② Agregación

Supongamos que $N_1, \dots, N_q$ son v.a. indep. con dist. Poisson, $P_0(N_j = n_j | \lambda_j)$, respectivamente, con $\lambda_j$'s posiblemente dif.

- $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ se distribuye Poisson ; • N tiene tasa de intensidad $\cdot\ \lambda = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$

Dem. Tenemos las funciones generadoras de probabilidades de cada v.a.

$\Pi_{N_1}(s) = e^{-\lambda_1(1-s)}$ ; $\Pi_{N_2}(s) = e^{-\lambda_2(1-s)}$ ; ... ; $\Pi_{N_q}(s) = e^{-\lambda_q(1-s)}$

$$\Rightarrow \Pi_{N_1+N_2+\dots+N_q}(s) \overset{\text{por independencia}}{=} \Pi_{N_1}(s)\,\Pi_{N_2}(s)\cdots\Pi_{N_q}(s) = e^{-\lambda_1(1-s)} \cdot e^{-\lambda_2(1-s)} \cdots e^{-\lambda_q(1-s)}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_q)(1-s)}$$

$$\Rightarrow N = \sum_{j=1}^{q} N_j \sim P_0(N=n|(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_q)) \quad \blacksquare$$

- Con tasa de intensidad $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_q = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j$ $\blacksquare$

Desagregación

Supongamos $N \sim P_0(n|\lambda)$ con $\lambda > 0$ ; $N_j \sim P_0(n|\lambda_j)$ con $\lambda_j = p_j\lambda$

$N = N_1 + \dots + N_j$ $j \geq 1$ y tiene distribución Bernoulli $(p)$

La f.g.p. de Bernoulli es $\phi(s) = E(s^x) = q + sp$

y la f.g.p. de N es $\Phi_N(t) = e^{\lambda(s-1)}$

$\Rightarrow$ la fgp de N es la composición de ambas

$$h_N(s) = \phi_N(\phi(s)) = e^{\lambda(q+sp-1)} = e^{\lambda(sp-p)} = e^{\lambda p(s-1)}$$

que es la f.g.p. de una poisson con parámetro $\lambda p$.

José Antonio González Acosta

Tarea

(3) Poisson $\quad\quad \lambda$ como variable aleatoria

$$P(N=n \mid \lambda=\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Gamma

$$Ga(\lambda \mid a,b) = \frac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda} \qquad \lambda > 0$$

$$\Rightarrow P(n\mid\lambda)\,Ga(\lambda\mid a,b) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\cdot\frac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda}$$

Para quitar la condición $\lambda$ hay que integrar sobre $\lambda$

$$\Rightarrow P(N=n) = \int_0^{\infty} P(N=n\mid\lambda=\lambda)\,Ga(\lambda\mid a,b)\,d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\cdot\frac{a^{b}}{\Gamma(b)}\lambda^{b-1}e^{-a\lambda}\,d\lambda = \int_0^{\infty}\frac{a^{b}}{n!\,\Gamma(b)}\lambda^{n+b-1}e^{-\lambda(a+1)}\,d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{n!\,\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(n+b)}{(a+1)^{n+b}}\int_0^{\infty}\frac{(a+1)^{n+b}}{\Gamma(n+b)}\lambda^{n+b-1}e^{-\lambda(a+1)}\,d\lambda$$

$$= \frac{a^{b}}{n!\,\Gamma(b)}\cdot\frac{\Gamma(n+b)}{(a+1)^{n+b}} \qquad n! = \Gamma(n+1)$$

$$= \frac{\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(b)}\cdot\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n} = \frac{(n+b-1)!}{n!\,(b-1)!}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n}$$

$$= \binom{n+b-1}{n}\left(\frac{a}{a+1}\right)^{b}\left(\frac{1}{a+1}\right)^{n} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

■