Ejercicio 4.- Supongamos el caso estacionario de las ecuaciones de Maxwell (ninguno de los campos involucrados depende del tiempo). Supongamos $\rho(x,y,z)$ y $\vec{J}(x,y,z)$ conocidas. La radiación electromagnética a través de una superficie está determinada por el flujo del campo vectorial de Poynting definido como $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Probar que si V es una región a la que se le aplica el teorema de Gauss, entonces

$$\iint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

Si asumimos que $\vec{P}$ es de clase C^1, como V verifica las condiciones del Teorema de Gauss se tiene que

$$\iint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{P}).$$

Ahora bien, por el ejercicio 3 sabemos que

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$$

Como estamos suponiendo el caso estacionario, la 3ª ecuación, de la Ley de Faraday, que en el caso general es

$$\nabla \times E_t + \frac{\partial \vec{H}_t}{\partial t} = 0 \quad \text{se transforma en}$$

$$\nabla \times E_t + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times E = 0$$

Si ahora nos fijamos en la 4ª ecuación, la Ley de Ampere, la ecuación en el caso general: