ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA
CURSO 2020-2021
HOJA 3

1. Halla todos los valores de

a) $\log 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ b) $\log 2$ c) $\log(\sqrt{3}-i)$

d) $\log(1+i)$ e) 1^i f) $(1+i)^\pi$

2. Demuestra que si b es un número real $\left|a^b\right| = |a|^b$.

3. Demuestra que:

a) $2\cosh z \cosh w = \cosh(z+w) + \cosh(z-w)$
b) $2\,\mathrm{senh}\, z \cosh z = \mathrm{senh}(z+w) + \mathrm{senh}(z-w)$
c) $2\,\mathrm{senh}\, z\, \mathrm{senh}\, w = \cosh(z+w) - \cosh(z-w)$

4. Resuelve la ecuaciones:

a) $4\cos z = 3+i$ b) $\mathrm{sen}\, z = 2$ c) $\cos z = 10.$

5. Demuestra que, si $z = x+iy$,

$$\mathrm{sen}\, z = \mathrm{sen}\, x \cosh y + i\, \mathrm{senh}\, y \cos x.$$

Deduce que $|\,\mathrm{senh}\, y| \leqslant |\,\mathrm{sen}\, z| \leqslant |\cosh y|$.

6. Resuelve las ecuaciones:

a) $\mathrm{sen}\, z + \cos z = 2$ b) $\mathrm{sen}\, z - \cos z = 3$ c) $\mathrm{senh}\, z - \cosh z = 2i$

d) $2\cosh z + \mathrm{senh}\, z = i$ e) $\mathrm{sen}\, z = i\, \mathrm{senh}\, z$ f) $\cos z = i\, \mathrm{senh}\, 2z$

7. Halla el máximo de $|\cos z|$ en el cuadrado

$$0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant 2\pi.$$

8. a) Halla las partes real e imaginaria de $\mathrm{th}\, z$.
b) Resuelve la ecuación $\mathrm{th}\, z = i$.

9. Demuestra que si r es un número real y $|r| < 1$ entonces:

$$\mathrm{sen}\, \theta + r\, \mathrm{sen}\, 3\theta + r^2\, \mathrm{sen}\, 5\theta + \cdots = \frac{(1+r)\,\mathrm{sen}\, \theta}{1 - 2r\cos 2\theta + r^2}.$$

Deduce que si θ no es un múltiplo entero de $\frac{\pi}{2}$ entonces:

$$\mathrm{sen}\, \theta + \cos 2\theta\, \mathrm{sen}\, 3\theta + (\cos 2\theta)^2\, \mathrm{sen}\, 5\theta + \cdots = \frac{1}{2}\,\mathrm{cosec}\, \theta.$$

10. Halla la imagen mediante la aplicación $\mathrm{sen}\, z$ de la banda $-\pi/2 < \mathrm{Re}\, z < \pi/2$.

11. Halla las imágenes de las rectas $x = c$, $y = c$ mediante las funciones:

a) $f(z) = z^2 + z$ b) $f(z) = e^{z^2}$ c) $f(z) = \coth z$

12. Halla las razones dobles:

a) $(7+i, 1, 0, \infty)$ b) $(2, 1-i, 1, 1+i)$ c) $(0, 1, i, -1)$ d) $(1-i, \infty, 1+i, 0)$

13. Halla una transformación de Möbius que transforme el semiplano que queda por debajo de la recta $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = -1$ en el disco de centro i y radio 1.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

14. Halla una transformación de Möbius que aplique $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}(2i, 1)$ sobre $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2\}$.

15. Halla la transformación de Möbius que satisface que $f(z_k) = w_k$ para $k = 1, 2, 3$ si

a) $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 2;\ w_1 = 0, w_2 = -1, w_3 = -3,$
b) $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 2;\ w_1 = -3, w_2 = -1, w_3 = -0,$
c) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1;\ w_1 = 0, w_2 = -i, w_3 = \infty,$
d) $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -1;\ w_1 = -i, w_2 = 0, w_3 = \infty.$

16. Encuentra una transformación de Möbius T que transforme el dominio abierto no acotado del plano complejo de frontera los círculos $C(5, 4)$ y $C(-5, 4)$ sobre un anillo $\{w : 1 < |w| < R\}$. Calcula R.

17. Demuestra que la inversión $T(z) = \frac{1}{z}$ transforma el círculo $C(a, r)$ en el círculo de radio $\frac{r}{||a|^2 - r^2|}$ si $|a| \neq r$. Halla la imagen en el caso en que $|a| = r$.

18. Halla los puntos simétricos al punto $2 + i$ respecto de la circunferencias $|z| = 1$ y $|z - i| = 3$.

19. Halla el simétrico respecto de la circunferencia unidad de los conjuntos siguientes:

a) la circunferencia $|z - 1| = 1$,
b) la circunferencia $|z - a| = |a|$
c) la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

20. Halla la imagen de los siguientes dominios del plano complejo mediante la transformación T dada:

a) $\{z : 0 < \arg z < \frac{1}{4}\pi\}$, $\quad T(z) = \dfrac{z}{z-1}$,
b) $\{z :\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $\quad T(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$,
c) $\{z :\ 1 < |z| < 2\}$, $\quad T(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

21. Halla la transformada de Möbius que transforma el círculo $C(0; 1)$ en una recta paralela al eje imaginario, el punto $z = 4$ en el punto $w = 0$ y deja el círculo $C(0, 2)$ invariante.

22. Sea $\Omega = D(-1, 2) \cap D(1, 2)$. Halla una función holomorfa e inyectiva que aplique el conjunto Ω sobre el semiplano superior $\{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} w > 0\}$

23. Halla una transformación de Möbius que transforme de manera biyectiva el conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \sqrt{2},\ |z + 1| < \sqrt{2}\}$$

en el interior del primer cuadrante.