Temas 3 y 4: Conjuntos, funciones y relaciones. Primera parte

David de Frutos Escrig
versión original elaborada por
María Inés Fernández Camacho

MATEMÁTICA DISCRETA Y LÓGICA MATEMÁTICA
(Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas)
UCM Curso 18/19

Conjuntos

Conjunto (Cántor 1840-1918): cualquier colección, considerada como un todo, de objetos bien definidos de nuestro pensamiento o de nuestra intuición.

Def:

Conjunto: *Colección de objetos que reciben el nombre de* **elementos**.

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ indica que el elemento $\boldsymbol{x}$ **pertenece** al conjunto $\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$ indica que el elemento $\boldsymbol{x}$ **no pertenece** al conjunto $\boldsymbol{A}$

Universo de discurso: universo "platónico" de posibles elementos.

Def:

Conjunto universal, $\mathcal{U}$: *aquél que comprende todos los objetos del universo del discurso.*

Def:

Conjunto vacío, ϕ, $\{\}$: *aquél que no contiene ningún elemento.*

Conjuntos

- A veces los conjuntos pueden definirse por enumeración de sus elementos entre llaves:
  $\{1,2\}$ $\{0,2,4,6,8,\cdots\}$
  $\{\text{coche, moto, bicicleta}\}$ $\{1,\{2\},3\}$
- Ello ciertamente es posible cuando se trate de conjuntos finitos, y en algunos casos infinitos, en los que un "prefijo" finito sugiere la forma de los restantes elementos, representados por puntos suspensivos.
- Nuestro universo puede ser tan amplio como lo necesitemos en cada caso. En particular, una vez sabemos qué es un conjunto, estos pueden formar parte a su vez de un universo más amplio, en el que "conviven" elementos "originales" y estos conjuntos, que pasan a ser elementos de otros que vayamos a considerar.
- No siempre pueden definirse los conjuntos por enumeración de sus elementos: $\mathbb{R}$.

Un conjunto queda descrito completamente por sus elementos. Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, aunque se hayan definido de distinta forma.

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 3, 1, 2, 2, 2\}$$

Axioma de extensionalidad

Dos conjuntos A y B son iguales, lo que denotamos $A = B$, si y sólo si tienen los mismos elementos.

Formalmente: $(A = B) \sim \forall x \ \ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ **(1)**

(es decir la igualdad entre dos conjuntos A y B corresponde a la equivalencia de los predicados $x \in A$ y $x \in B$ para cualquier x).

Para negar $A = B$ se usa la notación $A \neq B$.

$$(A \neq B) \sim \neg(A = B)$$

Definición de un conjunto por medio de la propiedad característica de sus elementos.

Axioma de comprehensión

Dado un conjunto universal, $\mathcal{U}$ y una propiedad P definida sobre él, los elementos de $\mathcal{U}$ que satisfacen P forman un conjunto, que se escribe $\{x \in \mathcal{U} / P(x)\}$.

Formalmente: $\forall x \in \mathcal{U} \quad (x \in \{x \in \mathcal{U} / P(x)\} \leftrightarrow P(x))$ **(2)**

Ejs.: 1.
$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par menor que } 12\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} / (\exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m) \wedge (n < 12)\} \\ &= \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{(por el axioma de extensionalidad)} \end{aligned}$$

2. $\{x \in \mathbb{R} / x^2 = -1\} \;=\; \{x \in \mathbb{N} / x = x + 1\} \;=\; \phi$

Def:

El conjunto A está incluido en el B, o es un subconjunto de B, lo que denotamos $A \subseteq B$, si todo elemento de A es un elemento de B.

Formalmente: $(A \subseteq B) \sim \forall x \ (x \in A \rightarrow x \in B)$ **(3)**
(La noción de subconjunto enlaza con la implicación lógica)

Def:

El conjunto A está incluido estrictamente en el B, o es un subconjunto propio de B, lo que denotamos $A \subset B$, si todo elemento de A es un elemento de B, pero hay al menos un elemento de B que no está en A.

Formalmente: $(A \subset B) \sim ((A \subseteq B) \wedge \neg(A = B))$

$$(A \not\subseteq B) \sim \neg(A \subseteq B) \qquad (A \not\subset B) \sim \neg(A \subset B)$$

Ejs.:

$$\{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par menor que } 12\} \subseteq \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset \{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par } \} \subset \mathbb{N}$$

Predicados versus subconjuntos: Mediante los axiomas de extensionalidad y comprehensión podemos identificar propiedades sobre los elementos de $\mathcal{U}$ con subconjuntos de $\mathcal{U}$, pues cada propiedad sobre los elementos de $\mathcal{U}$ estará unívocamente determinada por el conjunto de elementos de $\mathcal{U}$ que satisfacen la propiedad.

Ejs.:

$\mathcal{U} = \mathbb{N}$
P(n): n es par menor que 12
$\{n \in \mathbb{N}/\mathrm{P(n)}\} = \{n \in \mathbb{N}/n \text{ es par menor que } 12\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \subset \mathbb{N}$

Algunas propiedades de la inclusión

Prop.: Dados conjuntos cualesquiera A, B, C, se tiene:

1. $A \subseteq A$
2. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$
3. $A \not\subset A$
4. $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
5. Si $A \subset B$, entonces $B \not\subseteq A$
6. Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
7. Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$
8. $\phi \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$ $\quad (\phi,\ \mathcal{U}$ cotas universales)

Dem de 4)

$$(A = B) \sim \forall x \;\; (x \in A \leftrightarrow x \in B) \qquad (1)$$

$$\sim \forall x \;\; ((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)) \qquad (\leftrightarrow)$$

$$\sim (\forall x \;\; (x \in A \to x \in B)) \wedge (\forall x \;\; (x \in B \to x \in A))$$

$$\sim (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \qquad (3)$$

DEF:

Dados dos conjuntos A y B, se define:

- **Unión:** $A \cup B = \{x/(x \in A) \vee (x \in B)\}$
  $A \cup B$ es el conjunto cuyos elementos están en A o en B o en ambos.
- **Intersección:** $A \cap B = \{x/(x \in A) \wedge (x \in B)\}$
  $A \cap B$ es el conjunto cuyos elementos están tanto en A como en B.
- **Diferencia:** $A \setminus B = \{x/(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
  $A \setminus B$ es el conjunto cuyos elementos están en A pero no están en B.

DEF:

Dado A conjunto sobre un universo $\mathcal{U}$, llamamos **complemento** *o* **complementario** *de A, al conjunto $\mathcal{U} \setminus A$ y lo denotaremos simplemente por $\setminus A$.*

$$\setminus A = \{x/x \notin A\}$$

Las uniones corresponden a disyunciones: $(x \in A \cup B) \sim ((x \in A) \vee (x \in B))$

Las intersecciones corresponden a conjunciones: $(x \in A \cap B) \sim ((x \in A) \wedge (x \in B))$

Diferencia: $(x \in A \setminus B) \sim ((x \in A) \wedge (x \notin B))$

El complemento corresponde a la negación: $(x \in \setminus A) \sim \neg(x \in A)$

Ejs.:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \cdots\}$
$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
$C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = A$ $\quad A \cap B = B$ $\quad B \subset A$

$B \cup C = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\}$ $\quad B \cap C = \{2, 8\}$ $\quad B \not\subseteq C$ $\quad C \not\subseteq B$

$A \setminus B = \{12, 14, \cdots\}$ $\quad B \setminus A = \phi$

$B \setminus C = \{0, 4, 6, 10\}$ $\quad C \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

¡Ojo! : Cuando $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ $\quad \setminus A = \{1, 3, 5, \cdots\}$

Pero para $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ $\quad \setminus A = \{1, 3, 5, \cdots\} \cup \{-1, -2, -3, \cdots\}$

DEF:

Dos conjuntos A y B, tales que $A \cap B = \phi$ se llaman disjuntos.

Ej.: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $\quad$ $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

$$A \cap B = \phi$$

DEF:

Una familia de conjuntos es un conjunto $\mathcal{C}$ cuyos elementos son todos conjuntos (habitualmente sobre un mismo universo $\mathcal{U}$).

Ej.:

Dado $k \in \mathbb{Z}$ $\quad M_k = \{nk / n \in \mathbb{N}\}$ (conjunto de los múltiplos de k con factor de multiplicidad no negativo)

$\mathcal{C} = \{M_k / k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots\}$ (familia de conjuntos)

DEF:

Dada una familia no vacía $\mathcal{C}$ de conjuntos se definen:

- *Unión de $\mathcal{C}$:* $\cup\mathcal{C} = \{x/(x \in A)$ *para algún* $A \in \mathcal{C}\}$
- *Intersección de $\mathcal{C}$:* $\cap\mathcal{C} = \{x/(x \in A)$ *para todo* $A \in \mathcal{C}\}$

Formalmente: $x \in \cup\mathcal{C} \sim \exists A \in \mathcal{C} \;\; x \in A$

$x \in \cap\mathcal{C} \sim x \in A \;\; \forall A \in \mathcal{C}.$

Observese que tanto $\cup\mathcal{C}$ como $\cup\mathcal{C}$ son "meros" conjuntos y ya no familias.

Ej.:

Dado $k \in \mathbb{Z}$ $\quad M_k = \{nk/n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{C} = \{M_k/k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots\}$

$\cup\mathcal{C} = \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \cap\mathcal{C} = \{0\}.$

Def:

Dado un conjunto A, el conjunto potencia o conjunto de las partes de A es el dado por $\wp(A) = \{S / S \subseteq A\}$

Ej.: $A = \{0, 2, 3, 5\}$

$$\wp(A) = \{\phi, \{0\}, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{0,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{0,2,3\}, \{0,2,5\}, \{0,3,5\}, \{2,3,5\}, A\}$$

- La unión, intersección y complementación son operaciones en $\wp(\mathcal{U})$.

Una partición de A clasifica los elementos de A en una serie de clases disjuntas, generando por tanto una familia que es un subconjunto de $\wp(A)$.

Def:

Siendo $A \neq \phi$ y $\mathcal{C} \subseteq \wp(A)$ una familia de subconjuntos de A, decimos que $\mathcal{C}$ es una partición de A, si se cumple:

1) $\cup \mathcal{C} = A$
2) $B \neq \phi \quad \forall B \in \mathcal{C}$
3) $\forall B, D \in \mathcal{C}$ *tales que* $B \neq D$ *se tiene que* $B \cap D = \phi$

Ej.:

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \{0\}\}$$

es una partición de $\mathbb{Z}$

n-Tuplas ordenadas: n objetos colocados en un cierto orden.

- Para cualquier $n \geq 2$ podemos formar n-tuplas (o n-uplas) $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que obedecen a la **ley de igualdad:**

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \leftrightarrow (x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)$$

Cuando $n = 2$ se las llama pares ordenados.
Cuando $n = 3$ se las llama triples o ternas ordenadas.

DEF:

Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece a A y su segunda componente pertenece a B, se llama producto cartesiano o **producto cruzado** *de A y B, y se escribe $A \times B$. Es decir,*

$$A \times B = \{(x, y)/(x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Ej.: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ conjunto de las coordenadas cartesianas del plano.

• Los productos cartesianos derivan su nombre de las coordenadas cartesianas, que se denominaron así en honor a su introductor, Descartes, quien había latinizado su nombre como Cartesius.

• Si $A = \phi$ o $B = \phi$, entonces $A \times B = \phi$

$$(\phi \times B = A \times \phi = \phi \times \phi = \phi)$$

Def:

Productos cartesianos de n factores: *Dados n conjuntos $A_1, \cdots, A_n$, su producto cartesiano es el conjunto*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)/(x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \cdots \wedge (x_n \in A_n)\}$$

Si $A_i = A$ para todo i, $A \times \overset{n}{\cdots} \times A$ se escribe A^n.

Ej.: $A = \{0, 1\} \qquad B = \{a, b\} \qquad C = \{(0, 0), x\}$

$$A \times B \times C = \{(0, a, (0, 0)), (0, a, x), (0, b, (0, 0)), (0, b, x), (1, a, (0, 0)), (1, a, x), (1, b, (0, 0)), (1, b, x)\}$$

Identidades básicas entre conjuntos (leyes de De Morgan y de Boole)

$A \cup \setminus A = \mathcal{U}$	Ley de complementación
$A \cap \setminus A = \phi$	Ley de exclusión
$A \cup \phi = A$ $A \cap \mathcal{U} = A$	Leyes de identidad
$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ $A \cap \phi = \phi$	Leyes de dominación
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leyes de idempotencia
$\setminus \setminus A = A$	Ley de doble complementación
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leyes de conmutatividad
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Leyes de asociatividad
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leyes de distributividad
$\setminus(A \cup B) = \setminus A \cap \setminus B$ $\setminus(A \cap B) = \setminus A \cup \setminus B$	Leyes de De Morgan

Demostración de las leyes

1. Mediante las definiciones formales de unión, intersección, complemento y las leyes de las conectivas lógicas.

Ej.: $A \cap B = B \cap A$

$$\begin{array}{lcll} x \in A \cap B & \sim & (x \in A) \wedge (x \in B) & \text{def. de } \cap \\ & \sim & (x \in B) \wedge (x \in A) & \wedge \text{ es conmutativa} \\ & \sim & (x \in B \cap A) & \text{def. de } \cap \end{array}$$

Luego

$$\forall x \ (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A) \sim (A \cap B = B \cap A)$$

(axioma de extensionalidad)

Identidades básicas entre conjuntos (leyes de De Morgan (1806-1871) y de Boole (1815-1864)) (3)

Demostración de las leyes

2 Mediante **tablas de pertenencia** (que se corresponden con las tablas de verdad).

Determinar la pertenencia a un conjunto C obtenido mediante operaciones entre otros conjuntos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ indicando la pertenencia de un elemento a C en función de su pertenencia a $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Las columnas corresponden a los conjuntos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ y C. Las casillas indican la pertenencia (con 1) o la no pertenencia (con 0) al conjunto de la correspondiente columna, teniendo en cuenta los valores de la fila correspondiente.

Columnas iguales detectan conjuntos idénticos.

Ej.: $A \cap B = B \cap A$

A	B	$A \cap B$	$B \cap A$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

($\cap$, tabla de pertenencia)
($\wedge$, tabla de verdad)

$$\forall x \ (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in B \cap A) \sim (A \cap B = B \cap A)$$

Derivación de propiedades (ecuaciones, identidades) a partir de las leyes dadas en la tabla de identidades básicas entre conjuntos:

Ej.: Leyes de absorción:

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap (A \cup B) &= A \end{aligned}$$

Dem: $A \cup (A \cap B) = A$

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap \mathcal{U}) \cup (A \cap B) && \text{identidad} \\ &= A \cap (\mathcal{U} \cup B) && \text{distributividad} \\ &= A \cap (B \cup \mathcal{U}) && \text{conmutatividad} \\ &= (A \cap \mathcal{U}) && \text{dominación} \\ &= A && \text{identidad} \end{aligned}$$

Simplificación de expresiones que involucran conjuntos a partir de las leyes dadas en la tabla de identidades básicas entre conjuntos:

$\setminus((\setminus A \cup \setminus C) \cap B) \cup \setminus(A \cup \setminus(C \cap \setminus B) \cup C)$	
$= (\setminus(\setminus A \cup \setminus C) \cup \setminus B) \cup (\setminus A \cap \setminus\setminus (C \cap \setminus B) \cap \setminus C)$	De Morgan
$= ((\setminus\setminus A \cap \setminus\setminus C) \cup \setminus B) \cup (\setminus A \cap (C \cap \setminus B) \cap \setminus C)$	De Morgan y doble complementación
$= ((A \cap C) \cup \setminus B) \cup (\setminus A \cap \setminus B \cap (C \cap \setminus C))$	doble complementación, conmutatividad y asociatividad
$= ((A \cap C) \cup \setminus B) \cup (\setminus A \cap \setminus B \cap \phi)$	exclusión
$= ((A \cap C) \cup \setminus B) \cup \phi$	asociatividad y dominación
$= (A \cap C) \cup \setminus B$	identidad

Utilización de tablas de pertenencia para refutar propiedades:

¿Es válida siempre la siguiente igualdad?

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = A \setminus B$$

Veamos que no:

A	B	C	$A \cup C$	$B \cup C$	$A \setminus B$	$(A \cup C) \setminus (B \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	**1**	**0**
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

La sexta línea de la tabla nos indica que puede haber elementos de $A \setminus B$ que no pertenezcan a $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$, lo que ocurrirá si tenemos algún x con $x \in A$, $x \notin B$ y $x \in C$. Así que la igualdad por la que se preguntaba en general es falsa.

Un contraejemplo concreto: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{6, 2, 3\}$ $C = \{1, 5\}$

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = \phi \quad A \setminus B = \{1\}$$

Otro contraejemplo: $A = \{1, 4\}$ $B = \{5\}$ $C = \{1\}$

$$(A \cup C) \setminus (B \cup C) = \{4\} \quad A \setminus B = \{1, 4\}$$

Definiciones de operaciones derivadas:

Se pueden definir con expresiones que combinan otras operaciones sobre conjuntos ya definidas.

Def:

Dados dos conjuntos A y B, su diferencia simétrica , $A \oplus B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B, y aquellos de B que no pertenecen a A.

$$A \oplus B = \{x / ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin A))\}$$

Como operación derivada:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Algunas propiedades de $\oplus$

Prop.: Dados dos conjuntos cualesquiera A, B se tiene:

1. Conmutatividad $A \oplus B = B \oplus A$
2. $A \oplus (A \oplus A) = A$
3. Asociatividad $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
4. $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Ejercicio: Demuéstralas y da en particular una caracterización directa de la pertenencia al conjunto $A \oplus (B \oplus C)$.