d) El tamaño del test es α si $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \{ P_\theta(R) \}$

En nuestro caso $\Theta_0 = \{12\}$

y $\sup_{\mu=12} \{ P_\mu(\bar{X} > 14 \} = P(\bar{X} > 14 | \mu = 12) = \boxed{0{,}0228}$, que es la probabilidad de cometer un error de tipo I.

e) Si tomamos una muestra observada $(x_1 \ldots x_{25})$ con $\bar{x} = 13{,}75$

$$p(x_1 \ldots x_{25}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \{ P_\theta \{ T(X_1 \ldots X_{25}) \geq T(x_1 \ldots x_n) \} \} =$$

$$= \sup_{\mu=12} \{ P_\mu \{ \bar{X} \geq 13{,}75 \} \} = P\{ \bar{X} \geq 13{,}75 \mid \mu = 12 \} =$$

$$= P\left\{ \frac{\bar{X}-12}{5/\sqrt{25}} \geq \frac{13{,}75-12}{5/\sqrt{25}} \;\middle|\; \mu = 12 \right\} \underset{\bar{X} \sim N(\mu, 5/\sqrt{25})}{=}$$

$$= P\{ Z \geq 1{,}75 \} = \boxed{0{,}0401}$$

Como se tiene que el p-valor es mayor que el tamaño del test, la muestra observada $(x_1 \ldots x_{25})$ pertenece a la región de aceptación por lo que no se rechaza la hipótesis nula.