MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2020–2021
Problemas
Hoja 4. Resolución de sistemas lineales: métodos iterativos

1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos para A y B.

2 a) Se considera el método iterativo $u^{k+1} = Bu^k + c$ con u^0 dado. Estudiar el comportamiento de la sucesión $\{u^k\}_{k=0}^{\infty}$ cuando $\varrho(B) = 0$.

b) Sea A una matriz triangular superior por bloques. Estudiar la convergencia de los métodos de Jacobi, Gauss–Seidel y relajación asociados a la descomposición por bloques de A.

c) Ídem si A es triangular inferior.

3 Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \; j = 1, \ldots, n,$$

el método de Jacobi por puntos para A es convergente.

4 **Método de relajación por puntos para matrices de diagonal estrictamente dominante.**

a) Probar que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$ entonces $\left| \dfrac{1 - w - \lambda}{\lambda w} \right| \geq 1$.

(**Indicación**: Utilizar que $|x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|, \; x, y \in \mathbb{C}$).

b) Demostrar que si A es de diagonal estrictamente dominante, el método de relajación por puntos para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

5 Si A es una matriz de diagonal estrictamente dominante, probar que el método de:

a) Jacobi por bloques para A es convergente.

b) relajación por bloques para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

6 Sea A una matriz hermítica e inversible, $A = M - N$ con M inversible.

a) Se considera la sucesión $v^{n+1} = M^{-1}Nv^n$ con $v^0 \in \mathbf{V} \backslash \{0\}$ arbitrario. Probar que si la matriz $M^* + N$ es definida positiva entonces la sucesión $\{(v^n)^* A v^n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona decreciente.

b) Demostrar que si $M^* + N$ es definida positiva y $\varrho(M^{-1}N) < 1$ entonces A es definida positiva.

7 a) **Teorema de los círculos de Gershgorin**: si $A \in \mathcal{M}_n$, demostrar que

$$\text{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{B}}_{r_i}(a_{ii}) \;\text{ siendo }\; r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

donde

$$\overline{\mathbf{B}}_{r_i}(a_{ii}) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

es la bola cerrada de centro a_{ii} y radio r_i. (**Indicación**: Téngase en cuenta que las matrices de diagonal estrictamente dominante son inversibles).

b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ de diagonal estrictamente dominante con

$$a_{ii} > 0, \; i = 1, \ldots, n \;\text{ y }\; \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}.$$

Utilizar el apartado a) para probar que sus autovalores son estrictamente positivos.

c) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica, de diagonal estrictamente dominante con

$$a_{ii} > 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Probar que el método de relajación por bloques para A es convergente si, y sólo si, $0 < w < 2$.

8 Probar que si A es de diagonal estrictamente dominante y $0 < w \leq 1$ el método de relajación–Jacobi es convergente.

9 **Método iterativo para el cálculo de la inversa de una matriz**. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible. A partir de $A_0 \in \mathcal{M}_n$ se consideran las sucesiones de matrices

$$E_k = I - AA_{k-1} \text{ y } A_k = A_{k-1}(I + E_k + E_k^2) \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

a) Demostrar que $E_n = (E_1)^{3^{n-1}}$.

b) Probar que si $\varrho(E_1) < 1$ entonces $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A^{-1}$.

c) Estudiar la convergencia cuando se toma $A_0 = \dfrac{A^*}{\operatorname{tr}(AA^*)}$.

10 **Convergencia de los métodos asociados a matrices no negativas**.

a) Sea $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $\varrho(B) < 1$. Demostrar que $I - B$ es inversible y comprobar que $(I - B)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} B^k$.

b) Una matriz $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ es *no negativa* (y se representa $B \geq 0$) si $b_{ij} \geq 0, \ i, j = 1, 2, \ldots, n$. Si B es una matriz no negativa, demostrar la equivalencia:

$$I - B \text{ es inversible y } (I - B)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow \varrho(B) < 1.$$

(**Indicación**: Para la implicación $\Rightarrow$) considerar $\lambda \in \operatorname{sp}(B)$ y un vector $v \neq 0$ tal que $Bv = \lambda v$ y probar que $|v| \leq (1 - |\lambda|)(I - B)^{-1}|v|$ donde $|v| = (|v_i|)_{i=1}^n$).

c) Se considera la descomposición $D - E - F$ por puntos de una matriz A inversible que verifica

$$a_{ij} \leq 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A^{-1} \geq 0.$$

1) Probar que $a_{ii} > 0$. Deducir que las matrices de los métodos de Jacobi y relajación por puntos asociados a A están bien definidas.
2) Demostrar que el método de Jacobi para A es convergente.
3) Utilizar el apartado b) para demostrar que:
   I) $\left(\dfrac{D}{w} - E\right)^{-1} \geq 0$ si $w > 0$.
   II) El método de relajación por puntos para A es convergente si $0 < w \leq 1$.

11 Sea $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = M - N$ siendo $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible y sea $B = M^{-1}N$. Dado $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ se definen las matrices

$$M_\alpha = (1 + \alpha)M, \ N_\alpha = M_\alpha - A \text{ y } B_\alpha = M_\alpha^{-1} N_\alpha.$$

a) Demostrar que

$$B_\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}(B + \alpha I).$$

b) Probar la equivalencia

$$\lambda \in \operatorname{sp}(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda + \alpha}{1 + \alpha} \in \operatorname{sp}(B_\alpha).$$

c) Suponiendo que los autovalores de B verifican la relación

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1,$$

demostrar que el método asociado a B_α converge para $\alpha > -\dfrac{1 + \lambda_1}{2}$.

d) ¿Qué ocurre si $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1 > 1$?

e) Comprobar que el método asociado a B_α es, de hecho, un método de relajación de parámetro $w = \frac{1}{1+\alpha}$ aplicado al método asociado a B, en el sentido introducido en clase.