Cours de Statistique Inférentielle

Jean Christophe Meunier

Rappel 2
Calculs de probabilités

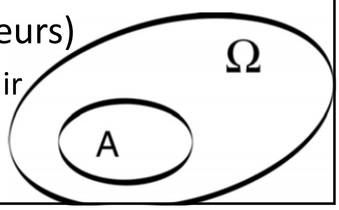
$2^{ème}$ Bac, Commerce Extérieur

Année Académique 2015-2016

EPFC

I. Événements

- Problème :
  - On peut prévoir quels sont les résultats possibles d'une expérience mais non, parmi ces possibles, celui qui se réalisera
    - Jet d'un dé : 6 résultats possibles mais lequel sortira ?
- Espace fondamental Ω
  - Ensemble des résultats possibles
    - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Événement A (ou B, C, D,…si plusieurs)
  - Le résultat du jet est un chiffre impair
    - A = {1,3,5}

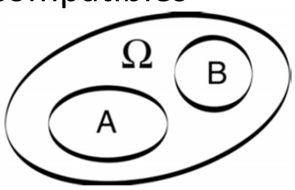


I. Événements

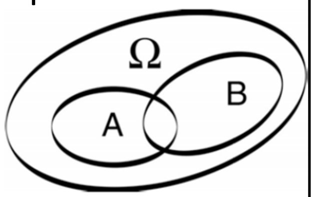
- Événement élémentaire e_i
  - Partie de Ω qui ne contient qu'une seule possibilité
  - Ex. {1} est un événement élémentaire de Ω
- Événement impossible
  - Événement qui ne contient aucun des éléments de Ω
  - Ex. 7 ou 8 correspond à la partie vide Ø de Ω
- Événement certain
  - L'ensemble de toutes les possibilités de Ω
  - Ex. {1,2,3,4,5,6}

I. Événements

- Deux (ou plusieurs) événements incompatibles
  - Deux parties disjointes de Ω
  - A = {pairs} et B = {impairs}



- Deux (ou plusieurs) événements composés
  - Deux parties jointes de Ω
  - A = {1,2,3,4} et B = {impairs}

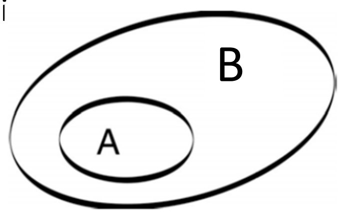


II. Axiome de Kolmogorov

- Faire correspondre une probabilité à chaque événement A $\subset \Omega$ → 3 conditions :
  - Positivité :
    - probabilité de A est positive ou nulle
      $\forall\ \boldsymbol{A} \in \Omega,\ p(X) \geq 0,$
  - Echelle :
    - Probabilité d'un événement impossible est nulle
    - Probabilité d'un événement certain est égale à 1
      $p(\emptyset) = 0,\ \ p(\Omega) = 1,$
  - Additivité :
    - L'union de deux événements incompatibles a pour probabilité la somme de leur probabilité
      $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

III. Algèbre des événements

- Relation d'inclusion
  - Lorsque tout élément de A appartient à B : A $\subset$ B
  - A implique B : si A se réalise B aussi
  - Ex. A = {1,3}, B={1,3,5}



- Complémentarité
  - A {1,2,3} ; non A = $\bar{A}$ = {4,5,6}
- Relations de correspondance
  - Réunion A ∪ B : A ou B se réalise
  - Intersection A ∩ B : A et B se réalise

III. Algèbre des événements

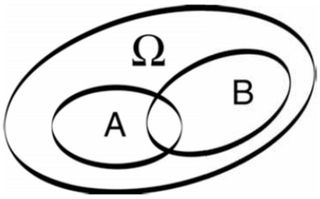
- ∪ et ∩ dans événements composés
  – *Pr* (A ∪ B)

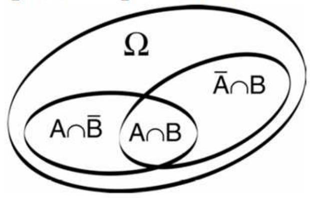
$$p(A \cup B) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

Avec, $p(A) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B)$

$$p(B) = p(\overline{A} \cap B) + p(A \cap B)$$

D'où, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$





  – *Pr* (A ∩ B) =+/- *Pr* (A) . *Pr* (B) ≠ Ø (non nul)

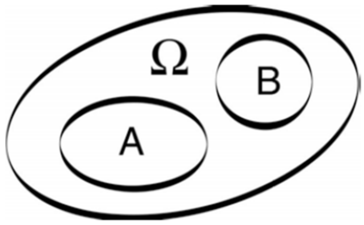
III. Algèbre des événements

- ∪ et ∩ dans événements incompatibles
  – *Pr* (A ∪ B)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

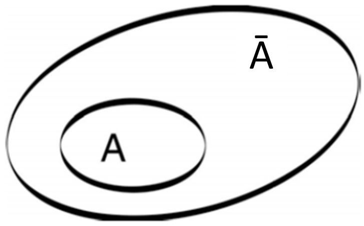
  - Principe d'additivité (Kolmogorov)

  – *Pr* (A ∩ B) = Ø



III. Algèbre des événements

- ∪ et ⋂ dans événements complémentaires
  - *Pr* (A ∪ Ā) = Pr (A) + Pr (Ā) = $\Omega = 1$
    - *D'où,* *Pr* (A) = 1 - Pr (Ā)
  - *Pr* (A ⋂ Ā) = Ø



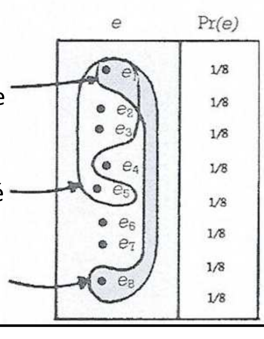
IV. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Probabilité d'un événement B sachant que l'événement A s'est déjà réalisé
  - Pr (B/A)
  - Si A se réalise, les événements possibles deviennent l'ensemble des parties de A, et non plus l'ensemble des parties de Ω :
    - les événements A et B sont dits dépendants (probabilité de B change lorsque A s'est réalisé)

Partie qui nous intéresse
Soit partie de B qui est encore comprise dans A = A ⋂ B

A, déjà réalisé

B



IV. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- D'où, Pr(B/A) est

$$p(B / A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

- Si *Pr*(A) = Ø, *Pr*(B) = Ø aussi
- Théorème des probabilités composées
  - Pour des événements dépendant (probabilité de B change lorsque A s'est réalisé), on peut définir *Pr* (A ∩ B) à partir de Pr(B/A)

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B / A)$. et $p(A \cap B) = p(B) \times p(A / B)$

IV. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Exemple :

Soit, par exemple, à calculer la probabilité pour que, tirant successivement deux cartes d'un jeu de 32 cartes, ces deux cartes soient des valets. Appelons A et B les deux événements suivants :

- A : la première carte est un valet,

- B : la deuxième carte est un valet.

La probabilité cherchée est $p(A \cap B)$ avec $p(A \cap B) = p(A) \times p(B / A)$.

Lors du premier tirage, il y a 32 cartes et 4 valets dans le jeu, d'où $p(A) = \frac{4}{32}$.

Lors du second tirage, il reste 31 cartes et seulement 3 valets, puisque l'événement A est réalisé, d'où $p(B / A) = \frac{3}{31}$.

Le résultat est donc : $p(A \cap B) = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \simeq 0.012$.

IV. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Cas particulier : événements indépendants
  - deux événements sont indépendants si la probabilité de l'un n'est pas modifiée lorsque l'autre est réalisé

    $$p(A/B) = p(A)$$

  - Il en résulte,

    $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

  - Dans l'exemple des cartes, A et B dépendants
    - Mais si remise de la première carte, les résultats des deux tirages deviennent indépendants

      $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{64} \simeq 0.0156$$