**ENTREGA 2. EEAA. GRUPO M3 (19-20).**
**CARLOS ANDRADAS Y ANDONI DE ARRIBA.**

# Fecha límite: 31-X-2019 antes de las 17:00 horas[1].

Entregar en la hora de problemas en mano o enviar por correo: andonide@ucm.es.

**Problema 1.** Buscar la noción de *Anillo Noetheriano*, y responder a las siguientes cuestiones.

(1) Rellenar los huecos en la siguiente demostración.

**Teorema 1.** *Si $A$ es anillo conmutativo, son equivalentes las afirmaciones siguientes:*
(i) *Todos los ideales de $A$ son finitamente generados.*
(ii) *Todo conjunto no vacío de ideales propios en $A$ tiene un elemento maximal.*
(iii) *Toda cadena ascendente de ideales propios*

(1) $$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

*es estacionaria*[2].

*Demostración.* En efecto, se procede de manera cíclica:

- ( ) $\Longrightarrow$ ( ): Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de ideales propios en $A$ que no contiene un , entonces para cualquier $I_1 \in \mathcal{F}$ existe $I_2 \in \mathcal{F}$ tal que $I_. \subsetneqq I_.$. De esta manera, se puede construir inductivamente.
- ( ) $\Longrightarrow$ ( ): Si $I \subseteq A$ es un ideal propio, sea $\mathcal{F}$ la familia de ideales contenidos en $I$ de la forma

  .

  Por hipótesis, esta familia tiene un elemento maximal, digamos $J :=$ . Entonces, para todo $a \in I$ se tiene que $J + \quad \supseteq$ , y como este es , se sigue que . Por lo tanto, se tiene que y así .
- ( ) $\Longrightarrow$ ( ): Sea

  $$I := \quad I_j.$$

  Como los ideales $I_j$ están encadenados, entonces $I$ es un de $A$. En efecto,

  Más aún, este es porque los lo son. Por hipótesis, sabemos que $I$ es finitamente generado. Escribimos $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Nótese que, tomando $m$ suficientemente grande, se tiene que $a_i \quad I_m$ para todo $i \in \{ \quad \}$. Por lo tanto, tenemos que . A saber, se cumple que $I_k = I.$ cuando $\quad \geq \quad$.

Con esto se concluye la demostración. □

Sea $A$ un DI conmutativo.

(2) Dado $x \in A \setminus A^*$ no nulo tal que no admite factorización en $A$ como producto de irreducibles, probar que existe $y \in A$ que no se factoriza con $(x) \subsetneqq (y) \subsetneqq A$. Deducir que si $A$ es Noetheriano, entonces es **Dominio de Factorización** (las factorizaciones pueden no ser únicas). Si además todo irreducible de $A$ es primo, entonces $A$ es DFU.

(3) Dar un ejemplo de anillo NO Noetheriano, y de otro que SÍ lo sea; razonando un mínimo los motivos. **Sugerencia:** Lo mejor es usar la condición (i) del **Teorema 1**.

[1] Plazo ampliado, a pertición popular, en **una semana**, hasta el **día 8-X-2019 a las 20:00 horas**.

[2] Una cadena de ideales propios (1) se dice *estacionaria* si existe un entero $m \in \mathbb{Z}$ tal que $I_m = I_{m+1} = \cdots$.

**Problema 2.** En el anillo $A$ de los enteros Gaussianos,

(1) estudiar si el ideal $\mathfrak{a}$ generado por $236+160i$ y $35+3i$ es principal, dando un generador del mismo y unos coeficientes para una identidad de Bézout en caso afirmativo.
(2) calcular el máximo común divisor de $-3+35i$ y $160-236i$. ¿Es un elemento primo?
(3) determinar el núcleo y la imagen del **único homomorfismo de anillos unitarios**

$$f\colon \mathbb{Z} \to \frac{A}{\mathfrak{a}}.$$

Describir el anillo $A/\mathfrak{a}$ (dando su estructura) y calcular su cardinal.

**Problema 3.** Sea $\varphi : A\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ una aplicación que dota a $A$ con estructura de DE. Demostrar que si $m = \min(\mathrm{Im}(\varphi))$, entonces $A^* = \{z \in A : \varphi(z) = m\}$.

**Problema 4.** Sean $A$ un DFU y $\mathbb{K}$ un cuerpo.

(1) Probar que en $A$ todo irreducible es primo[3]. Dado $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polinomio no nulo, deducir que $(f)$ es primo si, y sólo si, el polinomio $f$ es irreducible.

El **objetivo** de este ejercicio es probar que **lo anterior no es cierto**, en general, para **ideales generados por varios polinomios cuando se tienen más de dos indeterminadas**.

(2) Probar que $\left(x^2+1, x^2y\right)$ es primo en $\mathbb{R}[x,y]$ a pesar de que $x^2y$ no es irreducible.
(3) ¿Es cierta, en general, la otra implicación?[4] Estudiar si los polinomios $x^2+1$ e $y^2+1$ son irreducibles en $\mathbb{R}[x,y]$. ¿Es el ideal generado por ellos un ideal primo?

**IMPORTANTE**: Quienes quieran que les devuelva las soluciones propuestas con correcciones, que me lo hagan saber escribiéndolo al comienzo de la entrega (indicando el método: a mano en la hora de problemas o por correo).

## Instrucciones y Aclaraciones NO MATEMÁTICAS

- NO se corregirán anónimos (por favor, nombre visible en al menos una de las hojas a entregar), ni fotografías (si no se quiere/puede escanear en los envíos por correo, pegar las fotos en un word, guardar este como pdf y enviarlo después).
- Es IMPORTANTE respetar la fecha límite (se da tiempo más que suficiente).
- Más importante que hacer bien los ejercicios es **razonar correctamente** cada paso. Es mejor tener un ejercicio mal hecho, pero bien razonado; que tener un ejercicio bien hecho, y mal razonado.
- Es conveniente **intentar todos los ejercicios**. Mejor intentarlos y que estén mal, que no haberlo intentado si quiera. **Siempre se puede pedir ayuda**. La idea de las entregas es que os enfrentéis a los problemas **con ganas** (tampoco seáis vagos y responder a todo lo que se pregunta), no tanto hacerlos bien (para demostrar los conocimientos adquiridos en la asignatura está el examen).
- Antes de lanzarse a escribir la resolución de los problemas, es mejor (**después de leer bien el problema**) pararse a pensar un rato e intentar dar soluciones óptimas.

[3] Obsérvese que esto, junto con lo probado en el apartado (2) del **Problema** 1, nos dice que una condición necesaria y suficiente para tener unicidad en las factorizaciones como producto de irreducibles en los **Dominios de Factorización** es que todo elemento irreducible sea de hecho primo.

[4] Para poder completar la prueba de que lo anterior no es cierto para ideales generados por varios polinomios con dos o más variables, es necesario probar también que existen polinomios irreducibles que generan un ideal no primo, o bien que esta implicación sí que puede darse en general.