Escuela Rafael Díaz Serdán

Matemáticas 3 — 3° de Secundaria

J. C. Melchor Pinto — **Autocontrol** — Unidad 2 — 2022-2023

Problemas verbales sobre ecuaciones cuadráticas

Guía 27

Nombre del alumno: ______________________ **Fecha:** ____________

Aprendizajes:

- Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

Puntuación:

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos	10	15	15	15	15	15	15	100
Obtenidos								

Ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** completa en una variable es una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

donde a, b y c son enteros, decimales o fraccionarios y a no es igual a 0. Como el mayor exponente de la variable es 2 también se le conoce como **ecuación de segundo grado**.

Formas de una ecuación cuadrática

$ax^2 + bx + c = 0$	Forma **general o estándar**
$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$	Forma **factorizada**
$a(x - h)^2 + k = 0$	Forma **canónica**

Discriminante δ

El discriminante δ es un parámetro que indica cuantas soluciones tiene una ecuación cuadrática:

$$\text{Número de soluciones} = \begin{cases} 2 & \text{si } \delta > 0 \\ 1 & \text{si } \delta = 0 \\ 0 & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

Fórmula para las soluciones de una ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a} \qquad \text{donde, } \delta = b^2 - 4ac$$

que se pueden escribir en una sola expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejercicio 1 — 10 puntos

Antoine se encuentra en un balcón y lanza una pelota a su perro, que está a nivel del suelo. La altura $h(t)$ de la pelota (en metros sobre el suelo), t segundos después de que Antoine la lanzó, está modelada por:

$$h(t) = -2t^2 + 4t + 16$$

¿Cuántos segundos después de ser lanzada la pelota llegará al suelo?

Solución:
Para conocer el tiempo en que la pelota llega al suelo (donde la altura es cero), se debe resolver la ecuación:

$$-2t^2 + 4t + 16 = 0$$

De acuerdo con la Forma estándar $at^2 + bt + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = -2$$
$$b = 4$$
$$c = 16$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)(16)}}{2(-2)}$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{-4}$$

$$t = \frac{-4 \pm 12}{-4}$$

$$t_1 = \frac{-4 - 12}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

$$t_2 = \frac{-4 + 12}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Ya que el tiempo no puede ser negaivo, la solución que tiene sentido en este problema es:

$$\therefore t = 4$$

Ejercicio 2 — 15 puntos

El área de un rectángulo es 528 cm^2. Su altura es 1 cm más que el doble del ancho. Sea z el ancho del rectángulo.

2a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface z?

(A) $2z^2 + z + 528 = 0$ **(B)** $2z^2 + z - 528 = 0$ (C) $2z^2 - z - 528 = 0$ (D) $2z^2 - z + 528 = 0$

Solución:

Sea z el ancho del rectángulo, entonces su altura esta dada por $2z + 1$, y su área es:

$$z(2z+1) = 528$$
$$2z^2 + z = 528$$
$$2z^2 + z - 528 = 0$$

2b Determina el ancho del rectángulo z.

Solución:

Para encontrar z, se debe resolver la ecuación:

$$2z^2 + z - 528 = 0$$

De acuerdo con la forma estándar $az^2 + bz + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = 2, \quad b = 1 \quad y \quad c = -528$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-528)}}{2(2)}$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4}$$

$$z = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore z_1 = \frac{-1+65}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

$$z_2 = \frac{-1-65}{4} = \frac{-66}{4} = -16.5$$

Ya que las distancias no pueden ser negativas, el ancho es:

$$\therefore z = 16$$

Ejercicio 3 15 puntos

Aditi y Kavita tenían 40 monedas entre las dos. Aditi le dio 10 monedas a Kavita. El producto de las monedas que tienen ahora es 375. Sea x la cantidad de monedas que tenía Aditi al principio.

3a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?

(A) $-x^2 + 60x + 875 = 0$ (B) $-x^2 - 60x + 875 = 0$ (C) $-x^2 - 60x - 875 = 0$ **(D)** $-x^2 + 60x - 875 = 0$

Solución:

Sea x la cantidad de monedas que tenía Aditi al principio, entonces Kavita tiene $40 - x$. Si Aditi le da 10 monedas a Kavita, entonces Aditi tiene $x - 10$ y Kavita tiene $40 - x + 10 = 50 - x$. Con estas variables, su producto es:

$$\begin{aligned}(x-10)(-x+50) &= 375\\ -x^2 + 50x + 10x - 500 - 375 &= 0\\ -x^2 + 60x - 875 &= 0\end{aligned}$$

3b Si Aditi tenía menos de 30 monedas al principio.
¿Con cuántas monedas empezó Aditi?

Solución:

Para encontrar x, se debe resolver la ecuación:

$$-x^2 + 60x - 875 = 0$$

De acuerdo con la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = -1, \quad b = 60 \quad \text{y} \quad c = -875$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4(-1)(-875)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 - 3500}}{-2}$$

$$x = \frac{-60 \pm 10}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-60 + 10}{-2} = \frac{-50}{-2} = 25 \text{ y}$$

$$x_2 = \frac{-60 - 10}{-2} = \frac{-70}{-2} = 35$$

Ya que Aditi tenía menos de 30 monedas: $\therefore x = 25$

Ejercicio 4 — 15 puntos

Pedro es 10 años más joven que Ana. El producto de sus edades hace 2 años era 39. Sea x la edad de Ana.

4a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?

(A) $x^2 + 14x + 15 = 0$ (B) $x^2 - 14x + 15 = 0$ (**C**) $x^2 - 14x - 15 = 0$ (D) $x^2 + 14x - 15 = 0$

Solución:
Sea x la edad de Ana, entonces Pedro tiene $x-10$. Hace 2 años, Ana tenía $x-2$ y Pedro $x-10-2 = x-12$. El producto es:

$$\begin{aligned}(x-2)(x-12) &= 39\\ x^2 - 14x + 24 &= 39\\ x^2 - 14x + 24 - 39 &= 0\\ x^2 - 14x - 15 &= 0\end{aligned}$$

4b Calcula la edad actual de Ana.

Solución:
Para encontrar x, se debe resolver la ecuación:

$$x^2 - 14x - 15 = 0$$

De acuerdo con la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = -1, \quad b = -14 \quad \text{y} \quad c = -15$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$x = \frac{14 \pm 16}{2}$$

$$x_1 = \frac{14 - 16}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ y}$$

$$x_2 = \frac{14 + 16}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Ya que la edad de una persona no puede ser negativa:

$$\therefore x = 15$$

Ejercicio 5 **15 puntos**

El producto de dos enteros pares positivos consecutivos es 80. Sea n el menor entero.

5a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface n?

(A) $n^2 + 2n + 80 = 0$ (B) $n^2 - 2n - 80 = 0$ (C) $n^2 - 2n + 80 = 0$ **(D)** $n^2 + 2n - 80 = 0$

Solución:

Sea n el menor entero par positivo, y su consecutivo par $n + 2$. Entonces, el producto es:

$$n(n+2) = 80$$
$$n^2 + 2n = 80$$
$$n^2 + 2n - 80 = 0$$

5b Encuentra el número n.

Solución:

Para encontrar n, se debe resolver la ecuación:

$$n^2 + 2n - 80 = 0$$

De acuerdo con la Forma estándar $at^2 + bt + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = 1$$
$$b = 2$$
$$c = -80$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-80)}}{2(1)}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2}$$

$$n = \frac{-2 \pm 18}{2}$$

$$n_1 = \frac{-2 - 18}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

$$n_2 = \frac{-2 + 18}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Ya que sólo hablamos de enteros positivos:

$$\therefore n = 8$$

Ejercicio 6 15 puntos

El área de un rectángulo es 20 cm^2. Su altura es 4 cm más que el triple del ancho. Sea x el ancho del rectángulo.

6a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface x?

(A) $3x^2 + 4x + 20 = 0$ (B) $3x^2 - 4x - 20 = 0$ **(C)** $3x^2 + 4x - 20 = 0$ (D) $3x^2 - 4x + 20 = 0$

Solución:

Sea x el ancho del rectángulo, entonces su altura es $3x + 4$. Y el producto es:

$$x(3x+4) = 20$$
$$3x^2 + 4x = 20$$
$$3x^2 + 4x - 20 = 0$$

6b Determina el ancho del rectángulo x.

Solución:

Para encontrar x, se debe resolver la ecuación:

$$3x^2 + 4x - 20 = 0$$

De acuerdo con la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$ de una ecuación cuadrática, sus coeficientes son:

$$a = 3, \quad b = 4 \quad y \quad c = -20$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se obtiene:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(-20)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{6}$$

$$x_1 = \frac{-4-16}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

$$x_2 = \frac{-4+16}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Ya que las medidas no pueden ser negativas: $\therefore x = 2$

Ejercicio 7 — 15 puntos

El producto de dos enteros positivos es 176. Un número es 5 más que el otro.
Sea n el más pequeño de los números eneteros positivos.

7a ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas satisface n?

(A) $n^2 + 5a + 176 = 0$ **(B)** $n^2 + 5a - 176 = 0$ (C) $n^2 - 5a - 176 = 0$ (D) $n^2 - 5a + 176 = 0$

Solución:

Sea n el menor entero positivo, entonces el segundo número es $n + 5$. Entonces, el producto es:

$$\begin{aligned} n(n+5) &= 176 \\ n^2 + 5n &= 176 \\ n^2 + 5n - 176 &= 0 \end{aligned}$$

7b Encuentra el número más pequeño n.

Solución:

$$\begin{aligned} n^2 + 5n - 176 &= 0 \\ a &= 1 \\ b &= 5 \\ c &= -176 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(-176)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{729}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 27}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-5 - 27}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \text{ y}$$

$$x_2 = \frac{-5 + 27}{2} = \frac{22}{2} = 11$$