Preparación para el Examen de la Unidad 3

Nombre del alumno: ------------------------------ **Fecha:** ------------------

Aprendizajes:

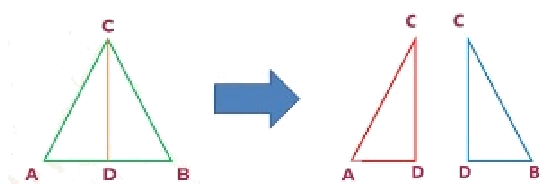
- Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
- Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
- Comprende los criterios de congruencia de triángulos y los utiliza para determinar triángulos congruentes.
- Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.

Puntuación:

Pregunta	1	2	3	4	5
Puntos	10	10	10	15	15
Obtenidos					

Pregunta	6	7	8		Total
Puntos	15	15	10		100
Obtenidos					

Triángulo isósceles



Si $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles, entonces

$$\triangle ADC \cong \triangle DBC$$

Perímetro y área de un triángulo

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con lados a, b y c, como se muestra en la figura 1.

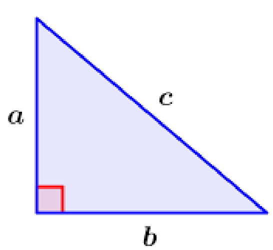


Figura 1

El perímetro P es:

$$P = a + b + c$$

El área A es:

$$A = \frac{1}{2}ab$$

Teorema de Pitágoras

El **teorema de Pitágoras** es una relación en geometría euclidiana entre los tres lados de un triángulo rectángulo. Afirma que el área del cuadrado cuyo lado es la hipotenusa c (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los catetos a y b (los otros dos lados que no son la hipotenusa), como se muestra a continuación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

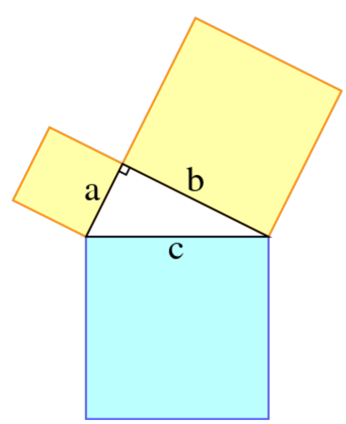


Figura 2

Ejemplo 1

Elige todas las respuestas adecuadas:

a ¿Cuáles longitudes de lados forman un triángulo rectángulo?

- √ **4.5, 6, 7.5**
- ☐ 5, $\sqrt{8}$, 3
- √ **12, 9, 15**
- √ **$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2**

Solución:
Para verificar si las opciones contienen o no las longitudes que corresponden a un triángulo rectángulo, es necesario sustituir estos valores en el teorema de Pitágoras, considerando la hipotenusa como el lado más largo en un triángulo rectángulo. Si se cumple la igualdad, entonces se trata de un triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 7.5^2 &= 4.5^2 + 6^2 \\ 56.25 &= 20.25 + 36 \\ 56.25 &= 56.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 5^2 &= (\sqrt{8})^2 + 3^2 \\ 25 &= 8 + 9 \\ 25 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 15^2 &= 9^2 + 12^2 \\ 225 &= 81 + 144 \\ 225 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 2^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \\ 4 &= 2 + 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Ejercicio 1

____ de 10 puntos

Elige todas las respuestas adecuadas:

a ¿Cuáles longitudes de lados forman un triángulo rectángulo?

- √ 9, 12, 15
- ☐ 7, 8, 9
- ☐ 3, 9, $\sqrt{95}$
- √ **3, 6, $\sqrt{45}$**

Solución:
Para verificar si las opciones contienen o no las longitudes que corresponden a un triángulo rectángulo, es necesario sustituir estos valores en el teorema de Pitágoras, considerando la hipotenusa como el lado más largo en un triángulo rectángulo. Si se cumple la igualdad, entonces se trata de un triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 15^2 &= 9^2 + 12^2 \\ 225 &= 81 + 144 \\ 225 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 9^2 &= 7^2 + 8^2 \\ 81 &= 49 + 64 \\ 81 &= 113 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (\sqrt{95})^2 &= 3^2 + 9^2 \\ 95 &= 9 + 81 \\ 95 &= 90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ (\sqrt{45})^2 &= 3^2 + 6^2 \\ 45 &= 9 + 36 \\ 45 &= 45 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

El diagrama muestra un triángulo rectángulo y tres cuadrados. El área del cuadrado más grande es 55 u^2, como se muestra en la figura 3.

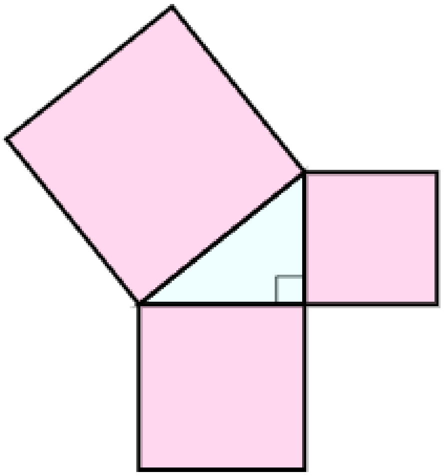


Figura 3

¿Cuáles pueden ser las áreas de los cuadrados más pequeños? *Marque todas las opciones que considere correctas.*

- ☐ $12u^2$ y $38u^2$
- ☐ $14u^2$ y $40u^2$
- √ $44u^2$ **y** $11u^2$
- ☐ $20u^2$ y $25u^2$
- √ $10u^2$ **y** $45u^2$
- √ $16u^2$ **y** $39u^2$

Ejercicio 2

____ de 10 puntos

El diagrama muestra un triángulo rectángulo y tres cuadrados. El área del cuadrado más grande es 36 unidades^2, como se muestra en la figura 4.

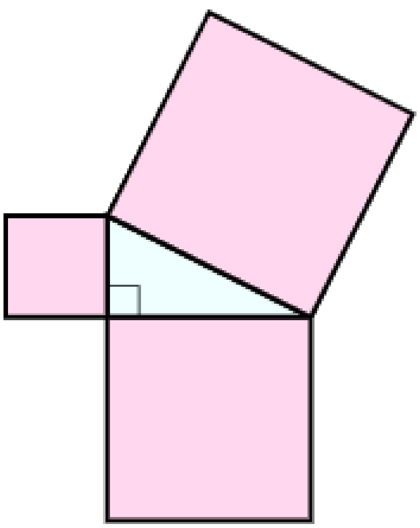


Figura 4

a **¿Cuáles pueden ser las áreas de los cuadrados más pequeños?**

- ☐ $15u^2$ y $20u^2$
- √ $6u^2$ **y** $30u^2$
- ☐ $34u^2$ y $6u^2$
- ☐ $10u^2$ y $16u^2$
- √ $26u^2$ **y** $10u^2$
- √ $24u^2$ **y** $12u^2$
- ☐ $8u^2$ y $27u^2$
- ☐ $6u^2$ y $6u^2$

Ejemplo 3

Calcula el valor de x en el triángulo isóseles que se muestra abajo (figura 5).

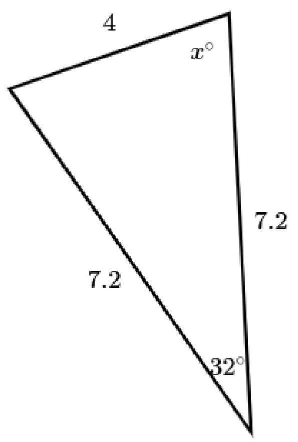


Figura 5

Solución:
Dado que tiene dos lados congruentes (aquellos cuya longitud es 7.2), el triángulo es isósceles. Los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes, por lo que el ángulo sin etiqueta mide $x°$ (Ver Figura 6). Los tres ángulos en un triángulo suman 180°. Podemos escribir este enunciado como una ecuación:

$$x° + x° + 32° = 180°$$
$$\therefore x° = \frac{180° - 32°}{2} = 74°$$

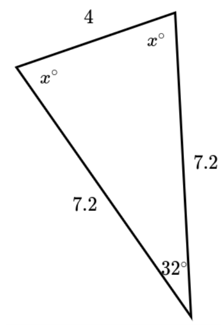


Figura 6

Ejercicio 3

___ de 10 puntos

¿Cuál es el valor de x en la figura 7?

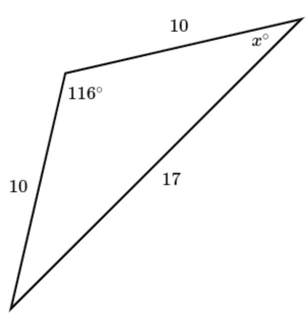


Figura 7

Solución:
Dado que tiene dos lados congruentes (aquellos cuya longitud es 10), el triángulo es isósceles. Los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes, por lo que el ángulo sin etiqueta mide $x°$ (Ver Figura 8). Los tres ángulos en un triángulo suman 180°. Podemos escribir este enunciado como una ecuación:

$$x° + x° + 116° = 180°$$
$$\therefore x° = \frac{180° - 116°}{2} = 32°$$

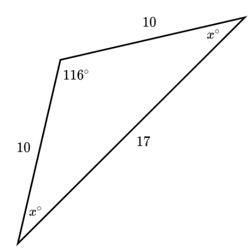
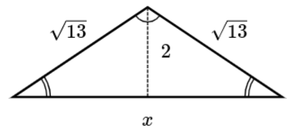


Figura 8

Ejemplo 4

Encuentra el valor de x en el siguiente triángulo:



Solución:

El triángulo isóceles está formado por 2 triángulos congruentes (ver figura 9a). La base de cada triángulo rectángulo es la mitad de la base del triángulo isóceles. Cuando se trata de un triángulo rectángulo podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la figura del problema con a, b y c (ver figura 9b).

$a^2 + b^2 = c^2$	El teorema de Pitágoras
$a^2 + 2^2 = \sqrt{13}^2$	Sustituye las longitudes
$a^2 + 4 = 13$	Evalua los cuadrados conocidos
$a^2 = 13 - 4$	Despejando x
$a^2 = 9$	Restando
$a = 3$	Calculando la raíz en ambos lados

Como $a = 3$ y a es la mitad de la longitud de x (ver figura 9c), podemos multiplicar para obtener x.

$$x = a \cdot 2$$
$$x = 3 \cdot 2$$
$$x = 6$$

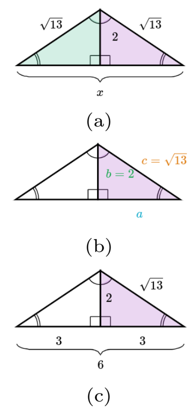
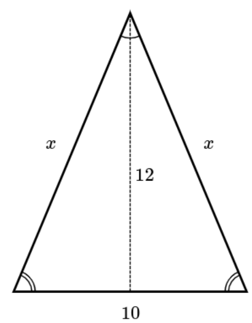


Figura 9

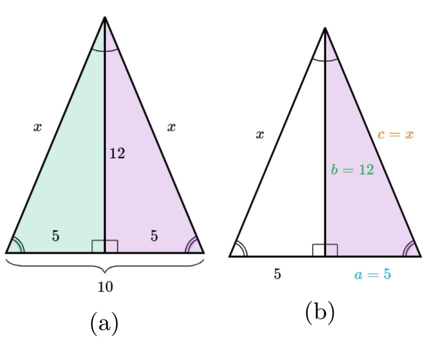
Ejercicio 4 ____ de 15 puntos

Encuentra el valor de x en el siguiente triángulo:



Solución:

Figura 10



El triángulo isóceles está formado por 2 triángulos congruentes (ver figura 10a). La base de cada triángulo rectángulo es la mitad de la base del triángulo isóceles. Cuando se trata de un triángulo rectángulo podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la figura del problema con a, b y c (ver figura 10b). Observa que a y b pueden intercambiarse, pues son catetos.

$a^2 + b^2 = c^2$	El teorema de Pitágoras
$5^2 + 12^2 = x^2$	Sustituye las longitudes
$25 + 144 = x^2$	Evalua los cuadrados conocidos
$169 = x^2$	Sumando
$13 = x$	Calculando la raíz en ambos lados de la ecuación

Ejemplo 5

¿Cuál es el área del triángulo de la figura 11?

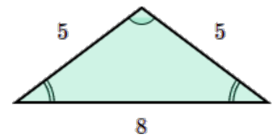


Figura 11

Solución:
Para determinar el área del triángulo debemos saber la base y la altura. Llamemos x a la longitud (ver Figura 12). Cuando tenemos un triángulo rectángulo, podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener la longitud del cateto. La ecuación para el teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

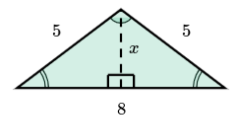


Figura 12

En este caso, $a = 4$, $b = x$ y $c = 5$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4^2 + x^2 &= 5^2 \\ 16 + x^2 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 16 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La altura del triángulo es 3.

El área del triángulo es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bx \\ A &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \\ A &= 12 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

____ de 15 puntos

¿Cuál es el área del triángulo de la figura 13?

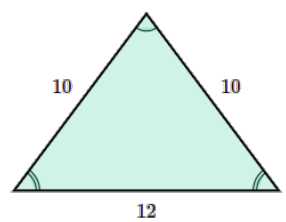
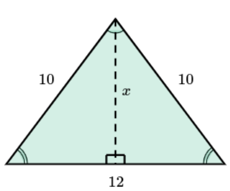
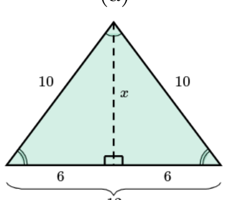


Figura 13

Solución:



(a)



(b)

Para determinar el área del triángulo debemos saber la base y la altura. Llamemos x a la altura (ver Figura 14a). Estos dos triángulos rectángulos son congruentes porque uno es la reflexión del otro a través de la línea punteada. La base de cada triángulo rectángulo es la mitad de la base del triángulo isósceles. Cuando tenemos un triángulo rectángulo, podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener la altura (ver Figura 14b). La ecuación para el teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En este caso, $a = 6$, $b = x$ y $c = 10$. Entonces,

$$\begin{aligned} 6^2 + x^2 &= 10^2 \\ 36 + x^2 &= 100 \\ x^2 &= 100 - 36 \\ x^2 &= 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

La altura del triángulo es 8. El área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ u}^2$$

Ejemplo 6

¿Cuál es el perímetro del trapecio de la figura 15?

Considera que cada cuadro mide 1 unidad de longitud.

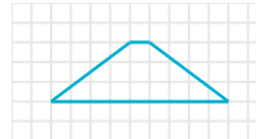


Figura 15

Solución:

Figura 16

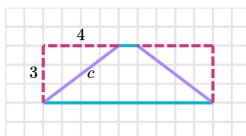


Figura 18

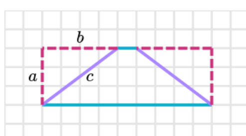


Figura 17

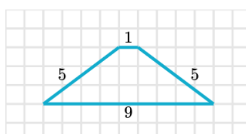


Figura 19

El perímetro es la distancia alrededor de una figura. Cada recta diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver figura 16). Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la Figura del problema con a, b y c (ver figura 17). Podemos contar los cuadrados para encontrar las longitudes de a y b, y luego sustituir esos valores en el teorema de Pitágoras (ver Figura 18).

$a^2 + b^2 = c^2$	El teorema de Pitágoras
$3^2 + 4^2 = c^2$	Sustituye las longitudes
$9 + 16 = c^2$	Evalua los cuadrados conocidos
$25 = c^2$	Sumando
$5 = c$	Calculando la raíz en ambos lados de la ecuación

La longitud de la otra recta diagonal también es 5 (ver Figura 19). Ahora que conocemos la longitud de cada diagonal, podemos encontrar la longitud de los lados faltantes para calcular el perímetro. Como los lados restantes son líneas horizontales, podemos contar los cuadrados para obtener sus longitudes.

$$9 + 5 + 1 + 5 = 20$$

El perímetro del triángulo es 20 unidades.

Ejercicio 6

____ de 15 puntos

¿Cuál es el perímetro del paralelogramo de la figura 20?

Considera que cada cuadro mide 1 unidad de longitud.

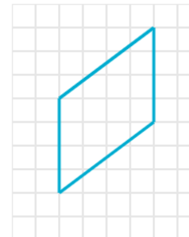


Figura 20

Solución:

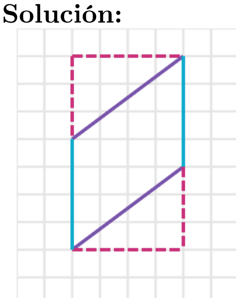


Figura 21

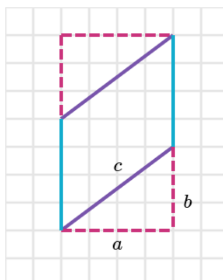


Figura 22

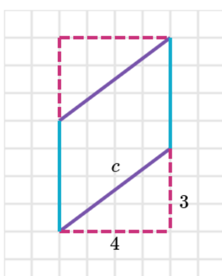


Figura 23

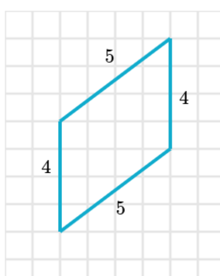


Figura 24

El perímetro es la distancia alrededor de una figura. Cada recta diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver Figura 21). Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la Figura del problema con a, b y c (ver Figura 22). Podemos contar los cuadrados para encontrar las longitudes de a y b, y luego sustituir esos valores en el teorema de Pitágoras (ver Figura 23).

$a^2 + b^2 = c^2$	El teorema de Pitágoras
$4^2 + 3^2 = c^2$	Sustituye las longitudes
$16 + 9 = c^2$	Evalua los cuadrados conocidos
$25 = c^2$	Sumando
$5 = c$	Calculando la raíz en ambos lados de la ecuación

Ahora que conocemos la longitud de la diagonal, podemos encontrar la longitud de los dos lados faltantes para calcular el perímetro. Como los lados faltantes son rectas verticales u horizontales, podemos contar los cuadrados para obtener sus longitudes. (ver Figura 24).

$$5 + 5 + 4 + 4 = 18$$

El perímetro del paralelogramo es 418 unidades.

Ejemplo 7

Una tirolesa comienza en una plataforma que está a 40 metros del suelo. El punto de anclaje de la tirolesa está a 198 metros en dirección horizontal desde la base de la plataforma, como se muestran a continuación en la figura 25. **¿Qué tan larga es la tirolesa?**

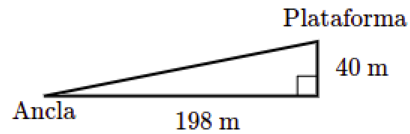


Figura 25

Solución:
Podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener x. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los dos catetos del triángulo y c es la longitud de la hipotenusa. En este caso, $a = 40$, $b = 198$ y $c = x$.

$$x^2 = 40^2 + 198^2$$
$$x^2 = 1,600 + 39,204$$
$$x^2 = 40,804$$
$$x = \sqrt{40,804}$$
$$x = 202$$

La longitud de la tirolesa es 202 metros.

Ejercicio 7

____ de 15 puntos

La imagen muestra las distancias en kilómetros entre tres ciudades, como se muestran a continuación en la figura 26. **¿Qué tanto más corto es viajar directamente de Aurora a Clifton que de Aurora a Clifton pasando por Burlington?**

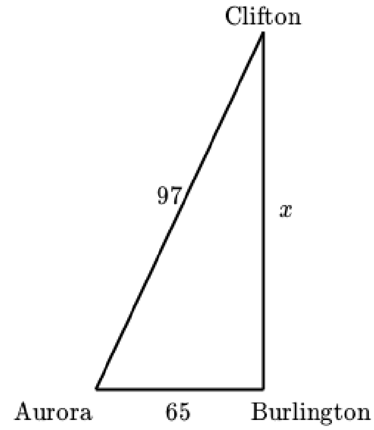


Figura 26

Solución:
Podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener x. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los dos catetos del triángulo y c es la longitud de la hipotenusa. En este caso, $a = 65$, $b = x$ y $c = 97$.

$$\begin{aligned} 97^2 &= 65^2 + x^2 \\ 9,409 &= 4,225 + x^2 \\ 9,409 - 4,225 &= x^2 \\ 5,184 &= x^2 \\ \sqrt{5,184} &= x \\ 72 &= x \end{aligned}$$

Para calcular qué tan lejos es viajar a Clifton pasando por Burlington, podemos sumar las distancias entre cada una de las ciudades.

$$65 + 72 = 137$$

Para calcular qué tanto más corto es viajar directamente a Clifton, podemos restar.

$$137 - 97 = 40$$

Viajar directamente de Aurora a Clifton es 40 kilómetros más corto.

Ejemplo 8

Considera los dos triángulos que se muestran abajo en la figura 27 (los triángulos no están dibujados a escala).
¿Los dos triángulos son congruentes?
Escoge 1 respuesta y explica el por qué:

- Ⓐ **Sí.**
- Ⓑ No.
- Ⓒ No hay suficiente información para decidir.

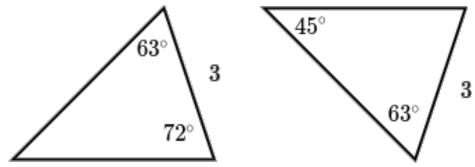


Figura 27

Solución:

Dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. En otras palabras, dos triángulos son congruentes si todos los lados y ángulos correspondientes son congruentes. Sin embargo, no necesitamos mostrar la congruencia de todos los lados y ángulos correspondientes para demostrar que dos triángulos son congruentes. Los criterios de congruencia (LLL, LAL, ALA) y el teorema AAL son atajos útiles para determinar congruencia de triángulos. En este caso, nos dan un lado y dos ángulos en cada triángulo. Puesto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, podemos encontrar el ángulo restante en cada triángulo. Ahora observa que dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes a dos ángulos y el lado entre ellos de otro triángulo. Por lo tanto, los triángulos son congruentes por el criterio ALA. **Sí, los triángulos son congruentes.**

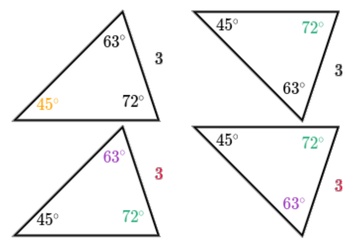


Figura 28

Ejercicio 8

____ de 10 puntos

Considera los dos triángulos que se muestran abajo en la Figura 29 (los triángulos no están dibujados a escala).
¿Los dos triángulos son congruentes?
Escoge 1 respuesta:

- Ⓐ Sí.
- Ⓑ **No.**
- Ⓒ No hay suficiente información para decidir.

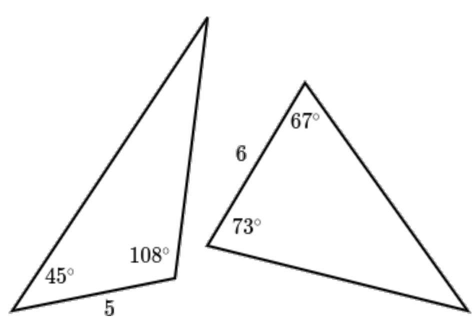


Figura 29

Solución:
Dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. En otras palabras, dos triángulos son congruentes si todos los lados y ángulos correspondientes son congruentes.
Puesto que nos dan cuatro ángulos distintos, no hay manera de que los tres ángulos del primer triángulo sean congruentes a los ángulos del segundo triángulo. De hecho, como los ángulos de un triángulo suman 180°, podemos calcular estos ángulos para verificarlo. Los ángulos del primer triángulo serían 37°, 110° y 33° y los ángulos del segundo triángulo serían 100°, 43° y 37°. Los ángulos correspondientes no son congruentes. Por lo tanto los triángulos no pueden ser congruentes.
No, los triángulos no son congruentes.