Intelligent Systems
Exercises Block 2 Chapters 5, 6 and 7
Markov models, Forward and Viterbi algorithms and estimation

Escuela Técnica Superior de Informática
Dep. de Sistemas Informáticos y Computación
Universitat Politècnica de València

28 de octubre de 2016

1. Questions

1.1. Markov models: definition, topology, uses, etc.

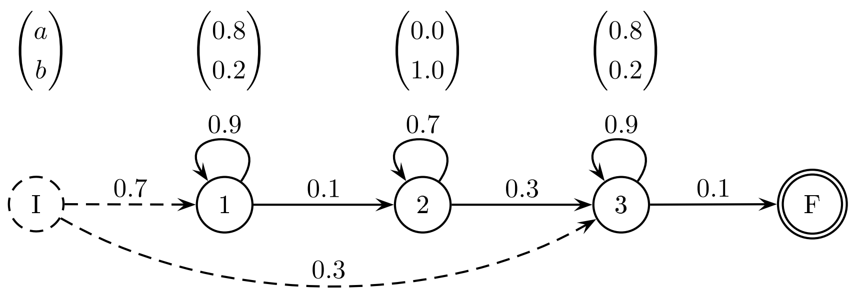
1 $\boxed{\text{B}}$ The following statements are about Markov model-based classifiers ..., which one is incorrect?

A) They can be seen as a particularization of the Bayes classifier applied to strings, in which the conditional probabilities of the classes are characterized by Markov models
B) In recognition through Viterbi, we will apply the Bayes rule replacing the exact probabilities by the approximate calculations; that is, the string to classify will be assigned to the class that returns the highest probability of generating such a string according to the Viterbi algorithm
C) In learning through Viterbi, we will apply the Viterbi re-estimation algorithm to each class separately. Each model will have a comparatively high probability of generating the training strings within its class.
D) A key problem when designing Markov models is to select the number of states and the topology of the Markov model. Likewise, it is necessary to pick a proper initialization criterium for the Viterbi re-estimation algorithm.

2 $\boxed{\text{C}}$ Identify the incorrect statement: Markov models ...

A) they are equivalent to regular stochastic grammars
B) they are appropriate for one-dimension processes that vary along time
C) they are not applicable to OCR because images are two-dimensional objects
D) they are useful in speech recognition, typically using left-to-right topologies

3 $\boxed{\text{D}}$ Let M be a Markov model whose graph representation is:



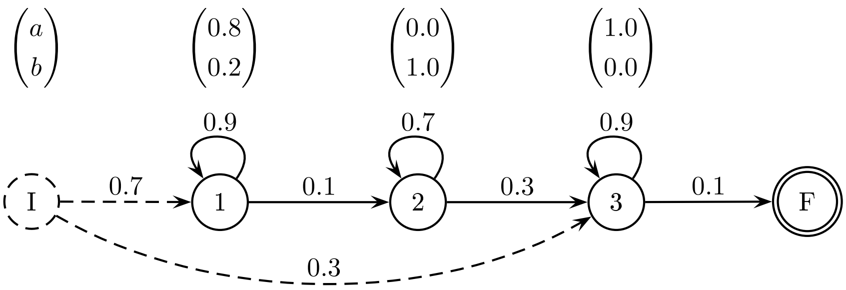
How many different strings of length 3 can M generate?

A) None.
B) Between 1 and 3.
C) Between 3 and 6.
D) More than de 6.

4 $\boxed{\text{C}}$ Let M be Markov model with non-zero transition probabilities, $A_{q,q'} > 0$, for every non-final state q and every state q' (including the final state). We say that the topology of M is...

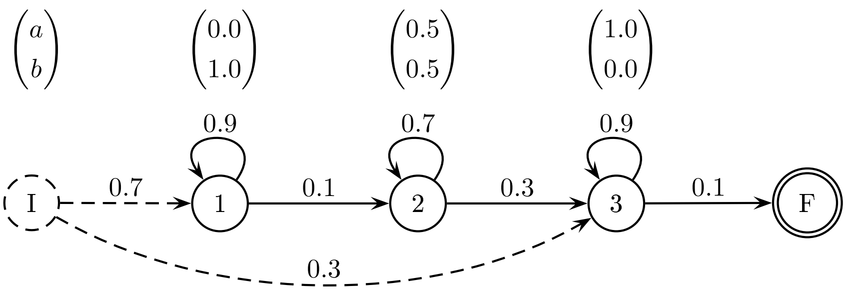
A) Linear.
B) Strictly linear.
C) Ergodic.
D) We also need to know the initial and emission probabilities to give an answer

5 C Let M be the following Markov model:



A) M cannot generate the string *abaa*.
B) We can find more than one sequence of states to generate the string *aaabaa*.
C) There is only one sequence of states to generate the string *bbaa*.
D) M cannot generate strings starting with b with more than 5 symbols.

6 C Let M be the following Markov model:



A) M cannot generate strings starting with symbol b.
B) There is only one sequence of states to generate the string *bbaa*
C) There is only one sequence of states to generate the string *baba*
D) M cannot generate strings starting with a with more than 5 symbols.

7 D Sea M un modelo de Markov, con conjunto de estados $Q = \{1, 2, ..., F\}$, de probabilidades de transición no nulas, $A_{q,q'} > 0$ si y solo si $q < q'$, para todo estado no final q y todo estado q' (incluido el final q_F, $q_F > q, \forall q$). Además se tiene que $\pi_1 = 1$. Decimos que la topología de M es. . .

A) Lineal.
B) Estrictamente lineal.
C) Ergódica.
D) Izquierda-derecha

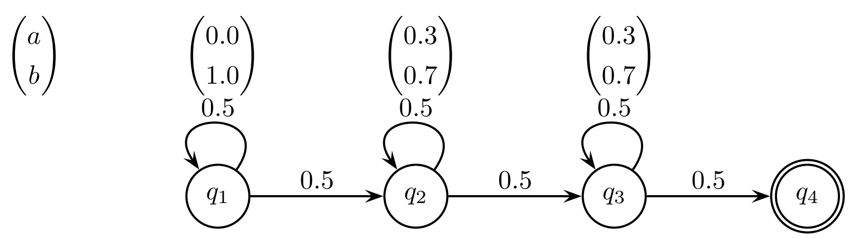
8 C Los siguientes enunciados se refieren al clasificador basado en modelos de Markov. ¿Cuál de ellos es incorrecto?

A) Un problema de diseño crucial será la elección del número de estados y topología de cada modelo de Markov.
B) Puede verse como una particularización del clasificador de Bayes para cadenas, en la que las funciones de probabilidad condicionales de las clases vienen dadas por modelos de Markov.
C) En reconocimiento por Viterbi, aplicaremos la regla de Bayes y la cadena a clasificar se asignará a la clase cuyo modelo la genere con mayor probabilidad, según la aproximación de Viterbi.
D) En aprendizaje por Viterbi, aplicaremos el algoritmo de re-estimación por Viterbi en cada clase por separado. Este algoritmo garantiza que la verosimilitud de las muestras de entrenamiento no decrece en las sucesivas iteraciones

9 C (Exam 15th January 2014) Given a Markov model M and a string y generated by M, indicate which of the following statements is **true**:

A) It always holds that $P(y \mid M) = \widetilde{P}(y \mid M)$.
B) It always holds that $P(y \mid M) \leq \widetilde{P}(y \mid M)$.
C) It always holds that $P(y \mid M) \geq \widetilde{P}(y \mid M)$.
D) It always holds that $P(y \mid M) \neq \widetilde{P}(y \mid M)$.

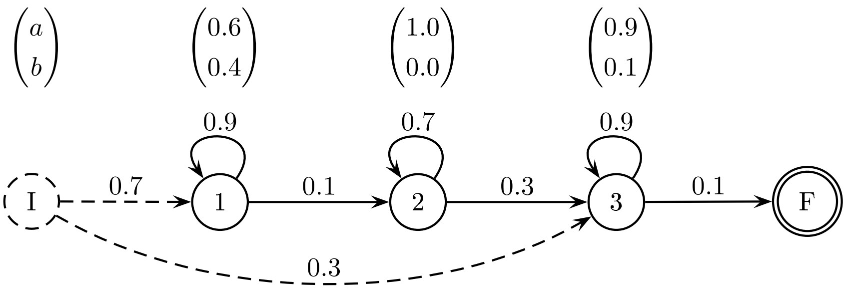
10 C (Exam 15th January 2014) Given the Markov Model M



with $\pi_{q_1} = 1, \pi_{q_2} = \pi_{q_3} = \pi_{q_4} = 0$ and the strings $y_1 =$ "babb" and $y_2 =$ "aaaa", show which of the following assertions is **true**:

A) $P(y_1 \mid M) = P(y_2 \mid M)$.
B) $P(y_1 \mid M) < P(y_2 \mid M)$.
C) $P(y_1 \mid M) > P(y_2 \mid M)$.
D) $P(y_1 \mid M) = P(y_2 \mid M) = 0$.

11 $\boxed{C}$ (January 13, 2015) Let M be a Markov model whose graphical representation is:



A) There is only one sequence of states that generates *abab*.

B) M cannot generate strings of three symbols starting with symbol b.

C) There is only one sequence of states that generates *abba*.

D) M cannot generate strings starting and ending with symbol b.

12 $\boxed{B}$ (January 13, 2015) Given the Markov model M of the above question, indicate the correct answer:

A) $P(aab|M) = 0.0019683$

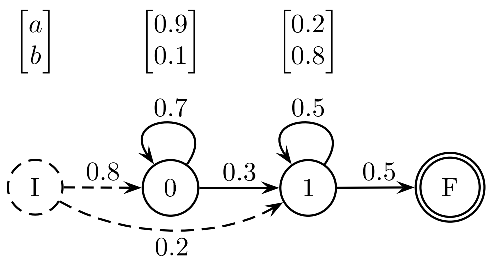
B) $P(aab|M) = 0.0020943$

C) $P(aab|M) = 0.000126$

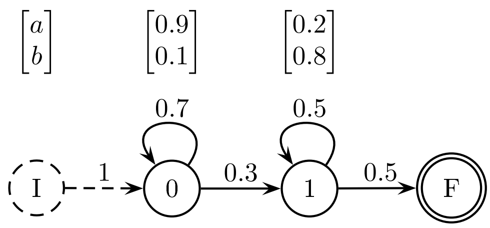
D) None of the above results is correct

13 $\boxed{B}$ (January 2016) We have two equiprobable classes, A and B, for classifying strings of symbols in the alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. The conditional probabilities of the classes are characterized by the Markov models

Model M_A: $P(x \mid A) = P(x \mid M_A)$



Model M_B: $P(x \mid B) = P(x \mid M_B)$



Indicate the **CORRECT** option if we want to classify the string "`bba`" by minimum classification error:

A) Either A or B because both classes are equiprobable

B) Class A. $\hat{c} = \arg\max_c P(c \mid \text{"}bba\text{"}) = \arg\max_c P(c)P(\text{"}bba\text{"} \mid c) = \arg\max_c P(\text{"}bba\text{"} \mid c)$

C) Class B. $P(\text{"}bba\text{"} \mid A) \approx \tilde{P}(\text{"}bba\text{"}|A) = 0.0032 \gg P(\text{"}bba\text{"} \mid B) \approx \tilde{P}(\text{"}bba\text{"}|B) = 0.0012 \rightarrow \hat{c} = A$

D) It cannot be determined because M_B does not satisfy the normalization conditions.

14 $\boxed{\text{C}}$ (January 2016) Given the Markov model M_A of the question 13, if we apply the *Forward* algorithm to the string "`bba`", mark the **CORRECT** expression:

A) $\alpha(q=1,t=3) = \alpha(q=0,t=2) \cdot A_{01} \cdot B_{1a}$
B) $\alpha(q=1,t=3) = \alpha(q=1,t=2) \cdot A_{11} \cdot B_{1a}$
C) $\alpha(q=1,t=3) = \alpha(q=0,t=2) \cdot A_{01} \cdot B_{1a} + \alpha(q=1,t=2) \cdot A_{11} \cdot B_{1a}$
D) $\alpha(q=1,t=3) = \alpha(q=0,t=2) \cdot A_{01} \cdot B_{1a} \cdot \alpha(q=1,t=2) \cdot A_{11} \cdot B_{1a}$

1.2. Markov models: probability of generating a string and Viterbi approximation

1 $\boxed{\text{C}}$ Identifica el enunciado incorrecto: dado un modelo de Markov M y una cadena $x \in \Sigma^\star$, la probabilidad $P(x|M)$ es…

A) igual a la suma de probabilidades de analizar x mediante todos los caminos posibles para x en M.
B) igual a 0 si $\bar{x}$ no se puede analizar mediante M.
C) menor que $P(xa|M)$ para cualquier $a \in \Sigma$.
D) siempre mayor que $\tilde{P}(x|M)$ (aproximación de Viterbi).

2 $\boxed{\text{B}}$ Los siguientes enunciados se refieren a la aproximación por Viterbi a la probabilidad de que un modelo de Markov genere una cadena dada, $\tilde{P}(y|M)$,

A) $\tilde{P}(y|M)$ es siempre mayor que 0.
B) $\tilde{P}(y|M)$ es menor que la verdadera probabilidad de generación de la cadena, $P(y|M)$.
C) $\tilde{P}(y|M)$ tiene mucho interés porque es una probabilidad muy cercana a 1.
D) El coste de calcular $\tilde{P}(y|M)$ es exponencial con el número de estados del modelo.

3 $\boxed{\text{B}}$ Sea el siguiente modelo de Markov M: $Q = \{1, 2, F\}$, $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, $\Sigma = \{a, b\}$,

A	1	2	F
1	0.2	0.8	0.0
2	0.1	0.7	0.2

B	a	b
1	0	1
2	1	0

Calcula $P(aba|M)$ e indica el resultado:

A) 0.128
B) 0.016
C) 0.002
D) 0.0

4 $\boxed{\text{A}}$ Los siguientes enunciados se refieren a la aproximación por Viterbi $\tilde{P}(y|M)$ a la probabilidad $P(y|M)$ con que un modelo de Markov genere una cadena dada. Indica cuál es correcto.

A) $\tilde{P}(y|M) \leq P(y|M)$
B) $\tilde{P}(y|M) \approx P(y|M)$
C) $\tilde{P}(y|M) \approx 1$
D) $\tilde{P}(y|M)$ tiene mucho interés ya que su coste computacional es polinómico con el número de estados del modelo, mientras que el coste de calcular $P(y|M)$ es exponencial en el peor de los casos.

5 $\boxed{\text{C}}$ Sea el siguiente modelo de Markov M: $Q = \{1, 2, F\}$, $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, $\Sigma = \{a, b\}$,

A	1	2	F
1	0.2	0.8	0.0
2	0.1	0.7	0.2

B	a	b
1	0	1
2	1	0

Calcula $P(abba|M)$ e indica el resultado:

A) 0.0128
B) 0.0016
C) 0.0032
D) 0.0

6 $\boxed{\text{D}}$ Sea el siguiente modelo de Markov M: $Q = \{1, 2, F\}$, $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, $\Sigma = \{a, b\}$,

A	1	2	F
1	0.4	0.6	0.0
2	0.5	0.4	0.1

B	a	b
1	0	1
2	1	0

Calcula $P(aba|M)$ e indica en qué intervalo de los siguientes se halla:

A) Menor que 0.001.
B) Mayor que 0.001 y menor que 0.005.
C) Mayor que 0.005 y menor que 0.010.
D) Mayor que 0.010.

7 $\boxed{\text{D}}$ Sea p la probabilidad con la que un modelo de Markov genera cierta cadena x y q la correspondiente aproximación de Viterbi. Se puede afirmar que:

A) $p < q$ en cualquier caso.
B) $p > q$ si y solo si x es suficientemente corta.
C) $p \leq q$ si y solo si x es suficientemente larga.
D) $p \geq q$ en cualquier caso.

8 $\boxed{\text{B}}$ Sean M un model de Markov de alfabeto Σ, $x \in \Sigma^\star$ una cadena arbitraria, $p_M(x)$ la probabilidad de que M genere x y $\tilde{p}_M(x)$ la aproximación de Viterbi a $p_M(x)$. Se cumple que:

A) $\tilde{p}_M(x)$ es siempre menor que $p_M(x)$.
B) $\tilde{p}_M(x)$ es menor que $p_M(x)$ cuando en M existe más de un camino que genera x; es igual cuando sólo existe un camino generador de x.
C) $\tilde{p}_M(x)$ es siempre menor o igual que $p_M(x)$, pero el ser una cosa u otra no depende del número de caminos distintos que generan x.
D) Ninguna de las anteriores.

9 $\boxed{\text{D}}$ La probabilidad exacta de que un modelo de Markov M genere una cadena x...

A) no se suele calcular ya que su coste de cálculo es al menos exponencial con la longitud de x.
B) se calcula mediante el algoritmo de Viterbi.
C) se calcula mediante el algoritmo de re-estimación por Viterbi.
D) Ninguna de las anteriores.

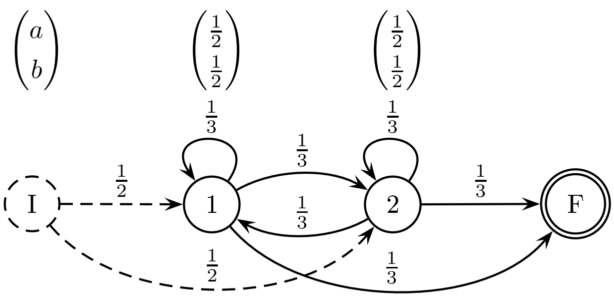
10 $\boxed{\text{D}}$ La aproximación por Viterbi a la probabilidad exacta de que un modelo de Markov M genere una cadena x, $\hat{P}(x \mid M)$:

A) Sólo se puede calcular en modelos de Markov de topología lineal o ergódica.
B) Siempre sera mayor o igual que la verdadera probabilidad $P(x \mid M)$.
C) Siempre sera menor que la verdadera probabilidad $P(x \mid M)$.
D) Será nula sólo si la probabilidad $P(x, z \mid M)$ también es nula para cualquier secuencia de estados z.

11 $\boxed{\text{D}}$ La aproximación por Viterbi a la probabilidad exacta de que un modelo de Markov M genere una cadena x, $\hat{P}(x \mid M)$:

A) Será nula si la probabilidad $P(x, z \mid M)$ es nula para una secuencia cualquiera de las secuencias de estados z.
B) Siempre sera mayor o igual que la verdadera probabilidad $P(x \mid M)$.
C) Será no nula sólo si la probabilidad $P(x, z \mid M)$ es no nula para toda secuencia de estados z.
D) Siempre sera menor o igual que la verdadera probabilidad $P(x \mid M)$.

12 $\boxed{\text{C}}$ Sea M el modelo de Markov representado en la figura a la derecha. Considérese una cadena arbitraria de longitud T, $x = x_1 x_2 \cdots x_T \in \{a, b\}^T$, la probabilidad de que M la genere, $p_M(x)$, así como la aproximación de Viterbi a esta probabilidad, $\tilde{p}_M(x)$. Entonces:



A) $p_M(x) = \tilde{p}_M(x)$
B) $\dfrac{\tilde{p}_M(x)}{p_M(x)} < 1$, aumentando esta relación al aumentar T
C) $\dfrac{\tilde{p}_M(x)}{p_M(x)} < 1$, disminuyendo esta relación al aumentar T
D) Ninguna de los anteriores

13 $\boxed{\text{C}}$ Sea el siguiente modelo de Markov M: $Q = \{1, 2, F\}$, $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$, $\Sigma = \{a, b\}$,

A	1	2	F
1	0.2	0.8	0.0
2	0.1	0.7	0.2

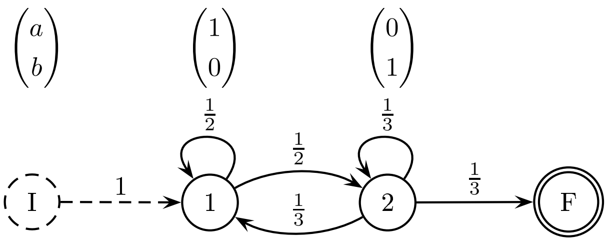
B	a	b
1	0	1
2	1	0

Calcula $P(abba|M)$:

A) 0.0128
B) 0.0016
C) 0.0032
D) 0.0

14 D Sea M el modelo de Markov representado en la figura de la derecha. Sea $\tilde{P}(y \mid M)$ la aproximación por Viterbi a la verdadera probabilidad $P(y \mid M)$. Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

A) $\tilde{P}(a^n b^n \mid M) < P(a^n b^n \mid M), n > 0$
B) $P(a^n|M) > 0, n > 0$
C) $P(b^n|M) > 0, n > 0$
D) $\tilde{P}((abab)^n \mid M) = P((abab)^n \mid M), n > 0$



15 B Los siguientes enunciados se refieren a la aproximación por Viterbi a la probabilidad de que un modelo de Markov M genere una cadena y, $\tilde{P}(y|M)$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) $\tilde{P}(y|M)$ es siempre mayor que 0
B) $\tilde{P}(y|M)$ nunca es mayor que la verdadera probabilidad de generación de la cadena, $P(y|M)$
C) $\tilde{P}(y|M)$ nunca puede llegar a 1
D) El coste de calcular $\tilde{P}(y|M)$ es exponencial con el número de estados del modelo, pero mediante técnicas de programación dinámica el coste es lineal con el número de estados de M para cualquier M

16 A Let $P(y)$ be the probability that a Markov model M generates a string, and let $\tilde{P}(y)$ be the Viterbi approximation to $P(y)$. Which statement is TRUE?

A) $\tilde{P}(y) \leq \sum_z P(z)P(y \mid z) = P(y)$, where z denotes a sequence of states of M
B) $\tilde{P}(y) > 0 \; \forall y$
C) $\tilde{P}(y) \approx 0$
D) The cost of computing $\tilde{P}(y)$ is quadratic in the length (number of symbols) of y?

17 B Let $\mathcal{M}$ be an ergodic Markov model with $Q = \{1, 2, F\}$, $\Sigma = \{\text{a,b}\}$, and the same *initial state* probabilities, *transition* probabilities and *generation* probabilities. Calculate $P(\text{“ab”} \mid \mathcal{M})$:

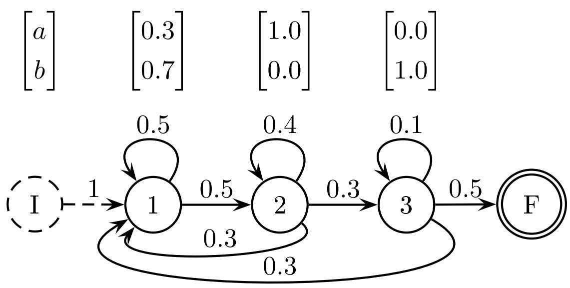
A) 0.0333
B) 1/18
C) 1/3
D) 4/27

18 D Which of the following statements about the Viterbi approximation, $\tilde{P}(y|M)$, to the probability that a Markov model generates a string is correct?

A) $\tilde{P}(y|M)$ is always greater than 0
B) $\tilde{P}(y|M)$ is an interesting approximation because it returns a probability close to 1
C) The cost of calculating $\tilde{P}(y|M)$ is exponential in the number of states of the model
D) $\tilde{P}(y|M)$ is always a bit lower or equal than the real probability that the model generates the string, $P(y|M)$

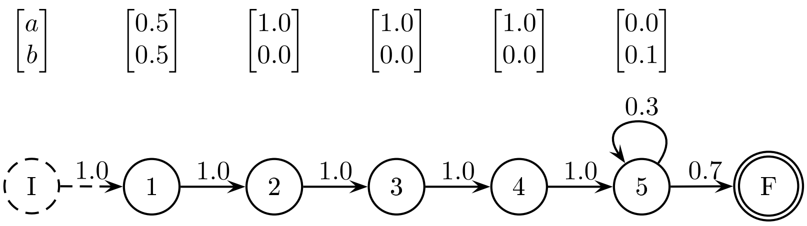
19 A (Exam 18th January, 2013) Given the string “aabb”, which is the probability that the attached Markov model generates the string and which is the probability that the most probable state sequence (optimal state sequence) generates the string?:

A) total 0.00225; optimal sequence 0.00225
B) total 0.0045; optimal sequence 0.00225
C) total 0.00225; optimal sequence 0.000225
D) total 0.00225; optimal sequence 0.0045

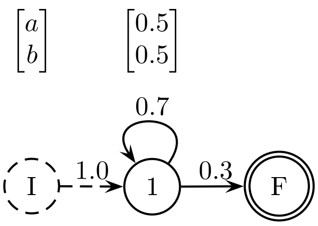


20 B (Exam 18th January, 2013) Given the two Markov models M_1 and M_2:

Model M_1



Model M_2



Which model has the highest probability of generating the string “aaaabb”? And for “aaab”?

A) Both models have the same probability for each of the two strings.
B) M_1 for the first string and M_2 for the second string.
C) M_2 for the first string and M_1 for the second.
D) M_1 for both strings.

21 $\boxed{C}$ (Exam 15th January 2014) Regarding the forward algorithm for Markov models, which of the following statements is **true**?:

A) It computes the probability of a string by considering only the most probable sequence of states
B) It computes the probability of a string without considering the most probable sequence of states
C) It computes the probability of a string by considering all the possible sequences of states
D) It does not compute the probability of a stirng.

22 $\boxed{B}$ (Exam 30th January 2014) Given a Markov model M and a string y generated by M, which of the following statements about the *forward* and Viterbi algorithms is *true*?

A) Both *forward* and Viterbi calculate $P(y|M)$.
B) *Forward* calculates $P(y|M)$ and Viterbi $\widetilde{P}(y|M)$.
C) *Forward* calculates $\widetilde{P}(y|M)$ and Viterbi $P(y|M)$.
D) Both *forward* and Viterbi calculate $\widetilde{P}(y|M)$.

23 $\boxed{A}$ (January 2016) Given the Markov model M_A of the question 13 in section 1.1, the approximated probability of the string “`bba`” calculated with Viterbi is:

A) 0.003200 $\tilde{P}(bba, q_1q_2q_3 = 111 \mid M_A) = 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.2 \cdot 0.5 = 0.0032$

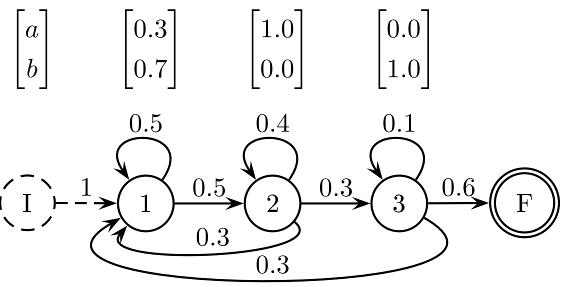
B) 0.004328

C) 0.006400

D) None of the above options are correct.

1.3. Markov models: Viterbi re-estimation

1 $\boxed{C}$ (Exam January 30th, 2013) If we only use the string *aabb* for training the Markov model on the figure, how many iterations, without counting the final verification iteration, would the Viterbi re-estimation algorithm need?



A) 0
B) 2
C) 1
D) 5

2 $\boxed{D}$ (Exam 15th January 2014) If we apply the Viterbi re-estimation to the Markov model of question 10 in section 1.1 and we run just one iteration with the samples $Y = \{baba, abab\}$, indicate which of the following assertions is **true**:

A) All the parameters of the estimated model are 0.0.
B) None of the transition probabilities between states of the estimated model is 0.0.
C) All the parameters of the estimated model are equal to the ones of the initial model.
D) Several parameters of the estimated model are 0.0.

3 $\boxed{B}$ The Markov model-based classifier can be seen as particularization of the Bayes classifier applied to strings in which:

A) the prior probabilities of the classes are characterized by Markov models

B) the conditional probabilities of the classes are characterized by Markov models

C) the posterior probabilities of the classes are characterized by Markov models

D) the joint probabilities of the classes are characterized by Markov models

4 $\boxed{D}$ (January 13, 2015) Given the Markov model of question 11 in section 1.1, after applying one iteration of the Viterbi re-estimation algorithm, which set of strings does not return a null initial probability neither for state 1 nor for state 3?

A) $\{bb\}$
B) $\{aaa\}$
C) $\{aa\}$
D) None of the above

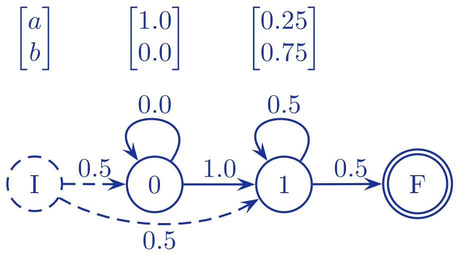
5 $\boxed{D}$ (January 2016) Given the Markov model M_A of the question 13 in section 1.1, if we apply ONE iteration of Viterbi re-estimation algorithm with the strings "`bba`" and "`ab`", which assertion is **CORRECT**?:

A) $\pi_0 = 1$

B) No changes are produced in the model.

C) All the transition probabilities change their value.

D) Some of the transition and emission probabilities of state 0 are null.



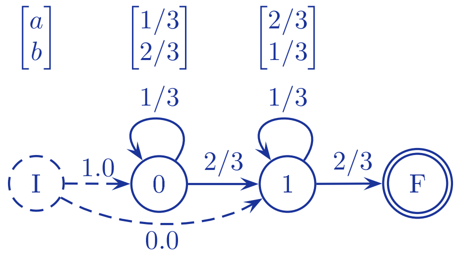
6 $\boxed{B}$ (January 2016) Given a Markov model with states $Q = \{0, 1, F\}$ and alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ initialized through a linear segmentation with the strings "`bbaa`" y "`ab`", indicate the **CORRECT** choice:

A) Some emission probabilities are null.

B) It holds that $A_{00} = A_{11}$ and $A_{01} = A_{1F}$

C) It holds that $\pi_0 = \pi_1$

D) It holds that $B_{0a} = B_{1a}$



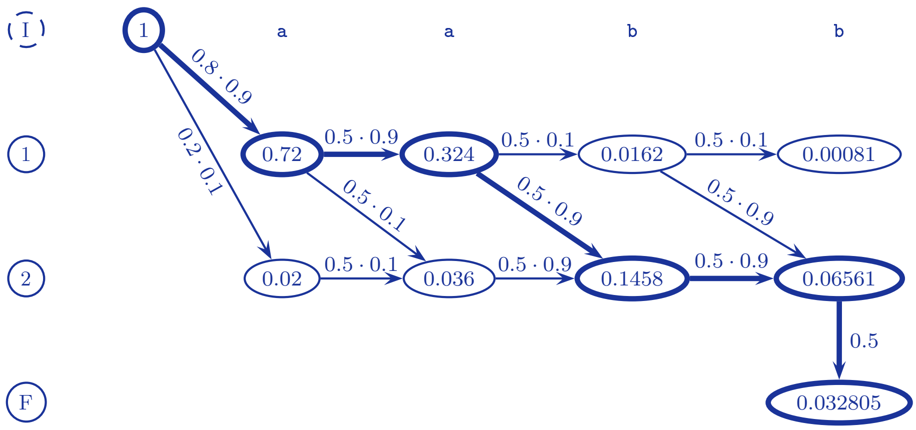
2. Problems

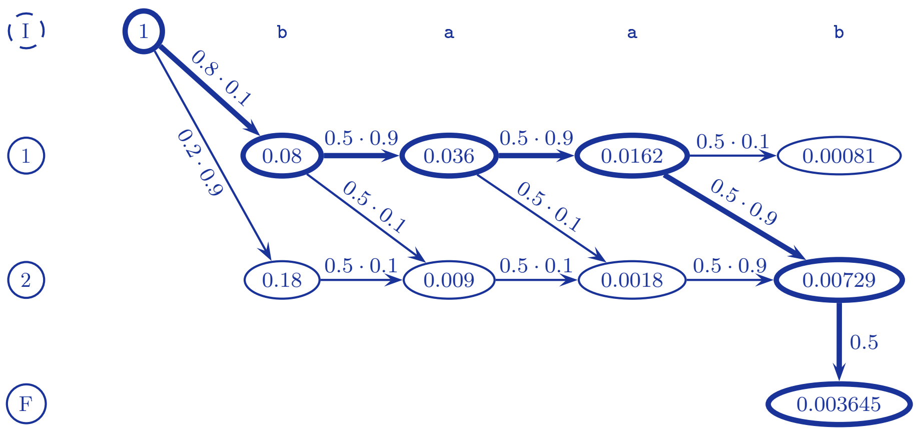
1. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_1 = 0.8, \pi_2 = 0.2, \pi_F = 0.0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	1	2	F
1	0.5	0.5	0
2	0	0.5	0.5

B	a	b
1	0.9	0.1
2	0.1	0.9

Reestima los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento "`aabb`" y "`baab`".





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

aabb	baab
1122F	1112F

Los parámetros reestimados son:

$$\hat{\pi}_1 = \frac{2}{2} = 1$$
$$\hat{\pi}_2 = \frac{0}{2} = 0$$

A	1	2	F
1	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

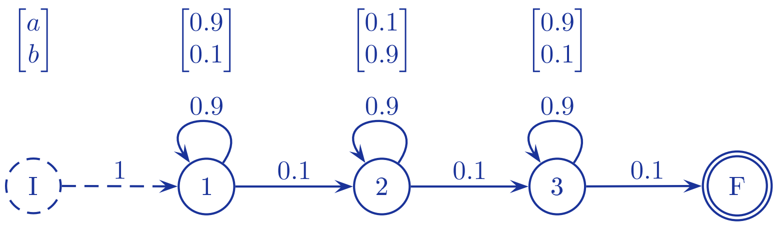
B	a	b
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	0	1

2. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, 3, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = \pi_3 = \pi_F = 0$; y probabilidades de transición y de emisión:

A	1	2	3	F
1	0.9	0.1	0.0	0.0
2	0.0	0.9	0.1	0.0
3	0.0	0.0	0.9	0.1

B	a	b
1	0.9	0.1
2	0.1	0.9
3	0.9	0.1

a) Representa gráficamente el modelo M.



b) Determina las secuencias de estados que generan cadenas de 4 ó menos símbolos.

Cadenas de menos de 3 de símbolos: no pueden generarse
Cadenas de 3 símbolos: $(1, 2, 3)$
Cadenas de 4 símbolos: $(1, 1, 2, 3)$, $(1, 2, 2, 3)$ y $(1, 2, 3, 3)$

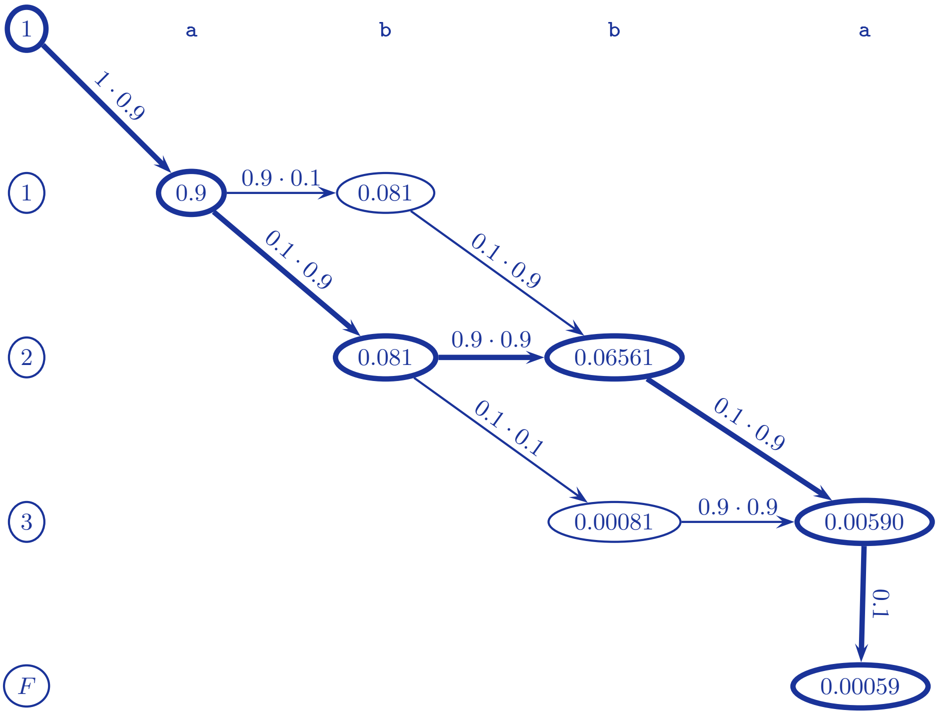
c) Calcula las probabilidades con las que M genera las cadenas "`aaa`" y "`aab`".

$$P(\texttt{aaa}|M) = (1 \cdot 0.9)\ (0.1 \cdot 0.1)\ (0.1 \cdot 0.9)\ 0.1 = 0.000081$$
$$P(\texttt{aab}|M) = (1 \cdot 0.9)\ (0.1 \cdot 0.1)\ (0.1 \cdot 0.1)\ 0.1 = 0.000009$$

d) Calcula la probabilidad de que M genere una cadena de 3 símbolos (arbitraria).
Puede calcularse exhaustivamente, sumando las probabilidades con las que M genera cada una de las 8 cadenas posibles. Más directamente:

$$\begin{aligned}\sum_{x_1x_2x_3 \in \Sigma^+} P(x_1x_2x_3|M) &= \sum_{x_1x_2x_3 \in \Sigma^+} \pi_1\ B_{1,x_1}\ A_{1,2}\ B_{2,x_2}\ A_{2,3}\ B_{3,x_3}\ A_{3,F} \\ &= \pi_1\ A_{1,2}\ A_{2,3}\ A_{3,F} \sum_{x_1x_2x_3 \in \Sigma^+} B_{1,x_1}\ B_{2,x_2}\ B_{3,x_3} \\ &= 1\ 0.1\ 0.1\ 0.1\ 1 = 0.001\end{aligned}$$

e) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para obtener la secuencia de estados más probable con la que M genera la cadena "`abba`".



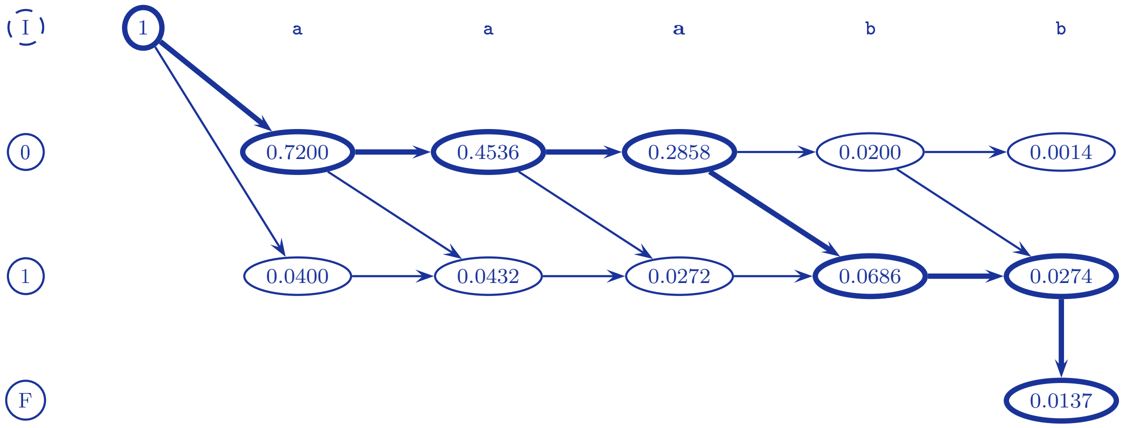
$$\tilde{Q} = (1, 2, 2, 3, F)$$

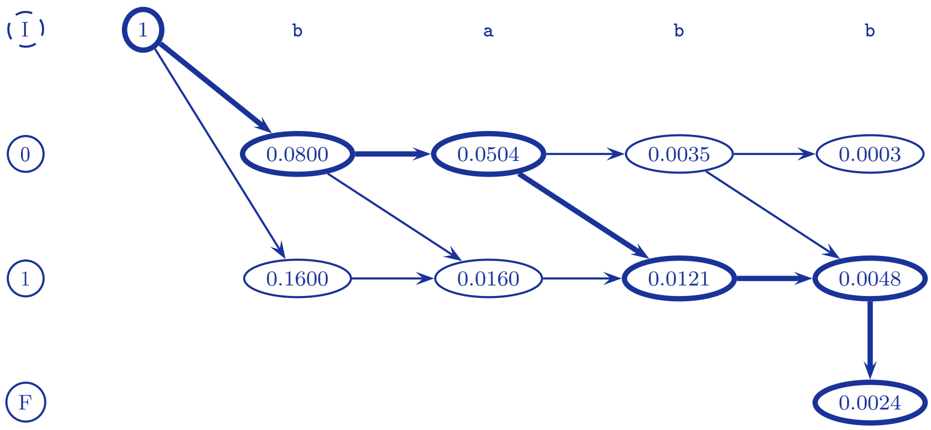
3. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(0) = 0.8, \pi_0(1) = 0.2, \pi_0(F) = 0.0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	0	1	F
0	0.7	0.3	0
1	0	0.5	0.5

B	a	b
0	0.9	0.1
1	0.2	0.8

Reestima los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento "`aaabb`" y "`babb`".





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

aaabb	babb
00011F	0011F

Los parámetros reestimados son:

$\hat{\pi}_0(0) = 1$

$\hat{\pi}_0(1) = 0$

A	0	1	F
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
1	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$

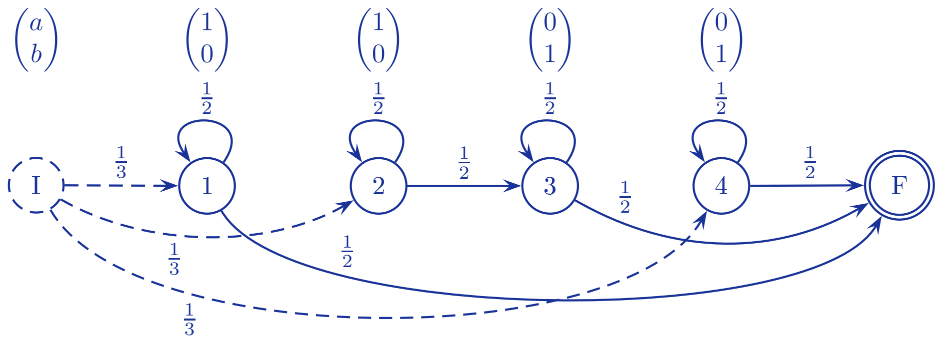
B	a	b
0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	0	1

4. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, 3, 4, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(1) = \pi_0(2) = \pi_0(4) = \frac{1}{3}$, $\pi_0(3) = \pi_0(F) = 0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	1	2	3	4	F
1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
4	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

B	a	b
1	1	0
2	1	0
3	0	1
4	0	1

a) Representa gráficamente el modelo M.



b) Sean n y m dos enteros positivos. Halla las probabilidades: $P(a^n \mid M)$, $P(a^n\, b^m \mid M)$ y $P(b^n \mid M)$.

$$P(a^n \mid M) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}$$
$$P(a^n\, b^m \mid M) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^{n+m}}$$
$$P(b^n \mid M) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}$$

c) Calcula la probabilidad de que M genere una cadena cualquiera de longitud 7.

El conjunto de cadenas de longitud 7 que M puede generar es:

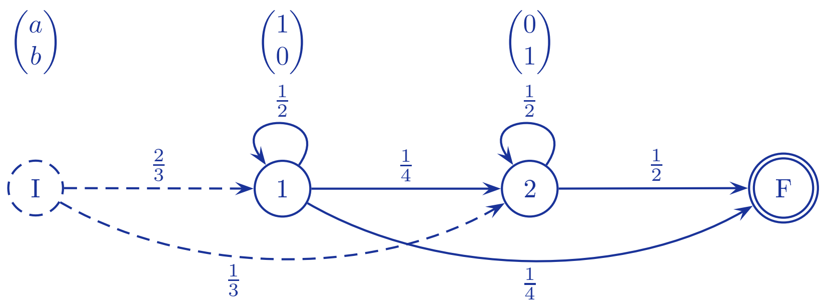
$$S = \{a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7\}$$

Cada cadena de S se genera con probabilidad $\frac{1}{3}\frac{1}{2^7}$.

Por tanto,

$$P(x \in S \mid M) = 8\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2^7} = 0.0208$$

d) Diseña un modelo de Markov M' de conjunto de estados $Q' = \{1, 2, F\}$ y alfabeto $\Sigma' = \Sigma$ que genere el mismo lenguaje probabilístico que M.

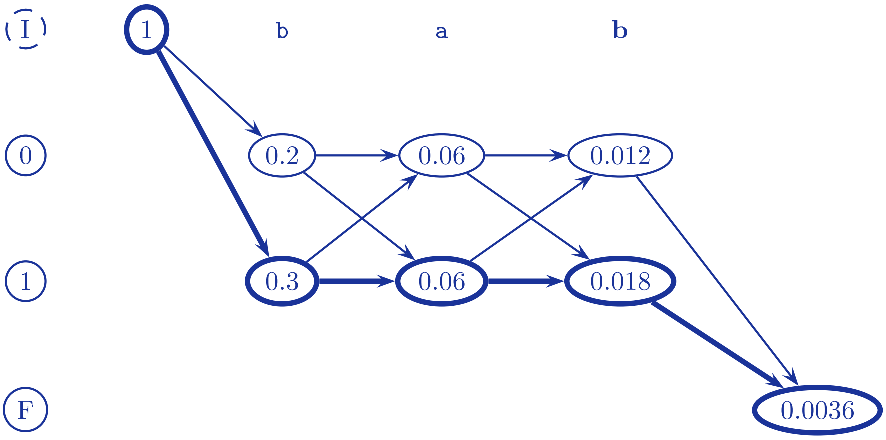


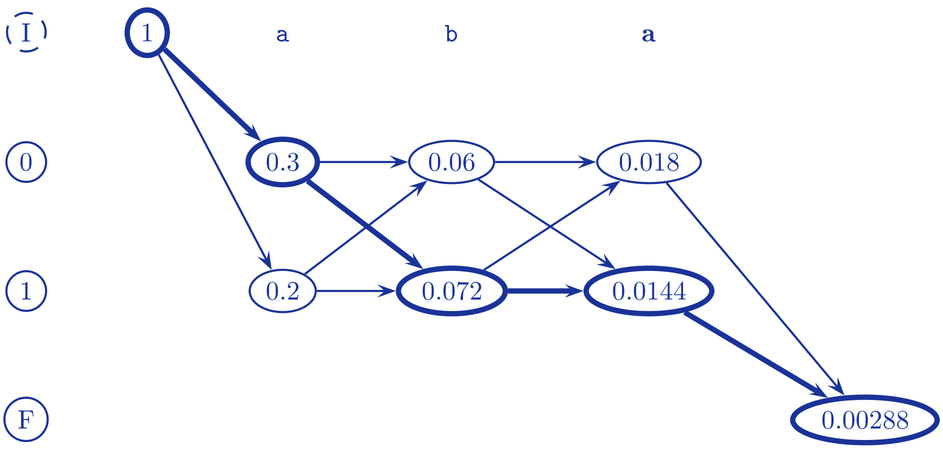
5. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(0) = 0.5, \pi_0(1) = 0.5, \pi_0(F) = 0.0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	0	1	F
0	0.5	0.4	0.1
1	0.3	0.5	0.2

B	a	b
0	0.6	0.4
1	0.4	0.6

Reestima los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento "`bab`" y "`aba`".





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

bab	aba
111F	011F

Los parámetros reestimados son:

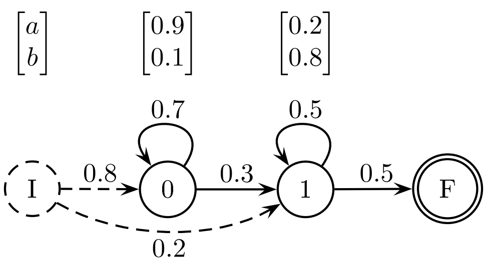
$\hat{\pi}_0(0) = 0.5$
$\hat{\pi}_0(1) = 0.5$

A	0	1	F
0	0	1	0
1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

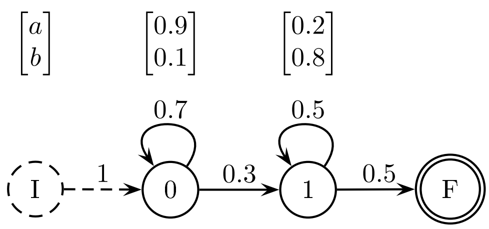
B	a	b
0	1	0
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

6. Se tiene un problema de clasificación en dos clases (A y B) de objetos representados mediante cadenas de símbolos en el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Las probabilidades a priori de las clases son $P(A) = 0.6$ y $P(B) = 0.4$. Las funciones de probabilidad condicional de las clases vienen caracterizadas por los modelos de Markov:

Modelo M_A: $P(x \mid A) = P(x \mid M_A)$



Modelo M_B: $P(x \mid B) = P(x \mid M_B)$



a) Calcula las probabilidades de que M_A y M_B generen la cadena "`aab`".

$$\begin{aligned} P(aab \mid M_A) &= P(aab, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 1 \mid M_A) \\ &+ P(aab, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 1 \mid M_A) \\ &+ P(aab, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1 \mid M_A) \\ &= (0.8 \cdot 0.9)\ (0.7 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (0.8 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (0.2 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &= 0.0544 + 0.0086 + 0.0008 \\ &= 0.0638 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(aab \mid M_B) &= P(aab, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 1 \mid M_B) \\ &+ P(aab, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 1 \mid M_B) \\ &= (1 \cdot 0.9)\ (0.7 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (1 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &= 0.0680 + 0.0108 \\ &= 0.0788 \end{aligned}$$

b) Determina las probabilidades a posteriori de que la cadena "`aab`" pertenezca a las clases A y B.

$$P(aab \mid A)\, P(A) = 0.0638\, 0.6 = 0.0383$$
$$P(aab \mid B)\, P(B) = 0.0788\, 0.4 = 0.0315$$

$$P(x) = P(aab \mid M_A)\, P(A) + P(aab \mid M_B)\, P(B) = 0.0383 + 0.0315 = 0.0698$$

$$P(A \mid aab) = \frac{P(aab \mid A)\, P(A)}{P(x)} = \frac{0.0383}{0.0698} = 0.5487$$

$$P(B \mid aab) = \frac{P(aab \mid B)\, P(B)}{P(x)} = \frac{0.0315}{0.0698} = 0.4513$$

c) Clasifica la cadena "`aab`" por mínima probabilidad de error.

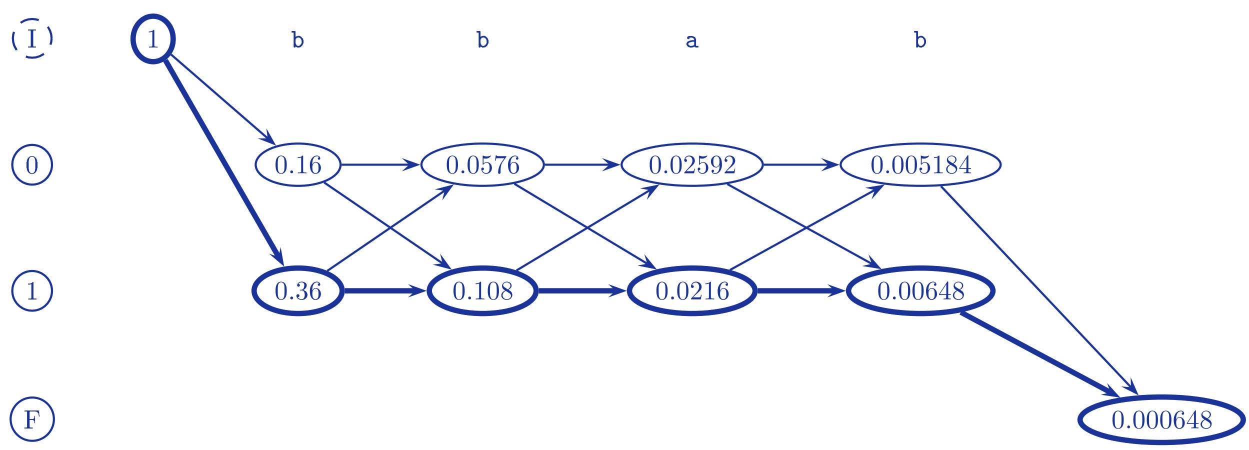
$$\omega^*(aab) = \arg\max_{\omega=A,B} P(\omega \mid aab) = A$$

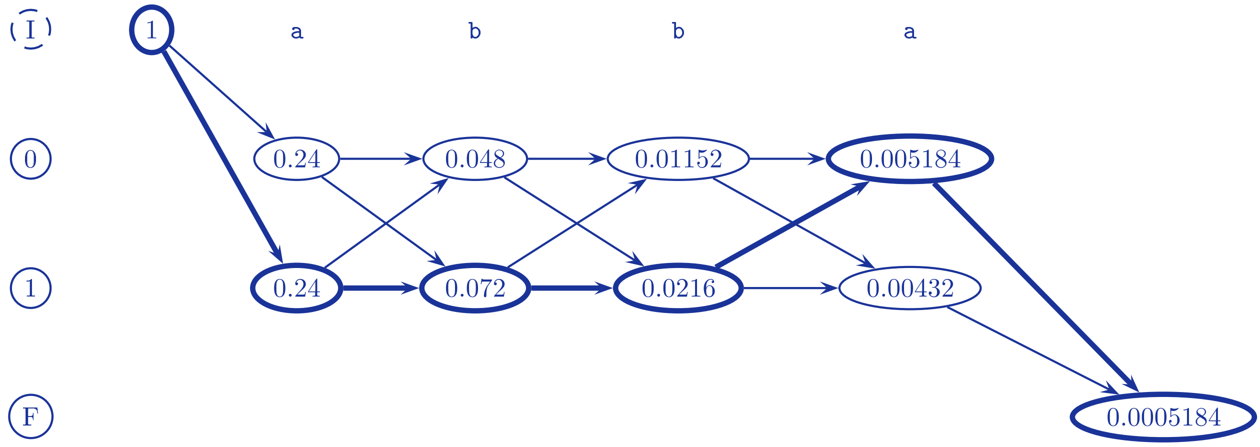
7. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(0) = 0.4, \pi_0(1) = 0.6, \pi_0(F) = 0.0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	0	1	F
0	0.5	0.4	0.1
1	0.4	0.5	0.1

B	a	b
0	0.6	0.4
1	0.4	0.6

Reestima los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento "`bbab`" y "`abba`".





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

bbab	abba
1111F	1110F

Los parámetros reestimados son:

$$\hat{\pi}_0(0) = 0 \qquad \hat{\pi}_0(1) = \frac{2}{2}$$

A	0	1	F
0	0	0	1
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$

B	a	b
0	1	0
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

8. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, 3, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(1) = \pi_0(2) = \frac{1}{2}$ y $\pi_0(3) = \pi_0(F) = 0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

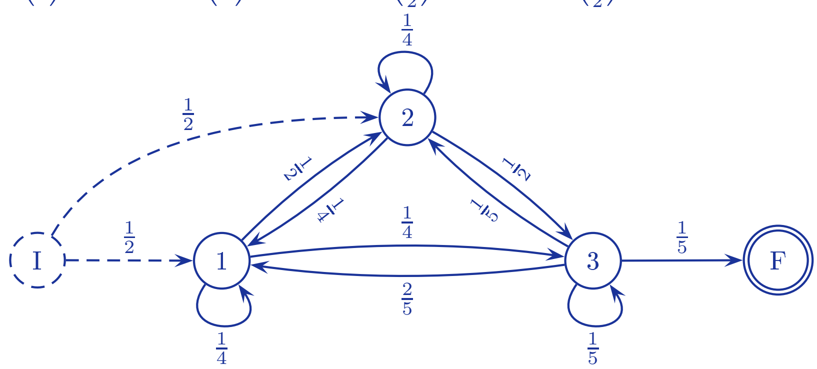
A	1	2	3	F
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
3	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

B	a	b	c
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Se pide:

a) Representa gráficamente el modelo M.

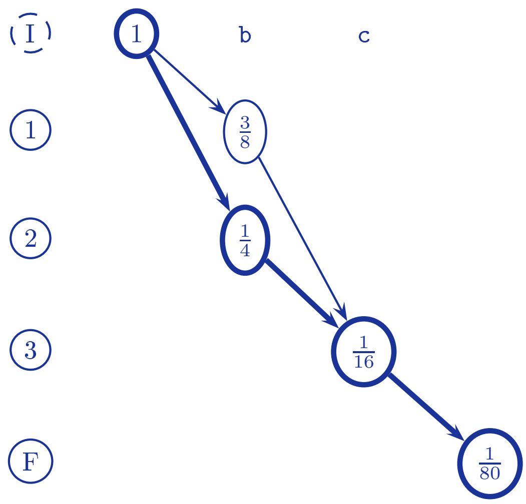
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

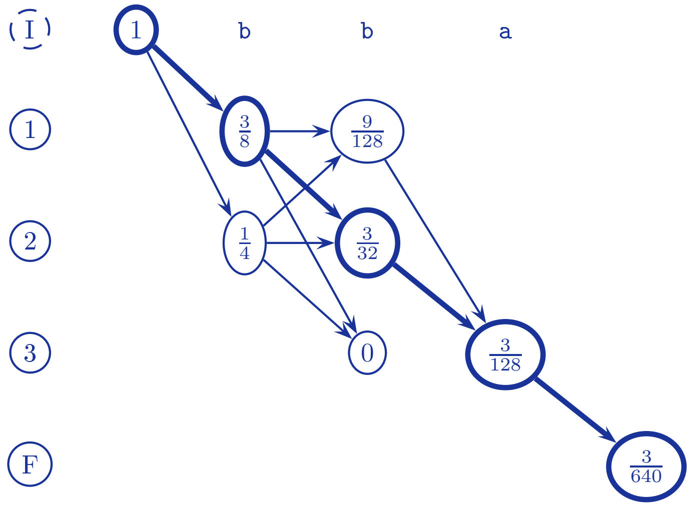


b) Calcula la probabilidad de que M genere la cadena "bc".

$$p(bc \mid M) = p(bc, q_1 = 1, q_2 = 3 \mid M) + p(bc, q_1 = 2, q_2 = 3 \mid M) = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{3}{640} + \frac{1}{80} = \frac{11}{640}$$

c) Realiza una iteración del proceso de reestimación por Viterbi. con el conjunto de entrenamiento $R = \{\text{"bc","bba"}\}$.





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

bc	bba
23F	123F

Los parámetros reestimados son:

$$\pi_0(1) = \frac{1}{2}$$
$$\pi_0(2) = \frac{1}{2}$$
$$\pi_0(3) = 0$$

A	1	2	3	F
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1

B	a	b	c
1	0	1	0
2	0	1	0
3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

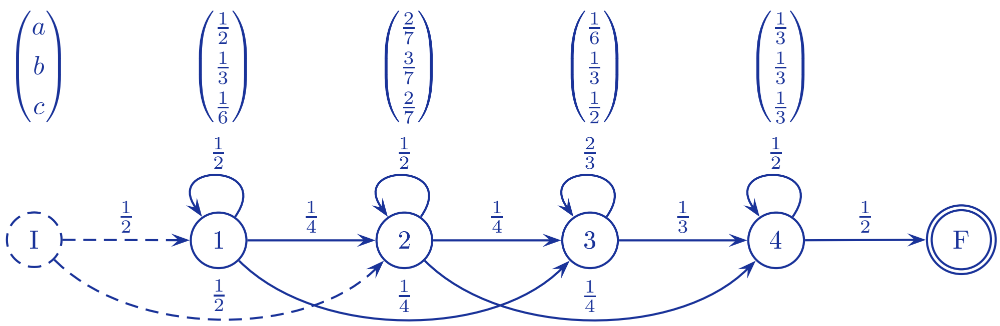
9. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, 3, 4, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(1) = \pi_0(2) = \frac{1}{2}$ y $\pi_0(3) = \pi_0(4) = \pi_0(F) = 0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	1	2	3	4	F
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
2		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
3			$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
4				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

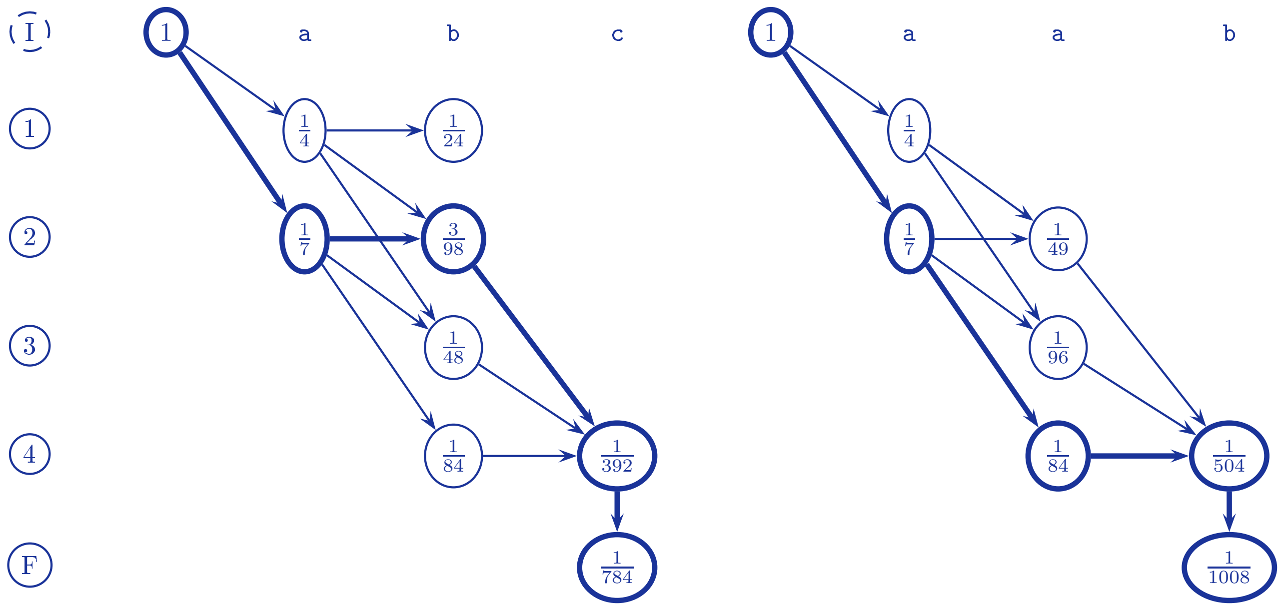
B	a	b	c
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Se pide:

a) Representa gráficamente el modelo M.



b) Realiza una iteración del proceso de reestimación por Viterbi con el conjunto de entrenamiento $R = \{$"abc","aab"$\}$.



Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* a considerar son:

abc	aab
224F	244F

Los parámetros reestimados son:

$\pi_0(2) = 1$
$\pi_0(1) = \pi_0(3) = \pi_0(4) = 0$

A	1	2	3	4	F
1	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

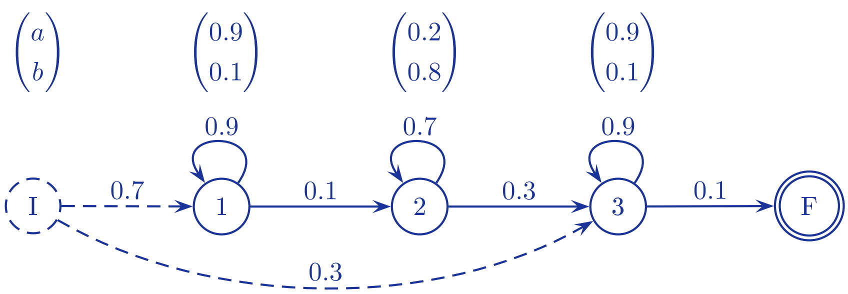
B	a	b	c
1	0	0	0
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
3	0	0	0
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

10. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de Markov de cuatro estados sobre $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $\pi_1 = 0.7, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.3$ y las matrices A y B:

A	1	2	3	F
1	0.9	0.1	0.0	0.0
2	0.0	0.7	0.3	0.0
3	0.0	0.0	0.9	0.1

B	a	b
1	0.9	0.1
2	0.2	0.8
3	0.9	0.1

a) Representa gráficamente el modelo.



b) Determina cuántas cadenas diferentes, de longitud 3, puede generar $\mathcal{M}$ con probabilidad mayor de cero.
Las posibles secuencias de estados son: z_1 ="1,2,3,F" y z_2 ="3,3,3,F". Como en cada estado se pueden emitir dos símbolos, por cada secuencia de estados se pueden generar $2^3 = 8$ cadenas distintas; sin embargo, estas 8 cadenas serán las mismas en las dos secuencias de estados. Por tanto, el número de cadenas diferentes es 8.

c) Determina las probabilidades de que $\mathcal{M}$ produzca las secuencias de estados z_1="1,2,3,F" y z_2="3,3,3,F".

$$Pr(\text{“}1, 2, 3, F'') = \pi_1 A_{1,2} A_{2,3} A_{3,F} = 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.0021$$
$$Pr(\text{“}3, 3, 3, F'') = \pi_3 A_{3,3} A_{3,3} A_{3,F} = 0.3 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 0.0243$$

d) Determina la probabilidad de que $\mathcal{M}$ genere una cadena de longitud 3.

$$\begin{aligned} Pr(x|\ long(x) = 3) &= \sum_{i=1}^{2} Pr(z_i) \\ &= \pi_1 A_{1,2} A_{2,3} A_{3,F} + \pi_3 A_{3,3} A_{3,3} A_{3,F} \\ &= 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \\ &= 0.0021 + 0.0243 = 0.0264 \end{aligned}$$

e) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para obtener la secuencia de estados mas probable con la que $\mathcal{M}$ genera la cadena "`b a a b`".

Valores en los nodos del *trelis*:

	b	a	a	b	
1	0.07	0.0567	0.0459	0.00414	
2		0.0014	0.0011	0.00368	
3	0.03	0.0243	0.0197	0.00177	
F					0.000177

Secuencia óptima de estados:

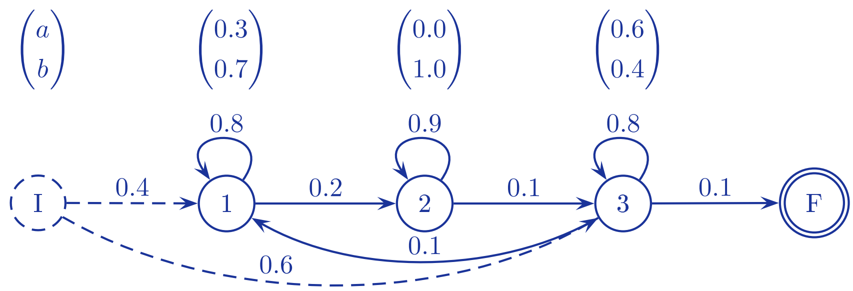
$\tilde{q} =$ 3, 3, 3, 3, F

11. Let $\mathcal{M}$ be a Markov model with 4 states over $\Sigma = \{a, b\}$, defined by $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.6$ and arrays A and B:

A	1	2	3	F
1	0.8	0.2	0.0	0.0
2	0.0	0.9	0.1	0.0
3	0.1	0.0	0.8	0.1

B	a	b
1	0.3	0.7
2	0	1
3	0.6	0.4

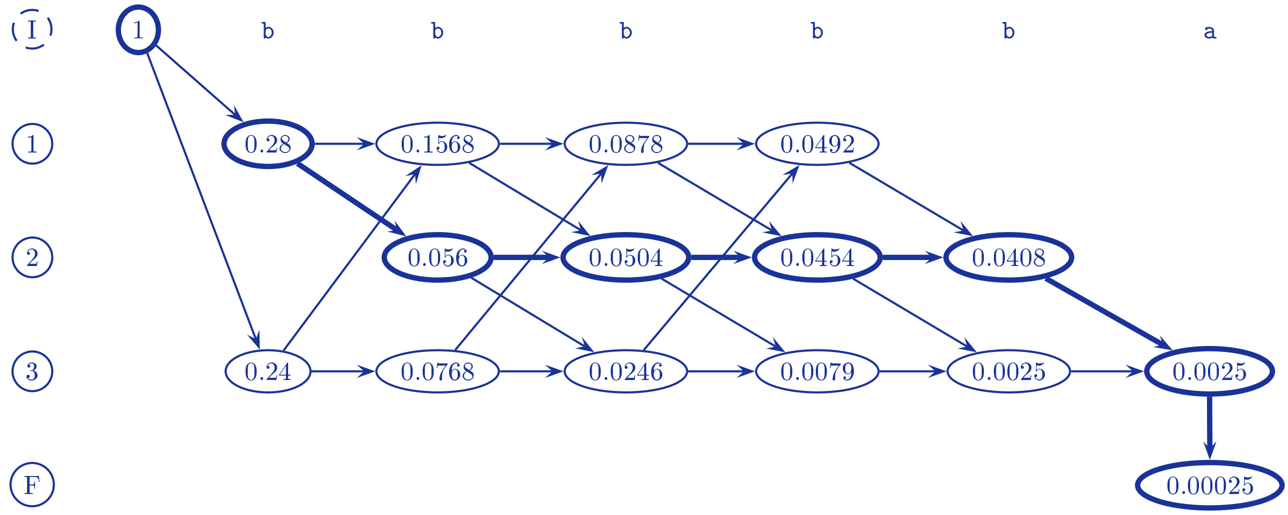
a) Represent the model grahpically.



b) Find the probability that the model generates the string "`b b b b b a`" following the state sequence $112233F$.

$$\begin{aligned} p(bbbbba|112233F) &= \pi_1\, B_{1b} \cdot A_{11}\, B_{1b} \cdot A_{12}\, B_{2b} \cdot A_{22}\, B_{2b} \cdot A_{23}\, B_{3b} \cdot A_{33}\, B_{3a} \cdot A_{3F} \\ &= 0.4\, 0.7 \cdot 0.8\, 0.7 \cdot 0.2\, 1 \cdot 0.9\, 1 \cdot 0.1\, 0.4 \cdot 0.8\, 0.6 \cdot 0.1 \\ &= 0.00005419 \end{aligned}$$

c) Make a trace of Viterbi algorithm to obtain the most probable sequence of states with which $\mathcal{M}$ generates the string "`b b b b b a`".



$$\tilde{Q} = (1, 2, 2, 2, 2, 3, F)$$

d) Find the probability that a string begins with the symbol a.

$$p(x_1 = \mathtt{a}) = \pi_1 B_{1a} + \pi_3 B_{3a} = 0.4\,0.3 + 0.6\,0.6 = 0.48$$

e) Find the probability that a string ends with symbol b.

$$p(x_{|x|} = \mathtt{b}) = B_{3b} = 0.4$$

12. In a two-class (u and v) classification problem, each object is represented by a string, y, over an alphabet of two primitives; that is, $y \in \Sigma = \{a, b\}$. The prior probabilities are: $P(u) = 0.7$ and $P(v) = 0.3$. Las conditional probabilities, $P(y|u)$ and $P(y|v)$, are characterized by two Markov models, $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_v$, of three states:

$$\mathcal{M}_u = (Q_u, \Sigma, \pi_u, A_u, B_u), \quad \mathcal{M}_v = (Q_v, \Sigma, \pi_v, A_v, B_v), \quad \text{where:}$$

$$Q_u = Q_v = \{1, 2, F\}, \qquad \pi_u[1] = 0.8,\ \pi_u[2] = 0.2, \qquad \pi_v[1] = 0.2,\ \pi_v[2] = 0.8$$

$$A_u = A_v = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Given the string $y = abb$,

a) Calculate the Viterbi approximation to the probabilities of generating y with $\mathcal{M}_u$ y $\mathcal{M}_v$. In both cases, make a trace of the Viterbi algorithm and show the most probable sequence of states. For the following sections, we will assume that the approximations calculated are sufficiently accurate.

$P(y|u) \approx \tilde{P}(y|\mathcal{M}_u) = 0.0072,$ $\qquad P(y|v) \approx \tilde{P}(y|\mathcal{M}_v) = 0.0096$

$\mathcal{M}_u$	a	b	b	
1	0.40	0.060	0.0090	
2	0.08	0.048	0.0144	
F				0.0072
$\hat{z}$	1	2	2	F

$\mathcal{M}_v$	a	b	b	
0	0.10	0.015	0.00225	
1	0.48	0.096	0.01920	
F				0.0096
$\hat{z}$	2	2	2	F

b) Find the unconditional probability of y.

$P(y) = P(u)P(y|u) + P(v)P(y|v) \;=\; 0.00504 + 0.00288 \;=\; 0.00792$

c) Find the posterior probability of classes u and v given the string y.

$P(u|y) \;=\; P(u)P(y|u)/P(y) \;=\; 0.636 \qquad P(v|y) \;=\; P(v)P(y|v)/P(y) \;=\; 0.364$

d) Classify y by applying the Bayes decision rule.

$\hat{w} \;=\; argmax_{w\in\{u,v\}} P(w|y) \;=\; u$

e) Find the probability that the classification found in the previous section is wrong.

$P(error|y) \;=\; 1 \;-\; max_{w\in\{u,v\}} P(w|y) \;=\; 0.364$

13. Let $\mathcal{M}$ be a Markov model with 4 states over the alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, defined by $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.6$, and arrays A and B:

A	1	2	3	F
1	0.8	0.2	0.0	0.0
2	0.0	0.4	0.6	0.0
3	0.4	0.0	0.5	0.1

B	a	b
1	0.3	0.7
2	0	1
3	0.6	0.4

a) Determina la probabilidad de que el modelo genere la cadena $y =$ "`a b b b`".

Hay tres secuencias de estados que pueden generar y con probabilidad no nula:

$z_1 =< 3\ 1\ 2\ 3 >,\ z_2 =<\ 1\ 2\ 3\ 3 >,\ z_3 =< 1\ 1\ 2\ 3 >$.

$P(y, z_1) = 0.000484,\ P(y, z_2) = 0.0001152,\ P(y, z_3) = 0.00013824,$

$P(y \mid \mathcal{M}) = 0.000484 + 0.0001152 + 0.00013824 = 0.00073744.$

b) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para determinar la secuencia de estados que con mayor probabilidad genera la cadena y. Obtén también la probabilidad correspondiente (aproximación de Viterbi) y el error con respecto a la probabilidad obtenida en el punto anterior.

```
y  =      a          b          b          b

1  0.120000  0.100800  0.056448  0.031611
2            0.024000  0.020160  0.011290
3  0.360000  0.072000  0.014400  0.004838
F                                          0.000484

z  =      3          1          2          3          F
```

$\tilde{P}(y \mid \mathcal{M}) = P(y\,, < 3\,1\,2\,3 >) \approx 0.000484$

Error $= 0.00073744 - 0.000484 = 0.00025344\ \ (34\,\%)$

c) Se dispone del siguiente conjunto de cadenas de entrenamiento, Y, cada una de las cuales acompañada de la secuencia de estados con la que ha sido generada por $\mathcal{M}$ con mayor probabilidad (secuencia óptima de Viterbi):

```
cadenas:    a b b b a    a b b    b b b a    b b a
estados:    3 1 1 2 3    3 3 3    1 1 2 3    1 2 3
```

Usando estas cadenas (y secuencias de estados) y $\mathcal{M}$ como modelo inicial, realiza una iteración del algoritmo de reestimación de Viterbi para obtener el modelo reestimado $\mathcal{M}'$

El modelo $\mathcal{M}'$ tiene la misma topología que $\mathcal{M}$ y los siguientes parámetros:

$\pi_1 = 2/4,\ \pi_2 = \pi_F = 0,\ \pi_3 = 2/4$

A	1	2	3	F
1	2/5	3/5	0	0
2	0	0	1	0
3	1/7	0	2/7	4/7

B	a	b
1	1/6	5/6
2	1/4	3/4
3	5/7	2/7

d) Calcula la (aproximación de Viterbi a la) verosimilitud del conjunto de cadenas de entrenamiento con $\mathcal{M}$.

$$\tilde{P}(Y \mid \mathcal{M}) = \tilde{P}(abbba \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(abb \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(bbba \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(bba \mid \mathcal{M}) =$$

$$0.000407 \cdot 0.001440 \cdot 0.001129 \cdot 0.002017 \approx 0.00000000000133$$

14. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de Markov de cuatro estados sobre $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.6$ y las matrices A y B:

A	1	2	3	F
1	0.8	0.2	0.0	0.0
2	0.0	0.6	0.3	0.1
3	0.4	0.0	0.5	0.1

B	a	b
1	0.3	0.7
2	0	1
3	0.6	0.4

a) Determina la probabilidad de que el modelo genere una cadena de longitud 2.

Hay solo dos secuencias de dos estados con probabilidad mayor que cero:

$z_1 =< 1\ 2 >,\ z_2 =< 3\ 3 >; \quad P(z_1) = 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.008,\ P(z_2) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.03.$

Hay cuatro posibles cadenas de $\{a, b\}$ de longitud 2: aa, ab, ba, bb. Por tanto, la probabilidad de que $\mathcal{M}$ genere una cadena de longitud 2 es:

$P(aa, z_1) + P(aa, z_2) + P(ab, z_1) + P(ab, z_2) + P(ba, z_1) + P(ba, z_2) + P(bb, z_1) + P(bb, z_2)$
$= 0.008{\cdot}0.3{\cdot}0{\cdot}+0.03{\cdot}0.6{\cdot}0.6+0.008{\cdot}0.3{\cdot}1{\cdot}+0.03{\cdot}0.6{\cdot}0.4+0.008{\cdot}0.7{\cdot}0{\cdot}+0.03{\cdot}0.4{\cdot}0.6+0.008{\cdot}0.7{\cdot}1{\cdot}+0.03{\cdot}0.4{\cdot}0.4$
$= P(z_1) + P(z_2) = 0.038$

b) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para determinar la secuencia de estados que con mayor probabilidad genera la cadena *abbb*. Obtén también la probabilidad correspondiente (aproximación de Viterbi).

```
y  =       a          b          b          b

1  0.120000  0.100800  0.056448  0.031611
2            0.024000  0.020160  0.012096
3  0.360000  0.072000  0.014400  0.002880
F                                          0.0012096

z  =       3          1          2          2          F
```

$\tilde{P}(y \mid \mathcal{M}) = P(y\,, < 3\,1\,2\,2 >) \approx 0.00121$

c) Se dispone del siguiente conjunto de cadenas de entrenamiento, Y, cada una de las cuales acompañada de la secuencia de estados con la que ha sido generada por $\mathcal{M}$ con mayor probabilidad (secuencia óptima de Viterbi):

```
cadenas:    a b b b a    a b b    b b b a    b b a
estados:    3 1 2 2 3    3 1 2    1 2 2 3    3 3 3
```

Usando estas cadenas (y secuencias de estados) y $\mathcal{M}$ como modelo inicial, realiza una iteración del algoritmo de reestimación de Viterbi para obtener el modelo reestimado $\mathcal{M}'$

El modelo $\mathcal{M}'$ tiene la misma topología que $\mathcal{M}$ y los siguientes parámetros:

$\pi_1 = 1/4,\ \pi_2 = \pi_F = 0,\ \pi_3 = 3/4$

A	1	2	3	F
1	0	1	0	0
2	0	2/5	2/5	1/5
3	2/7	0	2/7	3/7

B	a	b
1	1/4	3/4
2	1/6	5/6
3	5/7	2/7

d) Calcula la (aproximación de Viterbi a la) verosimilitud del conjunto de cadenas de entrenamiento con $\mathcal{M}$.

$\tilde{P}(Y \mid \mathcal{M}) = \tilde{P}(abbba \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(abb \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(bbba \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(bba \mid \mathcal{M}) =$

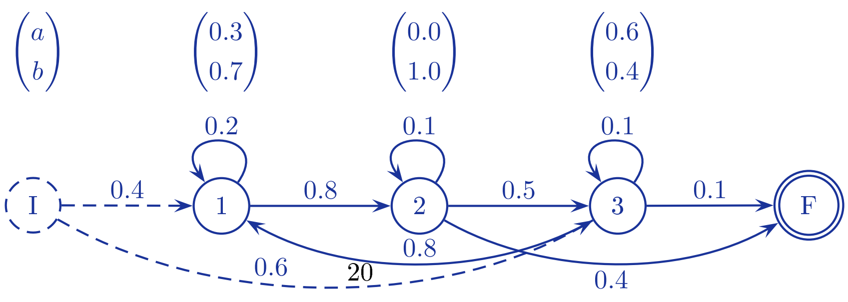
$0.000218 \cdot 0.00144 \cdot 0.000605 \cdot 0.00144 \approx .0000000000002734871$

15. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de Markov de cuatro estados sobre $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.6$ y las matrices A y B:

A	1	2	3	F
1	0.2	0.8	0.0	0.0
2	0.0	0.1	0.5	0.4
3	0.8	0.0	0.1	0.1

B	a	b
1	0.3	0.7
2	0.0	1.0
3	0.6	0.4

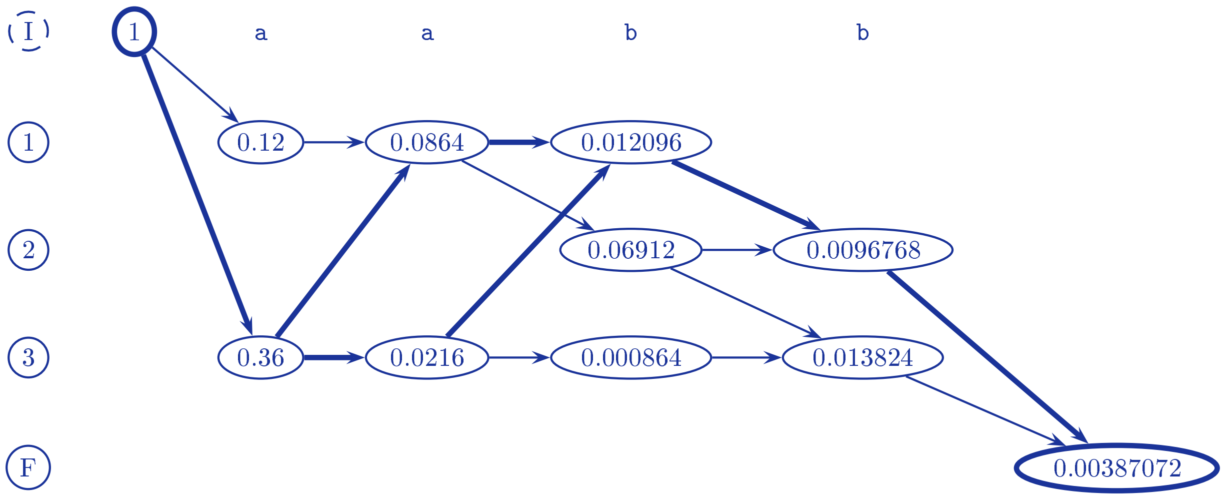
a) Representa gráficamente el modelo.



b) Determina cuál es la probabilidad de que el modelo genere la cadena "`abbbba`" siguiendo la secuencia de estados `112233F`.

$$\begin{aligned} p(abbbba, 112233F) &= \pi_1\, B_{1a} \cdot A_{11}\, B_{1b} \cdot A_{12}\, B_{2b} \cdot A_{22}\, B_{2b} \cdot A_{23}\, B_{3b} \cdot A_{33}\, B_{3a} \cdot A_{3F} \\ &= 0.4\, 0.3 \cdot 0.2\, 0.7 \cdot 0.8\, 1.0 \cdot 0.1\, 1.0 \cdot 0.5\, 0.4 \cdot 0.1\, 0.6 \cdot 0.1 \\ &= 0.0000016128 \end{aligned}$$

c) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para obtener la secuencia de estados mas probable con la que $\mathcal{M}$ genera la cadena "`aabb`".



Hay dos caminos óptimos (cualquiera de ellos es solución al problema):

$$\tilde{z} = (3, 1, 1, 2, F) \qquad \text{y} \qquad \tilde{z}' = (3, 3, 1, 2, F)$$

$$p(aabb, \tilde{z}) = p(aabb, \tilde{z}') = 0.00387072$$

d) Realiza una iteración de reestimación por Viterbi de $\mathcal{M}$ a partir de las cadenas de aprendizaje

`ab, ba, aab, aba,`

sabiendo que las secuencias de estados óptimas para estas cadenas son, respectivamente,

`12F, 33F, 312F, 123F.`

Contadores:

π'	1	2	3
	2	0	2

A'	1	2	3	F
1	0	3	0	0
2	0	0	1	2
3	1	0	1	2

B'	a	b
1	3	0
2	0	3
3	3	1

Normalizando:

π	1	2	3
	1/2	0	1/2

A	1	2	3	F
1	0	1	0	0
2	0	0	1/3	2/3
3	1/4	0	1/4	1/2

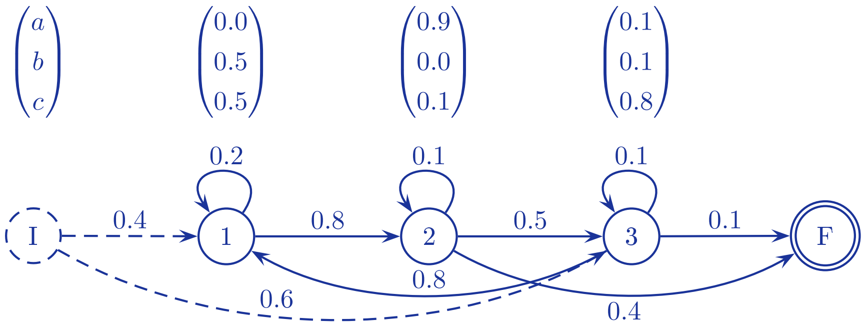
B	a	b
1	1	0
2	0	1
3	3/4	1/4

16. Sea $\mathcal{M}$ un modelo de Markov de cuatro estados sobre $\Sigma = \{a, b\}$, definido por $\pi_1 = 0.4, \pi_2 = \pi_F = 0, \pi_3 = 0.6$ y las matrices A y B:

A	1	2	3	F
1	0.2	0.8	0.0	0.0
2	0.0	0.1	0.5	0.4
3	0.8	0.0	0.1	0.1

B	a	b	c
1	0.0	0.5	0.5
2	0.9	0.0	0.1
3	0.1	0.1	0.8

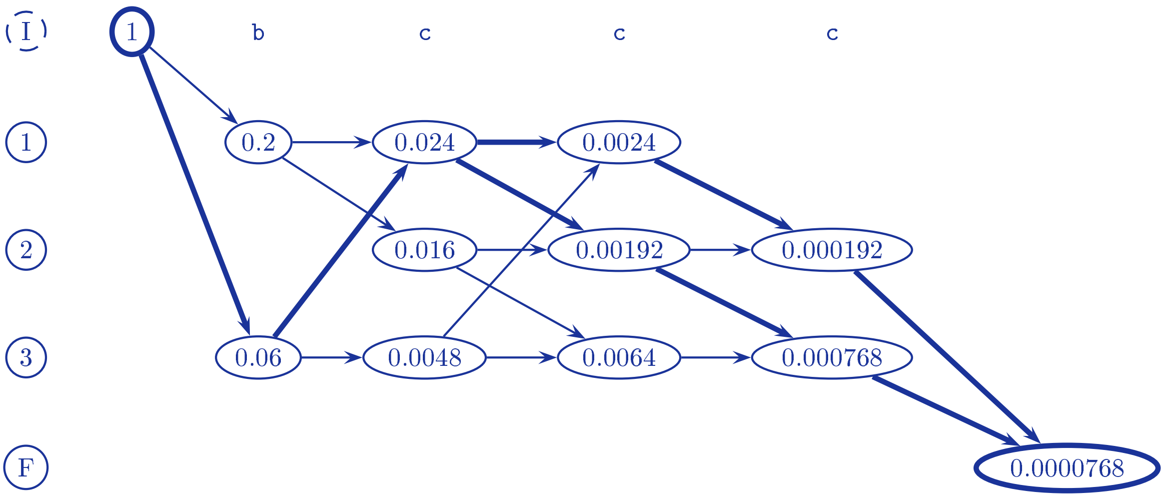
a) Representa gráficamente el modelo.



b) Determina cuál es la probabilidad de que el modelo genere la cadena "`abab`".

$$\begin{aligned} p(abab) &= p(abab, 3123F) + p(abab, 3333F) \\ &= 0.6\,0.1 \cdot 0.8\,0.5 \cdot 0.8\,0.9 \cdot 0.5\,0.1 \cdot 0.1 + 0.6\,0.1 \cdot 0.1\,0.1 \cdot 0.1\,0.1 \cdot 0.1\,0.1 \cdot 0.1 \\ &= 0.0000864 + 0.000000006 \\ &= 0.000086406 \end{aligned}$$

c) Realiza una traza del algoritmo de Viterbi para obtener la secuencia de estados mas probable con la que $\mathcal{M}$ genera la cadena "`bccc`".



Hay dos caminos óptimos (cualquiera de ellos es solución al problema):

$$\tilde{z} = (3, 1, 1, 2, F) \qquad \text{y} \qquad \tilde{z}' = (3, 1, 2, 3, F)$$

$$p(bccc, \tilde{z}) = p(bccc, \tilde{z}') = 0.0000768$$

17. Se pretende aprender un Modelo de Markov lineal de conjunto de estados $Q = \{0, 1, 2, F\}$ y conjunto de símbolos $\Sigma = \{a, b, c\}$, a partir del siguiente conjunto de cadenas de aprendizaje:

$$A = \{acbbcc, aabbbc, abcc\}$$

a) Obtén un modelo inicial M_0 por segmentación lineal de las cadenas de A,

Una segmentación lineal reparte uniforme y secuencialmente los símbolos de cada cadena entre los 3 estados disponibles. Esto corresponde a la secuencia de estados 112233 para $acbbcc, aabbbc$ y 1223 para $abcc$, de longitudes 6 y 4, respectivamente. Como 4 no es múltiplo exacto 3, dependiendo de como se haga el redondeo, hay otras secuencias de estados posibles para $abcc$. Por ejemplo, $1123, 1233$ son adecuadas, e incluso 1122 o 2233, siempre que las probabilidades iniciales y/o de estados finales se calculen correctamente. Los resultados que siguen corresponden a la secuencia 1223.

$M_0 = (\pi_0, A_0, B_0)$:

$\pi_0 = (1, 0, 0)$

A_0	1	2	3	F
1	2/5	3/5	0	0
2	0	1/2	1/2	0
2	0	0	2/5	3/5

B_0	a	b	c
1	4/5	0	1/5
2	0	5/6	1/6
3	0	1/5	4/5

b) Calcula la aproximación de Viterbi a la probabilidad de que M_0 genere el conjunto de aprendizaje A.
$\tilde{P}(A \mid M_0) \;=\; \tilde{P}(acbbcc \mid M_0) \cdot \tilde{P}(aabbbc \mid M_0) \cdot \tilde{P}(abcc \mid M_0) \;\approx\; 0.0011 \cdot 0.0053 \cdot 0.0307 \;\approx\; 1.7 \cdot 10^{-7}$

$\tilde{P}(acbbcc \mid M_0) \approx 0.0011$:

```
        a      c      b      b      c      c
0 0.800  0.064
1        0.080 0.0333 0.0139 0.0012 0.0001
2              0.0080 0.0033 0.0056 0.0018 0.0011
Q:    1      2      2      2      3      3      F
```

$\tilde{P}(aabbbc \mid M_0) \approx 0.0053$:

```
        a      a      b      b      b      c
0     0.8  0.256
1                 0.128 0.0530 0.0222 0.0018
2                       0.0128 0.0053 0.0088 0.0053
Q:    0      0      1      1      1      2      F
```

$\tilde{P}(abcc \mid M_0) \approx 0.0307$:

```
        a      b      c      c
0     0.8
1              0.4 0.0333 0.0028
2                  0.1600 0.0512 0.0307
Q:    0      1      2      2      F
```

c) Obtén un nuevo modelo M_1, mediante *una* iteración de re-estimación por Viterbi a partir de M_0,
$M_1 = (\pi_1, A_1, B_1)$:

$\pi_1 = (1, 0, 0)$

A_1	1	2	3	F
1	$1/4$	$3/4$	0	0
2	0	$4/7$	$3/7$	0
2	0	0	$2/5$	$3/5$

B_1	a	b	c
1	1	0	0
2	0	$6/7$	$1/7$
3	0	0	1

d) Calcula la aproximación de Viterbi a la probabilidad de que M_1 genere el conjunto de aprendizaje A.
$\tilde{P}(A \mid M_1) \;=\; \tilde{P}(acbbcc \mid M_1) \cdot \tilde{P}(aabbbc \mid M_1) \cdot \tilde{P}(abcc \mid M_1) \;\approx\; 0.0026 \cdot 0.0099 \cdot 0.0661 \;\approx\; 1.7 \cdot 10^{-6}$

$\tilde{P}(acbbcc \mid M_1) \approx 0.0026$:

```
        a      c      b      b      c      c
0   1.0
1       0.1071 0.0525 0.0257 0.0021 0.0002
2                            0.0110 0.0044 0.0026
Q:    0      1      1      1      2      2      F
```

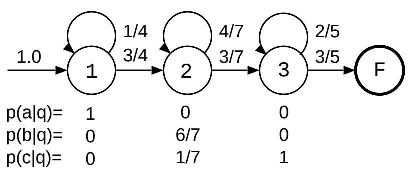
$\tilde{P}(aabbbc \mid M_1) \approx 0.0099$:

```
        a      a      b      b      b      c
0   1.0    0.25
1                0.1607 0.0787 0.0386 0.0031
2                                     0.0165 0.0099
Q:    0      0      1      1      1      2      F
```

$\tilde{P}(abcc \mid M_1) \approx 0.0661$:

```
        a      b      c      c
0   1.0
1          0.6429 0.0524 0.0042
2                 0.2755 0.1102 0.0661
Q:    0      1      2      2      F
```

e) Representa gráficamente M_1 e indica cuál ha sido el cambio cualitativo más significativo que ha ocurrido entre M_0 y M_1.
M_1 genera las cadenas de aprendizaje con una verosimilitud 10 veces mayor que M_0. Además de esto, el cambio cualitativo más significativo de M_0 a M_1 ha sido un aumento de la especialización de los estados en la emisión de símbolos: En M_0 el estado 1 emite a's y c's, y el 2 y 3 emiten b's y c's. Sin embargo, en M_1 el estado 1 emite solo a's el 2 (casi) solo b's y el 3 solo c's. La representación gráfica se muestra a continuación:



18. Se tiene un problema de clasificación en dos clases X e Y, con probabilidades a priori respectivas de 0.3 y 0.7. Se dispone de modelos de Markov para cada clase, M_X y M_Y, cuyos parámetros son:

$\pi_{X1} = \pi_{Y1} = 1$
$\pi_{X2} = \pi_{Y2} = 0$

A_X	1	2	F
1	0.8	0.2	0
2	0.7	0	0.3

B_X	a	b
1	0.9	0.1
2	0.1	0.9

A_Y	1	2	F
1	0.8	0.2	0
2	0.7	0	0.3

B_Y	a	b
1	0.1	0.9
2	0.9	0.1

a) Calcular la aproximación de Viterbi a las probabilidades de generar la cadena $y =$ "b b a b" por M_X y M_Y. Presentar las trazas de ejecución correspondientes.

b) Trazas del algoritmo de Viterbi para el cálculo de $\tilde{P}(y \mid M_X)$ y $\tilde{P}(y \mid M_Y)$:

```
Traza Mx:   b       b       a       b
      1 0.10000 0.00800 0.01134 0.00091
      2         0.01800 0.00016 0.00204 0.00061
      Q:        1       2       1       2       F
```

```
Traza My:   b       b       a       b
      1 0.90000 0.64812 0.05185 0.07352
      2         0.01800 0.11667 0.00104 0.00031
      Q:        1       1       1       2       F
```

$\tilde{P}(y \mid M_X) \approx 0.00061\,, \quad \tilde{P}(y \mid M_Y) \approx 0.00031$

c) Clasificar y usando esta aproximación.

$P(X \mid y) = P(y \mid M_X)P(X)/P(y) \approx 0.46\,,\quad P(Y \mid y) = P(y \mid M_y)P(Y)/P(y) \approx 0.54.$

Por tanto, y se clasifica en el clase Y.

d) Calcular la verdadera probabilidad de generar y mediante M_X y el error de la aproximación de Viterbi.

Aparte de la secuencia de estados óptima (de Viterbi) $< 1, 2, 1, 2 >$, hay otra secuencia, $< 1, 1, 1, 2 >$, mediante la que M_X también puede generar y con probabilidad $0.00031 > 0$. Por tanto la verdadera probabilidad de generación de y por M_X es $0.00061 + 0.00031 = 0.00092$ y el error de la aproximación es 0.00031 (34 %).

e) Determinar cuáles son las dos cadenas (de 3 o menos símbolos) que se generan con mayor probabilidad (verdadera) mediante cada uno de los modelos M_X y M_Y. Calcular el error de la aproximación de Viterbi para cada una de estas cuatro cadenas.

Para M_X : {"`a b`", "`a a b`"}; Para M_Y : {"`b a`", "`b b a`"}

$P(\texttt{a b} \mid M_X) = P(\texttt{b a} \mid M_Y) \approx 0.049$, $P(\texttt{a a b} \mid M_X) = P(\texttt{b b a} \mid M_Y) \approx 0.035$

El error de la aproximación de Viterbi es 0 en todos los casos, ya que las cuatro cadenas se generan mediante secuencias de estados únicas.

19. Considérese una tarea de clasificación de cadenas según sus longitudes en dos clases, $\mathcal{S}$ (cadenas cortas) y $\mathcal{L}$ (cadenas largas), con probabilidades a priori $P(\mathcal{S}) = 0.8$ y $P(\mathcal{L}) = 0.2$, respectivamente. Para simplificar, supongamos que las cadenas constan de un único símbolo, a. Para ello, se utilizan dos modelos de Markov de un solo estado, $M_\mathcal{S}$ y $M_\mathcal{L}$, cuyos parámetros son:

	$\pi_\mathcal{S}$
1	1.0

$A_\mathcal{S}$	1	F
1	0.4	0.6

$B_\mathcal{S}$	a
1	1.0

	$\pi_\mathcal{L}$
1	1.0

$A_\mathcal{L}$	1	F
1	0.6	0.4

$B_\mathcal{L}$	a
1	1.0

a) Sean y_1 ="*aaaaa*", y_2 ="*aaaaaa*". Determinar las probabilidades con la que cada modelo genera estas cadenas, $P(y \mid c)$, $y \in \{y_1, y_2\}$, $c \in \{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$. Indicar también los valores de las correspondientes aproximaciones de Viterbi a estas probabilidades.

Las longitudes de y_1 e y_2 son 5 y 6, respectivamente. Por tanto:

$P(y_1 \mid \mathcal{S}) = 0.4^4 \cdot 0.6 = 0.015360$ $P(y_2 \mid \mathcal{S}) = 0.4^5 \cdot 0.6 = 0.006144$

$P(y_1 \mid \mathcal{L}) = 0.6^4 \cdot 0.4 = 0.051840$ $P(y_2 \mid \mathcal{L}) = 0.6^5 \cdot 0.4 = 0.031104$

Como estos modelos son no-ambiguos, la aproximación de Viterbi produce estas mismas probabilidades exactas.

b) Determinar las probabilidades a posteriori $P(\mathcal{S} \mid y)$, $P(\mathcal{L} \mid y)$, $y \in \{y_1, y_2\}$.

$P(y_1) = 0.8 \cdot P(y_1 \mid \mathcal{S}) + 0.2 \cdot P(y_1 \mid \mathcal{L}) = 0.022656$

$P(y_2) = 0.8 \cdot P(y_2 \mid \mathcal{S}) + 0.2 \cdot P(y_2 \mid \mathcal{L}) = 0.011136$

$P(\mathcal{S} \mid y_1) = \frac{0.8}{P(y_1)} \cdot P(y_1 \mid \mathcal{S}) = 0.542373$ $P(\mathcal{S} \mid y_2) = \frac{0.8}{P(y_2)} \cdot P(y_2 \mid \mathcal{S}) = 0.441379$

$P(\mathcal{L} \mid y_1) = \frac{0.2}{P(y_1)} \cdot P(y_1 \mid \mathcal{L}) = 0.457627$ $P(\mathcal{L} \mid y_2) = \frac{0.2}{P(y_2)} \cdot P(y_2 \mid \mathcal{L}) = 0.558621$

c) Clasificar y_1 e y_2 mediante el clasificador de mínimo riesgo de error o de Bayes. Determinar las probabilidades de que estas clasificaciones sean erróneas.

La clasificación de mínimo riesgo de error de y_1 es $\mathcal{S}$ y la de y_2 es $\mathcal{L}$. La probabilidad de que estas clasificaciones sean erróneas son, respectivamente, $1 - 0.542373 = 0.457627$ y $1 - 0.558621 = 0.441379$.

d) Calcular la probabilidad de error de este clasificador. Para este cálculo, pueden resultar útiles las siguientes fórmulas de sumas de series geométricas (en las que las $i$es se corresponden con las longitudes de las cadenas):

$$\sum_{i=m}^{n} r^i = \frac{r^m - r^{(n+1)}}{1 - r} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{r}{1 - r}$$

Sea i la longitud de una cadena y. La probabilidad de error viene dada por:

$$P(error) = \sum_{y:i=1}^{\infty} P(error \mid y) \cdot P(y)$$

Para $i \leq 5$, todas las cadenas se clasifican en la clase $\mathcal{S}$, mientras que para $i > 5$, la clasificación es $\mathcal{L}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
P(error) &= \sum_{y:i=1}^{5} P(\mathcal{L} \mid y) \cdot P(y) + \sum_{y:i=6}^{\infty} P(\mathcal{S} \mid y) \cdot P(y) \\
&= \sum_{i=1}^{5} 0.2 \cdot 0.6^{i-1} \cdot 0.4 + \sum_{i=6}^{\infty} 0.8 \cdot 0.4^{i-1} \cdot 0.6 \\
&= 0.2 \cdot 0.4 \cdot \sum_{i=0}^{4} 0.6^i + 0.8 \cdot 0.6 \cdot \sum_{i=5}^{\infty} 0.4^i \\
&= 0.2 \cdot 0.4 \cdot \frac{1-0.6^5}{1-0.6} + 0.8 \cdot 0.6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} 0.4^i - \sum_{i=0}^{4} 0.4^i \right) \\
&= 0.2 \cdot (1-0.6^5) + 0.8 \cdot 0.6 \cdot \left(\frac{1}{1-0.4} - \frac{1-0.4^5}{1-0.4} \right) \\
&= 0.2 \cdot (1-0.6^5) + 0.8 \cdot 0.4^5 \\
&= 0.184448 + 0.36 = 0.544448
\end{aligned}$$

20. Considérese una tarea de clasificación de cadenas de símbolos del alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ en dos clases, V y W, con probabilidades a priori $P(V) = 0.6$ y $P(W) = 0.4$. Para ello, se utilizan dos modelos de Markov, M_V y M_W, ambos con dos estados ($Q = \{1, 2, F\}$), cuyos parámetros son:

q	π_V
1	0.8
2	0.2

A_V	1	2	F
1	0.7	0.3	0.0
2	0.0	0.5	0.5

B_V	a	b
1	0.9	0.1
2	0.8	0.2

q	π_W
1	1.0
2	0.0

A_W	1	2	F
1	0.7	0.3	0.0
2	0.0	0.5	0.5

B_W	a	b
1	0.9	0.1
2	0.8	0.2

a) Calcula las probabilidades exactas (*no* la aproximación de Viterbi) de que M_V y M_W generen la cadena "`aab`".
Hay tres secuencias de estados en M_V que generan la cadena aab: $z_1 = 1, 1, 2, F$, $z_2 = 1, 2, 2, F$, $z_3 = 2, 2, 2, F$; análogamente, en M_W hay dos secuencias: $z_1 = 1, 1, 2, F$, $z_2 = 1, 2, 2, F$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
P(aab \mid V) &= (0.8 \cdot 0.9)\ (0.7 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.2)\ 0.5 \\
&+ (0.8 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.8)\ (0.5 \cdot 0.2)\ 0.5 \\
&+ (0.2 \cdot 0.8)\ (0.5 \cdot 0.8)\ (0.5 \cdot 0.2)\ 0.5 \\
&= 0.01361 + 0.00864 + 0.0032 \;=\; \mathbf{0.02545}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(aab \mid W) &= (1 \cdot 0.9)\ (0.7 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.2)\ 0.5 \\
&+ (1 \cdot 0.9)\ (0.3 \cdot 0.8)\ (0.5 \cdot 0.2)\ 0.5 \\
&= 0.01701 + 0.0108 \;=\; \mathbf{0.02781}
\end{aligned}$$

b) Clasifica la cadena "`aab`" por mínima probabilidad de error.

$$c^*(aab) \;=\; \arg\max_{c \in \{V,W\}} P(c \mid aab) \;=\; \arg\max_{c \in \{V,W\}} P(aab \mid c) \cdot P(c)$$

$$P(aab \mid V)\, P(V) = 0.02545 \cdot 0.6 = \mathbf{0.015270} \;>\; P(aab \mid W)\, P(W) = 0.02781 \cdot 0.4 = \mathbf{0.011124}$$

Por tanto, $c^*(aab) \;=\; \boldsymbol{V}$.

c) Determina la probabilidad de error de la clasificación obtenida en el apartado anterior.

$$P(\text{error} \mid aab) \;=\; 1 - \max_{c \in \{V,W\}} P(c \mid aab) \;=\; 1 - P(V \mid aab) \;=\; P(W \mid aab) \;=\; \frac{P(aab \mid W)\, P(W)}{P(aab)}$$

$$P(aab) \;=\; P(aab \mid V)\, P(V) + P(aab \mid W)\, P(W) \;=\; 0.011124 + 0.015270 = 0.026394$$

$$P(\text{error} \mid aab) \;=\; \frac{0.011124}{0.026394} \;=\; \mathbf{0.42145}$$

d) Repite los cálculos de los dos apartados anteriores, utilizando las probabilidades obtenidas mediante la aproximación de Viterbi en lugar de las probabilidades exactas.

$$\tilde{P}(aab \mid V) = \max_{z\in Q^+} P(aab, z \mid V) = \max(0.01361, 0.00864, 0.0032) = \mathbf{0.01361}$$
$$\tilde{P}(aab \mid W) = \max_{z\in Q^+} P(aab, z \mid W) = \max(0.01701 + 0.0108) = \mathbf{0.01701}$$

$$\tilde{c}^*(aab) = \arg\max_{c\in\{V,W\}} P(c \mid aab) \approx \arg\max_{c\in\{V,W\}} \tilde{P}(aab \mid c)\cdot P(c)$$

$$\tilde{P}(aab \mid V)\, P(V) = 0.01361 \cdot 0.6 = \mathbf{0.008166} \quad > \quad \tilde{P}(aab \mid W)\, P(W) = 0.01701 \cdot 0.4 = \mathbf{0.006804}$$

Por tanto, $\tilde{c}^*(aab) = \boldsymbol{V}$.

$$P(\text{error} \mid aab) = 1 - \max_{c\in\{V,W\}} P(c \mid aab) = 1 - P(V \mid aab) = P(W \mid aab) \approx \frac{\tilde{P}(aab \mid W)\, P(W)}{\tilde{P}(aab)}$$

$$\tilde{P}(aab) = \tilde{P}(aab \mid V)\, P(V) + \tilde{P}(aab \mid W)\, P(W) = 0.008166 + 0.006804 = 0.01497$$

$$P(\text{error} \mid aab) \approx \frac{0.006804}{0.01497} = \mathbf{0.45451}$$

21. Los modelos de Markov discretos que se estudian en SIN pueden extenderse fácilmente para que, en lugar de generar secuencias de *símbolos*, generen secuencias de *vectores* definidos en $\mathbb{R}^d$. Para ello basta asociar a cada estado no final una densidad condicional sobre $\mathbb{R}^d$. Así pues, estos modelos se definen mediante una cuádrupla (Q, π, A, D), donde Q, π y A son los usuales y D (que sustituye a la matriz de probabilidades de emisión de símbolos, B) representa ahora a las *densidades condicionales* $p(\mathbf{y} \mid q)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, $q \in Q - \{F\}$. La probabilidad con la que uno de estos modelos genera una secuencia de *vectores* $Y = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_m$ se calcula de forma similar al caso de modelos discretos, con la diferencia de que la probabilidad de emisión de cada vector $\mathbf{y}_t$ se obtienen mediante $p(\mathbf{y}_t \mid q_t)$, en vez de B_{q_t,y_t}.

Sea M uno de estos modelos definidos en $\mathbb{R}^1$ (recta real), con $Q = \{1, 2, F\}$, $\pi(1) = 1.0$, $\pi(2) = 0.0$,

A	1	2	F
1	0.0	1.0	0.0
2	0.5	0.2	0.3

$$p(\mathbf{y} \mid 1) = \begin{cases} 1/4 & -3 \le y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \qquad p(\mathbf{y} \mid 2) = \begin{cases} 1/5 & -1 \le y < 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Por ejemplo, M genera la secuencia $X = 0.0,\ 0.3,\ 0.0$ mediante una *única* secuencia de estados $z = 1, 2, 2, F$, con probabilidad no nula:

$$\begin{aligned} p(X \mid M) = p(X, z) = p(z)\cdot p(X \mid z) &= (\pi(1)\cdot A_{1,2}\cdot A_{2,2}\cdot A_{2,F}) \cdot (p(0.0 \mid 1)\cdot p(0.3 \mid 2)\cdot p(0.0 \mid 2)) \\ &= (1.0\cdot 1.0\cdot 0.2\cdot 0.3) \cdot (1/4\cdot 1/5\cdot 1/5) \\ &= 0.06 \cdot 0.01 = 0.0006 \end{aligned}$$

a) Encontrar dos secuencias de estados z', z'' que generen la secuencia $Y = 0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0$ con probabilidad no nula. ¿Hay más secuencias de estados que generen Y con probabilidad no nula?

   $z' = 1, 2, 1, 2, F$; $z'' = 1, 2, 2, 2, F$. Cualquier otra secuencia de estados tiene probabilidad nula de generar Y.

b) Calcular $p(Y \mid z')$, $p(Y \mid z'')$, $\tilde{p}(Y \mid M)$ y $p(Y \mid M)$ (las dos últimas son la aproximación de Viterbi y la verdadera probabilidad de generar Y mediante M).

   $p(z') = 1.0\cdot 1.0\cdot 0.5\cdot 1.0\cdot 0.3 = 0.15$; $p(z'') = 1.0\cdot 1.0\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.3 = 0.012$;
   $p(Y \mid z') = 1/4\cdot 1/5\cdot 1/4\cdot 1/5 = 0.0025$; $p(Y \mid z'') = 1/4\cdot 1/5\cdot 1/5\cdot 1/5 = 0.0020$;
   $\tilde{p}(Y \mid M) = \max(0.15\cdot 0.0025,\ 0.012\cdot 0.002) = 0.000375$
   $p(Y \mid M) = 0.15\cdot 0.0025 + 0.012\cdot 0.002 = 0.000399$.

c) Sea $Y' = -2.0, -0.5, 0.0, 0.5, 2.0$. ¿Cuántas secuencias de estados de M generan Y' con probabilidad no nula?

   Sólo hay tres secuencias de estados que pueden generar cadenas de longitud 5 (número de vectores de Y'): $z^1 = 1, 2, 1, 2, 2$, $z^2 = 1, 2, 2, 1, 2$, $z^3 = 1, 2, 2, 2, 2$, . Todas ellas generan Y' con probabilidad mayor que cero.

d) Calcular la aproximación de Viterbi a la probabilidad con la que M genera Y'.

   Podría utilizarse el algoritmo de Viterbi pero, dado que solo hay tres secuencias de estados, es preferible hacer el cálculo exhaustivo:

   $p(Y' \mid z^1) = 1.0\cdot 1.0\cdot 0.5\cdot 1.0\cdot 0.2\cdot 0.3 \cdot 1/4\cdot 1/5\cdot 1/4\cdot 1/5\cdot 1/5 = 0.03\cdot 0.0005 = 0.000015$
   $p(Y' \mid z^2) = 1.0\cdot 1.0\cdot 0.2\cdot 0.5\cdot 1.0\cdot 0.3 \cdot 1/4\cdot 1/5\cdot 1/5\cdot 1/4\cdot 1/5 = 0.03\cdot 0.0005 = 0.000015$
   $p(Y' \mid z^3) = 1.0\cdot 1.0\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.3 \cdot 1/4\cdot 1/5\cdot 1/5\cdot 1/5\cdot 1/5 = 0.0024\cdot 0.0004 = 0.00000096$
   $\tilde{p}(Y' \mid M) = \max(0.000015,\ 0.000015,\ 0.00000096) = 0.000015$

22. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{1, 2, 3, 4, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(1) = \pi_0(2) = \pi_0(4) = \frac{1}{3}$, $\pi_0(3) = \pi_0(F) = 0$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	1	2	3	4	F
1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
4	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

B	a	b
1	1	0
2	1	0
3	0	1
4	0	1

a) Sean n y m dos enteros positivos. Halla las probabilidades $P(a^n \mid M)$, $P(a^n\, b^m \mid M)$ y $P(b^n \mid M)$.

$$\begin{aligned} P(a^n \mid M) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2^n} \\ P(a^n\, b^m \mid M) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2^{n+m}} \\ P(b^n \mid M) &= \frac{1}{3}\frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

b) Calcula la probabilidad de que M genere una cadena cualquiera de longitud comprendida entre 5 y 7.

El conjunto de cadenas de longitud 7 que M puede generar es:

$$S_7 = \{a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7\}$$

Cada una de las 8 cadenas de S_7 se genera con probabilidad $\frac{1}{3}\frac{1}{2^7}$.

Análogamente:

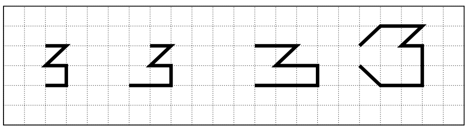
hay 7 cadenas de longitud 6 que se generan con probabilidad $\frac{1}{3}\frac{1}{2^6}$

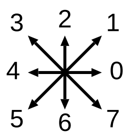
hay 6 cadenas de longitud 5 que se generan con probabilidad $\frac{1}{3}\frac{1}{2^5}$

Por tanto, si S es el conjunto de cadenas de longitudes comprendidas entre 5 y 7,

$$P(x \in S \mid M) = 8\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2^7} + 7\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2^6} + 6\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2^5} \approx\; 0.02083 + 0.03646 + 0.06250 \approx\; 0.11979$$

23. En la figura se pueden ver muestras generadas por un Modelo de Markov de 7 estados con topología lineal. Cada trazo elemental de estas muestras corresponde a un símbolo del *código de contorno de 8 direcciones* $\Sigma = \{$“0”, “1”, …, “8”$\}$, que también se puede ver en la figura.





Sea $\mathcal{M}_0$ un Modelo de Markov lineal de 7 estados $Q = \{1,2,3,4,5,6,7,F=8\}$, con los siguientes parámetros:

$$\pi_q \;=\; \begin{cases} 1/2 & \text{si } q \in \{1,2\} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$A_{q'q} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; q' = 1, q = 2 \\ 1/2 & \text{si } \; q \in \{q', q'+1\},\; 2 \le q' \le 5 \\ 1/3 & \text{si } \; q' = 6, q \ge 6 \\ 1 & \text{si } \; q' = 7, q = 8 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$$B_{q\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (q,\sigma) \in \{(1,\text{“1”}), (2,\text{“0”}), (3,\text{“5”}), (4,\text{“0”}), (5,\text{“6”}), (6,\text{“4”}), (7,\text{“3”})\} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Calcular la aproximación de Viterbi a la probabilidad con la que $\mathcal{M}_0$ genera cada una de las muestras de la figura.
Cadenas de entrenamiento: “0 5 0 6 4” , “0 5 0 6 4 4” , “0 0 5 0 0 6 4 4 4” , “1 0 0 5 0 6 6 4 4 3”.

HMM inicial $\mathcal{M}_0$:

q	1	2	3	4	5	6	7	8=F
π_q	1/2	1/2	0	0	0	0	0	–

$q'\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8=F
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1/2	1/2	0	0	0	0	0
3	0	0	1/2	1/2	0	0	0	0
4	0	0	0	1/2	1/2	0	0	0
5	0	0	0	0	1/2	1/2	0	0
6	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3
7	0	0	0	0	0	0	0	1

$q\backslash\sigma$	“0”	“1”	“2”	“3”	“4”	“5”	“6”	“7”
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0

Aproximación de Viterbi a la probabilidad con la que $\mathcal{M}_0$ genera las muestras: $0.01042, 0.00347, 0.00029, 0.00087$.

b) Calcular la verdadera probabilidad con la que $\mathcal{M}_0$ genera cada una de las muestras de la figura.
Las verdaderas probabilidades con la que $\mathcal{M}_0$ genera las muestras son las mismas que en el apartado a), ya que $\mathcal{M}_0$ es determinista.

c) Calcular la verosimilitud con la $\mathcal{M}_0$ genera todas las muestras.
Verosimilitud de todas las muestras: $9.1 \cdot 10^{-12}$.

d) Partiendo de $\mathcal{M}_0$, realizar una iteración del algoritmo de reestimación por Viterbi con estas muestras.
Secuencias de estados correspondientes a los cálculos de a):
$<2,3,4,5,6,F>$, $<2,3,4,5,6,6,F>$, $<2,2,3,4,4,5,6,6,6,F>$, $<1,2,2,3,4,5,5,6,6,7,F>$

HMM reestimado a partir de estas secuencias:

q	1	2	3	4	5	6	7	8=F
π_q	1/2	1/2	0	0	0	0	0	–

$q'\backslash q$	1	2	3	4	5	6	7	8=F
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1/3	2/3	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1/5	4/5	0	0	0
5	0	0	0	0	1/5	4/5	0	0
6	0	0	0	0	0	1/2	1/8	3/8
7	0	0	0	0	0	0	0	1

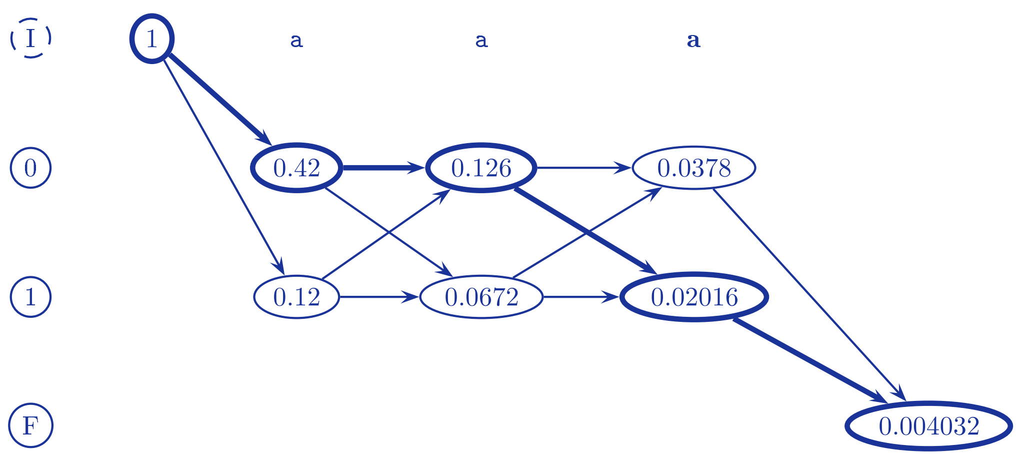
$q\backslash\sigma$	“0”	“1”	“2”	“3”	“4”	“5”	“6”	“7”
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0	0

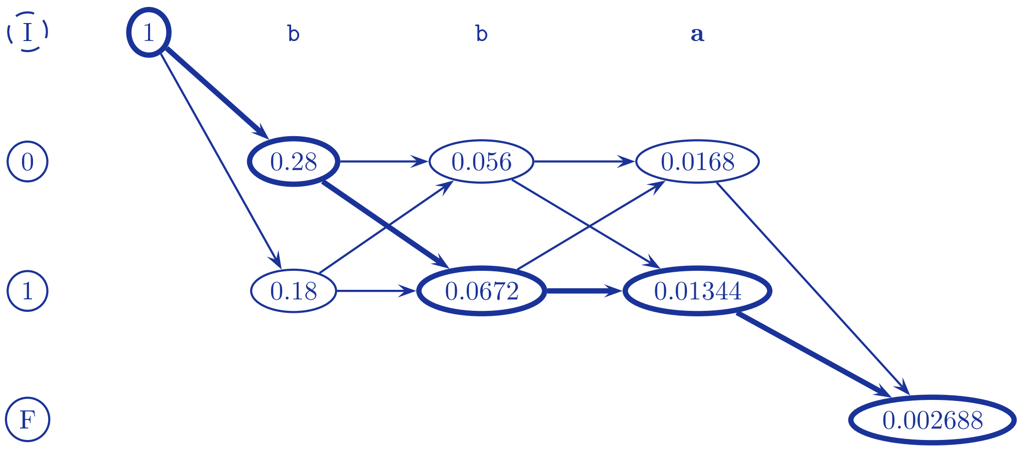
24. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$; probabilidades iniciales $\pi_0(0) = 0.7, \pi_0(1) = 0.3$; y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A	0	1	F
0	0.5	0.4	0.1
1	0.3	0.5	0.2

B	a	b
0	0.6	0.4
1	0.4	0.6

Reestima los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento “`a a a`” y “`b b a`”.
Primero determinamos la secuencia de estados mas probable para cada cadena mediante el algoritmo de Viterbi:





Los pares *cadena-secuencia óptima de estados* obtenidos son:

a a a	b b a
0 0 1 F	0 1 1 F

Los parámetros reestimados a partir de estos pares son:

$$\hat{\pi}_0(0) = \frac{2}{2} = 1$$
$$\hat{\pi}_0(1) = \frac{0}{2} = 0$$

A	0	1	F
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

B	a	b
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

25. A continuación se dan 4 cadenas generadas por un modelo de Markov, cada una junto a una posible secuencias de estados:

"a c c"	"c c a"	"c b b a"	"a b b c"
"0 1 2"	"3 4 5"	"3 4 4 5"	"0 1 1 2"

Usando probabilidades aproximadas por Viterbi cuando sea necesario:

a) Inicializa un modelo de markov $\mathcal{M}_0$ a partir de estos datos. Representa gráficamente $\mathcal{M}_0$.
$\mathcal{M}_0 = (Q\Sigma, \pi, A, B)$; $\quad Q = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\pi(0) = \pi(3) = 1/2$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_4 = \pi_5 = 0$,

A	0	1	2	3	4	5	F
0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1/3	2/3	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1/3	2/3	0
5	0	0	0	0	0	0	1

B	a	b	c
0	1	0	0
1	0	2/3	1/3
2	0	0	1
3	0	0	1
4	0	2/3	1/3
5	1	0	0

b) Obtén la versoimilitud con la que $\mathcal{M}_0$ genera las dos primeras cadenas ("a c c", "c c a").
$P(\text{“acc”}, \text{“cca”} \mid \mathcal{M}_0) \approx \tilde{P}(\text{“acc”} \mid \mathcal{M}_0) \cdot \tilde{P}(\text{“cca”} \mid \mathcal{M}_0) = 0.111111 \cdot 0.111111 = 0.012345679$

	a	c	c	
0	0.5	-	-	
1	-	0.166666	0.018518	
2	-	-	0.111111	
3	-	-	-	
4	-	-	-	
5	-	-	-	
z:	0	1	2	0.111111

	c	c	a	
0	-	-	-	
1	-	-	-	
2	-	-	-	
3	0.5	-	-	
4	-	0.166666	-	
5	-	-	0.111111	
z:	3	4	5	0.111111

c) Obtén la versoimilitud con la que las dos primeras cadenas ("a c c", "c c a") son generadas por un modelo $\mathcal{M}'$, definido como:
$Q' = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$; probabilidades iniciales $\pi'(0) = 4/5, \pi'_0(1) = 1/5$;
y probabilidades de transición entre estados y de emisión de símbolos:

A'	0	1	F
0	0	1/2	1/2
1	1/5	0	4/5

B'	a	b	c
0	1/5	1/5	3/5
1	3/5	1/5	1/5

$P(\text{"acc"}, \text{"cca"} \mid \mathcal{M}') \approx \tilde{P}(\text{"acc"} \mid \mathcal{M}') \cdot \tilde{P}(\text{"cca"} \mid \mathcal{M}') = 0.001152 \cdot 0.001152 = 0.000001327$

```
      a      c       c                      c      c       a
 0   0.16   0.0144  0.00192           0   0.48   0.0048  0.00192
 1   0.12   0.0160  0.00144           1   0.04   0.0480  0.00144
z:      1      0       1   0.001152  z:      1      0       1   0.001152
```

26. Sea M un modelo de Markov de conjunto de estados $Q = \{0, 1, F\}$; alfabeto $\Sigma = \{a\}$; probabilidades iniciales $\pi_0 = 0.6$, $\pi_1 = 0.4$; y probabilidades de transición entre estados:

A	0	1	F
0	0.0	0.3	0.7
1	0.7	0.0	0.3

a) Calcular la probabilidad con la que M genera la cadena "`a a`"
Como solo hay un símbolo, la probabilidad de generarlo en cualquier estado ha de ser 1.0.
Solo hay dos caminos que generan $x =$"`a a`": $z_1 =$`0,1,F` y $z_2 =$`1,0,F`. Por tanto, la probabilidad de generar x mediante M es:

$$\begin{aligned} P(x \mid M) &= P(x, z_1) + P(x, z_2) \\ &= P(z_1)P(x \mid z_1) + P(z_2)P(x \mid z_2) \\ &= P(z_1) \cdot 1 + P(z_2) \cdot 1 \\ &= 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \\ &= 0.054 + 0.196 \\ &= 0.25 \end{aligned}$$

b) Calcular la probabilidad aproximada por Viterbi con la que M genera la cadena "`a a a`". Presentar una traza de ejecución del algoritmo de Viterbi con la que se obtiene esta probabilidad.
Solo hay dos caminos que generan $y =$"`a a a`": $z_1 =$`0,1,0,F` y $z_2 =$`1,0,1,F`. En ambos caminos hay un bucle formado por los arcos "`0,1`" y `1,0`. Por tanto el camino de mayor probabilidad será aquél en el que la probabilidad inicial por la final sea mayor; es decir, $z =$ `0,1,0,F`:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(y \mid M) &= P(y, z) \\ &= P(z) \cdot 1 \\ &= 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \\ &= 0.0882 \end{aligned}$$

Mediante el algoritmo de Viterbi:

```
     a     a      a
0    0.6   0.28   0.126
1    0.4   0.18   0.084
F                        0.0882
z:   0     1      0      F
```

c) Obtener una expresión de la probabilidad aproximada por Viterbi con la que M genera una cadena de longitud *par* en función de dicha longitud, n.
Hacemos los cálculos para varias longitudes y generalizamos por inducción:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\mathrm{a}^2 \mid M) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \\ \tilde{P}(\mathrm{a}^4 \mid M) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot (0.3 \cdot 0.7)^1 \cdot 0.7 \\ \tilde{P}(\mathrm{a}^6 \mid M) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot (0.3 \cdot 0.7)^2 \cdot 0.7 \\ \tilde{P}(\mathrm{a}^8 \mid M) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot (0.3 \cdot 0.7)^3 \cdot 0.7 \\ \ldots & \quad \ldots \\ \tilde{P}(\mathrm{a}^n \mid M) &= 0.4 \cdot 0.7 \cdot (0.3 \cdot 0.7)^{(n/2-1)} \cdot 0.7 \\ &= 0.196 \cdot (0.3 \cdot 0.7)^{(n/2-1)} \end{aligned}$$

d) Reestimar los parámetros de M mediante *una* iteración de reestimación por Viterbi, a partir de las cadenas de entrenamiento "`a a`" y "`a a a`".
Las secuencias de estados óptimas para estas cadenas son `0,1,0,F` y `1,0,F`. Los correspondientes parámetros reestimados de M son: $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$, $B_{0,\text{"a"}} = B_{1,\text{"a"}} = 1$, y matriz de probabilidades de transición:

A	0	1	F
0	0	1/3	2/3
1	1	0	0

27. Se dispone del siguiente conjunto de cadenas de entrenamiento, Y, cada una de las cuales acompañada de la secuencia de estados con la que ha sido generada por $\mathcal{M}$ con mayor probabilidad (secuencia óptima de Viterbi):

```
cadenas:    a b b b a    a b b    b b b a    b b a
estados:    3 1 1 2 3    3 3 3    1 1 2 3    1 2 3
```

a) Usando estas cadenas y secuencias de estados, realiza una iteración del algoritmo de reestimación de Viterbi para obtener un modelo $\mathcal{M}$

El modelo $\mathcal{M}$ tiene tres estados además del estado final y un alfabeto de dos símbolos, $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$. Los restantes parámetros se estiman como:

$\pi_1 = \pi_3 = 1/2, \quad \pi_2 = \pi_F = 0$

A	1	2	3	F
1	2/5	3/5	0	0
2	0	0	1	0
3	1/7	0	2/7	4/7

B	a	b
1	0	1
2	0	1
3	5/7	2/7

b) Calcula la verosimilitud (aproximada por Viterbi) del conjunto de cadenas de entrenamiento con $\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}\tilde{P}(Y \mid \mathcal{M}) &= \tilde{P}(\text{abbba} \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(\text{abb} \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(\text{bbba} \mid \mathcal{M}) \cdot \tilde{P}(\text{bba} \mid \mathcal{M}) \\ &\approx 0.005 \cdot 0.00136 \cdot 0.049 \cdot 0.1225 \quad \approx \quad 0.000000041\end{aligned}$$

c) Calcula la verdadera probabilidad de genración de la cadena "`b b a`" y el error cometido por la aproximación de Viterbi.

Solo hay dos secuencias de estados que generan la cadena "`b b a`": `<1,2,3,F>` y `<3,3,3,F>`. Por tanto,

$$P(\text{“b b a”} \mid \mathcal{M}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot \frac{4}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{7} \approx 0.171 \cdot 0.714 + 0.023 \cdot 0.0583 \approx 0.124$$

El error de la aproximación de Viterbi es aproximadamente: $0.124 - 0.1225 = 0.0015$

28. Considera un problema de clasificación en dos clases U y V, con probabilidades a prioi $P(U) = 0.7, P(V) = 0.3$, representadas mediante modelos de Markov $\mathcal{M}_U, \mathcal{M}_V$, ambos definidos sobre el conjunto de primitivas $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$:

A_U	1	2	F
1	0.6	0.4	0
2	0	0.5	0.5

B_U	a	b
1	0.9	0.1
2	0.2	0.8

$\pi_{U1} = 0.8, \quad \pi_{U2} = 0.2$

A_V	1	2	F
1	0.4	0.6	0
2	0	0.5	0.5

B_V	a	b
1	0.9	0.1
2	0.2	0.8

$\pi_{V1} = 1, \quad \pi_{V2} = 0$

a) Calcula la aproximación por Viterbi a la probabilidad de que $\mathcal{M}_U$ genere la cadena "`aab`" y la correspondiente secuencia óptima de estados.

$\tilde{P}(\mathtt{aab} \mid \mathcal{M}_U) = 0.062208 \qquad \tilde{q}_1 = 1, \ \tilde{q}_2 = 1, \ \tilde{q}_3 = 2, \ \tilde{q}_4 = F \qquad$ (Ver respuesta al apartado b)

b) Calcula las verdaderas probabilidades de que $\mathcal{M}_U$ y $\mathcal{M}_V$ generen la cadena "`aab`".

$$\begin{aligned}P(\mathtt{aab} \mid \mathcal{M}_U) &= P(\mathtt{aab}, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 2 \mid \mathcal{M}_U) \\ &+ P(\mathtt{aab}, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 2 \mid \mathcal{M}_U) \\ &+ P(\mathtt{aab}, q_1 = 2, q_2 = 2, q_3 = 2 \mid \mathcal{M}_U) \\ &= (0.8 \cdot 0.9)\ (0.6 \cdot 0.9)\ (0.4 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (0.8 \cdot 0.9)\ (0.4 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (0.2 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &= 0.062208 + 0.0115200 + 0.0008 \\ &= 0.074528\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\mathtt{aab} \mid \mathcal{M}_V) &= P(\mathtt{aab}, q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 2 \mid \mathcal{M}_V) \\ &+ P(\mathtt{aab}, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 2 \mid \mathcal{M}_V) \\ &= (1 \cdot 0.9)\ (0.4 \cdot 0.9)\ (0.6 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &+ (1 \cdot 0.9)\ (0.6 \cdot 0.2)\ (0.5 \cdot 0.8)\ 0.5 \\ &= 0.07776 + 0.021600 \\ &= 0.09936\end{aligned}$$

c) Determina las probabilidades a posteriori de que la cadena "aab" pertenezca a las clases U y V.

$$P(\texttt{aab} \mid U)\, P(U) = 0.074528 \cdot 0.7 = 0.0521696$$
$$P(\texttt{aab} \mid V)\, P(V) = 0.09936 \cdot 0.3 = 0.029808$$

$$P(x) = P(\texttt{aab} \mid \mathcal{M}_U)\, P(U) + P(\texttt{aab} \mid \mathcal{M}_V)\, P(V) = 0.0521696 + 0.029808 \; = \; 0.0819776$$

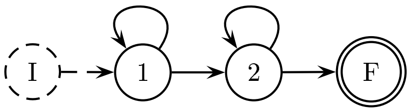
$$P(U \mid \texttt{aab}) = \frac{P(\texttt{aab} \mid U)\, P(U)}{P(x)} = \frac{0.0521696}{0.0819776} \;\approx\; 0.6364$$

$$P(V \mid \texttt{aab}) = \frac{P(\texttt{aab} \mid V)\, P(V)}{P(x)} = \frac{0.029808}{0.0819776} \;\approx\; 0.3636$$

d) Clasifica la cadena "aab" por mínima probabilidad de error.

$$c^*(\texttt{aab}) = \underset{c \in \{U,V\}}{\arg\max}\, P(c \mid \texttt{aab}) \;=\; U$$

29. (Exam January 18, 2013) Let M be a Markov model with states $Q = \{1, 2, F\}$, alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, and whose topology is:



and "aaabb" a training sample. Initialize the model with linear segmentation and obtain the final estimated Markov model.

SOLUTION:

Initial segmentation

a	a	a	b	b	
1	1	2	2	2	F

Initialization after the initial segmentation

π	1	2
	1	0

A	1	2	F
1	0.5	0.5	0
2	0	0.66	0.34

B	a	b
1	1	0
2	0.34	0.66

First iteration

Viterbi analysis

		a	a	a			
I	1						
1		1	0.5	0.25	0.0	0.0	
2		0	0.16	0.085	0.085	0.037	
F							0.012

Optimal sequence of states: 1 1 1 2 2

Re-estimation

π	1	2
	1	0

A	1	2	F
1	0.66	0.34	0
2	0	0.5	0.5

B	a	b
1	1	0
2	0	1

Second iteration

Viterbi analysis

		a	a	a			
I	1						
1		1	0.66	0.436	0.0	0.0	
2		0	0	0	0.148	0.07	
F							0.035

Optimal sequence of states: 1 1 2 2 2

Re-estimation

π	1	2
	1	0

A	1	2	F
1	0.66	0.34	0
2	0	0.5	0.5

B	a	b
1	1	0
2	0	1

End: the model has not changed

30. (Examen January 30th, 2013) Let's assume that we have three training strings to estimate the probability of a Markov model and that we get the following optimal sequences of states in a particular iteration of the Viterbi re-estimation algorithm.

a a a d d d c c c c a a a a a c c b
1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 2 2 2 4 4 4 4 4 F

a a d d c a b a b a a b c c c d c b b
1 1 2 2 2 4 4 4 4 4 2 2 2 2 2 1 1 1 1 F

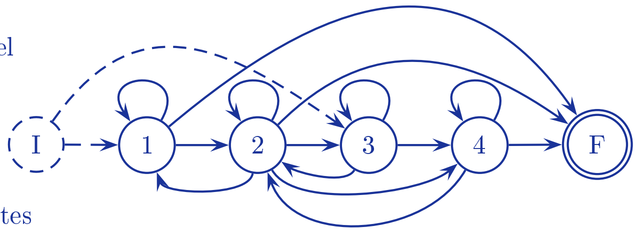
a a a a d c d c d a b a b a b c c c a a b
3 3 3 3 4 4 4 4 4 2 2 2 2 2 2 4 4 4 4 2 2 2 F

Considering these sequences of states, answer the following questions:

a) draw the topology of the Markov model (states and transitions with probability different from 0);
b) calculate the probabilities of the initial states;
c) calculate the probabilities of transitions between states; and
d) calculate the probabilities of emitting observable symbols.

SOLUTION:

a) Topology of the Markov model



b) Probabilities of the initial states

π	1	2	3	4
	2/3	0	1/3	0

c) Probabilities of transitions between states

#	1	2	3	4	F	Total
1	2+4+0=6	1+1+0=2			0+1+0=1	9
2	0+1+0=1	5+6+6=17	1+0+0=1	1+1+1=3	0+0+1=1	23
3		1+0+0=1	2+0+3=5	0+0+1=1		7
4		0+1+2=3		4+4+7=15	0+0+0=1	19

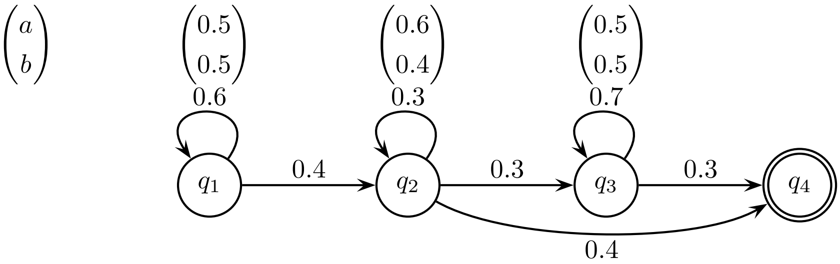
A	1	2	3	4	F
1	2/3	2/9	0	0	1/9
2	1/23	17/23	1/23	3/23	1/23
3	0	1/7	5/7	1/7	0
4	0	3/19	0	15/19	1/19

d) Probabilities of emitting observable symbols

#	a	b	c	d	Total
1	3+2+0=5	0+2+0=2	0+1+0=1	0+1+0=1	9
2	3+1+5=9	0+1+4=4	1+4+0=5	3+2+0=5	23
3	0+0+4=4	0+0+0=0	3+0+0=3	0+0+0=0	7
4	2+3+0=5	1+2+1=4	2+2+1=7	0+0+2=3	19

B	a	b	c	d
1	5/9	2/9	1/9	1/9
2	9/23	4/23	5/23	5/23
3	4/7	0	3/7	0
4	5/19	4/19	7/19	3/19

31. (Exam 30th January 2014) Given the following Markov model M

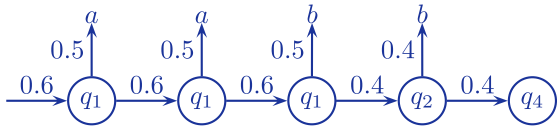


with $\pi_{q_1} = 0.6, \pi_{q_2} = 0.4, \pi_{q_3} = \pi_{q_4} = 0$ and the string $aabb$, answer the following questions:

a) Calculate the most probable sequence of states that generates $aabb$ by using Viterbi algorithm.

Solution

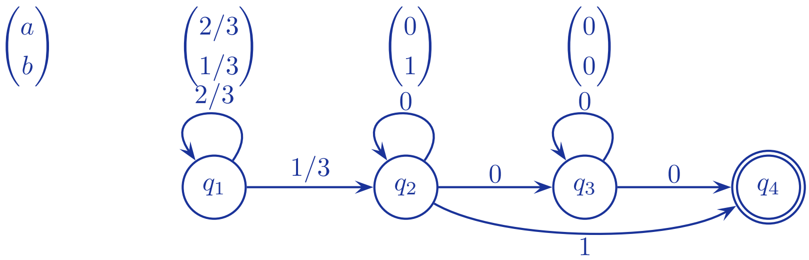
	a	a	b	b	
q_1	.30	.090	.0270	.00540	
q_2	.24	.072	.0144	.00432	
q_3		.036	.0126	.00441	
q_4					.001728



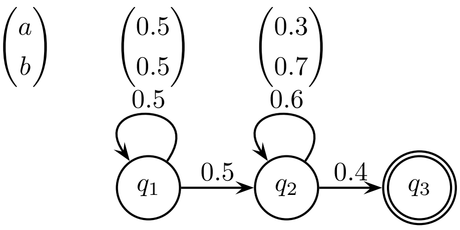
b) Using the results obtained in question a), apply one iteration of Viterbi re-estimation and draw the new Markov model along with its probabilities

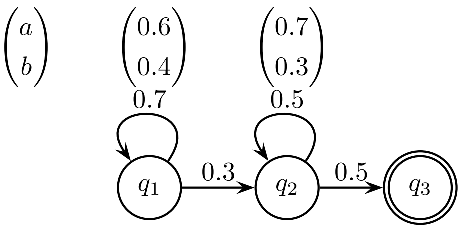
Solution

The initial probabilities are: $\pi_{q_1} = 1.0, \pi_{q_2} = \pi_{q_3} = \pi_{q_4} = 0$



32. (Exam 30th January 2014) We have two equiprobable classes, c_0 and c_1, for classifying strings. Strings have three symbols $x_0 x_1 x_2$, such that $x_0, x_1, x_2 \in \{a, b\}$. The figure below shows, on the left, the Markov model M_0 for class c_0, and, on the right, the Markov model M_1 for class c_1:





such that in both models $\pi_{q_1} = 1, \pi_{q_2} = \pi_{q_3} = 0$:

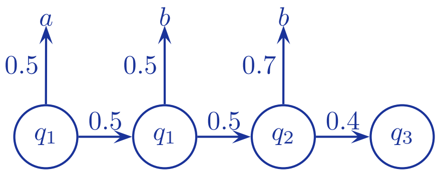
a) Calculate the probability that the string abb is generated with both models by using the *forward* algorithm.

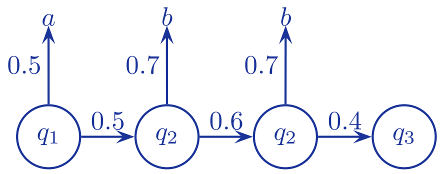
b) Indicate the class (model) that the string belongs to by calculating the maximum posterior probability (the probability that a string y belongs to a class c).

Solution

For the first model M_0, we have:

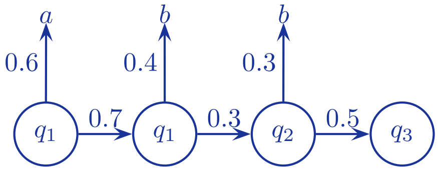
	a	b	b	
q_1	.5	.125	.03125	
q_2		.175	.11725	
q_4				.0469

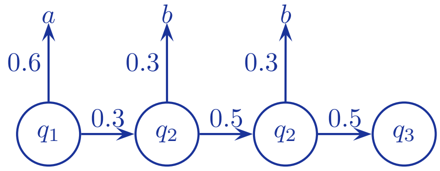




with a total probability $p(abb|M_0) = 0.0469$. For the second model M_1, we have:

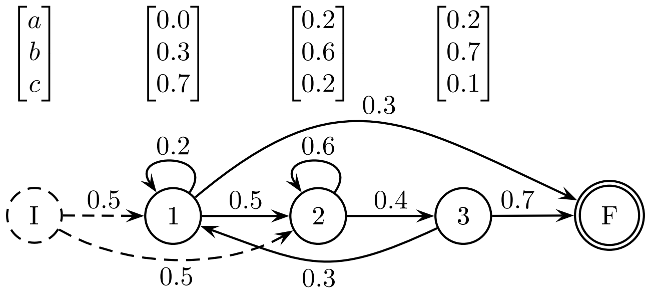
	a	b	b	
q_1	.6	.168	.04704	
q_2		.054	.02322	
q_4				.01161



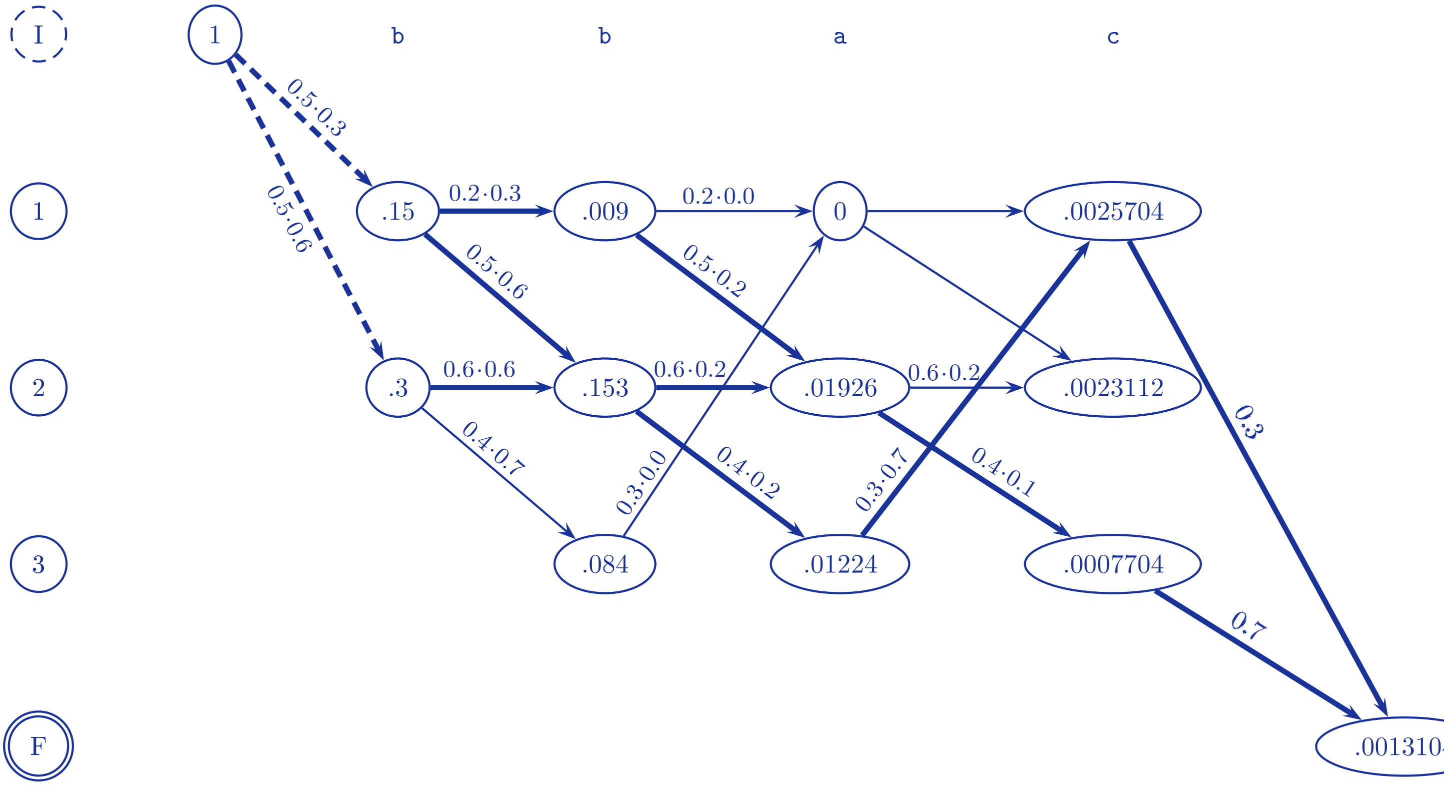


with total probability $p(abb|M_1) = 0.0116$. Consequently, the string would be classified under the class c_0.

33. (January 26, 2015) Let M be the Markov model:



Compute the exact probability that M generates the string *bbac*, $P(bbac|M)$, by using the *Forward* algorithm.



$$P_M(bbac) \;=\; 0.0013104$$

34. **(2 points)** (January 2016) Let M be a Markov model with states $Q = \{1, 2, F\}$; alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$; initial probabilities $\pi_1 = \frac{6}{10}, \pi_2 = \frac{4}{10}$; and transition and emission probabilities:

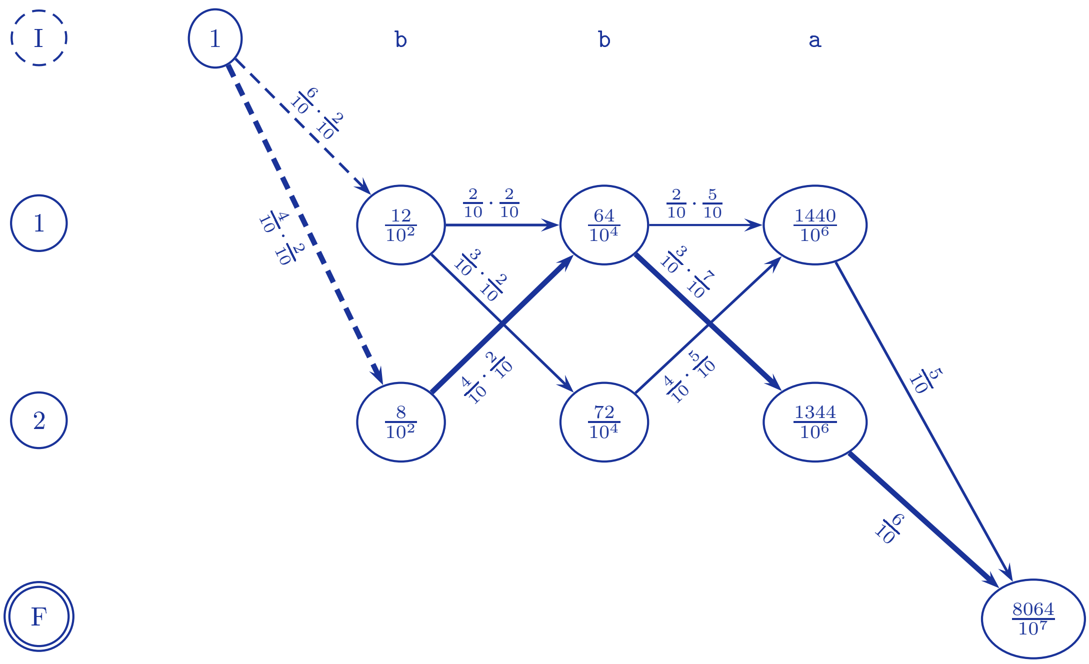
A	1	2	F
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
2	$\frac{4}{10}$	0	$\frac{6}{10}$

B	a	b	c
1	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

a) Apply the *Viterbi* algorithm in model M to obtain the most probable state sequence for the string "`bba`".

b) Calculate the model M' after ONE iteration of Viterbi re-estimation algorithm using the string in the previous question ("`bba`") and the strings "`ac`","`cacb`" and "`a`". For this calculation, use the following data: $\tilde{P}(ac \mid M) = P(ac, q_1q_2 = 21 \mid M)$ (i.e.; the optimal state sequence for "`ac`" is 21); $\tilde{P}(cacb \mid M) = P(cacb, q_1q_2q_3q_4 = 1212 \mid M)$ and $\tilde{P}(a \mid M) = P(ac, q_1 = 2 \mid M)$.

a)



$$\tilde{Q} = (2, 1, 2, F)$$

b)

$$\pi_1 = \frac{1}{4}, \pi_2 = \frac{3}{4}$$

A	1	2	F
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

B	a	b	c
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0