1} \cdot I_{(0,x_{(1)})}(\theta)$$

$\left(\text{Si } n=1 \Rightarrow \Pi(\theta|x_1 \dots x_n) = \frac{1}{x_{(1)}} I_{(0,x_{(1)})}(\theta) \right)$

Para el caso $n=1$, cualquier intervalo $(a,b) \subset [0, x_{(1)}]$ y que cumpla que $F_\theta(b|x_1 \dots x_n) - F_\theta(a|x_1 \dots x_n) = 1-\alpha$ tiene la misma longitud porque estamos tratando con una v.a. $\theta \sim \mathcal{U}(0, x_{(1)})$.

Si $n>1$, como la función de densidad a posteriori de θ es monótona creciente, el intervalo Bayesiano de máxima densidad (a,b) tiene que cumplir que $b = x_{(1)}$ y $F_\theta(a|x_1 \dots x_n) = \alpha$

Si calculamos explícitamente a:

$$F_\theta(a|x_1 \dots x_n) = \int_0^a \frac{e^{(n-1)\theta} \quad (n-1)}{e^{(n-1)x_{(1)}} - 1}\, d\theta = \frac{n-1}{e^{(n-1)x_{(1)}} - 1} \cdot \left. \frac{e^{(n-1)\theta}}{\cancel{n-1}} \right]_0^a =$$

$$= \frac{e^{(n-1)a} - 1}{e^{(n-1)x_{(1)}} - 1} = \alpha .$$