

Implementasi Kontrol Umpan Balik Keluaran Berbasis Tapis Kalman dan Regulator Kuadratik Linier pada Sistem Pendulum Terbalik

Ajeng Rizky Octavia^{1,*}, David Nathanlius^{2,*}, Tua Agustinus Tamba^{3,*}.

Abstrak

Sistem pendulum terbalik merupakan salah satu contoh acuan atau *benchmark* yang sering digunakan dalam studi, analisis dan perancangan sistem kontrol modern. Sistem ini pada dasarnya terdiri dari sebuah tongkat yang dijaga agar senantiasa berada pada posisi vertikal di atas suatu gerobak/kereta melalui pengontrolan gerak horizontal dari gerobak/kereta tersebut.

Makalah ini akan melaporkan hasil awal dari kegiatan studi dan penelitian yang dilakukan tim penulis dalam upaya merancang suatu purwarupa sistem pendulum terbalik. Model sistem pendulum terbalik yang ditinjau diturunkan secara analitik dalam bentuk model persamaan ruang keadaan linier dengan empat variabel keadaan yang mencakup (i) posisi dan kecepatan sudut simpangan dari tongkat pendulum serta (ii) posisi dan kecepatan gerak horizontal dari gerobak/kereta penyangga tongkat pendulum. Pada model yang digunakan, diasumsikan bahwa data pengukuran dari sensor yang dapat digunakan untuk merancang pengontrol hanya ada dua, yaitu sudut simpangan tongkat pendulum serta posisi gerobak/kereta penyangga. Lebih jauh, data pengukuran dari sensor tersebut juga diasumsikan telah tercampur dengan sinyal gangguan.

Berdasarkan karakteristik model dinamik serta data pengukuran yang diperoleh tersebut, maka pengontrolan sistem pendulum terbalik dilakukan dengan teknik kontrol umpan balik keluaran (output feedback control). Lebih spesifik, sistem kontrol yang digunakan terdiri dari (i) tapis Kalman (*Kalman filter*) untuk mengestimasi variabel keadaan sistem yang tidak terukur serta (ii) kontrol umpan balik berbasis LQR yang diimplementasikan pada gerobak/kereta penyangga untuk menjaga tongkat pendulum pada posisi vertikal. Simulasi numerik hasil perancangan sistem kontrol umpan balik yang diusulkan dilaporkan untuk mengilustrasikan kinerja estimator dan pengontrol yang dikembangkan.

Kata kunci

Pendulum terbalik, Kalman filter, LQR

* Teknik Elektro Konsentrasi Mekatronika, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung, Indonesia

E-mails: ¹6315020@student.unpar.ac.id, ²6315008@student.unpar.ac.id, ³ttamba@unpar.ac.id

Daftar Isi

1	Pendahuluan	1
2	Deskripsi dan Model Sistem	2
3	Teknik Kontrol yang Digunakan pada Sistem	4
3.1	Metode Linear Quadratic Regulator	5
3.2	<i>Kalman Filter</i>	5
4	Simulasi, Implementasi, dan Analisis Sistem	7
5	Kesimpulan	8

1. Pendahuluan

Teori kontrol merupakan suatu bidang ilmu yang kaya akan inovasi dan kesempatan untuk meningkatkan performansi sistem. Teori kontrol sangat berkaitan dengan perancangan, serta penerapan dari suatu pengontrol sistem. Teori kontrol juga erat kaitannya dengan dunia pendidikan dan penelitian [1][2].

Akademisi dan peneliti yang berminat mendalami teori kontrol perlu mendapat dukungan agar dapat memverifikasi teori kontrol yang konvensional dan dapat mengembangkan metode kontrol yang baru. Dukungan tersebut dapat berupa alat peraga atau simulator yang menerapkan teori kontrol. Simulator ini dapat meminimalisir kesenjangan antara teori kontrol yang dipelajari dengan masalah yang dihadapi di kehidupan nyata [1]. Terdapat beberapa *benchmark* dalam pembelajaran teori kontrol, salah satunya sistem pendulum terbalik [3].

Sistem pendulum terbalik (SPT) adalah sistem nonlinear yang terdiri dari suatu tongkat pendulum yang hendak dijaga atau dikontrol agar berada pada posisi vertikal di atas suatu gerobak. Pengontrolan posisi pendulum dapat dilakukan dengan mengatur pergerakan gerobak. Pada studi dan penelitian ini, titik tumpu pendulum diletakkan di atas gerobak yang dapat digerakkan pada arah horizontal. SPT perlu dijaga agar tetap berada pada posisi vertikal di atas gerobak tersebut. Sistem ini perlu dikontrol dengan cara memberikan gaya pada

titik tumpu atau keretanya agar kedudukan pendulum tetap tegak dan seimbang [2]. Gerobak dan pendulum dihubungkan oleh suatu sendi. Gerobak dilengkapi dengan sebuah motor yang menerima tegangan listrik yang dapat menghasilkan torsi untuk menggerakkan gerobak tersebut. Ilustrasi SPT ditunjukkan pada Gambar 1 [4].

Dalam beberapa tahun terakhir, penelitian mengenai kontrol SPT telah banyak dilakukan, contohnya kontrol SPT untuk penyeimbangan robot beroda dua menggunakan metode kendali proporsional dan integral, serta rancang bangun sekuter yang dapat menyeimbangkan dirinya sendiri sebagai moda transportasi [5][6]. Beberapa penelitian mengenai kontrol SPT dengan metode regulator kuadratik linier (*linear quadratic regulator*, LQR) juga telah dilakukan, contohnya dalam analisis kestabilan dan kontrol optimal pendulum terbalik ganda pada kereta menggunakan metode LQR, desain LQR pada SPT, serta kontrol optimal SPT menggunakan PID, LQR, dan MPC [2][4][7]. Contoh penelitian mengenai pengontrolan SPT dengan pendekatan tapis Kalman yaitu kompensasi sensor *gyro* untuk mengendalikan robot pendulum terbalik [8].

Makalah ini fokus pada implementasi kontrol berbasis LQR dan tapis Kalman pada SPT. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengontrol SPT agar pendulum dapat mempertahankan posisi tegak/vertikalnya secara stabil saat gerobak telah mencapai posisi yang diinginkan. Analisis dibatasi pada model linearisasi berdasarkan asumsi sudut simpangan θ kecil.

Makalah ini terdiri dari lima bab. Bab satu berisi penjelasan SPT dan teknik kontrolnya secara keseluruhan. Bab dua berisi penjelasan tentang SPT beserta pemodelannya. Bab tiga menjelaskan tentang perancangan pengontrol SPT dengan menerapkan tapis Kalman dan LQR. Bab empat berisikan hasil simulasi dan observasi sistem yang dibuat. Kesimpulan dari makalah ini dipaparkan pada bab lima.

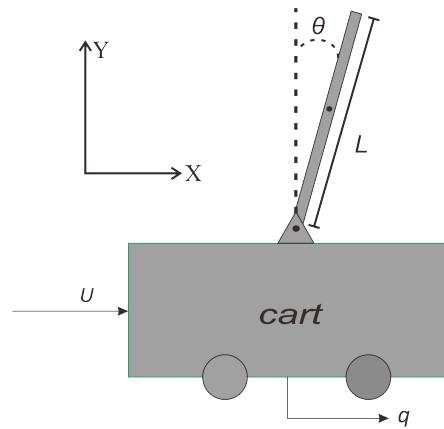
2. Deskripsi dan Model Sistem

SPT terdiri dari sebuah pendulum yang melekat pada gerobak yang dilengkapi dengan motor yang menggerakkan gerobak tersebut pada arah horizontal. Gerobak dilengkapi dengan *encoder* yang berfungsi untuk mengukur posisi gerobak dan sensor sudut yang berfungsi untuk mengukur sudut simpangan pendulum.

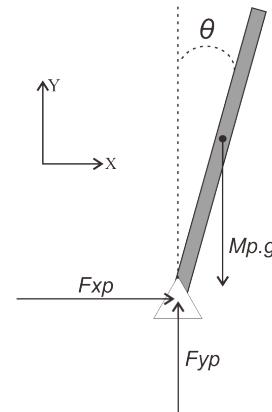
Gambar 1 menunjukkan skematika SPT. Pada SPT ini diajukan tidak ada gaya gesek pada engsel antara pendulum dengan gerobak dan massa tongkat pendulum diabaikan. Gaya U menggerakkan gerobak searah sumbu X. Sudut kemiringan pendulum disimbolkan dengan θ . Panjang tongkat pendulum dituliskan sebagai L . Massa pendulum dituliskan dengan M_p , sedangkan massa gerobak dituliskan dengan M_c . Perpindahan gerobak direpresentasikan dengan q .

Untuk melakukan analisis dan perancangan pengontrol pada SPT, terlebih dahulu dilakukan pemodelan sistem. Pemodelan dilakukan dalam dua tahap, yaitu penentuan persamaan gerak masing-masing komponen pendulum dan komponen gerobak. Persamaan gerak pendulum dan gerobak pada

SPT dapat diperoleh dari analisis diagram benda bebasnya. Diagram benda bebas gerobak ditunjukkan pada Gambar 2 dan diagram benda bebas pendulum ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 1. Sketsa Sistem Pendulum Terbalik.



Gambar 2. Diagram Benda Bebas (DBB) Pendulum

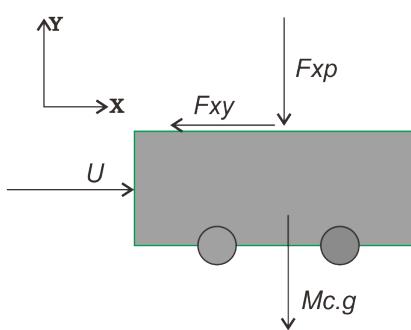
Berdasarkan DBB di Gambar 2, persamaan dinamik pada pendulum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Sigma \tau = I_p \alpha, \quad (1)$$

dimana τ adalah torsi, I_p adalah momen inersia pendulum, dan α adalah percepatan sudut. Berdasarkan komponen gaya pada Gambar 2, maka persamaan (1) dapat dituliskan menjadi:

$$\Sigma F_{yp} \frac{L}{2} \sin(\theta) - \Sigma F_{xp} \frac{L}{2} \cos\theta = I_p \ddot{\theta}, \quad (2)$$

dengan F_{xp} dan F_{yp} berturut-turut merupakan gaya yang bekerja pada pendulum di sumbu X dan Y. F_{yp} dapat dituliskan



Gambar 3. DBB Gerobak.

sebagai berikut:

$$\Sigma F_{yp} = M_p \ddot{y}_p + M_p g, \quad (3)$$

dimana \ddot{y}_p adalah percepatan pendulum pada sumbu Y, dan g adalah percepatan gravitasi. Komponen gaya F_{xp} didefinisikan sebagai berikut:

$$\Sigma F_{xp} = M_p \ddot{q}_p, \quad (4)$$

dimana \ddot{q}_p merupakan percepatan pendulum terhadap sumbu X.

Percepatan merupakan turunan kedua dari posisi. Dengan menurunkan persamaan y_p sebanyak dua kali, maka percepatan pendulum pada sumbu Y dapat dituliskan menjadi:

$$y_p = \frac{L}{2} \cos \theta. \quad (5a)$$

$$\dot{y}_p = \frac{d(\frac{L}{2} \cos \theta)}{dt}, \quad (5b)$$

$$= \frac{-L}{2} \dot{\theta} \sin \theta.$$

$$\ddot{y}_p = \frac{-L}{2} \frac{d(\dot{\theta} \sin \theta)}{dt}, \quad (5c)$$

$$= \frac{-L}{2} \dot{\theta} \cos \theta - \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{\theta},$$

$$= \frac{-L}{2} (\dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \ddot{\theta}).$$

Di sisi lain, percepatan pendulum terhadap sumbu X dapat dituliskan sebagai berikut:

$$q_p = \frac{L}{2} \sin \theta + q. \quad (6a)$$

$$\dot{q}_p = \frac{dq}{dt} + \frac{\partial(\frac{L}{2} \sin \theta)}{\partial t}, \quad (6b)$$

$$= \dot{q} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta.$$

$$\ddot{q}_p = \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{L}{2} \frac{\partial(\dot{\theta} \cos \theta)}{\partial t}, \quad (6c)$$

$$= \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + \ddot{q}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (5c) ke persamaan (3), maka gaya pendulum di sumbu Y menjadi:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{yp} &= M_p \frac{-L}{2} (\dot{\theta} \cos \theta + \sin \theta \ddot{\theta}) + M_p g, \\ &= \frac{-M_p L \dot{\theta} \cos \theta}{2} - \frac{M_p L \ddot{\theta} \sin \theta}{2} + M_p g. \end{aligned} \quad (7)$$

Untuk mengetahui gaya pendulum pada sumbu X, maka persamaan (6c) perlu disubstitusikan ke persamaan (4), sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{xp} &= M_p \left(\frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + \ddot{q} \right), \\ &= M_p \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - M_p \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + M_p \ddot{q}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (7) dan (8) pada persamaan (2), maka diperoleh :

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta} &= (M_p g - M_p \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta - M_p \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{\theta}) \frac{L}{2} \sin \theta \\ &\quad - (M_p \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - M_p \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + M_p \ddot{q}) \frac{L}{2} \cos \theta, \\ &= \frac{L}{2} M_p g \sin \theta - \frac{L^2}{4} M_p \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - \frac{L^2}{4} \sin^2 \theta \ddot{\theta} - \frac{L^2}{4} M_p \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \\ &\quad + \frac{L}{2} M_p \cos \theta \ddot{q}, \\ &= \frac{L}{2} M_p g \sin \theta - \frac{L^2}{4} M_p \sin^2 \theta \ddot{\theta} \\ &\quad - \frac{L^2}{4} M_p \cos^2 \theta \ddot{\theta} + \frac{L}{2} M_p \cos \theta \ddot{q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri berupa $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, maka persamaan (9) menjadi:

$$I_p \ddot{\theta} = \frac{L}{2} M_p g \sin \theta - \frac{L^2}{4} M_p \ddot{\theta} + \frac{L}{2} M_p \cos \theta \ddot{q}. \quad (10)$$

Berdasarkan DBB gerobak yang ditunjukkan pada Gambar 3, maka persamaan dinamik pada gerobak dapat diperoleh:

$$\Sigma F_{xc} + \Sigma F_{yc} = M_c \ddot{q}, \quad (11)$$

dimana F_{xc} adalah gaya pada gerobak terhadap sumbu X, F_{yc} merupakan gaya pada gerobak terhadap sumbu Y, dan \ddot{q} adalah percepatan gerobak. Dengan meninjau komponen gaya di sketsa pada Gambar 3, maka dapat diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{xc} &= U - \Sigma F_{xp}, \\ &= U - (M_p \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} - M_p \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} + M_p \ddot{q}), \\ &= U - M_p \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} + M_p \frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta} - M_p \ddot{q}. \end{aligned} \quad (12)$$

Pada gerobak, nilai $\Sigma F_{yc} = 0$ karena gerobak tidak bergerak pada arah vertikal (sumbu Y). Dalam hal ini, persamaan gerobak menjadi:

$$\begin{aligned} U - M_p \frac{L}{2} \cos\theta \ddot{\theta} + M_p \frac{L}{2} \sin\theta \dot{\theta} - M_p \ddot{q} &= M_c \ddot{q}, \\ U - M_p \frac{L}{2} \cos\theta \ddot{\theta} + M_p \frac{L}{2} \sin\theta \dot{\theta} &= (M_c + M_p) \ddot{q}, \quad (13) \\ U - M_p \frac{L}{2} \cos\theta \ddot{\theta} + M_p \frac{L}{2} \sin\theta \dot{\theta} &= (M_c + M_p) \ddot{q}. \end{aligned}$$

Persamaan differensial untuk $\ddot{\theta}$ dan \ddot{q} dapat diperoleh dengan mensubstitusi persamaan pada pendulum dan gerobak. Dalam hal ini $\ddot{\theta}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$(I_p + \frac{L^2}{4} M_p) \ddot{\theta} = \frac{L}{2} M_p g \sin\theta + \frac{L}{2} M_p \cos\theta \ddot{q}. \quad (14)$$

Dengan memisalkan $I_p + \frac{L^2}{4} M_p = \gamma$, maka persamaan $\ddot{\theta}$ menjadi:

$$\ddot{\theta} = \frac{\frac{L}{2} M_p g \sin\theta}{\gamma} + \frac{\frac{L}{2} M_p \cos\theta \ddot{q}}{\gamma}. \quad (15)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (15) ke persamaan (13) dan mengasumsikan θ bernilai kecil sehingga kondisi $\sin\theta = \theta$ dan $\cos\theta = 1$ valid, maka persamaan (13) dapat dilinearisasi untuk memperoleh:

$$\begin{aligned} (M_c + M_p) \ddot{q} &= U - M_p \frac{L}{2} \left(\frac{\frac{L}{2} M_p g \theta}{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{L}{2} M_p \cos\theta \ddot{q}}{\gamma} \right) + M_p \frac{L}{2} \dot{\theta}, \\ &= U - \frac{M_p^2 L^2}{4} g \theta - M_p \frac{L^2}{4\gamma} \ddot{q} + M_p \frac{L}{2} \dot{\theta}, \\ (M_p + M_c + M_p \frac{L^2}{4\gamma}) \ddot{q} &= U - M_p^2 \frac{L^2}{4\gamma} g \theta + M_p \frac{L}{2} \dot{\theta}. \quad (16) \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan $M_p + M_c + M_p \frac{L^2}{4\gamma} = Z$, maka:

$$\ddot{q} = \frac{U}{Z} - \frac{M_p^2 L^2 g \theta}{4\gamma Z} + \frac{M_p L \dot{\theta}}{2Z}. \quad (17)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (17) ke persamaan (15) dan mensubstitusikan $\sin\theta = \theta$ dan $\cos\theta = 1$ maka:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{L}{2\gamma} M_p g \theta + \frac{L}{2\gamma} M_p \left(\frac{U}{Z} - \frac{M_p^2 L^2 g \theta}{4\gamma Z} + \frac{M_p L \dot{\theta}}{2Z} \right), \\ &= \frac{L}{2\gamma} M_p g \theta + \frac{LM_p}{2\gamma Z} U - \frac{L^3 M_p^3 g}{8\gamma^2 Z} \theta + \frac{M_p^2 L^2}{4\gamma Z} \dot{\theta}. \quad (18) \end{aligned}$$

Persamaan (17) dan (18) merepresentasikan model dinamik dari SPT. Untuk menentukan model persamaan ruang

keadaan dari SPT, persamaan (17) dan (18) dapat direpresentasikan dengan cara melakukan pemisalan pada vektor keadaannya. Pemisalan yang digunakan pada makalah ini adalah:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta; & \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = X_2. \\ x_2 &= \dot{\theta}; & \dot{x}_2 &= \ddot{\theta}. \\ x_3 &= q; & \dot{x}_3 &= \dot{q} = x_4. \\ x_4 &= \dot{q}; & \dot{x}_4 &= \ddot{q}. \end{aligned} \quad (19)$$

Variabel keadaan pada persamaan (17) disubstitusikan ke persamaan (15) dan (16) untuk memperoleh:

$$\ddot{q} = \frac{U}{Z} - \frac{M_p^2 L^2 g}{4\gamma Z} x_1 + \frac{M_p L}{2Z} x_2. \quad (20)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{L}{2\gamma} M_p g x_1 + \frac{LM_p}{2\gamma Z} U - \frac{L^3 M_p^3 g}{8\gamma^2 Z} x_1 + \frac{M_p^2 L^2}{4\gamma Z} x_2. \quad (21)$$

Sehingga, model persamaan ruang keadaan dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BU(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{LM_p g}{2\gamma} - \frac{L^3 M_p^3 g}{8\gamma^2 Z} & \frac{M_p^2 L^2}{4\gamma Z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-M_p^2 L^2 g}{4\gamma Z} & \frac{M_p L}{2Z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{LM_p}{2\gamma Z} \\ 0 \\ \frac{1}{Z} \end{bmatrix} U \quad (22) \end{aligned}$$

Persamaan keluaran SPT dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y &= cx \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

Dapat dilihat model SPT persamaan (22) dan (23) merupakan sistem *linear time invariant* (LTI).

3. Teknik Kontrol yang Digunakan pada Sistem

Bagian ini berisi penjelasan mengenai teknik kontrol LQR dan tapis Kalman yang digunakan untuk mengendalikan SPT.

Pada penelitian ini, sinyal umpan balik pada pendulum terbalik dikontrol hingga stabil dengan metode LQR karena LQR merupakan pengontrol optimal bagi sistem LTI [9]. LQR pada sistem kontrol berfungsi untuk menstabilkan sistem dengan cara meminimalkan indeks performansi kuadratik tertentu, sehingga keluaran dari sistem akan menuju variabel keadaan optimal [4][9].

Model SPT pada persamaan (22) dan (23) memiliki empat variabel keadaan, yaitu posisi gerak horizontal kereta (x_1), kecepatan gerak horizontal kereta (x_2), sudut simpangan tongkat pendulum (x_3), dan kecepatan sudut tongkat pendulum (x_4).

Namun, yang dapat diukur hanya dua keadaan, yaitu x_1 dan x_3 . Sehingga, diperlukan estimator untuk menentukan dua variabel keadaan lainnya. Makalah ini menggunakan tapis Kalman sebagai estimator karena tapis Kalman merupakan estimator optimal bagi sistem linear [10].

3.1 Metode Linear Quadratic Regulator

Metode LQR biasa digunakan dalam mendesain pengontrol untuk sistem yang memerlukan pengontrol optimal yang dapat meminimumkan indeks performansi sistem tersebut [11]. Indeks performansi pada metoda LQR dikarakterisasi oleh dua matriks, yaitu matriks Q dan matriks R . Matriks R adalah matriks positif definit bagi masukan sistem, sedangkan matriks Q adalah matriks nonnegatif definit bagi keadaan sistem.

Tinjau sistem LTI berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BU(t); t \geq 0, x(0) = X_0. \quad (24)$$

dimana A adalah matriks keadaan, $x(t)$ adalah vektor variabel keadaan, B adalah matriks masukan, dan $U(t)$ adalah vektor masukan. Pada makalah ini, sinyal masukan diasumsikan berbentuk:

$$U(t) = Fx(t). \quad (25)$$

dengan F adalah faktor penguatan umpan balik pada sistem.

Pada metoda LQR, $U(t)$ ditentukan sebagai nilai yang meminimumkan indeks performansi berikut:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + U^T RU(t)]dt. \quad (26)$$

Algoritma metoda LQR untuk memperoleh sinyal umpan balik $U(t)$ yang optimal terdiri dari:

1. Periksa *stabilizability* dan *detectability* sistem [9]
2. Temukan solusi matriks P pada persamaan *Algebraic Riccati Equation* (ARE) [9]

$$-PA - A^T P - Q + PBR^{-1}B^T P = 0. \quad (27)$$

dengan P adalah matriks simetrik positif definit.

3. Tentukan solusi dari sinyal kontrol optimal [11, 9]

$$\begin{aligned} U(t) &= Fx(t), \\ &= -R^{-1}B^T Px(t). \end{aligned} \quad (28)$$

3.2 Kalman Filter

Metode LQR dapat digunakan pada sistem yang semua variabel keadaannya telah diketahui. Pada kenyataannya, tidak semua keadaan pada sistem dapat diketahui secara langsung dari pengukuran, sehingga perlu estimator yang dapat memprediksi nilai variabel keadaan yang belum diketahui tersebut berdasarkan pengukuran yang tersedia. Estimator optimal yang dapat digunakan untuk sistem linear adalah tapis Kalman [10].

Sistem linear yang ditinjau pada metoda tapis Kalman memiliki persamaan keadaan dan persamaan keluaran diskrit. Persamaan keadaannya:

$$x_{k+1} = \phi x_k + w_k; k = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

dimana k adalah indeks waktu diskrit, x_k adalah vektor keadaan dari sistem pada waktu k , ϕ adalah matriks keadaan, dan w adalah gangguan proses. Pada waktu k , persamaan keluarannya adalah:

$$z_k = Hx_k + v_k, \quad (30)$$

dimana z_k adalah pengukuran aktual dari x pada waktu k , H adalah matriks keluaran, serta v adalah gangguan pengukuran.

Model (29) dan (30) dapat diperoleh dari model (22) - (23) dengan metoda diskritisasi (atau secara komputasi di MATLAB dengan *command* C2D).

Statistik dari gangguan proses dapat dikarakterisasi dengan nilai kovarians sebagai berikut:

$$Q = E(w_k w_k^T), \quad (31)$$

Statistik dari gangguan pengukuran dapat dikarakterisasi dengan nilai kovarians sebagai berikut:

$$R = E(v_k v_k^T), \quad (32)$$

dengan E merupakan operator nilai ekspektasi (*expected value*).

Dengan mendefinisikan kesalahan estimasi sebagai $e_k = x_k - \hat{x}_k$, matriks kovarians dari kesalahan pada waktu k dapat didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} P_k &= E[e_k e_k^T], \\ &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T], \end{aligned} \quad (33)$$

dimana P_k adalah matriks kovarians kesalahan pada waktu k , \hat{x}_k adalah nilai estimasi variabel keadaan pada waktu k , sedangkan x_k adalah nilai variabel keadaan di waktu k .

Dengan menggabungkan nilai estimasi dengan hasil pengukuran, maka nilai estimasi dapat diperbarui dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k-1}), \\ &= \hat{x}_{k-1} + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_{k-1}), \end{aligned} \quad (34)$$

dimana K_k adalah faktor penguatan Kalman (*Kalman gain*) dan $(Z_k - H\hat{x}_{k-1})$ adalah komponen inovasi. Sehingga, komponen inovasi dapat dituliskan menjadi:

$$i_k = z_k - H\hat{x}_k. \quad (35)$$

Substitusi persamaan (34) ke (33) menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 P_k &= E[(x_k - \{\hat{x}_{k-1} + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_{k-1})\}) \\
 &\quad (x_k - \{\hat{x}_{k-1} + K_k(Hx_k + v_k - H\hat{x}_{k-1})\})^T], \\
 &= E[(x_k - \{\hat{x}_{k-1} + K_kHx_k + K_kv_k - K_kH\hat{x}_{k-1}\}) \\
 &\quad (x_k - \{\hat{x}_{k-1} + K_kHx_k + K_kv_k - K_kH\hat{x}_{k-1}\})^T], \\
 &= E[(1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1}) - K_kv_k) \\
 &\quad ((1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1}) - K_kv_k)^T], \\
 &= E[(1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1})(x_k - \hat{x}_{k-1})^T(1 - K_kH)^T - \\
 &\quad (1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T K_k^T - \\
 &\quad K_kv_k(x_k - \hat{x}_{k-1})^T(1 - K_kH)^T + K_kv_k v_k^T K_k^T, \\
 &= E[(1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1})(x_k - \hat{x}_{k-1})^T(1 - K_kH)^T] - \\
 &\quad E[(1 - K_kH)(x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T K_k^T] - \\
 &\quad E[K_kv_k(x_k - \hat{x}_{k-1})^T(1 - K_kH)^T] + \\
 &\quad E[K_kv_k v_k^T K_k^T]. \tag{36}
 \end{aligned}$$

Pada persamaan (36), nilai dari $x_k - \hat{x}_{k-1}$ tidak konstan karena dipengaruhi oleh estimasi gangguan yang tidak konstan. Dalam hal ini, nilai tersebut dapat dipisahkan dari operator E , menjadi:

1. $(1 - K_kH)(1 - K_kH)^T E[(x_k - \hat{x}_{k-1})(x_k - \hat{x}_{k-1})^T]$.
2. $(1 - K_kH)K_k^T E[(x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T]$.
3. $K_k(1 - K_kH)^T E[v_k(x_k - \hat{x}_{k-1})^T]$.
4. $K_k K_k^T E[v_k v_k^T]$.

Sehingga, P_k menjadi:

$$\begin{aligned}
 P_k &= (1 - K_kH)(1 - K_kH)^T E[(x_k - \hat{x}_{k-1})(x_k - \hat{x}_{k-1})^T] \\
 &\quad - 2(1 - K_kH)K_k^T E[x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T] + K_k K_k^T E[v_k v_k^T]. \tag{37}
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (35) dan (36) ke persamaan (37), serta menerapkan sifat transpos matriks $ab^T = ba^T$, maka diperoleh matriks kovarians dari kesalahan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P_k &= (1 - K_kH)P_{k-1}(1 - K_kH)^T - 2(1 - K_kH)K_k^T \\
 &\quad E[x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T] + K_k K_k^T. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Karena gangguan pengukuran dan gangguan proses tidak saling berkorelasi, maka $E[xv] = 0$. Dengan demikian:

$$\begin{aligned}
 E[(x_k - \hat{x}_{k-1})v_k^T] &= E[(x_k v_k^T - \hat{x}_{k-1} v_k^T)], \\
 &= E[x_k v_k^T] - E[\hat{x}_{k-1} v_k^T] = 0. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Sehingga P_k pada persamaan (38) menjadi:

$$\begin{aligned}
 P_k &= (1 - K_kH)P_{k-1}(i - K_kH)^T - 0 + K_k R K_k^T, \\
 &= (P_{k-1} - K_k H P_{k-1})(1 - K_kH)^T + K_k R K_k^T, \\
 &= P_{k-1} - P_{k-1} H^T K_k^T - K_k H P_{k-1} + K_k H P_{k-1} H^T K_k^T \\
 &\quad + K_k R K_k^T, \\
 &= P_{k-1} - P_{k-1} H^T K_k^T - K_k H P_{k-1} + K_k (H P_{k-1} H^T - R) K_k^T, \\
 &= P_{k-1} - 2P_{k-1} H^T K_k^T + K_k (H P_{k-1} H^T - R) K_k^T. \tag{40}
 \end{aligned}$$

Pada persamaan (40) dapat ditentukan komponen *trace* dan turunannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Tr[P_k] &= Tr[P_{k-1} - 2Tr[P_{k-1} H^T K_k^T]] \\
 &\quad + Tr[K_k (H P_{k-1} H^T - R) K_k^T], \\
 \frac{\partial Tr[P_k]}{\partial K_k} &= 0 - 2P_{k-1} H^T + 2K_k (H P_{k-1} H^T - R), \tag{41} \\
 0 &= -2P_{k-1} H^T + 2K_k (H P_{k-1} H^T - R), \\
 2P_{k-1} H^T &= 2K_k (H P_{k-1} H^T - R), \\
 K_k &= P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (41) ke (40) menghasilkan:

$$\begin{aligned}
 P_k &= P_{k-1} - 2P_{k-1} H^T (P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}) \\
 &\quad + (P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}) (H P_{k-1} H^T - R) \\
 &\quad (P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}), \\
 &= P_{k-1} - 2P_{k-1} H^T (P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}) + \tag{42} \\
 &\quad P_{k-1} H^T P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1}, \\
 &= P_{k-1} - P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T - R)^{-1} H (P_{k-1})^T, \\
 &= P_{k-1} - K_k H (P_{k-1})^T.
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (29) dan (34), nilai estimasi variabel keadaan pada waktu $k+1$ adalah

$$\hat{x}_{k+1} = \phi \hat{x}_k. \tag{43}$$

Berdasarkan persamaan (31) dan (32), maka matriks kovarians kesalahan estimasi pada $k+1$ menjadi:

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}, \\
 &= \phi x_k + w_k - \phi \hat{x}_k, \\
 &= \phi (x_k - \hat{x}_k) + w_k, \\
 &= \phi e_k + w_k. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Dalam hal ini, nilai P_{k+1} menjadi:

$$\begin{aligned}
 P_{k+1} &= E(e_{k+1} + (e_{k+1}^T)), \\
 &= [(\phi e_k + w_k) + (\phi e_k + w_k)^T], \\
 &= E[(\phi e_k e_k^T \phi^T + \phi e_k w_k^T + w_k e_k^T \phi^T + \\
 &\quad w_k w_k^T], \\
 &= \phi \phi^T E[e_k e_k^T] + \phi E[e_k w_k^T] \\
 &\quad + \phi^T E[w_k e_k^T] + E[w_k w_k^T], \\
 &= \phi \phi^T E[e_k e_k^T] + 2\phi E[e_k w_k^T] + E[w_k w_k^T].
 \end{aligned} \tag{45}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (31) dan (33) ke persamaan (45), maka diperoleh:

$$P_{k+1} = \phi \phi^T P_k + 2\phi E[e_k w_k^T] + Q. \tag{46}$$

Karena gangguan proses dengan kesalahan tidak berhubungan atau $E(e_k w_k^T) = 0$, maka:

$$P_{k+1} = \phi P_k \phi^T + Q. \tag{47}$$

Dengan menggunakan model diskrit SPT yang diperoleh, maka algoritma implementasi tapis Kalman menjadi:

1. Tentukan faktor penguat kalman untuk memperbarui hasil pengukuran dengan menggunakan persamaan berikut.

$$K_k = P_{k-1} H^T (H P_{k-1} H^T + R)^{-1} \tag{48}$$

2. Tentukan estimasi variabel keadaaan pada waktu k.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k (H x_k + v_k - H \hat{x}_{k-1}) \tag{49}$$

3. Tentukan estimasi kesalahan yang baru berdasarkan persamaan berikut.

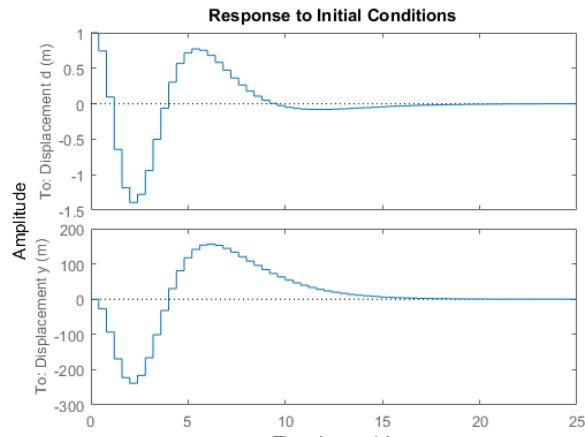
$$P_{k+1} = \phi P_k \phi^T + Q \tag{50}$$

4. Simulasi, Implementasi, dan Analisis Sistem

SPT dimodelkan, dianalisis, dan dikontrol menggunakan MATLAB. Parameter dari sistem (dalam satuan SI) yang disimulasikan terdiri dari massa gerobak $M_c = 0.19\text{kg}$, massa pendulum $M_p = 0.3\text{kg}$, tongkat pendulum $L = 2\text{m}$, percepatan gravitasi $g = 9.8\text{m/s}^2$, dan momen inersia pendulum $I = 0.0225\text{kgm}^2$.

Model SPT yang diperoleh berada pada ranah waktu kontinu, sedangkan simulasi akan dilakukan dalam ranah waktu diskrit. Maka dari itu, model SPT perlu didiskritisasi. Diskritisasi tersebut dilakukan menggunakan perintah (C2D) pada MATLAB dengan periode pencacahan (T) sebesar 0.4s.

Kondisi awal pada SPT yang disimulasikan terdiri dari dua kemungkinan, yaitu pergerakan diawali oleh pendulum yang kemudian disusul oleh pergerakan gerobak ($x_0 = [1 \ 0 \ 0]$



Gambar 4. Respon sistem untuk $x_1(0) = 1$.

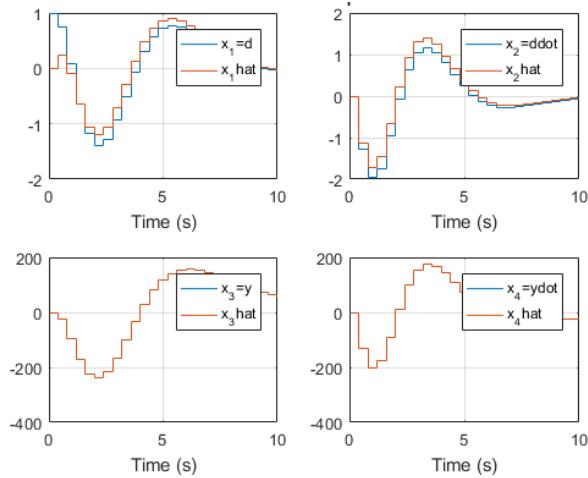
0]) dan pergerakan yang diawali oleh perpindahan gerobak yang disusul oleh pergerakan pendulum ($x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$).

Gambar 4 merupakan hasil simulasi dari respon lup tertutup menggunakan LQR dengan kondisi awal $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Grafik pada Gambar 4 menunjukkan SPT yang pergerakan awalnya dimulai dari pendulum. Pada waktu $k = 1$, pendulum bergerak lebih dulu dibandingkan gerobak, sehingga pada $k = 2$, gerobak perlu menyesuaikan posisinya agar posisi pendulum menjadi searah sumbu vertikal secara stabil. Dengan penyesuaian posisi yang dilakukan gerobak, sudut penyimpangan pendulum terhadap referensi sumbu vertikal (Y) dapat diminimalisir. Ketika terjadi pergerakan yang terlalu signifikan pada pendulum, maka akan terjadi *overshoot* pada respon pendulum. Untuk mengatasi hal ini, gerobak perlu bergerak pada arah yang berlawanan dengan pendulum agar dapat menstabilkan pendulum di posisi tegak lurus terhadap sumbu X. Berdasarkan grafik yang disajikan pada Gambar 4, dapat diketahui bahwa pendulum dan gerobak menjadi stabil setelah mengalami dua kali *overshoot*.

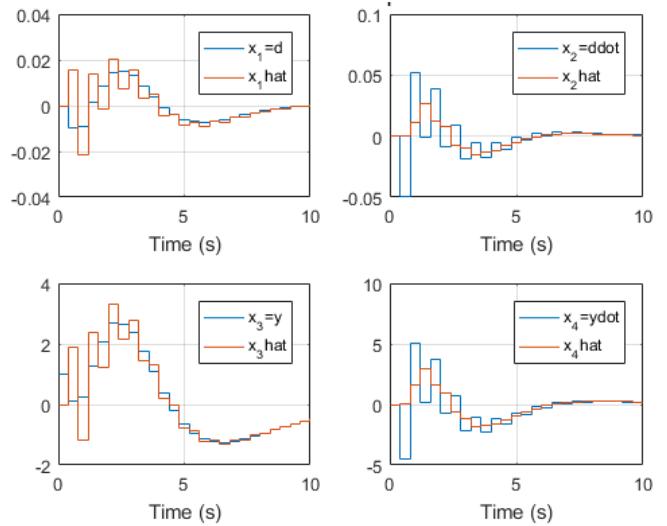
Respon dari keempat variabel keadaan pada SPT, yang terdiri dari sudut pendulum (x_1), kecepatan sudut pendulum (x_2), posisi gerobak (x_3), dan kecepatan gerobak (x_4) ditunjukkan pada Gambar 5. Gambar 5 menunjukkan estimasi variabel keadaan dari tapis Kalman dengan kondisi awal $x_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$. Gambar 5 juga menunjukkan perbandingan antara nilai aktual dan nilai estimasi (notasi *hat*) dari keadaan x_1, x_2, x_3 , dan x_4 dari SPT dengan kondisi awal $x_1(0)$.

Berdasarkan Gambar 5, penyimpangan antara nilai aktual dan nilai estimasi SPT pada x_1 dan x_2 sebesar 0.2, sedangkan pada x_3 dan x_4 , nilai aktual dan nilai estimasinya bernali sama. Hal tersebut merupakan hasil dari penggunaan tapis Kalman sebagai estimator pada SPT.

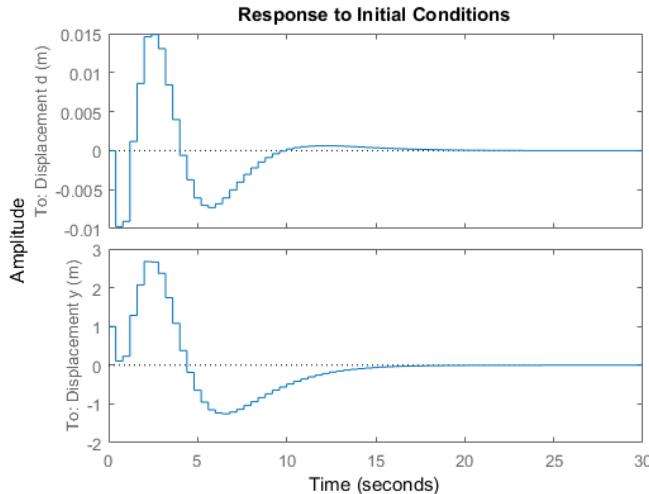
Gambar 6 merupakan hasil simulasi dari respon lup tertutup menggunakan LQR dengan kondisi awal $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$. Grafik ini menunjukkan SPT yang pergerakan awalnya dimulai dari gerobak. Pada $k = 1$, gerobak bergerak lebih



Gambar 5. Respon keadaan asli and keadaan yang diekspektasi untuk $x_1(0) = 1$.



Gambar 7. Respon keadaan asli and keadaan yang diekspektasi untuk $x_3(0) = 1$.



Gambar 6. Respon sistem untuk $x_3(0) = 1$.

dulu dibandingkan pendulum, sehingga pada $k = 2$, pendulum perlu menyesuaikan posisinya agar posisi pendulum tersebut menjadi searah sumbu vertikal secara stabil. Ketika terjadi pergerakan yang terlalu signifikan pada gerobak, maka akan terjadi *overshoot* pada respon gerobak. Untuk mengatasi hal ini, pendulum perlu bergerak pada arah yang berlawanan dengan gerobak agar posisi pendulum dapat berada pada posisi tegak lurus terhadap sumbu X. Berdasarkan grafik yang disajikan pada Gambar 6, dapat diketahui bahwa pendulum dan gerobak akan stabil setelah mengalami dua kali *overshoot*.

Gambar 7 menunjukkan estimasi variabel keadaan dari tapis Kalman dengan kondisi awal $x_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$. Gambar 7 menunjukkan perbandingan antara nilai sebenarnya dan nilai estimasi (notasi *hat*) dari keadaan x_1 , x_2 , x_3 , dan x_4 dari SPT dengan kondisi awal $x_3(0)$.

Berdasarkan Gambar 7, penyimpangan antara nilai sebenarnya dan nilai estimasi SPT pada x_1 dan x_2 sebesar 0.01, sedangkan pada x_3 nilai sebenarnya dan nilai estimasinya men-

galami penyimpangan sebesar 1 dan pada x_4 penyimpangannya sebesar 5. Hal tersebut merupakan hasil dari penggunaan tapis Kalman sebagai estimator pada SPT.

5. Kesimpulan

Berdasarkan simulasi yang dilakukan, telah dibuktikan bahwa tapis Kalman dapat digunakan untuk mengestimasikan variabel tidak terukur pada SPT. Variabel tersebut adalah nilai variabel keadaan $\dot{\theta}$ pada pendulum dan keadaan \dot{q} pada gerobak.

Setelah semua variabel keadaan diketahui, LQR digunakan untuk mengontrol respon dari SPT. Hasil dari simulasi menyatakan bahwa posisi pendulum stabil pada sumbu Y dan pengontrolan gerobak memberikan respon gerakan yang sesuai sehingga menjadikan pendulum dapat mempertahankan posisi tegaknya. Pada pengontrol LQR, nilai Q dan R perlu diatur untuk menentukan respon sistem seperti *overshoot*, *settling time*, *rise time*, dan *peak time*.

Dari hasil penelitian pada pengontrolan SPT, dapat disimpulkan bahwa metode LQR dengan tapis Kalman merupakan metoda kontrol yang optimal mengontrol sistem agar sesuai dengan kriteria yang diinginkan.

Daftar Pustaka

- [1] Olfa Boubaker. The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics. In *Education and e-Learning Innovations (ICEELI), 2012 international conference on*, pages 1–6. IEEE, 2012.
- [2] Chusnul Fathonah. *Analisis kestabilan dan kontrol optimal double pendulum terbalik pada kereta menggunakan metode linear quadratic regulator (LQR)*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2016.

- [3] Mobed Bachtiar Mochamad, Sena Bayu D Bima, and Besari AR Anom. Sistem kontrol inverted pendulum pada balancing mobile robot. 2011.
- [4] Muhammad Wakhid Musthofa. Desain linear quadratic regulator pada sistem inverted pendulum. In *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNY*, 2009.
- [5] Andra Laksana and Iwan Setiawan. *Balancing Robot Beroda Dua Menggunakan Metode Kendali Proporsional Integral*. PhD thesis, Diponegoro University, 2012.
- [6] Rafiuddin Syam. Rancang bangun self balancing scooter sebagai moda transportasi. *Jurnal Mekanikal*, 6(1), 2015.
- [7] Elisa Sara Varghese, Anju K Vincent, and V Bagyaveereshwaran. Optimal control of inverted pendulum system using pid controller, lqr and mpc. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, volume 263, page 052007. IOP Publishing, 2017.
- [8] Hyung-Jik Lee and Seul Jung. Gyro sensor drift compensation by kalman filter to control a mobile inverted pendulum robot system. In *Industrial Technology, 2009. ICIT 2009. IEEE International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2009.
- [9] Kemin Zhou, John Comstock Doyle, Keith Glover, et al. *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [10] Simon Haykin. *Kalman filtering and neural networks*, volume 47. John Wiley & Sons, 2004.
- [11] E Vinodh Kumar and Jovitha Jerome. Robust lqr controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. *Procedia Engineering*, 64:169–178, 2013.