1 Sistemas de ecuaciones lineales

Abreviados como SE, es un conjunto de varias ecuaciones lineales en donde hay dos o más variables y en donde el exponente que tienen todas las variables es 1. El objetivo principal de un sistema de ecuaciones lineales es encontrar el valor de las n variables que satisfacen a las n ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales tiene la siguiente forma:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x - y + 3z = -5 \\ 4x + 3y - 2z = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} w + x + y + z = 4 \\ -2w + 2x - y + 3z = 7 \\ 3w + 4x + 3y - 2z = -2 \\ w + x - y - z = -4 \end{cases}$$

Figura 1 Del lado izquierdo se muestra un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 variables, el cual también se le conoce como un sistema de 3×3. Del lado derecho un sistema de 4 ecuaciones con 4 variables o un sistema de 4×4.

1.1 Métodos de resolución

Existen 4 métodos para resolver un SE, a continuación se muestran:

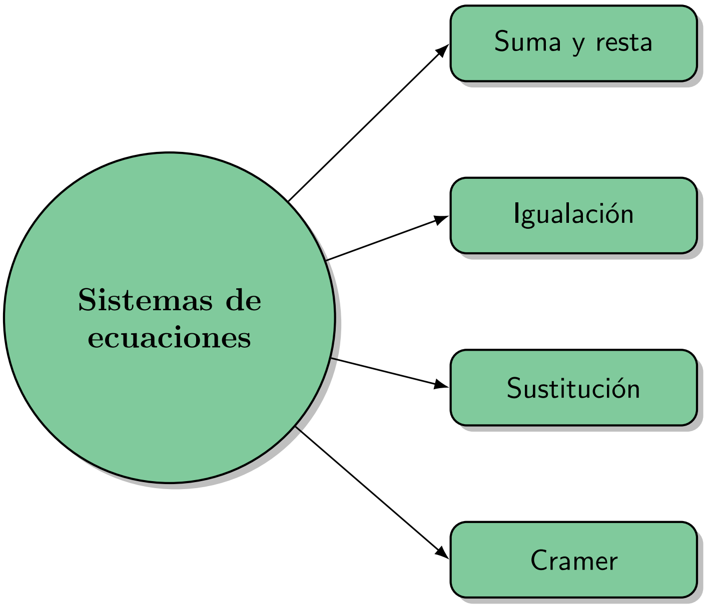

Figura 2 Métodos para resolver un SE.

2 Método de suma y resta

También conocido como método de *reducción* o de *eliminación*, su objetivo es eliminar una variable del SE, mediante la multiplicación de ecuaciones por coeficientes. Para resolver un SE usando este método se deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Elegir la variable a eliminar.

PASO 2 Multiplicar las ecuaciones por los coeficientes de las variables contrarias a cada ecuación *(Se puede omitir este paso, si los coeficientes de la variable a eliminar son iguales en ambas ecuaciones)*.

PASO 3 Para eliminar la variable, hay que sumar las ecuaciones *(si los signos son diferentes de la variable a eliminar)* o restar las ecuaciones *(si los signos son iguales de la variable a eliminar)*.

PASO 4 Resolver la ecuación con una sola variable.

PASO 5 Sustituir el valor obtenido en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x - y = 4 & (1) \\ x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

1) Suma las ecuaciones (1) y (2) para eliminar la variable y.

$$\{2x = 6 \qquad (3)$$

2) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 1 para conocer el valor de x.

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3) Sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 3 - y &= 4 \\ -y &= 4 - 3 \\ y &= -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3 + y &= 2 \\ y &= 2 - 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

En el siguiente ejemplo se muestra como resolver un sistema de $2x2$, con el método de suma y resta, en donde los coeficientes de las variables son diferentes en ambas ecuaciones. Para resolver este tipo de sistemas, hay que multiplicar cada una de las ecuaciones por el coeficiente de la variable contraria a cada ecuación.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 & (1) \\ 3x - y = 9 & (2) \end{cases}$$

1) Multiplica las ecuaciones (1) y (2) por el coeficiente de la variable x contrario a cada ecuación.

$$\begin{cases} 6x - 9y = 39 & (3) \\ 6x - 2y = 18 & (4) \end{cases}$$

2) Resta las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

$$\{-7y = 21 \qquad (5)$$

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de y.

$$\begin{aligned} -7y =& 21 \\ y =& -3 \end{aligned}$$

4) Sustituye el valor de y en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x - 3(-3) =& 13 \\ 2x + 9 =& 13 \\ 2x =& 4 \\ x =& 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x - (-3) =& 9 \\ 3x + 3 =& 9 \\ 3x =& 6 \\ x =& 2 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 2, y = -3$$

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 3 & (1) \\ -x + 2y = 10 & (2) \end{cases}$$

1) Multiplica las ecuaciones (1) y (2) por el coeficiente de la variable y contrario a cada ecuación.

$$\begin{cases} 6x + 10y = 6 & (3) \\ -5x + 10y = 50 & (4) \end{cases}$$

2) Resta las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

$$\{11x = -44 \qquad (5)$$

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de x.

$$\begin{aligned} 11x =& -44 \\ x =& -4 \end{aligned}$$

4) Sustituye el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 3(-4) + 5y =& 3 \\ -12 + 5y =& 3 \\ 5y =& 3 + 12 \\ 5y =& 15 \\ y =& 5 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -(-4) + 2y =& 10 \\ 4 + 2y =& 10 \\ 2y =& 10 - 4 \\ y =& 6 \\ y =& 3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = -4, y = 3$$

3 Método de sustitución

El objetivo principal de este método es el de despejar el valor de cualquier variable de cualquier ecuación y sustituir el valor obtenido en la ecuación restante. Para resolver un SE usando este método se deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Despejar cualquier variable de cualquier ecuación.

PASO 2 Sustituir el valor de la variable obtenida en el paso 1 en la ecuación restante.

PASO 3 Resolver la ecuación con una sola variable.

PASO 4 Sustituir el valor obtenido en el paso 3 en la ecuación obtenida en el paso 1.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 & (1) \\ 3x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

1) Despeja x de la ecuación (1).

$$x = \frac{-1 - 3y}{2} \qquad (3)$$

2) Sustituye el valor obtenido en el paso 1 en la ecuación (2).

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de y.

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{-1-3y}{2}\right) + 4y &= 0 \\ 3(-1-3y) + 8y &= 0 \\ -3 - 9y + 8y &= 0 \\ -y &= 3 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Multiplica toda la ecuación por 2

4) Sustituye el valor de y en la ecuación obtenida en el paso 1.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 - 3(-3)}{2} \\ x &= \frac{-1 + 9}{2} \\ x &= \frac{8}{2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 4, y = -3$$

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - y = 2 & (1) \\ 2x + 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

1) Despeja y de la ecuación (1).

$$y = 3x - 2 \qquad (3)$$

2) Sustituye el valor obtenido en el paso 1 en la ecuación (2).

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de x.

$$\begin{aligned} 2x + 3(3x - 2) &= 5 \\ 2x + 9x - 6 &= 5 \\ 11x &= 5 + 6 \\ 11x &= 11 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4) Sustituye el valor de x en la ecuación obtenida en el paso 1.

$$\begin{aligned} y &= 3(1) - 2 \\ y &= 3 - 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1, y = 1$$

4 Método de igualación

Este método es similar al de sustitución, la diferencia está en que esté método se despeja la misma variable de ambas ecuaciones, para luego igualarlas, es común que con este método se tenga que resolver una ecuación fraccionaria. Para resolver un SE usando este método se deben realizar los siguientes pasos:

PASO 1 Despejar la misma variable en todas las ecuaciones.

PASO 2 Igualar las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

PASO 3 Resolver la ecuación con una sola variable.

PASO 4 Sustituir el valor obtenido el paso 3 en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

1) Despeja la variable x de ambas ecuaciones.

$$x = \frac{3y+9}{2} \qquad (3)$$

$$x = \frac{-4y+5}{3} \qquad (4)$$

2) Iguala las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de y.

$$\begin{aligned} \frac{3y+9}{2} &= \frac{-4y+5}{3} \\ 3(3y+9) &= 2(-4y+5) \\ 9y + 27 &= -8y + 10 \\ 9y + 8y &= 10 - 27 \\ 17y &= -17 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Multiplica toda la ecuación por 6

Agrupa las incógnitas y números en lados opuestos

4) Sustituye el valor de y en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

$$\begin{aligned} x &= \frac{3(-1)+9}{2} \\ x &= \frac{-3+9}{2} \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= \frac{-4(-1)+5}{3} \\ x &= \frac{4+5}{3} \\ x &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$

EJEMPLO

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 & (1) \\ 2x + 5y = 11 & (2) \end{cases}$$

1) Despeja la variable x de ambas ecuaciones.

$$x = \frac{-2y}{3} \qquad (3)$$
$$x = \frac{-5y+11}{2} \qquad (4)$$

2) Iguala las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

3) Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2 para conocer el valor de y.

$$\begin{aligned} \frac{-2y}{3} &= \frac{-5y+11}{2} \\ 2(-2y) &= 3(-5y+11) \\ -4y &= -15y + 33 \\ -4y + 15y &= 33 \\ 11y &= 33 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Multiplica toda la ecuación por 6

Agrupa las incógnitas y números en lados opuestos

4) Sustituye el valor de y en cualquiera de las ecuaciones obtenidas en el paso 1.

$$x = \frac{-2(3)}{3} \qquad y = \frac{-5(3)+11}{2}$$
$$x = \frac{-6}{3} \qquad y = \frac{-4}{2}$$
$$x = -2 \qquad y = -2$$

$$\therefore x = -2, y = 3$$