

Problemas verbales sobre series y sucesiones aritméticas

Nombre del alumno:

Fecha:

Aprendizajes:

Puntuación:

- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	15	20	20	10	15	20	100
Obtenidos							

Vocabulario

Serie → sinónimo de sucesión, es una lista de números con un patrón definido.

Serie Aritmética → serie cuyo patrón es la suma de un número constante.

Serie Geométrica → serie cuyo patrón es la multiplicación de un número constante.

Diferencia → es la distancia entre un número y otro (la resta del número mayor menos el menor).

Término → cada uno de los elementos en una serie.

Ejemplo de serie o sucesión aritmética

La Figura 1 son dos ejemplos de sucesiones aritméticas. Observa sus diferencias comunes.

Incrementando	Decreciendo
Diferencia común es positiva	Diferencia común es negativa
3, 6, 9, 12, ... +3 +3 +3	15, 13, 11, 9, ... -2 -2 -2

Figura 1: Ejemplos de series aritméticas con diferencia común positiva (izquierda) y negativa (derecha).

Diferencia común

La diferencia constante en todos los pares de números consecutivos en una sucesión es llamada la diferencia común, denotada por la letra d . Usamos la diferencia común para ir de un término al otro. Si es que tomamos un término en la sucesión y sumamos la diferencia común, nos moveremos al siguiente término. Así es como los términos en una sucesión aritmética son generados.

Si es que la diferencia común entre los términos es positiva, decimos que la sucesión está incrementando. Por otro lado, cuando la diferencia entre los términos es negativa, decimos que la sucesión está decreciendo.

Suma de los n -ésimos términos

Para encontrar la suma s_n de los primeros n términos de una serie aritmética use la fórmula:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

donde a_0 es el primer término de la serie y a_n el n -ésimo término de la serie.

Serie o sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** es una lista de números con un patrón definido. Si es que tomamos un número de la sucesión y luego lo restamos por el número previo y el resultado siempre es el mismo, entonces es una sucesión aritmética.

La **regla de recurrencia** de una sucesión es una expresión algebraica que permite calcular el valor de cada término con sólo saber su posición en la serie (n).

Ejemplo 1

Manuel canjea sus estampillas por canicas. Cada día canjea dos estampillas más que el día anterior. El canje se realiza de la siguiente forma: por cada estampilla le entregan dos canicas. Para ordenar y contar las canicas que recibirá, él elaboró la Tabla 2:

Tabla 1

Día	1	2	3	4
Estampillas	1	3	5	7
Canicas	2	6	10	14

Si Manuel suma la cantidad de canicas que recibió cada día, ¿cuántas canicas en total tendrá Manuel por el canje de sus estampillas al término de 30 días?

Solución:

La regla de recurrencia para la serie de canicas es:

$$a_n = 4(n - 1) + 2$$

Calculando a_{30}

$$a_{30} = 4(30 - 1) + 2 = 118$$

Utilizando la suma de los términos de una serie:

$$s_{30} = \frac{30(2 + 118)}{2} = 1,800$$

Manuel tendrá 1,800 canicas al cabo de 30 días.

Ejercicio 1

15 puntos

Sofía arma cuadrados con fósforos. En la siguiente imagen, hay tres figuras que Sofía armó:



Figura 1

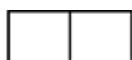


Figura 2

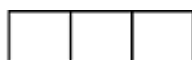


Figura 3

Sofía observa esta secuencia de figuras y dice: Si sigo armando cuadrados según esta secuencia, al terminar de armar la Figura 20, habré utilizado menos de 640 fósforos.

¿Es correcto lo que dice Sofía? ¿Por qué?

Solución:

La regla de recurrencia para la serie de fósforos es:

$$a_n = 3(n - 1) + 4$$

Calculando a_{19}

$$a_{20} = 3(20 - 1) + 4 = 61$$

Utilizando la suma de los términos de una serie:

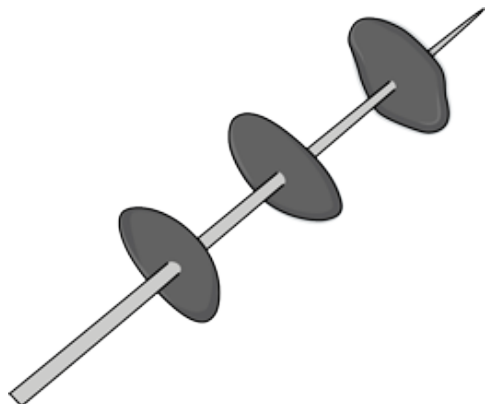
$$s_{20} = \frac{20(4 + 61)}{2} = 650$$

Por lo tanto, no es correcto lo que dice Sofía, ya que: tendrá 650 canicas al cabo de 30 días.

Ejercicio 2

20 puntos

Marcelo prepara brochetas como la siguiente con palitos y trozos de salchichas:



Para calcular cuántos palitos y cuántos trozos de salchicha necesitará, Marcelo elabora la siguiente tabla:

Tabla 2

Cantidad de palitos	1	2	3	4	...	20
Cantidad de trozos de salchicha	3	6	9	12	...	

Si Marcelo cuenta la cantidad de trozos de salchicha que necesita para preparar 20 palitos y luego suma todos los trozos que figuran en su tabla, ¿cuántos trozos obtendrá?

Figura 2: Brocheta demostrativa

Solución:

Ya que la regla de recurrencia es:

$$a_n = 3(n - 1) + 3$$

entonces,

$$a_{20} = 3(20 - 1) + 3 = 57 + 3 = 60$$

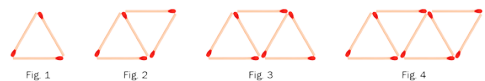
y,

$$s_{20} = \frac{20(a_0 + a_{20})}{2} = \frac{20(3 + 60)}{2} = 630 \text{ trozos.}$$

Ejercicio 3

20 puntos

Juana arma triángulos con fósforos. Arma figuras que guardan una relación en particular. Observa la siguiente imagen:



Juana sigue armando triángulos según la secuencia de la imagen. Cuando termine de armar la Fig 25, ¿cuántos fósforos habrá usado en total?

Solución:

Ya que la regla de recurrencia es:

$$a_n = 2(n - 1) + 3$$

entonces,

$$a_{25} = 2(25 - 1) + 3 = 48 + 3 = 51$$

y,

$$s_{25} = \frac{25(a_0 + a_{25})}{2} = \frac{25(3 + 51)}{2} = 675$$

Ejemplo 2

Mariella tiene bloques de plástico de igual tamaño y arma una torre con todos sus bloques como se observa en la Figura 3: Si Mariella decide completar la torre de tal forma que al final tenga 15 filas, **¿cuántos bloques necesitará en total?**

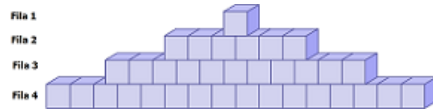


Figura 3: Ilustración de los bloques de plástico

Solución:

Ya que la regla de recurrencia es:

$$a_n = 5(n - 1) + 1$$

entonces,

$$a_{15} = 5(15 - 1) + 1 = 5(14) + 1 = 71$$

y,

$$s_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{32(1 + 71)}{2} = 1152$$

Ejercicio 4

10 puntos

Miguel tiene bloques de plástico de igual tamaño y arma una torre con todos ellos. Observa la figura 4:

Si Miguel armara una torre de 32 filas, **¿cuántos bloques necesitará en total?**

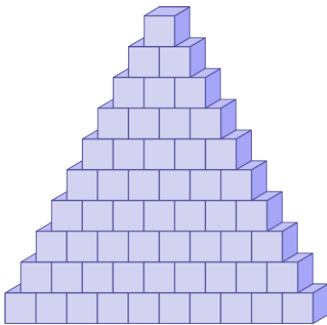


Figura 4: Torre con bloques.

Solución:

Ya que la regla de recurrencia es:

$$a_n = (n - 1) + 1$$

entonces,

$$a_{32} = (32 - 1) + 1 = 32$$

y,

$$s_{32} = \frac{32(a_1 + a_{32})}{2} = \frac{32(1 + 32)}{2} = 528$$

Ejemplo 3

Un padre repartirá 1200 dólares entre sus cinco hijos, de tal forma que la diferencia entre los montos que reciba cada hijo sea la misma. Si le entrega 360 dólares a su hijo mayor, **¿cuánto dinero recibirá el hijo menor?**

Solución:

Sabemos que la suma de la serie que representa la repartición del dinero es:

$$s_5 = \frac{5(360 + a_5)}{2} = 1,200$$

despejando a_5 :

$$\frac{5(360 + a_5)}{2} = 1,200$$

$$5(360 + a_5) = 2,400$$

$$360 + a_5 = 480$$

$$a_5 = 480 - 360$$

$$a_5 = 120$$

El hijo menor recibirá 120 dólares.

Ejercicio 5

15 puntos

Un padre repartirá 1000 dólares entre sus cinco hijos y decidió que cada hijo reciba un monto de dinero distinto de tal forma que la diferencia de montos entre los hijos sea la misma. Si le dará 300 dólares al hijo mayor, **¿cuánto dinero recibirá el hijo menor?**

Solución:

Sabemos que la suma de la serie que representa la repartición del dinero es:

$$s_5 = \frac{5(300 + a_5)}{2} = 1,000$$

despejando a_5 :

$$\frac{5(300 + a_5)}{2} = 1,000$$

$$5(300 + a_5) = 2,000$$

$$300 + a_5 = 400$$

$$a_5 = 400 - 300$$

$$a_5 = 100$$

El hijo menor recibirá 100 dólares.

Ejemplo 4

Un padre repartirá 3000 dólares entre sus cinco hijos, de tal forma que la diferencia entre los montos que reciba cada hijo sea la misma. Si le entrega 1000 dólares a su hijo mayor, **¿cuánto dinero recibirán los otros cuatro hijos?**

Solución:

Sabemos que la suma de la serie que representa la repartición del dinero es:

$$s_5 = \frac{5(1000 + a_5)}{2} = 3,000$$

despejando a_5 :

$$\frac{5(1000 + a_5)}{2} = 3,000$$

$$5(360 + a_5) = 6,000$$

$$360 + a_5 = 1,200$$

$$a_5 = 1,200 - 360$$

$$a_5 = 840$$

El hijo menor recibió 840 dólares; calculando la regla de recurrencia:

$$a_5 = d(5 - 1) + 1000 = 840$$

despejando d :

$$d(5 - 1) + 1000 = 840$$

$$d(5 - 1) = 840 - 1000$$

$$d = -40$$

Por lo tanto, el hijo mayor (1) recibe 1000 dólares, el segundo recibe 960 dólares, el tercero recibe 920 dólares, el cuarto recibe 880 dólares, y el menor (5) recibe 840 dólares.

Ejercicio 6

20 puntos

Un padre repartirá 2700 dólares entre sus cinco hijos y decidió que cada hijo reciba un monto de dinero distinto de tal forma que la diferencia de montos entre los hijos sea la misma. Si le dará 780 dólares al hijo mayor, **¿cuánto dinero recibirán los demás hijos?**

Solución:

Sabemos que la suma de la serie que representa la repartición del dinero es:

$$s_5 = \frac{5(780 + a_5)}{2} = 2,700$$

despejando a_5 :

$$\frac{5(780 + a_5)}{2} = 2,700$$

$$5(780 + a_5) = 5,400$$

$$780 + a_5 = 1,080$$

$$a_5 = 1,080 - 780$$

$$a_5 = 300$$

El hijo menor recibirán 300 dólares; calculando la regla de recurrencia:

$$a_5 = d(5 - 1) + 780 = 300$$

despejando d :

$$d(5 - 1) + 780 = 300$$

$$d(5 - 1) = 300 - 780$$

$$d = -120$$

Por lo tanto, el hijo mayor (1) recibe 780 dólares, el segundo recibe 660 dólares, el tercero recibe 540 dólares, el cuarto recibe 420 dólares, y el menor (5) recibe 300 dólares.