Cours d'Éléments de Statistique

Jean Christophe Meunier

MODULE 5
Analyses combinatoires & Calculs de probabilités

1ère Bac, Commerce Extérieur
Année Académique 2015-2016

EPFC

A. Introduction

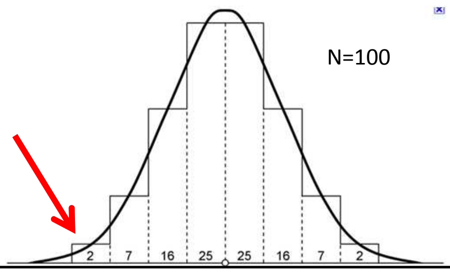
I. De la fréquence à la probabilité

- Intérêt de la probabilité
  - Inférence : pouvoir tirer des conclusions sur la population à partir de l'échantillon
  - Echantillon : N >> voire ∞
    - Récoltes de données impraticables (couteux et fastidieux)
- Ex: proportion de bilingues à BXL
  - Proportions de l'échantillon et de la population :
    - Différentes mais raisonnablement proches
- Probabilité
  - aide à préciser le 'raisonnablement proche'

3

I. De la fréquence à la probabilité

- Fréquence :
  - Sur *échantillon* N=100, 2 sujets ont cette valeur
  - Fréquence = 2%
- Probabilité
  - Si distribution de la *population* connue/estimée
    - **Loi de distribution**
  - Probabilité d'obtenir cette valeur = 2%



4

I. De la fréquence…

On lance un dé équilibré 10 fois (expérience) et on note la face du dé obtenue (résultat élémentaire).

On continue à lancer le dé jusqu'à un total de 50 lancés.

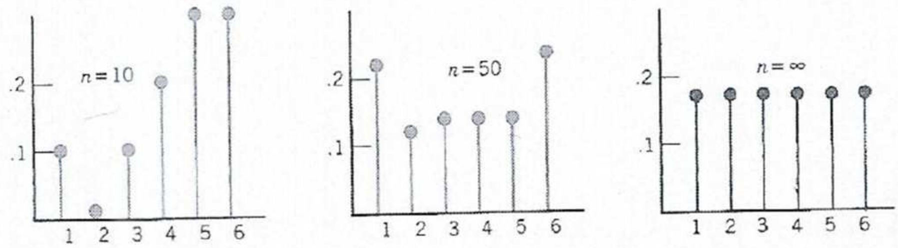
Le tableau ci-dessous donne la fréquence f_1 obtenue pour 10 (n = 10) et 50 (n = 50) lancés, respectivement.

X *Face du dé obtenue*	Fréquence f_1 *(a)* $n = 10$	*(b)* $n = 50$	*(c)* $n = \infty$
1	.10	.22	1/6 = .167
2	0	.12	1/6 = .167
3	.10	.14	1/6 = .167
4	.20	.14	1/6 = .167
5	.30	.14	1/6 = .167
6	.30	.24	1/6 = .167
	1.00 √	1.00 √	1.00

5

I. …à la probabilité

Les distributions correspondantes des fréquences peuvent être représentées graphiquement de la manière suivante:



Après un grand nombre de lancés, la fréquence d'apparition de chaque face tend à s'uniformiser.

Par définition, la probabilité P (X=1) est la limite de la fréquence f_i lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre (n) de fois.

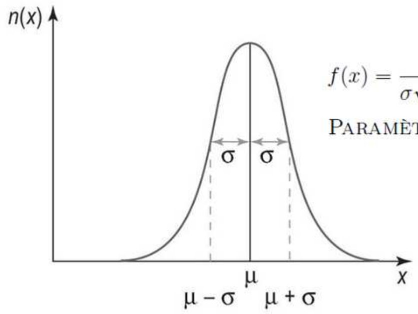
Pour l'événement face = 1,

$\boxed{P(X=1) = \lim_{n\to\infty} f(X=1) = 1/6}$ que l'on note également $P(1) = 1/6$

6

II. Lois de distribution

- Donne la probabilité d'occurrence de toutes les valeurs d'une variable théorique
- Distribution caractérisée par :
  – Fonction : équation qui donne la forme
  – Paramètres : habituellement tendance centrale et dispersion
    - Ex. loi normale



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

PARAMÈTRES : μ et σ

7

II. Lois de distribution

- Préalable à la compréhension des lois de distribution
  – Analyse combinatoire
  – Probabilité
- Notion essentielle : Variables aléatoires (v.a.)
  – Résultat d'une épreuve dans un phénomène aléatoire
  – Se traduit par une « grandeur » mathématique
  – Peut être discrète (nombre entier) ou continue (nombre réel)

8

B. Analyse combinatoire

9

Introduction

- Permutations (P)
  - Sans répétition
  - Avec répétition
- Arrangements (A)
  - Sans répétition
  - Avec répétition
- Combinaisons (C)
  - Sans répétition
  - Avec répétition

10

I. Permutation SANS répétition

- **<u>Déf</u>**. Soit E un ensemble à n éléments.
  - Une permutation de E est une bijection de E sur lui-même
  - Le nombre de permutations de E est :

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \times 1 = n!$$

    - ! : factoriel (ex. 3! = 3 * 2 * 1 = 6)
    - Par convention 0! = 1
- Ex : combien de mots peut on former à partir des lettres {a,b,c,d,e,f,g} → n = 7 lettres
  - P_7 = 7! = 5040 mots possible

11

II. Permutation AVEC répétition

- **<u>Déf</u>**. Soit E un ensemble à n éléments comportant :
    - n_1 éléments d'un premier type, indiscernables entre eux,
      n_2 éléments d'un second type, indiscernables entre eux,
      … n_k élément d'un k-ième type, indiscernables entre eux.
  - Le nombre de permutations avec répétition de E est

$$P_{n,n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\dots n_k!}$$

- Ex : combien de mots peut on former à partir des lettres {a,a,a,b,b,c,c}
  - n = 7 lettres ; n_a = 3 ; n_b = 2 ; n_c = 2
  - Il y a *(7!)*/(3! * 2! * 2!) = 210 mots possibles

12

III. Arrangement SANS répétition

- **Déf**. Soit E un ensemble à n éléments. Soit p $\leq$ n.
  - un arrangement de p éléments choisis parmi n est un sous-ensemble *ordonné* de E ayant p éléments
    - Le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

    - Pour p = n, on retrouve le cas de la permutation sans répétition (P_n)

$$A_n^n = n!.$$

- Ex : Dans une course opposant 8 athlètes, le nombre de podiums possibles est
    - *A^3_8 = (8!)/((8-3)!) =(8!)/(5!) = 8 * 7 * 6 = 336 arrangements possibles*

IV. Arrangement AVEC répétition

- **Déf.** Le nombre d'arrangements avec répétition de *p* objets pris parmi *n* (tirages avec remise) est

$$n^p$$

- Ex : on tire (tirage avec remise) 3 boules numérotées (en tenant compte de l'ordre de tirage) parmi 9
  - 9^3 = 729 arrangements possibles

V. Combinaison SANS répétition

- **Déf**. Soit E un ensemble à n éléments. Soit $p \leq n$.
  - une combinaison de p éléments choisis parmi n est un sous-ensemble *non-ordonné* de E ayant p éléments.
    - Chaque élément de *n* n'apparait qu'une fois (tirage sans remise)
    - Le nombre de combinaisons de *p* objets pris parmi *n* est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Pour une même combinaison, plusieurs arrangements possibles
  - Exemples
    - 1 combinaison de 3 chiffres (2,3,4), 6 arrangements possibles :
      - 2,3,4 – 2,4,3 – 3,2,4 – 3,4,2 – 4,2,3 – 4,3,2
    - Tiercé dans le désordre (combinaison) vs. dans l'ordre (arrangement)

V. Combinaison SANS répétition

- Ex : On tire simultanément 3 (*p*) boules numérotées prises parmi 8 (*n*), sans remise
  - *C^3_8 = (8!)/(3!)((8-3)!) =(8!)/(3!)(5!) = 8*7*6/2*3 = 56 combinaisons (où l'ordre n'a pas d'importance)*
- *Propriétés*

$$C_n^n = C_n^0 = 1, pour\ tout\ entier\ n$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n, pour\ n\ \geq 1$$

VI. Combinaison AVEC répétition

- **<u>Déf</u>**. Soit E un ensemble à *n* éléments. Soit $p \leq n$.
  - une combinaison de *p* éléments choisis parmi *n* est un sous-ensemble *non-ordonné* de E ayant p éléments.
  - Chaque élément de *n* peut apparaitre plusieurs fois (tirage avec remise)
  - Le nombre de combinaisons de *p* objets pris parmi *n* est

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

En bref

- Permutations (P) : tous les éléments de n
  - Sans répétition (e.g. permuter a,b,c,d,e)
  - Avec répétition (e.g. permuter lettre de 'bébé')
- Arrangements (A) : p éléments de n, ordre
  - Sans répétition (sans remise)
  - Avec répétition (avec remise)
- Combinaisons (C) : p éléments de n, désordre
  - Sans répétition (sans remise)
  - Avec répétition (avec remise)

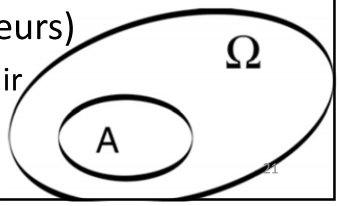
Exercices

1. Combien de manières de placer 8 convives autour d’une table ?
2. Combien de mots (avec ou sans signification) est-il possible de former avec les lettres du mot «CELLULE» ?
3. Nombre de mains de poker (tirage au hasard de 5 cartes) dans un jeu de 10 cartes ?
4. Nombre de tiercés dans l’ordre avec 8 chevaux ?
5. Tirage (avec remise) de 3 lettres dans un set de 7 lettres du scrabble, combien de mots ?
6. On jette trois fois successivement un dé et on tient compte de l’ordre. Combien de possibilités ?

C. Probabilités

I. Événements

- Problème :
  - On peut prévoir quels sont les résultats possibles d'une expérience mais non, parmi ces possibles, celui qui se réalisera
    - Jet d'un dé : 6 résultats possibles mais lequel sortira ?
- Espace fondamental Ω
  - Ensemble des résultats possibles
    - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- Événement A (ou B, C, D,…si plusieurs)
  - Le résultat du jet est un chiffre impair
    - $A = \{1,3,5\}$



21

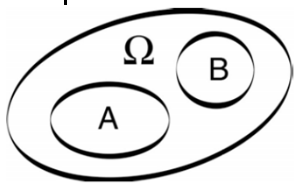
I. Événements

- Événement élémentaire e_i
  - Partie de Ω qui ne contient qu'une seule possibilité
  - Ex. {1} est un événement élémentaire de Ω
- Événement impossible
  - Événement qui ne contient aucun des éléments de Ω
  - Ex. 7 ou 8 correspond à la partie vide Ø de Ω
- Événement certain
  - L'ensemble de toutes les possibilités de Ω
  - Ex. {1,2,3,4,5,6}

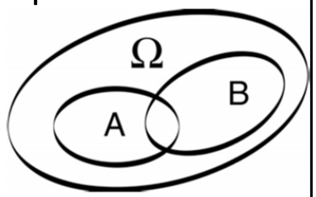
22

I. Événements

- Deux (ou plusieurs) événements incompatibles
  - Deux parties disjointes de Ω
  - A = {pairs} et B = {impairs}



- Deux (ou plusieurs) événements composés
  - Deux parties jointes de Ω
  - A = {1,2,3,4} et B = {impairs}



23

II. Axiome de Kolmogorov

- Faire correspondre une probabilité à chaque événement $A \subset \Omega$ → 3 conditions :
  - Positivité :
    - probabilité de A est positive ou nulle
      $\forall\ \boldsymbol{A} \in \Omega,\ p(X) \geq 0,$
  - Echelle :
    - Probabilité d'un événement impossible est nulle
    - Probabilité d'un événement certain est égale à 1
      $p(\emptyset) = 0,\ \ p(\Omega) = 1,$
  - Additivité :
    - L'union de deux événements incompatibles a pour probabilité la
      $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ é

24

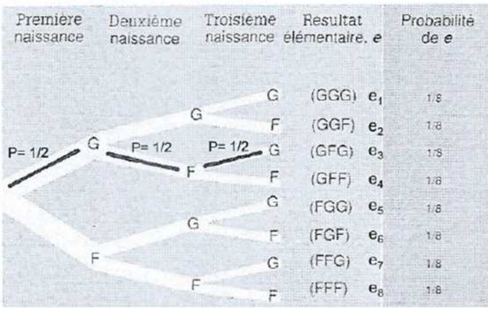
III. e_i et A ? Modèle de l'arbre

Supposons que l'expérience consiste pour une famille à avoir 3 enfants.

Un résultat possible serait: d'abord un garçon, ensuite une fille, puis un garçon: (GFG)

Comment obtenir la probabilité d'un tel résultat (= *événement élémentaire e*) ?

- Répéter l'expérience 1 million de fois: impossible
- Alternative: considérer 1 million de familles ayant 3 enfants et calculer la proportion de familles qui ont (GFG)



- Créer un modèle mathématique = expérience imaginaire

Modèle de l'arbre

Pr(G) = Pr(F) = ½ de la population

$$\Pr(GFG) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

L'arbre donne tous les résultats élémentaires possibles e_i et leur probabilité $\Pr(e_i)$

25

III. e_i et A ? Modèle de l'arbre

Ensemble des résultats possibles « S »		Probabilités
(GGG)	• e_1	1/8
(GGF)	• e_2	1/8
(GFG)	• e_3	1/8
(GFF)	• e_4	1/8
(FGG)	• e_5	1/8
(FGF)	• e_6	1/8
(FFG)	• e_7	1/8
(FFF)	• e_8	1/8

Ensemble échantillon S des résultats possibles, les événements élémentaires e_i , et probabilités des événements élémentaires $\Pr(e_i)$.

$$\Pr(e) = \Pr(branche1) \times \Pr(branche2) \times ... \times \Pr(brancheN)$$

$$\Pr(e) = \prod_{j=1}^{N} \Pr(branche)_j$$

Supposons que le couple prévoit d'avoir 3 enfants et espère au moins 2 filles.

Cet événement E comprend les 4 résultats élémentaires e_i suivants:

$$A = \{e_4, e_6, e_7, e_8,\}$$

(E est un sous-ensemble de S)

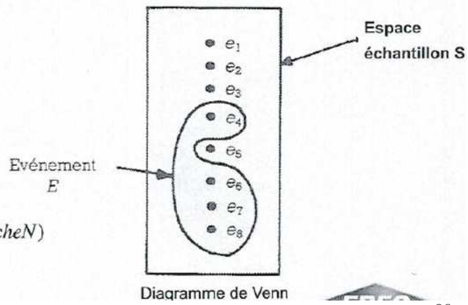


Diagramme de Venn

26

III. e_i et A ? Modèle de l'arbre

Sur base du *diagramme de Venn* de la diapositive précédente, on peut définir un **événement E** comme le sous-ensemble E de l'espace S des résultats possibles e_i.

Quelle est la probabilité de E (e_4, e_6, e_7, e_8) ?

Chaque résultat e_i se réalise une fois sur 8 si on réalise l'expérience un grand nombre de fois, soit:

$Pr(e_4) = 1/8$
$Pr(e_6) = 1/8$ Par conséquent, E se réalisera 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 4/8
$Pr(e_7) = 1/8$
$Pr(e_8) = 1/8$

De manière générale,

$$\boxed{Pr(A) = \Sigma\, Pr(e_i)}$$

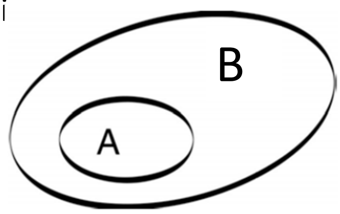
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des résultats élémentaires inclus dans cet événement

où on ne fait entrer que les résultats élémentaires e_i inclus dans E

27

IV. Algèbre des événements

- Relation d'inclusion
  - Lorsque tout élément de A appartient à B : $A \subset B$
  - A implique B : si A se réalise B aussi
  - Ex. A = {1,3}, B={1,3,5}
- Complémentarité
  - A {1,2,3} ; non A = $\bar{A}$ = {4,5,6}
- Relations de correspondance
  - Réunion $A \cup B$: A ou B se réalise
  - Intersection $A \cap B$: A et B se réalise



28

IV. Algèbre des événements

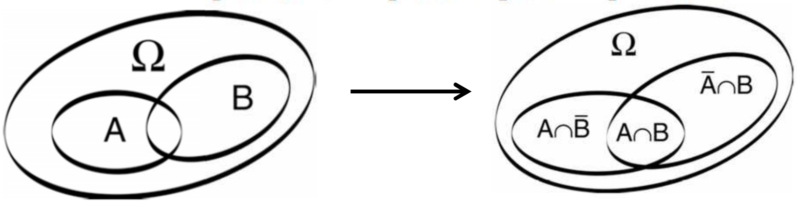
- ∪ et ⋂ dans événements composés
  - *Pr* (A ∪ B)

$$p(A \bigcup B) = p(A \bigcap \overline{B}) + p(A \bigcap B) + p(\overline{A} \bigcap B)$$

Avec, $p(A) = p(A \bigcap \overline{B}) + p(A \bigcap B)$

$$p(B) = p(\overline{A} \bigcap B) + p(A \bigcap B)$$

D'où, $p(A \bigcup B) = p(A) + p(B) - p(A \bigcap B)$



  - *Pr* (A ⋂ B) = *Pr* (A) . *Pr* (B) ≠ Ø (non nul)

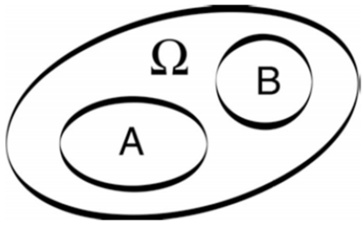
IV. Algèbre des événements

- ∪ et ⋂ dans événements incompatibles
  - *Pr* (A ∪ B)

$$p(A \bigcup B) = p(A) + p(B)$$

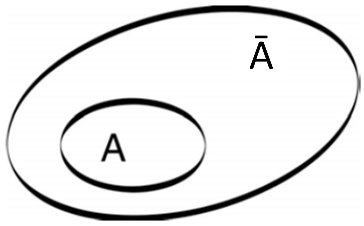
    - Principe d'additivité (Kolmogorov)

  - *Pr* (A ⋂ B) = Ø



IV. Algèbre des événements

- ∪ et ∩ dans événements complémentaires
  - *Pr* (A ∪ Ā) = Pr (A) + Pr (Ā) = $\Omega = 1$
    - *D'où,* *Pr* (A) = 1 - Pr (Ā)
  - *Pr* (A ∩ Ā) = ∅



Exercice 1

Ensemble des résultats possibles « S »		Probabilités
(GGG)	• e_1	1/8
(GGF)	• e_2	1/8
(GFG)	• e_3	1/8
(GFF)	• e_4	1/8
(FGG)	• e_5	1/8
(FGF)	• e_6	1/8
(FFG)	• e_7	1/8
(FFF)	• e_8	1/8

Reprendre l'exemple du planning de 3 enfants.

1. Montrer sur un diagramme de Venn l'événement F = « le 2$^{\text{ième}}$ enfant est une fille et le 3$^{\text{ième}}$ un garçon »
2. Calculer la probabilité de F
3. Calculer la probabilité des événements suivants:

G= moins de 2 filles

H= tous les enfants du même sexe

K= moins de 2 garçons

I= aucune fille

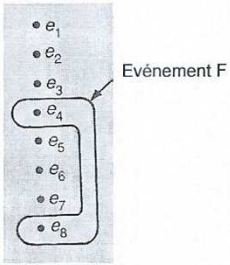
I_1= exactement 1 fille

I_2= exactement 2 filles

I_3= exactement 3 filles

Solution

a) Reprendre le tableau de la diapositive précédente. Examinons toutes les possibilités. On trouve 2 points dans l'événement F. Sa probabilité est donc de 2/8.



b) Dénombrer les points dans le tableau de l'énoncé pour chaque situation. On obtient:

(1) Symbole arbitraire d'un événement	*(2) Description littéraire*	*(3) Liste des résultats élémentaires*	*(4) Probabilité*
E	Au moins deux filles	$\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$	4/8
F	2ème enfant F, 3ème enfant G	$\{e_3, e_7\}$	
G	Moins de 2 filles	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	4/8
H	Les 3 enfants du même sexe	$\{e_1, e_8\}$	2/8
K	Moins de 2 garçons	$\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$	4/8
I	Aucune fille	$\{e_1\}$	1/8
I_1	Exactement une fille	$\{e_2, e_3, e_5\}$	3/8
I_2	Exactement 2 filles	$\{e_4, e_6, e_7\}$	3/8
I_3	Exactement 3 filles	$\{e_8\}$	1/8

Exercice 2

A l'aide du tableau ci-dessous, donner la liste des éléments inclus dans les événements suivants, et en déduire la probabilité: a) G ou H, b) G et H c) I ou K d) I et K

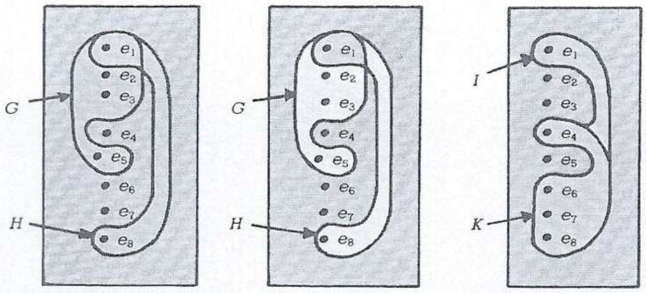
Solution

Reprenons le tableau des événements

(1) Symbole arbitraire d'un événement	*(2) Description littéraire*	*(3) Liste des résultats élémentaires*	*(4) Probabilité*
E	Au moins deux filles	$\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$	4/8
F	2ème enfant F, 3ème enfant G	$\{e_3, e_7\}$	
G	Moins de 2 filles	$\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$	4/8
H	Les 3 enfants du même sexe	$\{e_1, e_8\}$	2/8
K	Moins de 2 garçons	$\{e_4, e_6, e_7, e_8\}$	4/8
I	Aucune fille	$\{e_1\}$	1/8
I_1	Exactement une fille	$\{e_2, e_3, e_5\}$	3/8
I_2	Exactement 2 filles	$\{e_4, e_6, e_7\}$	3/8
I_3	Exactement 3 filles	$\{e_8\}$	1/8

Solution (suite)

Construisons les diagrammes de Venn:



(a) G ou H | (b) G et H | (c) I ou K

G ou H = (e_1,e_2, e_3,e_5,e_8)
d'où: Pr(G ou H) = 5/8

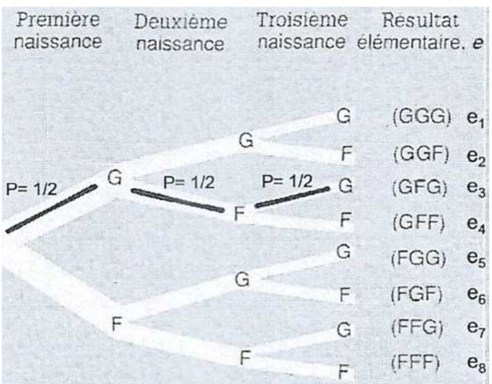
G et F = (e_3)
d'où: Pr(G et F) = 1/8

I ou K = (e_1,e_4,e_6,e_7,e_8)
d'où: Pr(I ou K) = 5/8

(d) I et K = (0), d'où Pr(I et K) = 0

Exercice 3

Pour être sûr d'obtenir *au moins* un garçon, un couple décide d'avoir 5 enfants. Quelles sont ses chances de succès ?



Exercice 3

Pour être sûr d'obtenir *au moins* un garçon, un couple décide d'avoir 5 enfants. Quelles sont ses chances de succès ?

Solution

Plutôt que d'expliciter tout l'espace - échantillon et de compter les événements correspondant à au moins 1 garçon, nous utilisons l'événement complémentaire.

Si E est l'événement: « au moins 1 garçon », alors $\overline{E}$ = « aucun garçon »

c'est-à-dire, « rien que des filles ».

$\Pr(\overline{E})$ est plus facile à calculer car il n'y a qu'un seul point dans l'espace échantillon. La probabilité d'obtenir une fille 5 fois de suite est:

$$\Pr(\overline{E}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

On en déduit que:
$$\begin{aligned}\Pr(E) &= 1 - \Pr(\overline{E}) \\ &= 1 - \frac{1}{32} \\ &= 0{,}97\end{aligned}$$

37

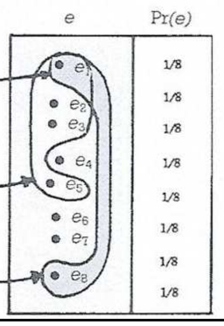
V. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Probabilité d'un événement B sachant que l'événement A s'est déjà réalisé
  - Pr (B/A)
  - Si A se réalise, les événements possibles deviennent l'ensemble des parties de A, et non plus l'ensemble des parties de Ω

Partie qui nous intéresse
Soit partie de B qui est encore comprise dans A = A ∩ B

A, déjà réalisé

B



38

V. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- D'où, Pr(B/A) est

$$p(B / A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

- Si *Pr*(A) = Ø, *Pr*(B) = Ø aussi
- Théorème des probabilités composées
  - Définir *Pr* (A ∩ B) à partir de Pr(B/A)

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B / A)$, et $p(A \cap B) = p(B) \times p(A / B)$

39

V. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Exemple :

Soit, par exemple, à calculer la probabilité pour que, tirant successivement deux cartes d'un jeu de 32 cartes, ces deux cartes soient des valets. Appelons A et B les deux événements suivants :

- A : la première carte est un valet,

- B : la deuxième carte est un valet.

La probabilité cherchée est $p(A \cap B)$ avec $p(A \cap B) = p(A) \times p(B / A)$.

Lors du premier tirage, il y a 32 cartes et 4 valets dans le jeu, d'où $p(A) = \frac{4}{32}$.

Lors du second tirage, il reste 31 cartes et seulement 3 valets, puisque l'événement A est réalisé, d'où $p(B / A) = \frac{3}{31}$.

Le résultat est donc : $p(A \cap B) = \frac{4}{32} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \simeq 0.012$.

40

V. Probabilité conditionnelle : Pr(B/A)

- Cas particulier : événements indépendants
  - deux événements sont indépendants si la probabilité de l'un n'est pas modifiée lorsque l'autre est réalisé

    $$p(A/B) = p(A)$$

  - Il en résulte,

    $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

  - Dans l'exemple des cartes, A et B dépendants
    - Mais si remise de la première carte, les résultats des deux tirages deviennent indépendants

      $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{4}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{64} \simeq 0.0156$$

41