CAMPOS VECTORIALES

Def: Un $\boxed{\text{CAMPO VECTORIAL}}$ en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación

$$\vec{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\cap$$
$$\mathbb{R}^n$$

dominio

Obs: A las funciones $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ las llamaremos
$$\cap$$
$$\mathbb{R}^n$$

$\boxed{\text{CAMPOS ESCALARES}}$

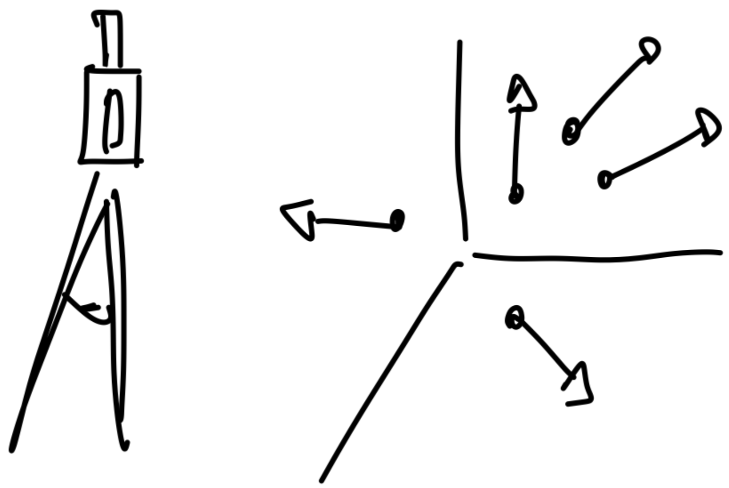
Obs: $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

campos escalares
coordenadas o componentes.

Ej: $\vec{F}(x,y) = \left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$

$F_1(x,y) = xy$

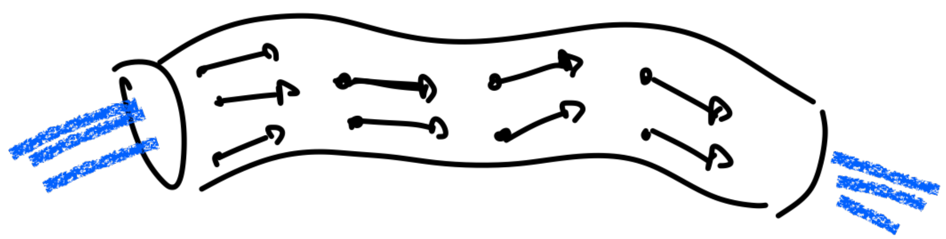
$F_2(x,y) = \dfrac{x}{y}$



Un campo vectorial asigna a cada punto un vector

Ejemplos:

1.- Velocidad de un fluido (p.ej. agua dentro de una tubería)



$\vec{v}(x,y,z)$ velocidad del agua en el punto (x,y,z)

(la asumimos independiente del tiempo)

$\Leftrightarrow$ flujo "estacionario"

Ejemplos:

2.- Campo gravitatorio de la Tierra (análogamente campo eléctrico)

(fuerza de la gravedad sobre un objeto de masa $m=1$)

$$\vec{F} = -\frac{MG}{r^3}\vec{r}$$

donde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ es el vector posición

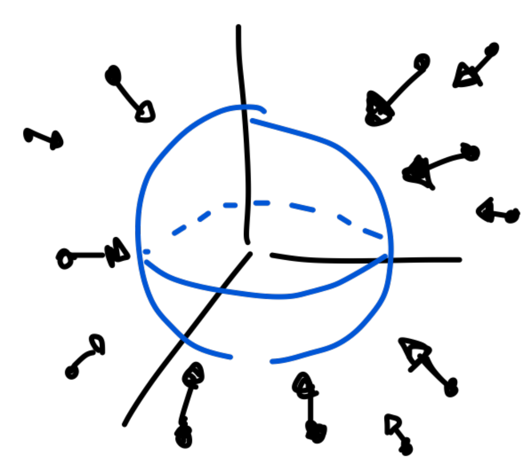
$r = \|\vec{r}\|$

$$= -\boxed{\frac{MG}{r^2}}\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

vector unitario (marca la dirección)

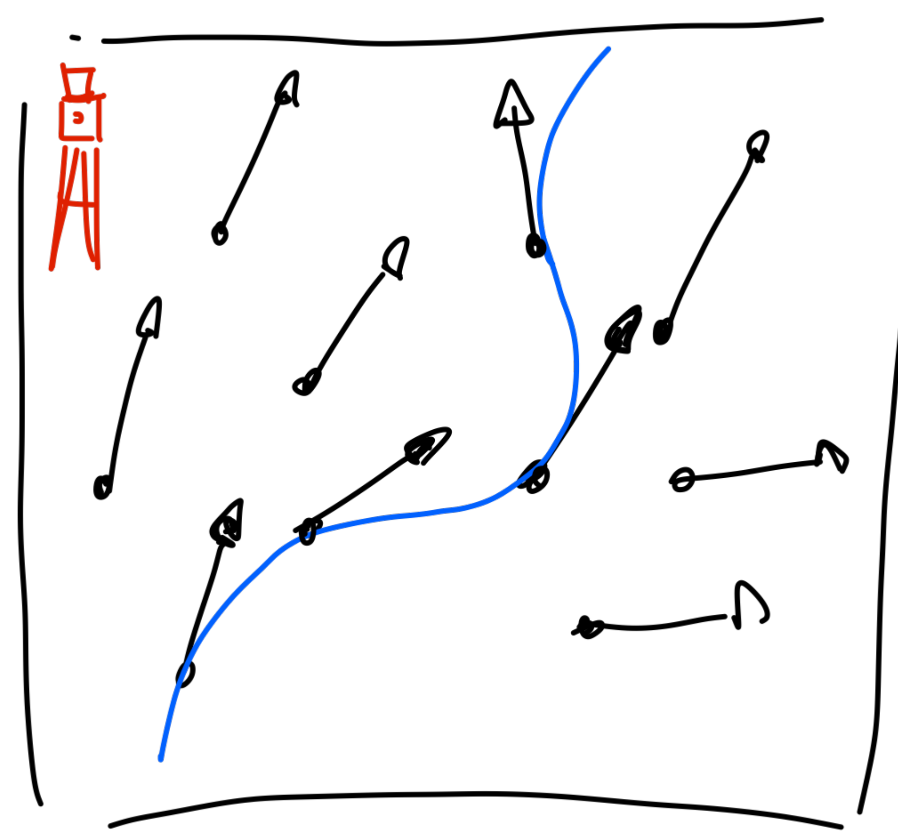
intensidad

sentido (atracción)



Def: Si $\vec{F}$ es un campo vectorial, una $\boxed{\text{LÍNEA DE FLUJO}}$ para $\vec{F}$ es una trayectoria $\vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que $\vec{c}\,'(t) = \vec{F}(c(t))$

Es decir tal que $\vec{F}$ produce el campo de velocidad de la trayectoria $\vec{c}$.



$\boxed{\text{Obs}}$

Las líneas de flujo también se llaman <u>líneas de corriente</u> o <u>curvas integrales</u>

DIVERGENCIA.

Def: $\vec{F}$ campo vectorial en $\mathbb{R}^n$. $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$ ← campo escalar.

Ej: Calcular la divergencia de $\vec{F}(x,y,z) = (x^2y, z, xyz)$

$= x^2y\vec{i} + z\vec{j} + xy\vec{k}$

$\vec{i} = (1,0,0)$

$\vec{j} = (0,1,0)$

$\vec{k} = (0,0,1)$

$$\operatorname{div}(\vec{F})(x,y,z) = 2xy + 0 + xy = 3xy$$

Notación: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F}$$

producto escalar (como operación "formal")

$\boxed{\text{ROTACIONAL}}$ (solo en $\underline{\mathbb{R}^3}$)

Def: $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ campo vectorial.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

campo vectorial

prod vectorial "formal"

determinante "formal".

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Ej: $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} - \text{sen}\, z\,\vec{j} + \vec{k}$.

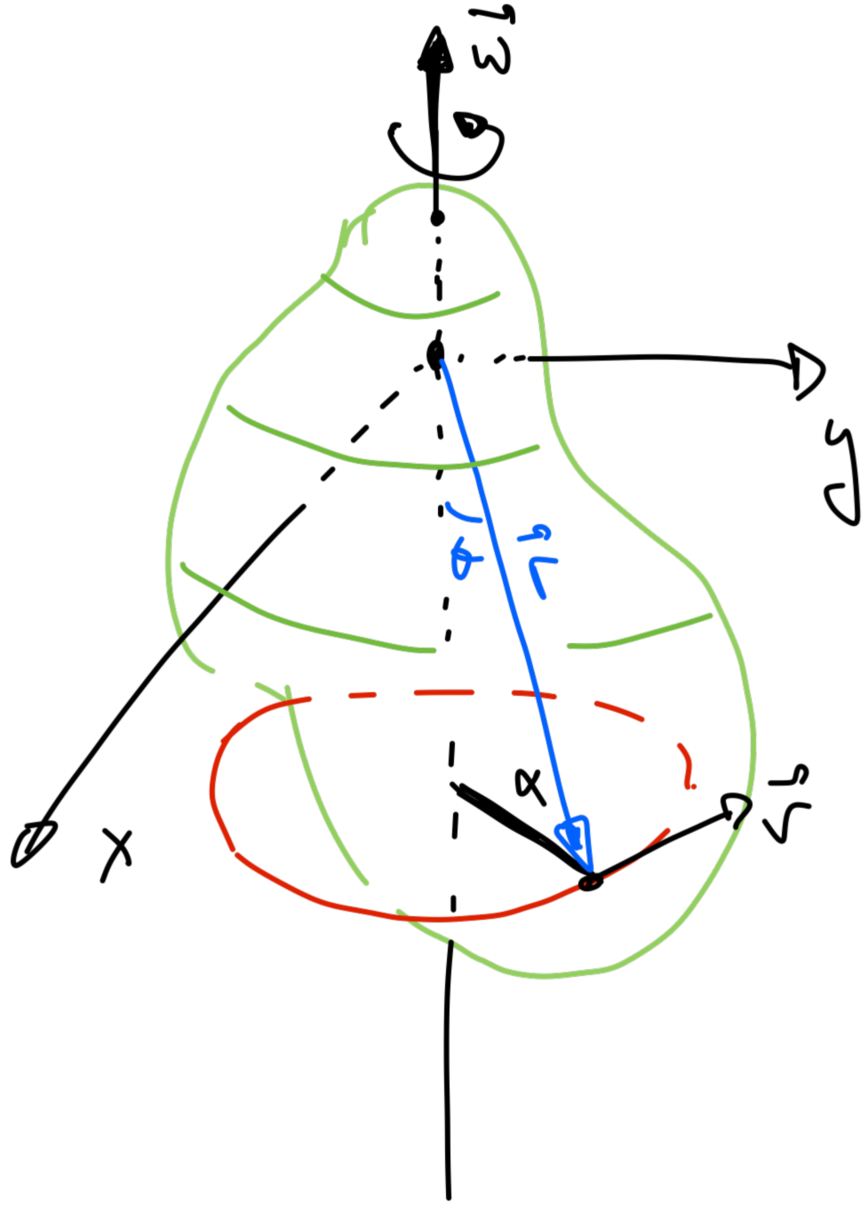
$$\text{rot}(\vec{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -\text{sen}\, z & 1 \end{vmatrix} = \cos z\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - x\,\vec{k} = (\cos z, 0, -x)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.

Se verá formalmente como corolario de los tmas de Gauss y Stokes.

DIVERGENCIA: Si $\vec{F}$ es el campo de velocidad de un fluido (gas) $\mathrm{div}(\vec{F})$ es la tasa de expansión por unidad de volumen

ROTACIONAL: "versión infinitesimal" de la velocidad angular de un sólido rígido, si $\vec{F}$ es el campo de velocidad de un fluido. Mide la vorticidad en el movimiento de un fluido.



Sólido rígido. $\vec{v}$ campo velocidad

$\vec{\omega}$
- dirección eje de giro
- $\|\vec{\omega}\| = \omega = \dfrac{\text{velocidad de un pto del sólido}}{\text{distancia al eje}}$
- sentido: regla del pulgar

$$\alpha = \|\vec{r}\| \operatorname{sen}\theta$$

$$\|\vec{v}\| = \omega\,\alpha = \omega\,\|\vec{r}\|\operatorname{sen}\theta$$

$$\xRightarrow{\text{regla pulgar}} \vec{v} = \underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{\omega}=\omega\vec{k}} \times \underbrace{\vec{r}}_{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}} = -\omega y\,\vec{i} + \omega x\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$