Matemáticas 2

Cuaderno de trabajo
para los alumnos de 2° de Secundaria
en el curso durante el ciclo escolar
2022-2023

POR
J. C. Melchor Pinto
Profesor de asignatura en

Índice general

L1. Multiplicación de fracciones y decimales

S2 Multiplicación y división con fracciones y decimales positivos

S3 Multiplicación y división de números positivos y negativos

L1. **Multiplicación de números positivos y negativos**

L2. **División de números positivos y negativos**

L3. **Multiplicación y división de números con signo**

S4 Potencia con exponente entero

L1. Productos de potencias enteras de la misma base

L2. Potencia de una potencia entera

L3. Cociente de potencias enteras de la misma base

L4. Potencias con exponente negativo y notación científica

S5 Raíces cuadradas

L1. Significado de la raíz cuadrada

L2. Aproximación de raíces cuadradas

L3. Cuadrados y raíces cuadradas

S6 Propiedades de polígonos

L1. Diagonales de un polígono

L2. Ángulos de un polígono

S7 Construcción de polígonos regulares

L1. Algunas construcciones de polígonos

S8 Conversión de unidades del SI y del sistema inglés

L1. Conversión entre unidades del SI

L2. Conversión entre unidades del sistema inglés

L3. Conversión de unidades del SI al sistema inglés y viceversa

S9 Histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea

L1. Histogramas

L2. Polígonos de frecuencias

L3. Gráficas de línea

L4. Elección de la representación gráfica más adecuada

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional

L1. Proporcionalidad directa e inversa

Proporcionalidad Directa:
Relación entre dos cantidades que cambian en el mismo sentido.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por el mismo número. El cociente entre la segunda y la primera magnitud es constante y se denomina constante de proporcionalidad directa.

Dos cantidades son inversamente proporcionales si al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número. El producto de la segunda y la primera magnitud es constante y se llama constante de proporcionalidad inversa.

Proporcionalidad Inversa:
Relación entre dos cantidades que cambian en sentidos opuestos.

1. Señala si las relaciones son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

   a) La población mundial y el consumo de agua.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   b) La población mundial y la cantidad de agua disponible por persona.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   c) La distancia al sol y la temperatura.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   d) El tamaño de un planeta y su fuerza de gravedad.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   e) La velocidad de un móvil y la distancia recorrida.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   f) La cantidad de imágenes guardadas en el celular y la cantidad de espacio libre.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   g) El tamaño de un archivo y el tiempo de descarga.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   h) La velocidad de conexión a Internet y el tiempo de descarga de archivos.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

Proporcionalidad con tablas de variación

Para identificar las características de los tipos de relaciones, en especial las que se refieren a proporcionalidad inversa, Analiza las siguientes situaciones, completa las tablas de variación y responde a cada una de las preguntas.

1. La autopista 10 en Haradh, Arabia Saudita, tiene más de 250 km en línea recta. Un automóvil viaja por esta carretera con velocidad constante de 120 km/h durante 250 km.

Distancia [km]	Tiempo [h]
50	
75	
100	
125	
150	
175	
200	
225	
250	

Tabla 2.1: Registro de la distancia y el tiempo de recorrido

   a) Completen la Tabla 2.1 que registra la velocidad del automóvil.
   b) ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ¿Por qué?
   c) ¿En cuántos minutos recorre 1 km? Explica tu procedimiento.
   d) ¿En cuánto tiempo se recorrieron 120 km?
   e) ¿Y en cuánto tiempo se recorrerán 230 km?

2. Analicen los rectángulos de la figura 2.1.

Lado 1 (u)	Lado 2 (u)	Área (u^2)
2	24	48
3		
5		
6		

Tabla 2.2

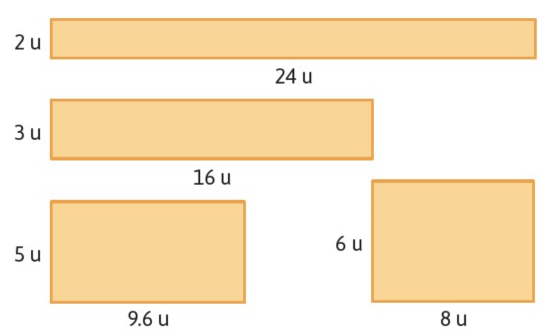


Figura 2.1: Grupo de rectángulos con medidas de largo y ancho para cada uno.

   a) Completa la Tabla 2.2 que muestra la medida de los lados de un conjunto de rectángulos.
   b) ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ¿Por qué?
   c) Si se añade el rectángulo cuyo lado 1 mide 4 u, ¿cuál es la medida del otro lado? ¿Cuál es su área? Expliquen su procedimiento.
   d) ¿Cómo es el área de los rectángulos?

L2. Problemas sobre proporcionalidad directa e inversa

Presentamos diversas situaciones que involucran la interpretación de relaciones directas e inversas. Intenta resolver por tu cuenta cada situación. Luego, una vez que agotes todas tus estrategias, analiza con detenimiento las propuesta de resolución de cada situación.

Ejemplo 1

Marcos sale diariamente con su bicicleta y recorre todo el contorno del parque de su barrio. Él sabe que tarda aproximadamente 6 minutos en dar 3 vueltas al parque. Si Marcos quiere dar 12 vueltas al parque,

¿Cuánto tiempo tardará?

Asignemos x a la cantidad de vueltas e y el tiempo necesario para dar las x vueltas.

$$x = \text{número de vueltas.} \quad y = \text{tiempo para dar las vueltas.}$$

Planteamos la relación directa entre x e y.

$$y = kx$$

Reemplazamos los valores que nos dan en la situación; 6 minutos para dar 3 vueltas. Es decir, $x = 3$ e $y = 6$.

$$6 = k(3) \Rightarrow k = 2$$

Por tanto, la relación proporcional es $y = 2x$. Como nos piden calcular la cantidad de minutos que necesita Marcos para dar 12 vueltas, sabemos que $x = 12$. Reemplazamos:

$$y = 2(12) \Rightarrow y = 24$$

Por tanto, Marcos tardará 24 minutos en dar 12 vueltas alrededor del parque de su barrio.

Ejemplo 2

Cinthia va a la escuela en bicicleta desde su casa. Ella calcula que llega al colegio en 45 minutos cuando va a una velocidad promedio de 0.75 kilómetros por minuto.

¿Cuánto tiempo tardará si cambia la velocidad a 0.5 kilómetros por minuto?

Asignemos t al tiempo que demora en ir de su casa a la escuela y v a la velocidad promedio de su bicicleta.

$$t = \text{tiempo} \quad v = \text{velocidad.}$$

Observa que la relación entre el tiempo y la velocidad es una relación inversa. Planteamos esa relación inversa entre x e y.

$$v = k \times \frac{1}{t}$$

Reemplazamos los valores que nos dan en la situación, 45 minutos a una velocidad de 0.75 kilómetros por minuto. Es decir $x = 45$ e $y = 0.75$.

$$0.75 = k \times \frac{1}{45} \Rightarrow k = 33.75$$

Por tanto, la relación proporcional es:

$$v = 33.75 \times \frac{1}{t}$$

Como nos piden calcular la cantidad de minutos que tarda en llegar a la escuela a una velocidad de 0.5 kilómetros por minuto, sabemos que

$$0.5 = 33.75 \times \frac{1}{t} \Rightarrow t = 67.5 \text{ minutos}$$

Por tanto, Cinthia tardará 67.5 minutos en llegar a la escuela a una velocidad de 0.5 kilómetros por minuto.

Ejemplo 3

En una tienda se venden rollos de papel higiénico. Cada rollo cuesta 2 dólares, pero hay la siguiente oferta: Lleva 3 rollos de papel higiénico y paga solo 2. Carlos compra 20 rollos del papel higiénico en oferta en esa tienda.
¿Es correcto afirmar que pagó 40 dólares?
Para resolver este problema utilizaremos una tabla de valores como la siguiente:

Cantidad de rollos	Rollos que paga	Pago total (en dólares)
3	2	$2 \times 2 = 4$
4	3	$2 \times 3 = 6$
5	4	$2 \times 4 = 8$
6	4	$2 \times 4 = 8$
7	5	$2 \times 5 = 10$
8	6	$2 \times 6 = 12$
9	6	$2 \times 6 = 12$

	Cantidad de rollos	Rollos que se paga		Pago total
	3	2		$2 \times 2 = 4$
x3	6	4	x3	$2 \times 4 = 8$
	9	6		$2 \times 4 = 8$
x2	18	12	x2	$2 \times 12 = 24$

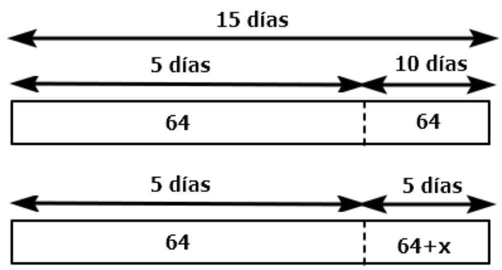
Observamos que, si la cantidad de rollos es un múltiplo de 3, se cumple una relación proporcional directa entre dicha cantidad y los rollos que deberá pagar. Como Carlos compra 20 rollos, podemos observar que el múltiplo de 3 más cercano a 20 es 18. Así obtendremos la cantidad de rollos a pagar luego de aplicar la oferta.

Gracias a la tabla, podemos observar que, llevando 18 rollos en oferta, solo pagará 12 rollos, es decir, 24 dólares. Para comprar los 20 rollos, Carlos deberá pagar 2 rollos adicionales a un monto de 4 dólares.

Finalmente, por toda la compra pagará 24 dólares más 4 dólares adicionales, es decir, un total de 28 dólares. Por tanto, la afirmación no es correcta. Carlos no pagó 40 dólares, sino 28.

Ejemplo 4 Un grupo de 64 obreros puede terminar una obra en 15 días. Al cabo de 5 días de trabajo, se les unen obreros de otro grupo, de modo que tardan 5 días menos en terminar la obra.
¿Cuántos obreros había en el segundo grupo?

Sabemos que 64 obreros terminarían la obra en 15 días. Como luego de los primeros 5 días de trabajo llegaron más obreros, hacemos el siguiente gráfico para representar la situación:



Observamos que, en esta situación, a mayor cantidad de obreros, menos días se necesitarán para terminar la obra.

Cantidad de obreros	64	64+x
Cantidad de días de trabajo	10	5

Como es una relación inversamente proporcional, planteamos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 64 \times 10 &= 5 \times (64 + x) \\ 640 &= 320 + 5x \\ 5x &= 320 \\ x &= 64 \end{aligned}$$

En el segundo grupo, había 64 obreros más, es decir, un total de 128 obreros.

Ejercicios

Copia en tu libreta las siguientes situaciones. Realiza, para cada uno de ellas, todas las operaciones y procedimientos necesarios para obtener la respuesta a cada una de las preguntas. Al terminar, señala la opción que contenga la respuesta correcta.

1. Un grupo de 20 obreros puede terminar una construcción en 40 días. Al cabo de 10 días de trabajo, se les unen obreros de otro grupo, de modo que en 15 días más terminan la obra.
   ¿Cuántos obreros había en el segundo grupo?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 20 obreros ☐ 5 obreros ☐ 10 obreros ☐ 15 obreros

2. Mateo va en auto de su casa a la universidad. Si va a una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora, tarda 1 hora.
   ¿Cuánto tiempo tardaría si fuera a 40 kilómetros por hora?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 1 hora y 30 minutos ☐ 30 minutos ☐ 1 hora y 20 minutos ☐ 2 horas

3. En una tienda, se venden rollos de papel higiénico. Cada rollo cuesta 2 dólares, pero hay la siguiente oferta: Lleva 3 rollos de papel higiénico y paga sólo 2. María va a la tienda a comprar 20 rollos de papel higiénico en oferta.
   ¿Cuánto pagará por la compra?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 28 dólares ☐ 17 dólares ☐ 30 dólares ☐ 14 dólares

4. Un grupo de 32 tejedores puede terminar un pedido de ponchos en 15 días. Al cabo de 5 días de trabajo, se les unen tejedores de otro grupo, de modo que en 8 días más terminan el pedido.
   ¿Cuántos tejedores había en el segundo grupo?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 8 tejedores ☐ 16 tejedores ☐ 32 tejedores ☐ 10 tejedores

5. **¿Cuál ecuación muestra variación directa?**
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ $\frac{1}{5} \cdot a = \frac{1}{b}$ ☐ $a \cdot b = \frac{1}{5}$ ☐ $a = 5 \cdot \frac{1}{b}$ ☐ $\frac{a}{b} = 5$ ☐ $a \cdot b = 5$

6. **¿Cuál ecuación muestra variación inversa?**
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ $2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ ☐ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ ☐ $2 \cdot a = b$ ☐ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ☐ $a \cdot b = 2$

7. En el mercado, 2 kilogramos de papa cuestan \$3.5 dólares. Sofía tiene \$25 dólares para comprar 14 kilogramos de papa.
   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?
   Elige todas las respuestas adecuadas:
   ☐ Deberá pagar \$7.5 dólares por 6 kilogramos de papa.
   ☐ Pagará \$14 dólares por 8 kilogramos de papa.
   ☐ Sofía recibirá \$0.50 dólares de vuelto.
   ☐ Sofía necesitará más dinero para realizar la compra.

8. Estás preparando limonada. La cantidad de azúcar que necesitas depende de la cantidad de limones que uses, como se muestra en la tabla 2.3.

Tazas de azúcar	$\frac{1}{3}$	1	3
Cantidad de limones	1	3	9

Tabla 2.3

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las tazas de azúcar y los limones?

9. Un carpintero fabrica sillas, las cuales le cuestan \$250.00 elaborar cada una. Además, tiene costos fijos por la renta del local y equipo que es de \$3 500.00 al mes.
¿Cuántas sillas hacen que el precio por producirlas sea igual a los costos fijos?

10. El equipo conformado por Cristina, Javier y Claudia tardó 8 días en responder 120 preguntas que su profesor de Historia de México les dejó de tarea.

   a) **¿Cuántas preguntas resolvieron Cristina, Javier y Claudia cada día?**
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 3 preguntas ☐ 5 preguntas ☐ 8 preguntas ☐ 15 preguntas

   b) **¿Cuántas preguntas respondió cada uno de los integrantes del equipo por día?**
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 3 preguntas ☐ 5 preguntas ☐ 8 preguntas ☐ 15 preguntas

   c) Si el equipo estuviera formado por 5 personas,
   ¿Cuántas preguntas respondería cada una en un solo día, suponiendo que trabajan al mismo ritmo?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 3 preguntas ☐ 5 preguntas ☐ 8 preguntas ☐ 15 preguntas

   d) **¿En cuántos días responderían las 120 preguntas si el equipo estuviera formado por 8 personas, suponiendo que trabajan al mismo ritmo que el equipo original?**
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 3 días ☐ 5 días ☐ 8 días ☐ 15 días

   e) Si sólo hubieran sido 45 preguntas y el equipo estuviera formado por 5 personas que trabajan al mismo ritmo,
   ¿En cuántos días terminarían la tarea?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 2 días ☐ 5 días ☐ 8 días ☐ 15 días

11. Tania tiene 5 parejas de canarios y necesita 15 paquetes de comida para alimentarlos durante 30 días.

    a) **¿Cuántos días podría alimentar a los canarios con un paquete de comida?**
    Escoge 1 respuesta:
    ☐ 5 días ☐ 10 días ☐ 30 días ☐ 90 días

    b) **¿Cuántos días podría alimentar a los canarios con el triple de alimento?**
    Escoge 1 respuesta:
    ☐ 1 día ☐ 2 días ☐ 3 días ☐ 5 días

    c) **¿Cuántos días le durarían los 15 paquetes de comida para alimentar al triple de canarios?**
    Escoge 1 respuesta:
    ☐ 15 días ☐ 30 días ☐ 60 días ☐ 90 días

    d) Si Tania tuviera un total de 10 parejas de canarios,
    ¿Cuántos días podría alimentarlos con un solo paquete de comida?
    Escoge 1 respuesta:
    ☐ 5 días ☐ 10 días ☐ 30 días ☐ 90 días

    e) Si Tania tuviera 30 canarios,
    ¿Cuántos días le durarían 5 paquetes de comida?
    Escoge 1 respuesta:
    ☐ 1 día ☐ 2 días ☐ 3 días ☐ 5 días

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional

Con lo que hemos aprendido sobre las proporciones directas e inversas, ahora trabajaremos en dividir cantidades de tal manera que se usen estas variaciones.

L1. Situaciones de reparto proporcional

Resolver un problema de reparto proporcional consiste en dividir una cantidad en partes que guarden entre sí ciertas razones. Para realizar el reparto, se encuentran los valores faltantes en una relación proporcional directa.

Reparto proporcional directo

A una mayor cantidad corresponde mayor proporción

1. Antonio y Laura vieron un anuncio para limpiar un jardín de 40 m^2 por una paga de $800.

   a) **¿Cuáles son las variables que se deben considerar para realizar el trabajo?**
   Escoge 1 respuesta:
   - ☐ Cantidad a pagar por el trabajo
   - ☐ Cantidad de trabajadores
   - ☐ Días a trabajar
   - ☐ Superficie a limpiar
   - ☐ Tipo de trabajo

   b) Si Antonio y Laura trabajaron el lunes y limpiaron la cuarta parte del jardín,
   ¿Qué cantidad les faltó por limpiar?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 5 m^2 ☐ 10 m^2 ☐ 30 m^2 ☐ 40 m^2 ☐ 50 m^2

   c) El martes fueron ayudados por sus dos primos. Manteniendo el mismo ritmo de trabajo que el lunes,
   ¿Qué cantidad limpiaron el segundo día?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 10 m^2 ☐ 20 m^2 ☐ 30 m^2 ☐ 40 m^2 ☐ 50 m^2

   d) Laura y sus dos primos salieron de vacaciones por lo que Antonio terminará el trabajo. Toño está desanimado así que decide dividir el trabajo que resta en 4 días.
   ¿Qué superficie limpiará cada día?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 1 m^2 ☐ 2 m^2 ☐ 2.5 m^2 ☐ 3 m^2 ☐ 3.5 m^2

   e) De haber mantenido el ritmo de trabajo,
   ¿Cuántos días le habría tomado a Antonio terminar el trabajo?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ 1 dá ☐ 2 dás ☐ 3 dás ☐ 4 dás ☐ 5 dás

2. Hay una oferta en la que se vende un lote de 126 canicas de colección a un precio de \$689 pesos. Pedro y Juan lo quieren comprar pero ninguno tiene suficiente dinero, así que Pedro le propone a Juan comprar el lote entre los dos y luego repartirse las canicas. Pedro coopera con \$449 y Juan completa el resto.

    a) **¿Qué parte del total del precio puso Pedro?**

    b) Si se considera que el reparto se haga de la misma manera,
    ¿qué parte del total de las canicas le corresponden a Pedro?

    c) **¿Cuántas canicas le corresponden a Pedro y cuántas a Juan?**

    d) **¿Piensas que este reparto ha sido justo? ¿Por qué?**

    e) **¿En qué sentido el reparto fue proporcional?**

    f) **¿En qué tipo de proporción se basa esta manera de repartir?** Explica.

3. Para el Sorteo Gordo de Navidad de la Lotería Nacional, el cual repartirá un premio de \$397,952,000.00, tres amigos cooperan para comprar una serie completa de billetes de lotería (20 cachitos), como los de la figura 2.4, que cuesta \$2,000.00, pues ninguno tiene esa cantidad de dinero. Antonio pone \$520.00, Beatriz coopera con \$680.00 y Carlos con \$800.00. Los tres amigos siguen la plática acerca de lo qué harán al ganarse el premio.

Tabla 2.4: Ilustración de una serie de la Lotería Nacional.

   a) Carlos propone dividir el premio entre tres. Sin embargo, los otros dos amigos protestan diciendo que eso no es justo.
   ¿Cuánto dinero le tocaría a cada uno? Expliquen si es justo o no.

   b) Beatriz propone que cada quien tome el número de billetes de lotería que representa el dinero que invirtió y que cada quien cobre su premio.
   ¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué? Usa trocitos de papel para comprobarlo.

   c) Completa la tabla 2.5 para calcular el reparto de billetes de lotería.
   ¿Se puede repartir de esta manera? ¿Por qué?

Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de billetes de lotería
Antonio		$\frac{20}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

Tabla 2.5: Reparto de billetes de lotería

d) Antonio propone repartir el dinero del premio de manera proporcional a lo que cada uno invirtió. Completa la tabla 2.6 para calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada amigo.

Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de dinero
Antonio		$\frac{397\,952\,000}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

Tabla 2.6: Reparto de dinero del premio

e) **¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué?**

f) **¿Consideran justo este reparto?** Explica.

g) **¿Cómo se relaciona este reparto con una situación de proporcionalidad?**

h) **¿Hay una constante de proporcionalidad?** Si es así, ¿cuál es?

i) Escribe un procedimiento para hacer un reparto de manera proporcional.

Reparto proporcional inverso

> Para resolver un problema de reparto proporcional inverso, debemos convertirlo en una proporción directa. Por ello, se utiliza el inverso multiplicativo o recíproco. De manera adicional, en algunos casos se reparten las cantidades de tal manera que al menor le toque la mayor parte y viceversa.

1. Un padre de familia tiene 3 hijos: Lucía, de 8 años; Julio, de 12, y Liliana, de 5 años. Repartirá entre ellos $2 000.00 que ha ahorrado, de manera proporcional a sus edades, de tal manera que al hijo menor le toque la mayor parte del dinero.

   a) Si aplican los procedimientos realizados en las actividades anteriores,
   ¿se cumple la condición que desea el padre? Expliquen.

b) Completen la tabla 2.7 para calcular cuánto recibirá cada hijo.

Hijo	Edad	Inverso multiplicativo	Común denominador	Fracción por común denominador	Operación	Cantidad que recibe cada hijo
Liliana						
Lucía						
Julio						
Total						

Tabla 2.7: Reparto de un padre de familia a sus tres hijos

c) **¿Se cumple de esta manera el objetivo del padre de familia? ¿Por qué?**

2. Se repartirán $2 200.00 en premios a los tres primeros lugares de una carrera de automóviles, de tal manera que el primer lugar reciba la mayor parte del monto.

   a) **¿Qué tipo de reparto proporcional deben realizar? ¿Por qué?**

   b) Completen la tabla 2.8 para calcular los montos.

Lugar en la carrera	Inverso multiplicativo	Común denominador	Fracción por común denominador	Operación	Premio a cada lugar
1	1	6	$1 \times 6 = 6$	$\left(\frac{2\,200}{11}\right) \times 6$	1200
2					
3					

Tabla 2.8: Premio a los primeros 3 lugares

   c) **¿Se cumple el objetivo de la repartición de los premios? ¿Por qué?**

   d) **¿Qué distingue a un problema de reparto proporcional inverso de uno directo?**

   e) Describe un procedimiento para resolver un problema de reparto proporcional inverso.

S12 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

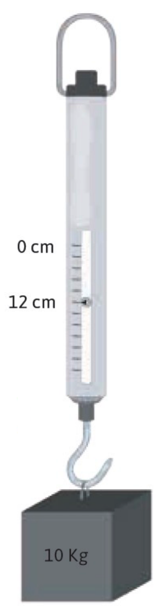
Aprendizajes esperados:

Analiza y compara situaciones de variación línea y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, interpreta y resuelve problema que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

L1. Situiaciones de variación lineal

Repasaremos las **características** principales de las variaciones lineales, a fin de tenerlas presentes al compararlas con otras, como las de proporcionalidad inversa. Lee la situación, observa la imagen y responde lo que se pide.

1. La balanza de resorte o dinamómetro es un dispositivo que mide el peso de un objeto. El funcionamiento consiste en la medición de la elongación de un resorte mediante una corredera móvil sobre una escala graduada. Supón que fijas un dinamómetro en el techo y colocas un peso de 10 kg. Luego, mides la elongación del resorte que es de 12 cm.



   a) Si éste se estiró 3 cm, **¿cuánto peso se colocó en él?**

   b) **¿Cuánto se estira el resorte con un peso de 14 kg?**

   c) **¿Qué tipo de variación se da entre el peso colocado al resorte y su estiramiento?**

   d) **¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?**

   e) **¿Qué maneras tienes para representar esta variación?** Realiza dichas representaciones.

   f) **¿Qué información es relevante para responder y cuál no?**

   g) Describe los procedimientos desarrollados para identificar y representar la variación.

2. En algunas ciudades, el servicio de taxi lo prestan compañías que cobran de manera distinta. Hay empresas que cobran una cantidad fija inicial, lo que se conoce como *"banderazo"*, y luego otra cantidad por la distancia recorrida, sea por kilómetro o fracción de éste. Una ciudad cuenta con tres compañías de servicio de taxi:

   - *La cotorra*, que cobra \$13.50 el banderazo y \$3.50 por kilómetro.
   - *El volador*, que usa la expresión $c = 3d + 16$ para su tarifa, donde c es el costo en pesos y d el número de kilómetros recorridos.
   - *El acompañante*, que cobra \$4.00 por kilómetro sin banderazo.

Kilómetros	La cotorra	El volador	El acompañante
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Tabla 2.9: Costos por kilómetro (comparativo).

   a) Completa la tabla 2.9 para hacer un comparativo por kilómetro de las tres compañías.

   b) ¿Con qué compañía te conviene hacer un viaje de 3.5 km? ¿Por qué?

   c) ¿Con cuál es más económico un recorrido de $11\frac{3}{4}$km? ¿Por qué?

   d) ¿Cuántos kilómetros recorres con \$50.00 en cada compañía? Describe en tu cuaderno los procedimientos para obtener estas cantidades:
   - La cotorra:
   - El volador:
   - El acompañante:

   e) ¿Cómo varían, en cada caso, los costos por kilómetro de cada compañía?

   f) ¿Cuál costo por kilómetro varía más rápido?

   g) ¿Cuál varía más lento? De acuerdo con el contexto del problema, ¿es conveniente incluir valores negativos?

   h) ¿De qué tipo es la variación de los cobros en las tres compañías? Explica.

   i) ¿Cuánto se paga por un recorrido de 2 km en cada compañía?

   j) ¿Y cuánto por un recorrido de 4 km?

   k) ¿Cuál compañía cobra el doble si se recorren el doble de kilómetros?

   l) ¿Qué compañía cobra mediante una relación proporcional directa?

   m) ¿Cómo se identifica a partir de los valores de la tabla? Explica.

   n) ¿Cómo se determina la razón de cambio de cada compañía?

ñ) ¿Qué relación existe entre la razón de cambio y la pendiente de una recta?

o) ¿Qué significa que las compañías *La cotorra* y *El volador* cobren una cantidad de dinero aún sin haber recorrido ninguna distancia?

p) ¿Cómo se relaciona este cobro con la ordenada al origen?

q) Escribe una ecuación que represente los cobros de cada compañía:

- La cotorra:
- El volador:
- El acompañante:

r) ¿Cómo construyes estas expresiones algebraicas?

s) ¿Qué características tiene la representación tabular de una variación lineal?

t) ¿Qué características tiene su expresión algebraica?

u) Haz la gráfica de la figura 2.2 que representa los cobros de las tres compañías de transporte. Luego resuelve lo que se te pide.

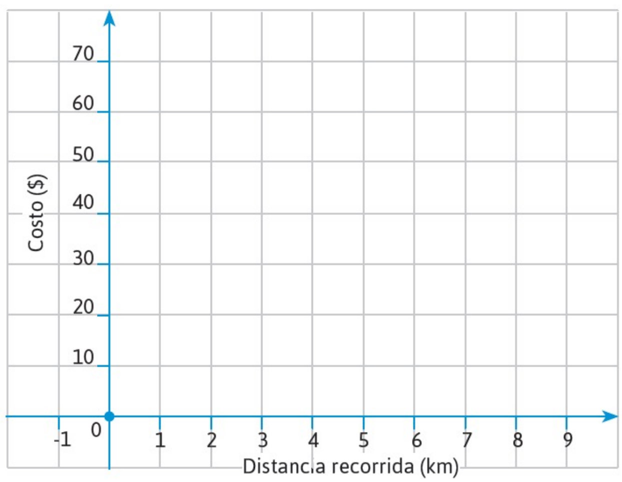


Figura 2.2: Gráfica de los costos por unidad de distancia recorrida de las tres compañías del corporativo.

1) ¿Cuál es el valor de la razón de cambio para la representación del cobro de cada compañía? ¿Cómo determinaste estos valores?
2) ¿Cuál es el valor de la ordenada al origen en cada caso? Explica cómo lo obtuviste.
3) ¿Las gráficas crecen o decrecen? Explica.
4) ¿Qué características tiene la gráfica de una variación lineal?

3. Un batitermógrafo es un aparato que se encuentra en los submarinos y que mide la temperatura del agua en sus profundidades. La tabla 2.12 muestra la temperatura registrada por dicho aparato cada 200 metros de profundidad en un cierto lugar del océano.

Profundidad (m)	Temperatura (°C)
0	20
200	16
400	10
600	7
800	6
1 000	4
1 200	4
1 400	3
1 600	3
1 800	2

Tabla 2.10: Tabla de la temperatura del agua en cada profundidad de medición.

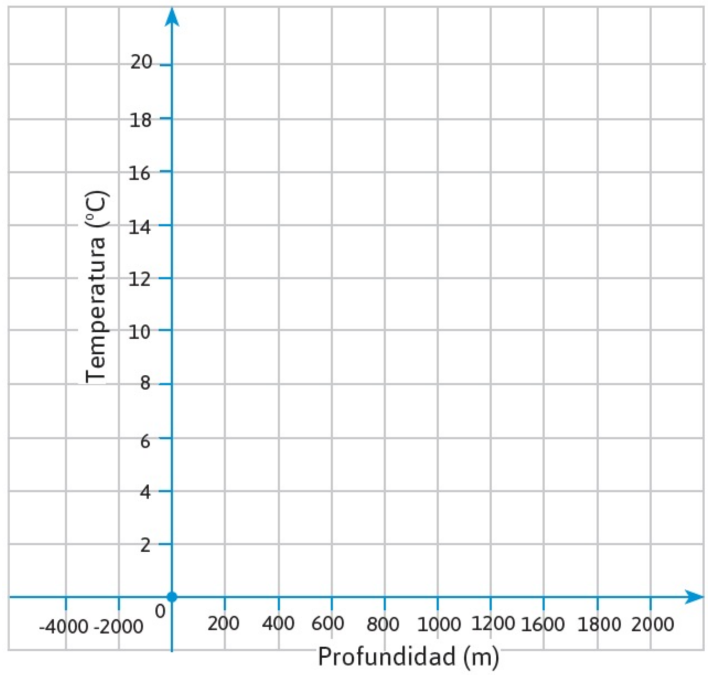


Figura 2.3: Gráfica de la temperatura del agua en cada profundidad de medición.

a) ¿Cuántos grados desciende la temperatura entre los 400 m y los 1,800 m de profundidad?

b) ¿Cuántos grados baja la temperatura entre los 1,000 m y los 1,200 m?

c) ¿Es una tabla que representa una variación lineal? Explica por qué.

d) ¿Qué características de una tabla que representa una variación lineal no se tienen en este problema?

e) Traza la gráfica en la figura 2.3 que modele la temperatura de acuerdo con la profundidad.

f) Indiquen los intervalos en los que la temperatura se mantiene constante al descender el submarino.

g) ¿Hay intervalos donde la gráfica es creciente? ¿Por qué?

h) ¿Cuál es la razón de cambio en esta variación? Explica.

i) ¿Qué características de la gráfica de una variación lineal no se presentan en esta situación?

j) ¿Cómo describes la variación de la temperatura respecto a los metros que se descienden?

4. Un paralelogramo tiene las medidas indicadas en la figura 2.4. Para que el área se mantenga constante, ¿cuánto debe medir la base si la altura aumenta 3 cm?

Altura (cm)	Base (cm)
1	
2	
3	
4	
5	24
7	
8	
9	
10	

Tabla 2.11: Tabla con las medidas de Base y Altura del paralelogramo de la figura 2.4.

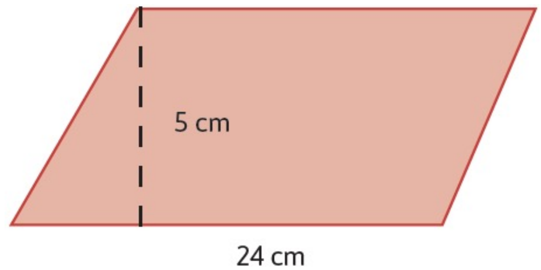
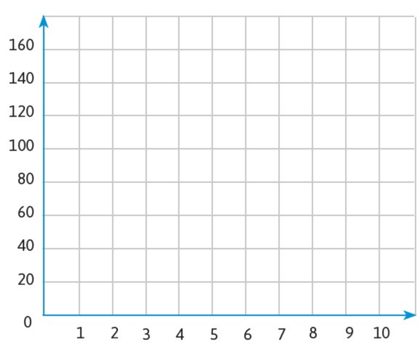


Figura 2.4: Figura geométrica paralelogramo



a) ¿Qué operaciones realizan para conocer la medida de la base con este cambio en la altura?

b) ¿Cuál es el valor de la base?

c) ¿Qué tipo de relación proporcional se da entre la base y la altura si el área se mantiene constante? Explica.

d) De acuerdo con las operaciones para este caso, completen la tabla 2.11 calculando las medidas de la base dadas las de la altura.

e) ¿Qué operaciones realizaron para saber cada medida de la base del paralelogramo al variar la altura?

f) Describan un procedimiento para obtener el valor de la base (y), dado cualquier valor de la altura (x) y manteniendo constante el área:

g) Escriban una expresión algebraica que describa el procedimiento que han desarrollado.

h) Construyan una gráfica que muestre la variación de la base y la altura de la actividad anterior.

i) ¿Qué características tiene esta gráfica?

j) ¿Se puede obtener el valor de la razón de cambio? ¿Es posible saber el valor de la ordenada al origen? Expliquen.

k) ¿Esta gráfica es creciente o decreciente? ¿Por qué?

l) ¿Qué sucede si $x = 0$ en la expresión algebraica? ¿Cómo se observa este hecho en la gráfica?

m) ¿Qué sucede si la altura es igual a 0? ¿Es posible esto en la situación planteada? ¿Por qué?

Ejercicios

1. Luisa trabaja en una tienda de artículos deportivos. Tiene un sueldo mensual de \$4 500 y recibe una comisión de \$50 por cada artículo que vende.

   a) ¿Cuánto dinero recibiría Luisa si vende 18 artículos en un mes?

   b) ¿Cuántos obtendría si vende 37 artículos en el mismo lapso?

   c) ¿Cuántos artículos tendría que vender Luisa al mes para ganar \$7,000?

   d) Si Luisa ganara \$3 500 al mes y recibiera \$55 por cada artículo vendido, ¿con qué expresión podría representarse esta situación?

   e) Escribe una expresión que permita conocer cuánto gana Luisa al mes.

2. En una carrera automovilística uno de los pilotos inició 30 m antes de la línea de salida con una rapidez constante de 145 km/h.

   a) ¿Qué distancia, a partir de la línea de salida, habría recorrido el automóvil después de 5 minutos?

   b) A partir de la línea de salida, ¿qué distancia recorrería el automóvil en 17 minutos?

   c) ¿En cuántos minutos recorrería 200 km?

   d) Escribe una expresión que permita conocer la distancia que recorrería el automóvil respecto al tiempo, si hubiese iniciado en la línea de salida.

   e) ¿Cuál sería la expresión que representa la situación original?

3. En una competencia de caminata, un atleta ha recorrido 1.6 kilómetros en 8 minutos y mantiene ese mismo ritmo en todo el recorrido.

   a) Representa de manera tabular, gráfica y algebraica la carrera del atleta cada 8 min durante 1 h.

   b) Si la caminata es de 50 kilómetros, ¿en qué tiempo termina la competencia?

L2. Representaciones de proporcionalidad inversa

Anteriormente hemos trabajado con situaciones de proporcionalidad inversa, por lo que recordaremos cómo identificar un problema con este tipo de proporción, así como sus características principales.

Lee la situación y responde lo que se pide.

1. Para pintar una superficie determinada, el número de pintores que aparecen en la imagen tardan 80 horas, por lo que uno de ellos considera que hay que contratar más pintores para acabar antes con el trabajo.

   a) ¿En cuánto tiempo lo harían 4 pintores más?

   b) Si al contrario, del grupo original renuncian 2, ¿en cuánto tiempo harían el trabajo los restantes?

   c) ¿Qué tipo de variación se da entre el número de pintores y los días que ocupan en su labor?

   d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?

   e) ¿Qué maneras tienes para representar esta variación? Realiza dichas representaciones.

   f) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

   g) Describe los procedimientos realizados para identificar y representar la variación.

   h) Reúnanse en equipo. Expresen las características de una variación inversa cuando se representa con gráficas o expresiones algebraicas. Argumenten o corrijan sus resultados si es necesario.

2. Verónica es costurera y le han encargado que haga banderas iguales a partir de una pieza de tela de 60 m de largo.

   a) Si cada bandera se hiciera con 2 m de tela, ¿cuántas se pueden hacer con los 60 m?

   b) Y si fueran de 5 m de largo, ¿cuántas se podrían hacer?

   c) ¿Cuáles fueron tus operaciones para conocer estas cantidades?

   d) Si se le pidieron 50 banderas, ¿de cuántos metros sería cada una?

   e) Y si el pedido fue de 90, ¿cuáles serían sus medidas?

   f) ¿Qué operaciones realizaste en este caso?

   g) ¿Qué pasa con la medida de cada bandera si aumenta la cantidad de banderas que se tienen que hacer? ¿Y qué pasa si disminuye la cantidad de banderas? Si la cantidad de banderas que se tienen que hacer aumenta al doble, ¿cómo varían las medidas de dichas banderas?

   h) ¿Qué tipo de relación se da entre el número de banderas y la medida de cada una? Explica.

   i) Al multiplicar las medidas de cada bandera con su correspondiente cantidad de banderas que se pueden hacer, ¿qué cantidad se obtiene en cada caso? ¿Cómo se puede interpretar este resultado? ¿Qué significa esta cantidad?

   j) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

3. Martín ha pagado \$2 700.00 para asistir durante 30 días a un club deportivo. Sólo irá una vez al día pero lo hará diario, sin falta.

Profundidad (m)	Temperatura (°C)
0	20
200	16
400	10
600	7
800	6
1 000	4
1 200	4
1 400	3
1 600	3
1 800	2

Tabla 2.12: Tabla de la temperatura del agua en cada profundidad de medición.

a) ¿Cuánto será el precio por día en el sexto día de asistir al club? ¿En qué día el precio por día será de \$300.00?

b) ¿Qué operaciones realizaste en cada caso?

c) Completa la tabla 2.34. En tu cuaderno completa una similar pero con 30 días. Usa calculadora.

d) ¿Qué parte representa el costo por día en el décimo día respecto al primer día de asistencia al club?

e) ¿Qué tipo de variación se tiene entre el número de días en los que Martín visita el club y el precio por día? Explica.

f) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso? ¿Cómo la determinas?

g) ¿Qué características tiene una situación proporcional inversa? ¿Esta situación es una de este tipo?

h) ¿De qué manera se distingue una tabla de una proporción inversa respecto a otro tipo de variaciones.

i) Reúnanse en equipo con el propósito de recordar las características de una proporción inversa. Corrijan o argumenten si consideran necesario.

Ejercicios

1. Lee el problema que se presenta y busca las cantidades en letras que se piden. Victor tiene una tira de madera de 400 cm de largo. Cortará la tira para tener palitos para banderas.

G	R	Z	A	R	P	Y	E	C	I	D	M	M	U	D	F	Y	R	M	A
C	R	O	N	N	N	Z	V	J	K	N	L	H	O	B	Y	M	U	S	K
I	L	N	X	R	F	R	H	T	G	S	T	D	R	V	E	I	N	T	E
E	Q	T	W	P	C	J	V	D	P	K	L	T	Q	K	Y	T	O	J	D
N	M	I	P	S	C	Z	I	E	O	A	Y	E	K	C	A	Q	L	D	V
D	S	P	J	P	P	Y	Y	A	T	C	W	S	X	A	T	G	K	V	J
D	I	E	Z	C	L	C	R	I	F	U	K	M	M	U	Z	C	D	E	B
I	Q	D	Q	U	C	B	S	X	G	E	I	K	C	Y	N	A	G	M	H
H	B	K	F	A	H	E	Z	Q	E	N	B	P	O	W	O	D	J	W	N
W	E	Q	Z	T	T	P	H	X	Z	X	I	Q	V	W	D	Q	A	W	E
C	X	T	M	R	O	C	H	O	Z	Y	U	E	B	M	W	Z	F	J	I
L	I	C	L	O	K	Q	O	D	B	R	E	Q	E	Y	Q	L	U	D	P
V	L	A	G	Z	S	C	K	J	B	G	A	D	M	F	Z	S	C	S	Y
N	F	F	B	O	T	H	U	R	Q	I	S	P	G	X	S	B	G	N	Y
K	E	D	P	M	J	I	K	V	E	I	N	T	I	C	I	N	C	O	V
W	V	I	Z	K	Q	H	M	D	D	O	Z	S	W	C	Z	P	P	Y	P
Y	P	O	B	V	X	A	K	S	U	P	Q	E	A	B	M	I	C	T	X
T	G	Z	K	W	E	Z	S	C	I	N	C	U	E	N	T	A	L	C	X
X	L	H	Z	X	T	Q	L	E	F	A	H	C	I	N	C	O	H	E	Q
O	U	T	I	C	D	S	P	Y	E	P	S	X	O	C	I	Z	J	T	T

- Longitud de cada palito, si en total corta 4.
- Longitud de cada palito, si en total corta 16.
- Longitud de cada palito, si en total corta 20.
- Cantidad de palitos, si cada uno mide 100 cm.
- Cantidad de palitos, si cada uno mide 80 cm.
- Cantidad de palitos si cada uno mide 50 cm.
- Cantidad de palitos, si cada uno mide 40 cm.

2. Escribe sobre la línea de cada inciso, las palabras que completan las afirmaciones correctamente. Martha pagó \$3 000 por un curso de repostería y podrá asistir 30 días una hora diaria. Al realizar el pago le comentaron que no habría reembolso en caso de que no asistiera.

   a) De acuerdo con los datos, cada día del curso costó \$__________

   b) Martha enfermó y no pudo asistir los primeros 5 días, los \$3 000 que pagó corresponden a 25 días, así cada día cuesta \$__________

   c) Entre más días falte al curso, el costo de cada día __________. (Se mantiene / disminuye / aumenta)

   d) Durante los días restantes Martha faltó __________ días más, por lo que cada día terminó costando \$150.

   e) Antes de inscribirse a este curso, Martha había visto otra opción en la que cada día costaba \$200. De hecho Martha pudo faltar __________ días más, y aún así, este curso resulta más barato.

S15 Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

Aprendizajes esperados:

Analiza y compara situaciones de variación línea y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, interpreta y resuelve problema que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Otras situaciones se pueden describir por medio de las variaciones proporcionales inversas. Veamos algunos casos y recordemos las propiedades de este tipo de variaciones.

L1. Modelos de variación lineal y proporcionalidad inversa

1. Lee la situación, observa la imagen de la figura 2.5 y responde lo que se pide.

   La familia Gómez se fue de día de vacaciones a Oaxtepec, que se encuentra a 100 km de distancia de donde viven. Cuando se dirigían al lugar, viajaron a una velocidad promedio de 80 km/h. De regreso había un poco de tránsito, por lo que recorrieron los 100 km de distancia en dos horas.

Figura 2.5: Ruta Ciudad de México - Oaxtepec. Fuente: http://edutics.mx/w7k. (Consulta: 20 de septiembre de 2018).

   a) ¿Cuánto tiempo tardaron en el recorrido de ida?

   b) ¿A qué velocidad viajaron de regreso?

   c) ¿Qué tipo de variación se da entre la velocidad y el tiempo que tardaron en el viaje?

   d) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta relación?

   e) ¿Qué información es relevante para responder y cual no?

   f) Describe los procedimientos realizados para calcular los datos faltantes, así como para representar la variación.

En situaciones que suceden en diferentes disciplinas, nos encontramos con que podemos modelarlas mediante una variación lineal.

2. Analiza la situación y responde lo que se pide.

   Jaime estudia Medicina. En una clase ha aprendido que hay una nueva generación de fármacos en los que la cantidad de sustancia activa decae poco a poco hasta que el cuerpo la elimina completamente. Por ejemplo, un enfermo toma una medicina con 5 mg de sustancia activa, la cual decae 0.5 mg por día. Por lo que su profesor les solicita que describan la relación entre cantidad de sustancia activa y los días que dura dentro del cuerpo.

   a) Completa la tabla 2.13 en la que se calcula diariamente la cantidad de sustancia activa dentro del enfermo.

   b) ¿Cómo cambia la cantidad de sustancia activa conforme pasan los días? ¿Puedes identificar un patrón en la disminución de la sustancia activa? ¿Cuál es?

   c) ¿Cómo se relaciona ese patrón con la constante de proporcionalidad?

   d) ¿Cuál es la razón de cambio? ¿Cómo se relaciona ésta con la constante de proporcionalidad? ¿Cuál es? Explica su obtención.

   e) Escribe una expresión algebraica que describa la situación.

   f) ¿En cuántos días la sustancia activa queda totalmente eliminada del organismo del enfermo? Explica.

   g) Traza la gráfica en la figura 2.14 que describe la relación de la sustancia activa con los días que pasan.

   h) ¿La gráfica es ascendente o descendente? ¿Cómo se ve esto reflejado en la pendiente?

   i) ¿Cuál es el valor de la pendiente y de la ordenada al origen? Describe su obtención:

Días	Sustancia activa (mg)
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 2.13: Tabla que relaciona la cantidad de sustancia activa de acuerdo con los días.

Tabla 2.14: Tabla que relaciona la cantidad de sustancia activa de acuerdo con los días.

3. Define la estrategia y procedimientos para responder a la siguiente situación.

La gráfica de la figura 2.6 muestra la relación entre el tiempo (t) que tarda un carro de control remoto en recorrer una distancia (d) fija de 50 m y la velocidad (v) que puede tener.

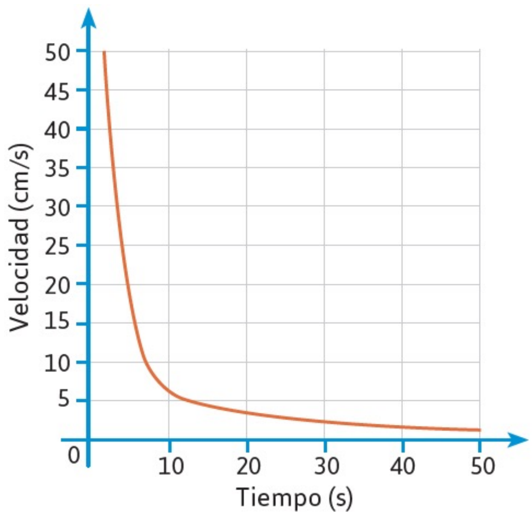


Figura 2.6: Gráfica correspondiente al movimiento del carrito de jugete.

Aceleración (m/s^2)	Masa (kg)
0	5
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 2.15: Tabla correspondiente al movimiento del carrito de jugete.

a) De acuerdo con la gráfica, ¿cómo es la relación entre la velocidad y el tiempo? Explica.

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad para esta situación? Describe cómo la obtienen.

c) ¿La gráfica crece o decrece? Explica.

d) ¿En qué intervalos crece o decrece más rápido?

e) ¿Y en cuáles crece o decrece más lento?

f) ¿Qué sucede cuando x se acerca a 0?

g) ¿Se puede tener el caso $x = 0$? Explica.

h) ¿Qué significa en la situación que $x = 0$?

i) ¿Qué sucede con la gráfica si los valores de x aumentan?

j) ¿Qué significa esto en la situación?

k) Con los datos obtenidos de la gráfica, completa la tabla 2.15.

l) ¿Qué operaciones realizan para obtener los datos de la tabla en cada caso?

m) A partir de las operaciones que realizaron, escriban una expresión algebraica que describa la situación.

4. Analiza la situación y realiza lo que se les pide.

   La ley de la demanda indica que cuando el precio de un producto aumenta, la cantidad demandada disminuye; y cuando el precio del producto disminuye, la cantidad demandada aumenta. Supón que un impresor cobra $3240.00 por estampar una playera, por estampar 9, $360.00 y por 90, diez veces menos.

   a) ¿Cuál es la expresión que determina cuánto cobra el impresor? Explica cómo la determinaste.
   b) ¿Qué tipo de variación proporcional se tiene en la situación? Expliquen.
   c) ¿Cuál es el costo por estampar 20 playeras?
   d) ¿Cuántas playeras estampó el impresor si el precio fue de $40.50?
   e) Describan sus procedimientos para obtener cada cantidad.
   f) Tracen en su cuaderno la gráfica que describe el precio por estampado con respecto al número de playeras.
   g) Con otros equipos, analicen las características de la gráfica y la expresión algebraica de una variación proporcional inversa. Argumenten sus respuestas y corrijan si es necesario.

   Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión. La masa de un material se puede obtener multiplicando la densidad de ese material por el volumen que ocupa. Un cuerpo de 3 kg/m3 de densidad ocupa un volumen de 0.8 m3, otro cuerpo con densidad de 5 kg/m3 tiene la misma masa que el anterior. Escribe la relación entre la densidad y el volumen para el segundo cuerpo. ¿Qué volumen tiene el segundo cuerpo? Realiza en tu cuaderno las representaciones tabular, gráfica y algebraica de esta situación.

Ejercicios

1. Analiza el caso de una medicina con una sustancia activa de 5 mg que decae 0.5 mg diario.

   a) ¿Cómo es el tiempo que permanece en el cuerpo de un paciente, una sustancia activa de 5 mg que decae 0.5 mg cada dos días con relación al tiempo que permanece la sustancia activa inicial?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ Es la mitad ☐ Es el mismo ☐ Es el doble ☐ No hay relación

   b) ¿Cómo es el tiempo que permanece en el cuerpo de un paciente, una sustancia activa de 10 mg que decae 1 mg diario con relación al tiempo que permanece la sustancia activa inicial?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ Es la mitad ☐ Es el mismo ☐ Es el doble ☐ No hay relación

   c) ¿Cómo es el tiempo que permanece en el cuerpo de un paciente, una sustancia activa de 5 mg que decae 1 mg cada dos días con relación al tiempo que permanece la sustancia activa del inciso anterior?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ Es la mitad ☐ Es el mismo ☐ Es el doble ☐ No hay relación

   d) ¿Cómo es la razón de cambio de una sustancia activa de 4 mg en el cuerpo humano que decae 1 mg diario con relación a la razón de cambio de la sustancia del inciso anterior?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ Es igual ☐ Es mayor ☐ Es menor ☐ No hay relación

   e) ¿Cómo es la razón de cambio de una sustancia activa de 8 mg en el cuerpo humano que decae 1 mg cada dos días con relación a la razón de cambio de la sustancia del inciso anterior?
   Escoge 1 respuesta:
   ☐ Es igual ☐ Es mayor ☐ Es menor ☐ No hay relación

2. Ordena las sustancias de mayor a menor según el tiempo que permanecen en el cuerpo humano.

   ☐ Sustancia de 5 mg que decae 0.5 mg diario.
   ☐ Sustancia de 8 mg que decae 1 mg diario.
   ☐ Sustancia de 3 mg que decae 1 mg cada dos días.
   ☐ Sustancia de 5 mg que decae 0.5 mg cada medio día.
   ☐ Sustancia de 6 mg que decae 0.5 mg diario.

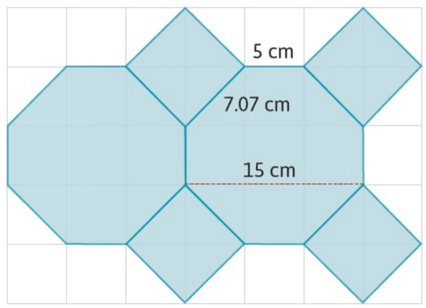
Aprendizajes esperados:

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1. Perímetro y área de polígonos

Analiza la situación, observa la imagen y responde.

1. Pablo colocará en su baño una figura hecha con azulejos con formas de octágono y de cuadrado como se muestra en el modelo.



   a) Identifica el perímetro de la figura. ¿Qué valor tiene?

   b) Es posible dividir un octágono en figuras de las cuales sepas calcular su área? ¿En cuáles? ¿Con estas figuras puedes deducir el área de un octágono? ¿Cómo?

   c) ¿Qué área tiene un octágono?

   d) Identifica el área de la figura, ¿cuál es su valor?

   e) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?

   f) Describe el procedimiento que realizaste para conocer el área total.

Perímetro de polígonos

Repasemos el cálculo de perímetros de polígonos, pues será clave para el cálculo del área de polígonos regulares.

1. Juan tiene un rancho e instalará alambre alrededor de los pastizales para que sus animales no escapen (figura 2.7).

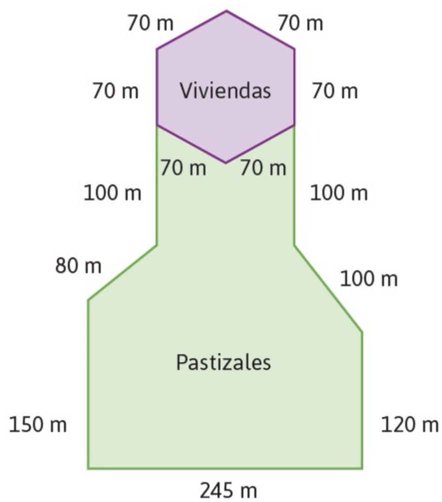


Figura 2.7: Esquema del rancho.

   a) ¿Cuánto alambre necesita para rodear toda su propiedad si pondrá solo dos hilos de alambre? ¿Y si pone tres?

   b) ¿Cuánto alambre necesita para poner tres hilos alrededor de la propiedad excepto la zona de viviendas?

   c) ¿Qué forma tiene la zona de las viviendas? ¿Cuánto alambre necesita para poner cuatro hilos alrededor de ésta zona?

   d) Explica distintas formas de calcular la longitud del alambre alrededor de las viviendas.

2. Calcula el perímetro de los polígonos de la figura 2.8.

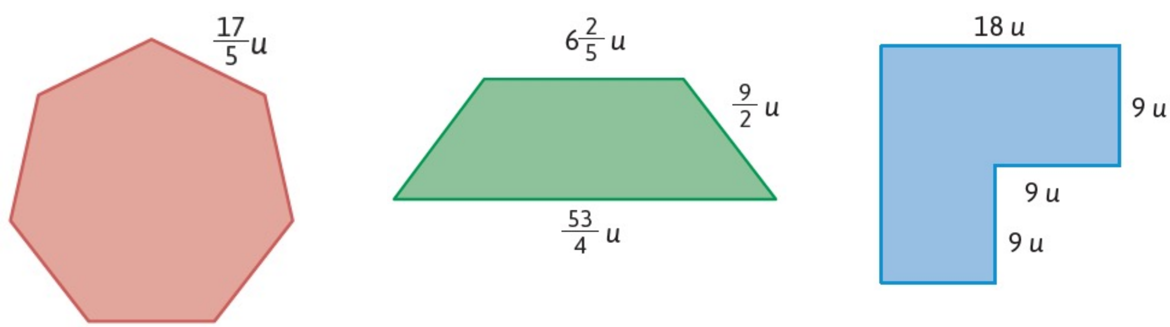


Figura 2.8: Diversos polígonos.

   a) Describe el procedimiento que seguiste para calcular los perímetros.

   b) Comparen los procedimientos para calcular los perímetros. ¿Difieren? ¿Obtienen los mismos resultados? Si es así, discutan por qué ocurre esto.

3. A partir de la información dada sobre un polígono regular, traza en tu cuaderno la figura descrita en los siguientes incisos y calcula su perímetro. Anótalo aquí.

   a) Su lado mide 3.5 cm y se puede trazar únicamente una diagonal desde cualquier vértice.
   b) El valor de un ángulo central es de 72º y mide 3 cm de lado.
   c) Cada lado mide 4 cm y se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros congruentes.
   d) Reúnanse en equipo. Discutan lo siguiente: ¿obtuvieron las mismas figuras? ¿Por qué?

Área y descomposición de figuras

Trabajemos dividiendo una figura geométrica en otras cuyas expresiones son conocidas para calcular sus áreas.

4. Reúnanse en equipo. Acuerden la estrategia y procedimientos para responder. A un carpintero le encargaron una mesa de juego con forma octagonal y le dieron un esquema (figura 2.9).

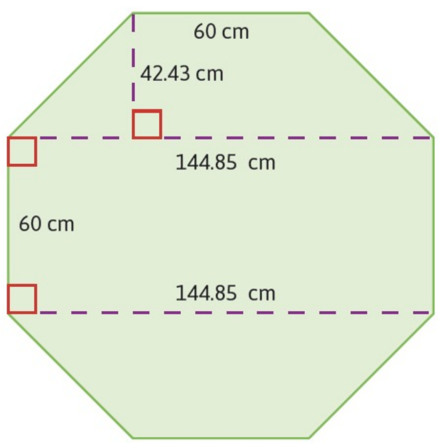


Figura 2.9: Esquema de una mesa octagonal.

   a) Encuentra el área del tablero. Explica tu procedimiento.

   b) Reúnanse en equipo y comparen su resultado, así como la manera en que calcularon el área. Determinen quién calculó el área con el menor número de operaciones.

5. Juan quiere comprar el terreno cuyo croquis se muestra en la figura 2.10 y busca conocer su superficie.

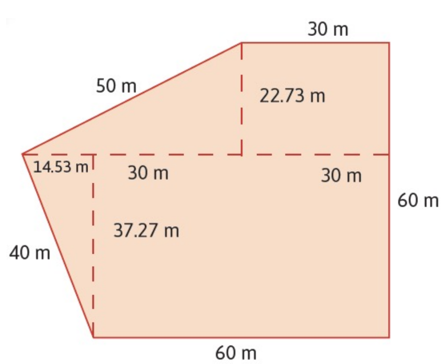


Figura 2.10: Esquema de un terreno.

   a) ¿Cómo calculas el área del terreno? ¿Cuál es?

   b) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Dividan de otra manera el terreno. Si calculan el área con base en esta nueva división, ¿obtendrán la misma área? ¿Por qué? Discutan.

6. Realiza dos descomposiciones distintas para cada polígono de la figura 2.13. Midan los datos que necesiten y calculen el área de cada polígono de dos maneras distintas.

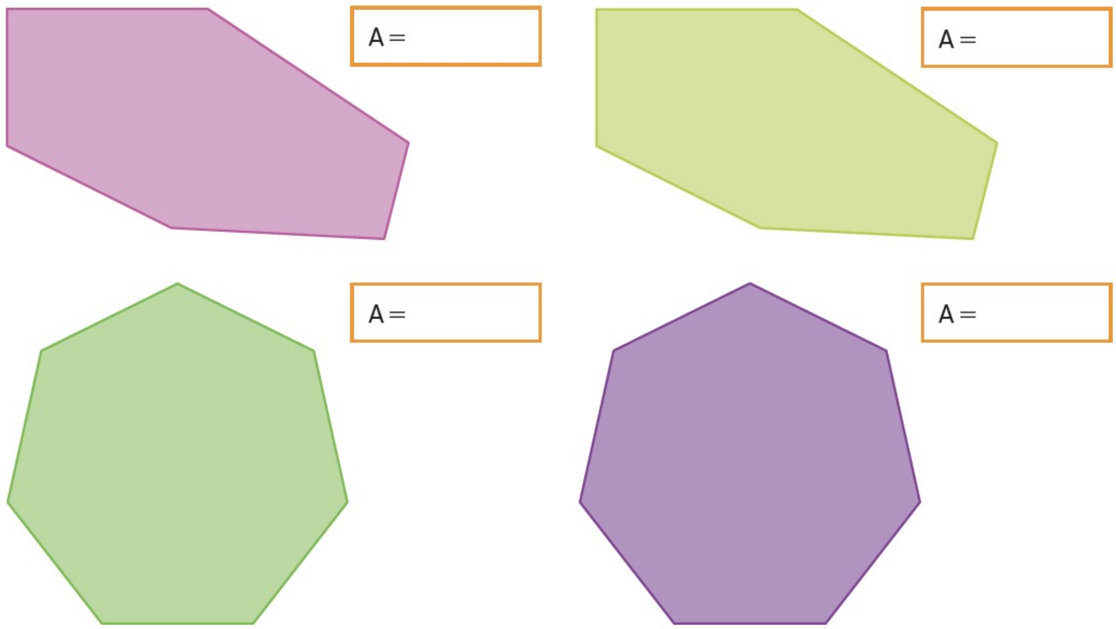


Figura 2.11: Dos tipos de polígonos.

   a) ¿Cómo son las áreas para cada par de figuras iguales? ¿Por qué creen que sea así?

   b) ¿Qué diferencias observan entre las descomposiciones de los polígonos irregulares y las de los regulares?

   c) ¿Qué consideran que es más conveniente, dividir en muchas o en pocas figuras? Expliquen:

   d) Compartan sus resultados con otros equipos. En caso de que haya diferencias, comparen procedimientos y argumenten. Corrijan si es necesario.

Área de polígonos regulares

Con base en las fórmulas para calcular el área de un triángulo equilátero y de un cuadrado, desarrollaremos el caso de polígonos regulares que tienen 5 lados o más.

7. Reúnanse en parejas y determinen la estrategia y procedimientos para responder. Analicen los polígonos de la figura 2.11. Lean la información y luego hagan lo que se pide.

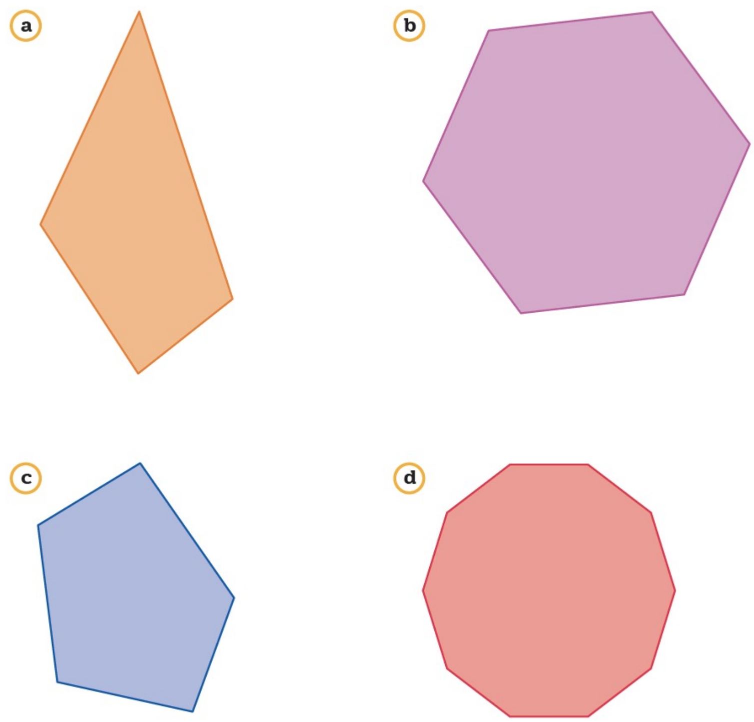


Figura 2.12: Diversos polígonos.

a) Tracen la circunferencia circunscrita y la inscrita a cada polígono de la figura 2.12. ¿Pudieron trazarlas en todos los casos? ¿En cuáles sí y en cuáles no?

b) ¿Cómo son el centro de la circunferencia circunscrita y el de la circunferencia inscrita?

c) ¿Cómo es la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados?

d) ¿Pueden descomponer los polígonos tomando en cuenta sus diagonales? ¿Cómo?

e) Reúnanse en equipo y comparen sus resultados. Discutan acerca de cómo usan la longitud del centro de la circunferencia inscrita al punto que toca en cada uno de los lados de un polígono regular para calcular su área.

El **centro** de un polígono regular es el centro de la circunferencia inscrita o de la circunferencia circunscrita.
La perpendicular entre el centro de un polígono regular y uno cualesquiera de sus lados es la **apotema**, que coincide con el radio de la circunferencia inscrita.

8. Considera el polígono de la figura 2.13.

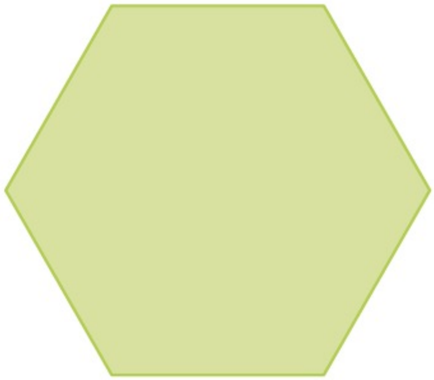


Figura 2.13: Hexágono.

a) Localicen el centro del polígono y tracen la circunferencia circunscrita. Luego dibujen triángulos tales que uno de los vértices de cada uno sea el centro del polígono. Después tracen la apotema

b) Reflexionen y discutan: ¿cuántos triángulos se forman? ¿Cómo son esos triángulos? ¿Cómo se relaciona la cantidad de triángulos formados con la cantidad de lados del polígono?

c) Para calcular el área de un triángulo se requiere conocer una base y su altura correspondiente. ¿Con qué elemento de los triángulos formados coincide el lado del polígono? ¿Y la apotema?

d) Midan y calculen el área de uno de los triángulos. ¿Cuál es el valor? ¿Cuál es el área de todos los triángulos juntos?

e) ¿Cómo se relaciona el área de todos los triángulos juntos con el área del polígono? ¿Cuál es el área del polígono?

f) Escriban una expresión algebraica para calcular el área de un hexágono.

g) En grupo, con la guía de su profesor, comparen sus respuestas. Tracen algunos hexágonos en su cuaderno y calculen sus áreas con triángulos y con la expresión que obtuvieron. Discutan cuál es la función de la apotema en el cálculo.

9. Analiza los polígonos de la figura 2.14 y completa la tabla 2.16.

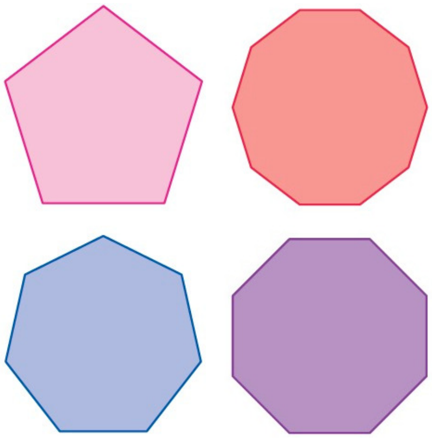


Figura 2.14: Diversos polígonos.

a) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de los polígonos con base en los triángulos que los componen.

b) Escribe una expresión algebraica para calcular el área de un polígono regular con base en los elementos del polígono.

c) ¿Cómo son estas dos expresiones? ¿Por qué?

d) Anota un procedimiento para calcular el área de cualquier polígono regular y propón una fórmula.

e) Reúnanse en equipo y comparen sus procedimientos y resultados. Argumenten y corrijan si es necesario. Tracen varios polígonos regulares e intercambien las medidas necesarias para que calculen sus áreas y así validen su fórmula.

Respecto a los triángulos que componen el polígono				
Número (n)	Base (l)	Altura (h)	Área de cada triángulo	Área total

Respecto a los elementos del polígono			
Número (n)	Perímetro ($P = n \times l$)	Apotema (a)	$P \times a$

Tabla 2.16: La tabla superior contiene información sobre los triángulos equilateros dentro de un polígono regular; la tabla inferior, los datos referentes a los polígonos mismos

El área de un polígono regular de n lados se obtiene multiplicando el perímetro P por la apotema a y dividiendo el resultado entre 2. Algebraicamente esto es:

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{n \times l \times a}{2}$$

10. Resuelve las siguientes situaciones. Haz los cálculos en tu cuaderno.

Figura 2.15: Diversos polígonos.

a) El Pentágono (figura 2.15) tiene un área de 116,000 m^2 y sus lados miden 230 m. Hay pasillos que parten del centro hacia los lados de manera que forman la apotema del pentágono. ¿Qué longitud tienen los pasillos?

b) Se impermeabilizará el techo de un centro de convenciones que tiene la forma hexagonal regular. Los lados miden 80 m y la apotema, 69 m. ¿Qué área se impermeabilizará?

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. Un pentágono, un hexágono y un decágono tienen el mismo perímetro, que es igual a 30 cm. ¿Cuál es el valor del lado en cada polígono? ¿De qué manera obtienes esos valores? ¿Cuál de ellos tendrá mayor área? Explica por qué.

Aprendizajes esperados:

Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

L1. Área del círculo

Deducción del área de un círculo

Analiza la situación, observa la imagen y responde.

1. Mario piensa que puede aproximar el área del círculo usando cuadrados, puesto que sabe calcular el área de éstos. Ha trazado un círculo y dos cuadriculas: en la roja, cada cuadrito mide 1 cm de lado y en la azul, 0.5 cm.
   a) Aproxima el área del círculo usando la cuadrícula roja y la azul.
   b) ¿Puedes seguir aproximando el área del círculo? ¿Cómo?
   c) ¿Qué información es relevante para responder y cuál no?
   d) Describe el procedimiento que realizaste para responder.
2. Reúnanse en equipo. Comparen sus procedimientos y respuestas. Argumenten y corrijan si es necesario.

Repasemos los elementos del círculo que utilizaremos en el cálculo del área.

1. Traza en el espacio de la izquierda un círculo de 3 cm de radio.
   a) ¿Cuál es la medida del diámetro?
   b) ¿Qué es el número pi (π)?
   c) ¿Cuánto mide la circunferencia? Explica tu procedimiento.
   d) Escribe una fórmula que permita obtener la medida de la circunferencia a partir del radio.

2. Completa la tabla 2.17.

Radio	Diámetro	Circunferencia
7 m		
	15 cm	
		75.3982 cm
5 dm		

Tabla 2.17: Reacomodo de sectores circulares.

Fórmula del área del círculo

A partir de las áreas de polígonos regulares, que ya han sido tratados, determinaremos la expresión para obtener el área del círculo. En tu libreta amarilla de Matemáticas, diseña una estrategia con procedimientos para responder los siguientes ejercicios.

3. Consideren los polígonos de la figura 2.16.

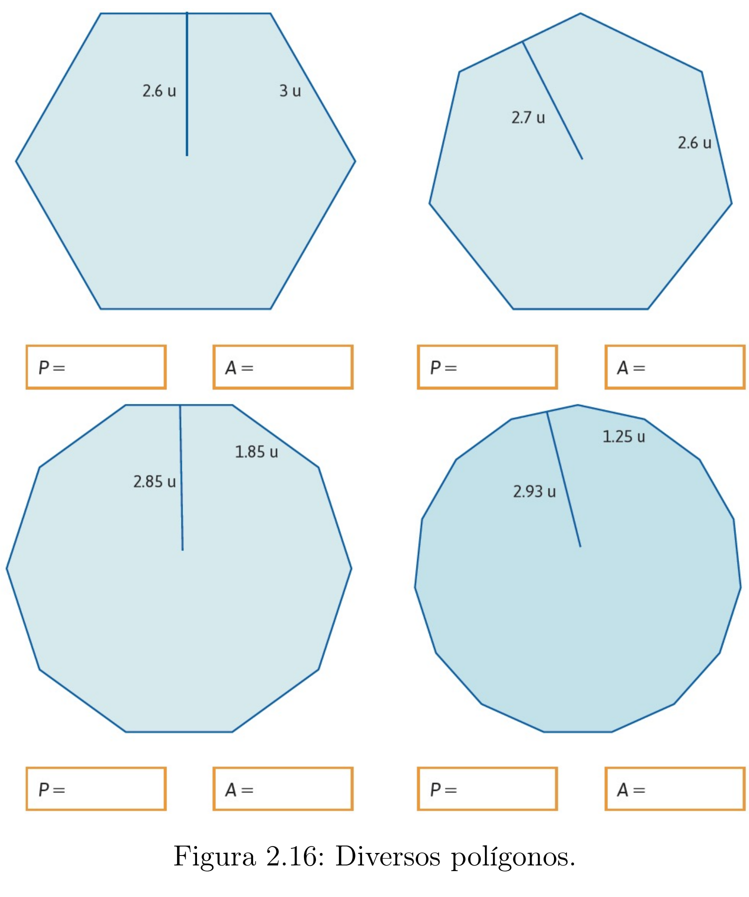


Figura 2.16: Diversos polígonos.

a) Tracen la circunferencia circunscrita a cada uno. Expliquen cómo la trazaron.

b) Calculen el perímetro (P) y área (A) de cada uno. Hagan las operaciones en su cuaderno.

c) Si el radio de las circunferencias circunscritas mide 3 u, ¿cuál es su perímetro?

d) ¿Qué sucede con el perímetro de los polígonos con respecto al de la circunferencia a medida que aumenta el número de lados?

e) ¿Cuántos lados tendrá el polígono cuyo perímetro coincida completamente con la circunferencia? Expliquen.

f) En este caso, ¿con cuál elemento de la circunferencia coincidirá la apotema?

g) El perímetro del polígono, ¿con cuál perímetro coincide?

h) ¿Cuáles son las fórmulas para calcular el área de un polígono regular de n lados y el perímetro de un círculo?

i) Escriban una expresión algebraica para calcular el área del círculo a partir de este análisis.

j) Comparen sus resultados con los de otros equipos. Propongan círculos con diversas medidas de radio y verifiquen su fórmula al calcular su área.

4. Leonardo da Vinci propuso cómo calcular el área de un círculo usando sectores del mismo (figura 2.17). Realiza lo que se pide.

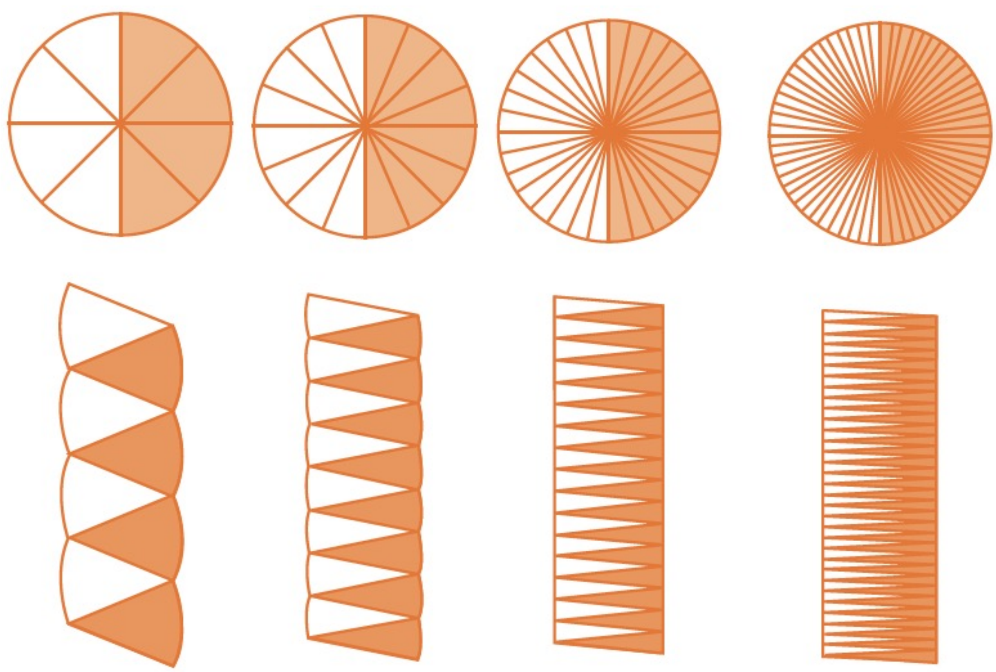


Figura 2.17: Diversos polígonos.

a) Tracen en una hoja de papel un círculo de 5 cm de radio.

b) Divídanlo en 8 sectores iguales y córtenlos; luego reacomoden con el patrón indicado en la figura 2.17 y péguenlos en otra hoja.

c) Tracen otro círculo de la misma medida, divídanlo en 16 sectores, recórtenlos y acomódenlos con el mismo patrón. Peguen la forma resultante en la misma hoja que la primera.

d) ¿A qué figura se asemejan los acomodos?

e) ¿Cómo obtienen el área aproximada de cada acomodo?

f) Si aumentan el número de sectores en que dividen el círculo, ¿qué sucederá con el reacomodo?

g) ¿Qué parte del acomodo coincidirá con el radio del círculo? ¿Cuál con el perímetro? Expliquen.

h) ¿De qué manera se obtiene el área A del acomodo resultante en función del radio y el perímetro?

i) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo.

j) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de la actividad anterior? Expliquen.

5. Consigan plastilina y un compás.

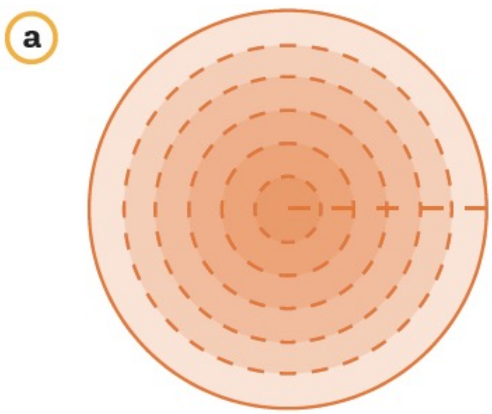


Figura 2.18: Descomposición de un círculo en tiras.

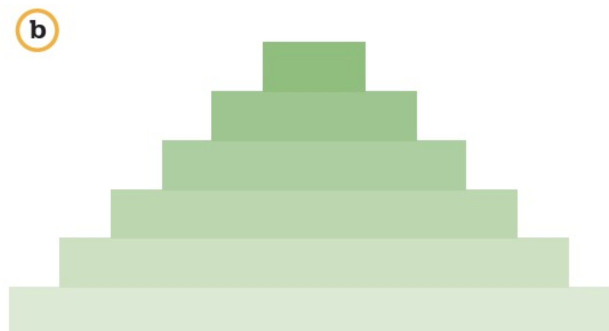


Figura 2.19: Arreglo de las tiras.

a) Tracen un círculo en una hoja de papel y cúbranlo con plastilina.

b) Dividan el radio del círculo en seis partes iguales y corten el círculo mayor en seis círculos más pequeños.

c) Dibujen un radio y corten los círculos en ese segmento (figura 2.18).

d) Con cuidado, separen cada tira y extiéndanla. Acomódenlas una junto a otra, de la más larga a la más corta, como se muestra en la figura 2.19.

e) ¿A qué figura se asemeja el acomodo?

f) ¿Cómo obtienen el área aproximada del acomodo? Expliquen.

g) Si aumentan el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué sucede con el acomodo? Expliquen.

h) Si aumentan infinitamente el número de divisiones del radio del círculo, ¿qué figura es el acomodo? Expliquen.

i) En este caso, ¿a qué elemento del triángulo corresponde el radio r del círculo? ¿Y el perímetro P?

j) ¿De qué manera se obtiene el área A del acomodo resultante en función del radio r y el perímetro P?

k) Escriban una fórmula para calcular el área del círculo.

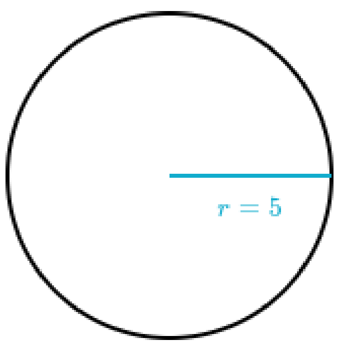
l) ¿Cómo es la expresión obtenida comparada con la de las actividades anteriores? Expliquen.

> El área de un círculo es la cantidad de espacio que abarca. También podemos pensarla como la cantidad total de espacio dentro del círculo. Para encontrar el área de un círculo podemos utilizar la siguiente fórmula:
>
> $$A = \pi r^2$$

Problemas de cálculo de área del círculo

Apliquemos lo aprendido respecto al cálculo del área de un círculo.

6. Encuentra el área de un círculo de radio 5.



Si $r = 5u$ La ecuación para el área de un círculo es:

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(5u)^2$$
$$A = \pi 5^2 u^2$$
$$A = \pi 25 u^2$$

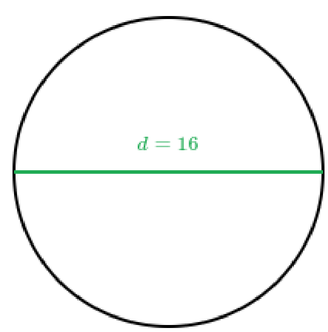
Podemos detenernos aquí y escribir la respuesta como 25π. O bien, podemos sustituir 3.14 por π y multiplicar.

$$A = 25\pi u^2$$
$$A = 25(3.14)u^2$$
$$A = 78.5u^2$$

El área del círculo es 25π unidades cuadradas, o sea 78.5 unidades cuadradas.

7. Encuentra el área de un círculo de diámetro 16.
rimero encontremos el radio:

$$r = \frac{d}{2}$$
$$r = \frac{16u}{2}$$
$$r = 8u$$



Ahora podemos encontrar el área.
La ecuación para el área de un círculo es:

$$A = \pi r^2$$
$$A = \pi(8u)^2$$
$$A = \pi 8^2 u^2$$
$$A = 64\pi u^2$$

Podemos detenernos aquí y escribir la respuesta como 64π. O bien, podemos sustituir 3.14 por π y multiplicar.

$$A = 64\pi u^2$$
$$A = 64(3.14)u^2$$
$$A = 200.96u^2$$

El área del círculo es 64π unidades cuadradas, o sea 200.96 unidades cuadradas.

8. Mónica adquirió una alfombra circular cuyo radio mide 1.2 m. Si el espacio en el que planeó colocarla es un cuadrado de 4.8 m^2, ¿cabrá la alfombra? ¿Cuántos metros cuadrados faltan o sobran?

9. Se fabricará una ventana de forma circular con un marco de acero inoxidable y vidrio templado. El grosor del cancel es de 1 cm y el radio de la ventana de 30 cm. El precio del acero es de \$1,200.00 el metro y el del vidrio es de \$1,600.00 por metro cuadrado.

   a) ¿Cuántos metros de marco se ocuparán?

   b) ¿Cuántos metros cuadrados de vidrio se ocuparán?

   c) ¿Cuál es el precio total de la ventana?

10. Miguel es plomero y sabe que la cantidad de agua que puede abastecer una tubería depende del área transversal del tubo. También sabe que los tubos se clasifican y se piden según la medida de su diámetro, dada principalmente en pulgadas.

Diámetro (in)	Área transversal (in^2)
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{4}$	
1	
$1\frac{1}{2}$	
2	
3	
4	

Tabla 2.18: Algunas medidas de tubos.

   a) Completa la tabla 2.18 con las principales medidas de diámetro de los tubos.

   b) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de $\frac{1}{2}$ in que una de $\frac{1}{4}$ in.

   c) ¿Cuántas veces es mayor el área transversal de una tubería de 3 in que de una de $\frac{3}{4}$ in?

   d) ¿Cuántas tuberías de 1 in son necesarias para distribuir la misma cantidad de agua que una tubería de 4 in?

11. Calcula el área sombreada de las figuras 2.20a y 2.20b.

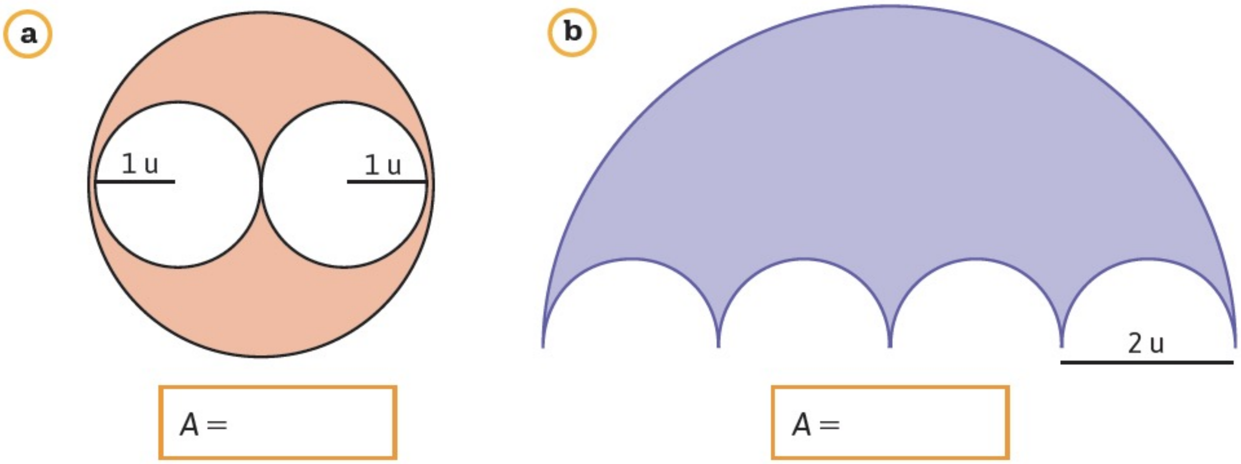


Figura 2.20: Secciones sombreadas de círculos.

12. Observa el esquema de una cancha de basquetbol de la figura 2.21. Nota que las medidas están en pulgadas y pies. Calcula el área de una de las regiones de tiros de falta (foul) formada por un rectángulo y un semicírculo. Determina las áreas de los círculos centrales. Calcula el área de las dos regiones de tres puntos.

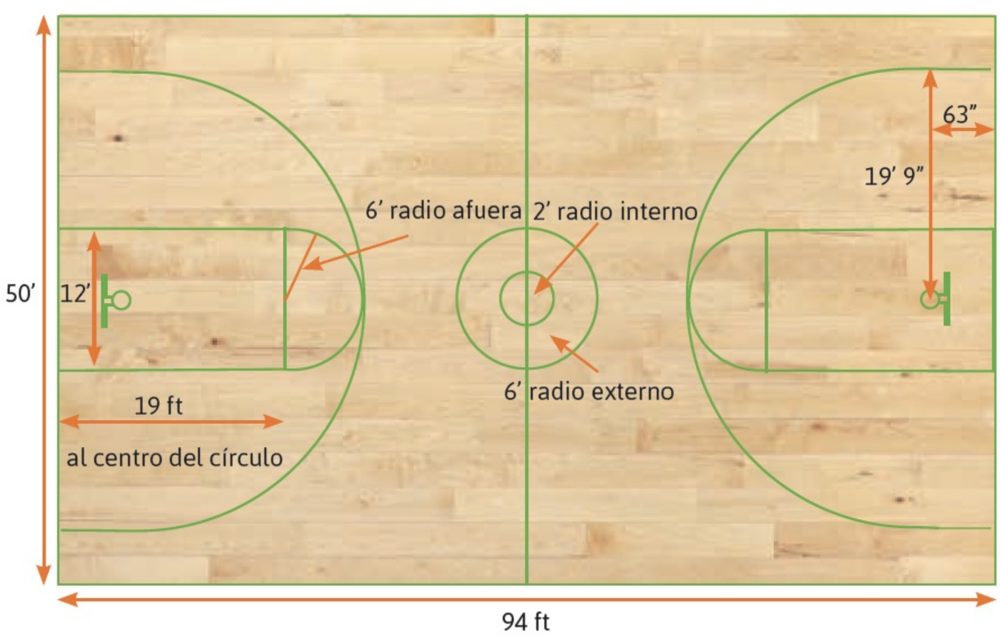


Figura 2.21: Cancha de basquetbol con medidas.

1. Retoma la situación de la actividad de inicio y responde, completa o corrige tus respuestas. Reflexiona acerca de los conocimientos o habilidades que necesitabas al inicio y que ahora has adquirido. Escribe en tu cuaderno una conclusión.
2. En 2009, la Secretaría de Turismo de la Ciudad de México entregó un certificado de récord Guinness al restaurante giratorio más grande del mundo que se encuentra en la torre del World Trade Center (WTC) de la Ciudad de México. El restaurante cuenta con una parte giratoria de 1,044 m^2, que es el área exterior donde se encuentran las mesas, la cual da una vuelta completa en una hora con cuarenta y cinco minutos; el resto del restaurante, es decir, la parte central, permanece fija. El diámetro total del restaurante es de aproximadamente 46 m.

a) ¿Cual es el área total del restaurante?

b) ¿Qué radio tiene la zona central?

c) ¿Qué ancho tiene la corona que corresponde a la zona giratoria?

d) Describe los procedimientos realizados en cada caso.

S18 Medidas de tendencia central, rango y desviación media

Aprendizajes esperados:

Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

L1. Medidas de tendencia central

L2. Rango y dispersión de datos

L3. Desviación media

S19 Sucesiones y equivalencia de expresiones

L1. Reglas aritméticas y equivalencias

S20 Figuras geométricas y equivalencia de expresiones

S21 Volumen de prismas rectos

L1. Volumen de primas rectos con base en forma de polígono regular

L2. Problemas de volumen de prismas rectos

S22 Volumen de cilindros rectos

L1. Volumen de cilindros rectos

L2. Problemas de cilindros rectos

S23 Desarrollos planos de prismas y cilindros rectos

L1. Desarrollos planos

S24 Probabilidad teórica