8. Máquinas de Turing

8.1. Máquinas de Turing

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman
(http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

Las Máquinas de Turing son…

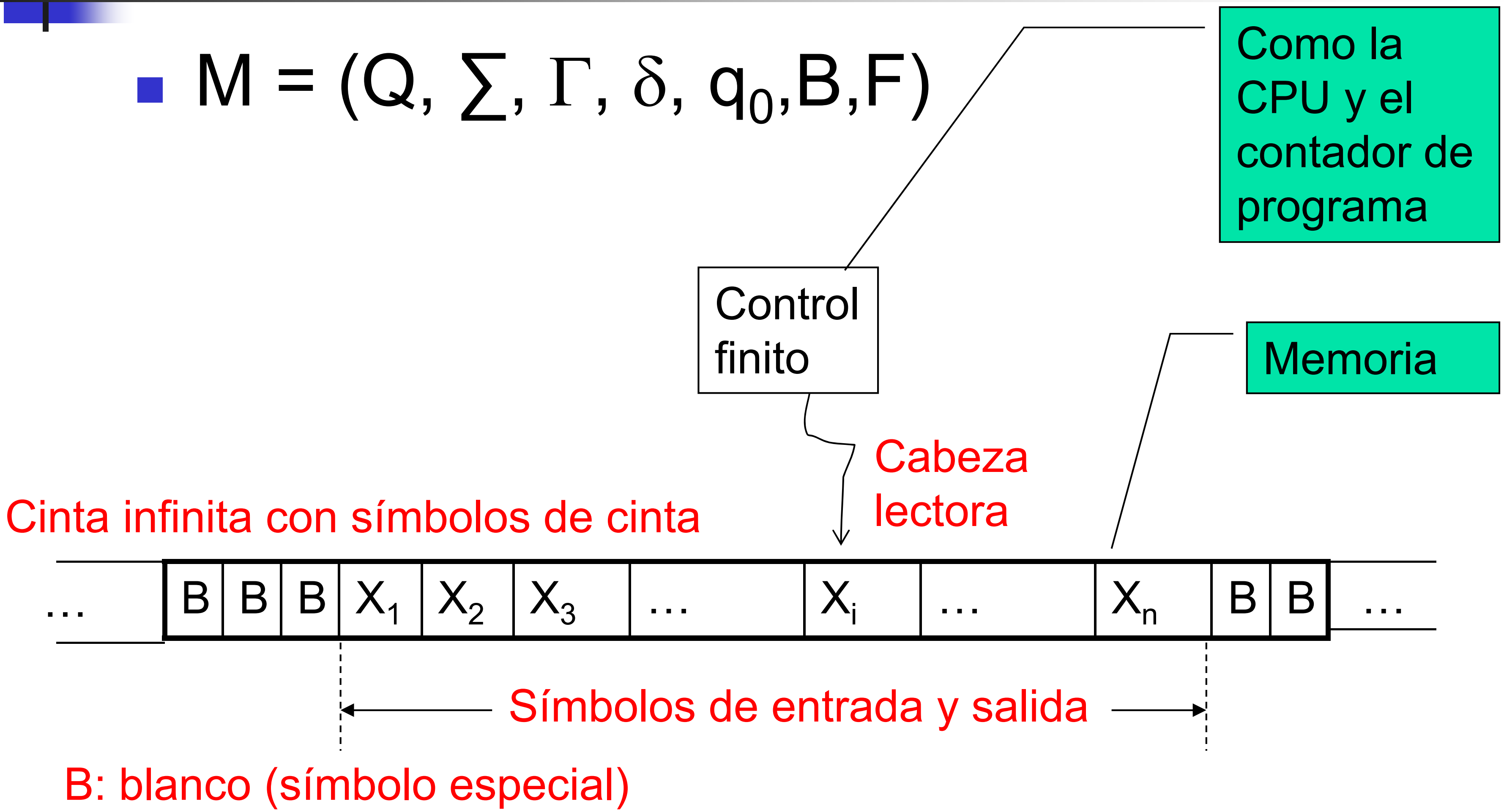
- Máquinas (abstractas) muy potentes que puden simular cualquier ordenador de hoy en día.

Para cada input, responde SI o NO

- ¿Para qué diseñarlas?
  - Si se puede “resolver” un problema usando una MT, entonces el problema es ***decidible***
- Computabilidad vs. decidibilidad

Máquinas de Turing

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$



También usaremos:
-> para R
<- para L

Función de transición

- Un movimiento (escrito |---) de una MT hace lo siguiente:
  - $\delta(q,X) = (p,Y,D)$
    - q es el estado actual
    - X es el símbolo de cinta apuntado por la cabeza lectora
    - El estado pasa de q a p
    - <u>Actualización de la cinta/cabeza:</u>
      - X se sustituye por Y
      - Si D="L", la cabeza se mueve una posición a la "izquierda".
        Si D="R" se mueve una posición a la "derecha"..

Descripción Instantánea de una MT

- Descripción Instantánea o ID :
  - $X_1X_2\ldots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ldots X_n$
    quiere decir:
    - q es el estado actual
    - La cabeza apunta a X_i
    - $X_1X_2\ldots X_{i-1}X_iX_{i+1}\ldots X_n$ son los símbolos de la cinta

- Si $\delta(q,X_i) = (p,Y,R)$ entonces:
  $X_1\ldots X_{i-1}qX_i\ldots X_n$ |---- $X_1\ldots X_{i-1}YpX_{i+1}\ldots X_n$
- Si $\delta(q,X_i) = (p,Y,L)$ entonces:
  $X_1\ldots X_{i-1}qX_i\ldots X_n$ |---- $X_1\ldots pX_{i-1}YX_{i+1}\ldots X_n$

8. Máquinas de Turing

8.2. Lenguajes Recursivamente Enumerables

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman (http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

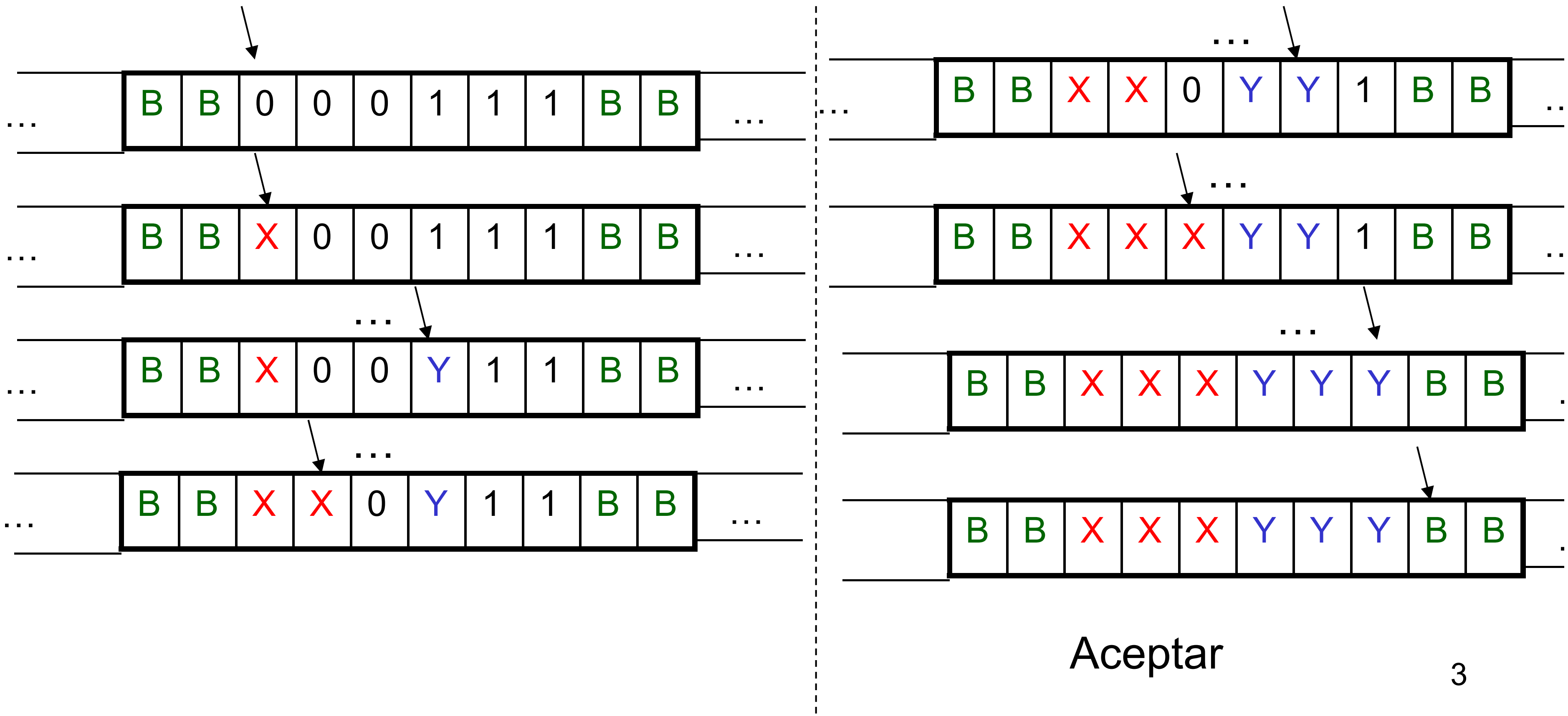
MT que aceptan lenguajes

- ¿Pertenece *w* al lenguaje de una MT?

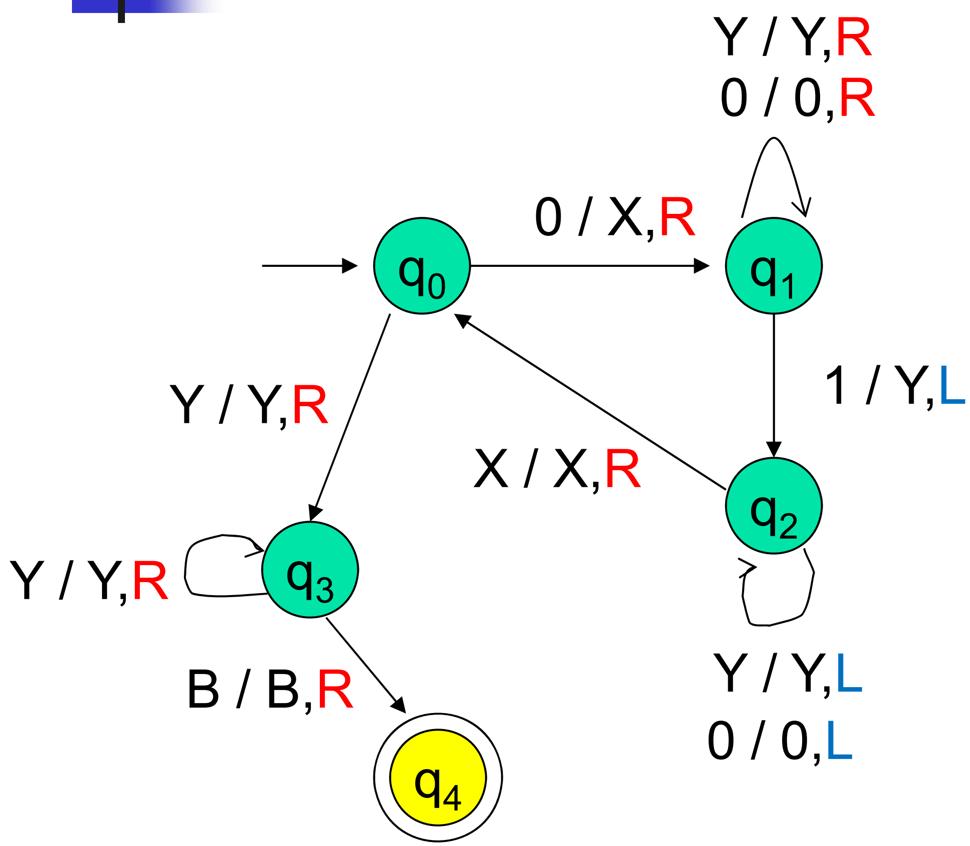
- <u>Condición inicial:</u>
  - Se coloca w, el input, en la cinta, precedido y seguido de infinitos blancos, con la cabeza apuntando al primer símbolo de w
- <u>Aceptación:</u>
  - La MT acepta *w* si entra en un estado final (y para)
  - Si la MT para en un estado no final, entonces rechaza w

Ejemplo: L = $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$

- Estrategia: $w = 000111$



MT para $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$



1. Marcamos con X el siguiente 0 no leido y pasamos a la derecha
2. Nos movemos a la derecha hasta el primer 1, y lo marcamos con Y
3. Nos movemos a la izquierda hasta encontrar X, y nos movemos una posición a la derecha
4. Si leemos un 0 pasamos a 1. Si no nos movemos a la derecha para comprobar que no hay 1s. Si no hay, nos movemos al siguiente blanco, paramos y aceptamos.

MT para $\{0^n1^n \mid n\geq 1\}$

	Siguiente símbolo de cinta				
Estado actual	0	1	X	Y	B
→ q_0	(q_1,X,R)	-	-	(q_3,Y,R)	-
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,Y,L)	-	(q_1,Y,R)	-
q_2	$(q_2,0,L)$	-	(q_0,X,R)	(q_2,Y,L)	-
q_3	-	-	-	(q_3,Y,R)	(q_4,B,R)
$*q_4$	-	--	-	-	-

Representación tabular del diagrama de transiciones

MTs para cálculos

- Las MT también se pueden usar para hacer operaciones
  - Cálculos aritméticos
  - Sumas, restas, productos

Ejemplo 2: resta

"m -- n" = max{m-n,0}

$0^m 1 0^n$ (*entrada*) 0^{m-n} o ...BB…B.. (*salida*)

Dar diagrama de estados

1. Para cada 0 de la izquierda (marcamos B), buscamos el primer 0 de la derecha (y marcamos 1)
2. Repetir hasta que:
    1. // No quedan 0s a la izquierda del 1
       El resultado es 0: escribir B en los 0s y 1s sobrantes y parar
    2. //No quedan 0s a la derecha del 1
       El resultado es m-n: parar tras borrar los 1s y escribir 0 en el último B

Ejemplo 3: Producto

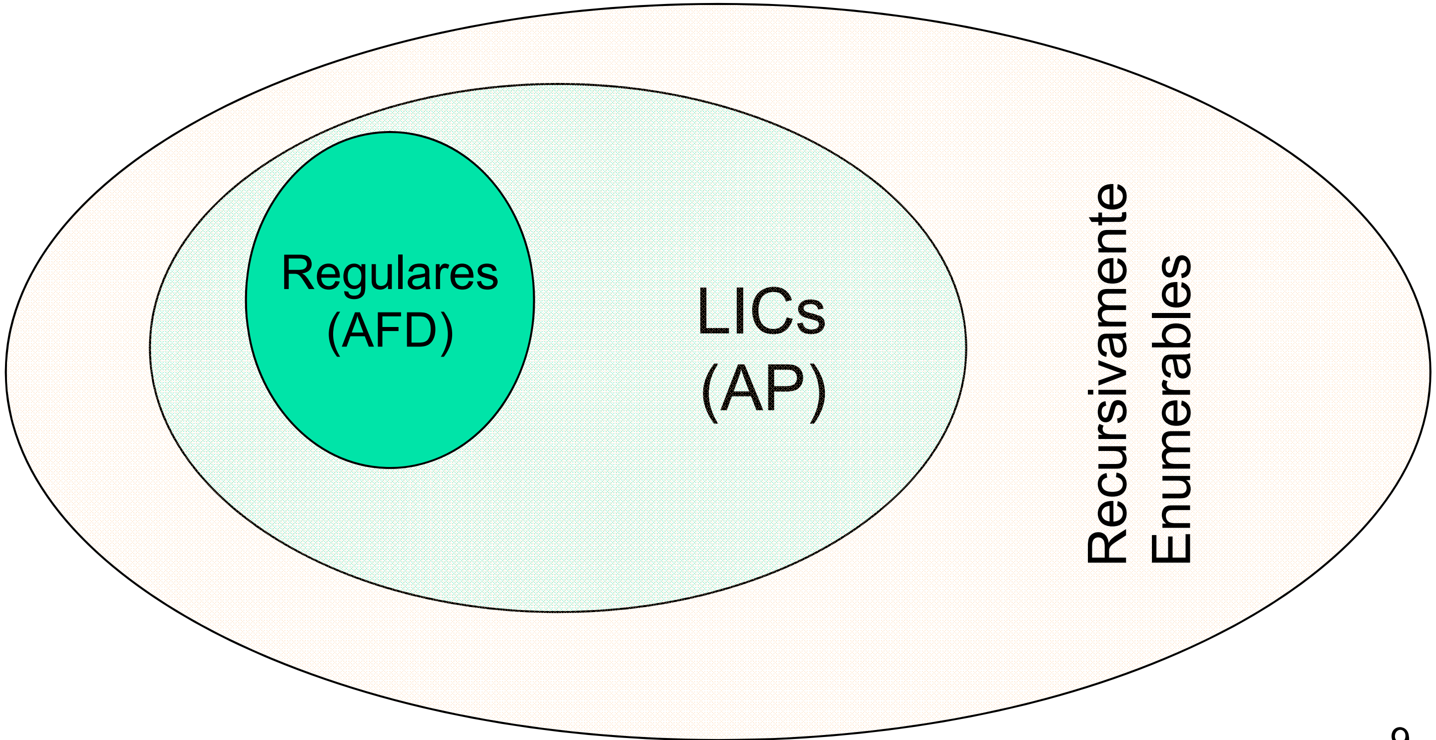
- 0^m10^n1 (entrada) 0^{mn} (salida)

- Pseudocódigo:
  1. Mover la cabeza de modo que para cada 0 visto en 0^m se escriban n 0s a la derecha del último 1
  2. Una vez hecho lo anterior, se borra el 0 considerado (se sobreescribe B)
  3. Tras completar lo anterior para cada 0, borramos los n 0s y los 1s

Dar diagrama de estados

Lenguajes de las MT

- *Lenguajes Recursivamente Enumerables (RE)*



8. Máquinas de Turing

8.3. Programación con Máquinas de Turing

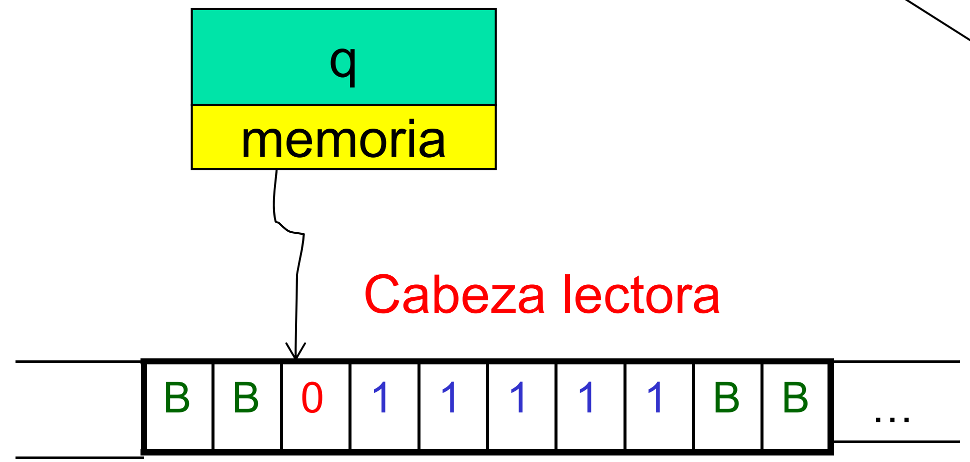
Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman (http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

Almacenamiento en el estado

Descripción genérica
Vale para a=0 ($\overline{a}$=1) y a=1 ($\overline{a}$=0)

- MT para 01* + 10*



Estado actual

Símbolo almace-nado

Símbolo de cinta

Próximo estado

Nuevo símbolo almace-nado

<u>Función de transición δ:</u>

- $\delta([q_0,B],a) = ([q_1,a], a, R)$
- $\delta([q_1,a],\overline{a}) = ([q_1,a], \overline{a}, R)$
- $\delta([q_1,a],B) = ([q_2,B], B, R)$

[q,a]: q es el estado actual,
a es el símbolo almacenado

¿Son las MT estándar equivalentes a las MT con almacenamiento?

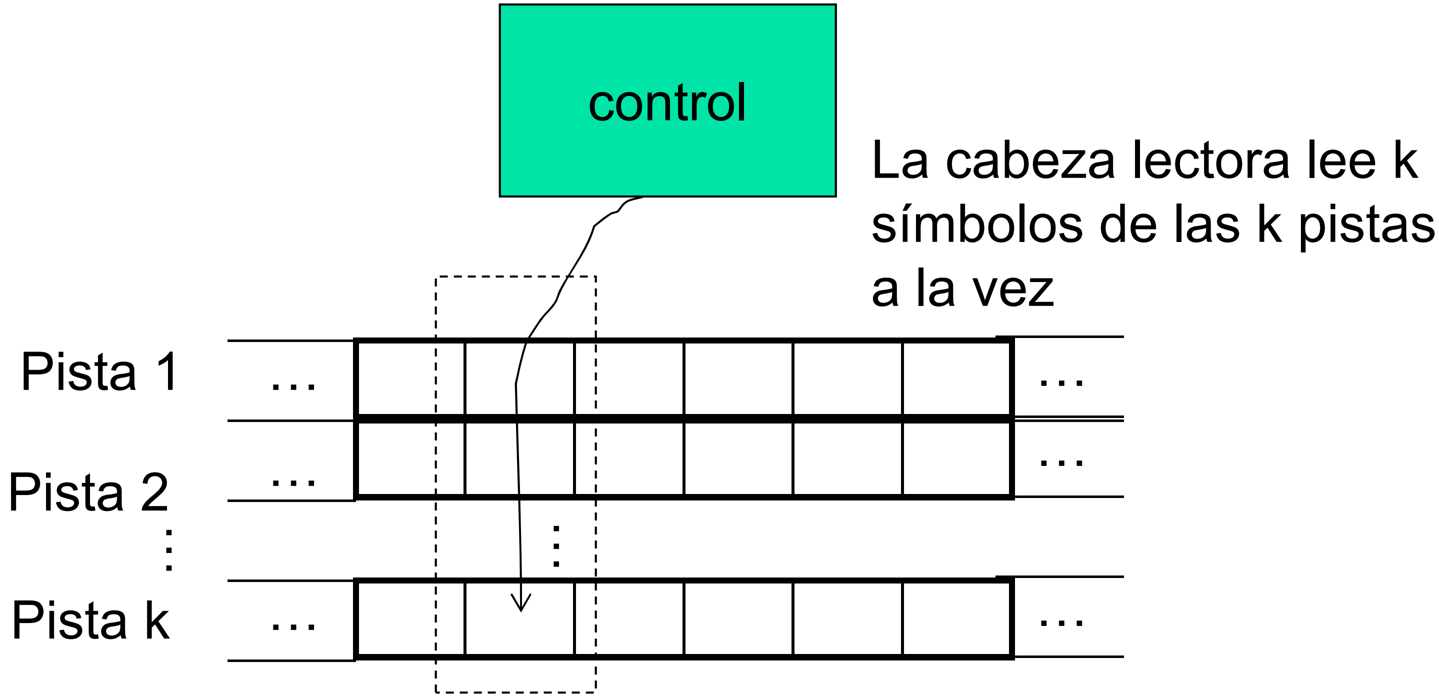
Sí

Equivalencia entre las MT estándar y las MT con almacenamiento

- *Las MT con almacenamiento son MT estándar:*
  - Basta pensar en cada par [estado,símbolo] como un estado de una MT estándar
    - Número finito de estados
- *En realidad, se puede guardar en el estado cualquier información de un conjunto finito.*

MT *con varias pistas*

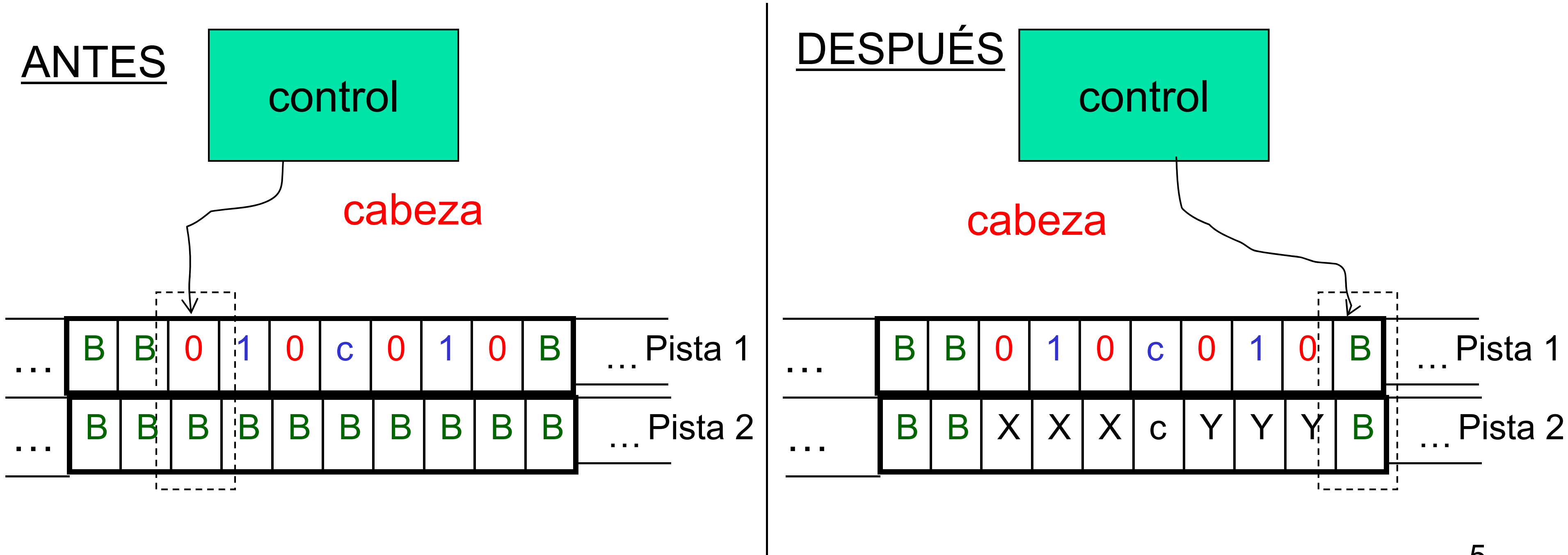
- MT con varias pistas,
  pero con una sóla cabeza lectora



MT con varias pistas

- MT con varias “pistas” pero sólo una cabeza

MT para {wcw | w∈ {0,1}* }
sin modificar el input



MT con varias cintas equivalentes a las MT estándar

- *Para cada M con k pistas existe M' estándar tal que L(M')=L(M).*
  - Basta considerar que el alfabeto es de la forma:
    - $\Sigma' = \Sigma \times \ldots \times \Sigma$ (k veces)
    - $\Gamma' = \Gamma' \times \ldots \times \Gamma'$ (k veces)

<u>Idea:</u>
Una MT con k pistas es en realidad una MT estándar que opera con símbolos que son tuplas con k componentes

8. Máquinas de Turing

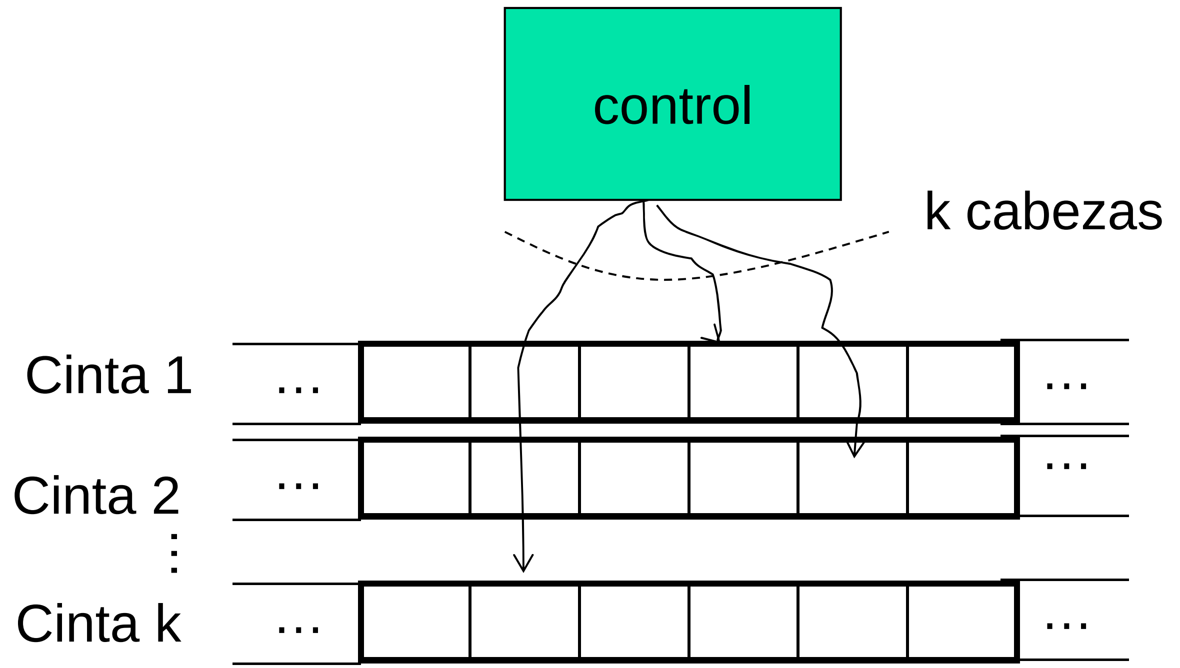
8.3. Extensiones de las Máquinas de Turing

Fernando Rosa Velardo

Traducción y adaptación de transparencias de Ananth Kalyanaraman (http://www.eecs.wsu.edu/~ananth/)

MT con ***varias cintas***

- MT con varias cintas, *cada una con su cabeza lectora*
  - Cada cabeza se mueve independientemente



Cómo funciona una MT con varias cintas

- Inicialmente:
  - La entrada está en la cinta #1, rodeada de blancos
  - Las demás cintas están vacías
  - La cabeza de la cinta #1 apunta al primer símbolo del input
  - El resto de las cabezas apuntan a cualquier sitio (no importa dónde, ya que todos los símbolos son B)

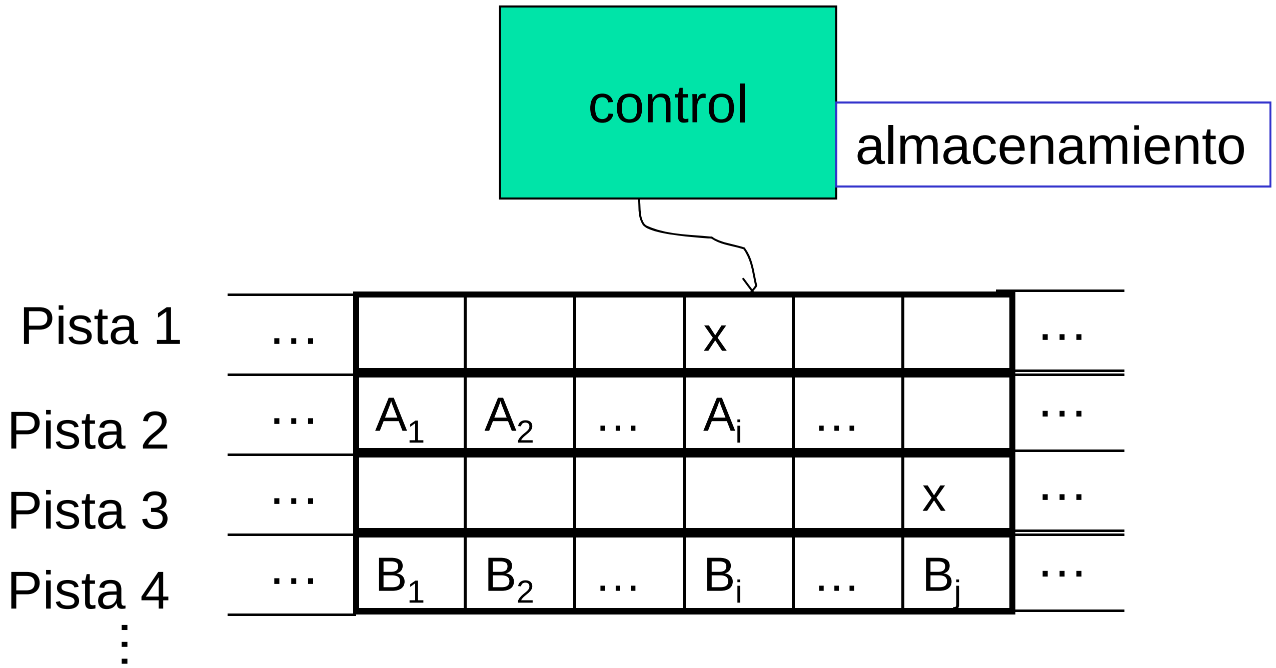
- Movimiento:
  - Depende del estado actual y el símbolo apuntado por todas las cabezas
  - Cada cabeza se puede mover independientemente de las demás (unas a la izquierda y otras a la derecha)

MTs con varias cintas $\equiv$ MTs

- Teorema: Todo lenguaje aceptado por una MT con k cintas es aceptado por una MT con una sóla cinta.
- Construcción:
  - Construimos una MT con una cinta, pero con 2k pistas, donde cada cinta de la MT con varias cintas se simula por 2 pistas de la MT estándar
  - k de las 2k pistas simulan las k cintas
  - Las otras k de las 2k pistas almacenan las posiciones de las k cabezas

MTs con varias cintas ≡ MTs

- Simulación de un movimiento de la MT con k cintas:
  - Movemos la cabeza de la posición más a la izquierda a la más a la derecha, almacenando por el camino los símbolos de cada pista en el estado
  - Entonces, ejecutamos la misma acción que la MT con varias cintas (reescribiendo los símbolos y moviendo los marcadores)



MT no deterministas

- MT con movimientos no deterministas
  - $\delta(q,X) = \{ (q_1,Y_1,D_1), (q_2,Y_2,D_2), \ldots \}$
- Simulación usando una MT determinista con varias cintas: