Vamos a calcular el flujo en S_1.

Damos la parametrización $\Phi_1 : (0,2\pi)\times(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\theta, r) \longrightarrow \Phi(\theta,r) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, -1)$$

Por tanto $D_1 = (0,2\pi)\times(0,1)$ y $\Phi_1(D_1) = S_1$. Φ_1 es también C^1 e inyectiva.

Vamos a calcular ahora el vector normal exterior.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = (-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, 0) \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial r} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = -r\vec{k}.$$

En efecto hemos escogido la orientación correcta porque estos vectores normales son los que van hacia abajo (en este caso la normal exterior).

Por tanto $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_1} (\vec{F}\circ\Phi)\cdot\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\times\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right) d\theta\, dr =$

$$= \iint_{D_1} \vec{F}(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, -1)\cdot(0,0,-r)\, d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{D_1} (r^3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta, r^3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\cdot(0,0,-r)\, d\theta\, dr =$$

$$= \iint_{D_1} -r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2\,\text{sen}\,\theta\, d\theta\, dr = \left(\int_0^1 r^2\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} -\text{sen}\,\theta\, d\theta\right) =$$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\left(\cos\theta\Big]_0^{2\pi}\right) = 0$, es decir, no hay flujo neto en esta superficie.