Ejercicio 2: Para contrastar si un instrumento de medida es suficientemente preciso, se supone que el error cometido en la medición es una variable aleatoria $X \sim N(0,\sigma^2)$. El instrumento es aceptable si $\sigma^2 < \sigma_0^2$ donde σ_0^2 es conocido. Como queremos estar seguros de esta afirmación realizamos el contraste $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ frente a $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$. Si $(X_1, X_2, \dots X_n)$ es una m.a.s. de $X \sim N(0,\sigma^2)$, hallar el test UMP de tamaño α. ¿Cuál es el p-valor del contraste?

—— × —— × —— × ——

Como realizamos un contraste unilateral de hipótesis nula simple frente a alternativa simple buscamos aplicar el Teorema de Karlin-Rubin, que nos da el test UMP. Para ello, primero necesitamos saber si hay algún estadístico $T(X_1 \dots X_n)$ para el cual el modelo tenga razón de verosimilitudes monótona. Como el modelo es el normal, y sabemos que pertenece a la familia exponencial, basta comprobar si $q(\theta)$ es monótona.

$$f(x_1 \dots x_n | \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-0)^2}{\sigma^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por tanto

$$c(\sigma^2) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \qquad t_1(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$h(x_1 \dots x_n) = 1 \qquad q_1(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

Como la función $q_1(\sigma^2)$ es creciente en $\sigma^2 > 0$ $\left(q_1'(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4} > 0\right)$ se tiene que el modelo tiene razón de verosimilitudes monótona creciente para el estadístico $T(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$