1 Factorización

La factorización es una técnica que consiste en convertir una expresión algebraica en una multiplicación de factores.

2 Factor común

Para usar esta técnica, en todos los elementos de la expresión algebrica, debe existir un término común. Para usar esta técnica de deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Identificar el término común, en caso de ser un número, este debe dividir a todos los elementos de la expresión, si se tratará de un elemento elevado a un exponente, se tomará el exponente de menor grado.

PASO 2 Colocar el término común fuera de un paréntesis.

PASO 3 Colocar dentro del paréntesis el cociente de la división de los términos originales entre el término común.

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $x^6 - x^3 + 2x^2$.

1) Identifica el término común.

2) Coloca el término obtenido en el paso 1 y coloca los resultados de dividir los términos originales entre este término.

$$x^6 - x^3 + 2x^2 = x^2(x^4 - x + 2)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10}$.

1) Identifica el término común.

2) Colocar el término obtenido en el paso 1 y coloca los resultados de dividir los términos originales entre este término.

$$16a^6b^7c - 12a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2(4a^3b^5c - 3a^2c^3 + 5b^8)$$

3 Factor común por agrupación

A diferencia de la factorización anterior, en este tipo de factorización **no** todos los elementos de la expresión tienen términos semejantes, pero se pueden hacer grupos de elementos que tengan términos semejantes, para así poder expresar la expresión inicial en un producto de varios elementos. Veamos los siguientes ejemplos para entender mejor este tipo de factorización.

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} am+bm+a^2+ab &= (am+bm)+(a^2+ab) && \textbf{Agrupa los términos} \\ &= m(a+b)+a(a+b) && \textbf{Factoriza mediante el término común} \\ &= (a+b)(m+a) \end{aligned}$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} 2y^3-6ay^2-y+3a &= (2y^3-y)+(3a-6ay^2) && \textbf{Agrupa los términos} \\ &= y(2y^2-1)-3a(2y^2-1) && \textbf{Factoriza mediante el término común} \\ &= (y-3a)(2y^2-1) \end{aligned}$$

4 Trinomio cuadrado perfecto

Este tipo de factorización se emplea con expresiones algebraicas de 3 elementos que cumplan con las siguientes condiciones:

CONDICIÓN 1 El primero y el ultimo término de la expresión deben de tener raíz cuadrada exacta.

CONDICIÓN 2 La multiplicación de estas raíces por el número 2, debe dar como resultado el término de en medio.

Fórmulas

Trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $x^2 + 6x + 9$.

1) Comprobamos que el primer y ultimo término tengan raíz cuadrada exacta y que su multiplicación entre ellos y por 2 nos de el término de en medio.

$$\sqrt{x^2} = x \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad x \cdot 3 \cdot 2 = 6x$$

2) Usamos la fórmula del trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $4x^2 - 12xy + 9y^2$.

1) Comprobamos que el primer y ultimo término tengan raíz cuadrada exacta y que su multiplicación entre ellos y por 2 nos de el término de en medio.

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9y^2} = 3y \qquad 2x \cdot 3y \cdot 2 = 12xy$$

2) Usamos la fórmula del trinomio cuadrado perfecto.

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

5 Diferencia de cuadrados

Este tipo de expresiones algebraicas se caracterizan por dos cosas. La primera es que tienen solo dos elementos que **siempre** se están restando y la segunda es que ambos elementos tienen raíz cuadrada exacta. La fórmula para factorizar este tipo de expresiones es la siguiente:

Fórmulas

Diferencia de cuadrados.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $x^2 - 9$.

1) Obtén las raíces de ambos elementos y usando la fórmula, obtenemos:

$$x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$.

1) Obtén las raíces de ambos elementos y usando la fórmula, obtenemos:

$$\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25} = \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{5}\right)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $(x-1)^2 - 16y^2$.

1) Obtener las raíces de ambos elementos y usando la fórmula, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 - 16y^2 &= [(x-1)+4y][(x-1)-4y] \\ &= [x-1+4y][x-1-4y] \\ &= (x+4y-1)(x-4y-1)\end{aligned}$$

6 Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

Estas expresiones tienen 3 elementos y no hay una fórmula para factorizar estas expresiones. Para factorizar este tipo de expresiones se deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Se buscarán dos números los cuales sumados nos den el coeficiente del segundo término y que multiplicados nos den el coeficiente del tercer término.

PASO 2 Escribir estos números del lado derecho de cada paréntesis.

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $x^2 + 11x + 24$.

1) Busca dos números que sumados nos den 11 y que multiplicados nos den 24. En este ejemplo los números son 8 y 3, ya que sumados nos dan 11 y multiplicados 24. Una vez encontrados estos números acomodarlos de la siguiente manera.

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 3)(x + 8)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $m^2 - 13m + 30$.

1) Busca dos números que sumados nos den -13 y que multiplicados nos den 30. En este ejemplo los números son -10 y -3. Una vez encontrados estos números acomodarlos de la siguiente manera.

$$m^2 - 13m + 30 = (m - 3)(m - 10)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $x^4 - x^2 - 6$.

1) Busca dos números que sumados nos den -1 y que multiplicados nos den -6. En este ejemplo los números son -3 y 2. Una vez encontrados estos números acomodarlos de la siguiente manera.

$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

7 Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$

Estas expresiones son muy similares a las vistas en la sección anterior, la única diferencia que tienen es que el coeficiente del primer término es un número diferente de 1. Para factorizar este tipo de expresiones se deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Buscar dos números que multiplicados entre sí nos den el coeficiente del primer término.

PASO 2 Buscar dos números que multiplicados entre sí nos den el coeficiente del tercer término.

PASO 3 Multiplicar un número de los primeros dos encontrados por un número de los segundos encontrados y luego hacer lo mismo con la pareja restante y sumarlos. El resultado de esta suma debe dar el coeficiente del término de en medio.

EJEMPLO

Factorizar la siguiente expresión $6x^2 - 7x - 3$.

1) Buscamos los números que multiplicados entre sí nos dan el coeficiente 6 y el coeficiente -3. En el primer caso los números son 3 y 2, mientras que en el segundo caso los números son -1 y 3.

2) Colocamos los números encontrados de la siguiente manera.

$$6x^2 - 7x - 3$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{array}$$

$$2(-1) + 3(3) = -2 + 9 = 7$$

3) La manera en que están colocados los números es incorrecta, ya que el resultado de la multiplicación y la suma nos da como resultado 7 y lo que queremos obtener es -7. Acomodando y verificando el signo de los números de manera correcta, tenemos lo siguiente.

$$6x^2 - 7x - 3$$

$$\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{array}$$

$$2(1) + 3(-3) = 2 - 9 = -7$$

4) La respuesta va a estar dada por el producto de dos paréntesis, los cuales van a tener un que llevara la variable x *(primera columna)* y otro que no la llevara *(segunda columna)*.

$$6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$$

EJEMPLO

Factoriza la siguiente expresión $3x^2 - 5x - 2$.

1) Busca los números que multiplicados entre sí nos den los coeficientes 3 y -2. Para el primer coeficiente son 3 y 1 y para el segundo coeficiente son -2 y 1.

2) Hacemos uso del método gráfico para poder factorizar la expresión.

$$3x^2-5x-2$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & & \\ 3 & & 1 \end{array}$$

$$1(1)+3(-2)=1-6=-5$$

$$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$$