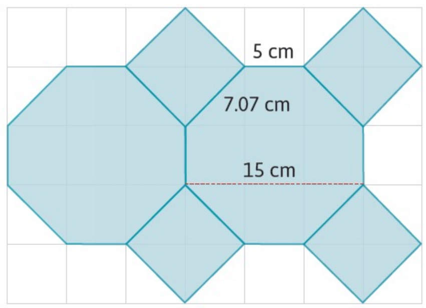
Aprendizajes esperados:

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1. Perímetro y área de polígonos

Analiza la situación, observa la imagen y responde.

1. Pablo colocará en su baño una figura hecha con azulejos con formas de octágono y de cuadrado como se muestra en el modelo.



   a) Identifica el perímetro de la figura. ¿Qué valor tiene?
   b) Es posible dividir un octágono en figuras de las cuales sepas calcular su área? ¿En cuáles? ¿Con estas figuras puedes deducir el área de un octágono? ¿Cómo?
   c) ¿Qué área tiene un octágono?
   d) Identifica el área de la figura, ¿cuál es su valor?
   e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   f) Describe el procedimiento que realizaste para conocer el área total.

Perímetro de polígonos

Repasemos el cálculo de perímetros de polígonos, pues será clave para el cálculo del área de polígonos regulares.

1. Juan tiene un rancho e instalará alambre alrededor de los pastizales para que sus animales no escapen (figura 2.7).

   a) ¿Cuánto alambre necesita para rodear toda su propiedad si pondrá solo dos hilos de alambre? ¿Y si pone tres?

   b) ¿Cuánto alambre necesita para poner tres hilos alrededor de la propiedad excepto la zona de viviendas?

   c) ¿Qué forma tiene la zona de las viviendas? ¿Cuánto alambre necesita para poner cuatro hilos alrededor de ésta zona?

   d) Explica distintas formas de calcular la longitud del alambre alrededor de las viviendas.

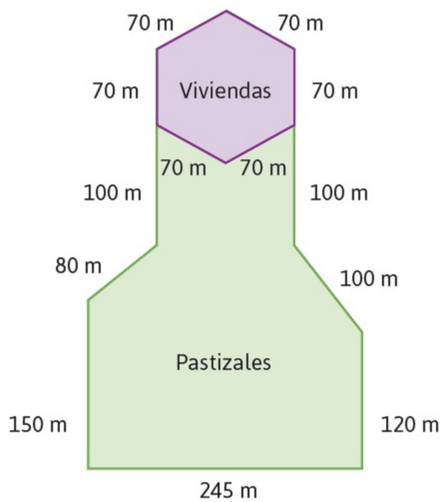


Figura 2.7: Esquema del rancho.

2. Calcula el perímetro de los polígonos de la figura 2.8.

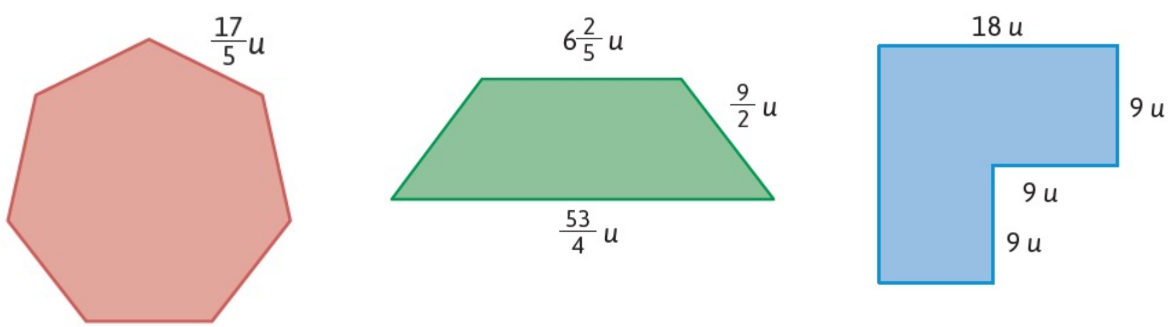


Figura 2.8: Diversos polígonos.

   a) Describe el procedimiento que seguiste para calcular los perímetros.

   b) Comparen los procedimientos para calcular los perímetros. ¿Difieren? ¿Obtienen los mismos resultados? Si es así, discutan por qué ocurre esto.

3. A partir de la información dada sobre un polígono regular, traza en tu cuaderno la figura descrita en los siguientes incisos y calcula su perímetro. Anótalo aquí.

   a) Su lado mide 3.5 cm y se puede trazar únicamente una diagonal desde cualquier vértice.
   b) El valor de un ángulo central es de 72^{o} y mide 3 cm de lado.
   c) Cada lado mide 4 cm y se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros congruentes.
   d) Reúnanse en equipo. Discutan lo siguiente: ¿obtuvieron las mismas figuras? ¿Por qué?

Área y descomposición de figuras

Trabajemos dividiendo una figura geométrica en otras cuyas expresiones son conocidas para calcular sus áreas.

4. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. A un carpintero le encargaron una mesa de juego con forma octagonal y le dieron un esquema (figura 2.9).

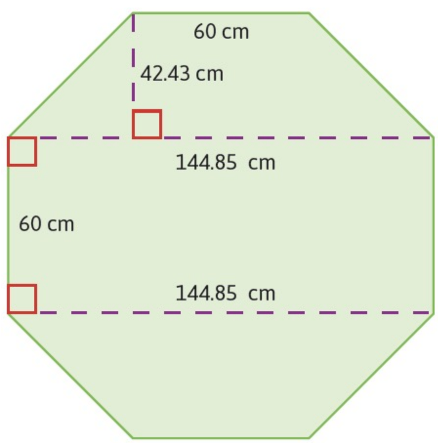


Figura 2.9: Esquema de una mesa octagonal.

   a) Encuentra el área del tablero. Explica tu procedimiento.

   b) Reúnanse en equipo y comparen su resultado, así como la manera en que calcularon el área. Determinen quién calculó el área con el menor número de operaciones.

5. Juan quiere comprar el terreno cuyo croquis se muestra en la figura 2.10 y busca conocer su superficie.

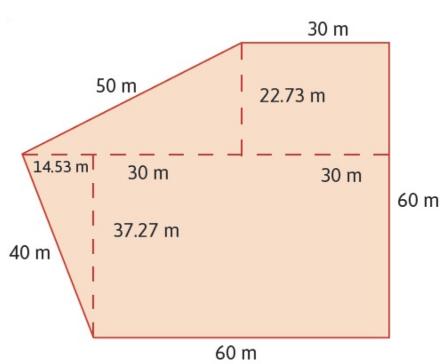


Figura 2.10: Esquema de un terreno.

   a) ¿Cómo calculas el área del terreno? ¿Cuál es?

   b) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Dividan de otra manera el terreno. Si calculan el área con base en esta nueva división, ¿obtendrán la misma área? ¿Por qué? Discutan.

6. Realiza dos descomposiciones distintas para cada polígono de la figura 2.13. Midan los datos que necesiten y calculen el área de cada polígono de dos maneras distintas.

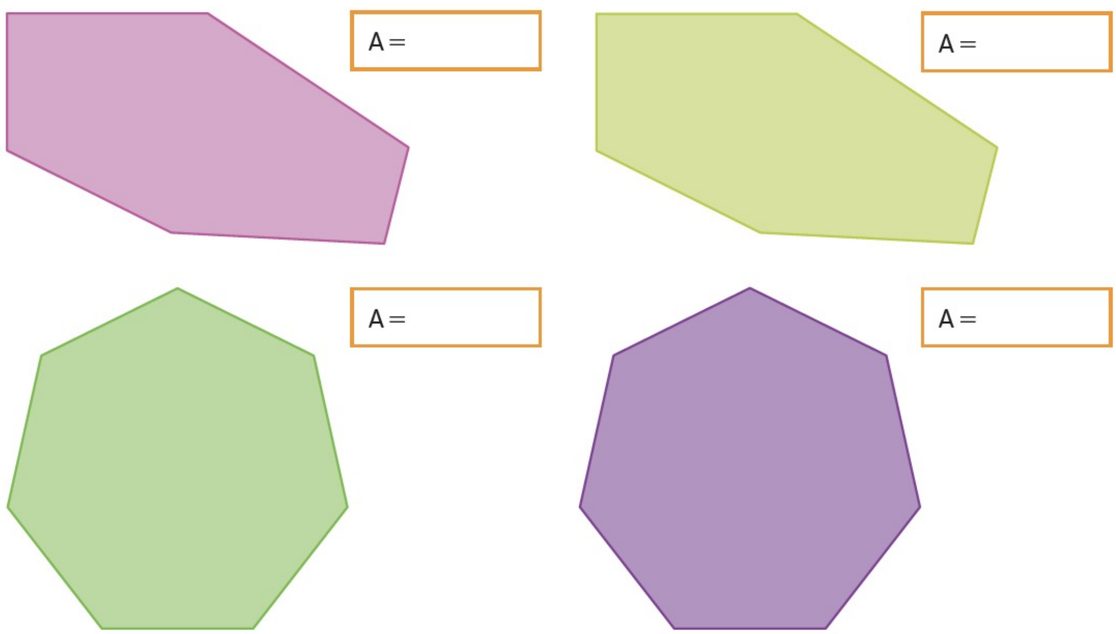


Figura 2.11: Dos tipos de polígonos.

a) ¿Cómo son las áreas para cada par de figuras iguales? ¿Por qué creen que sea así?

b) ¿Qué diferencias observan entre las descomposiciones de los polígonos irregulares y las de los regulares?

c) ¿Qué consideran que es más conveniente, dividir en muchas o en pocas figuras? Expliquen:

d) Compartan sus resultados con otros equipos. En caso de que haya diferencias, comparen procedimientos y argumenten. Corrijan si es necesario.

Área de polígonos regulares

Con base en las fórmulas para calcular el área de un triángulo equilátero y de un cuadrado, desarrollaremos el caso de polígonos regulares que tienen 5 lados o más.

7. Reúnanse en parejas y determinen la estrategia y procedimientos para responder. Analicen los polígonos de la figura 2.11. Lean la información y luego hagan lo que se pide.

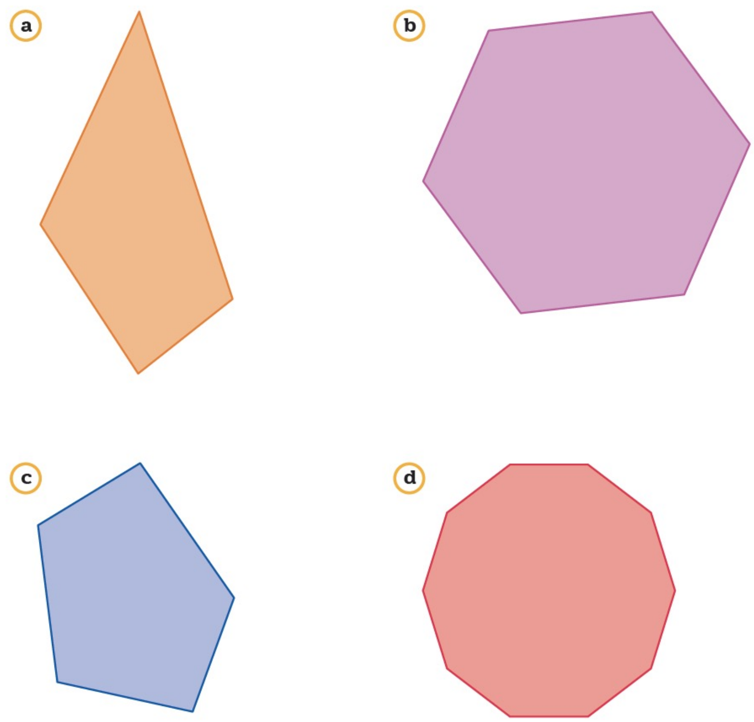


Figura 2.12: Diversos polígonos.

a) Tracen la circunferencia circunscrita y la inscrita a cada polígono de la figura 2.12. ¿Pudieron trazarlas en todos los casos? ¿En cuáles sí y en cuáles no?

b) ¿Cómo son el centro de la circunferencia circunscrita y el de la circunferencia inscrita?

c) ¿Cómo es la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados?

d) ¿Pueden descomponer los polígonos tomando en cuenta sus diagonales? ¿Cómo?

e) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Discutan acerca de cómo usan la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados de un polígono regular para calcular su área.

> El **centro** de un polígono regular es el centro de la circunferencia inscrita o de la circunferencia circunscrita.
> La perpendicular entre el centro de un polígono regular y uno cualesquiera de sus lados es la **apotema**, que coincide con el radio de la circunferencia inscrita.

8. Considera el polígono de la figura 2.13.

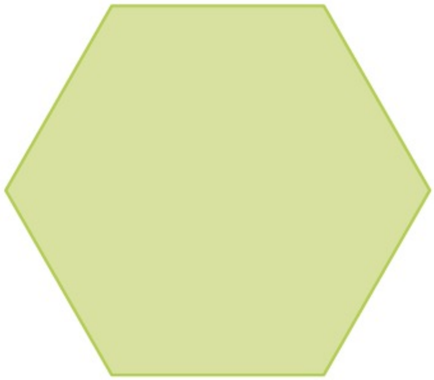


Figura 2.13: Hexágono.

a) Localicen el centro del polígono y tracen la circunferencia circunscrita. Luego dibujen triángulos tales que uno de los vértices de cada uno sea el centro del polígono. Después tracen la apotema

b) Reflexionen y discutan: ¿cuántos triángulos se forman? ¿Cómo son esos triángulos? ¿Cómo se relaciona la cantidad de triángulos formados con la cantidad de lados del polígono?

c) Para calcular el área de un triángulo se requiere conocer una base y su altura correspondiente. ¿Con qué elemento de los triángulos formados coincide el lado del polígono? ¿Y la apotema?

d) Midan y calculen el área de uno de los triángulos. ¿Cuál es el valor? ¿Cuál es el área de todos los triángulos juntos?

e) ¿Cómo se relaciona el área de todos los triángulos juntos con el área del polígono? ¿Cuál es el área del polígono?

f) Escriban una expresión algebraica para calcular el área de un hexágono.

g) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Tracen algunos hexágonos en su cuaderno y calculen sus áreas con triángulos y con la expresión que obtuvieron. Discutan cuál es la función de la apotema en el cálculo.

9. Analiza los polígonos de la figura 2.14 y completa la tabla 2.16.

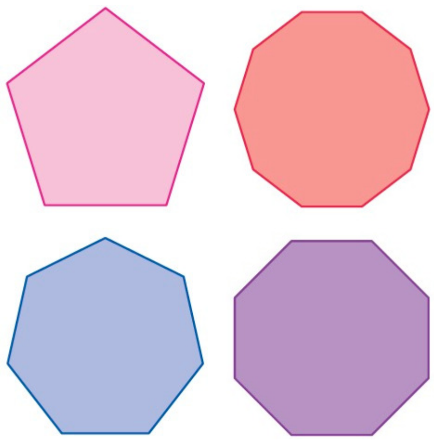


Figura 2.14: Diversos polígonos.

   a) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de los polígonos con base en los triángulos que los componen.

   b) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de un polígono regular con base en los elementos del polígono.

   c) ¿Cómo son estas dos expresiones? ¿Por qué?

   d) Anota un procedimiento para calcular el área de cualquier polígono regular y propón una fórmula.

   e) Reúnanse en equipo y comparen sus procedimientos y resultados. Argumenten y corrijan si es necesario. Tracen varios polígonos regulares e intercambien las medidas necesarias para que calculen sus áreas y así validen su fórmula.

Respecto a los triángulos que componen el polígono				
Número (n)	Base (l)	Altura (h)	Área de cada triángulo	Área total

Respecto a los elementos del polígono			
Número (n)	Perímetro ($P = n \times l$)	Apotema (a)	$P \times a$

Tabla 2.16: La tabla superior contiene información sobre los triángulos equilateros dentro de un polígono regular; la tabla inferior, los datos referentes a los polígonos mismos

El área de un polígono regular de n lados se obtiene multiplicando el perímetro P por la apotema a y dividiendo el resultado entre 2. Algebraicamente esto es:

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{n \times l \times a}{2}$$

10. Resuelve las siguientes situaciones. Haz los cálculos en tu cuaderno.

Figura 2.15: Diversos polígonos.

a) El Pentágono (figura 2.15) tiene un área de 116,000 m^2 y sus lados miden 230 m. Hay pasillos que parten del centro hacia los lados de manera que forman la apotema del pentágono. ¿Qué longitud tienen los pasillos?

b) Se impermeabilizará el techo de un centro de convenciones que tiene la forma hexagonal regular. Los lados miden 80 m y la apotema, 69 m. ¿Qué área se impermeabilizará?

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un pentágono, un hexágono y un decágono tienen el mismo perímetro, que es igual a 30 cm. ¿Cuál es el valor del lado en cada polígono? ¿De qué manera obtienes esos valores? ¿Cuál de ellos tendrá mayor área? Explica por qué.

Aprendizajes esperados:

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1. Área del círculo

Deducción del área de un círculo

Analiza la situación, observa la imagen y responde.

1. Mario piensa que puede aproximar el área del círculo usando cuadrados, puesto que sabe calcular el área de éstos. Ha trazado un círculo y dos cuadriculas: en la roja, cada cuadrito mide 1 cm de lado y en la azul, 0.5 cm.
   a) Aproxima el área del círculo usando la cuadrícula roja y la azul.
   b) ¿Puedes seguir aproximando el área del círculo? ¿Cómo?
   c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   d) Describe el procedimiento que realizaste para responder.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Repasemos los elementos del círculo que utilizaremos en el cálculo del área.

1. Traza en el espacio de la izquierda un círculo de 3 cm de radio.
   a) ¿Cuál es la medida del diámetro?
   b) ¿Qué es el número pi (π)?
   c) ¿Cuánto mide la circunferencia? Explica tu procedimiento.
   d) Escribe una fórmula que permita obtener la medida de la circunferencia a partir del radio.

2. Completa la tabla 2.17.

Radio	Diámetro	Circunferencia
7 m		
	15 cm	
		75.3982 cm
5 dm		

Tabla 2.17: Reacomodo de sectores circulares.

Fórmula del área del círculo

A partir de las áreas de polígonos regulares, que ya han sido tratados, determinaremos la expresión para obtener el área del círculo. En tu libreta amarilla de Matemáticas, diseña una estrategia con procedimientos para responder los siguientes ejercicios.

3. Consideren los polígonos de la figura 2.16.

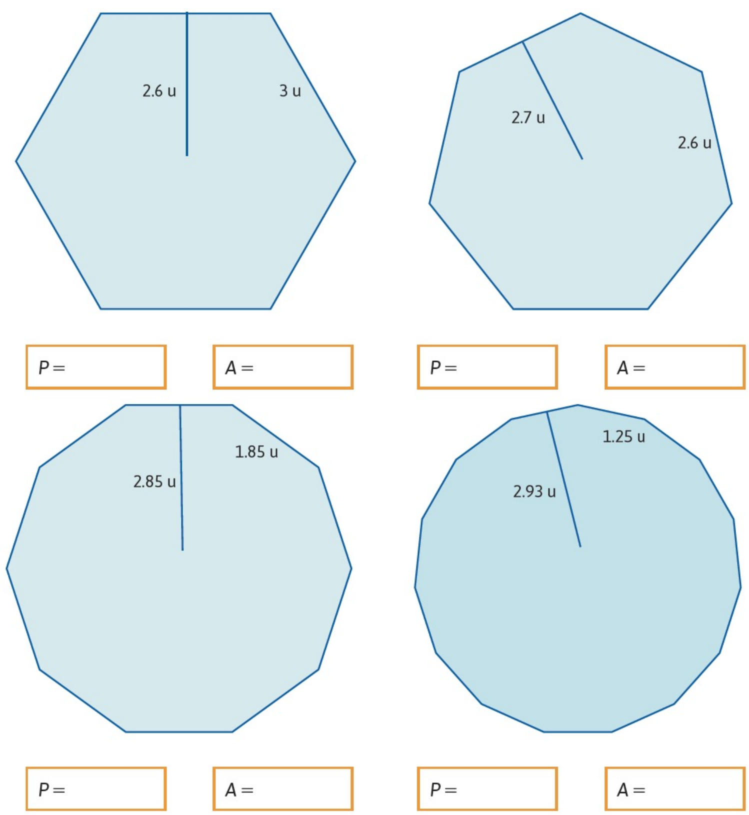


Figura 2.16: Diversos polígonos.

a) Tracen la circunferencia circunscrita a cada uno. Expliquen cómo la trazaron.

b) Calculen el perímetro (P) y área (A) de cada uno. Hagan las operaciones en su cuaderno.

c) Si el radio de las circunferencias circunscritas mide 3 u, ¿cuál es su perímetro?

d) ¿Qué sucede con el perímetro de los polígonos con respecto al de la circunferencia a medida que aumenta el número de lados?

e) ¿Cuántos lados tendrá el polígono cuyo perímetro coincida completamente con la circunferencia? Expliquen.

f) En este caso, ¿con cuál elemento de la circunferencia coincidirá la apotema?

g) El perímetro del polígono, ¿con cuál perímetro coincide?

h) ¿Cuáles son las fórmulas para calcular el área de un polígono regular de n lados y el perímetro de un círculo?

i) Escriban una expresión algebraica para calcular el área del círculo a partir de este análisis.

j) Comparen sus resultados con los de otros equipos. Propongan círculos con diversas medidas de radio y verifiquen su fórmula al calcular su área.

4. Leonardo da Vinci propuso cómo calcular el área de un círculo usando sectores del mismo (figura 2.17). Realiza lo que se pide.

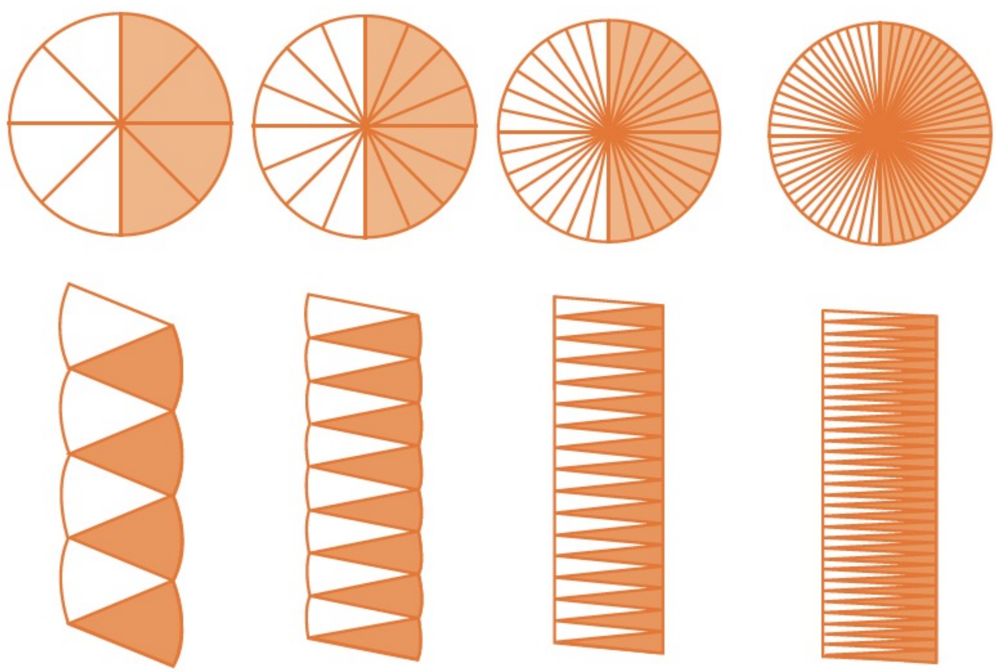


Figura 2.17: Diversos polígonos.

a) Tracen en una hoja de papel un círculo de 5 cm de radio.

b) Divídanlo en 8 sectores iguales y córtenlos; luego reacomoden con el patrón indicado en la figura 2.17 y péguenlos en otra hoja.

c) Tracen otro círculo de la misma medida, divídanlo en 16 sectores, recórtenlos y acomódenlos con el mismo patrón. Peguen la forma resultante en la misma hoja que la primera.

d) ¿A qué figura se asemejan los acomodos?

e) ¿Cómo obtienen el área aproximada de cada acomodo?

f) Si aumentan el número de sectores en que dividen el círculo, ¿qué sucederá con el reacomodo?

g) ¿Qué parte del acomodo coincidirá con el radio del círculo? ¿Cuál con el perímetro? Expliquen.

h) ¿De qué manera se obtiene el área A del acomodo resultante en función del radio y el perímetro?

i) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo.

j) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de la actividad anterior? Expliquen.

5. Consigan plastilina y un compás.

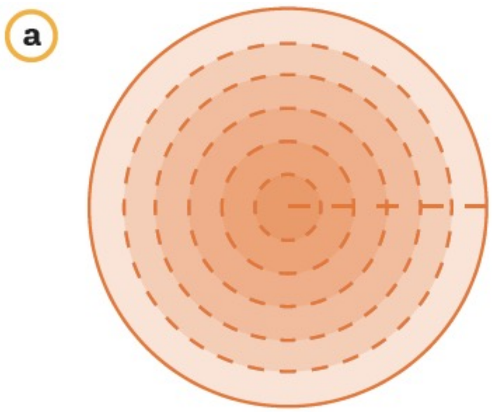


Figura 2.18: Descomposición de un círculo en tiras.

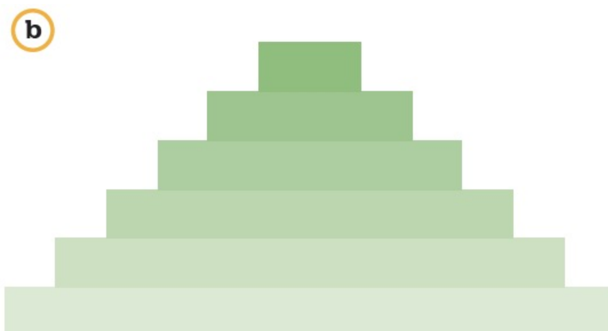


Figura 2.19: Arreglo de las tiras.

a) Tracen un círculo en una hoja de papel y cúbranlo con plastilina.

b) Dividan el radio del círculo en seis partes iguales y corten el círculo mayor en seis círculos más pequeños.

c) Dibujen un radio y corten los círculos en ese segmento (figura 2.18).

d) Con cuidado, separen cada tira y extiéndanla. Acomódenlas una junto a otra, de la más larga a la más corta, como se muestra en la figura 2.19.

e) ¿A qué figura se asemeja el acomodo?

f) ¿Cómo obtienen el área aproximada del acomodo? Expliquen.

g) Si aumentan el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué sucede con el acomodo? Expliquen.

h) Si aumentan infinitamente el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué figura es el acomodo? Expliquen.

i) En este caso, ¿a qué elemento del triángulo corresponde el radio r del círculo? ¿Y el perímetro P?

j) ¿De qué manera se obtiene el área A del acomodo resultante en función del radio r y el perímetro P?

k) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo.

l) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de las actividades anteriores? Expliquen.

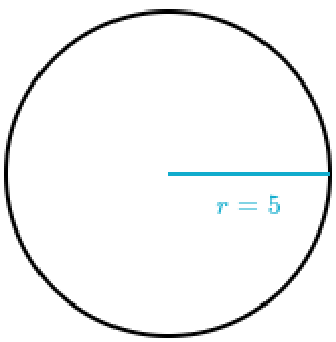
El área de un círculo es la cantidad de espacio que abarca. También podemos pensarla como la cantidad total de espacio dentro del círculo. Para encontrar el área de un círculo podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$A = \pi r^2$$

Problemas de cálculo de área del círculo

Apliquemos lo aprendido respecto al cálculo del área de un círculo.

6. Encuentra el área de un círculo de radio 5.



Si $r = 5u$ La ecuación para el área de un círculo es:

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi (5u)^2$$
$$A = \pi 5^2 u^2$$
$$A = \pi 25 u^2$$

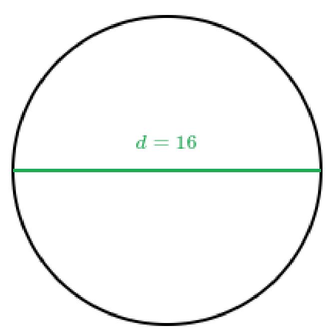
Podemos detenernos aquí y escribir la respuesta como 25π. O bien, podemos sustituir 3.14 por π y multiplicar.

$$A = 25\pi u^2$$
$$A = 25(3.14)u^2$$
$$A = 78.5u^2$$

El área del círculo es 25π unidades cuadradas, o sea 78.5 unidades cuadradas.

7. Encuentra el área de un círculo de diámetro 16.
rimero encontremos el radio:

$$r = \frac{d}{2}$$
$$r = \frac{16u}{2}$$
$$r = 8u$$



Ahora podemos encontrar el área.
La ecuación para el área de un círculo es:

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi (8u)^2$$
$$A = \pi 8^2 u^2$$
$$A = 64\pi u^2$$

Podemos detenernos aquí y escribir la respuesta como 64π. O bien, podemos sustituir 3.14 por π y multiplicar.

$$A = 64\pi u^2$$
$$A = 64(3.14)u^2$$
$$A = 200.96u^2$$

El área del círculo es 64π unidades cuadradas, o sea 200.96 unidades cuadradas.

8. Mónica adquirió una alfombra circular cuyo radio mide 1.2 m. Si el espacio en el que planeó colocarla es un cuadrado de 4.8 m^2, ¿cabrá la alfombra? ¿Cuántos metros cuadrados faltan o sobran?

9. Se fabricará una ventana de forma circular con un marco de acero inoxidable y vidrio templado. El grosor del cancel es de 1 cm y el radio de la ventana de 30 cm. El precio del acero es de \$1,200.00 el metro y el del vidrio es de \$1,600.00 por metro cuadrado.

   a) ¿Cuántos metros de marco se ocuparán?
   b) ¿Cuántos metros cuadrados de vidrio se ocuparán?
   c) ¿Cuál es el precio total de la ventana?

10. Miguel es plomero y sabe que la cantidad de agua que puede abastecer una tubería depende del área transversal del tubo. También sabe que los tubos se clasifican y se piden según la medida de su diámetro, dada principalmente en pulgadas.

Diámetro (in)	Área transversal (in^2)
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{4}$	
1	
$1\frac{1}{2}$	
2	
3	
4	

Tabla 2.18: Algunas medidas de tubos.

   a) Completa la tabla 2.18 con las principales medidas de diámetro de los tubos.
   b) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de $\frac{1}{2}$ in que una de $\frac{1}{4}$ in.
   c) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de 3 in que de una de $\frac{3}{4}$ in?
   d) ¿Cuántas tuberías de 1 in son necesarias para distribuir la misma cantidad de agua que una tubería de 4 in?

11. Calcula el área sombreada de las figuras 2.20a y 2.20b.

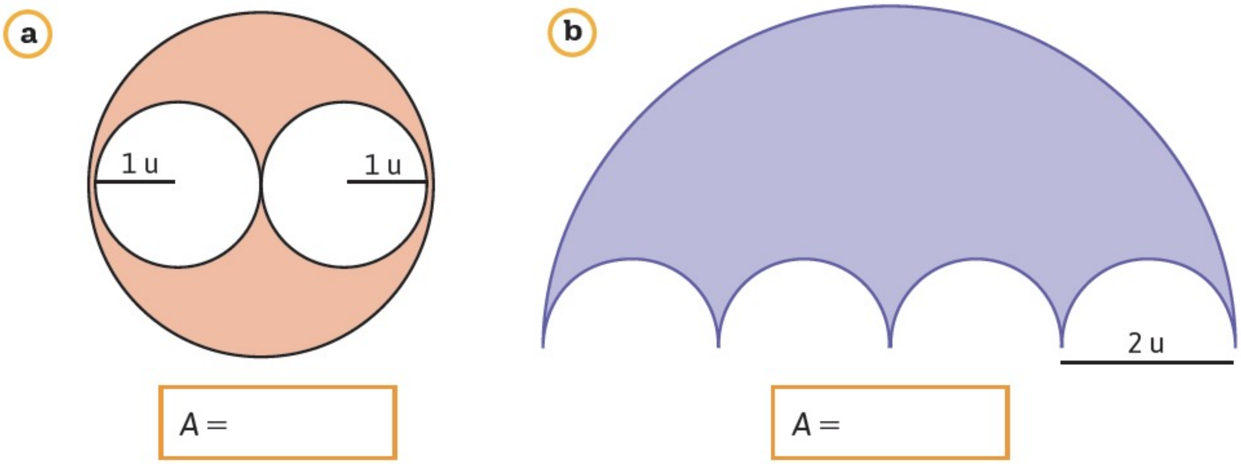


Figura 2.20: Secciones sombreadas de círculos.

12. Observa el esquema de una cancha de basquetbol de la figura 2.21. Nota que las medidas están en pulgadas y pies. Calcula el área de una de las regiones de tiros de falta (foul) formada por un rectángulo y un semicírculo. Determina las áreas de los círculos centrales. Calcula el área de las dos regiones de tres puntos.

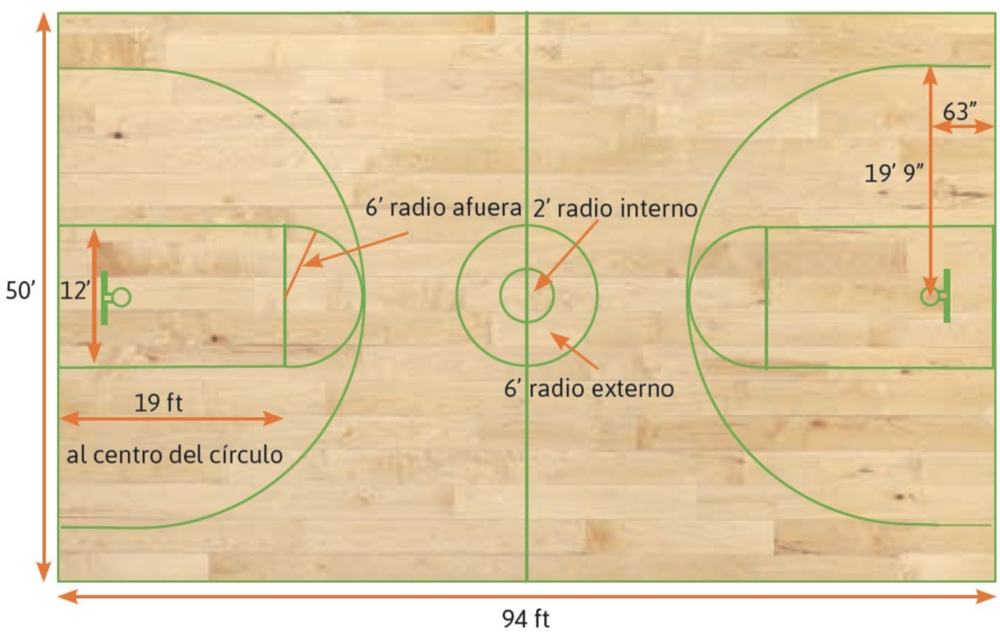


Figura 2.21: Cancha de basquetbol con medidas.

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En 2009, la Secretaría de Turismo de la Ciudad de México entregó un certificado de récord Guinness al restaurante giratorio más grande del mundo que se encuentra en la torre del World Trade Center (WTC) de la Ciudad de México. El restaurante cuenta con una parte giratoria de 1,044 m^2, que es el área exterior donde se encuentran las mesas, la cual da una vuelta completa en una hora con cuarenta y cinco minutos; el resto del restaurante, es decir, la parte central, permanece fija. El diámetro total del restaurante es de aproximadamente 46 m.

a) ¿Cual es el área total del restaurante?

b) ¿Qué radio tiene la zona central?

c) ¿Qué ancho tiene la corona que corresponde a la zona giratoria?

d) Describe los procedimientos realizados en cada caso.