b) Si el número de vitroleros aumenta al doble, ¿cómo se incrementa el número de cucharadas? ¿Y si aumenta al triple?

c) Explica en tu cuaderno, cómo determinarías el número de cucharadas a partir del número de vitroleros.

3. Durante el Renacimiento, el estudio de la anatomía humana tuvo gran auge. Uno de los trabajos más conocidos es *El hombre de Vitrubio* (ver figura 2.1) de Leonardo da Vinci. Una de las proporciones más interesantes en esta obra es la relación entre la estatura de la figura y la distancia entre el ombligo y la base de los pies.

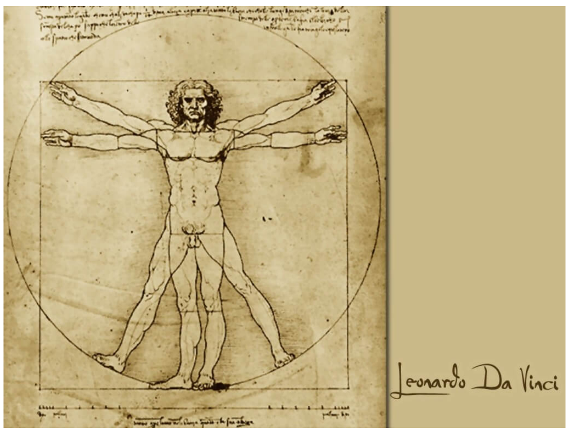


Figura 2.1: Obra de Leonardo Da Vinci, titulada *El hombre de Vitrubio*

Dos magnitudes tienen una relación de proporcionalidad directa si al aumentar o disminuir una la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma proporción. En este caso, al calcular la razón entre un valor de la primera magnitud y su correspondiente de la otra magnitud, siempre obtendremos un número constante. Si en una relación de proporcionalidad directa se desconoce un valor, se dice que se trata de un problema de valor faltante.

En *El hombre de Vitrubio* se dice que la razón de su estatura respecto a la distancia del ombligo a los pies es perfecta y su valor es un número decimal no periódico e infinito: 1.61803... llamado *proporción aúrea* (que redondeamos a 1.62).

Estatura (metros)	Distancia del ombligo a los pies (metros)	Razón entre la estatura y la distancia del ombligo a los pies (trunca a dos decimales)
1.62	1	
1.70	1.05	
1.85	1.14	
1.94	1.2	

a) Completa la tabla que relaciona la estatura de cuatro personas y la distancia de su ombligo a sus pies.

b) ¿Qué observas en la última columna?

4. Contesta lo siguiente.

a) ¿Cuál es la estatura de Carlos si la distancia de su ombligo al piso es de 1.10 m?

b) Si la estatura de María es 1.49 m, ¿Cuál es la distancia de su ombligo al piso?

c) ¿Qué operaciones hicieron para resolver estos problemas?

Si la razón entre dos datos correpondientes de dos conjuntos es siempre la misma, se dice que ese valor es una **constante de proporcionalidad**. En una relación de proporcionalidad directa al multiplicar los datos del segundo conjunto por la constante de proporcionalidad se obtienen los datos correspondientes del primer conjunto, y viceversa, multiplicando por el **inverso multiplicativo** de esa constante.

Inverso multiplicativo. El inverso multiplicativo de un número es aquel que al multiplicarlo por el primero da como resultado 1. Así, el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$, porque $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

Cierre

Regresa al problema inicial, identifica una relación de proporcionalidad directa y calcula la constante de proporcionalidad. Revisa tus respuestas a los incisos *a* y *b* y valida el procedimiento del inciso *c*.

L2. Proporcionalidad y valor unitario

Inicio

Manolo y Sebastián compraron una bolsa con 100 canicas como la que se muestra en la figura, por \$80.00. Manolo aportó \$32.00 y Sebastián completó el pago.

1. ¿Cuánto pagó Sebastián?
2. ¿Te parece justo que, al repartirlas, cada uno tenga 50 canicas? ¿Por qué?
3. ¿Cuántas canicas debería recibir cada uno de acuerdo con lo que aportaron?
4. Explica cómo decidiste repartir las canicas entre Manolo y Sebastián, y por qué consideras que de esa manera el reparto es justo.

1. En un día soleado los objetos forman sombras y, a la misma hora, la altura y la sombra de diferentes objetos es proporcional.

Altura (m)	Sombra (m)	Constante de proporcionalidad
12	9	$\frac{12}{9} = \frac{}{3}$
	3	
8	6	
6		
	15	

Tabla 2.2

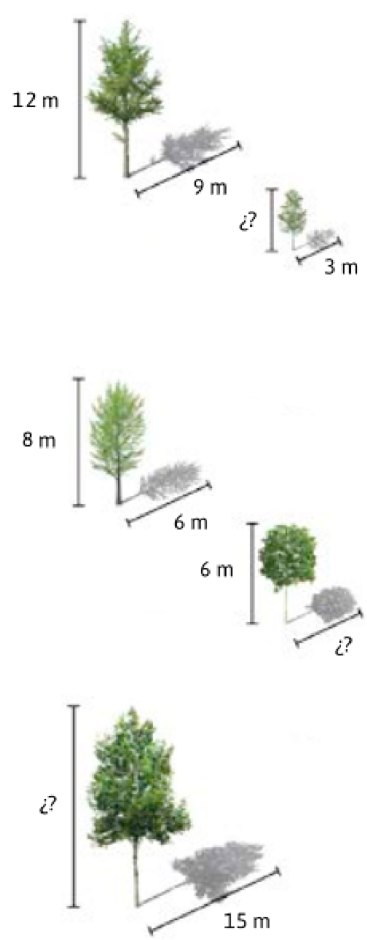


Figura 2.2

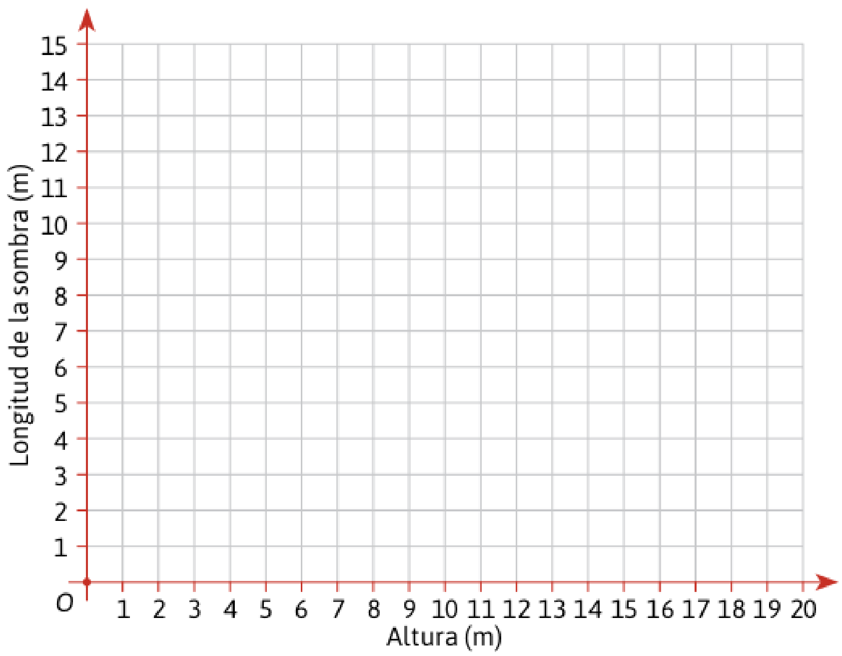
a) Con la información de la figura completa la tabla 2.2.

b) ¿Cómo son los números de la última columna?

c) Si la sombra de un árbol mide 7.5 m, ¿cómo calcularías su altura? Explica.

d) En primaria aprendiste a ubicar puntos en el plano cartesiano por medio de coordenadas. Ubica los puntos cuyas coordenadas corresponden a la altura y sombra de los árboles

e) La gráfica representa la relación entre la sombra y la altura de un árbol. Unan los puntos que marcaron. ¿Qué observan?



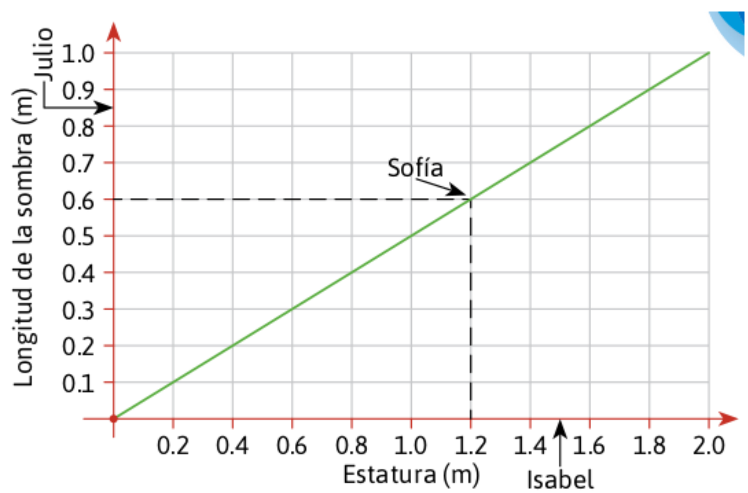


Figura 2.3

2. La gráfica representa la relación entre la estatura de Sofía, Isabel y Julio y sus correspondientes sombras a las cuatro de la tarde de un día soleado. Obsérvenla y contesten.

   a) Sofía mide 1.20 m y su sombra, 0.60 m. Si la estatura de Isabel es 1.50 m, ¿cuánto mide la longitud de su sombra?

   b) La sombra de Julio tiene una longitud de 0.85 m. ¿Cuál es su estatura?

   c) Si Efrén, un amigo de Sofía, mide 1.84 m, ¿cuánto mediría su sombra?

   d) ¿Cuánto vale la constante de proporcionalidad entre la estatura de las personas y la longitud de su sombra?

   e) ¿Cuánto mide la sombra de un objeto cuya altura es de 1 m?

f) Compara los resultados con los de tus compañeros y juntos describan cómo usar la gráfica para obtener uno de los datos a partir del otro.

> Si dos o más razones tienen el mismo valor, entonces son **proporcionales**. El valor de esa razón corresponde a la **constante de proporcionalidad**.

3. Marca en la casilla las razones que forman una proporción.

☐ $\frac{3}{4}$ y $\frac{21}{28}$ ☐ $\frac{32}{5}$ y $\frac{96}{15}$ ☐ $\frac{33}{42}$ y $\frac{17}{21}$ ☐ $\frac{4}{5}$ y $\frac{9}{12}$ ☐ $\frac{1}{11}$ y $\frac{3}{30}$

4. La distancia que recorre un automóvil es proporcional al consumo de gasolina. Un automóvil recorre 180 km y gasta 12 L de gasolina.

   a) ¿Cuántos kilómetros recorre con un litro?

   b) ¿Cuántos litros necesita para recorrer 480 km?

   c) ¿Cuál es el valor, en kilómetros, de la constante de proporcionalidad de la distancia recorrida, por cada litro de gasolina consumido?

> En una relación de proporcionalidad el valor unitario es el valor de una de las magnitudes cuando el de la magnitud correspondiente es igual a 1; por ejemplo, los kilómetros que recorre un automóvil con 1 L de gasolina o el precio de un libro. El valor unitario es numéricamente igual a la constante de proporcionalidad.

Cierre

1. A partir de lo que aprendiste en esta lección resuelve nuevamente el problema inicial. Verifica tus respuestas previas y compara tus procedimientos anteriores con los que aprendiste. ¿Ambos fueron correctos? ¿Cuál te parece más adecuado? ¿Por qué?

2. Un tubo de 2 m de longitud pesa 16 kg. ¿Cuál será el peso de un tubo del mismo tipo, pero con 3 m de longitud?

L3. Resolución de problemas de proporcionalidad directa

Inicio

A Sofía y Pablo les tomaron una fotografía al lado de un árbol. Sofía sabe que su estatura es de 1.20 m y al medir con una regla su altura en la foto obtuvo 4 cm.

1. ¿Cómo obtendrías la estatura real de Pablo y la altura del árbol con base en la foto?
2. Si en la fotografía el árbol mide 10 cm, ¿cuál es su altura?
3. Si la altura real de Pablo es de 1.50 m, ¿cuánto mide su imagen en la fotografía?
4. Escribe en tu cuaderno el procedimiento que seguiste.
5. Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros. Argumenten la validez de los mis

1. Las medidas de una plaqueta electrónica para teclado son de 32 cm por 24 cm. Si en una computadora se instalara una plaqueta, sin reducirla, el teclado mediría 112 cm por 336 cm en vez de 14 cm por 42 cm que es lo usual.
   a) ¿De qué tamaño deberán ser las plaquetas electrónicas para un teclado de tamaño común?
   b) ¿Cuánto se debe reducir la plaqueta grande para que sea del tamaño de una usual?
   c) Explica cómo obtuviste la respuesta, compara tu método con el de un compañero y expongan al resto del grupo el método que les parezca más adecuado.
2. La junta directiva de la secundaria Lázaro Cárdenas decidió que en las bibliotecas de aula haya 3 libros por cada cuatro alumnos.
   a) Si en el salón de Edna hay 44 alumnos, ¿cuántos libros debe haber?
   b) Explica cómo determinaste el número de libros.
   c) Completa la siguiente tabla.

Número de libros	3					
Número de alumnos	4	8	20	28	40	44

Figura 2.4

   d) Escribe la constante de proporcionalidad que relacione el número de libros y el número de alumnos.
3. Una tortuga avanza 48 cm en 12 segundos.
   a) ¿Qué distancia recorrerá en un minuto si camina con la misma rapidez?
   b) Completa la siguiente tabla que Eduardo hizo para resolver el problem

Distancia	48	
Tiempo	12	1

Figura 2.5

c) Eduardo escribió 4 en la casilla vacía, pero considera que está mal porque no es posible que la tortuga en 1 min recorra menos distancia que en 12 s. ¿En qué consiste su error?

d) En tu cuaderno elabora una tabla como la de Eduardo, en el reglón de tiempo incluye: una hora, un día y una semana. Escribe las distancias correspondientes y comparte tus respuestas con el resto del grupo. Retoma la pregunta anterior y explica en qué consistió el error de Eduardo.

4. Si 4 toronjas se venden en 25 pesos, ¿cuánto cuestan 6 toronjas?

a) Completa la tabla con el valor que falta (valor faltante).

Toronjas	4	6
Precio (pesos)	25	

Tabla 2.3

b) Explica cómo obtuviste la respuesta.

c) Completa la proporción a partir de los datos del problema y calcula el valor faltante.

$$\frac{25}{4} = \frac{\_}{6}$$

d) ¿El valor faltante que propusiste en la tabla valida la igualdad anterior? Explica.

5. Sofía leyó 25 páginas de un libro en 40 min. ¿Cuántas páginas leerá en 80 min si continua leyendo al mismo ritmo?

a) Escribe una proporción con un valor faltante para determinar cuántas páginas leerá en 65 minutos.

$$- = -$$

b) Encuentra el valor faltante de la proporción anterior y verifica que se conserva la igualdad de las razones.

c) ¿Cuánto se consume la vela cada minuto?

d) ¿En cuánto tiempo se consume 1 cm de vela?

e) Completa la tabla.

Tiempo (min)			1	12	5	
Longitud consumida (cm)	0.5	1		2.5		30

Tabla 2.4

6. Un avión Boeing 747 mide 77 m de largo por 63 de ancho (esta medida indica la longitud de las alas de un extremo al otro). Un modelo a escala mide 44 cm de largo.

a) ¿Cuál es el ancho del modelo a escala?

b) Explica tu procedimiento para resolver el problema.

c) ¿Cuánto debe medir la altura de una ventana en el modelo a escala si en el avión real es de 0.7 m?

d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad del modelo real al modelo a escala? En este caso la constante recibe el nombre de *escala del modelo*.

7. Una receta para hacer dulce de membrillo indica que la cantidad de fruta debe ser una vez y media la cantidad de azúcar. Contesta.

a) Si se usan 2 kg de membrillo, ¿cuántos kilogramos de azúcar se necesitan?

b) ¿Y si se usan 5 kg de membrillo?

c) Completa la tabla e indica la constante de proporcionalidad que relaciona la cantidad de membrillo y la cantidad de azúcar.

Membrillo (kg)	1	2		10	15
Azúcar (kg)			6		

Tabla 2.5

d) Si la cantidad de membrillo aumenta ocho veces, ¿cuánto aumentará la cantidad de azúcar?

e) Si la cantidad de membrillo disminuye a la mitad, ¿cómo cambiará la cantidad de azúcar?

8. Un tren tarda 40 min en recorrer 130 km. ¿Cuánto tardará en recorrer 195 km si mantiene la misma rapidez? Explica tu procedimiento.

9. Al medir el ritmo cardiaco de un paciente, durante 5 s el médico le dijo: *su pulso está bien, usted tiene 72 pulsaciones por minuto*.

a) ¿Qué cálculo piensas que hizo el médico para saber el número de pulsaciones por minuto si sólo tomó el pulso por 5 segundos?

10. Para hacer mermelada de fresa se necesitan 3 kg de fresas frescas por cada 2 kg de azúcar. Karol sólo tiene 2.5 kg de fresas. Contesta.

a) ¿Cuánta azúcar debe utilizar para que el sabor de la mermelada sea el mismo que el de la receta original?

b) Explica el procedimiento que seguiste para resolver el problema.

c) Si Antonio tiene 3.6 kg de azúcar, ¿cuántos kilogramos de fresas necesita si quiere emplear toda la azúcar?

d) Explica tu procedimiento para resolver el problema.

e) Alejandro cuenta con $\frac{3}{4}$ kg de fresas. ¿Cuántos kilogramos de azúcar debe emplear?

11. Una bomba mueve 300 L de agua por hora. ¿Cuánto tardará en llenar un depósito de 3 200 litros?

12. Una compañía envasadora necesita comprar una máquina que lave al menos 900 botellas en 1 hora.

a) El vendedor les muestra una máquina que lava 60 botellas en 5 min. ¿Esta máquina cumple con los requerimientos de la compañía? ¿Por qué?

b) El instructivo de otra máquina muestra la gráfica de la figura 2.6. ¿Esta máquina cumple las necesidades de la compañía? ¿Por qué?

c) ¿Cuál de las dos máquinas lava más botellas por unidad de tiempo?

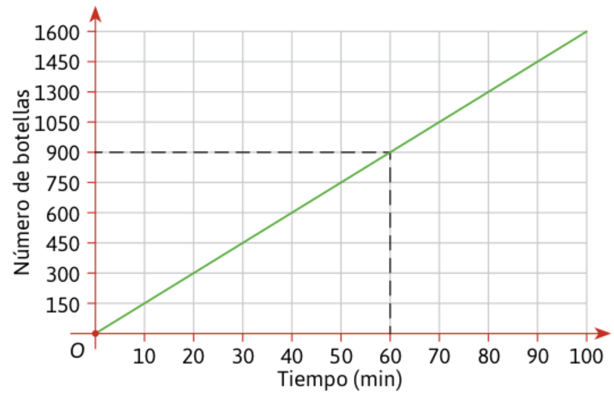


Figura 2.6

Cierre

1. Retoma el problema de la sección Inicio y verifica tus respuestas.

   a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que relaciona las medidas de los objetos reales con los de la fotografía?

2. ¿Cómo verificarías sin dividir la proporción $\frac{7.5}{1.5} = \frac{15}{3}$?

3. Encuentra el valor faltante en las siguientes proporciones.

(a) $\frac{}{25} = \frac{32}{8}$ (b) $\frac{25}{25} = \frac{}{10}$ (c) $\frac{30}{} = \frac{54}{9}$

¿El perímetro de un cuadrado es proporcional a las medidas de sus lados? Explica.
Si las medidas de un rectángulo se duplican, ¿el área del nuevo rectángulo también se duplica respecto al inicial? Justifica tu respuesta.

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas de cálculo de porcentajes, de tanto por ciento y de la cantidad base.

L1. Tanto por ciento

Inicio

1. El grupo 1º C ha organizado una competencia para elegir al equipo que los representará en el torneo de tiros libres de basquetbol de la escuela. Cada equipo está formado por cuatro alumnos y cada uno debe realizar un número distinto de lanzamientos a la canasta: uno debe hacer 20, otro 10, otro 5 y otro 4. Ganará el equipo que enceste más veces. En un equipo están Pablo, Sofía, Alfonso y Nayhelli, quienes en los entrenamientos tuvieron el desempeño que muestra la tabla.

Nombre	Lanzamientos	Encestados
Pablo	20	13
Sofía	10	7
Alfonso	5	3
Nayhelli	4	3

Figura 2.7

a) ¿Quién es el mejor encestador? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos lanzamientos le asignarías a cada uno para obtener el mejor resultado en la competencia?

c) Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Respecto a esos cuatro alumnos, ¿cómo decidieron quién es el mejor y el peor encestador? ¿Con qué criterios asignaron el número de lanzamientos a cada uno? Argumenten sus respuestas.

1. En la Academia de Policía evaluaron la condición física de los cadetes.

a) Marca las afirmaciones equivalentes.

☐ Tres quintas partes tuvo excelentes resultados.
☐ Veinte de cada veinticinco cadetes tuvieron excelentes resultados.
☐ De cada cinco alumnos, cuatro lograron excelentes resultados.
☐ De cien cadetes, ochenta tuvieron excelentes resultados.
☐ Ocho de cada diez lograron excelentes resultados.

b) Compara tus respuestas con las de tus compañeros y explíquenlas.

c) Expresa en cada caso el número de cadetes con buenos resultados como una fracción con denominador 100. ¿Qué observas?

> Por ciento significa *por cada cien* y se refiere a la razón entre una cantidad dada y un total de 100 elementos; también se llama tanto por ciento, esto es, *una cantidad por cada cien*. Se usa el símbolo % para indicar un tanto por ciento: 27 de cada 100 se expresa como 27 o 27 %.

2. Completa la tabla 2.8.

Expresión	Fracción con denominador 100	Expansión decimal	Tanto por ciento
28 de cada 50			
		0.07	
		2.31	
28 de cada doscientos			
14 de cada 25			

Figura 2.8

a) En su cuaderno escriban qué relación hay entre la expansión decimal y el tanto por ciento.

3. Escribe el tanto por ciento que representa la parte sombreada de las figuras o coloreen el porcentaje que corresponde.

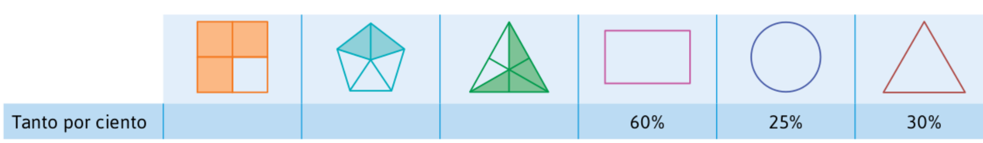


Figura 2.9

> Para convertir un decimal en tanto por ciento, se multiplica el decimal por 100 y se agrega el signo %.

Cierre

1. Retoma la actividad de la situación inicial y determina el porcentaje de encestes con respecto a los lanzamientos de cada alumno.
   a) Resuelve nuevamente el inciso b. Explica cómo llegaste a esa conclusión.
   b) ¿Tus resultados iniciales fueron correctos? Justifica tus respuestas.
2. El promedio de bateo se determina como la razón del número de hits que logra un jugador de beisbol entre la cantidad de turnos al bat.
   a) El legendario jugador de beisbol Babe Ruth de los Yanquis de Nueva York tuvo un promedio de bateo de 0.34. ¿Qué significa ese número en porcentaje?
   b) Adrián *el titán* González, bateador mexicano de los Dodgers de Los Ángeles, tiene promedio de bateo de 0.29. ¿Quién es mejor bateador? Explica.

L2. Cálculo del porcentaje

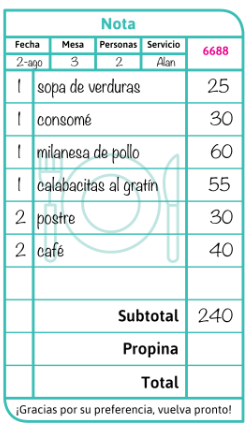
Inicio

1. Observa los anuncios.

   a) Cuál es la mejor oferta si todas las llantas son del mismo tipo y marca?

   b) Compara tu respuesta con la de tus compañeros y argumenten por qué su elección es la mejor.

1. Observa la nota del consumo del restaurante de la figura 2.10 y contesten.



Nota				
Fecha	Mesa	Personas	Servicio	6688
2-ago	3	2	Alan	
1	sopa de verduras			25
1	consomé			30
1	milanesa de pollo			60
1	calabacitas al gratín			55
2	postre			30
2	café			40
	Subtotal			240
	Propina			
	Total			
¡Gracias por su preferencia, vuelva pronto!				

Figura 2.10

   a) Como propina, los comensales quieren dejar 10 % del precio de su consumo. ¿Qué cantidad deben anotar en la nota?

   b) Y si la cuenta fuera de \$534.00, ¿cuánto sería de propina?

   c) Escriban un procedimiento para obtener el 10 % de una cantidad.

   d) Comparen sus procedimientos con los del grupo. ¿Son iguales o diferentes? ¿Todos son correctos? Argumenten sus respuestas y valídenlas en grupo.

Cuando a una cantidad se aplica el tanto por ciento se involucran tres datos: el tanto por ciento o **tasa**, la cantidad a la que se le aplica esa tasa (**cantidad base**) y el resultado (**porcentaje**).

2. Calcula los porcentajes.

   a) Obten el 10 % de las siguientes cantidades.

   (a) 25 ________ (b) 36.8 ________ (c) 2445.9 ________ (d) 66 ________

   b) Obten el 5 %.

   (a) 25 ________ (b) 36.8 ________ (c) 2445.9 ________ (d) 66 ________

c) Calcula el 20 %.

(a) 25 ________ (b) 36.8 ________ (c) 2445.9 ________ (d) 66 ________

d) ¿Qué procedimiento seguiste para obtener los resultados? Explícalo al resto del grupo y valídenlos.

e) Explica cómo calcular mentalmente el 1 % de cualquier cantidad.

3. Calcula el 1 % de las siguientes cantidades.

(a) 115.1 ________ (b) 780 ________ (c) 300 ________ (d) 66.6 ________

4. Calcula los porcentajes de las cantidades de la tabla 2.11.

Cantidad base	11%	20%	5%	52%
245			12.25	
123				
4 562				
24				

Figura 2.11

5. Realiza los siguientes ejercicios.

a) Calculen el 35 % de 240 pesos.

b) Escriban 35 % como una fracción con denominador 100.

c) Completen la siguiente proporción.

$$\frac{35}{100} = \frac{}{240}$$

d) Comparen su resultado con el inciso a. ¿Qué observan?

e) Expliquen cómo calcular el porcentaje de una cantidad dada la tasa. Compartan sus propuestas en grupo y propongan ejercicios para aplicarlas. Verifiquen los resultados y utilícenlos como validación de sus procedimientos.

6. Analiza la afirmación del recuadro.

> Para calcular el porcentaje de una cantidad basta multiplicar la cantidad base por la tasa y dividir entre 100.

a) ¿Es correcta? ¿Por qué?

Cierre

1. Retoma la actividad de la situación inicial y según lo que aprendiste en la lección determina cuál es la oferta más económica. Observa que el hecho de anunciar un gran descuento no significa forzosamente un precio más barato.

2. En una tienda anuncian un 20 % de descuento en todos sus productos. Observa la computadora.

   a) ¿Cuál es su precio después de la rebaja? ¿Cómo obtuviste ese resultado?

   b) Calcula el 80 % del precio de la computadora y compara tu resultado con el del inciso a. ¿Qué observas?

   c) ¿Cómo calcularías el precio con descuento de una televisión que cuesta $2 340.00? Indica su precio final.

   d) Compara tus resultados y procedimientos con los de tus compañeros y valídenlos con ayuda de su profesor.

L3. Porcentajes y aplicaciones

Inicio

1. El entrenador de un equipo de beisbol debe comprar guantes y bates para todo el equipo. Revisa las ofertas de las tiendas El guante de oro y El bateador.

Figura 2.12

a) ¿En qué tienda el guante tiene mayor descuento en pesos?
b) ¿En cuál tiene mayor tasa de descuento?
c) ¿En cuál tienda son más baratos los bates?
d) ¿Cuáles bates tienen mayor tasa de descuento?
e) ¿Dónde comprarías tres bates y nueve guantes?
f) ¿Cuánto pagarías y cuánto ahorrarías?
g) Compara tus resultados y tus procedimientos con los de tus compañeros y argumenten por qué piensan que su elección es correcta.

1. La gráfica muestra la composición de una escuela de 2 400 personas.

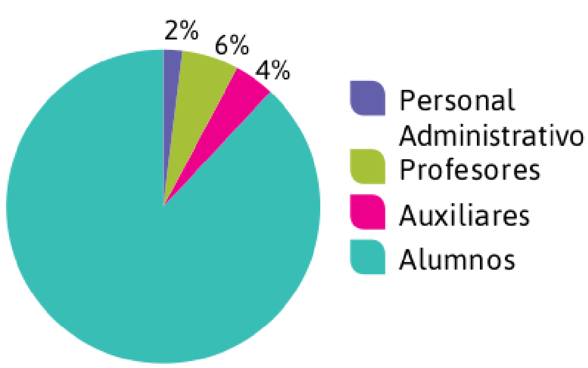


Figura 2.13

a) ¿Cuántas personas trabajan en la administración?

b) ¿Cuántos profesores hay en esa escuela?

c) ¿Cuántas personas son auxiliares?

d) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos?

e) ¿Cuántos alumnos tiene la escuela?

2. Don Lupe es carpintero y comenta que el precio de la madera aumentó 8 %, por lo que piensa cobrar 8 % más en todos los muebles y objetos que fabrique.

Figura 2.14

a) Él considera que cobrando el 108 % del precio original de sus productos estaría cobrando el incremento que pretende. ¿Su razonamiento es correcto? Explica.

b) ¿Cuál sería el nuevo precio de una silla que costaba $250 pesos?

3. En una tienda departamental Constanza compró el juego de sartenes que muestra el anuncio. El precio original era de $348.00 y la cajera le comentó que sobre el precio final debía pagar el 16 % de IVA. Constanza sugirió pagar primero el IVA y después aplicar el descuento para, de esa manera, pagar menos.

Figura 2.15

a) ¿El razonamiento de Constanza es correcto? Explica.

b) Compartan sus respuestas en grupo. ¿Creen que es mejor primero cobrar el IVA y luego hacer el descuento o al revés? ¿Por qué?

4. Resuelve los siguientes problemas.

   a) En la papelería La goma todos los precios incluyen IVA. Si el impuesto (16 %) que se paga por los colores es de $4.00, ¿cuál es su precio sin IVA?

   b) En la misma papelería el papel para dibujo está en oferta. Si al precio, $165.00, se le descuentan $24.75, ¿de cuánto es la tasa de descuento?

   c) ¿Cómo obtuvieron el resultado de cada uno de los incisos anteriores? Expliquen sus procedimientos ante el grupo y entre todos propongan procedimientos para calcular la cantidad base dadas la tasa y el porcentaje, y para obtener la tasa, dadas la cantidad base y el porcentaje.

Cierre

Retoma la actividad de la situación inicial y determina dónde es más conveniente comprar cada artículo deportivo. ¿Cuánto se ahorraría? ¿Coinciden tus respuestas con las que obtuviste al inicio? Valídalas con el resto del grupo

Como en la mercería *El resguardo* están reetiquetando toda la mercancía, el gerente indica que el precio en la etiqueta debe incluir un descuento de 5 % y el 16 % del IVA . Una empleada piensa que basta con aumentar los precios un 11 %. ¿Su razonamiento es correcto? Justifica tu respuesta con ejemplos.

Aprendizajes esperados:

Calcula el perímetro de polígonos y del círculo, y áreas de triángulos y cuadriláteros desarrollando y aplicando fórmulas.

L1. Perímetro de polígonos

Inicio

1. Pablo necesita varios trozos de cordón para amarrar paquetes como el de la figura A y debe considerar, además, 80 cm para el moño.

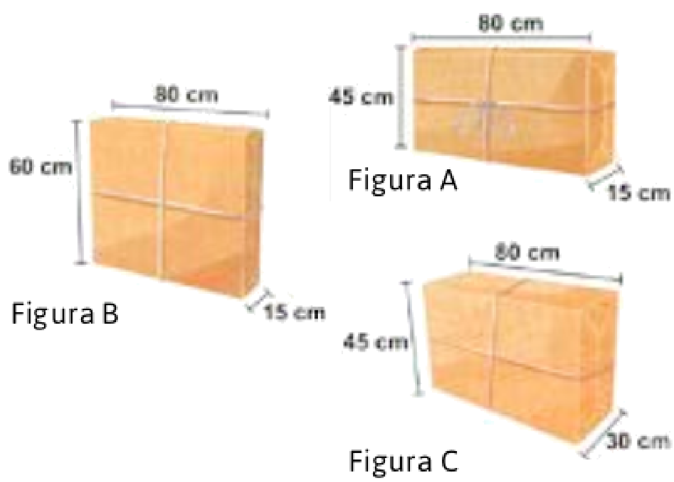


Figura 2.16

a) ¿Qué cantidad de cordón ocupará Pablo?

b) El paquete de la figura B es 15 cm más alto que el de la figura A. ¿Cuánto cordón más, del que ocupó en el primero, necesita Pablo para amarrarlo?

c) El paquete de la figura C es 15 cm más ancho que el de la figura A. ¿Cuánto cordón más, del que ocupó en el primero, necesita para amarrarlo?

d) En parejas justifiquen por qué el empaque de la figura C requiere más cordón que el de la figura B, aun cuando en ambos casos sólo una de las dimensiones se incrementa en 15 cm.

Perímetro y expresiones algebraicas

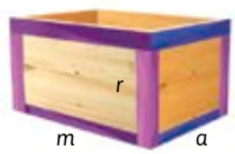


Figura 2.17

1. Sofía compró una caja sin tapa como la de la figura 2.17 para guardar fotografías, y quiere decorar las orillas de las caras con tiras de tela de colores: de color rosa a lo alto, moradas a lo largo y azules a lo ancho.

   a) ¿Cuántas tiras de tela ocupará en cada cara de la caja?

   b) ¿Cuántas y de qué color serán las tiras de tela que ocupará?

2. Considera que la caja mide r centímetros de alto, m centímetros de largo y a centímetros de ancho. Completa la tabla, expresa con esas letras el perímetro de una de las caras que se adornarán con las tiras indicadas.

Tiras	Perímetro de una cara
Rosas y moradas	
Rosas y azules	
Azules y moradas	

Figura 2.18

   a) Representen con las expresiones anteriores, el perímetro de todas las caras de la caja.

   b) ¿Cuántas tiras de cada color necesita Sofía para adornar toda la caja?

   c) En grupo compartan sus respuestas y validen cada una de ellas. Expresen con las letras r, m y a el total de tiras necesarias para adornar la caja.

Una **expresión algebraica** es una combinación de literales (letras) para representar cantidades, y coeficientes (números) junto a ellas que indican cuántas veces se multiplica esa cantidad. La letra y el número forman un **término algebraico**.

Los términos algebraicos que tienen las mismas literales se conocen como **términos semejantes**, y se simplifican sumando los coeficientes, por ejemplo,

$$3a + 2a = 5a$$

.

3. Pedro, el hermano de Sofía, compró una caja de igual tamaño, y a partir de la idea de su hermana, optó por adornar con tiras de color azul, tanto el largo como el ancho de la caja y de verde los segmentos verticales.

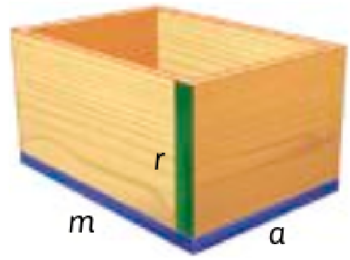


Figura 2.19

a) Expresa algebraicamente la longitud total de la tira azul que se muestra en la figura 2.19.

b) Usa tu respuesta anterior para expresar algebraicamente el total de tela azul que Pedro necesitará para decorar su caja.

c) Expresa algebraicamente el total de tela (azul y verde) que Pedro utilizará para decorar su caja.

d) Compara tu respuesta al inciso anterior con la que diste en el inciso (a de la actividad 2. Escribe tus conclusiones en tu cuaderno.

e) Si las cajas miden 12 cm de ancho, 20 cm de largo y 15 cm de alto, ¿cuánta tela ocuparán Sofía y Pedro?

4. Julián pintará en la pared una flecha, como la que aparece en la figura 2.20. Para no rebasar los bordes colocará cinta adhesiva alrededor como se observa.

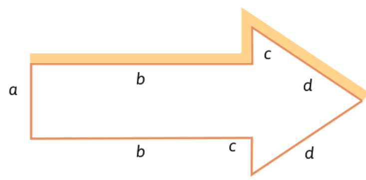


Figura 2.20

a) En equipos expresen algebraicamente la cantidad de cinta adhesiva que ya colocó Julián.

b) ¿Cuántas veces se debe colocar la cantidad $b + c + d$ de cinta alrededor de la flecha?

c) Expresen algebraicamente el total de cinta que Julián colocará alrededor de la flecha.

d) ¿Cuál es el perímetro de la figura 2.20?

Una expresión algebraica cuyos términos tienen el mismo coeficiente es equivalente a un producto cuyos factores son el coeficiente y la expresión formada por las literales de la expresión original. Por ejemplo,

$$2b + 2c + 2d = 2(b + c + d)$$

En las expresiones algebraicas, por simplicidad, para indicar un producto, las literales y los coeficientes se escriben juntos; por ejemplo,

$$4 \times a = 4a$$

También se usan paréntesis:

$$a \times b = (a)(b)$$

5. Juan y Luis necesitan rodear sus terrenos con una reja de alambre para que pasten sus vacas. El terreno de Juan tiene una forma aproximada a la figura 2.21 y todos sus lados miden 22.5 m. El terreno de Luis tiene la forma de la figura 2.22, tres de sus lados miden 22.5 m y los otros dos, 45 m cada uno.

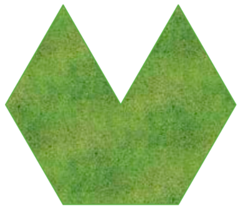


Figura 2.21

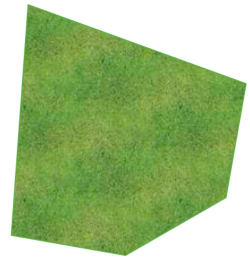


Figura 2.22

a) ¿Cuál es la longitud de la reja que Juan necesita para cercar su terreno?

b) ¿Cuánta reja requiere Luis para cercar el suyo?

c) Comparte tus procedimientos con un compañero. ¿Los consideran correctos? ¿Por qué?

6. En parejas representen algebraicamente la longitud de uno de los lados y el perímetro de todo el terreno de Juan.

   a) ¿Cuál de las longitudes del terreno de Luis será más adecuada para representar con la misma literal de tu respuesta anterior? ¿Por qué?

   b) Representen con una literal distinta la longitud mayor del terreno de Luis y expresen algebraicamente su perímetro.

   c) ¿Qué relación hay entre las longitudes de los lados distintos del terreno de Luis?

   d) A partir de su respuesta anterior, reescriban la expresión para el perímetro del terreno de Luis, pero usando una sola literal.

   e) ¿Cómo son entre sí las expresiones de los incisos b) y d)?

   f) ¿Qué cantidad de reja requieren Juan y Luis para rodear sus terrenos? Calculen a partir de las expresiones algebraicas que propusieron.

> Si dos variables están relacionadas, una de ellas se puede sustituir por la otra dentro de una expresión algebraica. Por ejemplo, si a es igual a $3b$, entonces la expresión $a+b$ es equivalente a $3b+b$, porque sustituimos a por $3b$. Un término algebraico en el que aparecen dos coeficientes se simplifica multiplicando los coeficientes, por ejemplo $3(4a)$ es equivalente a $12a$.

El perímetro de un polígono regular

Una telaraña se forma por una sucesión de hexágonos regulares tales que la longitud de los lados de cada hexágono se incrementa en la misma cantidad con respecto a los lados del hexágono anterior (figura 2.23).

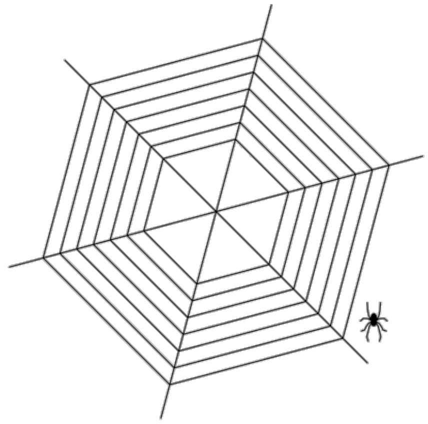


Figura 2.23

a) En parejas escriban una expresión algebraica para representar el perímetro del hexágono más pequeño.

b) Expresen algebraicamente la longitud de un lado del segundo hexágono a partir de la longitud de un lado del primero.

c) Completen la tabla 2.6.

Hexágono	Expresión algebraica de uno de los lados	Expresión algebraica del perímetro
Primero	l	$6l$
Segundo	$l + m$	
Tercero		
Cuarto		
Quinto		
Sexto		
Séptimo		

Tabla 2.6

d) Usa las expresiones anteriores para representar el total de hilo que ha segregado la araña. Simplifica los términos semejantes.

e) Supón que el lado del hexágono menor mide 4.2 mm y el lado de cada hexágono subsecuente se incrementa en 8 mm, ¿cuáles son los perímetros de los diferentes hexágonos? Anótenlos en la tabla 2.7.

Hexágono	Perímetro	Hexágono	Perímetro
Primero		Quinto	
Segundo		Sexto	
Tercero		Séptimo	
Cuarto		Total	

Tabla 2.7

f) Comparen en grupo sus respuestas y procedimientos. ¿Coincidieron los resultados?, ¿por qué? ¿Son iguales las expresiones algebraicas que propusieron? ¿Ocurrió que las expresiones fueran distintas, pero los resultados iguales? Si fue así, justifiquen esa situación; si no, encuentren el error.

g) ¿Qué cantidad de hilo usó la araña para formar los hexágonos?

7. Completa la tabla 2.8.

Polígono regular	Triángulo	Cuadrado	Pentágono		Octágono	Nonágono
Número de lados				6		
Perímetro si el lado mide dos unidades		8				18
Perímetro si el lado mide a unidades				$6a$		

Tabla 2.8

a) Determina una expresión algebraica para el perímetro de un polígono regular de n lados.

> El perímetro de un polígono regular se calcula multiplicando la longitud de un lado por el número de lados de los que está compuesto.

8. Maribel compró una cuerda para forrar las cuatro caras laterales de una caja cúbica de 15 cm de lado. Con esa cuerda pudo rodear 30 veces la caja, pero le faltan por cubrir 5 cm a lo alto. Observa la figura 2.24.

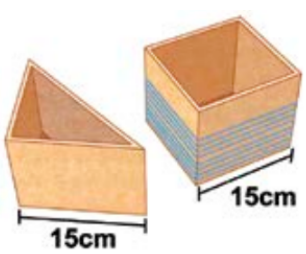


Figura 2.24

a) Maribel tiene otra caja con forma de prisma triangular que también mide 15 cm de lado. En equipos respondan: ¿en este caso sí le alcanzará la cuerda para cubrir por completo la caja? Expliquen.

b) ¿Cuál es el perímetro de la cara inferior de la caja cúbica?

c) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

d) ¿Cuál es el perímetro de la cara inferior de la caja con forma de prisma triangular?

e) ¿Cuál es el perímetro de la cara inferior de la caja con forma de prisma triangular?

f) A partir de sus respuestas a los incisos b), c) y d) escriban una justificación o corrijan sus respuestas al inciso a).

9. Observa en la figura 2.25 que los lados del hexágono regular grande miden el triple que los lados del hexágono regular pequeño. ¿Cuántas veces es más grande el perímetro del hexágono mayor respecto al del hexágono pequeño?

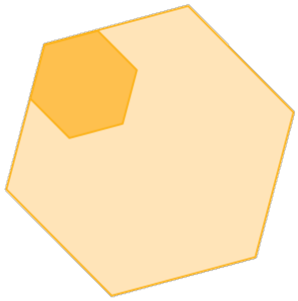


Figura 2.25

a) Escribe una expresión algebraica para el perímetro del hexágono pequeño a partir de la longitud de uno de sus lados.

b) Expresa en términos de la longitud de los lados del hexágono pequeño la longitud de un lado del hexágono grande.

c) Expresa algebraicamente el perímetro del polígono grande en términos de la longitud del hexágono pequeño.

d) Compara tus respuestas y valídenlas con el grupo.

10. Cinco amigos colocan sus toallas de baño sobre la playa formando un gran cuadrado como el de la figura 2.26. Las toallas de Alicia y Beatriz son cuadradas, cada una de 720 cm de perímetro, mientras que las de Carlos, Diana y Emilio son rectangulares e iguales.

Figura 2.26

a) En equipos escriban una expresión algebraica que represente el perímetro de una de las toallas cuadradas si desconocen la longitud de sus lados.

b) ¿Cuál es la longitud de los lados de las toallas de Alicia y Beatriz? Expliquen su procedimiento para obtener la respuesta.

c) Escriban una expresión con las literales de la expresión algebraica del inciso a que represente el perímetro de las toallas rectangulares.

d) Calculen las dimensiones de las toallas rectangulares. Expliquen su procedimiento.

Cierre

1. Regresa a la sección Inicio y considera que las dimensiones de un paquete son l cm de largo, a cm de ancho y h cm de alto.

   a) Escribe una expresión algebraica que represente el total de cordón necesario para amarrar el empaque.

   b) Explica el efecto de incrementar cada una de las dimensiones de la caja en la cantidad de cordón necesario para amarrarla.

2. En la figura 2.27, I, II, III y IV son cuadrados. Si el perímetro del cuadrado I es 16 cm y el del cuadrado II, 24 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrado IV?

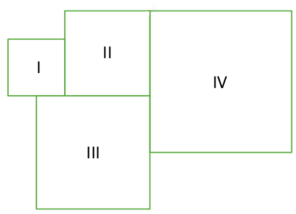


Figura 2.27

3. Dado un rectángulo con base a y altura b, como el de la figura 2.28 escribe tres expresiones algebraicas que representen el perímetro de la figura 2.28.

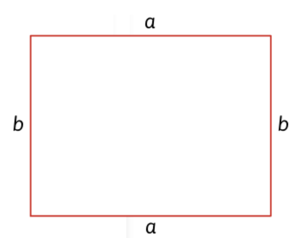


Figura 2.28

4. Dos hormigas van del punto A al punto B (figura 2.29).

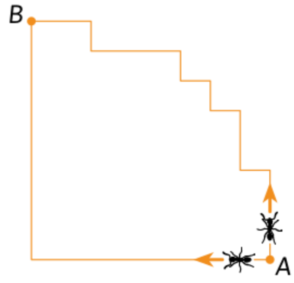


Figura 2.29

   a) ¿Qué hormiga recorre un trayecto más largo? Justifica su respuesta.

L2. Perímetro del círculo

Inicio

1. Ciro tiene un pequeño balón de basquetbol y necesita un aro de alambrón para encestarlo. Su balón mide 38 cm de circunferencia y un buen reto es encestarlo en un aro cuyo radio sea 5 cm más grande que el del balón.

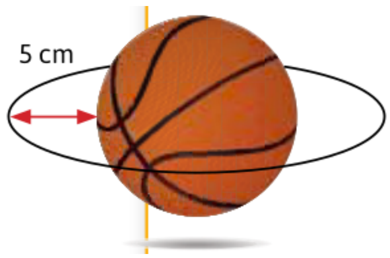


Figura 2.30

   a) ¿Qué cantidad de alambrón necesitará para elaborar su aro? Explica tu respuesta.

1. Para medir el perímetro de figuras cuyo contorno está formado por segmentos rectos se puede usar una regla rígida. Cuando el contorno de una figura es curvo necesitamos recurrir a instrumentos flexibles, como las cintas métricas de los sastres.

   a) En parejas midan el contorno de objetos circulares como los que se mencionan en la primera fila de la tabla. Escriban los datos correspondientes y realicen las operaciones para completar la tabla 2.9.

Objeto	Plato	Vaso	Tasa	Maceta	Disco compacto	Rueda de coche
Longitud de la circunferencia (cm)					37.7	
Longitud del diámetro (cm)					12	
Circunferencia ÷ diámetro					3.14	

Tabla 2.9

   b) Comparte en grupo los resultados de la última fila. ¿Qué observas? Escribe una conclusión.

   c) En una calculadora científica oprime la tecla del símbolo π. ¿Qué valor se muestra? Anótenlo.

   d) Compara ese valor con los que obtuviste en la última fila de la tabla. ¿Qué observas? Escriban una conclusión entre todos.

> Desde la Antigüedad se sabe que en cualquier círculo hay una relación entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro; a saber, la razón entre el perímetro del círculo y la longitud de su diámetro es constante. Este valor se denota con la letra griega π (pi) y es un número decimal infinito no periódico cuyas primeras cifras son 3.14159... Para calcular el perímetro de un círculo, es decir, la longitud de su circunferencia utilizamos la expresión $P = \pi d$, donde d es la longitud del diámetro. ¿Por qué esa expresión es correcta?

2. En la figura 2.31 están inscritos en el círculo un cuadrado, un octágono regular y un polígono regular de 16 lados.

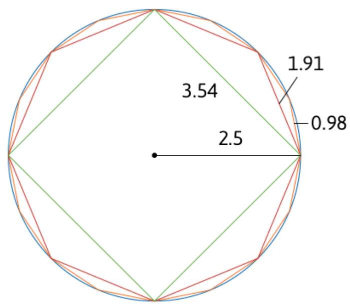


Figura 2.31

   a) Calcula el perímetro de cada uno.

   b) Calcula el perímetro del círculo.

   c) Compara el perímetro de los polígonos con el perímetro del círculo. ¿Qué observas?

   d) Imagina un polígono regular de 32 lados inscrito en el círculo. ¿Cuál consideras que será el valor aproximado de su perímetro? Justifica tu respuesta y compártela con el grupo.

> Medir círculos con precisión es difícil, por eso desde la Antigüedad se propusieron métodos para calcular el perímetro de un círculo. Por ejemplo, Arquímedes, usando polígonos regulares **inscritos y circunscritos** en una circunferencia, obtuvo una muy buena aproximación al número π. Demostró que su valor era un número entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{21}{7}$. ¿Crees que esa aproximación sea correcta?

Polígonos **inscritos y cirncunscritos**. Se dice que una figura esta inscrita en otra si cada uno de los vértices de la primera figura esta sobre el lado respectivo de la segunda figura. En esta misma situación se dice que la segunda figura esta circunscrita en la primera.

3. En una casa de moneda necesitan estuches circulares de plástico para guardar centenarios, una moneda de oro mexicana cuya circunferencia es de 11.62 cm (figura 2.32). ¿Cuál es el radio interior mínimo que deben tener un estuche para guardar este tipo de monedas?

Figura 2.32

4. Una pista de atletismo debe tener dos partes rectas y dos partes formadas por semicírculos. Cada una de las rectas debe medir 100 m de largo, y la longitud de cada semicírculo también debe ser de 100 m (figura 2.33). ¿Cuánto mide el radio de los semicírculos?

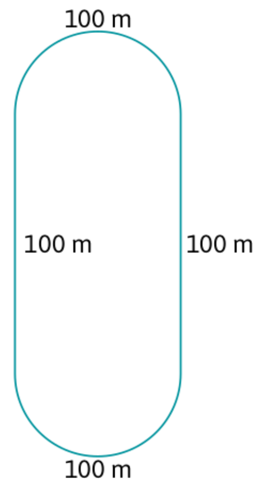


Figura 2.33

Figura 2.34

5. Una rueda de bicicleta está formada por un buje central donde se enganchan los rayos. El otro extremo de los rayos se sujetan a un aro metálico donde se coloca la llanta (figura 2.34). Considera que el diámetro de la llanta es de 71.12 cm.
   a) ¿Qué distancia recorre la bicicleta cuando la llanta da una vuelta completa?
   b) ¿Qué distancia recorre si las llantas dan diez vueltas completas?
   c) ¿Cuántas vueltas deben dar las llantas para recorrer un kilómetro?
   d) Los odómetros de los automóviles son instrumentos que miden la distancia que éste recorre y normalmente están conectados a mecanismos de las llantas. Explica su funcionamiento.

6. Sofía hace un diseño con círculos y semicírculos, como en la figura 2.35, y piensa cubrir las líneas del círculo y de los semicírculos con cordón dorado.
   a) ¿Cuánto cordón necesitará para cubrir la circunferencia más grande?
   b) ¿Y para cubrir los dos semicírculos interiores?
   c) ¿Qué relación hay entre la longitud del círculo y las de los semicírculos? Explica tu respuesta.

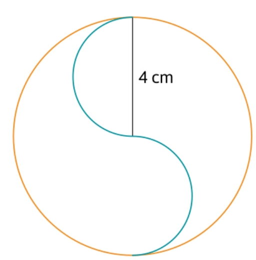


Figura 2.35

7. Un autódromo tiene la forma y las dimensiones que ilustra la figura 2.36.

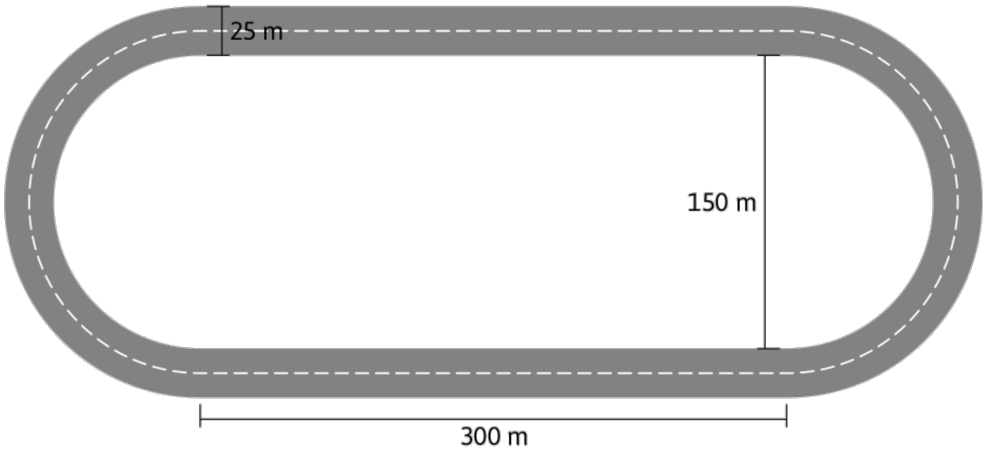


Figura 2.36

a) Calcula la distancia que cubre un auto al recorrer una vez el circuito por el carril interno.

b) Calcula la distancia que se recorre en un auto al conducir una vez por el carril externo.

c) A qué distancia se deben separar dos autos en una carrera de una vuelta para que ambos recorran la misma distancia.

8. Carlos mandó construir una ventana con la forma y las medidas que aparecen en la figura 2.37. ¿Qué longitud de material fue necesario para formar el contorno de la ventana?

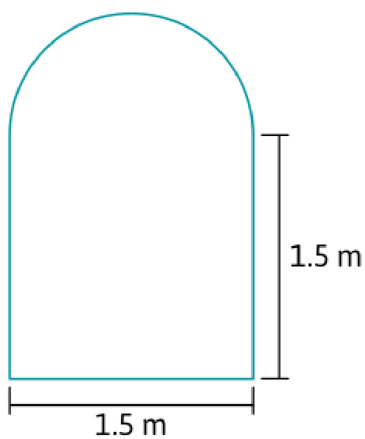


Figura 2.37

9. Se construyó una cancha de basquetbol (figura 2.38) y se quieren pintar todas sus líneas: círculo central, área de foul, línea de tres puntos, etcétera. Calcula la longitud de todas las líneas que se deben pintar.

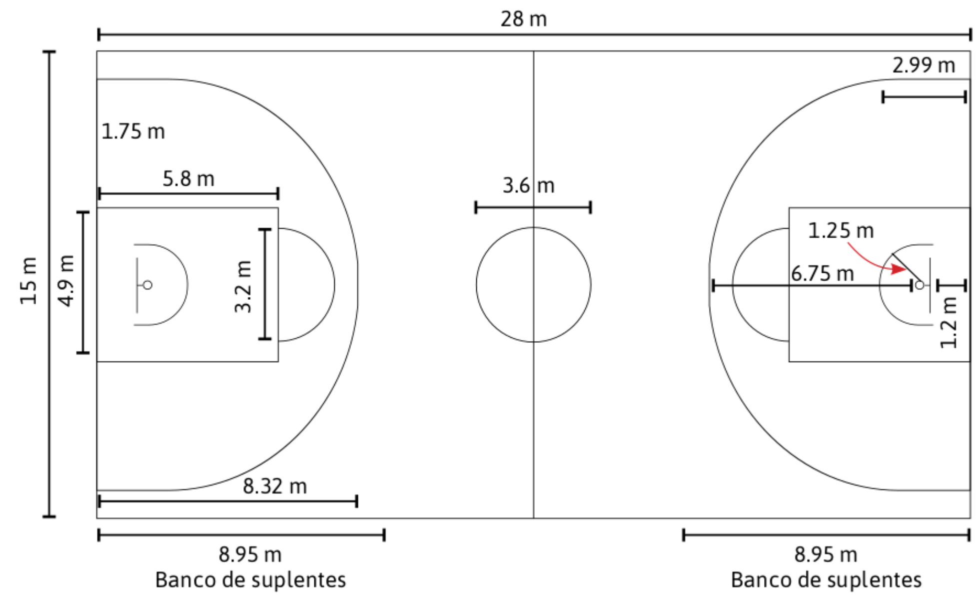


Figura 2.38

10. En equipos compartan y validen sus respuestas a los ejercicios del 3 al 9. Organícense para que cada equipo exponga la solución de un ejercicio al resto del grupo.

Cierre

1. Regresa a la situación de Inicio y determina el diámetro del balón de Ciro.
   a) ¿Cuánto debe medir el diámetro del aro?
   b) ¿Qué tanto alambrón necesita Ciro para el aro?
2. Un avión supersónico dará una vuelta alrededor de la Tierra sobre el ecuador a una altura promedio de 10,000 m. Considera que la circunferencia de la Tierra es de 40,066.4 km.
   a) ¿Qué distancia habrá recorrido el avión al cumplir su objetivo?
3. Las ciudades de Chicago y Estambul están sobre un mismo paralelo de nuestro planeta. Si el radio de la circunferencia que constituye ese paralelo es de 4,000 km:
   a) ¿Qué distancia se debe recorrer sobre la superficie de la Tierra para ir de una ciudad a otra sobre ese paralelo? Considera que los radios del centro de la Tierra hacia las ciudades forman un ángulo de 120°, esto es, la distancia entre ellas es la tercera parte del paralelo.
4. Comparte y valida tus respuestas con el resto de tus compañeros.

L3. Áreas de triángulos y cuadriláteros

Inicio

1. Un arquitecto diseña dos escuelas que se construirán en terrenos como las figuras 2.39.

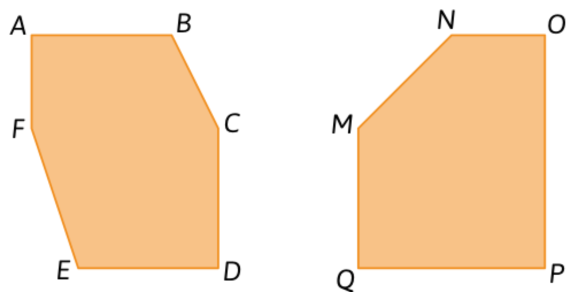


Figura 2.39

   a) Observa ambas figuras. ¿Qué terreno consideras que tiene mayor área? ¿Por qué?
   b) Realiza las mediciones necesarias y verifica tu respuesta.
   c) ¿Cómo calculaste el área de las figuras? Explica tu respuesta.