I. E. S. " SAN ISIDRO "

Asignatura.................................. Fecha ....

Alumno/a.................................. Curso.............. Nº..........

Apellidos Nombre

Calificación

9.- Sea $a \in \mathbb{C}$. Se define $\binom{a}{0}=1$ y $\binom{a}{n}= \dfrac{a\cdot(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$

$n=1,2\ldots$

Demuestra que

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n \qquad |z|<1.$$

$$\parallel$$

$$e^{a\log 1+z}$$

Como $|z|<1 \Rightarrow \{1+z \mid |z|<1\} = D(1,1)$ que no contiene al 0 por lo que se puede definir una determinación del logaritmo.

Si $f(z)=(1+z)^a \Rightarrow f^{n)}(z)=(1+z)^{a-n}\cdot a\cdot(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))$

Por inducción. Para $n=1$ $f'(z)=(1+z)^{a-1}\cdot a$

Supuesto cierto para n $f^{n+1)}(z)=\dfrac{\partial}{\partial z}f^{n)}(z)=\dfrac{\partial}{\partial z}\left((1+z)^{a-n}\cdot a\cdot(a-1)\cdots(a-(n-1))\right)$

$=(1+z)^{a-n-1}a(a-1)\cdots(a-(n-1))\cdot(a-n)$

$\Rightarrow f^{n)}(0)=1^{a-n}a(a-1)\cdots(a-(n-1))=1^{a-n}\cdot n!\binom{a}{n}=e^{(a-n)\log 1}\cdot n!\binom{a}{n}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{determinación}\\ \text{principal}}}{=}$

$=n!\binom{a}{n}.$

$\Rightarrow f(z)=(1+z)^a=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot(z-0)^n = f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\binom{a}{n}}{n!}z^n=$

$=f(0)+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n = 1^a+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n = e^{a\log 1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{det. principal}}}{=}$

$=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n=\binom{a}{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{a}{n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n.$