Matemáticas 2

Cuaderno de trabajo
para los alumnos de 2° de Secundaria
en el curso durante el ciclo escolar
2022-2023

POR
J. C. Melchor Pinto
Profesor de asignatura en

Unidad 2

S10. Proporcionalidad directa e inversa

Aprendizajes esperados:

Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional

L1. Proporcionalidad directa e inversa

Definición

Proporcionalidad Directa:
Relación entre dos cantidades que cambian en el mismo sentido.

Definición

Proporcionalidad Inversa:
Relación entre dos cantidades que cambian en sentidos opuestos.

1. Señala si las relaciones son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

   a) La población mundial y el consumo de agua.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   b) La población mundial y la cantidad de agua disponible por persona.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   c) La distancia al sol y la temperatura.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   d) El tamaño de un planeta y su fuerza de gravedad.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   e) La velocidad de un móvil y la distancia recorrida.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   f) La cantidad de imágenes guardadas en el celular y la cantidad de espacio libre.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   g) El tamaño de un archivo y el tiempo de descarga.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

   h) La velocidad de conexión a Internet y el tiempo de descarga de archivos.
   ☐ Directamente proporcional ☐ Inversamente proporcional

Proporcionalidad con tablas de variación

Para identificar las características de los tipos de relaciones, en especial las que se refieren a proporcionalidad inversa, Analiza las siguientes situaciones, completa las tablas de variación y responde a cada una de las preguntas.

1. La autopista 10 en Haradh, Arabia Saudita, tiene más de 200 km en línea recta. Un automóvil viaja por esta carretera con velocidad constante de 120 km/h durante 200 km.

Distancia [km]	Tiempo [h]
50	
75	
100	
125	
150	
175	
200	

Tabla 2.1: Registro de la distancia y el tiempo de recorrido

   a) Completen la Tabla 2.1 que registra la velocidad del automóvil.
   b) ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ¿Por qué?
   c) ¿En cuántos minutos recorre 1 km? Explica tu procedimiento.
   d) ¿En cuánto tiempo se recorrieron 120 km? ¿Y en cuánto tiempo se recorrerán 230 km?

2. Analicen los rectángulos de la figura 2.1.

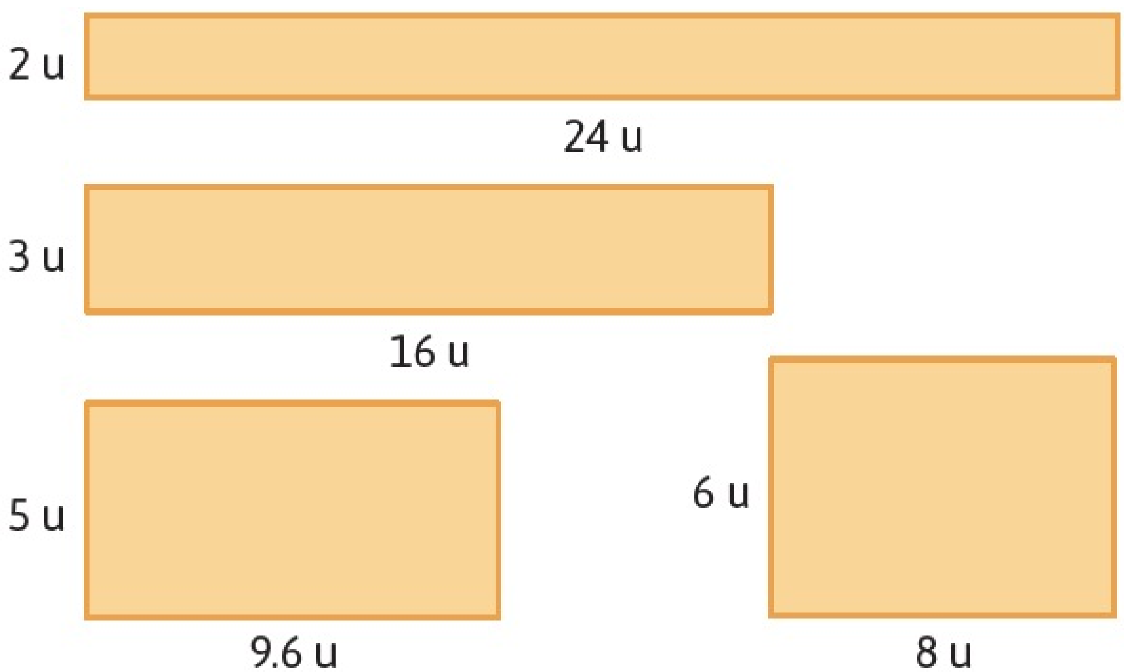


Figura 2.1: Grupo de rectángulos con medidas de largo y ancho para cada uno.

	Lado 1 (u)	Lado 2 (u)	Área (u^2)
Rectángulo 1	2	24	48
Rectángulo 2	3		
Rectángulo 3	5		
Rectángulo 4	6		

Tabla 2.2

a) Completa la Tabla 2.2 que muestra la medida de los lados de un conjunto de rectángulos.

b) ¿Cómo es la variación de los datos de la tabla? ¿Por qué?

c) Si se añade el rectángulo cuyo lado 1 mide 4 u, ¿cuál es la medida del otro lado? ¿Cuál es su área? Expliquen su procedimiento.

d) ¿Cómo es el área de los rectángulos?

L2. Problemas sobre proporcionalidad directa e inversa

Presentamos diversas situaciones que involucran la interpretación de relaciones directas e inversas. Intenta resolver por tu cuenta cada situación. Luego, una vez que agotes todas tus estrategias, analiza con detenimiento las propuesta de resolución de cada situación.

Ejemplos

Ejemplo 1 Marcos sale diariamente con su bicicleta y recorre todo el contorno del parque de su barrio. Él sabe que tarda aproximadamente 6 minutos en dar 3 vueltas al parque. Si Marcos quiere dar 12 vueltas al parque, **¿cuánto tiempo tardará?**

Asignemos x a la cantidad de vueltas e y el tiempo necesario para dar las x vueltas.

$$x = \text{número de vueltas.} \qquad y = \text{tiempo para dar las vueltas.}$$

Planteamos la relación directa entre x e y.

$$y = kx$$

Reemplazamos los valores que nos dan en la situación; 6 minutos para dar 3 vueltas. Es decir, $x = 3$ e $y = 6$.

$$6 = k(3) \Rightarrow k = 2$$

Por tanto, la relación proporcional es $y = 2x$. Como nos piden calcular la cantidad de minutos que necesita Marcos para dar 12 vueltas, sabemos que $x = 12$. Reemplazamos:

$$y = 2(12) \Rightarrow y = 24$$

Por tanto, Marcos tardará 24 minutos en dar 12 vueltas alrededor del parque de su barrio.

Ejemplo 2 Cinthia va a la escuela en bicicleta desde su casa. Ella calcula que llega al colegio en 45 minutos cuando va a una velocidad promedio de 0.75 kilómetros por minuto. **¿Cuánto tiempo tardará si cambia la velocidad a 0.5 kilómetros por minuto?**
Asignemos t al tiempo que demora en ir de su casa a la escuela y v a la velocidad promedio de su bicicleta.

$$t = \text{tiempo.} \quad v = \text{velocidad.}$$

Observa que la relación entre el tiempo y la velocidad es una relación inversa. Planteamos esa relación inversa entre x e y.

$$v = k \times \frac{1}{t}$$

Reemplazamos los valores que nos dan en la situación, 45 minutos a una velocidad de 0.75 kilómetros por minuto. Es decir $x = 45$ e $y = 0.75$.

$$0.75 = k \times \frac{1}{45} \Rightarrow k = 33.75$$

Por tanto, la relación proporcional es:

$$v = 33.75 \times \frac{1}{t}$$

Como nos piden calcular la cantidad de minutos que tarda en llegar a la escuela a una velocidad de 0.5 kilómetros por minuto, sabemos que

$$0.5 = 33.75 \times \frac{1}{t} \Rightarrow t = 67.5 \text{ minutos}$$

Por tanto, Cinthia tardará 67.5 minutos en llegar a la escuela a una velocidad de 0.5 kilómetros por minuto.

Ejemplo 3 En una tienda se venden rollos de papel higiénico. Cada rollo cuesta 2 dólares, pero hay la siguiente oferta: Lleva 3 rollos de papel higiénico y paga solo 2. Carlos compra 20 rollos del papel higiénico en oferta en esa tienda.
¿Es correcto afirmar que pagó 40 dólares?

Para resolver este problema utilizaremos una tabla de valores como la siguiente:

Cantidad de rollos	Rollos que paga	Pago total (en dólares)
3	2	$2 \times 2 = 4$
4	3	$2 \times 3 = 6$
5	4	$2 \times 4 = 8$
6	4	$2 \times 4 = 8$
7	5	$2 \times 5 = 10$
8	6	$2 \times 6 = 12$
9	6	$2 \times 6 = 12$

Observamos que, si la cantidad de rollos es un múltiplo de 3, se cumple una relación proporcional directa entre dicha cantidad y los rollos que deberá pagar. Como Carlos compra 20 rollos, podemos observar que el múltiplo de 3 más cercano a 20 es 18. Así obtendremos la cantidad de rollos a pagar luego de aplicar la oferta.

Cantidad de rollos	Rollos que se paga	Pago total
3	2	$2 \times 2 = 4$
6	4	$2 \times 4 = 8$
9	6	$2 \times 4 = 8$
18	12	$2 \times 12 = 24$

Gracias a la tabla, podemos observar que, llevando 18 rollos en oferta, solo pagará 12 rollos, es decir, 24 dólares. Para comprar los 20 rollos, Carlos deberá pagar 2 rollos adicionales a un monto de 4 dólares.

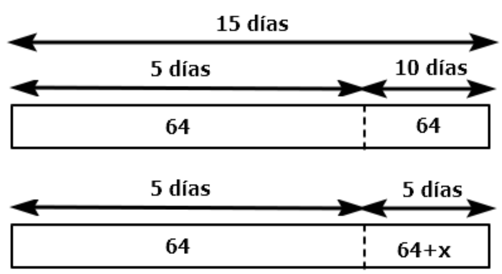
Finalmente, por toda la compra pagará 24 dólares más 4 dólares adicionales, es decir, un total de 28 dólares. Por tanto, la afirmación no es correcta. Carlos no pagó 40 dólares, sino 28.

Ejemplo 4

Un grupo de 64 obreros puede terminar una obra en 15 días. Al cabo de 5 días de trabajo, se les unen obreros de otro grupo, de modo que tardan 5 días menos en terminar la obra.

¿Cuántos obreros había en el segundo grupo?

Sabemos que 64 obreros terminarían la obra en 15 días. Como luego de los primeros 5 días de trabajo llegaron más obreros, hacemos el siguiente gráfico para representar la situación:



Observamos que, en esta situación, a mayor cantidad de obreros, menos días se necesitarán para terminar la obra.

Cantidad de obreros	64	64+x
Cantidad de días de trabajo	10	5

Como es una relación inversamente proporcional, planteamos la siguiente relación:

$$
\begin{aligned}
64 \times 10 &= 5 \times (64 + x) \\
640 &= 320 + 5x \\
5x &= 320 \\
x &= 64
\end{aligned}
$$

En el segundo grupo, había 64 obreros más, es decir, un total de 128 obreros.

Ejercicios

Copia en tu libreta las siguientes situaciones. Realiza, para cada uno de ellas, todas las operaciones y procedimientos necesarios para obtener la respuesta a cada una de las preguntas. Al terminar, señala la opción que contenga la respuesta correcta.

1. Un grupo de 20 obreros puede terminar una construcción en 40 días. Al cabo de 10 días de trabajo, se les unen obreros de otro grupo, de modo que en 15 días más terminan la obra.
   ¿Cuántos obreros había en el segundo grupo?
   Escoge 1 respuesta:
   (a) 20 obreros (b) 5 obreros (c) 10 obreros (d) 15 obreros

2. Mateo va en auto de su casa a la universidad. Si va a una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora, tarda 1 hora.
   ¿Cuánto tiempo tardaría si fuera a 40 kilómetros por hora?
   Escoge 1 respuesta:
   (a) 1 hora y 30 minutos (b) 30 minutos (c) 1 hora y 20 minutos (d) 2 horas

3. En una tienda, se venden rollos de papel higiénico. Cada rollo cuesta 2 dólares, pero hay la siguiente oferta: Lleva 3 rollos de papel higiénico y paga sólo 2. María va a la tienda a comprar 20 rollos de papel higiénico en oferta.
   ¿Cuánto pagará por la compra?
   Escoge 1 respuesta:
   (a) 28 dólares (b) 17 dólares (c) 30 dólares (d) 14 dólares

4. Un grupo de 32 tejedores puede terminar un pedido de ponchos en 15 días. Al cabo de 5 días de trabajo, se les unen tejedores de otro grupo, de modo que en 8 días más terminan el pedido.
   ¿Cuántos tejedores había en el segundo grupo?
   Escoge 1 respuesta:
   (a) 8 tejedores (b) 16 tejedores (c) 32 tejedores (d) 10 tejedores

5. **¿Cuál ecuación muestra variación directa?**
   Escoge 1 respuesta:
   (a) $\frac{1}{5} \cdot a = \frac{1}{b}$ (b) $a \cdot b = \frac{1}{5}$ (c) $a = 5 \cdot \frac{1}{b}$ (d) $\frac{a}{b} = 5$ (e) $a \cdot b = 5$

6. **¿Cuál ecuación muestra variación inversa?**
   Escoge 1 respuesta:
   (a) $2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ (b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ (c) $2 \cdot a = b$ (d) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ (e) $a \cdot b = 2$

7. En el mercado, 2 kilogramos de papa cuestan \$3.5 dólares. Sofía tiene \$25 dólares para comprar 14 kilogramos de papa.
   ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?
   Elige todas las respuestas adecuadas:
   - [ ] Deberá pagar \$7.5 dólares por 6 kilogramos de papa.
   - [ ] Pagará \$14 dólares por 8 kilogramos de papa.
   - [ ] Sofía recibirá \$0.50 dólares de vuelto.
   - [ ] Sofía necesitará más dinero para realizar la compra.

Problemas

1. Estás preparando limonada. La cantidad de azúcar que necesitas depende de la cantidad de limones que uses, como se muestra en la tabla 2.3.

Tazas de azúcar	$\frac{1}{3}$	1	3
Cantidad de limones	1	3	9

Tabla 2.3

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las tazas de azúcar y los limones?

2. Un carpintero fabrica sillas, las cuales le cuestan \$250.00 elaborar cada una. Además, tiene costos fijos por la renta del local y equipo que es de \$3 500.00 al mes.
¿Cuántas sillas hacen que el precio por producirlas sea igual a los costos fijos?

3. El equipo conformado por Cristina, Javier y Claudia tardó 8 días en responder 120 preguntas que su profesor de Historia de México les dejó de tarea.

   a) ¿Cuántas preguntas resolvieron Cristina, Javier y Claudia cada día? (a) 3 preguntas (b) 5 preguntas (c) 8 preguntas (d) 15 preguntas

   b) ¿Cuántas preguntas respondió cada uno de los integrantes del equipo por día? (a) 3 preguntas (b) 5 preguntas (c) 8 preguntas (d) 15 preguntas

   c) Si el equipo estuviera formado por 5 personas, ¿cuántas preguntas respondería cada una en un solo día, suponiendo que trabajan al mismo ritmo? (a) 3 preguntas (b) 5 preguntas (c) 8 preguntas (d) 15 preguntas

   d) ¿En cuántos días responderían las 120 preguntas si el equipo estuviera formado por 8 personas, suponiendo que trabajan al mismo ritmo que el equipo original? (a) 3 días (b) 5 días (c) 8 días (d) 15 días

   e) Si sólo hubieran sido 45 preguntas y el equipo estuviera formado por 5 personas que trabajan al mismo ritmo, ¿en cuantos días terminarían la tarea? (a) 2 días (b) 5 días (c) 8 días (d) 15 días

4. Tania tiene 5 parejas de canarios y necesita 15 paquetes de comida para alimentarlos durante 30 días.

   a) ¿Cuántos días podría alimentar a los canarios con un paquete de comida?
   (a) 5 días (b) 10 días (c) 30 días (d) 90 días

   b) ¿Cuántos días podría alimentar a los canarios con el triple de alimento?
   (a) 1 día (b) 2 días (c) 3 días (d) 5 días

   c) ¿Cuántos días le durarían los 15 paquetes de comida para alimentar al triple de canarios?
   (a) 15 días (b) 30 días (c) 60 días (d) 90 días

   d) Si Tania tuviera un total de 10 parejas de canarios, ¿cuántos días podría alimentarlos con un solo paquete de comida?
   (a) 5 días (b) 10 días (c) 30 días (d) 90 días

   e) Si Tania tuviera 30 canarios, ¿cuántos días le durarían 5 paquetes de comida?
   (a) 1 día (b) 2 días (c) 3 días (d) 5 días

S11. Reparto Proporcional

Con lo que hemos aprendido sobre las proporciones directas e inversas, ahora trabajaremos en dividir cantidades de tal manera que se usen estas variaciones.

L1. Situaciones de reparto proporcional

Definición

Resolver un problema de reparto proporcional consiste en dividir una cantidad en partes que guarden entre sí ciertas razones. Para realizar el reparto, se encuentran los valores faltantes en una relación proporcional directa.

Reparto proporcional directo

A una mayor cantidad corresponde mayor proporción

1. Antonio y Laura vieron un anuncio para limpiar un jardín de 40 m^2 por una paga de $800.

   a) **¿Cuáles son las variables que se deben considerar para realizar el trabajo?**
   - ☐ Cantidad a pagar por el trabajo
   - ☐ Cantidad de trabajadores
   - ☐ Días a trabajar
   - ☐ Superficie a limpiar
   - ☐ Tipo de trabajo

   b) Si Antonio y Laura trabajaron el lunes y limpiaron la cuarta parte del jardín, **¿Qué cantidad les faltó por limpiar?**
   ☐ 5 m^2 ☐ 10 m^2 ☐ 30 m^2 ☐ 40 m^2 ☐ 50 m^2

   c) El martes fueron ayudados por sus dos primos. Manteniendo el mismo ritmo de trabajo que el lunes, **¿qué cantidad limpiaron el segundo día?**
   ☐ 10 m^2 ☐ 20 m^2 ☐ 30 m^2 ☐ 40 m^2 ☐ 50 m^2

   d) Laura y sus dos primos salieron de vacaciones por lo que Antonio terminará el trabajo. Toño está desanimado así que decide dividir el trabajo que resta en 4 días. **¿Qué superficie limpiará cada día?**
   ☐ 1 m^2 ☐ 2 m^2 ☐ 2.5 m^2 ☐ 3 m^2 ☐ 3.5 m^2

   e) De haber mantenido el ritmo de trabajo, **¿cuántos días le habría tomado a Antonio terminar el trabajo?** ☐ 1 dá ☐ 2 dás ☐ 3 dás ☐ 4 dás ☐ 5 dás

2. Hay una oferta en la que se vende un lote de 126 canicas de colección a un precio de $689 pesos. Pedro y Juan lo quieren comprar pero ninguno tiene suficiente dinero, así que Pedro le propone a Juan comprar el lote entre los dos y luego repartirse las canicas. Pedro coopera con $449 y Juan completa el resto.

   a) ¿Qué parte del total del precio puso Pedro?

   b) Si se considera que el reparto se haga de la misma manera, ¿qué parte del total de las canicas le corresponden a Pedro?

c) ¿Cuántas canicas le corresponden a Pedro y cuántas a Juan?

d) ¿Piensas que este reparto ha sido justo? ¿Por qué?

e) ¿En qué sentido el reparto fue proporcional?

f) ¿En qué tipo de proporción se basa esta manera de repartir? Explica.

3. Para el Sorteo Gordo de Navidad de la Lotería Nacional, el cual repartirá un premio de \$397,952,000.00, tres amigos cooperan para comprar una serie completa de billetes de lotería (20 cachitos), como los de la figura 2.4, que cuesta \$2,000.00, pues ninguno tiene esa cantidad de dinero. Antonio pone \$520.00, Beatriz coopera con \$680.00 y Carlos con \$800.00. Los tres amigos siguen la plática acerca de lo qué harán al ganarse el premio.

Tabla 2.4: Ilustración de una serie de la Lotería Nacional.

a) Carlos propone dividir el premio entre tres. Sin embargo, los otros dos amigos protestan diciendo que eso no es justo. ¿Cuánto dinero le tocaría a cada uno? Expliquen si es justo o no.

b) Beatriz propone que cada quien tome el número de billetes de lotería que representa el dinero que invirtió y que cada quien cobre su premio. ¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué? Usen trocitos de papel para comprobarlo.

c) Completa la tabla 2.5 para calcular el reparto de billetes de lotería. ¿Se puede repartir de esta manera? ¿Por qué?

Tabla 2.17. Reparto de billetes de lotería

Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de billetes de lotería
Antonio		$\frac{20}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

Tabla 2.5: Reparto de billetes de lotería

d) Antonio propone repartir el dinero del premio de manera proporcional a lo que cada uno invirtió. Completa la tabla 2.6 para calcular la cantidad de dinero que le corresponde a cada amigo.

Tabla 2.18. Reparto de dinero del premio			
Persona	Cantidad que puso para el boleto	Operación para el reparto	Cantidad de dinero
Antonio		$\frac{397\,952\,000}{2\,000} \times 520$	
Beatriz			
Carlos			
Total			

Tabla 2.6: Reparto de dinero del premio

e) ¿Este reparto es proporcional? ¿Por qué?

f) ¿Consideran justo este reparto? Explica.

g) ¿Cómo se relaciona este reparto con una situación de proporcionalidad?

h) ¿Hay una constante de proporcionalidad? Si es así, ¿cuál es?

i) Propongan un procedimiento para hacer un reparto de manera proporcional.

j) En grupo, planteen situaciones en las que un reparto proporcional resuelve satisfactoriamente un problema.

Reparto proporcional inverso

En un problema de reparto proporcional inverso, se busca convertirlo en una proporción directa. Por ello, se utiliza el inverso multiplicativo o recíproco. De manera adicional, en algunos casos se reparten las cantidades de tal manera que al menor le toque la mayor parte y viceversa.

1. Un padre de familia tiene 3 hijos: Lucía, de 8 años; Julio, de 12, y Liliana, de 5 años. Repartirá entre ellos $2 000.00 que ha ahorrado, de manera proporcional a sus edades, de tal manera que al hijo menor le toque la mayor parte del dinero.

   a) Si aplican los procedimientos realizados en las actividades anteriores, ¿se cumple la condición que desea el padre? Expliquen.

   b) Completen la tabla 2.7 para calcular cuánto recibirá cada hijo.

Tabla 2.21. Reparto de dinero a tres hijos						
Hijo	Edad	Inverso multiplicativo	Común denominador	Fracción por común denominador	Operación	Cantidad que recibe cada hijo
Liliana						
Lucía						
Julio						
Total						

Tabla 2.7: Reparto de un padre de familia a sus tres hijos

   c) ¿Se cumple de esta manera el objetivo del padre de familia? ¿Por qué?

2. Se repartirán \$2 200.00 en premios a los tres primeros lugares de una carrera de automóviles, de tal manera que el primer lugar reciba la mayor parte del monto.

   a) ¿Qué tipo de reparto proporcional deben realizar? ¿Por qué?

   b) Completen la tabla 2.8 para calcular los montos.

Tabla 2.22. Premio a los primeros tres lugares					
Lugar en la carrera	**Inverso multiplicativo**	**Común denominador**	**Fracción por común denominador**	**Operación**	**Premio a cada lugar**
1	1	6	$1 \times 6 = 6$	$\left(\frac{2\,200}{11}\right) \times 6$	1200
2					
3					

Tabla 2.8: Premio a los primeros 3 lugares

   c) ¿Se cumple el objetivo de la repartición de los premios? ¿Por qué?

   d) ¿Qué distingue a un problema de reparto proporcional inverso de uno directo?

   e) Describe un procedimiento para resolver un problema de reparto proporcional inverso.