

Órbitas periódicas y bifurcación

TRABAJO FIN DE GRADO

Curso 2022/2023



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA
INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

Autor

Juan Carlos Llamas Núñez

Director

José María Arrieta Algarra

Madrid, 28 de junio de 2023

Órbitas periódicas y bifurcación

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Autor

Juan Carlos Llamas Núñez

Director

José María Arrieta Algarra

Convocatoria: Junio 2023

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID**

Facultad de Ciencias Matemáticas

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Madrid, 28 de junio de 2023

Dedicatoria

*A mis padres,
por todo su apoyo y amor.*

Agradecimientos

A pesar de que dos párrafos no hacen justicia a toda la gratitud que siento, me gustaría dedicar unas palabras a los profesores que me han acompañado en este viaje de 5 años. Sin su encomiable labor de transmisión del conocimiento, sin su vocación para enseñar y sin su inspiración como espejo en el que mirarse, estaríamos huérfanos de saber y un novel estudiante del doble grado de Ingeniería Informática y Matemáticas, asustado de ínfimos y supremos, no hubiera conseguido llegar tan lejos. Por tanto, mis agradecimientos van dirigidos a los profesores de las facultades de Ingeniería Informática y de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid con los que he compartido este camino.

Y en especial, quería referirme a mi tutor de este TFG. Desde la cercanía y la simpatía conseguiste despertar mi interés en un campo tan bonito como son las ecuaciones diferenciales. Agradezco enormemente la dedicación y las reuniones mantenidas durante este año, de las cuales siempre salía descubriendo algo nuevo y apasionante. Hago extensible la admiración al sentimiento de agradecimiento que tengo hacia ti. Por todo esto, solamente puedo decir: ¡Gracias!

Abstract

In the context of ordinary differential equations, this work studies the existence, stability and bifurcation of periodic orbits. For this purpose, Floquet's theory of linear periodic systems is presented and its stability is examined. Subsequently, we look at the non-linear case, analysing the stability of periodic solutions in non-linear periodic equations. We also study the stability of periodic orbits in autonomous systems. Finally, we prove Hopf's Bifurcation Theorem, which deals with the generation of periodic orbits from an equilibrium point.

Resumen

En el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en este trabajo se estudia la existencia, estabilidad y bifurcación de órbitas periódicas. Para ello, se presenta la teoría de Floquet sobre sistemas lineales periódicos y se examina su estabilidad. Posteriormente, atendemos al caso no lineal, analizando la estabilidad de soluciones periódicas en ecuaciones no lineales periódicas. Asimismo, se estudia la estabilidad de órbitas periódicas en sistemas autónomos. Por último, se prueba el Teorema de la Bifurcación de Hopf, que trata sobre la generación de órbitas periódicas a partir de un punto de equilibrio.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Breve introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias	2
1.3. Nociones generales de estabilidad	8
2. Sistemas periódicos	11
2.1. Sistemas periódicos lineales	11
2.2. Sistemas periódicos no lineales	19
3. Estabilidad de órbitas periódicas de sistemas autónomos	22
3.1. Sistema de coordenadas móvil	23
3.2. Ecuaciones en las nuevas variables	26
3.3. Teorema de estabilidad orbital	31
4. Bifurcación de Hopf	34
4.1. Introducción	34
4.2. Teorema de la bifurcación de Hopf	35
4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas	40
Bibliografía	44
A. Ejemplos de estabilidad orbital	45
B. La ecuación de Van der Pol	48
C. Ejemplos de bifurcación de Hopf	54

Introducción

1.1. Motivación

Las ecuaciones diferenciales han tenido una gran importancia histórica desde finales del siglo XVII, aparejadas al desarrollo del cálculo por parte de Newton y Leibniz. Vistas desde el enfoque de la matemática pura, plantean interés por sí mismas debido a su buena estructura y a los resultados sobre existencia y unicidad de soluciones. Sin embargo, su alcance es mucho mayor y una de sus principales virtudes es que permiten modelizar fenómenos en disciplinas tan diferentes como la física, la biología, la economía o la ingeniería, entre otras. Ejemplos más concretos de modelos que hacen uso de ecuaciones diferenciales son algunos de los utilizados para la propagación de enfermedades [9], el clima terrestre [4] o la mecánica celeste [1].

Aunque el cálculo de soluciones exactas de dichas ecuaciones en la mayoría de los casos es inviable, se han desarrollado métodos numéricos que permiten obtener aproximaciones precisas de gran utilidad práctica. También es muy interesante el estudio cualitativo, desde una perspectiva teórica, del comportamiento de las soluciones y la dinámica de los sistemas, ya que aporta mucha información sobre los mismos. En particular, destacan el estudio de soluciones estacionarias y periódicas, porque pueden representar fenómenos oscilatorios o constantes que se producen en la naturaleza y cuyo análisis tiene especial interés. Por ejemplo, las ecuaciones de Lotka-Volterra, que sirven para modelar reacciones químicas autocatalíticas [5] o la dinámica de poblaciones en ecología [8], presentan soluciones periódicas que tienen su interpretación en sus respectivos campos de estudio. Consecuentemente, el estudio teórico de las soluciones periódicas es fundamental para entender el comportamiento de multitud de fenómenos presentes en diversas ramas de la ciencia.

El propósito de este trabajo es estudiar la existencia, estabilidad y bifurcación de órbitas periódicas en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello, comen-

zaremos recordando algunos resultados generales sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias y nociones básicas sobre la estabilidad de sus soluciones en las secciones 1.2 y 1.3 de este capítulo. En el capítulo 2 estudiaremos en profundidad los sistemas periódicos. En la sección 2.1 pondremos el foco en los sistemas lineales periódicos, presentando la teoría de Floquet y examinando la estabilidad de los mismos. En la sección 2.2 daremos el salto al caso no lineal y nos centraremos en analizar la estabilidad de soluciones periódicas. Dedicaremos todo el capítulo 3 a discutir la estabilidad de órbitas periódicas en sistemas autónomos y daremos condiciones suficientes para que una solución sea orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica. Por último, en el capítulo 4 enunciaremos y demostraremos el importante resultado de generación de órbitas periódicas a partir de un punto de equilibrio, el Teorema de la bifurcación de Hopf. Asimismo, y como complemento a lo anterior, se presentan tres apéndices en los que se muestran ejemplos de aplicación de la teoría desarrollada y de los cuales destaca el que estudia el oscilador de Van der Pol. Para lograr el objetivo, se ha revisado la bibliografía recomendada por el profesor y se han realizado reuniones periódicas con el tutor para resolver dudas y supervisar el trabajo del alumno.

A lo largo de la memoria aparecen enlaces a vídeos o recursos animados para complementar algunos de los argumentos expuestos y cuya visualización es muy recomendable. Estos podrán ser visitados clicando en los [enlaces](#) (identificados por la tipografía anterior), o en su defecto, mediante la lista de reproducción accesible siguiendo la url <https://bit.ly/orbitas-periodicas-bifurcacion>. Asimismo, en el repositorio <https://github.com/jcllanu/orbitas-periodicas-bifurcacion> está recogido, bajo la licencia de software libre de tipo MIT, todo el código en lenguaje MATLAB con el que se han realizado dichas animaciones. Allí también se encuentran los archivos de GeoGebra utilizados en distintas construcciones, a los cuales se puede acceder alternativamente mediante mi perfil <https://www.geogebra.org/u/jullamas>.

1.2. Breve introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde D es un dominio de \mathbb{R}^{n+1} , nos planteamos encontrar una función derivable $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que verifique que $(t, x(t)) \in D$ y $x'(t) = f(t, x(t)) \forall t \in I$. Esto es lo que se conoce como resolver una **ecuación diferencial ordinaria**, aunque también se puede interpretar como un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias con n incógnitas y que expandido se expresa como

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Nótese que se ha omitido la dependencia en t de las funciones x_i para aligerar la notación. Cuando no induzca a ambigüedades, no haremos explícita esta dependencia y podremos escribir, por ejemplo, la ecuación original como $x' = f(t, x)$. Por la gran utilidad de las ecuaciones diferenciales para modelizar problemas físicos, la variable t se suele interpretar como una variable temporal y la función x describe la evolución de cierto sistema a lo largo del tiempo. Son de especial interés aquellas ecuaciones donde la función $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ es una función lineal en x , es decir,

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \dots + a_{in}(t)x_n + b_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde las funciones $(a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ y $(b_i(t))_{i=1}^n$ están definidas en cierto intervalo (α, ω) contenido en \mathbb{R} . Para aligerar la notación introducimos la función matricial $A(t)$, definida como $A : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}, t \mapsto A(t)$ cuya entrada (i, j) es $a_{ij}(t)$, y la función vector columna $b : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto b(t)$, que tiene como componente i -ésima $b_i(t)$. Con esta notación un **sistema lineal** se puede escribir de manera compacta como $x' = A(t)x + b(t)$. Si $b(t)$ es constantemente cero, el sistema lineal se dice **homogéneo**. De aquí en adelante supondremos que las funciones a_{ij} y b_i son continuas en su intervalo de definición, que en muchas ocasiones será todo \mathbb{R} . Un caso particular es aquel en el que $A(t) \equiv A$ es una matriz constante y que recibe el nombre de **sistema lineal de coeficientes constantes**.

Asociados a las ecuaciones diferenciales, se encuentran los **problemas de valor inicial** (PVI), que consisten en encontrar una función x que verifique

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad (1.1)$$

es decir, una ecuación diferencial y una condición inicial. Este planteamiento es el más adecuado para abordar el estudio de resultados de existencia y unicidad local de soluciones. Las condiciones bajo las que este resultado es cierto son muy generales ya que únicamente hay que exigir que f sea de clase 1, o más generalmente, que f sea localmente Lipschitz en la segunda variable. El teorema garantiza que la solución x está definida en un pequeño intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$, pero esta solución puede ser extendida a un intervalo maximal abierto¹.

Hipótesis adicionales sobre f garantizan que si el dominio de definición de esta es $D = (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}^n$, entonces la solución x está definida en todo (α, ω) . Para el caso particular de los sistemas lineales se tiene el siguiente resultado de existencia y unicidad global de soluciones.

Teorema 1.1. Sean $A(t)$ y $b(t)$ funciones continuas en el intervalo $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ y sea $t_0 \in (\alpha, \omega)$. Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), & t \in (\alpha, \omega) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución y está definida en todo el intervalo (α, ω) .

¹El enunciado del teorema de existencia y unicidad de soluciones de los PVI, junto con su demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [7].

Demostración. Se puede encontrar, por ejemplo, en la sección 2.2 de [6]. \square

Para la teoría que abordaremos en el capítulo 2, es necesario recordar la estructura del espacio de soluciones de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones.

Teorema 1.2. *El conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo $x' = A(t)x$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n .*

Demostración. Que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial se deduce de la linealidad de la ecuación. Por otro lado, veamos que este espacio tiene dimensión n . Consideramos los problemas de valor inicial PVI $_i$ para $i = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = e_i \end{cases},$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica². Por el Teorema 1.1, cada PVI $_i$ tiene una solución única ϕ_i , $i = 1, \dots, n$ que verifica $\phi'_i = A(t)\phi_i$ y $\phi_i(t_0) = e_i$. Veamos que $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación. Supongamos que existen $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ tales que $\sum_{i=1}^n a_i \phi_i(t) = 0 \quad \forall t \in (\alpha, \omega)$. Evaluando en $t = t_0$ se tiene

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(t_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i,$$

luego $a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ por ser $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de \mathbb{R}^n . Por tanto, el conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente. Sea y solución de la ecuación. Entonces $y(t_0) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ para ciertos $y_i \in \mathbb{R}$ y definimos $z(t) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(t)$. Es claro que z es solución de la ecuación porque es una combinación lineal de soluciones y además

$$z(t_0) = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i(t_0) = \sum_{i=1}^n y_i e_i = y(t_0).$$

Como y y z son soluciones del mismo problema de valor inicial, entonces $y(t) = z(t) \quad \forall t$, es decir, el conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ es generador y, por lo anterior, base. \square

Este resultado nos asegura que si conseguimos encontrar n soluciones linealmente independientes de la ecuación $x' = A(t)x$, entonces podemos construir la solución general como una combinación lineal de ellas. Esto es, salvo situaciones concretas, difícil y no se conoce ningún método que resuelva el caso general. Para la teoría que desarrollaremos nos será de utilidad la siguiente definición.

Definición 1.1. *Se llama **matriz fundamental** del sistema $x' = A(t)x$ a cualquier matriz $X(t)$ de dimensiones $n \times n$ cuyas columnas sean soluciones linealmente independientes de la ecuación.*

²En realidad, bastaría tomar cualquier conjunto de n vectores de \mathbb{R}^n linealmente independientes.

Se deduce inmediatamente de la definición que si $X(t)$ es una matriz fundamental, entonces sus columnas $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ forman una base del espacio de soluciones. Así pues, si $y(t)$ es una solución entonces existirán constantes c_1, c_2, \dots, c_n tales que $y(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t)$, o equivalentemente, $y(t) = X(t)c$ para $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.1. *Si las columnas de la matriz $X(t)$ son soluciones del sistema, son equivalentes*

1) $X(t)$ es una matriz fundamental

2) $\forall t_0, \det X(t_0) \neq 0$

3) $\exists t_0$ tal que $\det X(t_0) \neq 0$

Demostración. Para ver que 1 implica 2, supongamos que existe un t_0 tal que $\det X(t_0) = 0$, luego existen valores a_1, a_2, \dots, a_n tales que $\sum_{i=1}^n a_i x_i(t_0) = 0$ y que son no todos nulos. Definimos $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$, que es solución por ser combinación lineal de soluciones y que verifica que $y(t_0) = 0$, luego por unicidad del PVI, $y(t) = 0$ para todo t . Pero esto contradice que las columnas de $X(t)$ sean linealmente independientes y no sería una matriz fundamental. Que 2 implica 3 es inmediato y para ver que 3 implica 1, supongamos que existen a_1, a_2, \dots, a_n tales que $\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) = 0$ para todo t y hay que probar que son todos nulos. Evaluando en $t = t_0$ se obtiene que una combinación lineal de columnas de $X(t_0)$ es 0, pero como $\det X(t_0) \neq 0$, entonces $a_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. \square

Con los resultados anteriores es inmediato ver que dadas dos matrices fundamentales $X(t)$ e $Y(t)$ del sistema, existe una matriz constante no singular $C \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $Y(t) = X(t)C$. En efecto, las columnas de $y_i(t)$ son solución de la ecuación y hemos visto que, en ese caso, existían $c_i \in \mathbb{R}^n$ tales que $y_i(t) = X(t)c_i$. Yuxtaponiendo todas las columnas se comprueba que $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ y es inmediato asegurar la no singularidad.

También es cierto que si $X(t)$ es una matriz fundamental y C es una matriz constante no singular, entonces $X(t)C$ es también una matriz fundamental. Razonando como antes, $X(t)c_i$ son las columnas de $X(t)C$, que son solución por ser una combinación lineal de columnas de $X(t)$. Para concluir que es matriz fundamental basta aplicar la Proposición 1.1, evaluando $X(t)C$ en cualquier t_0 y tomando determinantes.

Otra forma de entender las matrices fundamentales es como soluciones no singulares de la ecuación matricial $X' = A(t)X$. De hecho, las columnas de $X(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial $x' = A(t)x$ si, y solo si, $X(t)$ verifica la ecuación matricial $X' = A(t)X$. Es inmediato comprobar que si $\Phi(t)$ es una solución no singular de la ecuación matricial anterior, entonces la solución general se expresa como $\Phi(t)C$.

El siguiente resultado, conocido como Fórmula de Liouville, nos ofrece una demos-

tración alternativa de la Proposición 1.1.

Proposición 1.2 (Fórmula de Liouville). *Sea $X(t)$ una matriz cuyas columnas son solución de $x' = A(t)x$. Entonces, para todo $t \in (\alpha, \omega)$ y todo $t_0 \in (\alpha, \omega)$ fijo, se cumple que*

$$\det X(t) = \det X(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right\}$$

donde la traza de una matriz A se define como $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal.

Demostración. La demostración consiste en probar que $\det X(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x' = \text{tr}(A(t))x$. Por inducción se puede demostrar que

$$(\det X(t))' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \dots & x'_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \dots & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Como $X(t)$ es solución de la ecuación matricial $X' = A(t)X$, entonces

$$x'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t), \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq n.$$

Si particularizamos para $i = 1$ y sustituimos en el primer determinante de la suma,

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}x_{kn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \dots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix},$$

que es $a_{11}(t)\det X(t)$. La igualdad se deduce de restarle a la primera fila la fila i -ésima multiplicada por $a_{1i}(t)$ para todo $2 \leq i \leq n$. Repitiendo esto para el resto de sumandos se obtiene que

$$(\det X(t))' = a_{11}(t)\det X(t) + a_{22}(t)\det X(t) + \dots + a_{nn}(t)\det X(t) = \text{tr}(A(t))\det X(t),$$

lo que concluye la demostración. \square

Definición 1.2. Una **matriz principal** del sistema $x' = A(t)x$ en t_0 , que denotaremos por $X(t, t_0)$, es una matriz fundamental que verifica que $X(t_0, t_0) = Id$.

La matriz principal de un sistema en un t_0 fijo es única por la unicidad de soluciones de los PVI de ecuaciones matriciales y que a su vez se deriva de la unicidad de soluciones de los PVI.

Vamos a restringirnos momentáneamente al caso de un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes. En particular, las soluciones estarán definidas para todo

$t \in \mathbb{R}$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el dato inicial se toma en $t_0 = 0$ tras una traslación en el tiempo. En este caso sí que se conocen explícitamente las soluciones del sistema, ya que se puede encontrar una matriz fundamental. De hecho, la siguiente proposición junto con lo que sigue da idea de cómo computar dicha matriz fundamental.

Proposición 1.3. *Sea $\Phi(t) = X(t, 0)$ la matriz fundamental del sistema de coeficientes constantes $x' = Ax$ para tiempo inicial $t_0 = 0$. Entonces, para todo $s, t \in \mathbb{R}$,*

$$1) \Phi(0) = Id, \quad 2) \Phi(t + s) = \Phi(t)\Phi(s), \quad 3) \Phi(t)^{-1} = \Phi(-t).$$

Demostración. Lo primero se deduce de la definición de matriz principal y para lo segundo fijamos $s \in \mathbb{R}$ y definimos $Y(t) = \Phi(t + s)$ y $Z(t) = \Phi(t)\Phi(s)$. Como tanto $Y(t)$ como $Z(t)$ verifican la ecuación matricial $X' = AX$, por ser de coeficientes constantes, y al evaluarlas en $t = 0$ coinciden, entonces $Y(t) = Z(t)$ para todo t por la unicidad de los PVI matriciales. Lo tercero es inmediato tomando en 2) $s = -t$. \square

Las propiedades 1) y 2) de la proposición anterior caracterizan la función exponencial escalar. Es natural definir la exponencial de una matriz A como la serie

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

La demostración del Teorema 1.1 construye una sucesión de funciones que converge a la solución del PVI. Se puede demostrar por inducción que, cuando este toma la forma $x'(t) = Ax(t)$ y $x(0) = x_0$, el término n -ésimo de la sucesión es $x^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(tA)^k}{k!} x_0$. La solución será entonces el límite de estas sumas finitas, es decir, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} x_0$, que con la definición anterior podemos expresar como $x(t) = e^{tA} x_0$. Esto supone una clara analogía con el caso escalar. Aunque no es inmediato el cálculo de la exponencial de una matriz, utilizando la forma normal de Jordan se puede conocer explícitamente la solución para el caso general de un sistema lineal de coeficientes constantes.

Una vez estudiada la estructura de los sistemas lineales homogéneos, también es apropiado mencionar la estructura del espacio de soluciones de la ecuación no homogénea $x' = A(t)x + b(t)$. Es inmediato comprobar que la solución general de la ecuación no homogénea es la suma de una solución particular de la ecuación, obtenida por ejemplo con el método de variación de las constantes, con la solución general de la ecuación homogénea. Esto quiere decir que el conjunto de soluciones de la ecuación lineal no homogénea es un espacio afín cuya dirección es el espacio de soluciones de la ecuación homogénea y en general se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *La solución del PVI*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{es} \quad x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s)ds.$$

donde $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$. En particular, si la matriz $\Phi(t)$ es principal, la matriz $A(t) \equiv A$ y $t_0 = 0$, entonces

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-s)b(s)ds = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

1.3. Nociones generales de estabilidad

A pesar de que existen resultados de continuidad de las soluciones respecto a datos iniciales, estos solamente son válidos para tiempos acotados. Cuando queremos estudiar cómo afectan pequeñas perturbaciones en los datos iniciales de un modelo de depredador-presa o de un péndulo para tiempos muy grandes, debemos recurrir al concepto de estabilidad. Es conveniente recordar algunas definiciones y resultados generales sobre estabilidad que aplican a la ecuación diferencial general $x' = f(t, x)$. Asumiremos condiciones necesarias para que exista una solución única del PVI (1.1) y denotaremos por $x(t, t_0, x_0)$ la única solución de la ecuación diferencial que verifica la condición inicial, para hacer explícita la dependencia de la solución de las condiciones iniciales. Cuando la ecuación sea autónoma y la solución esté definida para $t \geq \beta$, asumiremos que $t_0 = 0$ y simplemente la denotaremos por $x(t, x_0)$.

Definición 1.3. Sea $f : [\beta, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $\bar{x}(t)$ una solución de $x' = f(t, x)$ definida para $t \geq \beta$. Entonces la solución $\bar{x}(t)$

- 1) se dice **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \geq \beta$, existe un $\delta > 0$ (que depende de ε y de t_0), tal que para todo x_0 que verifique $|\bar{x}(t_0) - x_0| < \delta$, entonces $|\bar{x}(t) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.
- 2) se dice **uniformemente estable** si es estable y la elección de $\delta > 0$ se puede hacer independiente de t_0 .
- 3) se dice **asintóticamente estable** si es estable y dado $t_0 \geq \beta$, existe un $\eta > 0$ (que depende de t_0) tal que para todo x_0 que verifique $|\bar{x}(t_0) - x_0| < \eta$, entonces $|\bar{x}(t) - x(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- 4) se dice **uniformemente asintóticamente estable** si es asintóticamente estable y la elección de $\eta > 0$ no depende de t_0 .
- 5) se dice **inestable** si no es estable.

En los casos en los que f no depende del tiempo o es periódica en t , la elección de δ y η se puede hacer uniforme. Por tanto, en estos casos, que una solución sea (asintóticamente) estable implica que es uniformemente (asintóticamente) estable. Además, cuando nos restringimos al estudio de los sistemas lineales homogéneos $x' = A(t)x$, la estabilidad de cualquier solución es la misma que la estabilidad de la

solución trivial.

Lema 1.1. *Sea $\bar{x}(t)$ una solución de $x' = A(t)x$. Entonces $\bar{x}(t)$ es estable si, y solo si, la solución trivial es estable.*

Demostración. En primer lugar, sea $X(t, t_0)$ la matriz principal del sistema en t_0 . Entonces la solución $x(t, t_0, x_0)$ se expresa como $x(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0$ y la solución $\bar{x}(t)$ como $\bar{x}(t) = X(t, t_0)\bar{x}(t_0)$. Que $\bar{x}(t)$ sea estable es equivalente a que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \geq \beta$, existe un $\delta > 0$, tal que para todo x_0 que verifique $|\bar{x}(t_0) - x_0| < \delta$, entonces $|X(t, t_0)\bar{x}(t_0) - X(t, t_0)x_0| = |X(t, t_0)(\bar{x}(t_0) - x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Que 0 sea estable, es lo mismo que decir que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $t_0 \geq \beta$, existe un $\delta > 0$, tal que si $|x_1| < \delta$, entonces $|X(t, t_0)x_1| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Tomando $x_1 = \bar{x}(t_0) - x_0$ en una dirección y $x_0 = \bar{x}(t_0) - x_1$ en la otra se tiene la equivalencia. \square

Por tanto, para los sistemas lineales se puede decir que “el sistema es estable” o “el sistema es inestable”. También se puede probar de manera análoga que una solución es (uniformemente) (asintóticamente) estable si, y solo si, la solución trivial es (uniformemente) (asintóticamente) estable. Adicionalmente, para los sistemas lineales tenemos un resultado que caracteriza los conceptos de estabilidad en función de cotas sobre expresiones en las que intervienen las matrices fundamentales del sistema.

Teorema 1.4. *Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema $x' = A(t)x$ definido para $t \geq \beta$. Entonces se tienen las siguientes equivalencias.*

- 1) *El sistema es estable si, y solo si, para todo $t_0 \geq \beta$ existe una constante K positiva tal que $|X(t)| \leq K$, $t_0 \leq t$, es decir, todas las soluciones están acotadas.*
- 2) *El sistema es uniformemente estable si, y solo si, existe una constante K positiva (independiente de $t_0 \geq \beta$) tal que $|X(t)X(s)^{-1}| \leq K$, $t_0 \leq s \leq t$.*
- 3) *El sistema es asintóticamente estable si, y solo si, $|X(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.*
- 4) *El sistema es uniformemente asintóticamente estable si, y solo si, es **exponencialmente asintóticamente estable**, es decir, existen α y K positivos (independientes de $t_0 \geq \beta$) tales que $|X(t)X(s)^{-1}| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t_0 \leq s \leq t$.*

Demostración. Se puede encontrar en [2]. \square

El siguiente lema introduce la idea de que perturbaciones “pequeñas” de un sistema no varían la estabilidad del origen y nos será útil más adelante.

Lema 1.2. *Supongamos que el sistema lineal $x' = A(t)x$ es uniformemente asintóticamente estable. Sea $f(t, x)$ una función continua en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y que verifica que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f(t, x)| \leq \varepsilon|x|$ para todo t en \mathbb{R} . Entonces, la solución $x = 0$ del sistema no lineal*

$$x' = A(t)x + f(t, x)$$

es uniformemente asintóticamente estable.

Demostración. Para la demostración, utilizaremos que un sistema es uniformemente asintóticamente estable si y solo si es exponencialmente asintóticamente estable. Con esta equivalencia y las hipótesis, existen α y K positivos tales que $|X(t)X(s)^{-1}| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t_0 \leq s \leq t$ para cualquier matriz fundamental $X(t)$ del sistema lineal. Las soluciones del sistema no lineal pueden ser expresadas por la fórmula de variación de constantes como

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X(s)^{-1}f(s, x(s))ds$$

Tomando normas y usando la acotación $|X(t)X(s)^{-1}| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t_0 \leq s \leq t$,

$$|x(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)| + \int_{t_0}^t Ke^{-\alpha(t-s)}|f(s, x(s))|ds \quad (1.2)$$

para todo $t \geq t_0$. Sea $0 < \varepsilon < \alpha/K$ y por hipótesis, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $|f(t, x)| \leq \varepsilon|x|$ para todo t en \mathbb{R} . Sea $\mathcal{T} = \{t \geq t_0 \text{ con } |x(t)| < \delta\}$. Elegimos $x(t_0)$ tal que $|x(t_0)| < \min\{\delta, \delta/K\}$ (para que $t_0 \in \mathcal{T}$) y vamos a probar que $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$. Si no lo fuera, existe un $t_1 > t_0$ tal que $|x(t_1)| \geq \delta$ y $[t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$. Entonces, si $t \in [t_0, t_1)$ se cumple que $|x(t)| < \delta$ y podemos aplicar la desigualdad $|f(t, x(t))| \leq \varepsilon|x(t)|$ en la integral de (1.2), luego

$$|x(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)| + \int_{t_0}^t Ke^{-\alpha(t-s)}\varepsilon|x(s)|ds.$$

Si multiplicamos en ambos lados de la desigualdad por $e^{\alpha t}$ y aplicamos la desigualdad de Gronwall a la función $e^{\alpha t}|x(t)|$ se llega a que

$$|x(t)| \leq K|x(t_0)|e^{-(\alpha-K\varepsilon)(t-t_0)}$$

cuando $t \in [t_0, t_1)$. Por la elección de $x(t_0)$, $|x(t)| \leq \delta e^{-(\alpha-K\varepsilon)(t-t_0)}$ para todo $t \in [t_0, t_1)$ y al ser $\alpha - K\varepsilon > 0$, tomando el límite cuando t tiende a t_1 por la izquierda y aplicando continuidad,

$$|x(t_1)| \leq \delta e^{-(\alpha-K\varepsilon)(t_1-t_0)} < \delta$$

y llegamos a una contradicción tras haber supuesto que $\mathcal{T} \neq [t_0, \infty)$. En consecuencia, se da la igualdad y procediendo de la misma manera que antes, esta vez para todo $t \geq t_0$ (ya que sabemos que se verifica $|x(t)| < \delta$) se llega a

$$|x(t)| \leq K|x(t_0)|e^{-(\alpha-K\varepsilon)(t-t_0)} \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Esta desigualdad prueba la estabilidad exponencial asintótica de la solución $x = 0$ de la ecuación $x' = A(t)x + f(t, x)$ y esto concluye la demostración. \square

Capítulo 2

Sistemas periódicos

En este capítulo estudiamos los sistemas periódicos. Para comenzar, en la sección 2.1 vamos a analizarlos en su forma más sencilla, es decir, cuando estos sistemas son además lineales. Obtendremos la forma canónica de sus soluciones siguiendo la teoría de Floquet y la estabilidad de las mismas. A continuación, trataremos el caso no lineal en la sección 2.2, centrándonos en la estabilidad de soluciones periódicas en este tipo de sistemas. A lo largo del capítulo, descubriremos que existe cierta analogía entre los sistemas lineales de coeficientes constantes y los sistemas lineales periódicos y entre la estabilidad de las soluciones periódicas y soluciones estacionarias

2.1. Sistemas periódicos lineales

En esta sección estamos interesados en estudiar los sistemas lineales homogéneos donde la matriz de coeficientes es dependiente del tiempo, pero es periódica de periodo $T > 0$, es decir,

$$x' = A(t)x \quad \text{con} \quad A(t+T) = A(t) \quad \text{y} \quad T > 0. \quad (2.1)$$

La primera observación que podemos hacer de estos sistemas es que, si $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema, entonces $X(t+T)$ también lo es. En efecto, si llamamos $Y(t) = X(t+T)$, entonces,

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T) = A(t)Y(t),$$

luego las columnas de $X(t+T)$ son soluciones de la ecuación y, según la Proposición 1.1, $\det X(t) \neq 0$ en todo su dominio de definición. Por tanto existe una cierta matriz constante y no singular C tal que $X(t+T) = X(t)C$. Esta matriz C toma gran importancia en la teoría que desarrollaremos, que es la conocida como teoría de Floquet, en honor al matemático francés de finales del siglo XIX. En primer

lugar, vamos a demostrar el Teorema de Floquet, que permite expresar las matrices fundamentales de estos sistemas de forma canónica como el producto de una matriz T -periódica por una exponencial matricial e^{tB} para cierta matriz B de coeficientes constantes. Antes de ello necesitamos un lema previo sobre la existencia del logaritmo matricial.

Lema 2.1 (Existencia logaritmo matricial). *Dada una matriz cuadrada no singular C existe una matriz B tal que $C = e^B$.*

Demostración. Podemos realizar varias reducciones antes de enfrentarnos al problema. En primer lugar, basta suponer que C está en su forma canónica de Jordan. Si $C = PJP^{-1}$, donde J es su forma canónica de Jordan, y existe cierta D tal que $J = e^D$, entonces se puede tomar $B = PDP^{-1}$ y

$$e^B = e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1} = PJP^{-1} = C.$$

Además, la no singularidad se preserva por semejanza. La segunda reducción es que podemos suponer que trabajamos con un único bloque de Jordan. Si $C = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$, donde los C_i son bloques de Jordan, y encontramos B_i tales que $C_i = e^{B_i}$ para $1 \leq i \leq r$, entonces podemos tomar $B = \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$, ya que $e^B = e^{\text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_r\}} = \text{diag}\{e^{B_1}, e^{B_2}, \dots, e^{B_r}\} = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_r\} = C$. En resumen, podemos suponer que

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda Id + N = \lambda \left(Id + \frac{N}{\lambda} \right),$$

donde λ es distinto de cero porque C es no singular y N es una matriz de dimensiones $m \times m$, triangular superior, con ceros en la diagonal y nilpotente, es decir, tal que $N^j = 0$ para todo $j \geq m$. Se define

$$B = \log(\lambda)Id + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{N^k}{\lambda^k} \quad (2.2)$$

y vamos a probar que $C = e^B$. Esta definición de B se toma por analogía con el caso escalar. Sabemos que el desarrollo en serie de Taylor centrado en 0 de la función escalar $\log(1+x)$ es

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

y que esta converge para $|x| < 1$. Además, se puede componer con la serie de potencias de la exponencial y se tiene que $e^{\log(1+x)} = 1+x$. La idea es que esto funciona también para matrices porque en (2.2) realmente no nos encontramos con una serie, sino con una suma finita. Esto se debe a que, como hemos anticipado, todos los sumandos con $k \geq m$ son 0 porque N es nilpotente. En consecuencia, no

hay problemas de convergencia, las series matriciales de la exponencial y el logaritmo se pueden componer y dan la igualdad buscada $e^B = C$. Sin embargo, proponemos otra forma original de demostrarlo para resaltar la utilidad de los PVI matriciales. Con la consideración anterior podemos escribir $B = \log(\lambda)Id + X(1)$, donde

$$X(t) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (tA)^k,$$

y por comodidad denotamos $A = N/\lambda$, que verifica las mismas propiedades antes enunciadas para N . Demostrar que $e^B = C$ es equivalente a ver que $Id + A = e^{X(1)}$ y de hecho vamos a probar que se cumple $Id + tA = e^{X(t)}$ para todo t . Comenzamos probando¹ que $X'(t) = (Id + tA)^{-1}A$. Para verlo, calculamos

$$\begin{aligned} (Id + tA)X'(t) &= (Id + tA) \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} t^{k-1} A^k = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} t^{k-1} A^k + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} t^k A^{k+1} = A + (-1)^m t^{m-1} A^m = A \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se tiene por ser la suma telescópica y la última porque $A^k = 0$ para todo $k \geq m$. Visto eso, denotamos $Y(t) = e^{X(t)}$ y $Z(t) = Id + tA$ y las ecuaciones diferenciales que verifican $Y(t)$ y $Z(t)$ son

$$Y'(t) = X'(t)e^{X(t)} = (Id + tA)^{-1}AY(t) \quad \text{y}$$

$$Z'(t) = A = (Id + tA)^{-1}(Id + tA)A = (Id + tA)^{-1}A(Id + tA) = (Id + tA)^{-1}AZ(t).$$

Además, $Y(0) = e^{X(0)} = e^0 = Id$ y $Z(0) = Id$, luego $Y(t)$ y $Z(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial matricial $\Phi'(t) = \Lambda(t)\Phi(t)$ con dato inicial $\Phi(0) = Id$, donde $\Lambda(t) = (Id + tA)^{-1}A$ es una función matricial continua. Por la unicidad de los problemas de valor inicial matriciales, $Y(t) = Z(t)$ y se tiene lo buscado. \square

Una vez visto esto, pasamos a enunciar y demostrar el Teorema de Floquet.

Teorema 2.1 (Teorema de Floquet). *Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema (2.1). Entonces $X(t)$ se puede expresar como $X(t) = P(t)e^{tB}$, donde $P(t)$ es una matriz no singular T -periódica y B es una matriz constante.*

Demostración. Dada $X(t)$ una matriz fundamental sabemos que existe una matriz C no singular tal que $X(t+T) = X(t)C$. Por el Lema 2.1, existe una matriz constante B tal que $C = e^{TB}$. Basta entonces definir $P(t) = X(t)e^{-tB}$ y comprobar que es T -periódica y no singular. Lo segundo es inmediato por ser producto de matrices no singulares y para lo primero simplemente evaluamos

$$P(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)B} = X(t)Ce^{-TB}e^{-tB} = X(t)e^{-tB} = P(t)$$

y se comprueba la condición de periodicidad. \square

¹Nótese que la matriz $(Id + tA)$ es no singular para todo t porque A es triangular superior con ceros en la diagonal y tiene sentido tomar su inversa.

Del Teorema de Floquet se sigue este interesante resultado.

Teorema 2.2. *El sistema (2.1) admite un cambio de variables no singular y T -periódico que lo transforma en un sistema lineal de coeficientes constantes.*

Demostración. Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema y sea C no singular tal que $X(t+T) = X(t)C$. Hemos visto en la demostración del Teorema de Floquet, que si B era tal que $C = e^{TB}$, entonces existía una matriz $P(t)$ no singular y T -periódica que permitía expresar la matriz fundamental $X(t)$ como $X(t) = P(t)e^{tB}$. Definimos entonces el cambio de variables no singular y T -periódico $x(t) = P(t)y(t)$ y veamos qué ecuación diferencial verifica $y(t)$. Derivando en la igualdad anterior se obtiene que $x' = P'(t)y + P(t)y'$. Si despejamos y' y utilizamos que x es solución, se tiene que

$$y' = P(t)^{-1}(A(t)x - P(t)'y) = P(t)^{-1}(A(t)P(t) - P'(t))y \quad (2.3)$$

Por último, calculamos $P'(t)$ utilizando que $X(t) = P(t)e^{tB}$. Derivando obtenemos

$$P'(t)e^{tB} + P(t)Be^{tB} = X' = A(t)X = A(t)P(t)e^{tB} \iff P'(t) = A(t)P(t) - P(t)B.$$

Sustituyendo en (2.3), $y' = By$ y se tiene lo buscado. \square

Este teorema puede resultar engañoso a simple vista porque pareciera que nos ofrece un método constructivo para encontrar la solución general de (2.1), reduciéndolo a un problema que sabemos resolver. Sin embargo, es esencial observar que, para la construcción del cambio de variables, nos hemos apoyado fuertemente en la existencia de una matriz fundamental que en principio desconocemos y, en definitiva, es lo que nos gustaría averiguar. No es evidente que haya una forma general de encontrar dicho cambio de variable T -periódico, pero su mera existencia nos hace entrever que, en términos de estabilidad, los sistemas deben ser *equivalentes*.

Como comentario adicional, los tres resultados anteriores pueden restringirse al caso real realizando algunas modificaciones. En concreto, existe una matriz D real tal que $C^2 = e^D$ para cualquier C real y no singular. En el Teorema de Floquet, si $A(t)$ es real, B y $P(t)$ se pueden escoger reales si solamente exigimos que $P(t)$ sea $2T$ -periódica. Por último, el sistema (2.1) admite un cambio de variables real, no singular y $2T$ -periódico que lo transforma en un sistema de coeficientes constantes y reales.

Como se ha podido apreciar durante el desarrollo de los resultados anteriores, la matriz C , que relaciona las matrices fundamentales $X(t)$ y $X(t+T)$ toma un papel protagonista.

Definición 2.1. *Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema lineal periódico (2.1). La matriz C que aparece en la relación $X(t+T) = X(t)C$ se denomina **matriz de monodromía**. Los autovalores μ de una matriz de monodromía se denominan **multiplicadores característicos**. Los valores λ que verifican $\mu = e^{\lambda T}$ para μ multiplicador característico se llaman **exponentes característicos**.*

Es conveniente detenernos a analizar las definiciones anteriores. En primer lugar, las matrices de monodromía se definen en función de una matriz fundamental y no se puede hablar de “la matriz de monodromía del sistema” porque existe una para cada matriz fundamental y, en general, son distintas. Lo que sí es correcto es hablar de “los multiplicadores característicos del sistema” o los “exponentes característicos del sistema” ya que las matrices de monodromía son semejantes, luego su espectro, es decir, el conjunto de sus autovalores, es el mismo. Comprobamos esto último. Sean $X(t)$ e $Y(t)$ matrices fundamentales del sistema y sean C y D matrices de monodromía tales que $X(t+T) = X(t)C$ e $Y(t+T) = Y(t)D$. Entonces, como $X(t)$ e $Y(t)$ son matrices fundamentales, existe una matriz constante P no singular tal que $X(t) = Y(t)P$. Sustituyendo se tiene que

$$Y(t)PC = X(t)C = X(t+T) = Y(t+T)P = Y(t)DP,$$

y, multiplicando por la izquierda por $P^{-1}Y(t)^{-1}$, llegamos a la relación $C = P^{-1}DP$. Por otro lado, mientras que la parte real de los exponentes característicos es única, la parte imaginaria está determinada módulo $\frac{2\pi i}{T}$ luego no existe una correspondencia biunívoca entre multiplicadores característicos y exponentes característicos. Asimismo, los exponentes característicos se pueden escoger como los autovalores de cualquier matriz B que verifique $C = e^{TB}$.

A continuación, presentamos un resultado que nos habla sobre algunas soluciones destacadas de los sistemas lineales periódicos.

Proposición 2.1. *Dado un sistema lineal periódico como en (2.1), son equivalentes:*

- 1) λ es exponente característico.
- 2) Existe una solución no trivial del sistema de la forma $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$ donde $p(t)$ es una función T -periódica.
- 3) Existe una solución no trivial x del sistema que verifica $x(t+T) = e^{\lambda T}x(t)$.

Demostración. Comenzamos viendo que 1) \implies 2). Como λ es exponente característico, $e^{\lambda T}$ es multiplicador característico. Sea $X(t)$ una matriz fundamental del sistema y sea C la matriz de monodromía que hace que se verifique la igualdad $X(t+T) = X(t)C$. Entonces existe un $v \neq 0$ tal que $Cv = e^{\lambda T}v$. Definimos x como $x(t) = X(t)v$. Evidentemente, x es solución por ser combinación lineal de soluciones y es no nula ya que $v \neq 0$ y las columnas de $X(t)$ son linealmente independientes. Falta comprobar que se puede escribir como $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$. Por el Teorema de Floquet, podemos expresar $X(t)$ como $X(t) = P(t)e^{tB}$ donde B es tal que $C = e^{TB}$ y $P(t) = P(t+T)$. Entonces, $x(t) = X(t)v = P(t)e^{tB}v = (P(t)e^{tB}ve^{-\lambda t})e^{\lambda t} = p(t)e^{\lambda t}$ y bastaría ver que $p(t) = P(t)e^{tB}ve^{-\lambda t}$ es T -periódica. Pero simplemente evaluando,

$$\begin{aligned} p(t+T) &= P(t+T)e^{(t+T)B}ve^{-\lambda(t+T)} = P(t)e^{tB}e^{TB}ve^{-\lambda(t+T)} = \\ &= P(t)e^{tB}(Cv)e^{-\lambda t}e^{-\lambda T} = P(t)e^{tB}(e^{\lambda T}v)e^{-\lambda t}e^{-\lambda T} = P(t)e^{tB}ve^{-\lambda t} = p(t), \end{aligned}$$

se tiene lo buscado. Que 2) \implies 3) es sencillo comprobarlo, pues

$$x(t+T) = p(t+T)e^{\lambda(t+T)} = p(t)e^{\lambda t}e^{\lambda T} = x(t)e^{\lambda T}.$$

Por último, probamos que 3) \implies 1), para lo que bastaría comprobar que $e^{\lambda T}$ es multiplicador característico. Sea $X(t)$ una matriz fundamental y como x es solución entonces existe v tal que $x(t) = X(t)v$. Además, $v \neq 0$ ya que $x \not\equiv 0$. Por hipótesis,

$$X(t)Cv = X(t+T)v = x(t+T) = e^{\lambda T}x(t) = e^{\lambda T}X(t)v = X(t)e^{\lambda T}v$$

y multiplicando por $X(t)^{-1}$, $Cv = e^{\lambda T}v$, luego $e^{\lambda T}$ es autovalor de una matriz de monodromía, es decir, multiplicador característico. \square

De la demostración se sigue que, si v_1, v_2, \dots, v_r son autovectores linealmente independientes asociados a autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ no necesariamente distintos, existe una familia de r soluciones linealmente independientes. Estas serán de la forma $x_i(t) = p_i(t)e^{\lambda_i t}$ para $1 \leq i \leq r$ donde las funciones $p_i(t)$ son T -periódicas.

Los dos siguientes corolarios dan condiciones de equivalencia, en términos de los multiplicadores característicos, para garantizar la existencia de soluciones periódicas.

Corolario 2.1. *Existe una solución no trivial T -periódica del sistema (2.1) si, y solo si, 1 es un multiplicador característico del sistema.*

Demostración. La condición de periodicidad es $x(t+T) = x(t)$, que es 3) en la Proposición 2.1 para $e^{\lambda T} = 1$, es decir, cuando 1 es multiplicador característico. \square

Corolario 2.2. *Si el sistema (2.1) no tiene una solución no trivial T -periódica, existe una solución no trivial $2T$ -periódica si, y solo si, -1 es un multiplicador característico del sistema.*

Demostración. Sea $x(t)$ una solución $2T$ -periódica, es decir, $x(t+2T) = x(t)$, y definimos la función $y(t) = x(t) + x(t+T)$. Tanto $x(t)$ como $x(t+T)$ son soluciones de (2.1), luego $y(t)$ también lo es. Además, $y(t)$ es T -periódica, ya que

$$y(t+T) = x(t+T) + x(t+2T) = x(t+T) + x(t) = y(t).$$

Como estamos suponiendo que el sistema no tiene soluciones T -periódicas no triviales, entonces esta solución deberá ser la trivial, es decir, $y(t) = x(t) + x(t+T) = 0$, o equivalentemente, $x(t+T) = -x(t)$. La Proposición 2.1 nos asegura que -1 es multiplicador característico. Recíprocamente, si -1 es multiplicador característico, entonces existe una solución no trivial tal que $x(t+T) = -x(t)$ y es inmediato comprobar que la propia x es $2T$ -periódica. \square

A pesar de estas caracterizaciones sobre la existencia de soluciones periódicas, en la práctica, dado un sistema lineal periódico, no es evidente cómo calcular sus multiplicadores característicos. De nuevo, estos son los autovalores de cualquier matriz

de monodromía, y las matrices de monodromía se definen en función matrices fundamentales que, en el caso general, no sabemos calcular. Sin embargo, sí podemos obtener cierta información sobre los multiplicadores característicos, lo cual se detalla en la siguiente proposición, que tiene cierta utilidad práctica en el caso $n = 2$.

Proposición 2.2. Sean $\mu_i = e^{\lambda_i T}$ para $1 \leq i \leq n$ los multiplicadores característicos del sistema, contados de acuerdo a su multiplicidad. Se verifican las igualdades

$$\prod_{i=1}^n \mu_i = \exp \left\{ \int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \right\} \quad y \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \quad \text{mód } \frac{2\pi i}{T}.$$

Demostración. La segunda igualdad es consecuencia inmediata de la primera y, para la primera igualdad, hacemos uso de la Fórmula de Liouville. Consideramos $X(t)$ una matriz fundamental, $t_0 = 0$ y evaluamos en $t = T$. Entonces se tiene que

$$\det X(T) = \det X(0) \exp \left\{ \int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \right\}.$$

Ahora bien, si consideramos la matriz de monodromía C asociada a la matriz fundamental $X(t)$, es decir, cumpliendo $X(t+T) = X(t)C$, y evaluamos en $t = 0$ y tomamos determinantes, se obtiene $\det X(T) = \det X(0) \det C$, luego,

$$\det C = \prod_{i=1}^n \mu_i = \exp \left\{ \int_0^T \text{tr}(A(s)) ds \right\}.$$

□

En lo que resta de sección nuestro objetivo va ser analizar la estabilidad de los sistemas lineales periódicos y, para ello, es conveniente recordar un resultado sobradamente conocido sobre la estabilidad de los sistemas lineales de coeficientes constantes. Su esencia es que se puede caracterizar la estabilidad del sistema, una propiedad cualitativa sobre el comportamiento a tiempos grandes de las soluciones, mediante una condición algebraica que involucra a los autovalores de la matriz del sistema.

Teorema 2.3. Dado el sistema lineal de coeficientes constantes $x' = Ax$,

- 1) El sistema es estable si, y solo si, todos los autovalores de la matriz A tienen parte real menor o igual que 0 y, para aquellos con parte real igual a 0, la multiplicidad algebraica del autovalor coincide con la multiplicidad geométrica.
- 2) El sistema es asintóticamente estable si, y solo si, todos los autovalores de la matriz A tienen parte real estrictamente menor que 0. En tal caso, existen constantes positivas K y α tales que $|e^{tA}| \leq Ke^{-\alpha t}$, $t \geq 0$.

Demostración. Se puede encontrar en [2] o [7], entre otros.

□

De manera paralela, se tiene el siguiente resultado para sistemas lineales periódicos.

Teorema 2.4. *Dado el sistema lineal $x' = A(t)x$ con $A(t + T) = A(t)$ y $T > 0$,*

- 1) *El sistema es estable si, y solo si, todos los multiplicadores característicos del sistema tienen módulo menor o igual que 1 y, para aquellos con módulo 1, la multiplicidad algebraica del autovalor coincide con la multiplicidad geométrica.*
- 2) *El sistema es asintóticamente estable si, y solo si, todos los multiplicadores característicos del sistema tienen módulo estrictamente menor que 1. En tal caso, el sistema es exponencialmente asintóticamente estable.*

Antes de demostrar el resultado, hacemos notar que su enunciado se puede reescribir en términos de los exponentes característicos del sistema. Tan solo habría que sustituir la condición de que el *módulo* de los multiplicadores característicos sea menor o igual (menor, igual) que 1 por que la *parte real* de los exponentes característicos sea menor o igual (menor, igual) que 0. Por tanto, el enunciado de este teorema es el mismo que el del Teorema 2.3, sustituyendo *autovalores* por *exponentes característicos*. La demostración consiste en combinar adecuadamente el Teorema de Floquet, la caracterización de la estabilidad de los sistemas lineales dada en el Teorema 1.4 y el Teorema 2.3 sobre la estabilidad para el caso de coeficientes constantes.

Demostración. Veamos que 1) es cierto y 2) se obtiene de manera completamente análoga. Por la caracterización de la estabilidad de los sistemas lineales dada en el Teorema 1.4, el sistema es estable si, y solo si, dada una matriz fundamental $X(t)$, para todo t_0 existe una constante K positiva tal que $|X(t)| \leq K$ para $t \geq t_0$. Pero en el caso de estos sistemas lineales periódicos, el Teorema de Floquet nos permite expresar cualquier matriz fundamental como $X(t) = P(t)e^{tB}$, donde $P(t)$ es una matriz T -periódica y no singular y B es una matriz constante tal que $e^{TB} = C$, donde C es una matriz de monodromía. Como $P(t)$ y $P(t)^{-1}$ son funciones periódicas y continuas, existen constantes positivas M_1 y M_2 tales que $|P(t)| \leq M_1$ y $|P(t)^{-1}| \leq M_2$ para todo tiempo t . Por tanto, la condición $|X(t)| = |P(t)e^{tB}| \leq K$ es equivalente a que $|e^{tB}| \leq \bar{K}$ para otra constante positiva \bar{K} . Pero e^{tB} es matriz fundamental del sistema lineal de coeficientes constantes $y' = By$, luego la estabilidad del sistema lineal periódico original es la misma que la de este último, usando de nuevo el Teorema 1.4. Por el Teorema 2.3, la estabilidad del sistema $y' = By$, se obtiene estudiando la parte real de los autovalores de la matriz B , que no son otros que los exponentes característicos del sistema periódico $x' = A(t)x$. Teniendo en cuenta la observación previa, concluimos la demostración. \square

Hasta ahora hemos estudiado los sistemas lineales periódicos utilizando gran parte de lo que ya conocíamos para sistemas lineales de coeficientes constantes. Hemos desarrollado Teoría de Floquet, que si bien no nos ha llevado a encontrar soluciones explícitas, sí que nos ha servido para hallar la forma canónica de las matrices fundamentales de este tipo de sistemas y demostrar la existencia de un cambio de

variables periódico que nos reduce el problema a un sistema de coeficientes constantes, lo que nos ha permitido encontrar condiciones de estabilidad muy similares a las de los sistemas de coeficientes constantes. Ahora vamos a regresar a la ecuación diferencial general y vamos a aplicar todo lo aprendido en el caso lineal.

2.2. Sistemas periódicos no lineales

Para los sistemas no lineales en general es muy complicado, mucho más que para los lineales, encontrar soluciones explícitas. Sin embargo, el estudio cualitativo de las mismas es, en muchas ocasiones, tan importante o incluso más. Dentro de las ecuaciones diferenciales existen dos tipos de soluciones destacadas, las soluciones estacionarias y las soluciones periódicas, que se corresponden a los puntos de equilibrio y las órbitas periódicas del diagrama de fases. En esta sección vamos a analizar la estabilidad de las soluciones periódicas en sistemas (no lineales) periódicos. Para motivar la discusión posterior, antes vamos a recordar la estrategia que se sigue para obtener información sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas autónomos (no lineales) mediante un proceso de linealización.

Si consideramos la ecuación de tipo $x' = f(x)$, donde f no depende del tiempo y es suficientemente regular, podemos analizar las propiedades cualitativas del sistema cerca de los puntos de equilibrio. Por ejemplo, sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Entonces, estudiar la estabilidad de la solución estacionaria \bar{x} es equivalente a estudiar la estabilidad del origen del sistema dado por el cambio de coordenadas $y(t) = x(t) - \bar{x}$. Derivando en la ecuación, este resulta ser

$$y'(t) = x'(t) = f(x(t)) = f(\bar{x} + y(t)) = Df(\bar{x})y(t) + h(y(t)),$$

donde, para abreviar, hemos llamado $h(y) = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})y$ que verifica $h(0) = 0$ y $h(y) = o(|y|)$ en 0, es decir,

$$\frac{h(y)}{|y|} \rightarrow 0 \text{ cuando } y \rightarrow 0.$$

Por tanto, la estabilidad de la solución estacionaria \bar{x} de la ecuación $x' = f(x)$ es la misma que la estabilidad del origen en la ecuación $y' = Df(\bar{x})y + h(y)$. Además, tenemos el siguiente Teorema de linealización.

Teorema 2.5 (Teorema de linealización). *Dado el sistema $x' = Ax + g(t, x)$ con g de clase \mathcal{C}^1 verificando $g(t, 0) = 0$ y $g(t, x) = o(|x|)$ en $x = 0$, uniformemente en t , entonces*

- 1) *Si todos los autovalores de A tienen parte real estrictamente menor que 0, la solución estacionaria $x = 0$ es asintóticamente estable.*
- 2) *Si existe un autovalor de A que tenga parte real estrictamente mayor que 0, la solución estacionaria $x = 0$ es inestable.*

Apoyándonos en este resultado, es inmediato comprobar que la estabilidad del punto de equilibrio \bar{x} del sistema autónomo $x' = f(x)$ se puede deducir en muchos casos estudiando los autovalores de $Df(\bar{x})$. Sin embargo, el teorema anterior no nos ofrece ninguna información cuando todos los autovalores tienen parte real menor o igual que cero y hay alguno en el eje imaginario.

Volviendo al objetivo principal de esta sección, nos planteamos estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas, siguiendo un desarrollo paralelo al que hemos hecho para las soluciones estacionarias. Sea la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$, donde f es T -periódica, es decir, $f(t, x) = f(t+T, x)$ para $T > 0$. Supongamos que dicha ecuación tiene una solución periódica $p(t)$ del mismo periodo T . Para analizar la estabilidad de la solución, nuevamente realizamos el cambio de variable $y(t) = x(t) - p(t)$ y derivando en la ecuación se llega, siguiendo exactamente los mismos pasos que anteriormente, a que

$$y'(t) = D_x f(t, p(t))y(t) + h(t, y(t)), \quad (2.4)$$

con $h(t, y) = f(t, p(t) + y) - f(t, p(t)) - D_x f(t, p(t))y$. La función $h(t, y)$ verifica que $h(t, 0) = 0$ y es una $o(|y|)$ en $y = 0$, uniformemente en t . Resaltamos además que la matriz $D_x f(t, p(t))$ es T -periódica, luego vamos a poder aplicar gran parte de lo aprendido en la sección anterior para sistemas lineales periódicos.

Inspirados en el cambio de variables que transformaba los sistemas lineales periódicos en sistemas lineales de coeficientes constantes, vamos a aplicar esa transformación a (2.4). Entonces, si consideramos el sistema linealizado

$$\tilde{y}' = D_x f(t, p(t))\tilde{y}, \quad (2.5)$$

sabemos que existe un cambio de variable $\tilde{y}(t) = P(t)\tilde{z}(t)$ que lo transforma en el de coeficientes constantes $\tilde{z}' = B\tilde{z}$. Además, esta matriz $P(t)$ es T -periódica, y verifica la igualdad $X(t) = P(t)e^{tB}$ para cierta matriz fundamental $X(t)$ del sistema. Por otro lado, la matriz B cumple la igualdad $C = e^{TB}$ para C la matriz de monodromía asociada a $X(t)$. Aunque hayamos insistido, es conveniente volver a recordar para lo que viene que los autovalores de B son exponentes característicos del sistema (2.5). Con todo, si definimos el cambio de variables $y(t) = P(t)z(t)$, derivamos la igualdad y sustituimos la expresión de y' dada por (2.4), se tiene

$$\begin{aligned} z' &= P(t)^{-1}(y' - P'(t)z) = P(t)^{-1}[D_x f(t, p(t))y + h(t, y) - P'(t)z] = \\ &= P(t)^{-1}[D_x f(t, p(t))P(t)z + h(t, P(t)z) - P'(t)z] = \\ &= P(t)^{-1}[D_x f(t, p(t))P(t) - P'(t)]z + P(t)^{-1}h(t, P(t)z) = Bz + P(t)^{-1}h(t, P(t)z), \end{aligned}$$

donde la última igualdad ya la obtuvimos en la demostración del Teorema 2.2 para $A(t) = D_x f(t, p(t))$. Estamos en condiciones de probar el siguiente teorema sobre la estabilidad de soluciones periódicas en sistemas periódicos.

Teorema 2.6. *Dado el sistema $x' = f(t, x)$ con f una función T -periódica, supongamos que tiene una solución T -periódica $p(t)$. Sea $\tilde{y}' = D_x f(t, p(t))\tilde{y}$ la linealización del sistema anterior. Entonces,*

- 1) Si todos los multiplicadores característicos del sistema linealizado tienen módulo estrictamente menor que 1, entonces la solución periódica $p(t)$ es asintóticamente estable.
- 2) Si existe un multiplicador característico del sistema linealizado con módulo estrictamente mayor que 1, entonces la solución periódica $p(t)$ es inestable.

Nuevamente destacamos que la condición de que un multiplicador tenga módulo estrictamente menor (mayor) que 1 es equivalente a que sus exponentes característicos asociados tengan parte real estrictamente menor (mayor) que 0.

Demostración. La estabilidad de la solución periódica $p(t)$ del sistema $x' = f(t, x)$ es la misma que la estabilidad en el origen del sistema

$$y'(t) = D_x f(t, p(t))y(t) + h(t, y(t)).$$

Por otro lado, la estabilidad del origen del sistema anterior es la misma que la estabilidad en el origen de

$$z' = Bz + P(t)^{-1}h(t, P(t)z). \quad (2.6)$$

Esto se debe a que el cambio de variables es no singular, continuo y periódico. Buscamos aplicar el Teorema 2.5 con $g(t, z) = P(t)^{-1}h(t, P(t)z)$. Es inmediato comprobar que $g(t, 0) = 0$ porque $h(t, 0) = 0$ para todo tiempo. Además, $g(t, z) \in o(|z|)$ cuando $z = 0$, uniformemente en t porque h cumplía la misma propiedad y el cambio de variables la preserva por ser no singular, continuo y periódico. Por tanto, estamos en las condiciones que exige el Teorema 2.5 y se tiene que la solución $z = 0$ de (2.6) es asintóticamente estable cuando todos los autovalores de B tienen parte real menor que 0 e inestable cuando hay alguno que tiene parte real estrictamente mayor que 0. Pero, como indicamos anteriormente, estos autovalores de B son exponentes característicos del sistema linealizado $\tilde{y}' = D_x f(t, p(t))\tilde{y}$. Por tanto, si todos los exponentes característicos del sistema periódico anterior tienen parte real estrictamente menor que 0, la solución periódica $p(t)$ de la ecuación $x' = f(t, x)$ es asintóticamente estable. De igual manera, si existe un exponente característico del sistema periódico $\tilde{y}' = D_x f(t, p(t))\tilde{y}$ con parte real estrictamente mayor que 0, la solución periódica $p(t)$ de la ecuación $x' = f(t, x)$ es inestable, y se tiene el resultado. \square

Al igual que para los puntos de equilibrio en la ecuación autónoma, conseguimos obtener información sobre la estabilidad, en esta ocasión de una solución periódica, estudiando su linealización. Además, hacemos notar que la primera condición del Teorema 2.6, según el Teorema 2.4, es equivalente a que el sistema linealizado sea asintóticamente estable. Es decir, si el sistema linealizado (periódico) es asintóticamente estable, la solución periódica es asintóticamente estable.

Estabilidad de órbitas periódicas de sistemas autónomos

Para los sistemas autónomos, el último teorema del capítulo anterior no nos sirve para demostrar la estabilidad asintótica de una solución periódica porque nunca se pueden cumplir las hipótesis. Para comprobarlo, supongamos pues que tomamos como $f(t, x) = f(x)$ una función que es trivialmente T -periódica para cualquier $T > 0$ y que existe una solución T -periódica $p(t)$ (no constante) del sistema $x' = f(x)$. Dicha solución periódica verificará la igualdad $p'(t) = f(p(t))$ y derivando se tiene que $p''(t) = Df(p(t))p'(t)$.

Esta expresión nos dice que $p'(t)$ es solución (no trivial) del sistema linealizado $y' = Df(p(t))y$. Pero como $p(t)$ era T -periódica, su derivada $p'(t)$ también lo es, luego existe una solución T -periódica y no trivial del sistema linealizado (y T -periódico) anterior. Si recordamos, obtuvimos en el Corolario 2.1 que la existencia de tal solución era equivalente a que 1 fuera un multiplicador característico del sistema. Por lo tanto, el sistema linealizado nunca puede verificar que todos sus multiplicadores tienen módulo menor que 1 ya que, de hecho, 1 es un multiplicador característico.

Que no podamos aplicar el teorema porque no se pueden verificar las hipótesis en principio no asegura que no podamos concluir lo mismo siguiendo otro camino. Sin embargo, este no es el caso. Para los sistemas autónomos, una solución periódica (no constante) nunca puede ser asintóticamente estable. En efecto, si $p(t)$ es solución de la ecuación diferencial autónoma $x' = f(x)$, entonces $p(t + \tau)$ también es solución para cualquier τ . Si $p(t)$ es T -periódica ($T > 0$) y no constante, dado un $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\tau > 0$ tal que $0 < |p(0) - p(\tau)| < \varepsilon$. Entonces $|p(t) - p(t + \tau)|$ nunca puede tender a 0 cuando t tiende a infinito porque $|p(nT) - p(nT + \tau)| = |p(0) - p(\tau)| > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la estabilidad asintótica es una propiedad demasiado fuerte para las soluciones periódicas de los sistemas autónomos.

Sin embargo, nos gustaría estudiar cuál es el comportamiento de las soluciones de $x' = f(x)$ que parten de datos iniciales cercanos a la órbita generada por una solución periódica. ¿Se mantienen las soluciones cerca de la órbita periódica para tiempos grandes? ¿Se aproximan las soluciones a la órbita? Según se aproximan a la órbita, ¿mantienen “la misma velocidad” que la de la solución periódica que genera la órbita? Estas preguntas ponen el foco en la órbita en lugar de en la solución, y es su estudio el camino que hay que recorrer para contestarlas.

3.1. Sistema de coordenadas móvil

Sea la ecuación diferencial autónoma $x'(t) = f(x(t))$ y $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función periódica de periodo $T > 0$, cuya restricción al intervalo $[0, T)$ es biyectiva. Supondremos en lo que sigue que f es al menos \mathcal{C}^1 y u es al menos \mathcal{C}^2 y tal que $\frac{du(\theta)}{d\theta} \neq 0$ para todo θ . Entonces su traza $\Gamma = \{u(\theta) \in \mathbb{R}^n, \theta \in \mathbb{R}\}$ es una curva cerrada simple de \mathbb{R}^n . Supongamos que Γ no contiene puntos de equilibrio y que toda solución de la ecuación diferencial cuyo dato inicial se encuentra en Γ , se mantiene en Γ para todo tiempo. En este caso, Γ se dice que es una **órbita periódica** y la función $u(\theta)$ que parametriza la curva se puede elegir para que sea solución de la ecuación diferencial. Si es así, $\theta = \theta(t)$ verifica $\theta'(t) = 1$ y $\frac{du(\theta)}{d\theta} = f(u(\theta))$.

Aunque el desarrollo que vamos a plantear durante todo el capítulo se puede hacer en \mathbb{R}^n , nos vamos a restringir al caso de $n = 3$ ya que permite dar una interpretación geométrica y visual a los pasos que vayamos dando. Para estudiar la estabilidad de la órbita periódica es preciso introducir un sistema de coordenadas ortonormal y móvil. Este es una variación del triedro de Frenet, instrumento fundamental para el estudio de la teoría de curvas alabeadas, y permite una generalización para $n \geq 4$. Al igual que en el triedro de Frenet, uno de los vectores de la base es el vector tangente normalizado y debemos elegir otros 2 vectores $\xi_2(\theta)$ y $\xi_3(\theta)$ que completen una base y que, como funciones de θ tengan la máxima regularidad posible. Para ello presentamos el siguiente teorema que garantiza la existencia de dicho sistema de coordenadas, especifica su regularidad y da un método constructivo para obtenerlo. Como material complementario, en el siguiente [enlace](#) podemos encontrar un vídeo que muestra el proceso de construcción seguido en la demostración y el [proyecto](#) de GeoGebra a partir del cual se ha creado.

Teorema 3.1. *Sea $u \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ con $p \geq 2$ una función T -periódica y verificando $\frac{du(\theta)}{d\theta} \neq 0$. Entonces existe un sistema de coordenadas ortonormal, T -periódico*

$$\{v(\theta), \xi_2(\theta), \xi_3(\theta)\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| v(\theta) = \frac{du(\theta)}{d\theta},$$

y donde las funciones vectoriales involucradas son todas ellas $\mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

Demostración. Por hipótesis, $v(\theta)$ es una función $\mathcal{C}^{p-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ para $p \geq 2$, luego en

particular es de clase \mathcal{C}^1 y Lipschitz. Consideramos los conjuntos $A_+ = \{v(\theta) | \theta \in \mathbb{R}\}$, $A_- = \{-v(\theta) | \theta \in \mathbb{R}\}$ y $A = A_+ \cup A_-$. Por ser $v(\theta)$ unitario, A_+ , $A_- \subset \mathbb{S}^2$, es decir, las trazas de las curvas $\pm v(\theta)$ están contenidas en la esfera unidad y, como las curvas son Lipschitz, los conjuntos A_+ y A_- tienen medida 0 en la esfera.

Sea entonces $e_1 \in \mathbb{S}^2 \setminus A \neq \emptyset$, que por construcción verifica $e_1 \neq \pm v(\theta)$ para todo θ . Completamos con otros dos vectores unitarios e_2 y e_3 para que, junto con e_1 , formen una base ortonormal y a partir de los cuales vamos a construir la referencia de coordenadas deseada mediante el siguiente proceso. Consideramos $[v(\theta), e_1]^\perp$, la recta normal al plano generado por $v(\theta)$ y e_1 , que son linealmente independientes. Entonces, realizamos una rotación en \mathbb{R}^3 , que denotaremos por R_θ , y que transforma el vector e_1 en $v(\theta)$. Esta rotación deja invariante el plano $[v(\theta), e_1]$ y es la identidad en $[v(\theta), e_1]^\perp$, es decir, el eje de rotación. Las imágenes de e_2 y e_3 son lo que llamaremos $\xi_2(\theta)$ y $\xi_3(\theta)$, como se aprecia en la Figura 3.1.

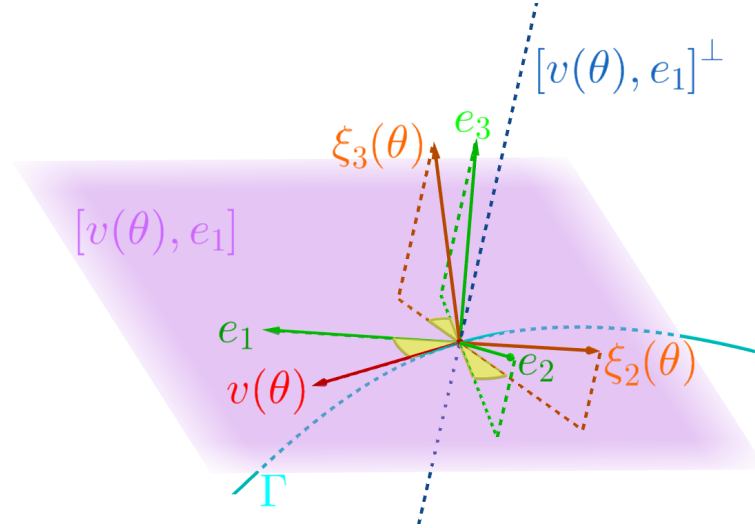


Figura 3.1: Obtención de $\xi_2(\theta)$ y $\xi_3(\theta)$ en función de $v(\theta)$, e_1 , e_2 y e_3 .

Vamos a obtener la expresión explícita de $\xi_j(\theta)$ en función de los e_i , de $v(\theta)$ y de los ángulos que forman $v(\theta)$ con cada vector e_i para probar que realmente las funciones $\xi_j(\theta)$ son de clase $p-1$. Para ello comenzamos escribiendo cada e_j con $j = 2, 3$ en función de e_1 , $v(\theta)$ y un elemento $\bar{e}_j \in [v(\theta), e_1]^\perp$ del eje de rotación como

$$e_j = \bar{e}_j + \lambda_j v(\theta) + \mu_j e_1, \quad (3.1)$$

donde esta descomposición es única. Sea $\alpha_i = \alpha_i(\theta)$ tal que $\cos(\alpha_i) = v(\theta) \cdot e_i$ con $i = 1, 2, 3$, es decir, el ángulo entre $v(\theta)$ y e_i . Entonces podemos expresar los valores de λ_j y μ_j en función de α_i . En efecto, si multiplicamos escalarmente la ecuación (3.1) por e_1 y por $v(\theta)$, y usamos la ortonormalidad, obtenemos

$$0 = \lambda_j \cos(\alpha_1) + \mu_j \quad \text{y} \quad \cos(\alpha_j) = \lambda_j + \mu_j \cos(\alpha_1), \quad j = 2, 3.$$

La solución de los sistemas lineales dados por las dos ecuaciones anteriores es

$$\lambda_j = \frac{\cos(\alpha_j)}{1 - \cos^2(\alpha_1)}, \quad \mu_j = \frac{-\cos(\alpha_j)\cos(\alpha_1)}{1 - \cos^2(\alpha_1)} \quad j = 2, 3,$$

donde destacamos que los denominadores no se anulan porque el ángulo formado entre e_1 y $v(\theta)$ nunca es 0 ni π .

Aplicando la rotación R_θ a la expresión (3.1) obtenemos

$$R_\theta(e_j) = R_\theta(\bar{e}_j) + \lambda_j R_\theta(v(\theta)) + \mu_j R_\theta(e_1),$$

pero $R_\theta(e_j) = \xi_j(\theta)$, $R_\theta(\bar{e}_j) = \bar{e}_j$ pues R_θ es la identidad en $[v(\theta), e_1]^\perp$ y $R_\theta(e_1) = v(\theta)$ por la propia definición de R_θ . En consecuencia, solo falta calcular el valor de $R_\theta(v(\theta))$ para lo que es conveniente apoyarse en la Figura 3.2. Al considerar el plano $[v(\theta), e_1]$ y establecer un sistema de referencia ortonormal $\{w_1, w_2\}$ positivamente orientado en el que $w_1 = e_1$, las coordenadas de e_1 , $v(\theta)$ y $R_\theta(v(\theta))$ respecto a este sistema son $e_1 = (1, 0)$, $v(\theta) = (\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1))$ y

$$\begin{aligned} R_\theta(v(\theta)) &= (\cos(2\alpha_1), \sin(2\alpha_1)) = (\cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1), 2\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)) = \\ &= (-\cos^2(\alpha_1) - \sin^2(\alpha_1) + 2\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_1), 2\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)) \\ &= -(1, 0) + 2\cos(\alpha_1)(\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)) = -e_1 + 2\cos(\alpha_1)v(\theta). \end{aligned}$$

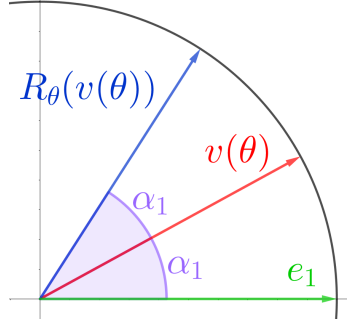


Figura 3.2: Rotación R_θ sobre el plano $[v(\theta), e_1]$.

Por tanto, $\xi_j(\theta) = \bar{e}_j + \lambda_j(-e_1 + 2\cos(\alpha_1)v(\theta)) + \mu_j v(\theta)$ y despejando \bar{e}_j en (3.1) y sustituyéndolo en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \xi_j(\theta) &= e_j - \lambda_j v(\theta) - \mu_j e_1 + \lambda_j(-e_1 + 2\cos(\alpha_1)v(\theta)) + \mu_j v(\theta) = \\ &= e_j + (\mu_j + \lambda_j(2\cos(\alpha_1) - 1))v(\theta) - (\lambda_j + \mu_j)e_1 = e_j - \left(\frac{\cos(\alpha_j(\theta))}{1 + \cos(\alpha_1(\theta))} \right) (v(\theta) + e_1), \end{aligned}$$

donde ya se han reemplazado las expresiones explícitas que obtuvimos para λ_j y μ_j . En la expresión

$$\xi_j(\theta) = e_j - \left(\frac{\cos(\alpha_j(\theta))}{1 + \cos(\alpha_1(\theta))} \right) (v(\theta) + e_1) = e_j - \left(\frac{v(\theta) \cdot e_j}{1 + v(\theta) \cdot e_1} \right) (v(\theta) + e_1) \quad (3.2)$$

se puede ver que $\xi_j(\theta)$ es una función de clase $p-1$ y T -periódica para $j = 2, 3$ porque $v(\theta)$ lo es. Además, es inmediato comprobar que la construcción es correcta y que $\{v(\theta), \xi_2(\theta), \xi_3(\theta)\}$ es un sistema de coordenadas ortonormal. \square

Hacemos notar que para el caso $n \geq 4$ la expresión obtenida para los $\xi_j(\theta)$ es la dada en (3.2) para $j = 2, 3, \dots, n$. El caso $n = 2$ es más sencillo y simplemente $\xi_2(\theta)$ se obtiene al rotar $v(\theta)$ un ángulo $\pi/2$.

3.2. Ecuaciones en las nuevas variables

Una vez que hemos construido el sistema de coordenadas de la sección 3.1, vamos a realizar un cambio de variables para introducirlo en nuestra ecuación diferencial. Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho = (\rho_1, \rho_2)^T \in \mathbb{R}^2$, u es la curva que parametriza Γ y $Z(\theta)$ es la matriz de dimensiones 3×2 que tiene como columnas los vectores $\xi_2(\theta)$ y $\xi_3(\theta)$, entonces el cambio de variables es

$$x = u(\theta) + Z(\theta)\rho = u(\theta) + \rho_1\xi_2(\theta) + \rho_2\xi_3(\theta). \quad (3.3)$$

Veamos que este cambio de variables está bien definido en un entorno de Γ , es decir, para $|\rho| < \delta$. Podemos utilizar el Teorema de la función implícita y definir la función $G(x, \theta, \rho) = u(\theta) + Z(\theta)\rho - x$, cuyas derivadas parciales respecto a θ y ρ_j son

$$\frac{\partial G(x, \theta, \rho)}{\partial \theta} = \frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta}\rho, \quad \frac{\partial G(x, \theta, \rho)}{\partial \rho_j} = \xi_{j+1}(\theta), \quad j = 1, 2. \quad (3.4)$$

Por tanto, para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\det D_{\theta, \rho} G(x, \theta, 0) = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{du(\theta)}{d\theta} & \xi_2(\theta) & \xi_3(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ v(\theta) & \xi_2(\theta) & \xi_3(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| \neq 0.$$

El Teorema de la función implícita nos asegura que podemos despejar, al menos localmente, θ y ρ en función de x en un entorno de cada punto de Γ . Como Γ es un conjunto compacto que lo estamos recubriendo por una colección de abiertos, existe un subrecubrimiento finito. Por tanto, existirá un $\delta > 0$ para el que el cambio de variables (3.3) esté bien definido para $\theta \in \mathbb{R}$ y $|\rho| < \delta$. Además, en dicho entorno “tubular” alrededor de Γ , el determinante de la matriz $D_{\theta, \rho} G(x, \theta, \rho)$ es no nulo.

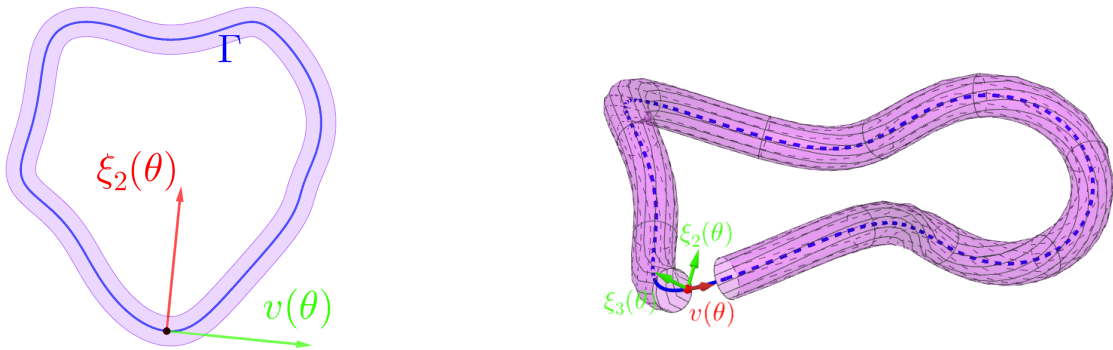


Figura 3.3: Entorno tubular alrededor de Γ para $n = 2, 3$ donde está definido el cambio de variables dado en (3.3).

Vamos a obtener las ecuaciones diferenciales que verifican estas nuevas variables. Derivando la igualdad (3.3) respecto a t (repárese en que x , θ y ρ dependen de t),

$$\frac{du(\theta)}{d\theta}\theta' + \frac{dZ(\theta)}{d\theta}\theta'\rho + \rho'_1\xi_2(\theta) + \rho'_2\xi_3(\theta) = x' = f(x) = f(u(\theta) + Z(\theta)\rho). \quad (3.5)$$

Para despejar θ' multiplicamos escalarmente por $v(\theta)$ ambos miembros de la ecuación anterior y utilizamos que $v(\theta) \cdot \xi_2(\theta) = v(\theta) \cdot \xi_3(\theta) = 0$ por la ortogonalidad del sistema de coordenadas móvil que construimos en el Teorema 3.1. Por tanto,

$$v(\theta) \cdot \left(\frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho \right) \theta' = v(\theta) \cdot f(u(\theta) + Z(\theta)\rho).$$

Hacemos notar que $v(\theta) \cdot \left(\frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho \right) \neq 0$ ya que, si fuera cero, el sistema lineal homogéneo $D_{\theta,\rho}G(x, \theta, \rho)^T z = 0$ tendría una solución $z = v(\theta) \neq 0$ siendo la matriz del sistema no singular, lo cual es imposible porque la única solución sería la trivial. Esto es así porque la expresión de las columnas de $D_{\theta,\rho}G(x, \theta, \rho)$ viene dada en (3.4) y su primera columna es ortogonal a $v(\theta)$ porque lo estamos suponiendo y, las otras dos, por la ortonormalidad del sistema de coordenadas de la sección 3.1. Podemos definir $h(\theta, \rho) = \left[v(\theta) \cdot \left(\frac{du(\theta)}{d\theta} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho \right) \right]^{-1} = \left[\left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| + v(\theta) \cdot \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho \right]^{-1}$, y

$$\begin{aligned} \theta' &= h(\theta, \rho) [v(\theta) \cdot f(u(\theta) + Z(\theta)\rho)] = \\ &= h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot f(u(\theta)) + h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot [f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) - f(u(\theta))]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Utilizando que $\frac{du(\theta)}{d\theta} = f(u(\theta))$ y $v(\theta) \cdot \frac{du(\theta)}{d\theta} = \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right|$, entonces

$$\begin{aligned} h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot f(u(\theta)) &= h(\theta, \rho) \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| = \\ &= h(\theta, \rho) \left[\left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| + v(\theta) \cdot \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho \right] - h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho = 1 - h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho. \end{aligned}$$

Juntando esto último con (3.6), se concluye que $\theta' = 1 + g_1(\theta, \rho)$, donde

$$g_1(\theta, \rho) = -h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho + h(\theta, \rho)v(\theta) \cdot [f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) - f(u(\theta))].$$

Para despejar $\rho' = (\rho'_1, \rho'_2)^T$ de la ecuación (3.5), multiplicamos (matricialmente) por $Z(\theta)^T$ por la izquierda. Entonces, utilizamos que $\frac{du(\theta)}{d\theta}$ es un múltiplo de $v(\theta)$, que es ortogonal a la matriz $Z(\theta)$, y que $Z(\theta)^T Z(\theta) = Id_2$, luego

$$\begin{aligned} \rho' &= -Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \theta' \rho + Z(\theta)^T f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) = \\ &= -Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} (1 + g_1(\theta, \rho)) \rho + Z(\theta)^T f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) = \\ &= -Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho - Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} g_1(\theta, \rho) \rho + Z(\theta)^T f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) = \\ &= Z(\theta)^T \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta))Z(\theta) - Df(u(\theta))Z(\theta) \right] \rho - Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} g_1(\theta, \rho) \rho + \\ &\quad + Z(\theta)^T [f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) - f(u(\theta))] = \\ &= Z(\theta)^T \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta))Z(\theta) \right] \rho - Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} g_1(\theta, \rho) \rho + \end{aligned}$$

$$+Z(\theta)^T [f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) - f(u(\theta)) - Df(u(\theta))Z(\theta)\rho].$$

Para ello, hemos usado que $Z(\theta)^T f(u(\theta)) = 0$ porque $f(u(\theta)) = \frac{du(\theta)}{d\theta} = \left| \frac{du(\theta)}{d\theta} \right| v(\theta)$. En resumen,

$$\begin{aligned} \rho' &= A(\theta)\rho + g_2(\theta, \rho) \quad \text{donde} \quad A(\theta) = Z(\theta)^T \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta))Z(\theta) \right] \quad \text{y} \\ g_2(\theta, \rho) &= -Z(\theta)^T \frac{dZ(\theta)}{d\theta} g_1(\theta, \rho) \rho + \\ &+ Z(\theta)^T [f(u(\theta) + Z(\theta)\rho) - f(u(\theta)) - Df(u(\theta))Z(\theta)\rho]. \end{aligned}$$

Más allá de los pesados cálculos, sintetizamos lo que hemos obtenido. Las ecuaciones diferenciales que verifican θ y ρ son

$$\theta' = 1 + g_1(\theta, \rho) \quad \text{y} \quad \rho' = A(\theta)\rho + g_2(\theta, \rho)$$

donde $g_1(\theta, \rho)$, $A(\theta)$ y $g_2(\theta, \rho)$ son las definidas anteriormente. Y lo más importante, pidiendo únicamente que f sea de clase 1: $g_1(\theta, 0) = 0$; $g_1(\theta, \rho)$ es una $O(|\rho|)$ cuando $\rho \rightarrow 0$, es decir, $\frac{g_1(\theta, \rho)}{|\rho|}$ está acotado cuando ρ está cerca de 0; $g_2(\theta, 0) = 0$; y $D_\rho g_2(\theta, 0) = 0$. Es decir, con este cambio de coordenadas hemos conseguido transformar el sistema $x' = f(x)$ en dos ecuaciones en las cuales somos capaces de extraer la parte lineal. Y más aún, la evolución de θ , intuitivamente, “es prácticamente igual que la de t ”. Por otro lado, la matriz $A(\theta)$, obtenida de forma aparentemente arbitraria sumando y restando ciertas cantidades, cobrará importancia en breve.

En cuanto a la regularidad de las funciones $g_1(\theta, \rho)$ y $g_2(\theta, \rho)$, se tiene, simplemente analizando con cuidado la definición de las mismas, que si $f(x)$ es de clase k entonces $g_1(\theta, \rho)$ y $g_2(\theta, \rho)$ tienen derivadas parciales respecto a ρ_i continuas hasta orden k y si, además, u es de clase p , entonces el número de derivadas parciales continuas de $g_1(\theta, \rho)$ y $g_2(\theta, \rho)$ respecto a θ es el mínimo entre $k - 1$ y $p - 2$. Todo lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea $u \in C^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ con $p \geq 2$ una función T -periódica y verificando $\frac{du(\theta)}{d\theta} \neq 0$ y sea $f \in C^{p-1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Entonces existe un $\delta > 0$, funciones $g_1(\theta, \rho)$ y $g_2(\theta, \rho)$, una matriz $A(\theta)$ de dimensiones 2×2 , todas ellas periódicas en θ de periodo T y con $p - 1$ derivadas continuas respecto a ρ y $p - 2$ respecto a θ para $0 < |\rho| < \delta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Estas funciones también verifican que*

$$g_1(\theta, 0) = 0, \quad g_1(\theta, \rho) = O(|\rho|) \text{ cuando } \rho \rightarrow 0, \quad g_2(\theta, 0) = 0 \quad \text{y} \quad D_\rho g_2(\theta, 0) = 0,$$

$$A(\theta) = Z(\theta)^T \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta))Z(\theta) \right], \quad (3.7)$$

y la transformación $x = u(\theta) + Z(\theta)\rho$, que está bien definida para $|\rho| < \delta$, hace que el sistema $x' = f(x)$ se traduzca a las variables θ y ρ como

$$\theta' = 1 + g_1(\theta, \rho) \quad \text{y} \quad \rho' = A(\theta)\rho + g_2(\theta, \rho).$$

Una técnica repetida al analizar la estabilidad de sistemas no lineales es recurrir a su linealización. La linealización del sistema autónomo $x' = f(x)$ en la órbita periódica es

$$\frac{dy}{d\theta} = Df(u(\theta))y. \quad (3.8)$$

Según vimos en la motivación de este capítulo, como $u(\theta)$ es solución de la ecuación $x' = f(x)$, entonces, $\frac{du(\theta)}{d\theta}$ es solución de la ecuación linealizada y además es una solución T -periódica no trivial, luego 1 es multiplicador característico del sistema linealizado. El siguiente lema asegura que el resto de multiplicadores característicos de la linealización del sistema $x' = f(x)$ son exactamente los multiplicadores característicos del sistema lineal periódico que tiene como matriz a $A(\theta)$.

Lema 3.1. *Si el sistema lineal periódico (3.8) de dimensión 3 tiene como multiplicadores característicos μ_1 , μ_2 y 1, entonces el sistema lineal periódico*

$$\frac{d\rho(\theta)}{d\theta} = A(\theta)\rho(\theta) \quad (3.9)$$

de dimensión 2 tiene como multiplicadores característicos μ_1 y μ_2 , donde $A(\theta)$ es la dada en (3.7).

Demostración. Sabemos que los multiplicadores característicos son los autovalores de cualquier matriz de monodromía del sistema. Vamos a elegir una matriz fundamental de (3.8) cuya matriz de monodromía asociada tenga una forma particular, en la que quede aislado el multiplicador característico 1. Como sabemos que este multiplicador característico está asociado a una solución T -periódica no trivial y acabamos de ver que $\frac{du(\theta)}{d\theta}$ lo es, es natural considerar que una de las columnas de la matriz fundamental sea la solución $\frac{du(\theta)}{d\theta}$. El resto nos son indiferentes y completamos con otras dos soluciones linealmente independientes de tal forma que

$$Y(\theta) = \left(\frac{du(\theta)}{d\theta}, Y_1(\theta) \right), \text{ con } Y_1(\theta) \in \mathcal{M}_{3 \times 2}$$

sea una matriz fundamental de (3.8). Consideramos la matriz de monodromía C asociada a esta matriz fundamental y que verifica $Y(\theta + T) = Y(\theta)C$. Como la primera columna de $Y(\theta)$ es una solución T -periódica, es inmediato comprobar que C es de la forma

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2^T \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \text{ con } c_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ y } C_1 \in \mathcal{M}_{2 \times 2},$$

ya que para esta matriz C , $Y(\theta + T) = Y(\theta)C \iff$

$$\left(\frac{du(\theta + T)}{d\theta}, Y_1(\theta + T) \right) = \left(\frac{du(\theta)}{d\theta}, Y_1(\theta) \right) \begin{pmatrix} 1 & c_2^T \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \iff \frac{du(\theta + T)}{d\theta} = \frac{du(\theta)}{d\theta}$$

y

$$Y_1(\theta + T) = \frac{du(\theta)}{d\theta} c_2^T + Y_1(\theta) C_1. \quad (3.10)$$

Los autovalores de la matriz C son los multiplicadores característicos del sistema, es decir, μ_1 , μ_2 y 1. En consecuencia, los autovalores de C_1 son μ_1 y μ_2 . Basta entonces ver, para probar que los multiplicadores característicos del sistema lineal periódico (3.9) son μ_1 y μ_2 , que C_1 es una matriz de monodromía asociada a alguna matriz fundamental del sistema. Nos podríamos precipitar y pensar que dicha matriz fundamental deberá ser $Y_1(\theta)$, pero esta no es una matriz cuadrada, ya que tiene tres filas y dos columnas y nosotros buscamos una matriz 2×2 . Sin embargo, la matriz $Y_1(\theta)$ sí que nos sirve para construir la matriz fundamental buscada. Podemos expresar las columnas de $Y_1(\theta)$ en términos de la base $\{\frac{du(\theta)}{d\theta}, \xi_2(\theta), \xi_3(\theta)\}$ como

$$y_j(\theta) = \frac{du(\theta)}{d\theta} \beta_j(\theta) + Z(\theta) \rho_j(\theta) \quad (3.11)$$

donde $\beta_j(\theta) \in \mathbb{R}$ y $\rho_j(\theta) \in \mathbb{R}^2$ para $j = 1, 2$. Si llamamos $\beta(\theta) = (\beta_1(\theta), \beta_2(\theta))^T \in \mathbb{R}^2$ y $R(\theta) = (\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)) \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ entonces podemos expresar la propia $Y_1(\theta)$ como

$$Y_1(\theta) = \frac{du(\theta)}{d\theta} \beta(\theta)^T + Z(\theta) R(\theta), \quad (3.12)$$

simplemente yuxtaponiendo las dos columnas anteriores. Lo que vamos a demostrar es que $R(\theta)$ es una matriz fundamental de (3.9) cuya matriz de monodromía es C_1 , lo que probaría el resultado. Para ello, primero hay que probar que las columnas de $R(\theta)$ son soluciones de la ecuación diferencial (3.9). Si en la expresión (3.11) de las columnas de $Y_1(\theta)$ derivamos respecto a θ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy_j(\theta)}{d\theta} &= \frac{d\beta_j(\theta)}{d\theta} \frac{du(\theta)}{d\theta} + \beta_j(\theta) \frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} + \frac{dZ(\theta)}{d\theta} \rho_j(\theta) + Z(\theta) \frac{d\rho_j(\theta)}{d\theta} \\ &= Df(u(\theta)) y_j(\theta) = Df(u(\theta)) \left[\beta_j(\theta) \frac{du(\theta)}{d\theta} + Z(\theta) \rho_j(\theta) \right], \end{aligned}$$

ya que las columnas de $Y_1(\theta)$ son también columnas de $Y(\theta)$, que era una matriz fundamental de (3.8). Además hemos podido derivar $\beta_j(\theta)$ y $\rho_j(\theta)$ porque se puede comprobar, despejándolos de la ecuación (3.11), que realmente son funciones derivables si, como estamos suponiendo durante todo el capítulo, u es al menos \mathcal{C}^2 . Si tenemos en cuenta que $\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2} = Df(u(\theta)) \frac{du(\theta)}{d\theta}$ y reordenamos los términos,

$$Z(\theta) \frac{d\rho_j(\theta)}{d\theta} = \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta)) Z(\theta) \right] \rho_j(\theta) - \frac{d\beta_j(\theta)}{d\theta} \frac{du(\theta)}{d\theta}.$$

Finalmente, multiplicamos por la izquierda por $Z(\theta)^T$ y, por la ortogonalidad,

$$\frac{d\rho_j(\theta)}{d\theta} = Z(\theta)^T \left[-\frac{dZ(\theta)}{d\theta} + Df(u(\theta)) Z(\theta) \right] \rho_j(\theta) = A(\theta) \rho_j(\theta).$$

En consecuencia, $\rho_j(\theta)$ es solución del sistema (3.9) para $j = 1, 2$. En segundo lugar, comprobamos que la matriz $R(\theta)$ es no singular para algún θ . Si $R(\theta)$ fuera singular, existiría un vector $v \neq 0$ tal que $R(\theta)v = 0$. Si multiplicamos en (3.12) por el vector v por la derecha llegamos a que

$$Y_1(\theta)v - \frac{du(\theta)}{d\theta} \beta(\theta)^T v = 0.$$

Como $Y_1(\theta)$ y $\frac{du(\theta)}{d\theta}$ son linealmente independientes, entonces $\beta(\theta)^T v = 0$ y $v = 0$. Llegamos a contradicción por haber supuesto que $R(\theta)$ era singular. En consecuencia, ya hemos probado que $R(\theta)$ es matriz fundamental del sistema (3.9) y únicamente falta ver que C_1 es su matriz de monodromía. Para ello, sustituimos (3.12) en (3.10)

$$\frac{du(\theta + T)}{d\theta} \beta(\theta + T)^T + Z(\theta + T)R(\theta + T) = \frac{du(\theta)}{d\theta} c_2^T + \left[\frac{du(\theta)}{d\theta} \beta(\theta)^T + Z(\theta)R(\theta) \right] C_1$$

y utilizando la periodicidad de las funciones y la unicidad de coordenadas respecto a una base, se llega a que $R(\theta + T) = R(\theta)C_1$. \square

3.3. Teorema de estabilidad orbital

En la motivación de este capítulo, argumentamos que el concepto de estabilidad asintótica era demasiado fuerte para las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales autónomas. Nos planteamos entonces enunciar las definiciones poniendo el foco en la órbita periódica en lugar de en la solución periódica que la genera. Es el momento de dar dichas definiciones como preámbulo al enunciado del teorema.

Definición 3.1. *Dada una ecuación diferencial $x' = f(x)$ que tiene una órbita periódica Γ , esta se dice*

- 1) **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x_0, \Gamma) < \delta$ entonces $d(x(t, x_0), \Gamma) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
- 2) **asintóticamente estable** si es estable y existe un $\eta > 0$ tal que si $d(x_0, \Gamma) < \eta$ entonces $d(x(t, x_0), \Gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La solución periódica $u(t)$ que genera la órbita periódica se dice

- 1) **orbitalmente estable** si Γ es estable.
- 2) **orbitalmente asintóticamente estable** si Γ es asintóticamente estable.
- 3) **orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica** si es orbitalmente asintóticamente estable y existe un $\eta > 0$ tal que si $d(x_0, \Gamma) < \eta$ entonces existe un τ (que depende de x_0) tal que $|x(t, x_0) - u(t - \tau)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Antes de adentrarse en la demostración del teorema, recomendamos familiarizarse con las definiciones anteriores visitando el Apéndice A. En él se pueden encontrar ejemplos de toda la casuística anterior: órbitas estables pero no asintóticamente estables y soluciones orbitalmente asintóticamente estables con y sin fase asintótica.

Como colofón a este capítulo, vamos a enunciar y demostrar el teorema que da

condiciones suficientes para que una solución periódica de un sistema autónomo sea orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica y que nos permitirá recoger los frutos de todo el trabajo realizado hasta ahora.

Teorema 3.3. *Sea $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y u una solución no constante y T -periódica de la ecuación autónoma $x' = f(x)$. Si el multiplicador característico 1 del sistema linealizado*

$$\frac{dy(\theta)}{d\theta} = Df(u(\theta))y(\theta) \quad (3.13)$$

es simple y los demás multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1 (los exponentes característicos tienen parte real negativa), la solución periódica u de la ecuación $x' = f(x)$ es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica.

Demostración. Antes de adentrarnos en la demostración, como f es de clase \mathcal{C}^1 y u es solución entonces, u es de clase \mathcal{C}^2 , como habíamos supuesto durante todo el capítulo. Por hipótesis, el multiplicador característico 1 del sistema (3.13) es simple y los demás multiplicadores característicos tienen módulo menor que 1, luego el Lema 3.1 nos asegura que los multiplicadores característicos del sistema (3.9), que tiene como matriz a $A(\theta)$, tienen todos ellos módulo menor que 1 y por el Teorema 2.4, este es uniformemente asintóticamente estable. Por otro lado, el Teorema 3.2 asegura que el comportamiento de las soluciones de $x' = f(x)$, respecto a las variables θ y ρ , cerca de la órbita Γ viene dado por las ecuaciones

$$\theta'(t) = 1 + g_1(\theta(t), \rho(t)) \quad (3.14)$$

$$\rho'(t) = A(\theta(t))\rho(t) + g_2(\theta(t), \rho(t)). \quad (3.15)$$

Gracias a que para $|\rho|$ pequeño, se tiene que $\theta'(t) > 1/2$, podemos expresar t como $t = t(\theta)$ y transformar la segunda ecuación en

$$\frac{d\rho(\theta)}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\rho'(t(\theta))}{\theta'(t(\theta))} = \frac{A(\theta)\rho(\theta) + g_2(\theta, \rho(\theta))}{1 + g_1(\theta, \rho(\theta))} = A(\theta)\rho(\theta) + g_3(\theta, \rho(\theta)) \quad (3.16)$$

donde g_3 verifica lo mismo que g_2 , es decir, g_3 es continua, tiene derivadas parciales de orden 1 respecto a ρ , $g_3(\theta, 0) = 0$ y $D_\rho g_3(\theta, 0) = 0$.

Vamos a utilizar el Lema 1.2 para probar que la solución $\rho = 0$ del sistema (3.16) es uniformemente asintóticamente estable. Como el sistema (3.9) es uniformemente asintóticamente estable es suficiente ver que g_3 es continua y verifica que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|g_3(\theta, \rho)| < \varepsilon|\rho|$ si $|\rho| < \delta$. Pero eso último se deduce inmediatamente de que g_3 es de clase \mathcal{C}^1 y $D_\rho g_3(\theta, 0) = 0$. Además, durante la demostración del Lema 1.2 obtuvimos constantes positivas K , α y η tales que si $|\rho_0| < \eta$ entonces la solución $\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)$ verifica

$$|\rho(\theta, \theta_0, \rho_0)| \leq K e^{-\alpha(\theta - \theta_0)} |\rho_0| \text{ para todo } \theta \geq \theta_0.$$

Ahora, consideramos la solución del PVI $\theta'(t) = 1 + g_1(\theta(t), \rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0))$, $\theta(t_0) = \theta_0$. Con esta construcción tenemos una pareja de soluciones $\theta(t)$, $\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)$ que verifican las ecuaciones (3.14) y (3.15). Si sustituimos estas soluciones según el cambio

de variables (3.3), entonces,

$$x(t) = u(\theta(t)) + Z(\theta(t))\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)$$

es la solución de $x' = f(x)$ que en t_0 vale $x(t_0) = u(\theta_0) + Z(\theta_0)\rho_0$. Como $\theta(t)$ tiende a infinito cuando t tiende a infinito, entonces, la desigualdad $|\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)| \leq Ke^{-\alpha(\theta(t)-\theta_0)}|\rho_0|$ implica que $d(x(t), \Gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto prueba que u es orbitalmente asintóticamente estable. Para probar que también tiene fase asintótica es suficiente con demostrar que $\psi(t) = \theta(t) - t$ converge a una constante cuando t tiende a infinito. Supongamos que esto se cumple y que dicha constante es c . Entonces, tomando $\tau = -c$,

$$\begin{aligned} |x(t) - u(t - \tau)| &= |u(\theta(t)) - u(t + c) + Z(\theta(t))\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)| \leq \\ &\leq |u(\theta(t)) - u(t + c)| + |Z(\theta(t))||\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)|, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $Z(\theta(t))$ esta acotada, $|\rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0)|$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito, $|\theta(t) - (t + c)|$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito y u es continua, el término de la derecha tiende a 0 cuando t tiende a infinito. Consecuentemente, $|x(t) - u(t - \tau)|$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito y se tiene lo buscado. Por lo tanto, tan solo basta probar que $\psi(t)$ converge a una constante cuando t tiende a infinito. Derivando ψ respecto a t se tiene que

$$\psi'(t) = \theta'(t) - 1 = g_1(\theta(t), \rho(\theta(t), \theta_0, \rho_0))$$

e integrando de t_0 a t ,

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_{t_0}^t g_1(\theta(s), \rho(\theta(s), \theta_0, \rho_0))ds = \psi_0 + \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} g_1(v, \rho(v, \theta_0, \rho_0)) \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(v))} dv.$$

Como g_1 es una $O(|\rho|)$ cuando $|\rho| \rightarrow 0$, entonces

$$|g_1(v, \rho(v, \theta_0, \rho_0))| \leq C|\rho(v, \theta_0, \rho_0)| \leq CK e^{-\alpha(v-\theta_0)}|\rho_0|,$$

donde la última desigualdad ya la obtuvimos anteriormente. Por otro lado, $\theta'(t) > 1/2$ para todo t cuando $|\rho|$ es pequeño, luego $\frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(v))} < 2$. Con estas dos apreciaciones, el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la integral existe ya que la integral (impropia) converge absolutamente. En efecto, la integral se puede acotar por

$$\begin{aligned} \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} \left| g_1(v, \rho(v, \theta_0, \rho_0)) \frac{1}{\theta'(\theta^{-1}(v))} \right| dv &\leq 2CK|\rho_0| \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} e^{-\alpha(v-\theta_0)} dv = \\ &= 2CK|\rho_0| \left(\frac{e^{-\alpha(\theta(t)-\theta_0)}}{-\alpha} - \frac{e^{-\alpha(\theta(t_0)-\theta_0)}}{-\alpha} \right) = \frac{2CK|\rho_0|}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(\theta(t)-\theta_0)}). \end{aligned}$$

Como $\theta(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y $\alpha > 0$, la integral impropia es absolutamente convergente y por tanto convergente. En conclusión, $\psi(t)$ converge a una constante cuando t tiende a infinito, lo que, según hemos visto, implicaba que u era orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica. \square

Como advertimos al principio, este resultado es en realidad cierto para todo $n \geq 2$, generalizando todos los argumentos dados a lo largo del capítulo. En el Apéndice B se presenta un ejemplo de aplicación de este teorema para la clase de ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden de la forma $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$, entre las que se encuentra la conocida ecuación de Van der Pol.

Bifurcación de Hopf

Para concluir, en este capítulo vamos a demostrar el célebre Teorema de la bifurcación de Hopf, sobre la generación de órbitas periódicas entorno a puntos de equilibrio. También analizaremos la estabilidad de las órbitas generadas y los fenómenos de “transferencia de estabilidad” que se producen.

4.1. Introducción

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial $x' = f(\lambda, x)$ donde λ es un parámetro real. Dependiendo de la función f , al variar el parámetro λ , el comportamiento cualitativo de las soluciones puede cambiar drásticamente. Consideremos un ejemplo sencillo para ilustrarlo. Sea la ecuación del péndulo con rozamiento $z'' + \lambda z' + z = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, que podemos expresar mediante el cambio de variables estándar como el sistema plano

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \lambda y \end{cases} .$$

Este sistema tiene un único punto de equilibrio en el origen y, puesto que es lineal, su estabilidad viene dada por el signo de λ . Para anticipar lo que más tarde haremos en el caso general, podemos considerar el cambio a coordenadas polares definido por $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, según el cual

$$\begin{cases} x' = r' \cos(\theta) - r \sin(\theta) \theta' \\ y' = r' \sin(\theta) + r \cos(\theta) \theta' \end{cases} ,$$

y multiplicando las ecuaciones anteriores por $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ y sumando y restando apropiadamente, se llega a que

$$\begin{cases} r' = x' \cos(\theta) + y' \sin(\theta) = r \sin(\theta) \cos(\theta) - (r \cos(\theta) + \lambda r \sin(\theta)) \sin(\theta) \\ r \theta' = -x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) = -r \sin^2(\theta) - (r \cos(\theta) + \lambda r \sin(\theta)) \cos(\theta) \end{cases} .$$

Operando se tiene que

$$\begin{cases} r' = -\lambda r \sin^2(\theta) \\ \theta' = -1 - \frac{\lambda}{2} \sin(2\theta) \end{cases}.$$

Es claro que el comportamiento cualitativo del origen como punto de equilibrio se ve modificado al variar el parámetro λ , como se aprecia en la animación del siguiente [enlace](#) o en la Figura 4.1. Si $\lambda > 0$ el origen es asintóticamente estable y las órbitas son espirales deformadas que convergen al origen en sentido horario, si $\lambda < 0$ el origen es inestable y las órbitas son espirales deformadas que salen del origen en sentido horario y si $\lambda = 0$, recuperamos un oscilador lineal sin rozamiento que tiene en el origen un punto de equilibrio estable y órbitas circulares que lo rodean en sentido horario. Este fenómeno por el cual varía el comportamiento cualitativo de las soluciones al modificar un parámetro de la ecuación diferencial se conoce como **bifurcación**. Sin embargo, este no solo se limita a modificar la estabilidad de puntos de equilibrio, sino que sus mecánicas pueden ser mucho más complejas, como por ejemplo la generación de órbitas periódicas. Es concretamente esta situación la que estudia el Teorema de la bifurcación de Hopf.

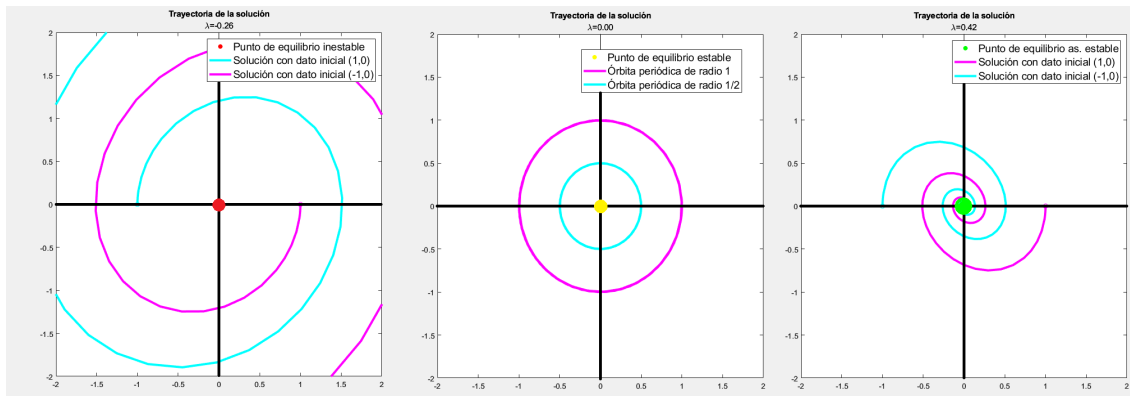


Figura 4.1: Diagrama de fases del péndulo no lineal cuando $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

4.2. Teorema de la bifurcación de Hopf

Teorema 4.1 (Teorema de la bifurcación de Hopf). *Sea el sistema plano de clase \mathcal{C}^k con $k \geq 3$ dado por*

$$x' = A(\lambda)x + f(\lambda, x)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un parámetro y la función f verifica que $f(\lambda, 0) = 0$ y $D_x f(\lambda, 0) = 0$ cuando $|\lambda|$ es suficientemente pequeño. Además, sean $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ los autovalores de la matriz $A(\lambda)$. Supongamos que $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) \neq 0$ y que $\frac{d\alpha(0)}{d\lambda} \neq 0$. Entonces, para todo entorno \mathcal{U} del origen y para todo $\lambda_0 > 0$, existe un $\bar{\lambda}$ con $|\bar{\lambda}| < \lambda_0$ y tal que el sistema $x' = A(\bar{\lambda})x + f(\bar{\lambda}, x)$ tiene una órbita periódica no trivial en \mathcal{U} .

Este enunciado nos dice que existen valores del parámetro λ para los cuales hay órbitas periódicas en un entorno del punto de equilibrio. La estructura de los valores

del parámetro para los que existen órbitas periódicas, así como las propiedades de estas, es lo que se conoce como la bifurcación de Hopf.

Antes de demostrar el teorema, vamos a analizar su enunciado en algo más de profundidad. En primer lugar, suponemos que tenemos un sistema plano (real) que depende de un parámetro λ del que hemos extraído su parte lineal en la matriz $A(\lambda)$. Cuando $\lambda = 0$, los autovalores de la matriz son imaginarios puros, es decir, su parte real es 0 y son complejos conjugados y no nulos. Además, $\frac{d\alpha(0)}{d\lambda} \neq 0$, lo que significa que los autovalores cruzan el eje imaginario de forma transversal. En estas condiciones, el sistema tiene una órbita periódica no trivial para algún valor de λ comprendido entre $-\lambda_0$ y λ_0 . Para simplificar la demostración, podemos suponer que la matriz $A(\lambda)$ viene dada en la forma

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ -\beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix},$$

pues mediante un cambio lineal de coordenadas siempre se puede conseguir esta expresión. Como $\beta(0) \neq 0$ se puede realizar un cambio en la variable temporal, es decir, considerar $y(t) = x(t/\beta(\lambda))$, para que $\beta(\lambda) = 1$ cuando $|\lambda|$ es pequeño en la ecuación diferencial que verifica y . Por otro lado, el hecho de que $\frac{d\alpha(0)}{d\lambda} \neq 0$ permite aplicar el Teorema de la función inversa en un entorno de $\lambda = 0$ con lo que existe una biyección entre α y λ y se puede tomar $\alpha(\lambda)$ como parámetro en lugar de λ . En resumen, la matriz $A(\lambda)$ se puede suponer que es de la forma

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

con lo que el sistema a estudiar es

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 + x_2 + f_1(\lambda, x_1, x_2) \\ x'_2 = -x_1 + \lambda x_2 + f_2(\lambda, x_1, x_2) \end{cases}.$$

Vamos a demostrar el siguiente teorema del cual se deduce inmediatamente el Teorema de la bifurcación de Hopf.

Teorema 4.2. *Dada la función f de clase \mathcal{C}^k con $k \geq 3$ y que verifica $f(\lambda, 0) = 0$ y $D_x f(\lambda, 0) = 0$, y el sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} x + f(\lambda, x), \quad (4.2)$$

existen constantes $r_1 > 0$, $\lambda_0 > 0$ y $\delta_0 > 0$ y funciones de clase \mathcal{C}^1 , $\lambda^ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $x^*(t, r_0)$ es $T^*(r_0)$ periódica y que cumplen las siguientes propiedades para todo $0 \leq r_0 < r_1$:*

- $\lambda^*(0) = 0$, $T^*(0) = 2\pi$ y $|x^*(0, r_0)| = r_0$
- $x^*(t, r_0)$ es solución del sistema cuando $\lambda = \lambda^*(r_0)$ y sus componentes son $x_1^*(t, r_0) = r_0 \cos(t) + o(|r_0|)$ y $x_2^*(t, r_0) = -r_0 \sin(t) + o(|r_0|)$ cuando $r_0 \rightarrow 0$.

- Si $|\lambda| < \lambda_0$ y $|T - 2\pi| < \delta_0$, toda solución T -periódica x del sistema cumple que $|x(0)| = r_0$ y $|x(t)| < r_1$ es $x^*(t, r_0)$, salvo quizás una traslación en su fase.

Demostración. En primer lugar, vamos a reducir el sistema a coordenadas polares. Definimos el cambio como $x_1 = r\cos(\theta)$ y $x_2 = -r\sin(\theta)$, y entonces

$$\begin{cases} x'_1 = r'\cos(\theta) - r\sin(\theta)\theta' \\ x'_2 = -r'\sin(\theta) - r\cos(\theta)\theta' \end{cases} .$$

Aunque parezca caprichoso el signo menos en la transformación a coordenadas polares, nos va a simplificar algunos argumentos en lo que sigue porque, como veremos, la derivada de θ respecto al tiempo va a ser positiva y el tiempo y el ángulo van a avanzar a la vez. Si multiplicamos la primera ecuación por $\cos(\theta)$, la segunda por $-\sin(\theta)$ y sumamos se llega a que

$$\begin{aligned} r' &= x'_1\cos(\theta) - x'_2\sin(\theta) = \\ &= (\lambda x_1 + x_2 + f_1(\lambda, x_1, x_2))\cos(\theta) - (-x_1 + \lambda x_2 + f_2(\lambda, x_1, x_2))\sin(\theta) = \\ &= (\lambda r\cos(\theta) - r\sin(\theta) + f_1(\lambda, x_1, x_2))\cos(\theta) - (-r\cos(\theta) - \lambda r\sin(\theta) + f_2(\lambda, x_1, x_2))\sin(\theta) = \\ &= \lambda r + f_1(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta))\cos(\theta) - f_2(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta))\sin(\theta) = \\ &= \lambda r + (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \cdot f(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta)). \end{aligned}$$

Análogamente, si multiplicamos la primera ecuación por $-\sin(\theta)$, la segunda por $-\cos(\theta)$ y sumamos se llega a que

$$\begin{aligned} r\theta' &= -x'_1\sin(\theta) - x'_2\cos(\theta) = \\ &= -(\lambda x_1 + x_2 + f_1(\lambda, x_1, x_2))\sin(\theta) - (-x_1 + \lambda x_2 + f_2(\lambda, x_1, x_2))\cos(\theta) = \\ &= -(\lambda r\cos(\theta) - r\sin(\theta) + f_1(\lambda, x_1, x_2))\sin(\theta) - (-r\cos(\theta) - \lambda r\sin(\theta) + f_2(\lambda, x_1, x_2))\cos(\theta) = \\ &= r - f_1(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta))\sin(\theta) - f_2(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta))\cos(\theta) = \\ &= r + (-\sin(\theta), -\cos(\theta)) \cdot f(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta)). \end{aligned}$$

En conclusión,

$$\begin{cases} r' = R(\lambda, r, \theta) \\ \theta' = 1 + \Theta(\lambda, r, \theta) \end{cases} ,$$

donde

$$R(\lambda, r, \theta) = \lambda r + (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \cdot f(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta)) \quad \text{y}$$

$$\Theta(\lambda, r, \theta) = \frac{1}{r}(-\sin(\theta), -\cos(\theta)) \cdot f(\lambda, r\cos(\theta), -r\sin(\theta))$$

son ambas funciones 2π periódicas en θ . Además, la función R es de clase \mathcal{C}^k y si definimos $\Theta(\lambda, 0, \theta) = 0$, no es difícil comprobar que esta última es de clase \mathcal{C}^1 .

Como $\Theta(\lambda, 0, \theta) = 0$, existe un $r_1 > 0$ tal que $\theta' = 1 + \Theta(\lambda, r, \theta) > 0$ cuando $|r| < r_1$, como habíamos anticipado. Aplicando el Teorema de la función inversa, podemos considerar t como función de θ y $r(t) = r(t(\theta))$ luego

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{r'(t(\theta))}{\theta'(t(\theta))} = \frac{R(\lambda, r, \theta)}{1 + \Theta(\lambda, r, \theta)} = \lambda r + \mathcal{P}(\lambda, r, \theta)$$

donde la función $\mathcal{P}(\lambda, r, \theta)$ es

$$\mathcal{P}(\lambda, r, \theta) = -\lambda r + \frac{R(\lambda, r, \theta)}{1 + \Theta(\lambda, r, \theta)}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{P}(\lambda, r, \theta)$ es de clase \mathcal{C}^1 si $|r| < r_1$, que $\mathcal{P}(\lambda, 0, \theta) = 0$ y que $\frac{d\mathcal{P}(\lambda, 0, \theta)}{d\theta} = 0$. Además, la ecuación

$$\frac{dr}{d\theta} = \lambda r + \mathcal{P}(\lambda, r, \theta) \quad (4.3)$$

es 2π periódica y, por lo anterior, tiene separada su parte lineal de su parte no lineal. Como las órbitas periódicas del sistema (4.2) se corresponden a soluciones 2π periódicas en θ , vamos a estudiar estas soluciones. Si $r(\lambda, \theta, r_0)$ es la solución de (4.3) que verifica que $r(\lambda, 0, r_0) = r_0$, esta solución será 2π periódica en θ si y solo si $r(\lambda, 2\pi, r_0) = r_0$. Imponiendo esta condición en la fórmula de variación de constantes dada por

$$r(\lambda, \theta, r_0) = r_0 e^{\lambda\theta} + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, r_0), s) ds$$

se llega a la ecuación

$$r_0 = r_0 e^{2\pi\lambda} + \int_0^{2\pi} e^{\lambda(2\pi-s)} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, r_0), s) ds.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$0 = r_0(1 - e^{-2\pi\lambda}) + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, r_0), s) ds.$$

Si $r_0 = 0$ entonces la función $r(\lambda, \theta, r_0)$ es idénticamente cero porque verifica (4.3) y la condición inicial y se cumple la ecuación anterior porque el integrando es nulo. Esto no nos debe sorprender, porque si miramos con algo de perspectiva la demostración, esta solución se corresponde con las soluciones estacionarias correspondientes al punto de equilibrio del sistema (4.2) que se encuentra en el origen. Estas soluciones estacionarias son trivialmente T -periódicas para cualquier periodo $T > 0$, en particular, 2π .

Si $r_0 \neq 0$, podemos considerar la función

$$h(r_0, \lambda) = 1 - e^{-2\pi\lambda} + \frac{1}{r_0} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \mathcal{P}(\lambda, r(\lambda, s, r_0), s) ds.$$

que puede ser extendida con $h(0, 0) = 0$ para que esta sea de clase \mathcal{C}^1 . Además, utilizando que $\mathcal{P}(\lambda, 0, \theta) = 0$ y $\frac{d\mathcal{P}(\lambda, 0, \theta)}{d\lambda} = 0$, se llega a que $\frac{dh(0, 0)}{d\lambda} \neq 0$ luego podemos aplicar el Teorema de la función implícita, que nos garantiza la existencia de una función $\lambda^*(r_0)$ que verifica que $\lambda^*(0) = 0$ y $h(r_0, \lambda^*(r_0)) = 0$ para r_0 suficientemente pequeño. Esto quiere decir que para cada $|r_0| < r_1$ existe un único $\lambda^*(r_0)$ que será menor en norma que cierto λ_0 , tal que $r(\lambda^*(r_0), \theta, r_0)$ es 2π periódica. Por tanto, esta función $\lambda^*(r_0)$ define una solución $r^*(\theta, r_0) = r(\lambda^*(r_0), \theta, r_0)$ que, por construcción, es solución de la ecuación cuando $\lambda = \lambda^*(r_0)$ y además es 2π periódica en θ para todo r_0 . En consecuencia, la órbita que pasa por el punto $(r_0, 0)$, y que se define deshaciendo el cambio de coordenadas, viene dada por

$$\Gamma_{r_0} = \{(r^*(\theta, r_0)\cos(\theta), -r^*(\theta, r_0)\sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]\}$$

y, evidentemente, es una órbita periódica. Para obtener la solución periódica asociada, debemos resolver la ecuación

$$\theta' = 1 + \Theta(\lambda, r^*(\theta, r_0), \theta).$$

Si llamamos $\theta^*(t, r_0)$ a la solución de la ecuación anterior que verifica que $\theta^*(0, r_0) = 0$, entonces la solución del sistema original es

$$x_1^*(t, r_0) = r^*(\theta^*(t, r_0), r_0)\cos(\theta^*(t, r_0)), \quad x_2^*(t, r_0) = -r^*(\theta^*(t, r_0), r_0)\sin(\theta^*(t, r_0))$$

y verifica que $x^*(0, r_0) = (r_0, 0)$ (y $|x^*(0, r_0)| = r_0$). Por su parte la función $x^*(t, r_0)$ es periódica para cada r_0 y su periodo $T^*(r_0)$ vendrá dado por el menor $t > 0$ tal que $\theta^*(t, r_0) = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En particular, cuando $r_0 = 0$, la ecuación diferencial que define θ^* es

$$\theta' = 1 + \Theta(\lambda, 0, \theta) = 1$$

por ser $r^*(\theta, 0) = 0$ y el primer múltiplo de 2π que alcanza $\theta^*(t) = t$ es 2π para $t = 2\pi$. En consecuencia $T^*(0) = 2\pi$. \square

Vamos a interpretar los resultados de este teorema. El teorema nos dice que para r_0 suficientemente pequeño podemos encontrar un único $\lambda = \lambda^*(r_0)$ (que será pequeño en módulo) tal que el sistema que tiene como parámetro este valor de λ tiene una órbita periódica en un entorno del origen. Además, esta pasa por el punto $(r_0, 0)$ y se puede aproximar por una circunferencia recorrida en sentido horario con un error del orden de $o(|r_0|)$. Además, la relación entre r_0 y λ viene dada por una función diferenciable.

Supongamos, por ejemplo que $(\lambda^*)'(0) > 0$, como en la Figura 4.2. Entonces, $(\lambda^*)'(r_0)$ será positivo si $r_0 \in (0, \delta)$ para cierto δ suficientemente pequeño. En ese intervalo, existe una biyección entre $r_0 \in [0, \delta)$ y $\lambda \in [0, \lambda_0)$ donde $\lambda_0 = \lambda^*(\delta)$. Podemos invertir la dependencia haciendo que r_0 dependa ahora de λ y considerar la función $r_0(\lambda)$ definida en $[0, \lambda_0)$. Si ahora variamos el parámetro λ de la ecuación diferencial desde $-\lambda_0$ a λ_0 se puede apreciar un comportamiento de bifurcación en un pequeño entorno del origen. Si $-\lambda_0 < \lambda < 0$ no hay ninguna órbita periódica en un entorno del origen y al hacer $\lambda > 0$ se genera una única órbita periódica que pasa por el punto

$(r_0(\lambda), 0)$ y se va alejando del origen a medida que $\lambda \in (0, \lambda_0)$ crece. Si hubiéramos supuesto al principio que $(\lambda^*)'(0) < 0$, como en la Figura 4.3, nos encontraríamos ante una situación análoga: para $-\lambda_0 < \lambda < 0$ existiría una única órbita periódica que colapsa en el origen a medida que λ crece y desaparece cuando λ es positivo.

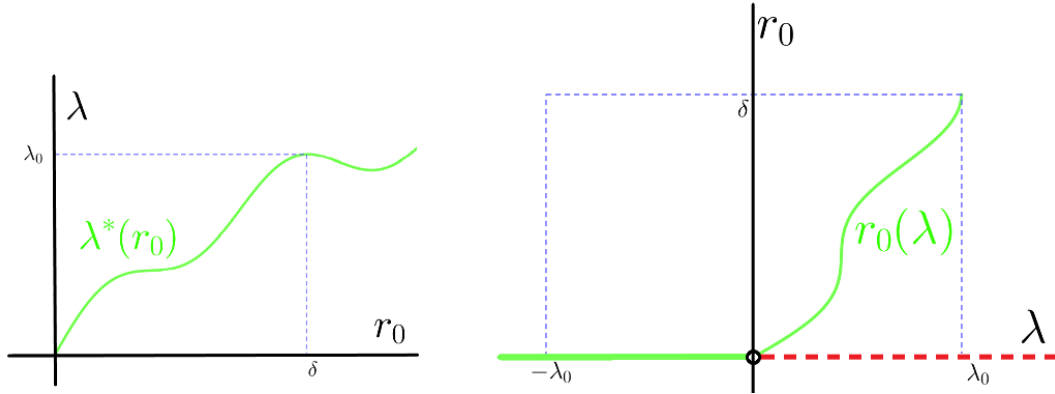


Figura 4.2: Caso en el que $(\lambda^*)'(0) > 0$ y se genera una única órbita periódica en un entorno del origen. El código de colores verde continuo y rojo discontinuo se explica al comienzo de la siguiente sección.

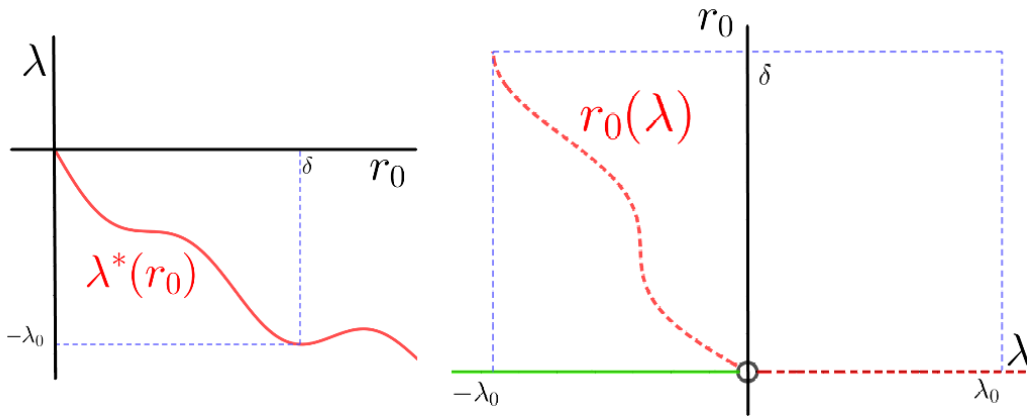


Figura 4.3: Cuando $(\lambda^*)'(0) < 0$ una única órbita periódica colapsa al origen.

4.3. Estabilidad de las órbitas periódicas

Cabe preguntarse cuál es la estabilidad de estas órbitas periódicas. Si recuperamos la ecuación diferencial de partida (4.2), entonces podemos analizar la estabilidad del punto de equilibrio mediante el Teorema de linealización. Los autovalores de la matriz $A(\lambda)$ de (4.1) son $\lambda \pm i$ luego si $\lambda > 0$ el origen es un punto de equilibrio inestable, si $\lambda < 0$ el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable y si $\lambda = 0$ no tenemos información sobre la estabilidad del origen y habría que estudiar los términos no lineales de la ecuación. Lo que vamos a probar es que si $(\lambda^*)'(r_0) > 0$ entonces la órbita periódica es asintóticamente estable y si $(\lambda^*)'(r_0) < 0$ entonces la órbita periódica es inestable.

Continuando con la discusión del final de la sección anterior y apoyándonos en la Figura 4.2, si $(\lambda^*)'(0) > 0$, la órbita que se generaba para $\lambda \in (0, \lambda_0)$ es asintóticamente estable. Es decir, para $\lambda < 0$ el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable (línea verde continua en $r_0 = 0$, $\lambda < 0$) y no hay órbitas periódicas, en $\lambda = 0$ hay un punto de inflexión en el que no sabemos muy bien que sucede, pero cuyo resultado es que para $\lambda > 0$ el punto de equilibrio pasa a ser inestable (línea discontinua roja en $r_0 = 0$, $\lambda > 0$) y se genera una única órbita periódica en un entorno del origen que es asintóticamente estable (curva verde continua) y que crece a medida que lo hace λ . Es decir, informalmente podríamos interpretarlo como que “el punto de equilibrio cede su estabilidad a la órbita periódica”.

Y al revés, cuando $(\lambda^*)'(r_0) < 0$, fijémonos en la Figura 4.3. Cuando $\lambda < 0$, existe una única órbita periódica, que es inestable, en un entorno del origen y este es asintóticamente estable. A medida que aumenta $\lambda < 0$ la órbita periódica se contrae y acaba colapsando al punto de equilibrio. Para λ positivo el punto de equilibrio pasa a ser inestable. De igual manera, este proceso de bifurcación podríamos interpretarlo como que “la órbita colapsa al punto de equilibrio contagiándole su inestabilidad”. Cuando $(\lambda^*)'(0) > 0$ la bifurcación se dice **supercrítica** y cuando $(\lambda^*)'(0) < 0$, **subcrítica**.

Antes de enunciar y demostrar el teorema, advertimos que en la demostración utilizaremos una técnica para probar si una órbita es asintóticamente estable o inestable que se basa en la aplicación de Poincaré. Como su estudio no es el objetivo de este trabajo (ver [3] para más información), vamos a dar una idea de qué se pretende demostrar y por qué funciona. Siguiendo la notación de la demostración anterior vamos a considerar la aplicación $\varphi(r_0) = r(\bar{\lambda}, 2\pi, r_0)$ donde $\bar{\lambda} = \lambda^*(\bar{r}_0)$ para \bar{r}_0 fijo. Esta aplicación estudia cuál es el radio de la solución cuando ha transcurrido el tiempo necesario para que esta haya dado una vuelta completa. Es claro que $\varphi(\bar{r}_0) = \bar{r}_0$ porque para el parámetro $\lambda^*(\bar{r}_0)$ la órbita que contiene a $(\bar{r}_0, 0)$ es periódica. Si $\varphi(r_0) < r_0$ entonces el radio se ha contraído al dar una vuelta completa y si $\varphi(r_0) > r_0$ entonces, el radio se está expandiendo.

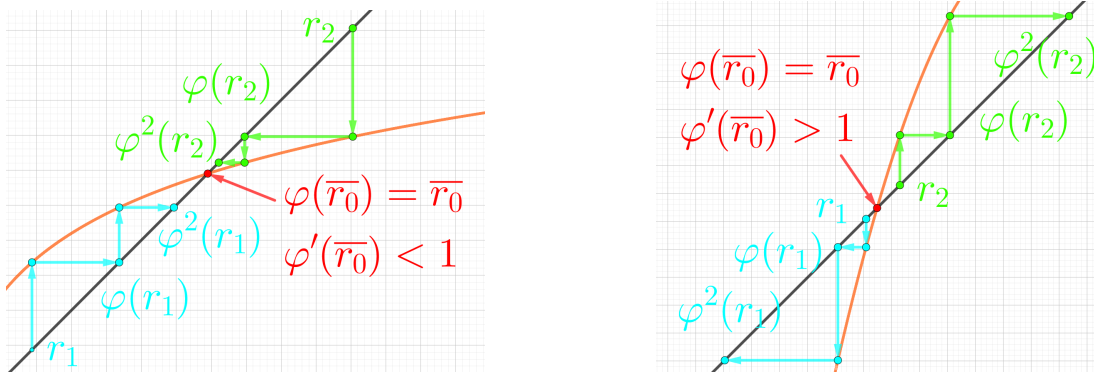


Figura 4.4: El radio se contrae o expande según $\varphi'(\bar{r}_0)$ sea menor o mayor que 1.

A nosotros nos interesa lo que sucede cerca de la órbita periódica de radio \bar{r}_0 para estudiar su estabilidad asintótica. Si $\varphi(r_0) < r_0$ para todo $r_0 \in (\bar{r}_0, \bar{r}_0 + \varepsilon)$ y $\varphi(r_0) > r_0$

para todo $r_0 \in (\bar{r}_0 - \varepsilon, \bar{r}_0)$, es claro que las soluciones se acercan a la órbita periódica y la órbita periódica es asintóticamente estable. Lo propio sucede para órbitas inestables. Esta condición es más fácil de comprobar observando si $\varphi'(\bar{r}_0)$ es mayor o menor que 1. Como se aprecia en la Figura 4.4, cuando $\varphi'(\bar{r}_0) < 1$, localmente la aplicación se contrae y los radios se aproximan a \bar{r}_0 luego la órbita periódica es asintóticamente estable. De forma análoga, cuando $\varphi'(\bar{r}_0) > 1$ la aplicación se dilata y la órbita periódica es inestable. Con estas nociones básicas sobre la aplicación de Poincaré estamos listos para enunciar y demostrar el teorema sobre la estabilidad de las órbitas periódicas generadas a partir de la bifurcación de Hopf.

Teorema 4.3. *Sea $\lambda^*(r_0)$ la función dada en el Teorema 4.2 y sea Γ_{r_0} la correspondiente órbita periódica. Entonces, cuando \bar{r}_0 es suficientemente pequeño, la órbita periódica $\Gamma_{\bar{r}_0}$ es asintóticamente estable si $(\lambda^*)'(\bar{r}_0) > 0$ e inestable si $(\lambda^*)'(\bar{r}_0) < 0$.*

Demostración. Como hemos argumentado anteriormente será importante calcular cuál es el valor de

$$\begin{aligned} \varphi'(\bar{r}_0) &= \frac{dr(\bar{\lambda}, 2\pi, \bar{r}_0)}{dr_0} = \frac{d}{dr_0} \left(r_0 e^{2\pi\bar{\lambda}} + \int_0^{2\pi} e^{\bar{\lambda}(2\pi-s)} \mathcal{P}(\bar{\lambda}, r(\bar{\lambda}, s, r_0), s) ds \right) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} = \\ &= e^{2\pi\bar{\lambda}} \left(1 + \int_0^{2\pi} e^{-\bar{\lambda}s} \frac{d\mathcal{P}(\bar{\lambda}, r(\bar{\lambda}, s, \bar{r}_0), s)}{dr} \frac{dr(\bar{\lambda}, s, \bar{r}_0)}{dr_0} ds \right) \end{aligned}$$

y más concretamente, el signo de $\varphi'(\bar{r}_0) - 1$ que es

$$\text{sign}(\varphi'(\bar{r}_0) - 1) = \text{sign}(e^{2\pi\bar{\lambda}} q(\bar{r}_0)) = \text{sign}(q(\bar{r}_0))$$

donde

$$q(\bar{r}_0) = 1 - e^{-2\pi\bar{\lambda}} + \int_0^{2\pi} e^{-\bar{\lambda}s} \frac{d\mathcal{P}(\bar{\lambda}, r(\bar{\lambda}, s, \bar{r}_0), s)}{dr} \frac{dr(\bar{\lambda}, s, \bar{r}_0)}{dr_0} ds.$$

Para calcular el signo de esta última cantidad es conveniente dar un pequeño rodeo. Según la definición de la función λ^* , esta cumplía que $h(r_0, \lambda^*(r_0)) = 0$, es decir,

$$0 = (1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)})r_0 + \int_0^{2\pi} e^{-\lambda^*(r_0)s} \mathcal{P}(\lambda^*(r_0), r(\lambda^*(r_0), s, r_0), s) ds.$$

Para que la notación sea más cómoda, reescribimos la ecuación anterior como

$$0 = (1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)})r_0 + r_0 g(\lambda^*(r_0), r_0) \quad (4.4)$$

o equivalentemente

$$0 = 1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)} + g(\lambda^*(r_0), r_0). \quad (4.5)$$

Si derivamos (4.4) respecto a r_0 y se evalúa en $r_0 = \bar{r}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - e^{-2\pi\lambda^*(\bar{r}_0)}) + \bar{r}_0 \frac{d}{dr_0} (1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)}) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \\ &+ \frac{d}{dr_0} (r_0 g(\lambda^*(\bar{r}_0), r_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \frac{d}{dr_0} (\bar{r}_0 g(\lambda^*(r_0), \bar{r}_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - e^{-2\pi\bar{\lambda}} + \frac{d}{dr_0} (r_0 g(\bar{\lambda}, r_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \\
&+ \bar{r}_0 \frac{d}{dr_0} (1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)}) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \frac{d}{dr_0} (\bar{r}_0 g(\lambda^*(r_0), \bar{r}_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0}.
\end{aligned}$$

Por un lado, es inmediato comprobar que

$$1 - e^{-2\pi\bar{\lambda}} + \frac{d}{dr_0} (r_0 g(\bar{\lambda}, r_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} = q(\bar{r}_0)$$

por como hemos definido $r_0 g(\lambda^*(r_0), r_0)$. Por otro lado, utilizando la igualdad (4.5),

$$\begin{aligned}
&\bar{r}_0 \frac{d}{dr_0} (1 - e^{-2\pi\lambda^*(r_0)}) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \frac{d}{dr_0} (\bar{r}_0 g(\lambda^*(r_0), \bar{r}_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} = \\
&= \bar{r}_0 \frac{d}{dr_0} (-g(\lambda^*(r_0), r_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} + \frac{d}{dr_0} (\bar{r}_0 g(\lambda^*(r_0), \bar{r}_0)) \Big|_{r_0=\bar{r}_0} = \\
&= -\bar{r}_0 \left(\frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_1} (\lambda^*)'(\bar{r}_0) + \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_2} \right) + \bar{r}_0 \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_1} (\lambda^*)'(\bar{r}_0) = -\bar{r}_0 \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_2},
\end{aligned}$$

y juntándolo todo,

$$q(\bar{r}_0) = \bar{r}_0 \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_2}. \quad (4.6)$$

Por último, derivamos la igualdad (4.5) respecto a r_0 y evaluamos en $r_0 = \bar{r}_0$ para llegar a que

$$2\pi e^{-2\pi\bar{\lambda}} (\lambda^*)'(\bar{r}_0) + \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_1} (\lambda^*)'(\bar{r}_0) + \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_2} = 0$$

Si despejamos el último término y lo sustituimos en (4.6) llegamos a que

$$q(\bar{r}_0) = -\bar{r}_0 (\lambda^*)'(\bar{r}_0) \left(2\pi e^{-2\pi\bar{\lambda}} + \frac{dg(\bar{\lambda}, \bar{r}_0)}{dx_1} \right).$$

Cuando $\bar{r}_0 > 0$ es suficientemente pequeño, podemos concluir que

$$\text{sign}(\varphi'(\bar{r}_0) - 1) = \text{sign}(q(\bar{r}_0)) = \text{sign}(-(\lambda^*)'(\bar{r}_0)).$$

□

Para finalizar, en el Apéndice C podemos encontrar varios ejemplos de aplicación del Teorema de la bifurcación de Hopf y en los que estudiamos la estabilidad de las órbitas periódicas generadas gracias al resultado que acabamos de probar.

Bibliografía

- [1] FITZPATRICK, R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.
- [2] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y., 1980.
- [3] HALE, J. K. y KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] KAPER, H. y ENGLER, H. *Mathematics and climate*. SIAM, 2013.
- [5] LOTKA, A. J. Contribution to the theory of periodic reactions. *The Journal of Physical Chemistry*, vol. 14(3), páginas 271–274, 1910.
- [6] PÉREZ, C. F. *Ecuaciones diferenciales I: Ecuaciones lineales*. Número v. 1 en Ciencia Y Técnica. Ediciones Pirámide, 1992. ISBN 9788436806977.
- [7] PÉREZ, C. F. y MONTANER, J. M. V. *Ecuaciones diferenciales II: Ecuaciones no lineales*. Número v. 2 en Ciencia Y Técnica. Ediciones Pirámide, 1996. ISBN 9788436810219.
- [8] VOLTERRA, V. Variations and Fluctuations of the Number of Individuals in Animal Species living together. *ICES Journal of Marine Science*, vol. 3(1), páginas 3–51, 1928. ISSN 1054-3139.
- [9] WEISS, H. The sir model and the foundations of public health. En *Materials matemàtics*, páginas 1–17. 2013.

Ejemplos de estabilidad orbital

En este apéndice pretendemos analizar las definiciones de estabilidad orbital dadas en la Definición 3.1. Vamos a proporcionar algunos ejemplos de ecuaciones cuya solución se puede obtener de forma explícita y para los cuáles estudiaremos la estabilidad de sus órbitas periódicas.

Atendiendo a la definición, que una órbita periódica sea estable quiere decir que, si se comienza con un dato inicial cercano a ella, entonces para tiempos grandes, la solución seguirá cerca, pero no tiene por qué “pegarse” o converger a la órbita periódica. Por ejemplo, dado el sistema lineal en coordenadas cartesianas y su sistema asociado en polares según el cambio $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \iff \begin{cases} r' = 0 \\ \theta' = 1 \end{cases},$$

sabemos que la solución general es de la forma

$$\begin{cases} x(t) = r_0\cos(t + \theta_0) \\ y(t) = r_0\sin(t + \theta_0) \end{cases} \iff \begin{cases} r(t) = r_0 \\ \theta(t) = t + \theta_0 \end{cases},$$

y que las órbitas son las circunferencias $\Gamma_{r_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = r_0^2\}$. Omitiendo la solución trivial, el resto de soluciones son periódicas y no constantes y las órbitas generadas también. Afirmamos que la órbita $\Gamma_r = \{x^2 + y^2 = r^2\}$ es estable para todo $r > 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, si $d((x_0, y_0), \Gamma_r) = |r - r_0| < \delta$, entonces la solución que parte de (x_0, y_0) está contenida en Γ_{r_0} para todo tiempo. Además, para todo $P \in \Gamma_{r_0}$, $d(P, \Gamma_r) = |r - r_0| < \delta = \varepsilon$ y se verifica la definición. Sin embargo, la órbita no es asintóticamente estable porque $d((x(t), y(t)), \Gamma_r) = |r - r_0|$ para todo t y no tiende a 0 cuando t tiende a ∞ si $|r - r_0| > 0$.

Consideremos un segundo ejemplo dado por el sistema

$$\begin{cases} x' = (1 - x^2 - y^2)x - y \\ y' = (1 - x^2 - y^2)y + x \end{cases} \iff \begin{cases} r' = r - r^3 \\ \theta' = 1 \end{cases},$$

cuya solución general se puede obtener explícitamente por técnicas de integración elemental y es

$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) = \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} \cos(t + \theta_0) \\ y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) = \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} \sin(t + \theta_0) \end{cases} \iff \begin{cases} r(t) = \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} \\ \theta(t) = t + \theta_0 \end{cases}.$$

El sistema tiene una familia de soluciones periódicas $x(t) = \cos(t + \theta_0)$, $y(t) = \sin(t + \theta_0)$ (para $r_0 = 1$) que generan la órbita periódica $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Entonces, la solución periódica es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica. Comenzamos probando que Γ es estable. Sea $\varepsilon > 0$, y elegimos $\delta = \min\{1/2, \varepsilon\}$. Entonces, cuando $d((x_0, y_0), \Gamma) = |r_0 - 1| < \delta$, se cumple que

$$d((x(t), y(t)), \Gamma) = \left| \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} - 1 \right| < |r_0 - 1| < \delta < \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

ya que $r(t)$ es estrictamente decreciente para $t \geq 0$ cuando $r_0 > 1$, $r(t)$ es estrictamente creciente para $t \geq 0$ cuando $r_0 \in (0, 1)$, y $r(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Procediendo de manera análoga, basta tomar $\eta = 1/2$ y si $d((x_0, y_0), \Gamma) = |r_0 - 1| < \eta = 1/2$, entonces $d((x(t), y(t)), \Gamma) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En consecuencia, la solución periódica $\bar{x}(t) = \cos(t)$, $\bar{y}(t) = \sin(t)$ es orbitalmente asintóticamente estable y solo faltaría ver que también tiene fase asintótica. Para ello, basta tomar $\eta = 1/2$ y si $d((x_0, y_0), \Gamma) < \eta = 1/2$ entonces existe un $\tau = -\theta_0 = -\arctg(\frac{y_0}{x_0})$ tal que

$$\begin{aligned} & |(x(t, (x_0, y_0)), y(t, (x_0, y_0))) - (\bar{x}(t - \tau), \bar{y}(t - \tau))| = \\ & = \left| \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)) - (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)) \right| = \\ & = \left| \sqrt{\frac{r_0^2 e^{2t}}{1-r_0^2+r_0^2 e^{2t}}} - 1 \right| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lo demostrado anteriormente se puede apreciar de manera visual en el archivo de GeoGebra del siguiente [enlace](#).

Por último, el siguiente ejemplo muestra que puede haber soluciones periódicas orbitalmente asintóticamente estables, pero que no tengan fase asintótica. Sea el sistema en coordenadas polares

$$\begin{cases} r' = (1 - r)^{2k+1}, \\ \theta' = r \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N}$. La primera ecuación está desacoplada y tiene como solución

$$r(t) = 1 + \frac{r_0 - 1}{(1 + 2k(t - t_0)|1 - r_0|^{2k})^{1/2k}},$$

que verifica que $r(t) \rightarrow 1$ cuando r_0 está cercano a 1 y $t \rightarrow \infty$. Un argumento análogo al de los ejemplos anteriores prueba que las soluciones periódicas de la familia $x(t) = \cos(t + \theta_0)$, $y(t) = \sin(t + \theta_0)$ (para $r_0 = 1$) que generan la órbita

periódica $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 = 1\}$ son orbitalmente asintóticamente estables. Sin embargo,

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t r(s) ds = \theta_0 + t - t_0 + \frac{2k(r_0 - 1)}{2k - 1} [(2k(t - t_0)|1 - r_0|^{2k} + 1)^{1-1/2k} - 1]$$

y $|\theta(t) - t|$ tiende a infinito cuando $t \rightarrow \infty$ luego no puede tener fase asintótica. En el siguiente [enlace](#) se puede apreciar el comportamiento descrito para este ejemplo. Si bien, las soluciones convergen asintóticamente a la órbita periódica, esta convergencia es muy lenta y no lo hacen manteniendo la misma fase que ninguna de las soluciones que la generan.

La ecuación de Van der Pol

En este apéndice vamos a aplicar la teoría desarrollada en el capítulo 3, sobre estabilidad de órbitas periódicas, a una clase de ecuaciones diferenciales autónomas de segundo orden entre las que se encuentra la ecuación de Van der Pol. Nos planteamos estudiar ecuaciones del tipo

$$z'' + f(z)z' + g(z) = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde podemos pensar que f y g son suficientemente regulares y tales que exista una órbita periódica. Asociado a esta ecuación contamos con un sistema plano equivalente de la forma

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x)y - g(x) \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Además, supongamos que existe una solución T -periódica $p(t)$ de (B.1) que no es constante. Entonces, si $q(t) = p'(t)$, la solución de (B.2) es $(p(t), q(t))$. Para estudiar la estabilidad de la solución periódica nos podemos apoyar en los multiplicadores característicos del sistema linealizado, es decir,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(p(t))q(t) - g'(p(t)) & -f(p(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la Proposición 2.2 nos dice que el producto de los multiplicadores característicos es la exponencial de la integral de la traza de la matriz del sistema, es decir,

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \exp \left\{ \int_0^T \text{tr}(A(t)) dt \right\}.$$

La traza de $A(t)$ es $\text{tr}(A(t)) = -f(p(t))$ y uno de los multiplicadores característicos del sistema linealizado es 1. Por lo tanto, el otro multiplicador característico es

$$\mu_2 = \exp \left\{ - \int_0^T f(p(t)) dt \right\}.$$

Buscamos aplicar el Teorema 3.3 que nos permite concluir que la solución $p(t)$ es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica, para lo que es suficiente pedir que el módulo de μ_2 sea menor que 1 o, equivalentemente, que

$$\int_0^T f(p(t))dt > 0.$$

Esta integral, en general es difícil de calcular explícitamente e incluso determinar su signo a simple vista. Por ejemplo, si $f(x) = -\lambda(1 - x^2)$ con $\lambda > 0$ y $g(x) = x$ la ecuación (B.1) toma la forma

$$x'' - \lambda(1 - x^2)x' + x = 0,$$

que es el conocido oscilador de Van der Pol. No es en absoluto evidente cuál es el signo de

$$-\lambda \int_0^T (1 - p(t)^2)dt$$

sin tener una expresión explícita de la solución periódica $p(t)$. Nuestro objetivo va a ser buscar condiciones suficientes sobre f y g para que, en el caso general, la integral sea positiva. Comenzamos definiendo una función de energía $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x)$ con $G(x) = \int_0^x g(s)ds$ y su evaluación a lo largo de la solución periódica $F(t) = E(p(t), q(t))$. La derivada de la función F es

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{dE(p(t), q(t))}{dx} p'(t) + \frac{dE(p(t), q(t))}{dy} q'(t) = \\ &= g(p(t))p'(t) + q(t)q'(t) = g(p(t))q(t) + q(t)(-f(p(t))q(t) - g(p(t))) = \\ &= -q(t)^2 f(p(t)) = 2f(p(t))[G(p(t)) - F(t)]. \end{aligned}$$

Como F es una función continua y T -periódica, alcanzará el mínimo en cierto $t^* \in [0, T]$. Por ser un mínimo,

$$F'(t^*) = -q(t^*)^2 f(p(t^*)) = 0,$$

y queremos imponer que $q(t^*) = p'(t^*)$ no sea 0 para que lo que se anule sea $f(p(t^*))$. Vamos a ver qué hay que pedirle a f y g para que esto no suceda. Si fuera 0 distinguimos dos casos:

- 1) $p''(t^*) = q'(t^*) = 0$. Como $p(t)$ es solución de la ecuación (B.1) en particular $p''(t^*) + f(p(t^*))p'(t^*) + g(p(t^*)) = 0$ y como $p''(t^*) = p'(t^*) = 0$, entonces $g(p(t^*)) = 0$. Consideramos la función constante $z(t) = p(t^*)$ y que verifica la ecuación ya que $z'(t) = z''(t) = 0$ para todo t y hemos visto que $p(t^*)$ es un cero de g . Por tanto, como $p(t^*) = z(t^*)$, la unicidad de los problemas de valor inicial nos dice que la solución periódica es constante, pero estamos suponiendo que esta es no trivial. Luego en este caso llegaríamos a contradicción sin pedirle nada adicional ni a f ni a g .

- 2) $p''(t^*) = q'(t^*) \neq 0$. Entonces, como estamos suponiendo que $p'(t^*) = 0$, $p(t)$ tiene un extremo relativo estricto en $t = t^*$. Por tanto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que o bien $p(t) \in (p(t^*), b]$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \setminus \{t^*\}$ o bien $p(t) \in [a, p(t^*))$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \setminus \{t^*\}$. Si demostramos que $f(p(t))$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en un entorno de t^* menos el propio t^* , entonces llegaríamos a contradicción con que t^* es un mínimo de F . Esto es porque $q(t)^2 > 0$ en un entorno de t^* por ser $q(t^*) = 0$ y $q'(t^*) \neq 0$ y si $f(p(t))$ tiene un signo definido en un entorno de t^* menos el propio t^* , entonces $F'(t) = -q(t)^2 f(p(t))$ también lo tendrá. Por tanto, la función F crecerá (decrecerá) en un entorno de t^* y esta no podría ser un mínimo.

En resumen, es suficiente demostrar que $f(p(t))$ es estrictamente positiva o estrictamente negativa en un entorno de t^* menos el propio t^* . En efecto, si $f(p(t^*)) > 0$ existe un entorno de $p(t^*)$ donde f sigue siendo positiva y se puede elegir ε suficientemente pequeño para que a o b , según el caso, estén en ese entorno. Si $f(p(t^*)) < 0$ el razonamiento es el mismo. Ahora bien, si $f(p(t^*)) = 0$, en una situación general f podría oscilar cerca de $p(t^*)$, cambiando de signo en cualquier entorno suyo o podría ser incluso constantemente 0 en un entorno de $p(t^*)$. Por lo tanto, para que funcione este razonamiento y podamos llegar a contradicción, vamos a pedir que f tenga sus ceros aislados. De esta manera, si $p(t) \in (p(t^*), b]$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \setminus \{t^*\}$, entonces, o bien $f(p(t)) > 0$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$ o bien $f(p(t)) < 0$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon]$, haciendo ε más pequeño si fuera necesario. Y lo análogo sucede cuando $p(t) \in [a, p(t^*))$ para todo $t \in [t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon] \setminus \{t^*\}$. En resumen, para llegar a contradicción hemos necesitado pedir que f tenga sus ceros aislados.

Para sintetizar, si pedimos que f tenga sus ceros aislados, entonces $q(t^*) = p'(t^*) \neq 0$ y conseguimos que $f(p(t^*)) = 0$. Si llamamos $G_0 = G(p(t^*))$, entonces $F(t) > G_0$ para todo t . En efecto, por ser t^* un mínimo global de F ,

$$F(t) \geq F(t^*) = \frac{q(t^*)^2}{2} + G_0 > G_0 \text{ para todo } t.$$

Si ahora dividimos la igualdad $F'(t) = 2f(p(t))[G(p(t)) - F(t)]$ entre $F(t) - G_0 > 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{F'(t)}{F(t) - G_0} &= \frac{2f(p(t))[G(p(t)) - F(t)]}{F(t) - G_0} = \frac{2f(p(t))[G(p(t)) - G_0 + G_0 - F(t)]}{F(t) - G_0} = \\ &= 2f(p(t)) \frac{[G(p(t)) - G_0]}{F(t) - G_0} - 2f(p(t)). \end{aligned}$$

Si integramos el miembro de la izquierda de la expresión anterior entre 0 y T obtenemos que

$$\int_0^T \frac{F'(t)}{F(t) - G_0} dt = \ln|F(T) - G_0| - \ln|F(0) - G_0| = 0$$

por ser F una función T -periódica. Por tanto,

$$\int_0^T f(p(t)) dt = \int_0^T f(p(t)) \frac{[G(p(t)) - G_0]}{F(t) - G_0} ds$$

y recordemos que la integral de la izquierda era aquella de la cual queríamos conocer su signo para poder concluir, o no, que la solución periódica es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica. Una condición suficiente para que la integral de la derecha sea positiva es

- 1) En todos los ceros de f , la función G toma el mismo valor γ , en cuyo caso dicho valor γ debe ser $G_0 = G(p(t^*))$ por ser $p(t^*)$ uno de los ceros de f , según hemos impuesto.
- 2) Cuando $f(x) \neq 0$, entonces $f(x)[G(x) - \gamma] > 0$.

Con estas dos condiciones y las hipótesis adicionales de que f tiene sus ceros aislados y, al igual que g , es de clase \mathcal{C}^1 , podemos asegurar que

$$f(p(t)) \frac{[G(p(t)) - G_0]}{F(t) - G_0} = f(p(t)) \frac{[G(p(t)) - \gamma]}{F(t) - G_0} \geq 0, \quad t \in [0, T],$$

es continua y no nula, luego su integral es positiva. Por tanto, el multiplicador característico de la linealización del sistema (B.2) que no es 1, tiene módulo menor que 1, lo que implica que la solución periódica de la ecuación original es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica. Nótese que las hipótesis anteriores únicamente dependen de las funciones f y g , esta última escondida en G , lo que nos permite evitar el escollo de conocer una expresión explícita de la solución periódica $p(t)$.

Podemos aplicar este resultado al oscilador de Van der Pol. Los ceros de $f(x) = -\lambda(1 - x^2)$ son $x = \pm 1$ (aislados) y el valor de $G(x) = \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2}$ en dichos ceros es en ambos casos $\gamma = G_0 = 1/2$. Pero

$$f(x)[G(p(t)) - \gamma] = -\lambda(1 - x^2) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \lambda \frac{(1 - x^2)^2}{2},$$

que es estrictamente mayor que 0 cuando $x \neq \pm 1$. Esto prueba que

$$\int_0^T f(p(t)) dt > 0,$$

luego el multiplicador característico que no es 1, tiene módulo menor que 1 (de hecho es real y está entre 0 y 1) y el Teorema 3.3 nos asegura que dada una solución periódica del oscilador de Van der Pol, esta es orbitalmente asintóticamente estable con fase asintótica.

Nuestro siguiente objetivo es probar que, si existe una órbita periódica Γ en el oscilador de Van der Pol, esta debe ser única. Por un lado, resultados conocidos sobre la existencia de órbitas periódicas nos aseguran que en el interior de la región delimitada por una órbita periódica debe haber un punto de equilibrio. Por tanto, todas las órbitas presentes en el diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol

deben rodear al origen, que es el único punto de equilibrio. Por otro lado, la matriz de la linealización en el origen del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \lambda(1 - x^2)y - x \end{cases}.$$

es

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ y sus autovalores son } \frac{\lambda \pm i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}.$$

Según el Teorema de linealización, cuando $\lambda > 0$ el origen es inestable. Es más, la parte real de ambos autovalores de $A(\lambda)$ es positiva, luego el punto de equilibrio es una fuente ¹. Por tanto, existe una bola de centro 0 y radio $\delta_1 > 0$ tal que cualquier solución con dato inicial en dicha bola, a partir de cierto tiempo, está siempre en el exterior de otra bola de centro 0 y radio $\delta_2 > \delta_1$.

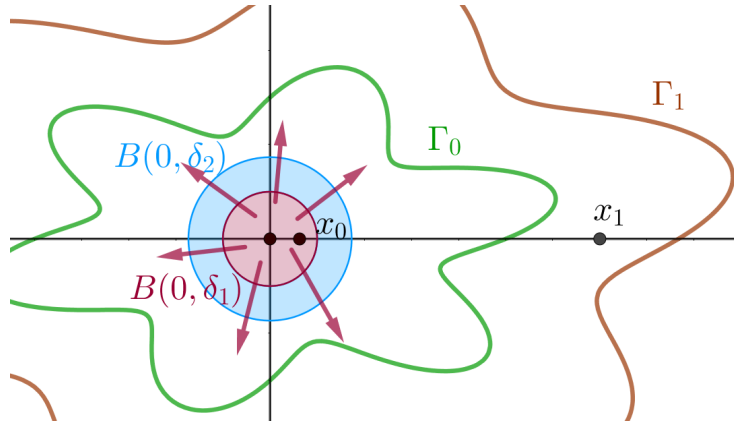


Figura B.1: Esquema que representa las órbitas periódicas y asintóticamente estables Γ_0 , Γ_1 , las bolas $B(0, \delta_1)$ y $B(0, \delta_2)$, y los datos iniciales x_0 y x_1 .

Para el argumento que sigue, puede resultar de utilidad considerar la situación expuesta en la Figura B.1. Advertimos que este esquema no se corresponde con el diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol, que mostraremos en breve, sino con una situación general. Sea un dato inicial x_0 en la bola de centro 0 y radio δ_1 , cuyo conjunto ω -límite es una órbita periódica Γ_0 . En efecto, podemos aplicar el Teorema de Poincaré-Bendixson ya que su órbita global $\gamma(x_0)$ está acotada y su conjunto ω -límite no tiene puntos de equilibrio. La primera de las hipótesis se verifica al estar $\gamma(x_0)$ contenida en el interior de la región delimitada por la órbita periódica Γ , cuya existencia es la hipótesis, y la segunda porque el origen, que es el único punto de equilibrio del sistema, es una fuente.

Es claro que no puede haber órbitas periódicas en el interior de la región delimitada por Γ_0 . Si no la órbita $\gamma(x_0)$ las habría atravesado para llegar a Γ_0 (porque todas las órbitas rodean al origen) y esto no es posible por la unicidad de soluciones. Por tanto, supongamos que existe otra órbita periódica Γ_1 , que también debe rodear al

¹El argumento que lo prueba utiliza que el sistema en el que se cambia t por $-t$ es asintóticamente estable

origen y ser asintóticamente estable, en el exterior de la región delimitada por Γ_0 . Consideramos otro dato inicial x_1 en el exterior de la región delimitada por Γ_0 y en el interior de la región delimitada por Γ_1 . Como su órbita global $\gamma(x_1)$ está acotada y su conjunto α -límite no contiene puntos de equilibrio, este último debe ser una órbita periódica Γ_2 , que podría ser Γ_0 o Γ_1 . Pero esto es imposible ya que todas las órbitas periódicas del sistema son asintóticamente estables. Llegamos a contradicción por haber supuesto la existencia de una segunda órbita periódica en el exterior de la región delimitada por Γ_0 . En conclusión, de existir una órbita periódica, esta es única.

Además, se puede construir un conjunto positivamente invariante para la ecuación de Van der Pol que rodea al origen. Consecuentemente, y tras volver a aplicar el Teorema de Poincaré–Bendixson, concluimos que para $\lambda > 0$ existe una única órbita periódica y que las soluciones periódicas que la generan son orbitalmente asintóticamente estables y con fase asintótica. Para concluir el estudio de la ecuación de Van der Pol, al comienzo del Apéndice C esta se examina siguiendo la aproximación dada por el Teorema de la bifurcación de Hopf, que se presenta en el capítulo 4. Además, podemos observar una construcción mediante aproximaciones numéricas del diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol en la Figura B.2.

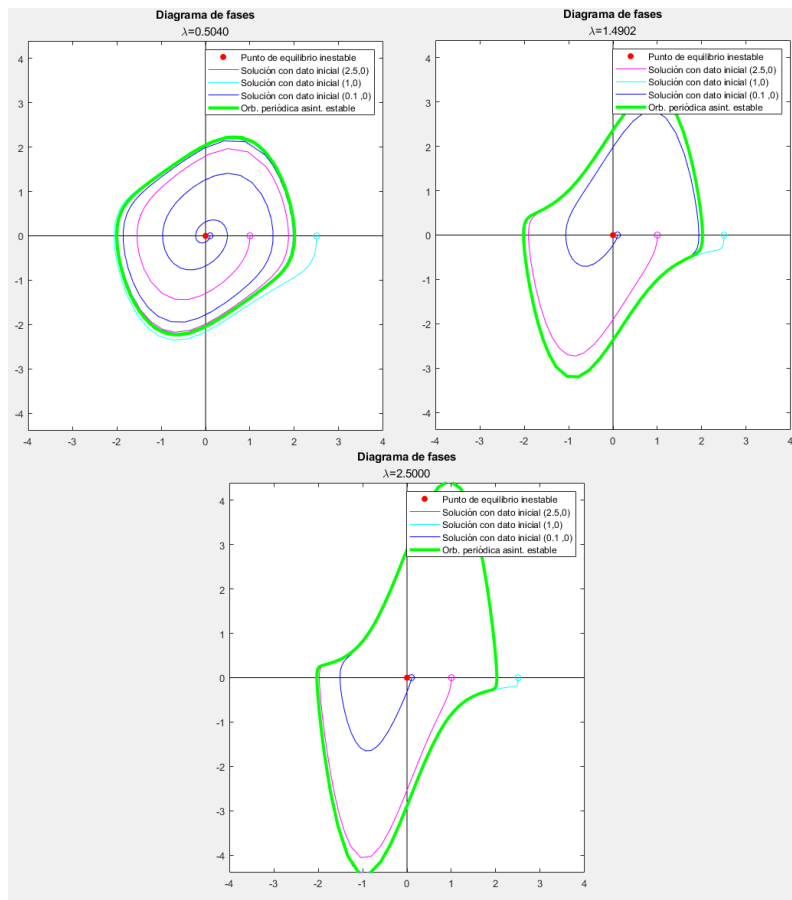


Figura B.2: Diagrama de fases del oscilador de Van der Pol.

Ejemplos de bifurcación de Hopf

En este apéndice presentamos algunos ejemplos de aplicación del Teorema de la bifurcación de Hopf. Estudiaremos la generación de órbitas a partir de puntos de equilibrio en ejemplos concretos como el oscilador de Van der Pol y también estudiaremos la estabilidad de las mismas gracias al Teorema 4.3.

En primer lugar, recuperemos la ecuación de Van der Pol $z'' - \lambda(1 - z^2)z' + z = 0$ cuyo sistema plano asociado es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \lambda(1 - x^2)y \end{cases}.$$

La matriz del sistema linealizado es

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

y los autovalores son de la forma $\alpha(\lambda) \pm \beta(\lambda)i$ donde $\alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{2}$ y $\beta(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$. Como $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1 \neq 0$ y $\alpha'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la bifurcación de Hopf. Podemos concluir que para cualquier entorno \mathcal{U} del origen y cualquier $\lambda_0 > 0$, existe un $\bar{\lambda}$ con $|\bar{\lambda}| < \lambda_0$ tal que la ecuación de Van der Pol con parámetro $\lambda = \bar{\lambda}$ tiene una órbita periódica no trivial contenida en \mathcal{U} . Aunque este resultado es indudablemente cierto, es complicado identificar esta órbita periódica en un diagrama de fases construido a partir de soluciones numéricas cuando λ es positivo y pequeño. Esto se debe a que la velocidad con la que ganan o pierden energía las soluciones es muy baja y tiene que transcurrir mucho tiempo para que se aprecie el conjunto ω -límite de las soluciones, que es la propia órbita periódica. Aunque en el siguiente [enlace](#) se puede apreciar el comportamiento de las soluciones del oscilador de Van der Pol y como los autovalores atraviesan el eje imaginario para $\lambda = 0$, en el segundo ejemplo que discutiremos, que es una modificación sobre este, queda reflejado de manera mucho más clara el proceso de generación de órbitas periódicas asociado a la bifurcación de Hopf. En la Figura B.2

también mostramos el característico diagrama de fases de la ecuación de Van der Pol para algunos valores de $\lambda > 0$.

La ecuación a la que nos referimos es $z'' - (\lambda - z^2)z' + z = 0$ y su sistema plano asociado es

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + (\lambda - x^2)y \end{cases} .$$

La matriz del sistema linealizado es nuevamente $A(\lambda)$ y ya hemos comprobado en el ejemplo anterior que esta matriz verificaba las hipótesis que permitían aplicar el Teorema de la bifurcación de Hopf. La principal diferencia y motivo por el cual consideramos este ejemplo es que para $\lambda = 0$, mientras que en el ejemplo anterior la ecuación era la de un péndulo lineal y el origen se comportaba como un centro estable, en esta ocasión obtenemos la ecuación de un péndulo con rozamiento y el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. En este [enlace](#) se identifica de manera más clara la órbita periódica como conjunto límite de las demás órbitas y se observa el proceso de generación de una órbita periódica cuando $\lambda = 0$. Además, en [3] se da una estimación de la función λ^* y se puede deducir que el “radio” de la órbita periódica en función de λ es $r_0 \approx 2\sqrt{\lambda}$, con lo que el diagrama de bifurcación sería, aproximadamente, el que se presenta en la Figura C.1. En él aparece representado para cada valor de λ el radio de las soluciones periódicas del sistema. En verde y a trazo continuo aparece representada la estabilidad asintótica y en rojo y trazo discontinuo, la inestabilidad. Se aprecia como en $\lambda = 0$ el punto de equilibrio cede su estabilidad a la órbita periódica.

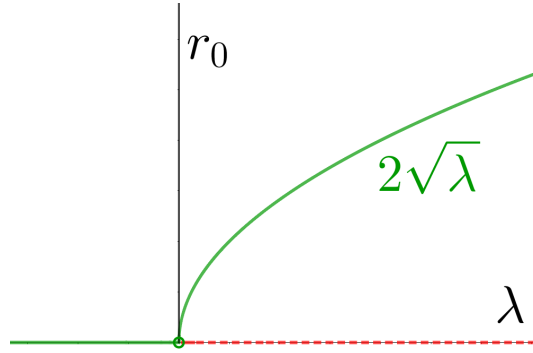


Figura C.1: Diagrama de bifurcación aproximado de un oscilador de Van der Pol modificado con ecuación $z'' - (\lambda - z^2)z' + z = 0$.

Presentamos un último ejemplo que se puede generalizar fácilmente y que nos permite obtener explícitamente la función λ^* , que en general es difícil de calcular, para así analizar la estabilidad de las órbitas periódicas.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y + (c^2 - (x^2 + y^2 - c)^2)x \\ y' = -x + \lambda y + (c^2 - (x^2 + y^2 - c)^2)y \end{cases} , \quad c > 0 \quad (\text{C.1})$$

el cual se puede expresar en coordenadas polares como

$$\begin{cases} r' = r(\lambda + c^2 - (r^2 - c)^2) \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

realizando el cambio $x = r\cos(\theta)$, $y = -r\sin(\theta)$. Un análisis general del sistema nos dice que el origen es el único punto de equilibrio y el teorema de linealización, que el origen es asintóticamente estable si $\lambda < 0$, e inestable si $\lambda > 0$. Cuando $\lambda = 0$, $r' = r(c^2 - (r^2 - c)^2)$ y como $c^2 - (r^2 - c)^2 > 0$ cuando r es pequeño ($0 < r < \sqrt{2c}$), se tiene que $r' > 0$ y las soluciones se alejan del origen, luego este es inestable.

Si estudiamos la bifurcación del parámetro λ , efectivamente, este sistema cumple las condiciones del Teorema de la bifurcación de Hopf porque $\alpha(\lambda) = \lambda$ y $\beta(\lambda) = 1$. Esto garantiza la existencia de órbitas periódicas no triviales en cualquier entorno del origen para algún valor de λ próximo a 0. Obtengamos la función que nos da este valor de λ en función del radio. En este caso es más sencillo que en el caso general y no es necesario obtenerla a partir de la fórmula de variación de constantes porque una solución será periódica si y solo si $r(\lambda + c^2 - (r^2 - c)^2) = 0$. Excluyendo el caso en el que $r = 0$ que se corresponde con el punto de equilibrio, una solución será periódica si y solo si,

$$\lambda = \lambda^*(r_0) = (r_0^2 - c)^2 - c^2.$$

la gráfica de esta función para $r_0 > 0$ es la que se muestra en la Figura C.2.

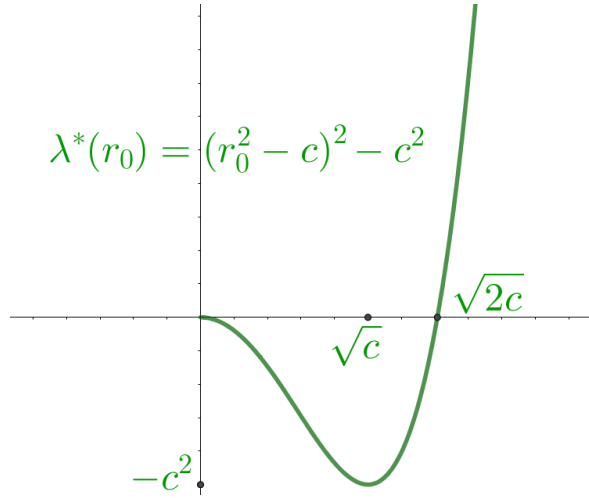


Figura C.2: Gráfica de la función $\lambda^*(r_0) = (r_0^2 - c)^2 - c^2$.

Podemos observar en la propia gráfica, o simplemente derivando, que $(\lambda^*)'(r_0) > 0$ si y solo si $r_0 > \sqrt{c}$ lo que nos dice que las órbitas son asintóticamente estables si se cumple esta condición, en virtud del Teorema 4.3. Con esta información podemos construir el llamado diagrama de bifurcación, que nos ofrece una descripción visual del comportamiento del sistema para distintos valores del parámetro λ . Para ello debemos invertir la gráfica y considerar el plano $\lambda - r_0$ sobre el cual identificaremos la amplitud de las órbitas periódicas del sistema para cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Para representar la estabilidad (orbital) asintótica, los trazos serán continuos y en

color verde y, para la inestabilidad, discontinuos y en color rojo. Además, también podemos representar el punto de equilibrio del sistema junto con su estabilidad. El diagrama resultante es el que se muestra en la Figura C.3 y su interpretación es la que sigue.

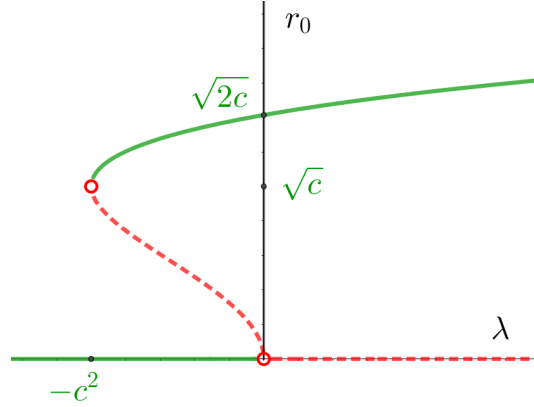


Figura C.3: Diagrama de bifurcación del sistema (C.1).

Si $\lambda < -c^2$ el sistema tiene un punto de equilibrio estable en el origen y no tiene órbitas periódicas. Cuando $\lambda = -c^2$ el punto de equilibrio sigue siendo estable, pero se genera una órbita periódica de radio $r_0 = \sqrt{c}$. Su estabilidad no se puede deducir del Teorema 4.3 ya que $(\lambda^*)'(\sqrt{c}) = 0$ pero no es complicado probar por la expresión de la derivada de r' que se trata de una órbita inestable (también se podría argumentar con los conjuntos α -límite y ω -límite y el Teorema de Poincaré-Bendixson). Cuando $\lambda \in (-c^2, 0)$, la órbita periódica que se generó para $\lambda = -c^2$ se divide en 2 cuyos radios son $r_1 = \sqrt{c + \sqrt{\lambda + c^2}}$ y $r_2 = \sqrt{c - \sqrt{\lambda + c^2}}$. La órbita periódica de radio mayor es asintóticamente estable porque $(\lambda^*)'(r_1) > 0$ y la órbita de radio menor es inestable ya que $(\lambda^*)'(r_2) < 0$. Además, el radio de esta segunda órbita decrece cuando λ se acerca a 0. En el caso extremo en el que $\lambda = 0$ esta órbita colapsa al origen y hemos podido comprobar anteriormente que el origen pasa a ser un punto de equilibrio inestable cuando $\lambda = 0$. Si $\lambda \geq 0$ el comportamiento cualitativo del sistema es el mismo: se mantiene una órbita periódica de radio $r_0 = \sqrt{c + \sqrt{\lambda + c^2}}$ que es asintóticamente estable y el origen sigue siendo un punto de equilibrio inestable. Toda esta discusión se puede ver resumida en la Figura C.4 y en el vídeo del siguiente [enlace](#). En él se muestra el diagrama de fases, el diagrama de bifurcación, y la representación en el plano complejo de la trayectoria de las curvas que definen los autovalores de la matriz del sistema linealizado en función de λ . Se recomienda detenerse a observar como la órbita periódica inestable colapsa al origen contagiándole su inestabilidad al tiempo que los autovalores atraviesan el eje imaginario.

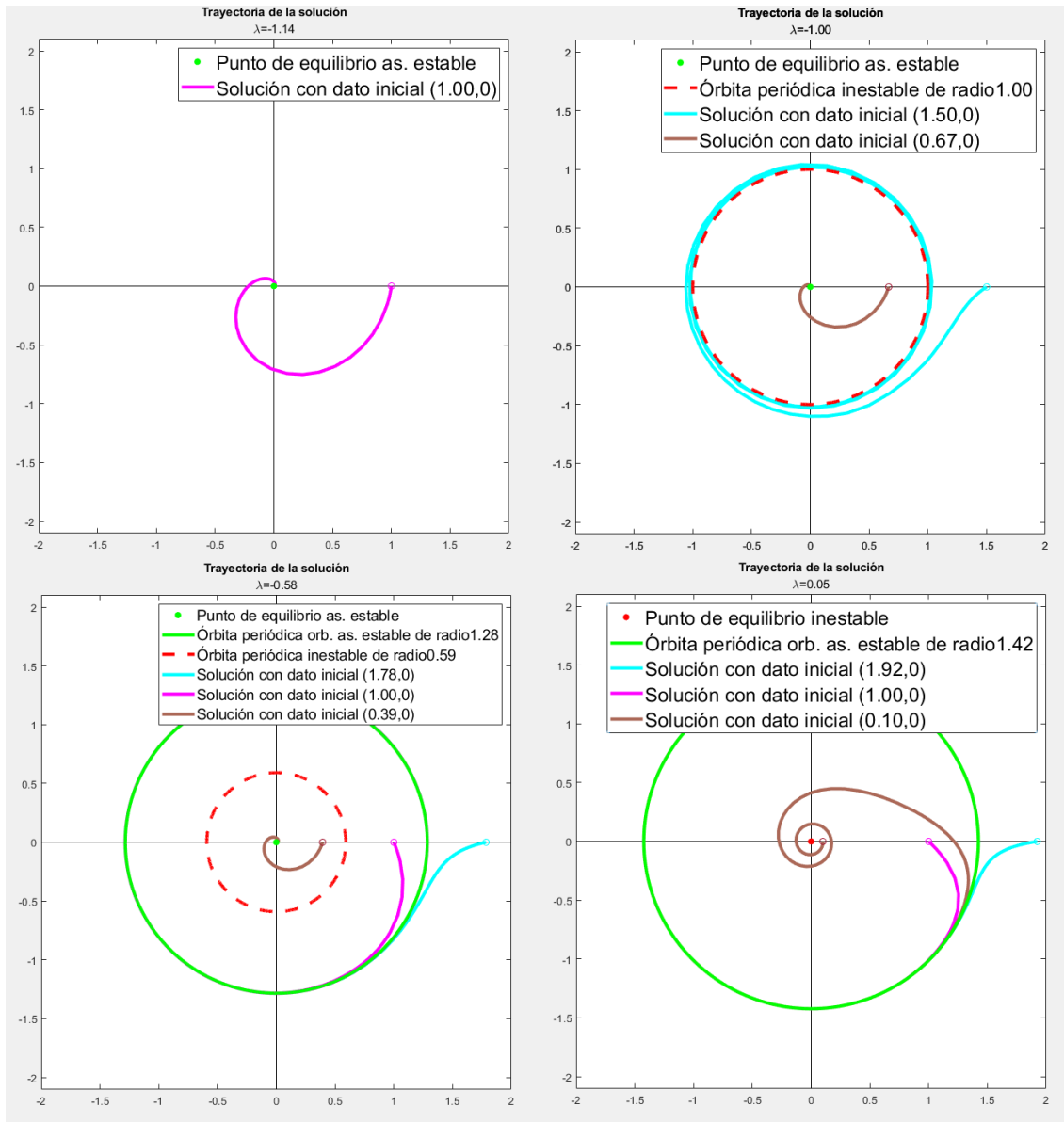


Figura C.4: Comportamiento cualitativo del sistema (C.1) al variar $\lambda \in (-2, 1)$ y suponiendo $c = 1$.