Hoja 3

Problema 1. Utilizar el teorema del punto fijo de Banach para probar que si (X, d) es un espacio métrico completo y $T : X \to X$ es tal que existe un $m \in \mathbb{N}$ con $T^n = (T \circ \cdots \circ T)$ contractiva, entonces T tiene un único punto fijo.

Problema 2. Probar que si P es tal que $AP = PB$, entonces

$$e^A P = P e^B$$

.

Concluir que si $A = PBP^{-1}$, entonces $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$.

Problema 3. Probar que, si $AB = BA$, entonces

1. $e^A B = B e^A$
2. $e^A e^B = e^B e^A = e^{(A+B)}$

Problema 4. Dar un ejemplo de dos matrices para las que $e^A e^B \neq e^{(A+B)}$

Problema 5. Probar directamente de la definición de la exponencial que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^A = e^A A$$

Problema 6. Probar que

$$\exp\left(b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Concluir que

$$\exp\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

Problema 7. Hallar la solución general de los sistemas $x' = Ax$ correspondientes a las siguientes matrices A:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcular para los casos (a) y (c) las soluciones del PVI con condición inicial $x(0) = (1, 1)$ y $x(0) = (1, 2, 3)$ respectivamente.