Escuela Rafael Díaz Serdán

Matemáticas 3 — 3° de Secundaria

J. C. Melchor Pinto

2022-2023

Repaso para el examen de la Unidad 2

Aprendizajes a evaluar

- Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.
- Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la Física y de otros contextos.

Puntuación

Pregunta	1	2	3	Total
Puntos	20	40	40	100
Obtenidos				

Ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** completa en una variable es una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

donde a, b y c son enteros, decimales o fraccionarios y a no es igual a 0. Como el mayor exponente de la variable es 2 también se le conoce como **ecuación de segundo grado**.

Formas de una ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$	Forma **general o estándar**
$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$	Forma **factorizada**
$a(x - h)^2 + k = 0$	Forma **canónica**

Discriminante δ

El discriminante δ es un parámetro que indica cuantas soluciones tiene una ecuación cuadrática:

$$\text{Número de soluciones} = \begin{cases} 2 & \text{si } \delta > 0 \\ 1 & \text{si } \delta = 0 \\ 0 & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

Fórmula para las soluciones de una ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a} \qquad \text{donde, } \delta = b^2 - 4ac$$

que se pueden escribir en una sola expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Gráficas de ecuaciones cuadráticas

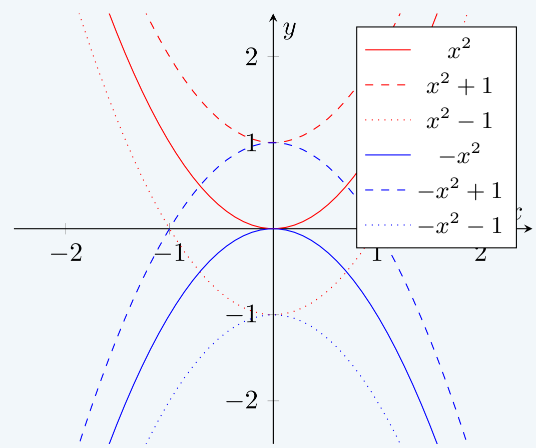

Figura 1: Grafica de x^2 (rojo), su negarivo $-x^2$ (azul) y su variación en el término independiente (líneas punteadas).

Vocabulario

- (s.) **signo** → característica + o − de una cantidad.
- (s.) **ecuación** → expresiones algebráicas con un signo '='.
- (s.) **factor** → aquello que se multiplica.
- (v.) **factorizar** → convertir una expresión algebráica en un producto.
- (s.) **coeficiente** → número que multiplica a una literal; ejemplo: a, b, c son coeficientes de $ax^2 + bx + c$
- (s.) **ecuación cuadrática** → $0 = ax^2 + bx + c$
- (s.) **raíces** → soluciones de una ecuación cuadrática.
- (s.) **formula** → ecuación

Factiorización de una ecuación cuadrática

Factorizar una ecuación cuadrática significa escribirla como una multiplicación (expresiones algebraicas separadas por paréntesis), y sirve para encontrar las soluciones a una ecuación cuadrática de forma rápida:

1. Verifica si existe un factor en común para los coeficientes a, b y c y divide la ecuación entre el factor común (obtendras una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$).
2. Escribe dos paréntesis, de esta forma:

$$x^2 + bx + c = \left(x \boxed{-x_1}\right) \cdot \left(x \boxed{-x_2}\right)$$

3. Coloca en los espacios dos números que al sumarlos tengan el valor de b y al multiplicarlos el valor de c.

$$\begin{aligned} b &= x_1 + x_2 \\ c &= x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

4. Verifica el signo de los coeficientes a y b.

1 Encuentra las soluciones a las siguientes ecuaciones cuadráticas. Házlo por el método de factorización y después con la fórmula cuadrática.

1a $x^2 + x - 42 = 0$

Solución:

Por factorización:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 42 &= 0 \\ (x+7)(x-6) &= 0 \\ \therefore \quad & x_1 = -7 \text{ y } x_2 = 6 \end{aligned}$$

Por fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + x - 42 \\ a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -42 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-42)}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 13}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{12}{2} = \text{ y } x_2 = \frac{-14}{2} = -7$$

1b [5 puntos] $x^2 - 5x - 14 = 0$

1c [5 puntos] $x^2 + 12x + 36 = 0$

1d $x^2 - 11x + 18 = 0$

Solución:

Por factorización:

$$\begin{aligned} x^2 - 11x + 18 &= 0 \\ (x-9)(x-2) &= 0 \\ \therefore \quad & x_1 = 2 \text{ y } x_2 = 9 \end{aligned}$$

Por fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 11x + 18 \\ a &= 1 \\ b &= -11 \\ c &= 18 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(1)(18)}}{2(1)} \\ x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{49}}{2} \\ x_{1,2} &= \frac{11 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ y } x_2 = \frac{18}{2} = 9$$

1e $2x^2 - 2x - 180 = 0$

Solución:

Por factorización:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 2x - 180 &= 0 \\ 2(x^2 - x - 90) &= 0 \\ 2(x+9)(x-10) &= 0 \\ \therefore \quad & x_1 = -9 \text{ y } x_2 = 10 \end{aligned}$$

Por fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 2x - 180 \\ a &= 2 \\ b &= -2 \\ c &= -180 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(-180)}}{2(2)} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{1444}}{4} \\ x_{1,2} &= \frac{2 \pm 38}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-36}{4} = -9 \text{ y } x_2 = \frac{40}{4} = 10$$

1f [5 puntos] $2x^2 - 16x + 14 = 0$

1g [5 puntos] $6x^2 + 36x + 54 = 0$

2 Lee con atención las siguientes situaciones, escribe la ecuación correpondiente a cada una y obten su solución para contestar a la pregunta que resuelve el problema correctamente.

2a Antoine se encuentra en un balcón y lanza una pelota a su perro, que está a nivel del suelo. La altura $h(t)$ de la pelota (en metros sobre el suelo), t segundos después de que Antoine la lanzó, está modelada por:

$$h(t) = -2t^2 + 4t + 16$$

¿Cuántos segundos después de ser lanzada la pelota llegará al suelo?

Solución:
Para conocer el tiempo en que la pelota llega al suelo (donde la altura es cero), se debe resolver la ecuación:

$$-2t^2 + 4t + 16 = 0$$

De acuerdo con la Forma estándar $at^2+bt+c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= 4 \\ c &= 16 \end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)(16)}}{2(-2)} \\ t &= \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{-4} \\ t &= \frac{-4 \pm 12}{-4} \\ t_1 &= \frac{-4-12}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4 \\ t_2 &= \frac{-4+12}{-4} = \frac{8}{-4} = -2 \end{aligned}$$

Ya que el tiempo no puede ser negaivo, la solución que tiene sentido en este problema es:

$$\therefore t = 4$$

2b El área de un rectángulo es 528 cm^2. Su altura es 1 cm más que el doble del ancho. Sea z el ancho del rectángulo.

I. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface z?**

A $2z^2+z+528 = 0$
B $2z^2+z-528 = 0$
C $2z^2 - z - 528 = 0$
D $2z^2 - z + 528 = 0$

Solución:
Sea z el ancho del rectángulo, entonces su altura esta dada por $2z + 1$, y su área es:

$$\begin{aligned} z(2z+1) &= 528 \\ 2z^2 + z &= 528 \\ 2z^2 + z - 528 &= 0 \end{aligned}$$

II. **Determina el ancho del rectángulo z.**

Solución:
Para encontrar z, se debe resolver la ecuación:

$$2z^2 + z - 528 = 0$$

De acuerdo con la forma estándar $az^2+bz+c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = 2, \quad b = 1 \quad y \quad c = -528$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ z &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-528)}}{2(2)} \\ z &= \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} \\ z &= \frac{-1 \pm 65}{4} \\ \therefore z_1 &= \frac{-1+65}{4} = \frac{64}{4} = 16 \\ z_2 &= \frac{-1-65}{4} = \frac{-66}{4} = -16.5 \end{aligned}$$

Ya que las distancias no pueden ser negativas, el ancho es:

$$\therefore z = 16$$

2c [10 puntos] Aditi y Kavita tenían 40 monedas entre las dos. Aditi le dio 10 monedas a Kavita. El producto de las monedas que tienen ahora es 375. Sea x la cantidad de monedas que tenía Aditi al principio.

I. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?**

(A) $-x^2 + 60x + 875 = 0$ (B) $-x^2 - 60x + 875 = 0$

(C) $-x^2 - 60x - 875 = 0$ (D) $-x^2 + 60x - 875 = 0$

II. Si Aditi tenía menos de 30 monedas al principio. **¿Con cuántas monedas empezó Aditi?**

2d [10 puntos] Pedro es 10 años más joven que Ana. El producto de sus edades hace 2 años era 39. Sea x la edad de Ana.

I. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?**

(A) $x^2 + 14x + 15 = 0$ (B) $x^2 - 14x + 15 = 0$

(C) $x^2 - 14x - 15 = 0$ (D) $x^2 + 14x - 15 = 0$

II. **Calcula la edad actual de Ana.**

2e [10 puntos] El producto de dos enteros pares positivos consecutivos es 80. Sea n el menor entero.

I. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface n?**

(A) $n^2 + 2n + 80 = 0$ (B) $n^2 - 2n - 80 = 0$
(C) $n^2 - 2n + 80 = 0$ (D) $n^2 + 2n - 80 = 0$

II. **Encuentra el número n.**

2f [10 puntos] El área de un rectángulo es 20cm^2. Su altura es 4 cm más que el triple del ancho. Sea x el ancho del rectángulo.

I. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?**

(A) $3x^2 + 4x + 20 = 0$ (B) $3x^2 - 4x - 20 = 0$
(C) $3x^2 + 4x - 20 = 0$ (D) $3x^2 - 4x + 20 = 0$

II. **Determina el ancho del rectángulo x.**

3 Lee con atención las siguientes situaciones y contesta lo que se te pide.

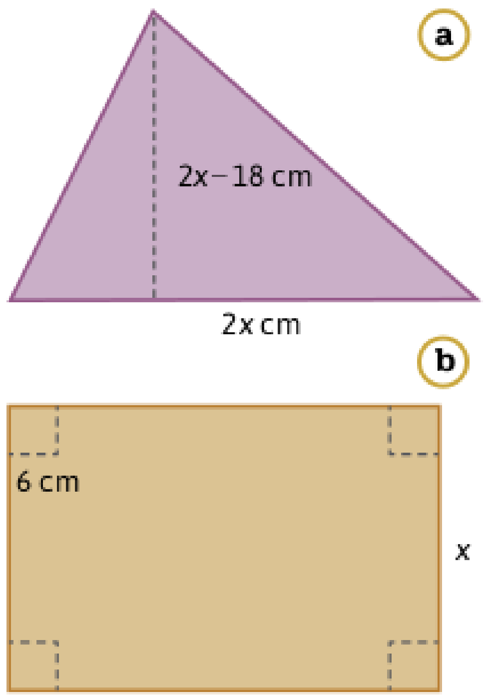

Figura 2: (a) Triángulo, (b) Pieza rectangular para armar una caja.

3a [10 puntos] El triángulo de la figura 2a tiene área igual a 52 cm^2, encuentra las medidas de su base y de su altura.

3b [10 puntos] Una pieza rectangular como la de la figura 2b es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes. Escribe las medidas de la altura y el volumen de la caja, así como los lados de la pieza rectangular.

3c [10 puntos] El área de un rectángulo es 28 cm^2. Tiene 3 cm más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

3d [10 puntos] Un terreno rectangular tiene área de 750 m^2. Se coloca una cerca alrededor de los 110 m de perímetro. Calcula las dimensiones del terreno.