Aplicación derivación bajo el signo integral.

$\boxed{\text{TRANSFORMADAS}}$

Transformada de Fourier coseno

$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F_c(\omega) = \hat{f}_c(f)(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt$$

frecuencia

tiempo

Su versión discreta es la base de todos los algoritmos de compresión: jpeg, mpeg, ...

Ejemplo: Calcular la transformada de Fourier coseno

de $f(t) = e^{-t^2/2}$.

$$F(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} \cos(wt)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_n \int_0^n e^{-\frac{1}{2}t^2} \cos(wt)\, dt$$

integral impropia (bien definida: $\left|e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(wt)\right| \leq e^{-t/2},\ t \geq 1$)

$$F'(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dw} \lim_n \int_0^n e^{-\frac{1}{2}t^2} \cos(wt)\, dt \overset{*}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_n \int_0^n \left(-t e^{-\frac{1}{2}t^2} \operatorname{sen} wt\right) dt$$

$*$ 1º

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{1}{2}t^2} \operatorname{sen} wt\, dt$$

$\boxed{\text{conv.}}$

Integramos por partes

$$\int t e^{-\frac{1}{2}t^2} \operatorname{sen} wt \, dt \stackrel{\uparrow}{=} -\operatorname{sen} wt \, e^{-t^2} + \int w e^{-\frac{1}{2}t^2} \cos wt \, dt.$$

$dv = t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \rightarrow v = -e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$u = \operatorname{sen} wt \rightarrow du = w \cos wt \, dt$

$$\int_0^\infty t e^{-\frac{1}{2}t^2} \operatorname{sen} wt \, dt = w \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} \cos wt \, dt$$

PVI

Tenemos por tanto: $F'(w) = -wF(w)$

Además $F(0) = 1$

$F(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = 1$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

$$\Longrightarrow \boxed{F(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}}$$

Ecuaciones dif.

Por tanto la transformada de Fourier coseno de la gaussiana normalizada es ella misma.

papel central de la gaussiana en T^a de la señal (ej. GSM)