Practica la Unidad 3

Nombre del alumno: ______________________ **Fecha:** __________

Aprendizajes:

- Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.
- Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones.
- Comprende los criterios de congruencia de triángulos y los utiliza para determinar triángulos congruentes.
- Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras.

Puntuación:

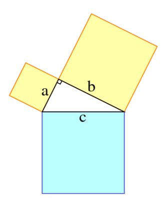
Pregunta	1	2	3	4	5
Puntos	10	10	10	15	15
Obtenidos					

Pregunta	6	7	8		Total
Puntos	15	15	10		100
Obtenidos					

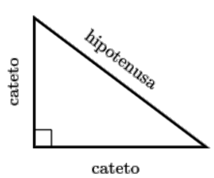
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa c es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b, como se muestra a continuación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



La Hipotenusa



La **hipotenusa** es el lado más largo y está enfrente del ángulo recto (ver Figura). Los dos catetos son los lados más cortos que forman el ángulo recto:

Ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** completa en una variable es una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.
Las soluciones a una ecuación cuadrática son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\delta}}{2a} \qquad \text{donde, } \delta = b^2 - 4ac$$

que se pueden escribir en una sola expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante δ es un parámetro que indica cuantas soluciones tiene una ecuación cuadrática:

$$\text{Número de soluciones} = \begin{cases} 2 & \text{si } \delta > 0 \\ 1 & \text{si } \delta = 0 \\ 0 & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Elige todas las respuestas adecuadas:

a ¿Cuáles longitudes de lados forman un triángulo rectángulo?

- ☑ **4.5, 6, 7.5**
- ☐ 5, $\sqrt{8}$, 3
- ☑ **12, 9, 15**
- ☑ $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, **2**

Para verificar si las opciones contienen o no las longitudes que corresponden a un triángulo rectángulo, es necesario sustituir estos valores en el teorema de Pitágoras, considerando la hipotenusa como el lado más largo en un triángulo rectángulo. Si se cumple la igualdad, entonces se trata de un triángulo rectángulo.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 7.5^2 &= 4.5^2 + 6^2 \\ 56.25 &= 20.25 + 36 \\ 56.25 &= 56.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 5^2 &= (\sqrt{8})^2 + 3^2 \\ 25 &= 8 + 9 \\ 25 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 15^2 &= 9^2 + 12^2 \\ 225 &= 81 + 144 \\ 225 &= 225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 2^2 &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \\ 4 &= 2 + 2 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Ejercicio 1

____ de 10 puntos

Elige todas las respuestas adecuadas:

a ¿Cuáles longitudes de lados forman un triángulo rectángulo?

- ☐ 9, 12, 15
- ☐ 7, 8, 9
- ☐ 3, 9, $\sqrt{95}$
- ☐ 3, 6, $\sqrt{45}$

Ejemplo 2

El diagrama muestra un triángulo rectángulo y tres cuadrados. El área del cuadrado más grande es 55 u^2, como se muestra en la figura 1.

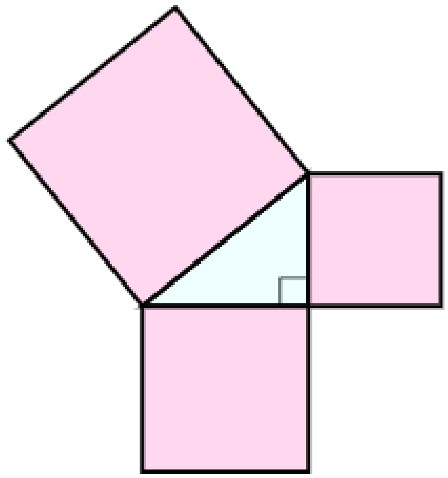


Figura 1

¿Cuáles pueden ser las áreas de los cuadrados más pequeños? *Marque todas las opciones que considere correctas.*

- ☐ $12u^2$ y $38u^2$
- ☐ $14u^2$ y $40u^2$
- ☑ $44u^2$ **y** $11u^2$
- ☐ $20u^2$ y $25u^2$
- ☑ $10u^2$ **y** $45u^2$
- ☑ $16u^2$ **y** $39u^2$

Ejercicio 2

____ de 10 puntos

El diagrama muestra un triángulo rectángulo y tres cuadrados. El área del cuadrado más grande es 36 unidades^2, como se muestra en la figura 2.
¿Cuáles pueden ser las áreas de los cuadrados más pequeños?
Selecciona todas las respuestas correctas.

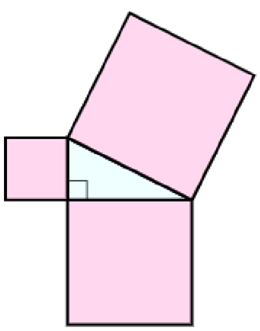


Figura 2

- ☐ $15u^2$ y $20u^2$
- ☐ $6u^2$ y $30u^2$
- ☐ $34u^2$ y $6u^2$
- ☐ $10u^2$ y $16u^2$
- ☐ $26u^2$ y $10u^2$
- ☐ $24u^2$ y $12u^2$
- ☐ $8u^2$ y $27u^2$
- ☐ $6u^2$ y $6u^2$

Ejemplo 3

Calcula el valor de x en el triángulo isósceles que se muestra abajo (figura 3).

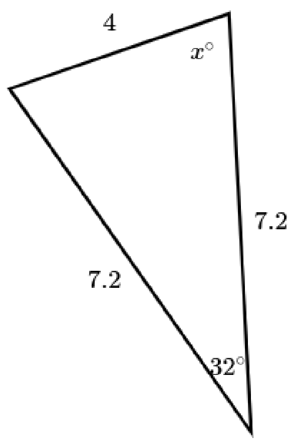


Figura 3

Dado que tiene dos lados congruentes (aquellos cuya longitud es 7.2), el triángulo es isósceles. Los ángulos opuestos a los lados congruentes también son congruentes, por lo que el ángulo sin etiqueta mide $x°$ (Ver Figura 4). Los tres ángulos en un triángulo suman 180°. Podemos escribir este enunciado como una ecuación:

$$x° + x° + 32° = 180°$$
$$\therefore x° = \frac{180° - 32°}{2} = 74°$$

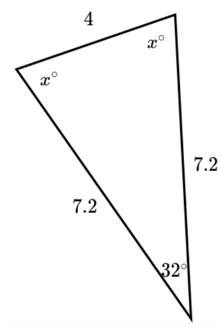


Figura 4

Ejercicio 3

____ de 10 puntos

¿Cuál es el valor de x en la figura 5?

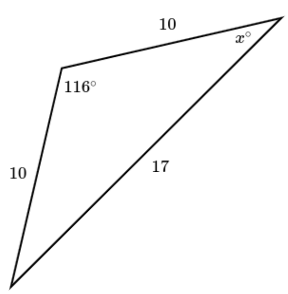
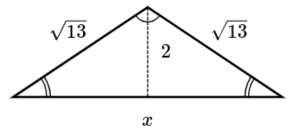


Figura 5

Ejemplo 4

Encuentra el valor de x en el siguiente triángulo:



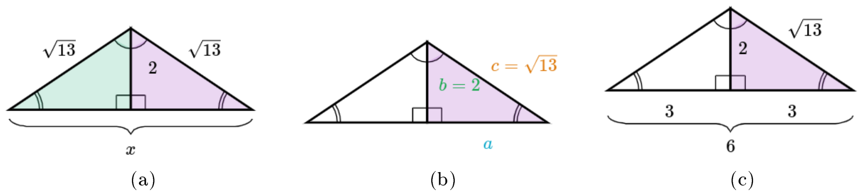


Figura 7

El triángulo isóceles está formado por 2 triángulos congruentes (ver figura 7a). La base de cada triángulo rectángulo es la mitad de la base del triángulo isóceles. Cuando se trata de un triángulo rectángulo podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la figura del problema con a, b y c (ver figura 7b).

$a^2 + b^2 = c^2$	El teorema de Pitágoras
$a^2 + 2^2 = \sqrt{13}^2$	Sustituye las longitudes
$a^2 + 4 = 13$	Evalua los cuadrados conocidos
$a^2 = 13 - 4$	Despejando x
$a^2 = 9$	Restando
$a = 3$	Calculando la raíz en ambos lados

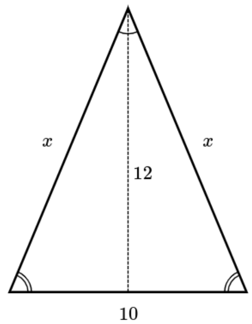
Como $a = 3$ y a es la mitad de la longitud de x (ver figura 7c), podemos multiplicar para obtener x.

$$x = a \cdot 2$$
$$x = 3 \cdot 2$$
$$x = 6$$

Ejercicio 4

____ de 15 puntos

Encuentra el valor de x en el siguiente triángulo:



Ejemplo 5

¿Cuál es el área del triángulo de la figura 9?

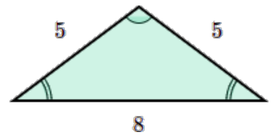


Figura 9

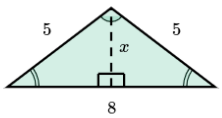


Figura 10

Para determinar el área del triángulo debemos saber la base y la altura. Llamemos x a la longitud (ver Figura 10). Cuando tenemos un triángulo rectángulo, podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener la longitud del cateto. La ecuación para el teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En este caso, $a = 4$, $b = x$ y $c = 5$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4^2 + x^2 &= 5^2 \\ 16 + x^2 &= 25 \\ x^2 &= 25 - 16 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La altura del triángulo es 3 y el área del triángulo es:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bx \\ A &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \\ A &= 12 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 5

____ de 15 puntos

¿Cuál es el área del triángulo de la figura 11?

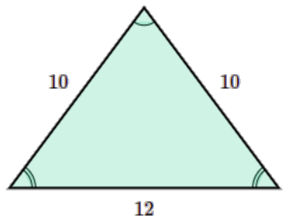


Figura 11

Ejemplo 6

¿Cuál es el perímetro del trapecio de la figura 13?
Considera que cada cuadro mide 1 unidad de longitud.

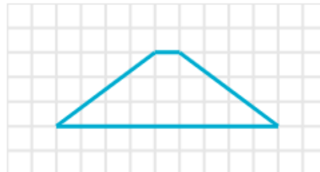


Figura 13

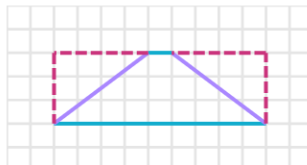


Figura 14

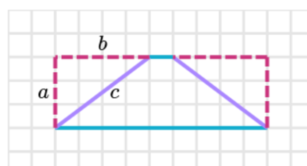


Figura 15

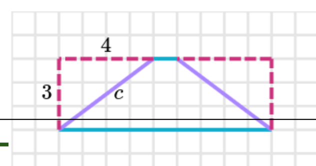


Figura 16

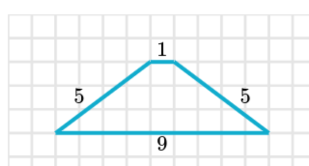


Figura 17

El perímetro es la distancia alrededor de una figura. Cada recta diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver figura 14). Podemos utilizar el teorema de Pitágoras para encontrar un lado faltante. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa. Etiquetemos la Figura del problema con a, b y c (ver figura 15). Podemos contar los cuadrados para encontrar las longitudes de a y b, y luego sustituir esos valores en el teorema de Pitágoras (ver Figura 16).

$a^2 + b^2 = c^2$ El teorema de Pitágoras

Ejercicio 6

____ de 15 puntos

¿Cuál es el perímetro del paralelogramo de la figura 18?

Considera que cada cuadro mide 1 unidad de longitud.

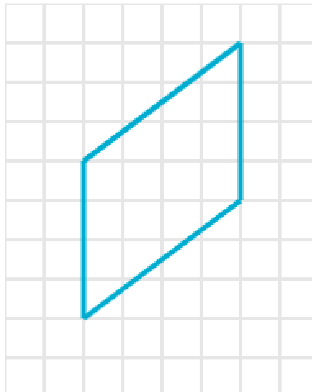


Figura 18

Ejemplo 7

Una tirolesa comienza en una plataforma que está a 40 metros del suelo. El punto de anclaje de la tirolesa está a 198 metros en dirección horizontal desde la base de la plataforma, como se muestran a continuación en la figura 23. **¿Qué tan larga es la tirolesa?**

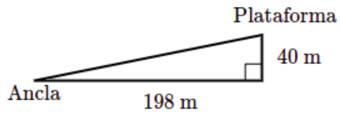


Figura 23

Podemos usar el teorema de Pitágoras para obtener x. La ecuación del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

donde a y b son las longitudes de los dos catetos del triángulo y c es la longitud de la hipotenusa. En este caso, $a = 40$, $b = 198$ y $c = x$.

$$\begin{aligned} x^2 &= 40^2 + 198^2 \\ x^2 &= 1,600 + 39,204 \\ x^2 &= 40,804 \\ x &= \sqrt{40,804} \\ x &= 202 \end{aligned}$$

La longitud de la tirolesa es 202 metros.

Ejercicio 7

____ de 15 puntos

La imagen muestra las distancias en kilómetros entre tres ciudades, como se muestran a continuación en la figura 24. **¿Qué tanto más corto es viajar directamente de Aurora a Clifton que de Aurora a Clifton pasando por Burlington?**

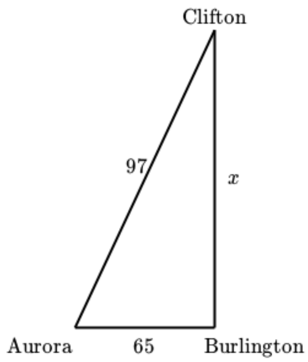


Figura 24

Ejemplo 8

Considera los dos triángulos que se muestran abajo en la figura 25 (los triángulos no están dibujados a escala).

¿Los dos triángulos son congruentes?

Escoge 1 respuesta y explica el por qué:

- (A) **Sí.**
- (B) No.
- (C) No hay suficiente información para decidir.

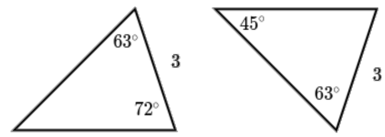


Figura 25

Dos triángulos son congruentes si tienen la misma forma y tamaño. En otras palabras, dos triángulos son congruentes si todos los lados y ángulos correspondientes son congruentes. Sin embargo, no necesitamos mostrar la congruencia de todos los lados y ángulos correspondientes para demostrar que dos triángulos son congruentes. Los criterios de congruencia (LLL, LAL, ALA) y el teorema AAL son atajos útiles para determinar congruencia de triángulos. En este caso, nos dan un lado y dos ángulos en cada triángulo. Puesto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, podemos encontrar el ángulo restante en cada triángulo. Ahora observa que dos ángulos y el lado entre ellos en un triángulo son congruentes a dos ángulos y el lado entre ellos de otro triángulo. Por lo tanto, los triángulos son congruentes por el criterio ALA. **Sí, los triángulos son congruentes.**

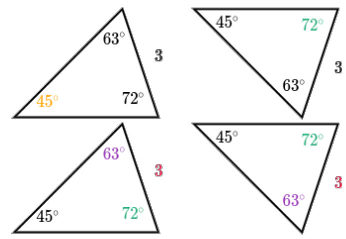


Figura 26

Ejercicio 8

____ de 10 puntos

Considera los dos triángulos que se muestran abajo en la Figura 27 (los triángulos no están dibujados a escala).

¿Los dos triángulos son congruentes?

Escoge 1 respuesta:

- (A) Sí.
- (B) No.
- (C) No hay suficiente información para decidir.

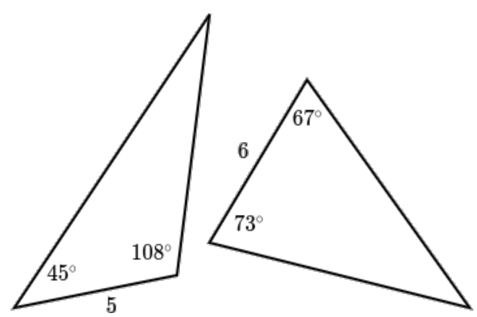


Figura 27