Escuela Rafael Díaz Serdán

Matemáticas 1 — 1° de Secundaria

JC Melchor Pinto

Unidad 3 — 2022-2023

Última revisión del documento: 13 de mayo de 2023

Autocontrol

Guía 40

Series y sucesiones aritméticas

Nombre del alumno: ______________________ **Fecha:** __________

Aprendizajes:

- Formula expresiones algebraicas de primer grado a partir de sucesiones y las utiliza para analizar propiedades de la sucesión que representan.

Puntuación:

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Puntos	15	10	10	15	10	10	15	15	100
Obtenidos									

Vocabulario

Serie → sinónimo de sucesión, es una lista de números con un patrón definido.
Serie Aritmética → serie cuyo patron es la suma de un número constante.
Serie Geométrica → serie cuyo patron es la multiplicación de un número constante.
Diferencia → es la distancia entre un número y otro (la resta del número mayor menos el menor).
Término → cada uno de los elementos en una serie.

Ejemplo de serie o sucesión aritmética

La Figura 1 son dos ejemplos de sucesiones aritméticas. Observa sus diferencias comunes.

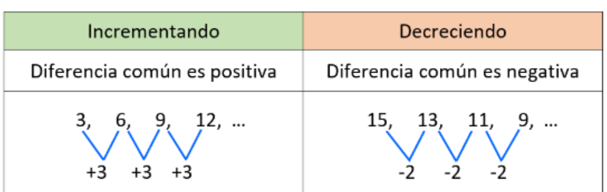

Figura 1: Ejemplos de series aritméticas con diferencia común positiva (izquierda) y negativa (derecha).

Serie o sucesión aritmética

Una **sucesión aritmética** es una lista de números con un patrón definido. Si es que tomamos un número de la sucesión y luego lo restamos por el número previo y el resultado siempre es el mismo, entonces es una sucesión aritmética.

Diferencia común

La diferencia constante en todos los pares de números consecutivos en una sucesión es llamada la diferencia común, denotada por la letra d. Usamos la diferencia común para ir de un término al otro. Si es que tomamos un término en la sucesión y sumamos la diferencia común, nos moveremos al siguiente término. Así es como los términos en una sucesión aritmética son generados.

Si es que la diferencia común entre los términos es positiva, decimos que la sucesión está incrementando. Por otro lado, cuando la diferencia entre los términos es negativa, decimos que la sucesión está decreciendo.

> La **regla de recurrencia** de una sucesión es una expresión algebraica que permite calcular el valor de cada término con sólo saber su posición en la serie (n).

Ejercicio 1 15 puntos

Completa la Tabla 1; luego, responde lo que se pide.

Tabla 1

Posición del término	1	2	3	4	5	6	7	8
Término de la sucesión	12	3	-6	-15	-24	-33	-42	-50
Diferencias	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9	-9

a ¿Cuál es el primer término de la sucesión?

Solución:
12

b A partir del primer término, ¿cómo se obtiene el segundo?

Solución:
Restando 9 unidades.

c ¿Cómo se obtiene el tercer término de la sucesión a partir del primero?

Solución:
Restando 2 por $9 = 18$ unidades. El término es $12 - 18 = -6$

d Analiza los resultados del renglón de las diferencias. ¿Qué observas?

Solución:
Que se obtiene el mismo valor de -9.

e Escribe la regla general de la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión.

Solución:
$n - m = -9$. Donde n es el enésimo elemento y m el consecutivo.

f Escribe el término que ocupa la posición 60.

Solución:
La regla general de la sucesión es $-9n + 21$. El término de la posición 60 es $-9(60) + 21 = -540 + 21 = -519$.

g ¿Qué posición tiene el término -78?

Solución:
Se resuelve $-9n+21 = -78$. Se obtiene $n = 11$.

h ¿Hay alguna posición en la que aparezca el número -138? ¿Cuál?

Solución:
Se resuelve $-9n + 21 = -138$. Se obtiene $n = 17.66\ldots$ Como no es entero, el número -138 no es elemento de la sucesión.

Ejercicio 2 — 10 puntos

Completa las Tabla 2 y la Tabla 3 usando un procedimiento similar al anterior.

Tabla 2

Posición del término	1	2	3	4	5	6	7	8
Término de la sucesión	3.2	4.6	6	7.4	8.8	10.2	11.6	13
Diferencias	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
Regla general	$1.4n + 1.8$							

Tabla 3

Posición del término	1	2	3	4	5	6	7	8
Término de la sucesión	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{17}{6}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{23}{6}$
Diferencias	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Regla general	$\frac{1}{2}n - \frac{1}{6}$							

Ejemplo 1

Analiza la sucesión que se presenta en la Figura 2.

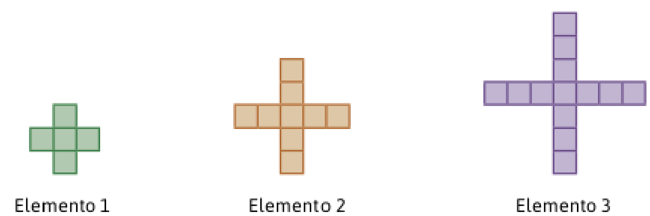

Figura 2

a Completa la Tabla 4

Tabla 4

Posición de la figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de cuadrados	5	9	13	17	21	29	37	61

b Escribe una regla de recurrencia para la sucesión.

Solución:
$4n + 1$.

Ejercicio 3 — 10 puntos

Observa los diseños en la figura 3 y responde a las preguntas.

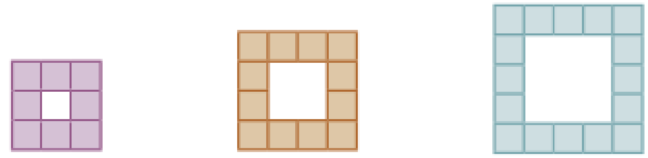

Figura 3

a ¿Cuántos cuadrados se añaden en cada diseño?

Solución:
4 cuadrados. El primero tiene 8, el segundo 12 y el tercero 16.

b Completa la Tabla 5 y luego escribe una regla de recurrencia.

Solución:
Los términos de la sucesión se pueden calcular con la siguiente regla: $8 + 4(n - 1) = 8 + 4n - 4 = 4 + 4n$

Tabla 5

Posición del diseño	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de cuadrados	8	12	16	20	24	28	32	36

Ejercicio 4 15 puntos

En la Figura 4 se construye cada diseño con triángulos, añadiendo palillos de la siguiente manera.

Figura 4

a Escribe una regla para la sucesión del número de palillos y compruébala.

Solución:
$2n + 1$. En la comprobación se pueden incluir argumentos similares a los usados en los casos anteriores.

b Calculen cuántos palillos se tienen en total en el diseño 19.

Solución:
$2(19) + 1 = 39$.

c Toma en cuenta las reglas $20 + n$ y $13 + 2(n - 6)$ y calculen su valor para n = 19.

Solución:
Primera regla: $20 + (19) = 39$.
Segunda regla: $13 + 2(19 - 6) = 13 + 2(13) = 13 + 26 = 39$.

d Comparen los resultados de los incisos c) y d). ¿Cómo son? ¿Por qué?

Solución:
Son iguales para n = 19.

e Basados en los valores de la regla que cada uno encontró y de estas dos, ¿las ex- presiones son equivalentes? Expliquen.

Solución:
La fórmula que describe la sucesión es equivalente a $13 + 2(n - 6)$, lo cual se demuestra simplifi cando la expresión de la siguiente manera: $13 + 2n - 12 = 2n + 1$.
Sin embargo, la regla $20+n$ sólo coincide con las otras para el valor $n = 19$. Por ejemplo, el primer término de la sucesión $(n = 1)$ según esta fórmula, de- bería ser $20 + 1 = 21$, lo cual difiere de $2(1) + 1 = 3$.

Ejemplo 2

Completa la Tabla 6.

Tabla 6

Regla de recurrencia	Término en la sucesión							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$22-11n$	11	0	-11	-22	-33	-44	-55	-66
$11(2-n)$	11	0	-11	-22	-33	-44	-55	-66
$11-11(n-1)$	11	0	-11	-22	-33	-44	-55	-66

Ejercicio 5

10 puntos

Completa la Tabla 7. Luego responde lo que se pide.

Tabla 7

Regla de recurrencia	Número de término en la sucesión							
	1	2	3	5	12	25	50	100
$21-9n$	12	3	-6	-24	-87	-204	-429	-879
$-3(3n-7)$	12	3	-6	-24	-87	-204	-429	-879
$12-9(n-1)$	12	3	-6	-24	-87	-204	-429	-879

a Compara los términos. ¿Qué observan?

Solución:
Que son iguales para las tres expresiones.

b ¿Por qué piensas que ocurre lo que observaste? Hagan una conjetura

Solución:
Las tres expresiones algebraicas son equivalentes.

c Reflexionen: en la segunda regla, ¿qué operación deben realizar con el -3 y los términos dentro del paréntesis? Y en la tercera regla ¿qué operación deben realizar con el término numérico y los términos dentro del paréntesis? No se olviden de la regla de los signos. En cada regla, ¿cuáles términos son semejantes? Hagan las operaciones necesarias y simplifiquen las dos últimas reglas.

Solución:
Se busca que los alumnos mencionen que el - 3 de la segunda regla y el - 9 de la tercera se multiplican por los términos dentro de los paréntesis respectivos y que todos los términos son semejantes. Además, que obtengan mediante la siguiente operación el resultado: $12-9n+9=21-9n$.

Ejemplo 3

Escribe en la Tabla 8 dos reglas equivalentes de cada sucesión.

Tabla 8

Término en la sucesión	Regla de recurrencia	
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19,...	$1+3(n-1)$	$3n-2$
14, 21, 28, 35, 42, 49, 56,...	$14+7(n-1)$	$7n+7$
5, 1, -3, -7, -11, -15, -19,...	$5-4(n-1)$	$9-4n$
$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, ...	$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)$	$\frac{1}{2}n$

Ejercicio 6 — 10 puntos

Relaciona cada regla de recurrencia con los términos de la sucesión que representan.

(A) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots$

(B) $4, 9, 14, 19, \ldots$

(C) $12, 0, -12, -24, \ldots$

(D) $2, 8, 14, 20, \ldots$

(E) $6, -1, -8, -15, \ldots$

a **D** $6n-4$

b **C** $24-12n$

c **A** $\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}$

d **B** $5n-1$

e **D** $2(3n-2)$

f **A** $\frac{1}{2}(n-3)$

g **E** $13-7n$

Ejercicio 7 — 15 puntos

Completa la Tabla 9.

Tabla 9

Regla de recurrencia	Posición en la sucesión				
	1	2	3	4	5
$4\,(n+1)$	8	12	16	20	24
$4n+4$	8	12	16	20	24
$2n+2\,(n-1)$	2	6	10	14	18
$4\,(n-1)+8$	8	12	16	20	24

a ¿Hay reglas con las que obtienes los mismos términos? ¿Cuáles?

Solución:
Sí, con $4(n+1), 4n+4y4(n-1)+8$.

b Si sustituyes el mismo valor en dos o más reglas y obtienes el mismo término, ¿qué puedes decir acerca de las reglas?

Solución:
Que son las mismas reglas escritas de manera diferente.

c Simplifica las reglas de la Tabla 9. ¿A qué expresión llegaste en cada caso?

Solución:
$4(n+1) = 4n+4$
$4n+4$ ya está simplificada
$2n+2(n-1) = 2n+2n-2 = 4n-2$
$4(n-1)+8 = 4n-4+8 = 4n+4$

d Con base en lo anterior, ¿qué puedes concluir acerca de las reglas?

Solución:
Tres son la misma regla:
$4(n+1) = 4n+4 = 4(n-1)+8$.
La regla $2n+2(n-1)$ es diferente a las anteriores.

e Reúnete con tus compañeros. Respondan con argumentos: dadas dos o más reglas, ¿qué significa que sean equivalentes?, ¿cómo pueden saber si lo son?

Solución:
Se busca que los alumnos expliquen que dos o más reglas son equiva- lentes si para cualquier posición se obtienen los mismos términos o bien, que expliquen que mediante operaciones algebraicas, se puede transformar una expresión en la otra.

Ejemplo 4

Una sucesión comienza en 53 y cada término posterior se obtiene al restar 4 en cada paso.

a Escribe una expresión algebraica que sea regla de la sucesión.

Solución:

$53 - 4(n - 1)$.

b Analiza las siguientes expresiones. ¿Cuál o cuáles son iguales o equivalentes a la regla de la sucesión que escribieron?

- ✓ $53 - 4(n - 1)$
- ☐ $45 - 4(n - 2)$
- ☐ $53n - 4$
- ✓ $57 - 4n$

Ejercicio 8 — 15 puntos

Pablo está ahorrando para comprarse una tablet cuyo precio es \$13 000.00. Ya tiene \$2 500.00 y planea ahorrar \$420.00 cada semana.

a ¿Con cuáles reglas puede calcular el dinero que tendrá en cualquier semana?

☐ $420\left(n + \frac{2}{3}\right)$ ✓ $20\,(21n + 125)$ ✓ $420n + 2500$ ☐ $420n - 2500$

Solución:

b ¿Por qué puede expresar su plan de ahorro por medio de reglas generales para sucesiones?

Solución:

Por la regularidad de cada semana.

c ¿En cuántas semanas habrá llegado a su meta?

Solución:

Se debe cumplir que $420n + 2,500 = 13,000$. Entonces $n = 25$. Pablo tardará 25 semanas en juntar \$13,000.00 para su tablet.