Taller 4 - Grupo 4

Integrantes:
- Emily Esmeralda Carvajal Camelo
- Viviana Castro Holguín
- Jeison Cardona Gómez

4.1.8: Multiplicación de matrices.

Método del producto por bloques:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Operación 1:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 2 & 7\end{bmatrix}$$

Operación 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix}$$

Operación 3:

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Operación 4:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \end{bmatrix}$$

Método ordinario:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ .-3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

4.1.16 - a: ¿Es esta matriz positiva definida?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos si $x^T Ax > 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$x_1(x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + x_2) > 0$$
$$x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + x_2^2 > 0$$
$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0$$
$$(x_1 - x_2)^2 > 0$$
$$x_1 - x_2 > 0$$

Como $x_1 - x_2$ puede ser igual a 0 para determinados valores, tenemos que entonces la matriz no es positiva definida.

4.1.16 - b: ¿Es esta matriz positiva definida?

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(B) = (4-\lambda)[\,(5-\lambda)(4-\lambda) - 4\,] - 2[\,2(4-\lambda) - 2\,] + 1[\,4 - (5-\lambda)\,]$$
$$det(B) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 47\lambda + 51$$

Factorizando el polinomio característico tenemos:

$$p_3(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 10\lambda - 17)$$
$$\lambda_0 = 3$$

Encontrando los valores propios restantes:

$$\lambda_1 = \frac{-10+\sqrt{32}}{-2} \approx 2.1715$$

$\lambda_2 = \frac{10+\sqrt{32}}{2} \approx 7.8284$

Como λ_0 , λ_1 , λ_2 son mayores que 0, tenemos que la matriz B es positiva definida.

4.1.17: [Método del determinante de las submatrices o valores própios]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

det(1)= 1

$$det = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} = (1)(1) - (a)(a)$$

$$= 1 - a^2$$

$$1 - a^2 > 0$$

$$a^2 < 1$$

$$-1 < a < 1$$

$$det(A) = 1\left[(1)(1) - (a)(a)\right]$$

$$-a\left[(a)(1) - (a)(a)\right]$$

$$a\left[(a)(a) - (1)(a)\right]$$

$$= 1 - a^2 - a^2 + a^3 + a^3 - a^2$$

$$= 1 - 3a^2 - 2a^3 > 0$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & -3 & 0 & 1 & & -1 \\ & 2 & -1 & -1 & & \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & & \end{array}$$

$$(2a^2 - a - 1)(a - 1)$$

$$a = 1 \pm \sqrt{\frac{1+8}{4}} =$$

$$a = \frac{4}{4} = 1 \;\; y \;\; a = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Para que A sea positiva debe cumplirse que:

$$-\frac{1}{2} < a < 1$$

4.2.31: Encuentre la factorización LU de la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando la matriz U:

$$F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$F_3 = F_3 + 3F_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

Encontrando la matriz L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} \end{bmatrix}$$

4.2.32: Factorice la matriz A de modo que $A = LL^T$, donde L es la triangular inferior.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Encontrando U:

$$F_2 = F_2 - 2F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto de LL^T:

$$LL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$