Matemáticas 3

Cuaderno de trabajo
para los alumnos de 3° de Secundaria
en el curso durante el ciclo escolar
2022-2023

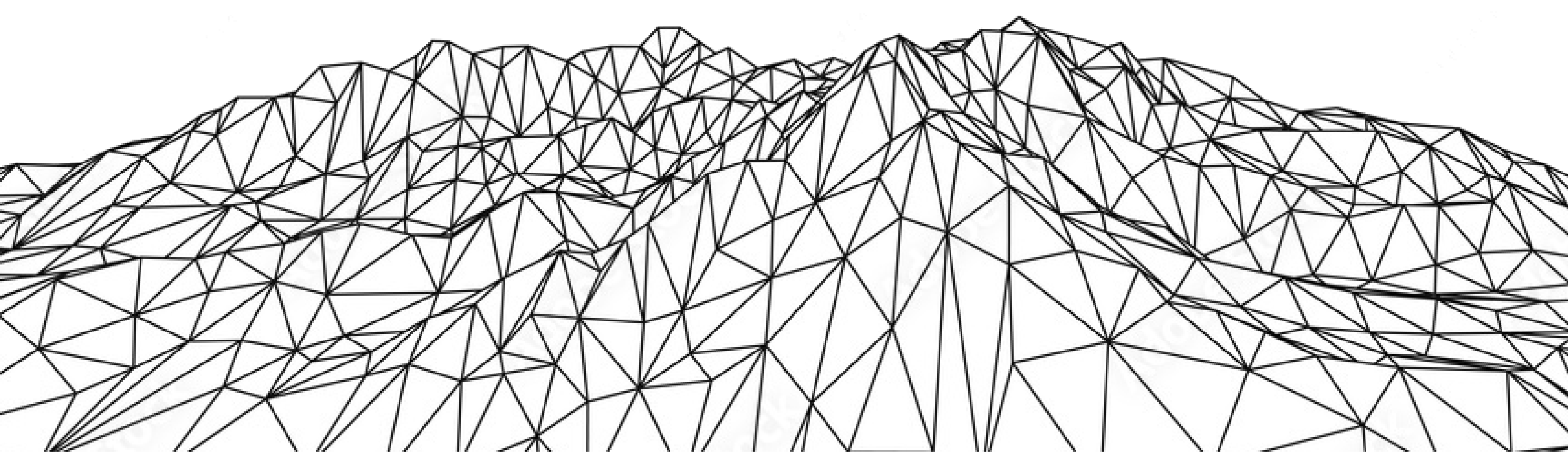
POR

J. C. Melchor Pinto

Profesor de asignatura en

Escuela Rafael Díaz Serdán

Educación para la vida



Índice general

S1 Múltiplos y divisores

L1. **Múltiplos**

L2. **Divisores**

L3. **Problemas de multiplicación y división de fracciones**

L4. **Multiplicación de números positivos y negativos**

S2 Números primos

L1. Números primos y compuestos

L2. Factorización y descomposición en números primos

S3 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

L1. Mínimo común múltiplo

L2. Máximo común divisor

S4 Polígonos semejantes

S5 Criterios de semejanza de triángulos

L1. **Criterios de semejanza de triángulos**

L2. **Aplicaciones de semejanza de triángulos**

S6 Medidas de tendencia central y de dispersión

L1. Significado de las medidas de tendencia central

L2. Significado de las medidas de dispersión

L3. Comparación de dos conjuntos de datos

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

L1. Ecuaciones cuadráticas

Analiza las situaciones y contesta lo que se pide.

Inicio

Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

1. Martín fue contratado para cercar un terreno con 120 m de malla. Le pidió a su cliente los datos del terreno, quien se los entregó en un papel. Al llegar a su casa, Martín se dio cuenta de que perdió la información y sólo recordó que el triple del ancho menos el largo es igual a 28 m. No quiso llamar nuevamente al cliente y determinó las dimensiones del terreno. **¿Cuáles son?**

    a) Asigna variables y escribe las ecuaciones que modelan la situación.
    b) Describe un procedimiento para resolverlas.
    c) Determina las medidas de los lados del terreno.
    d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
    e) Describe tu procedimiento para saber las respuestas.

1. El hotel *El Sol* gestionó con el municipio tener una zona de nado en el mar para el disfrute de sus huéspedes. Le han asignado 600 m^2 de superficie de mar y debe delimitarla con una cuerda y boyas para seguridad de los bañistas. El gerente del hotel quiere que la zona sea cuadrada, **¿cuál es la longitud de los lados? (figura 2.1)**.

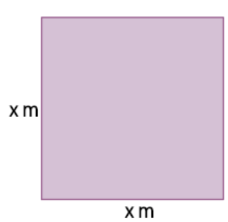


Figura 2.1: Modelo geométrico de la situación.

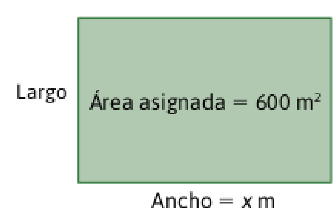


Figura 2.2: Modelo geométrico de la situación.

a) ¿Cuáles son las cantidades conocidas?
b) ¿Cuáles son las cantidades desconocidas?
c) Escriban una ecuación que modele la situación.
d) ¿Cuál es la longitud de los lados?

2. Antes de que se hiciera la delimitación de la zona de nado, el gerente del hotel cambió de opinión acerca de la forma de esta zona. Ahora debía ser rectangular con cierta característica: el largo tiene 10 m menos que el ancho. **¿Cuál es la longitud de los lados de la superficie delimitada? (figura 2.2)**.

   a) ¿Cuáles son las cantidades conocidas?

   b) ¿Cuáles son las cantidades desconocidas?

   c) Escriban una ecuación que modele la situación.

   d) Planteen una forma de resolver el problema. ¿Cuál es la longitud de los lados?

> Una **ecuación cuadrática** completa en una variable es una ecuación del tipo
>
> $$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$
>
> donde a, b y c son enteros, decimales o fraccionarios y a no es igual a 0. Como el mayor exponente de la variable es 2 también se le conoce como **ecuación de segundo grado**.

3. Considera el problema anterior. El municipio ha notificado al gerente del hotel El Sol que hubo un error en la asignación de la zona de mar y que en lugar de 600 m^2 , se le asignan 504 m^2 . El gerente del hotel aún quiere que la zona de nado tenga 10 m menos de largo que de ancho. **¿Cuál es la nueva longitud de los lados?**

   a) Identifiquen las cantidades conocidas, desconocidas y escriban una ecuación que modele la situación.

   b) Verifiquen cuáles valores son soluciones o raíces de la ecuación anterior y escriban por qué.

   - $x = -28$.
   - $x = -18$.
   - $x = -8$.
   - $x = 0$.
   - $x = 8$.
   - $x = 18$.
   - $x = 28$.

> Un número que satisface una ecuación, es decir, que al sustituirlo en la variable de la ecuación se cumple la igualdad es llamado **solución** o **raíz** de la ecuación.

4. Completa la tabla 2.3 sustituyendo los valores de x en cada expresión y haciendo las operaciones, luego respondan lo que se pide.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$(x-5)(x+3)$									
$x^2+3x-5x-15$									
$x^2-2x-15$									

Figura 2.3: Modelo geométrico de la situación.

   a) ¿Cómo son los valores de las tres expresiones? ¿Qué pueden concluir sobre ellas?

   b) ¿Cómo pueden saber que un producto de expresiones algebraicas es equivalente a una ecuación de segundo grado?

5. Se tienen dos expresiones algebraicas: $(x-1)(x-6)=0$ y $x^2-7x+6=0$.

   a) ¿Cuál es una ecuación cuadrática? ¿Por qué?

   b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación (x - 1)(x - 6) = 0? Explica.

   c) ¿Cuántas soluciones tendrá la ecuación $x^2-7x+6=0$? ¿Por qué?

   d) ¿Cuántas soluciones tendrá una ecuación cuadrática? Analicen los siguientes casos:

$$(x)(x)=1 \quad \text{y} \quad x^2=1$$
$$x(x-1)=0 \quad \text{y} \quad x^2-x=0$$
$$(x-1)(x-2)=0 \quad \text{y} \quad x^2-3x+2=0$$
$$(x-1)(x-2)+1=0 \quad \text{y} \quad x^2-3x+3=0$$

   Comprueben primero que cada par de ecuaciones es equivalente. Pueden probar por ensayo y error para encontrar las soluciones.

Cierre

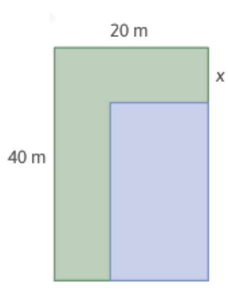


Figura 2.4: Modelo geométrico de la situación.

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. ¿Qué pasaría con las soluciones de la ecuación si los 120 son metros cuadrados? Reflexiona acerca de los conocimientos o las habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Los desarrolladores de un fraccionamiento habían planeado que algunos terrenos para construir las casas fueran de 20 por 40 metros, pero los 40 m reducirán de tal manera que tengan 525 m^2 de área para ampliar los adadores, como se muestra en la figura 2.4.

   a) ¿De cuánto será el ancho del camino?

   b) ¿Cómo planteas la ecuación que permite resolver el problema?

L2. Gráficas de expresiones cuadráticas y soluciones de sus ecuaciones

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide. La torre Eiffel tiene una altura de 324 m. Desde la parte superior se deja caer una pelota de golf. La gráfica que se muestra es la representación de la ecuación que describe este movimiento, sin considerar la resistencia del aire.
   ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar al suelo?
   a) ¿Qué parte de la gráfica tiene sentido considerar?
   b) ¿Qué altura corresponde al tiempo 0 s? ¿A qué tiempo corresponde la altura 0 m?
   c) ¿Qué valor es la solución del problema? Explica.
   d) ¿Qué significa en la situación el valor simétrico, es decir, de signo contrario, al que obtuviste en la pregunta anterior?
   e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   f) Describe el procedimiento que realizaste para saber las respuestas.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus respuestas, argumenten. Corrijan si es necesario. Reflexionen sobre el uso de gráficas para describir y resolver ecuaciones.

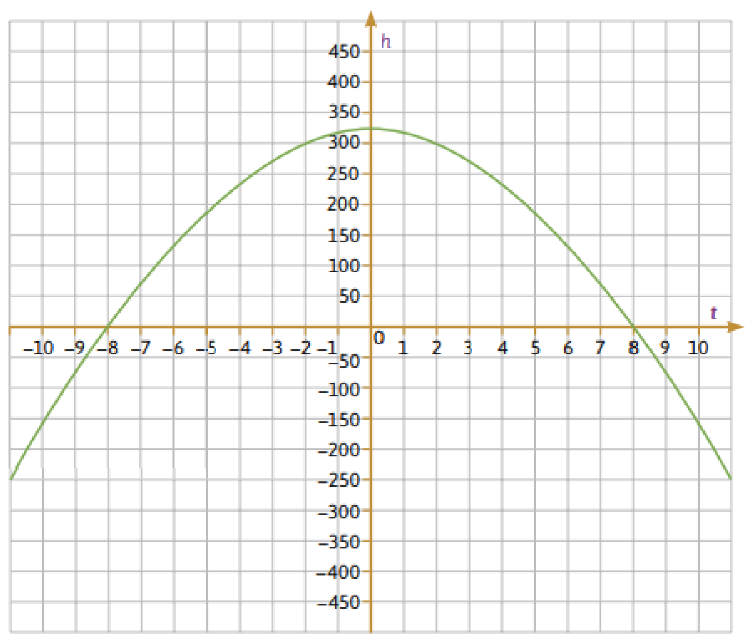


Figura 2.5: Modelo geométrico de la situación.

Soluciones de ecuaciones cuadráticas con gráficas

Analizaremos diversas gráficas de variaciones cuadráticas para determinar la relación entre éstas y las soluciones de la ecuación asociada.

1. Responde a los siguientes incisos.

   a) Analicen la gráfica de $y = x^2$ (figura 2.6).

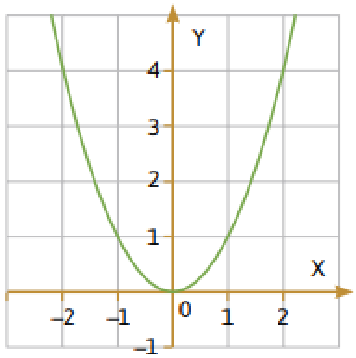


Figura 2.6: Gráfica de $y = x^2$

   1) Localiza los puntos en los que la gráfica interseca al eje X. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   2) Sustituye esos valores en la ecuación $x^2 = 0$. ¿Qué observas?
   3) Elije otros dos puntos que estén sobre la gráfica. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   4) Sustituyan esos nuevos valores en la ecuación $x^2 = 0$. ¿Qué observas?

   b) Analiza la gráfica de $y = x - 1$ (figura 2.7) y responde.

   1) Localiza los puntos en los que la gráfica interseca al eje X. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   2) Elije otros dos puntos que estén sobre la gráfica. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   3) Sustituye esos nuevos valores en la ecuación $x^2 - 1 = 0$. ¿Qué observas?
   4) ¿Qué puedes decir acerca de las soluciones de la ecuación $x^2 - 1 = 0$?

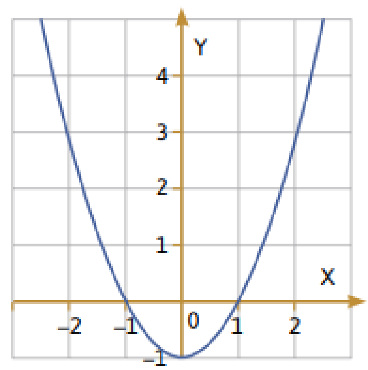


Figura 2.7: Gráfica de $y = x^2 - 1$

   c) Analicen la gráfica de $y = x^2 + 1$ (figura 2.8).

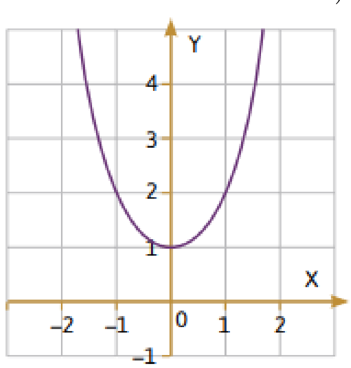


Figura 2.8: Gráfica de $y = x^2 + 1$.

   1) Localiza los puntos en los que la gráfica interseca al eje X. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   2) Elije otros dos puntos que estén sobre la gráfica. ¿Cuál es el valor de x en esos puntos?
   3) Sustituye esos nuevos valores en la ecuación $y = x^2 + 1$. ¿Qué observas?
   4) ¿Qué puedes decir acerca de las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$?

¿Qué semejanzas y diferencias observan entre las tres expresiones? ¿Y entre sus gráficas? Con base en las gráficas anteriores, ¿cuántas soluciones pue- de tener una ecuación cuadrática? ¿Cómo pueden determinar las soluciones?

2. Responde a los siguientes incisos.

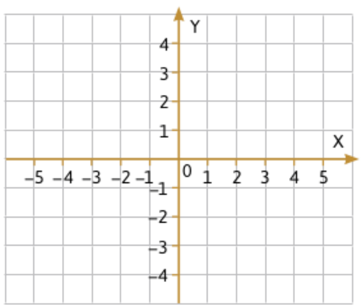


Figura 2.9

a) Considera la expresión $\frac{1}{2}x^2 + x$. Completa la tabla 2.1 para obtener algunos valores y con base en éstos realiza la gráfica en la figura 2.9. Aproxima a un decimal.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

Tabla 2.1

Con base en la gráfica, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $\frac{1}{2}x^2 + x = 0$? ¿Cuáles son?

b) Considera la expresión $\frac{1}{2}x^2 - x$. Completa la tabla 2.2 para obtener algunos valores y con base en éstos realiza la gráfica en la figura 2.10. Aproxima a un decimal.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

Tabla 2.2

Con base en la gráfica, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $\frac{1}{2}x^2 - x = 0$? ¿Cuáles son?

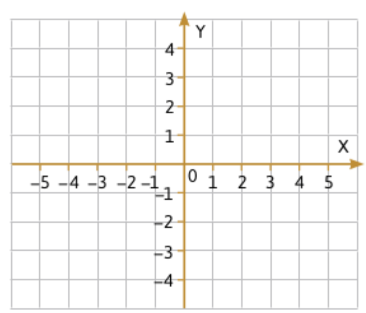


Figura 2.10

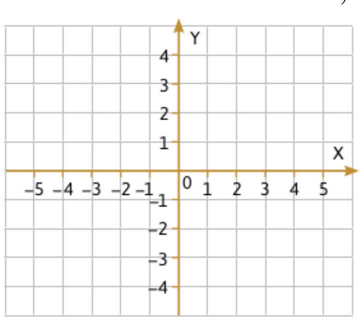


Figura 2.11

c) Considera la expresión $-\frac{1}{2}x^2 + x$. Completa la tabla 2.3 para obtener algunos valores y con base en éstos realiza la gráfica en la figura 2.11. Aproxima a un decimal.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4

Tabla 2.3

Con base en la gráfica, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 + x = 0$? ¿Cuáles son?

d) Considera la expresión $-\frac{1}{2}x^2 - x$. Completa la tabla 2.4 para obtener algunos valores y con base en éstos realiza la gráfica en la figura 2.12. Aproxima a un decimal.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

Tabla 2.4

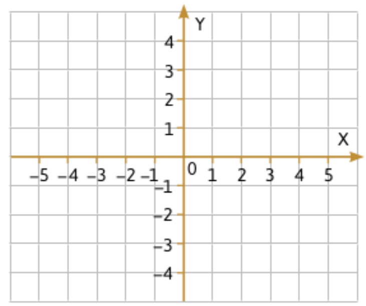


Figura 2.12

Con base en la gráfica, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $-\frac{1}{2}x^2 - x = 0$? ¿Cuáles son?

¿Qué semejanzas y diferencias observan entre las tres expresiones? ¿Y entre sus gráficas? Con base en las gráficas anteriores, ¿cuántas soluciones pue- de tener una ecuación cuadrática? ¿Cómo pueden determinar las soluciones?

Las gráficas de expresiones cuadráticas pueden ser *abiertas hacia arriba o hacia abajo*. También pueden estar a la izquierda o derecha del origen.

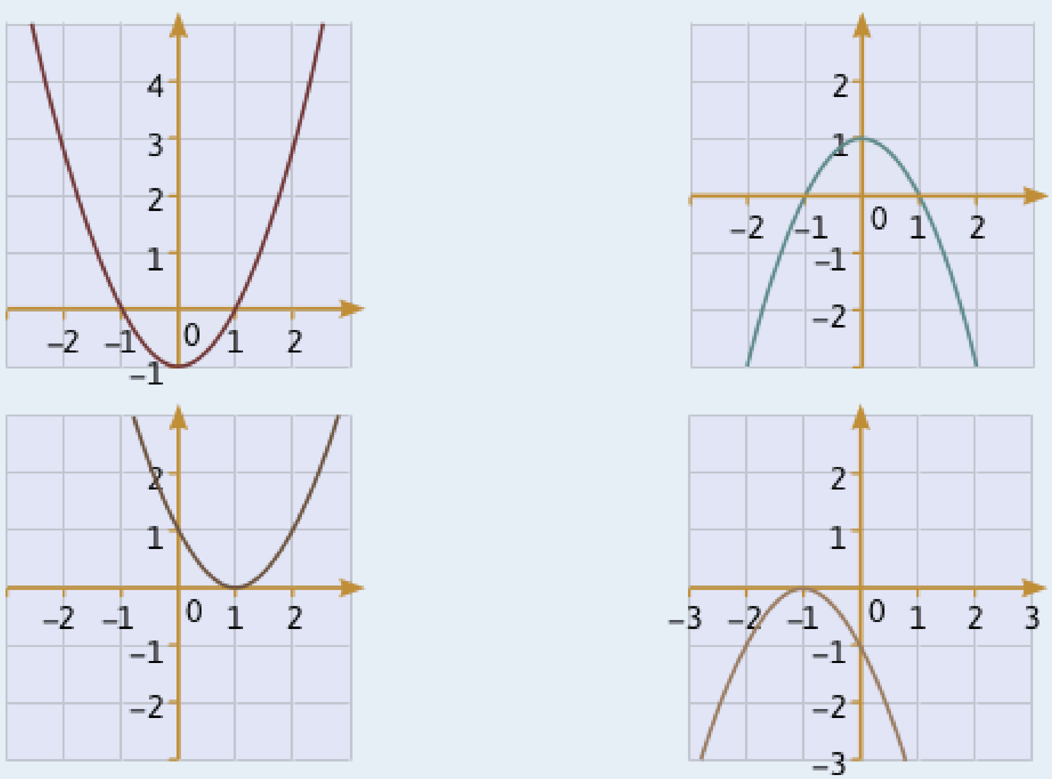
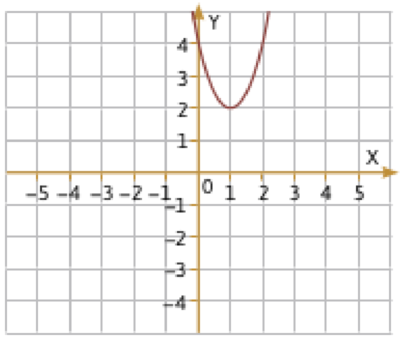


Figura 2.13

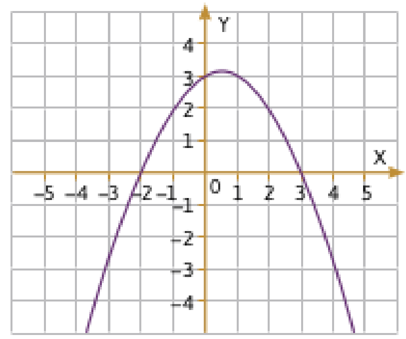
3. Analiza las gráficas de la figura 2.14. Determina el número de soluciones que tiene la ecuación en cada caso y escríbanlas.



$2x^2 - 4x + 4 = 0$

Número de soluciones:

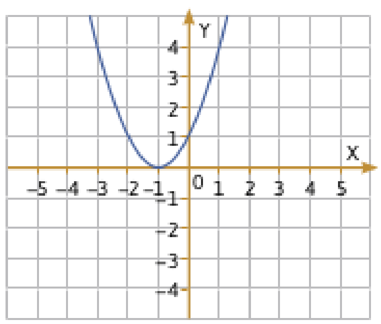
Soluciones:



$-x^2 + x + 6 = 0$

Número de soluciones:

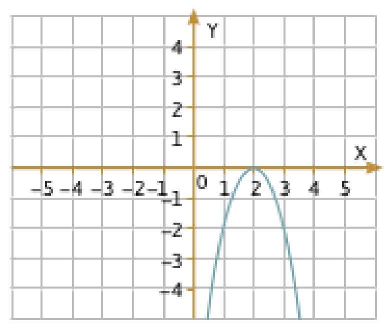
Soluciones:



$x^2 + 2x + 1 = 0$

Número de soluciones:

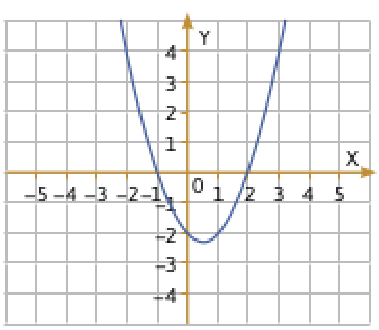
Soluciones:



$-2x^2 - 8x - 8 = 0$

Número de soluciones:

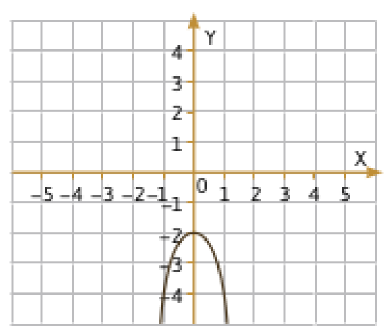
Soluciones:



$x^2 - 2x - 2 = 0$

Número de soluciones:

Soluciones:



$-2x^2 - 2 = 0$

Número de soluciones:

Soluciones:

Figura 2.14: Gráficas de expresiones cuadráticas.

Con base en la gráfica de una expresión cuadrática de la forma ax^2+bx+c, ¿cómo determinan el número de soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$? ¿Cómo determinan las soluciones? Escriban una conclusión en su cuaderno.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Si la gráfica abriera hacia arriba, ¿qué representaría? Reflexiona acerca de los conocimientos o las habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. María ha graficado la expresión $y=x^2-8x+15$ para resolver las siguientes ecuaciones:

   - $x^2-8x+15=-2$
   - $x^2-8x+15=-1$
   - $x^2-8x+15=0$
   - $x^2-8x+15=1$
   - $x^2-8x+15=2$

   a) Traza las rectas que son paralelas al eje X y que pasan por $y=-2$, $y=-1$, $y=0$, $y=1$ y $y=2$.

   b) Localiza los puntos en los que interseca cada recta a la gráfica.

   c) ¿Cuáles son los valores de x de esos puntos?

   d) Evalúa los valores obtenidos de cada intersección en su ecuación correspondiente. Por ejemplo, los valores obtenidos para la variable x de la intersección de la recta que pasa por $y=2$ y la gráfica en la ecuación $x^2-8x+15=2$. ¿Qué observas?

   e) ¿María puede resolver las ecuaciones con ayuda de la gráfica sin hacer operaciones? Explica.

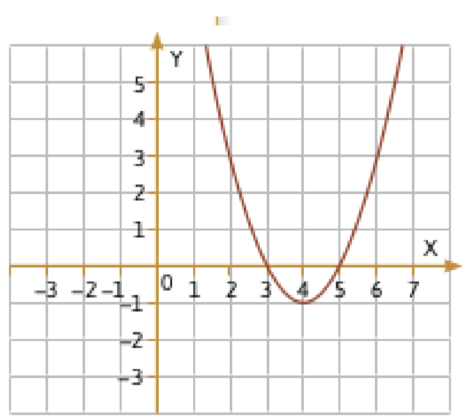


Figura 2.15

En un partido de campeonato, un futbolista patea el balón. Con base en la toma de una cámara, la computadora del centro de transmisión traza la trayectoria del balón y calcula la ecuación que la describe: $y = -\frac{1}{8}x^2 + 58x + 74$. Según la gráfica el futbolista está en el punto $x = -2$. ¿Hasta qué punto llegará la pelota?

1. ¿Qué parte de la gráfica tiene sentido según el problema?
2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $-\frac{1}{8}x^2 + 58x + 74 = 0$?
3. ¿Qué significado tienen las soluciones dentro del problema?
4. Si un jugador del equipo contrario que mida 1.80 m de altura se ubicara en $x = 0$, ¿taparía el disparo? Explica.

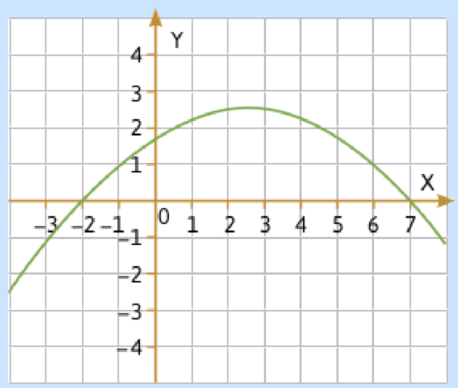


Figura 2.16: Gráfica de la ecuación que representa la trayectoria del balón.

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

L1. Procedimientos para la resolución de ecuaciones cuadráticas

Inicio

1. Observa la figura 2.17 y responde lo que se pide. Un jardín rectangular mide 50 m por 40 m. Se quiere construir un camino de ancho constante alrededor del jardín como se muestra en la figura. ¿Qué tan ancho deberá ser el camino si debe cubrir un área de 784 m^2 ?

   a) Escribe una ecuación que permita obtener el área del camino.

   b) ¿Cuánto mide el ancho del camino? ¿Cuánta área verde quedará?

   c) Realiza la gráfica que describe la expresión algebraica obtenida.

   d) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

   e) Describe el procedimiento que realizaste para saber las respuestas.

2. Reúnanse en equipo. Reflexionen sobre los procedimientos de solución de una ecuación cuadrática. Argumenten. Corrijan si es necesario.

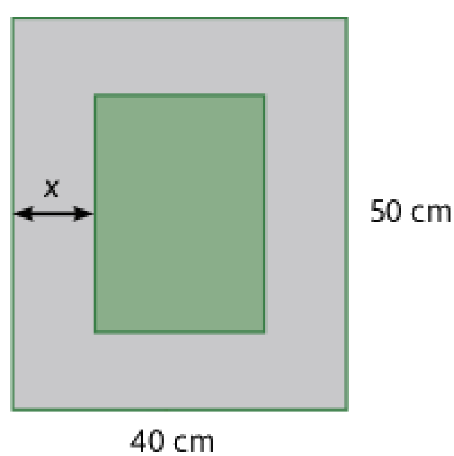


Figura 2.17: Modelo geométrico de la situación.

Producto de factores lineales

Responde a los siguientes incisos.

1. Considera las ecuaciones $x(x-9) = 0$ y $x^2 - 9x = 0$.

   a) Considera la ecuación $(x)(x) - (9)(x) = 0$ y compárala con $x(x-9) = 0$. ¿Qué observas? ¿Son equivalentes? Explica.

   b) Efectúa los productos en $(x)(x) - (9)(x) = 0$. ¿Qué expresión obtienes?

   c) ¿Las ecuaciones $x(x-9) = 0$ y $x^2 - 9x = 0$ son equivalentes? ¿Por qué?

2. Considera las ecuaciones $(x+1)(x-1) = 0$ y $x^2 - 1 = 0$.

   a) Considera la ecuación $(x+1)(x) + (x+1)(-1) = 0$ y compárala con $(x+1)(x-1) = 0$. ¿Qué observas? ¿Son equivalentes? Explica.

   b) Efectúa los productos en $(x+1)(x) + (x+1)(-1) = 0$. ¿Qué expresión obtienes?

   c) ¿Las ecuaciones $(x+1)(x-1) = 0$ y $x^2 - 1 = 0$ son equivalentes? ¿Por qué?

   ¿Cuál es el resultado de efectuar siguientes productos?:

$$x(x+a) =$$

$$x(x-a) =$$

$$(x+a)(x+b) =$$

$$(x+a)(x-b) =$$

   Supongan que a y b son enteros, fracciones o decimales. Observen con cuidado el manejo de los signos al multiplicar.

   > Un **producto de factores lineales** tiene la forma general de
   >
   > $$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

   La factorización para resolver ecuaciones cuadráticas

   Desarrollaremos la relación que existe entre una ecuación cuadrática escrita como producto de expresiones lineales y las soluciones de la ecuación.

3. Considera las ecuaciones $3x + 2 = 0$ y $x - 4 = 0$.

   a) ¿Cuáles son las soluciones de $3x + 2 = 0$ y de $x - 4 = 0$?

   b) Ahora considera la ecuación $(3x+2)(x-4) = 0$. ¿Cómo puedes encontrar su solución? ¿Cuál es?

   c) ¿Hay alguna relación entre las soluciones de $3x+2 = 0$ y $x-4 = 0$ y las de $(3x+2)(x-4) = 0$? Explica.

   d) Efectúa el producto en la ecuación $(3x+2)(x-4) = 0$. ¿Qué ecuación obtienes?

   e) ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación que obtuviste? ¿Por qué?

4. Analiza la ecuación $(x - 1.2)(x + 3.3) = 0$.

   a) Efectúen el producto. ¿Qué ecuación obtienen?

   b) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación que obtuvieron?

   c) Compara tus respuestas y procedimientos. Si hay diferencias, argumenta. Corrijan si es necesario. Comenten: ¿cómo se relacio- nan las soluciones de una ecuación en la que hay un producto de expresiones li- neales y las de su equivalente ecuación cuadrática?

> **Factorizar** una ecuación cuadrática significa escribirla como el producto de dos términos algebraicos lineales. La nueva ecuación es equivalente a la primera y las soluciones se obtienen de resolver dos ecuaciones lineales.
>
> $$x^2 + 7x - 18 = 0 \Rightarrow$$
> $$(x + 9)(x - 2) = 0$$
>
> y las soluciones a ambas ecuaciones son $x = -9$ y $x = 2$.

5. Completa la tabla 2.5.

Ecuación general	Ecuación factorizada	Soluciones	Sustitución de soluciones en ecuación general
$x^2 - 9x -$ ______ $= 0$	$(x-11)(x+2) = 0$		
$x^2 + 5x + 6 = 0$	$(x +$ ____$)(x +$ ___$) = 0$	$x_1 = -2, x_2 = -3$	
$x^2 - 2x + 1 = 0$	$(x-$ _____$)^2 = 0$	$x = 1$	
$6x^2 -$ ______ $+ 1 = 0$	$(2x-1)(3x-1) = 0$	$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 =$ ______	
$x^2 + x - 20 = 0$	$(x$ ____$)(x$ ____$) = 0$		

Tabla 2.5

Técnicas de factorización de ecuaciones cuadráticas

Desarrollaremos técnicas sencillas para factorizar ecuaciones cuadráticas.

6. Desarrollen la ecuación $(x + 8)(x - 3) = 0$. Exprésenla como $ax^2 + bx + c = 0$.

   a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de x^2 ?

   b) ¿Cómo pueden obtener el coeficiente de x con las raíces de $(x + 8)(x - 3) = 0$?

   c) ¿Cómo pueden obtener el término independiente con las raíces de $(x + 8)(x - 3) = 0$?

7. Desarrolla la ecuación $(x + r)(x + s) = 0$. Exprésala en la forma $x^2 + bx + c = 0$. Consideren que r y s son números enteros, fraccionarios o decimales.

   a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de x^2 ?

   b) ¿Cómo pueden obtener el coeficiente de x con las raíces de $(x + r)(x + s) = 0$?

   c) ¿Cómo pueden obtener el término independiente con las raíces de $(x + r)(x + s) = 0$?

8. Consideren la ecuación $x^2 + 9x + 18 = 0$.

   a) ¿Cuáles son los coeficientes de x^2 y x? ¿Y el término independiente?

   b) Encuentren dos números tales que la suma de ellos sea igual al coeficiente de x y el producto sea igual al término independiente.

   c) Con los números que determinaron, ¿pueden escribir la ecuación $x^2 + 9x + 18 = 0$ como un producto de dos factores lineales? ¿Cómo?

   d) ¿Cómo comprueban que la ecuación $x+9x+18 = 0$ y la que escribieron son equivalentes? Háganlo.

¿Cómo factorizan una ecuación cuadrática? ¿Cómo pueden validar su factorización? ¿Cómo pueden factorizar ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$? Propongan varios ejemplos y factorícenlos en el pizarrón. Despejen cualquier duda de sus compañeros. Escriban una conclusión en su cuaderno.

> La **factorización de la ecuación de segundo grado** $x^2+bx+c = 0$ es una expresión de la forma $(x+r)(x+s) = 0$ donde las raíces son $-r$ y $-s$. Por ejemplo, la factorización de $x^2-x-2 = 0$ es $(x+1)(x-2) = 0$, cuyas raíces de ambas son -1 y 2. $r+s = -b$ y $rs = c$, es decir, que la suma de las raíces es el inverso aditivo del coeficiente de x y el producto de las raíces es el término independiente de la ecuación cuadrática.

9. Completa la tabla 2.6.

Ecuación forma $(x+r)(x+s)=0$	Ecuación forma $ax^2+bx+c=0$	Soluciones	Valores			
			$r+s$	b	$r\times s$	c
$(x+2)(x+4)=0$						
$(x-2)(x+3)=0$						
$(x+21)(x-21)=0$						
$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+7)=0$						
$(x-5)(x-8)=0$						

Tabla 2.6

10. Completa la tabla 2.7.

Ecuación forma $ax^2 + bx + c = 0$	Valores				Ecuación forma $(x + r)(x + s) = 0$	Soluciones
	b	$r + s$	c	$r \times s$		
$x^2 - 19x = 0$						
$x^2 + 15x = 0$						
$x^2 - x - 20 = 0$						
$x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$						
$x^2 + 6x + 9 = 0$						
$x^2 + \frac{13}{4}x + \frac{3}{4} = 0$						

Tabla 2.7

11. Analiza las ecuaciones $2x^2 + 3x - 2 = 0$ y $x^2 + 3x - 1 = 0$.

    a) ¿Observas alguna semejanza entre ambas? ¿Cuál?

    b) ¿Cuáles son las soluciones a la ecuación $x^2 + 3x - 1 = 0$? Verifica tu respuesta.

    c) Las soluciones que encontraste, ¿son solución de $2x^2 + 3x - 2 = 0$? Explica

    d) ¿Las ecuaciones $2x^2 + 3x - 2 = 0$ y $x^2 + 3x - 1 = 0$ son equivalentes? ¿Por qué?

    ¿Cómo dividen una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entre a? ¿Siempre pueden dividir una ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ entre a? ¿Cómo tiene que ser a? Consideren que a es un número entero, fracción o decimal. Escriban una conclusión en su cuaderno.

12. Completa la tabla 2.8.

Ecuación	Valor de a	Ecuación dividida entre a	Factorización	Soluciones	Comprobación
$3x^2 + 21x + 36 = 0$					
$2x^2 + 4x - 6 = 0$					
$5x^2 - x - 40 = 0$					
$-6x^2 + 24x + 18 = 0$					

Tabla 2.8

a) Expliquen cómo encontrar las raíces de una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

b) Comenten acerca del procedimiento para encontrar las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$. Escriban una conclusión en su cuaderno.

Una **ecuación cuadrática general** del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c números enteros, fraccionarios o decimales y $a \neq 0$, es equivalente a la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, la cual se puede factorizar buscando números cuya suma sea igual a $-\frac{b}{a}$ y cuyo producto sea igual a $\frac{c}{a}$.

Problemas de factorización de ecuaciones cuadráticas

13. Escribe la ecuación cuadrática que tenga las raíces indicadas.

    a) -1 y 3.

    b) 0 y -17.

    c) -8 y 8.

    d) 11 y 12.

14. Resuelve las ecuaciones.

    a) $x^2 - x - 20 = 0$.

    b) $x^2 + 9x - 36 = 0$.

    c) $x^2 + 10x + 21 = 0$.

    d) $x^2 + 4x - 32 = 0$.

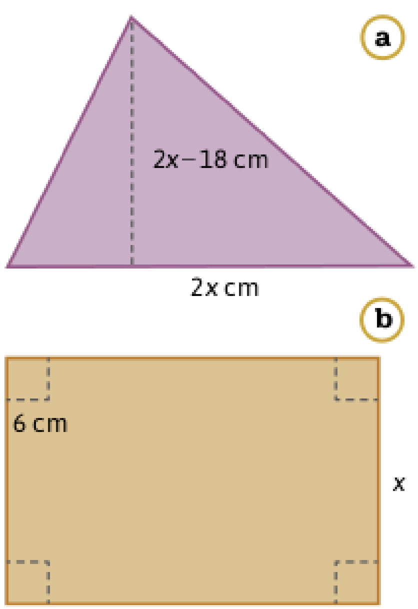


Figura 2.18: (a) Triángulo, (b) Pieza rectangular para armar una caja.

15. El área de un rectángulo es 28 cm^2. Tiene 3 cm más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?

16. Un terreno rectangular tiene área de 750 m^2. Se coloca una cerca alrededor de los 110 m de perímetro. Calcula las dimensiones del terreno.

17. Un rectángulo tiene el ancho más corto que el largo por 3 cm. El área de la figura es de 51 cm^2. ¿Qué medidas tiene?

18. El triángulo de la figura 2.18a tiene área igual a 52 cm^2, encuentra las medidas de su base y de su altura.

19. Una pieza rectangular como la de la figura 2.18b es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado en cada esquina y doblando los bordes. Escribe las medidas de la altura y el volumen de la caja, así como los lados de la pieza rectangular.

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. ¿Qué pasaría con el ancho del camino y el área verde si el valor de x se redujera a la mitad? Reflexiona acerca de los conocimientos o las habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. Dentro de 15 años, la edad de Elena en ese entonces multiplicada por 6 será un tercio del cuadrado de la edad actual. ¿Cuántos años tiene Elena hoy?

   a) Escribe una ecuación que describa el problema.

   b) ¿Hay más de una solución? Explica por qué y escríbelas, si es el caso.

L2. Fórmula general de la ecuación de segundo grado

Inicio

1. Lee la situación, observa la imagen de la figura 2.19 y responde lo que se pide.

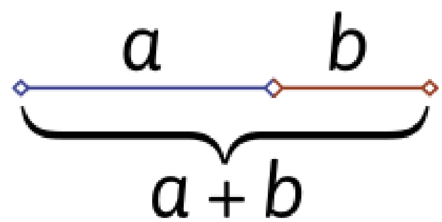


Figura 2.19

Dos números a y b, distintos de 0, están en proporción áurea si se cumple que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

de donde, después de hacer algunos cálculos, se obtiene la expresión

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$$

en la que $\frac{b}{a}$ es la razón áurea. ¿Cuál es este valor?

a) Si consideramos que $\frac{b}{a}$ se puede representar por otra variable, por ejemplo x, entonces, ¿cómo se escribe la ecuación?

b) Los valores $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ¿son soluciones de la ecuación?

c) Factoriza la ecuación.

d) ¿Cómo piensas que se podría resolver esta ecuación sin factorizar?

e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

f) Describe el procedimiento que realizaste para saber las respuestas.

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

La fórmula general sirve para resolver ecuaciones de segundo grado de todo tipo.

1. Considera la ecuación $3x^2 - 7x - 6 = 0$.

   a) Encuentra las soluciones de la ecuación. Verifica que lo sean.

   b) Compara la ecuación $3x^2-7x-6 = 0$ con la forma general de una cuadrática $ax^2+bx+c = 0$. ¿Cuáles son los valores de a, b y c?

c) Sustituye los valores anteriores en las siguientes expresiones. Realiza las operaciones necesarias para resolver y escribe las soluciones obtenidas.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$

d) Compara tus resultados con los del inciso a). ¿Qué observas?

2. Consideren la ecuación $3x^2 + 25x - 28 = 0$.

a) Comparen la ecuación con la forma general de una ecuación cuadrática. Anoten los valores de:

$a =$ ________
$b =$ ________
$c =$ ________

b) Sustituye los valores de a, b y c en las expresiones siguientes. Realiza las operaciones necesarias para resolver y escribe las soluciones obtenidas.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$

c) Escriban los valores obtenidos de x_1 y x_2 con una aproximación de dos decimales.

d) ¿Cómo pueden verificar que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $3x^2 + 25x - 28 = 0$? ¿Qué observan al hacer esta verificación?

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por las expresiones

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

que se pueden escribir en una sola expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

en la que el signo $\pm$ (más menos) indica que para obtener una raíz se suma - b y $\sqrt{b^2-4ac}$ y para obtener la otra se resta $-b$ y $\sqrt{b^2-4ac}$. Esta última expresión se conoce como **fórmula general** para resolver ecuaciones de segundo grado.

3. Hagan los cálculos en su cuaderno y anoten sus resultados aquí, para obtener las soluciones para cada ecuación e la siguiente tabla.

Ecuación	a	b	c	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$4x^2-3x-1=0$					
$0.75x^2-1.75x+0.5=0$					
$\frac{25}{3}x^2-3=0$					
$4x^2+13x-8=0$					
$-5x^2+10x-5=0$					

Tabla 2.9

4. Resuelvan las ecuaciones con el método que cada uno prefiera:

   a) $3x^2-2x-4=0$.
   b) $2x^2-5x+2=0$.
   c) $x^2-x-6=0$.
   d) $x^2+2x+1=0$.
   e) $9x^2-42x+40=0$.
   f) $0.4^2-2x-3=0$.
   g) $\frac{3}{4}x^2+6x-3=0$.
   h) $x^2-2x-3=0$.

   En su cuaderno, expliquen en qué casos usaron la fórmula general y por qué. ¿Usaron otros métodos de solución? ¿Cuáles? ¿Por qué?

5. Se quiere construir una ventana en la que su perímetro y área están determinados de antemano (figura 2.8). ¿Cuáles debe ser sus dimensiones?

   a) ¿De qué manera expresas algebraicamente el largo del rectángulo? ¿Y su ancho? Explica.
   b) Escribe una ecuación cuadrática que describa el problema.
   c) Escribe las soluciones de la ecuación.
   d) ¿Cuáles son las medidas de la ventana?

Discriminante

El discriminante permite determinar si una ecuación cuadrática tiene ninguna, una o dos soluciones.

6. Responde a los siguientes incisos.

   a) Consideren la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. Realicen lo que se pide. Hagan las operaciones en su cuaderno y anoten los resultados aquí.

   - Ubiquen los valores de a, b y c correspondientes a la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$ y obtengan sus soluciones.
   - ¿Cuál es el valor de la expresión $b^2 - 4ac$? ¿Se puede calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$? ¿Por qué?
   - ¿Observan alguna relación entre el valor de $b^2 - 4ac$ y el número de soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$? ¿Cuál?

   b) Consideren la ecuación $3x^2 + 24x + 48 = 0$. Hagan las operaciones en su cuaderno y anoten los resultados aquí.

   - Ubiquen los valores de a, b y c correspondientes a la ecuación $3x^2 + 24x + 48 = 0$ y obtengan sus soluciones.
   - ¿Cuál es el valor de la expresión $b^2 - 4ac$? ¿Se puede calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$? ¿Por qué?
   - ¿Observan alguna relación entre el valor de $b^2 - 4ac$ y el número de soluciones de la ecuación $3x^2 + 24x + 48 = 0$? ¿Cuál?

   c) Consideren la ecuación $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 15 = 0$. Hagan las operaciones en su cuaderno y anoten los resultados aquí.

   - Ubiquen los valores de a, b y c correspondientes a la ecuación $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 15 = 0$ y obtengan sus soluciones.
   - ¿Cuál es el valor de la expresión $b^2 - 4ac$? ¿Se puede calcular $\sqrt{b^2 - 4ac}$? ¿Por qué?
   - ¿Observan alguna relación entre el valor de $b^2 - 4ac$ y el número de soluciones de la ecuación $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 15 = 0$? ¿Cuál?

7. Completa la tabla 2.10.

Ecuación	a	b	c	b^2-4ac	Número de soluciones	Soluciones
$2x^2-x-60=0$						
$x^2-x+7=0$						
$5x^2-2x-3=0$						
$3x^2-18x+27=0$						
$x^2-3x+4=0$						
$x^2-2x+2=0$						
$-2x^2+x+3=0$						
$-4x^2+16x-16=0$						
$2x^2-3x+2=0$						
$40x^2-41x-132=0$						
$-13x^2+10x-7=0$						
$x^2+x+1=0$						

Tabla 2.10

a) Si $b^2-4ac=0$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática? ¿Por qué?

b) Sí $b^2-4ac>0$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática? ¿Por qué?

c) Si $b^2-4ac<0$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación cuadrática? ¿Por qué?

d) ¿Cuál es la importancia de calcular b^2-4ac? Escriban una conclusión en su cuaderno.

La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene:

- Dos soluciones si $b^2-4ac>0$ y las raíces son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Una solución si $b^2-4ac=0$ y la raíz es

$$x=\frac{-b}{2a}$$

.

- Ninguna solución real si $b^2-4ac<0$.

A la expresión b^2-4ac se le conoce como el **discriminante** de la ecuación cuadrática.

Problemas con ecuaciones de segundo grado

1. Contesta.

   a) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación $9x^2 - 2x + 4 = 0$?

   b) Escribe una ecuación que tenga soluciones $x_1 = 0.3$ y $x_2 = 0.7$.

   c) Anota una ecuación que tenga una sola solución $x = -3$.

2. Si al producto de un número natural por su consecutivo le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué números se trata?

3. Un proyectil es lanzado verticalmente y la expresión $h(t) = 512t - 16t^2$ describe la altura h de su posición después de t segundos.

   a) ¿Qué altura alcanza después de 6 segundos?

   b) ¿El proyectil alcanza la altura de 3,520 m? Si es así, ¿en qué tiempo la alcanza?

   c) ¿En qué momento alcanza la altura de 5,500 m?

   d) ¿En cuánto tiempo regresará a la tierra? Explica.

4. Un terreno rectangular tiene dimensiones de 8 m por 24 m. Si el ancho y el largo aumentan en una misma cantidad fija, el área aumenta 144 m^2. ¿Cuántos metros aumentan el largo y el ancho del terreno?

   a) ¿Cuántos metros aumentaron las dimensiones?

   b) ¿Cuáles son las nuevas medidas del largo y el ancho?

5. Si P pesos se invierten a dos años con un interés anual x; a ese interés, la inversión crecerá a otra cantidad A, también en pesos, mediante la fórmula $A = P(1+x)^2$. ¿A qué tasa de interés x, una cantidad inicial de \$1,000.00 crecerá a \$1,200.00 en los dos años?

6. Dos automóviles viajan a velocidades uniformes sobre la misma ruta cubriendo una distancia de 180 km. Uno va 5 km más despacio que otro y tarda 30 min más en hacer el recorrido. ¿A qué velocidad va cada automóvil?

7. En un concurso de matemáticas, se planteó un problema sobre una ecuación de segundo grado. Un estudiante lo resuelve pero se equivoca en el término independiente (c) y obtiene como soluciones: 9 y 3. Otro estudiante se equivoca en el coeficiente del término de primer grado (b) y obtiene como soluciones: -7 y -5. ¿Cuál fue la ecuación planteada del problema?

Cierre

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. ¿Qué pasaría si en la razón, se cambia $a-b$ en lugar de $a+b$? ¿Es más fácil resolver la ecuación? ¿Por qué? Reflexiona acerca de los conocimientos o las habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.

2. El sistema romano de proporciones arquitectónicas se basa en el llamado número de plata. Un rectángulo cuya relación entre los lados sea igual al número de plata se denomina rectángulo plateado. Resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$ para conocer su valor. ¿Cuántas soluciones tiene? ¿Qué solución es la que tiene sentido? Explica.

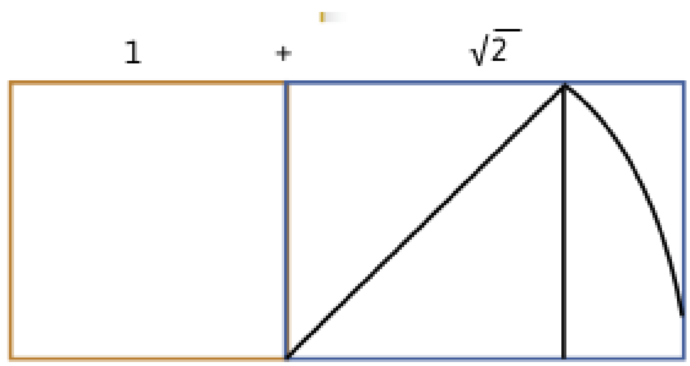


Figura 2.20: Rectángulo de plata.

Los matemáticos de la antigüedad buscaron cómo definir la belleza y establecieron que una figura que tenga proporción áurea nos resultará preciosa y hermos a. Denominaron a esta proporción el número de oro Φ (fi). Para calcularlo se basaron en una definición: una forma es bella cuando la proporción entre el total y su parte mayor (razón extrema) es igual a la proporción entre su parte mayor y su parte menor (razón media). Éste es el concepto de belleza que tomó **Leonardo da Vinci (1452- 1519)** en su famosa obra *El hombre de Vitruvio*. Con base en la figura, calcula el valor del número de oro.

$$\frac{\Phi+1}{\Phi}=\frac{\Phi}{1}$$

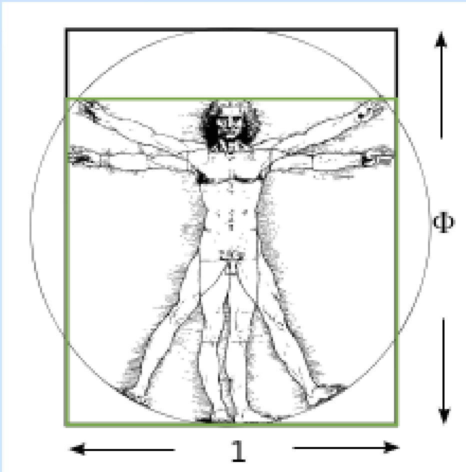


Figura 2.21: Bosquejo de *El hombre de Vitruvio* por Leonardo da Vinci.

S9 Relación entre variación y ecuación cuadrática

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas mediante la formulación y la solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

L1. Variación cuadrática y ecuación asociada

Inicio

Cierre

L2. Modelación de situaciones de variación cuadrática

Inicio

Cierre

S10 Características de la variación

Aprendizajes esperados:

Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la Física y de otros contextos.

L1. Distintos tipos de variación

Inicio

Cierre

L2. Dependencia y razón de cambio

Inicio

Cierre

S11 Análisis de la variación cuadrática

Aprendizajes esperados:

Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la Física y de otros contextos.

L1. Representación tabular de la variación cuadrática

Inicio

Cierre

L2. Representación algebraica de la variación cuadrática

Inicio

Cierre

L3. Representación gráfica de la variación cuadrática

Inicio

Cierre

L4. Representación tabular, algebraica y gráfica de variaciones cuadráticas

Inicio

Cierre

S12 Variaciones diversas

Aprendizajes esperados:

Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la Física y de otros contextos.

L1. Interpretación de gráficas

Inicio

Cierre

L2. Construcción de gráficas a partir de tablas

Inicio

Cierre

L3. Análisis de gráficas de variaciones diversas

Inicio

Cierre

S13 Eventos mutuamente excluyentes

L1. **Eventos singulares y no singulares**

L2. **Eventos mutuamente excluyentes**

L3. **Unión de dos eventos**

L4. **Regla de la suma de probabilidades**

S14 Expresiones algebraicas de segundo grado

L1. **Áreas y expresiones de segundo grado**

L2. **Operaciones algebraicas**

L3. **Factorización de expresiones de segundo grado**

S15 Expresiones algebraicas de ecuaciones y funciones

S16 Teorema de Pitágoras

L1. **Triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras**

L2. **El teorema de Pitágoras**

L3. **Aplicaciones del teorema de Pitágoras**

S17 Razones trigonométricas (seno, coseno y tangente)

S18 Resolución de triángulos rectángulos