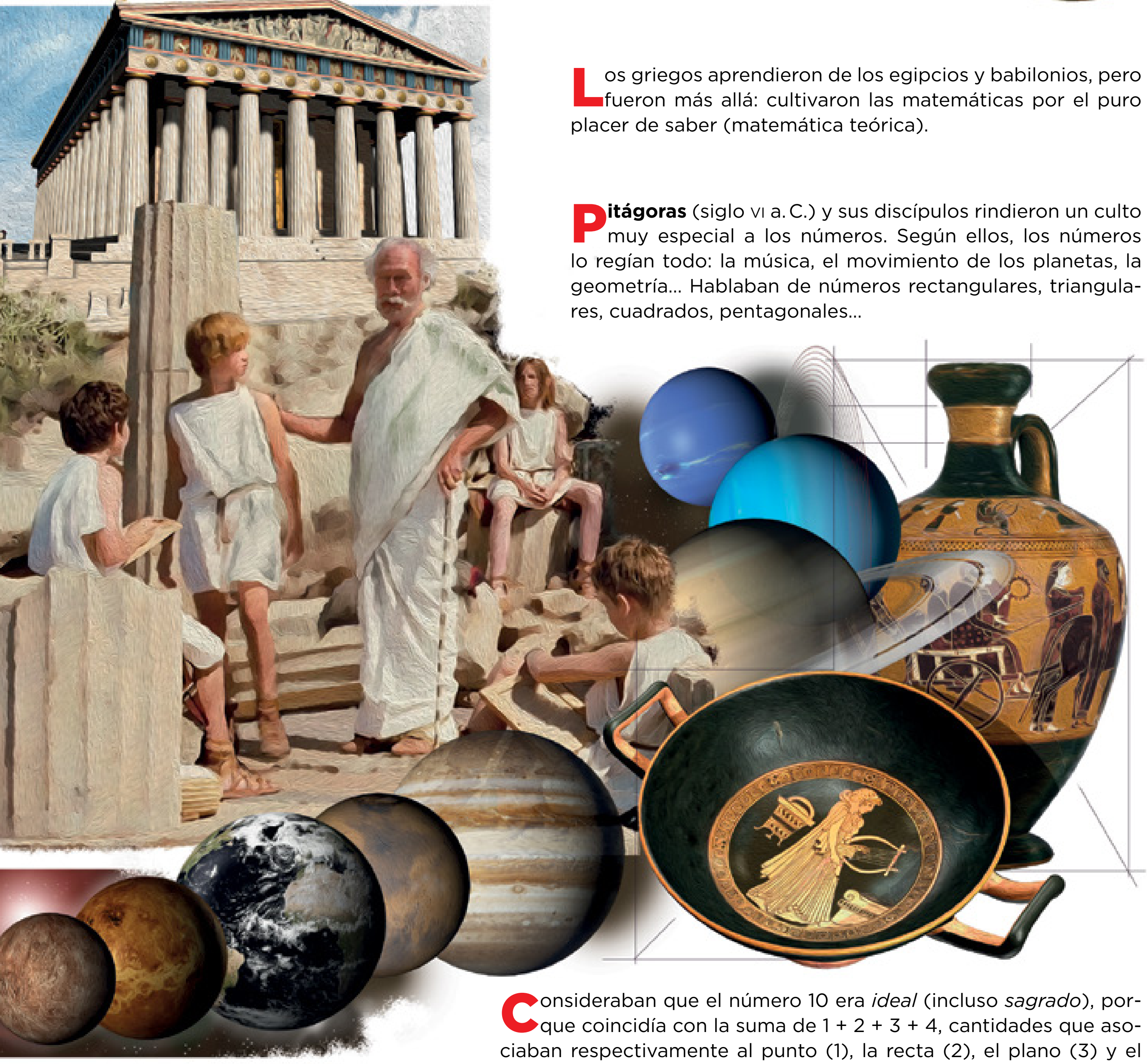
1 Los números naturales

Los conocimientos matemáticos de los antiguos egipcios y babilonios iban dirigidos a facilitar la actividad cotidiana: medida, comercio, construcción… (matemática práctica).



Los griegos aprendieron de los egipcios y babilonios, pero fueron más allá: cultivaron las matemáticas por el puro placer de saber (matemática teórica).

Pitágoras (siglo VI a. C.) y sus discípulos rindieron un culto muy especial a los números. Según ellos, los números lo regían todo: la música, el movimiento de los planetas, la geometría… Hablaban de números rectangulares, triangulares, cuadrados, pentagonales…

Consideraban que el número 10 era *ideal* (incluso *sagrado*), porque coincidía con la suma de 1 + 2 + 3 + 4, cantidades que asociaban respectivamente al punto (1), la recta (2), el plano (3) y el espacio (4).

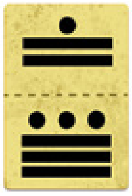
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

---

1 El conjunto de los números naturales

Numeración maya

Investiga las reglas y características del sistema de numeración maya.



Numeración MAYA

$20 \cdot (2 \times 5 + 1) + 1 \cdot (3 \times 5 + 3) =$
$= 220 + 18 = 238$

Numeración EGIPCIA

Numeración ROMANA

Numeración DECIMAL

Ten en cuenta

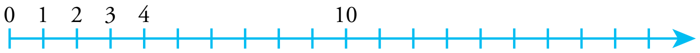
La adopción de 10 como base del sistema de numeración decimal se fundamenta en la forma primitiva de contar con los dedos de las manos.

Los números que usamos para contar objetos, uno a uno, se llaman **números naturales.**

El conjunto de los números naturales se designa por la letra $\mathbb{N}$, está ordenado y tiene principio, pero no tiene fin.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Los números naturales se representan, ordenados, en la recta numérica.



El Sistema de Numeración Decimal

Desde los albores de la civilización, las distintas culturas han ideado formas diversas de expresar los números naturales: son los sistemas de numeración.

Nosotros utilizamos habitualmente el Sistema de Numeración Decimal (S. N. D.) que fue inventado en la India y extendido hacia el Mediterráneo por los árabes, durante la expansión del mundo islámico, a partir del siglo VIII.

El S. N. D. es **posicional:** el valor de una cifra depende de la posición que ocupa.

DMM	UMM	CM	DM	UM	C	D	U
10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1
1	6	5	3	5	2	0	8

→ 5 000 unidades

→ 500 000 unidades

Y es **decimal,** porque diez unidades de cualquier orden hacen una unidad del orden inmediato superior.

$$1 \text{ CM} = 10 \text{ DM} = 100 \text{ UM} = 1\,000 \text{ C} = 10\,000 \text{ D} = 100\,000 \text{ U}$$

Ejemplo

La descomposición polinómica del número 16 535 208 es la siguiente:

$$16\,535\,208 = 1 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8$$

Piensa y practica

1. ¿Verdadero o falso?

a) Los números naturales solo se expresan con el S. N. D.

b) Si eliges un número natural, por grande que sea, siempre hay otro número natural mayor.

c) En el S. N. D., veinte centenas de millar son dos unidades de millón.

d) El sistema de numeración maya es, en parte, posicional.

2. Copia y completa la tabla.

44		111		1 502
	LXV		CMX	

3. ¿Qué número es?

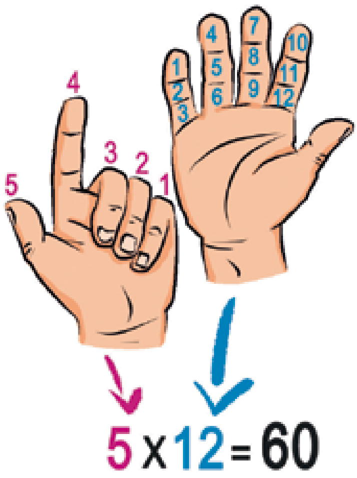
Escríbelo en numeración romana y en numeración maya.

4. ¿Qué número tiene esta descomposición polinómica?

$$2 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^7 + 8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

El sistema sexagesimal



De la misma forma que nosotros contamos de 10 en 10 (sistema decimal), otras culturas a lo largo de la historia han contado de 60 en 60 (sistema sexagesimal).

La adopción del 60 se basa, probablemente, en la forma de contar que utiliza las 12 falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de una mano recorridos con el pulgar como guía, mientras la cuenta del número de recorridos se llevaba con los dedos de la otra mano.

MEDIDA DEL TIEMPO Y DE LA AMPLITUD ANGULAR

En la actualidad, el sistema sexagesimal se utiliza en la medida del *tiempo* y en la medida de la *amplitud angular*. En estas magnitudes, cada unidad se divide en 60 unidades del orden inferior.

TIEMPO

$$\text{HORA} \xrightarrow{\times 60} \text{MINUTO} \xrightarrow{\times 60} \text{SEGUNDO}$$

HORA	MINUTO	SEGUNDO
h	min	s

AMPLITUD ANGULAR

$$\text{GRADO} \xrightarrow{\times 60} \text{MINUTO} \xrightarrow{\times 60} \text{SEGUNDO}$$

GRADO	MINUTO	SEGUNDO
°	'	"

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ h} = 60\text{ min}\\ 1\text{ min} = 60\text{ s}\end{array}\right\}\ 1\text{ h} = 60 \cdot 60 = 3\,600\text{ s} \qquad \left.\begin{array}{l}1° = 60'\\ 1' = 60''\end{array}\right\}\ 1° = 60 \cdot 60 = 3\,600''$$

Observa que las notaciones de los minutos y los segundos difieren de una magnitud a la otra.

EXPRESIONES COMPLEJAS E INCOMPLEJAS

Recuerda que la medida de las cantidades relativas a una magnitud se pueden expresar utilizando simultáneamente varias unidades (forma compleja) o una unidad única (forma incompleja).

FORMA COMPLEJA		FORMA INCOMPLEJA
1 h 15 min	→	75 min → 4 500 s
13° 12'	→	792' → 47 520"

Piensa y practica

5. Pasa a forma incompleja.

a) 3 h 20 min   b) 5 h 6 s

c) 9 h 1 min 1 s   d) 2° 52'

e) 4' 12"   f) 1° 11' 27"

6. Traduce a horas y minutos:

a) 86 min   b) 132 min   c) 250 min

7. Traduce a minutos y segundos:

a) 74"   b) 135"   c) 364"

8. Expresa en forma compleja.

a) 222 min   b) 422 s   c) 666 s

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Operaciones con números naturales

Operaciones combinadas

Recuerda la prioridad entre los paréntesis y las operaciones en las expresiones aritméticas.

- Primero, los paréntesis $\longrightarrow$ $3 \cdot (7 - 2) - 2^3 - (10 - 4) : \sqrt{9} =$
- A continuación, las potencias y raíces $\longrightarrow$ $= 3 \cdot 5 - 2^3 - 6 : \sqrt{9} =$
- Después, las multiplicaciones y divisiones $\rightarrow$ $= 3 \cdot 5 - 8 - 6 : 3 =$
- Por último, las sumas y restas $\longrightarrow$ $= 15 - 8 - 2 = 15 - 10 = 5$

Ejercicios resueltos

1. $\boldsymbol{8 + (9 \cdot 2 - 3) : \sqrt{25} - 4^2 : 2}$

$8 + (18 - 3) : \sqrt{25} - 4^2 : 2 = 8 + 15 : \sqrt{25} - 4^2 : 2 = 8 + 15 : 5 - 16 : 2 =$

$= 8 + 3 - 8 = 3$

2. $\boldsymbol{17 - 15 : [(10 - 6) \cdot 6 - 21] - 4 \cdot 2}$

$17 - 15 : [4 \cdot 6 - 21] - 4 \cdot 2 = 17 - 15 : [24 - 21] - 4 \cdot 2 =$

$= 17 - 15 : 3 - 4 \cdot 2 = 17 - 5 - 8 = 4$

3. $\boldsymbol{[9 - (6 \cdot 2) + 15] : \sqrt{9} + 3^3 : 3}$

$[9 - 12 + 15] : \sqrt{9} + 3^3 : 3 = 12 : \sqrt{9} + 3^3 : 3 =$

$= 12 : 3 + 27 : 3 = 4 + 9 = 13$

Piensa y practica

1. Resuelve en el orden en que aparecen.

a) $2 \cdot 7 - 3 \cdot 3$

b) $2 \cdot (15 - 8) - 3 \cdot (21 - 18)$

c) $2 \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) - 3 \cdot (7 \cdot 3 - 2 \cdot 9)$

d) $2 \cdot (15 - 2 \cdot \sqrt{16}) - 3 \cdot (7 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot 3^2)$

2. Resuelve y observa la influencia de los paréntesis.

a) $6 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + 8$

b) $6 \cdot 7 - 3 \cdot (2 + 8)$

c) $6 \cdot (7 - 3) \cdot 2 + 8$

d) $6 \cdot (7 - 3 \cdot 2) + 8$

e) $6 \cdot (7 - 3) \cdot (2 + 8)$

f) $6 \cdot (7 - 3 \cdot 2 + 8)$

3. Calcula.

a) $(52 - 34) : 9 + 42 : (39 - 32)$

b) $10 \cdot (2^3 - 2) - 2 \cdot 5^2 - 6^2 : 12$

c) $\left(5 + \sqrt{5 \cdot 8 + 3^2}\right) : 2$

d) $(3 - \sqrt{17 - 13})^2 + \sqrt{7 + (11 - 8)^2}$

4. En una prueba de 20 preguntas se califica con tres puntos cada respuesta acertada, se penaliza con dos puntos cada pregunta sin contestar y se resta un punto por cada respuesta errónea.

Observa lo que han hecho Jorge y Marta:

– Jorge ha acertado 13 preguntas y ha fallado 4, dejando el resto sin contestar.

– Marta ha contestado 18 preguntas, de las cuales ha fallado 2.

a) ¿Cuál de estas expresiones nos da la puntuación de Jorge?

$$\boxed{13 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - (20 - 13 + 4) \cdot 2}$$

$$\boxed{13 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - [20 - (13 + 4)] \cdot 2}$$

b) Escribe una expresión que nos dé la puntuación de Marta.

c) ¿Cuántos puntos ha obtenido cada uno?

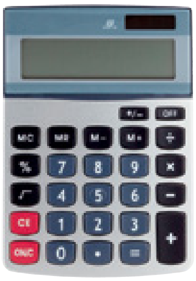
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

La prioridad de operaciones en la calculadora

Las calculadoras son buenas herramientas que ayudan en los cálculos rutinarios o tediosos. Pero para que sean útiles, has de conocerlas bien.

Entre las calculadoras que encontrarás en tu entorno hay dos tipos con funcionamiento diferente. Vamos a verlo calculando en una de cada tipo el valor de estas expresiones:

$\boxed{15 - 4 \cdot 2}$ $\qquad$ $\boxed{(15 - 4) \cdot 2}$



CALCULADORAS BÁSICAS O DE CUATRO OPERACIONES

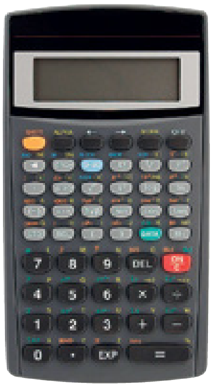
Son las que suele usar la mayoría de la gente en el día a día.

No disponen del uso de paréntesis. Las operaciones se realizan en el orden en que entran.

OPERACIÓN REALIZADA

$15 \boxed{-} 4 \boxed{\times} 2 \boxed{=} \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$

$15 \boxed{M+} 4 \boxed{\times} 2 \boxed{M-} \boxed{MR} \rightarrow \boxed{7.} \rightarrow 15 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$



CALCULADORAS CIENTÍFICAS

Son de diversa complejidad, según el modelo. Resultarán imprescindibles en cursos superiores y en cualquier trabajo científico.

Las operaciones se realizan guardando las prioridades que dicta la aritmética.

OPERACIÓN REALIZADA

$15 \boxed{-} 4 \boxed{\times} 2 \boxed{=} \rightarrow \boxed{7.} \rightarrow 15 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$

$15 \boxed{-} 4 \boxed{=} \boxed{\times} 2 \boxed{=} \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$

O bien, utilizando las teclas de paréntesis:

$\boxed{(} 15 \boxed{-} 4 \boxed{)} \boxed{\times} 2 \boxed{=} \rightarrow \boxed{22.} \rightarrow (15 - 4) \times 2 = 11 \times 2 = 22$

Observa la primera operación realizada con cada una de las calculadoras: el resultado es diferente para la misma secuencia de teclas.

Piensa y practica

5. Escribe y calcula la expresión aritmética que corresponde a cada una de estas entradas, según se realicen en una calculadora básica o en una científica.

a) $11 \boxed{+} 2 \boxed{\times} 3 \boxed{=}$

b) $48 \boxed{\div} 8 \boxed{+} 7 \boxed{\times} 4 \boxed{=}$

c) $21 \boxed{\times} 7 \boxed{+} 9 \boxed{\div} 3 \boxed{=}$

d) $78 \boxed{+} 36 \boxed{\div} 6 \boxed{-} 19 \boxed{=}$

6. Practica con tu calculadora científica y comprueba que obtienes las soluciones indicadas.

a) 3 232 – 36 · 87 = 100

b) 27 · 14 – 1 368 : 38 = 342

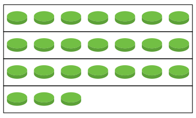
c) (1 408 – 736) : 56 = 12

d) 754 – (186 + 397) = 171

e) 6 525 : 25 + (294 + 7 · 12) = 639

3 La relación de divisibilidad

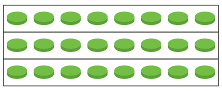
Divisibilidad



$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array}$$

(NO EXACTA)

24 **no es divisible** entre 7



$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

(EXACTA)

24 **es divisible** entre 8

Múltiplos de 12

12 · 1 = 12

12 · 2 = 24

12 · 3 = 36

12 · 4 = 48

En la web

Refuerza los conceptos de múltiplo y divisor.

En la web

Encuentra múltiplos y divisores de un número.

Múltiplos y divisores

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando su cociente es exacto.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 60 & 20 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \rightarrow \text{60 es divisible entre 20.} \begin{cases} \text{60 es múltiplo de 20.} \\ \text{20 es divisor de 60.} \end{cases}$$

Si la división $a : b$ es exacta → a es **múltiplo** de b. → b es **divisor** de a.

Los múltiplos y los divisores de un número

- Los múltiplos de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

Ejemplo

Calculamos los primeros múltiplos de 12:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \cdot 12 & 2 \cdot 12 & 3 \cdot 12 & 4 \cdot 12 & 5 \cdot 12 & 6 \cdot 12 & 7 \cdot 12 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 60 & 72 & 84 & \dots \end{array}$$

- Un número tiene infinitos múltiplos.
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. } → $a \cdot 1 = a$ → a es múltiplo de 1. → a es múltiplo de a.

- Los divisores de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

Ejemplo

Calculamos los divisores de 12:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{r|l} 12 & 1 \\ \cline{2-2} 00 & 12 \end{array} & \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} & \begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array} \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \begin{array}{r|l} 12 & 12 \\ \cline{2-2} 00 & 1 \end{array} & \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} & \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \end{array}$$

Los divisores de 12 son: 1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 12

Observa que van emparejados.

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

Una propiedad de los múltiplos de un número

Observa que al sumar dos múltiplos de 12, se obtiene otro múltiplo de 12.

$$36 + 60 = 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 12 \cdot (3 + 5) = 12 \cdot 8 = 96$$

- La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a.

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$$

- Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a.

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son una serie de reglas prácticas que permiten descubrir con rapidez si un número es múltiplo de 2, 3, 5 o de otros números sencillos.

Ten en cuenta

Un número es múltiplo de 2 cuando es par.

DIVISIBILIDAD POR 2

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 2 más la cifra de las unidades:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\text{NÚMERO}}}}{128} = \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\text{MÚLTIPLO DE 2}}}}{\boxed{120}} + \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\text{CIFRA UNIDADES}}}}{8}$$

Y según la propiedad que hemos visto arriba, para que el número sea múltiplo de 2, ha de serlo la cifra de las unidades.

- Un número es **múltiplo de 2** cuando termina en 0, 2, 4, 6 u 8.

DIVISIBILIDAD POR 5 Y POR 10

Siguiendo razonamientos similares al anterior, se demuestra que:

- Un número es **múltiplo de 5** si termina en 0 o en 5.
- Un número es **múltiplo de 10** si termina en 0.

Ten en cuenta

Un número formado por nueves es múltiplo de 3 y de 9.

$$9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$$
$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 33$$
$$999 = 9 \cdot 111 = 3 \cdot 333$$

DIVISIBILIDAD POR 3 Y POR 9

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras:

$$342 = \left\{ \begin{array}{r|c|l} 300 = & 99 + 99 + 99 & + 3 \\ 40 = & 9 + 9 + 9 + 9 & + 4 \\ 2 = & & \ \ 2 \end{array} \right\} = \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\text{MÚLTIPLO DE 3}}}}{(3 \cdot 99 + 4 \cdot 9)} + \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{\text{SUMA DE LAS CIFRAS}}}}{(3 + 4 + 2)}$$

El primer sumando es múltiplo de 3. Para que el número sea múltiplo de 3, también ha de serlo el segundo sumando.

Y el mismo razonamiento sirve para los múltiplos de 9.

- Un número es **múltiplo de 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es **múltiplo de 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ten en cuenta

1 000 = 1 001 – 1
2 000 = 2 002 – 2
3 000 = 3 003 – 3
… … … … …

100 = 99 + 1
200 = 198 + 2
300 = 297 + 3
… … … … …

10 = 11 – 1
20 = 22 – 2
30 = 33 – 3
… … … … …

Todos los números de los recuadros son múltiplos de 11. Compruébalo.

En la web

Practica los criterios de divisibilidad.

■ DIVISIBILIDAD POR 11

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 11 más el resultado de sumar y restar, alternativamente, sus cifras.

$$649 = \left\{\begin{array}{l} 600 = 594 + 6 \\ \;\,40 = \;\;44 - 4 \\ \;\;\;9 = \qquad\;\; 9 \end{array}\right\} = \underset{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE 11}}}{\underset{\downarrow}{(594 + 44)}} + \underset{\boxed{\text{SUMA Y RESTA ALTERNADA DE LAS CIFRAS}}}{\underset{\downarrow}{(6 - 4 + 9)}}$$

El primer sumando es múltiplo de 11. Para que el número sea múltiplo de 11, también ha de serlo el segundo sumando.

> Un número es **múltiplo de 11** si lo es el resultado de sumar y restar alternativamente sus cifras. Es decir, un número es múltiplo de 11 si la suma de las cifras de lugar impar, menos la suma de las cifras de lugar par (o viceversa), es múltiplo de 11.

Ejemplos

561
5 + 1 – 6 = 0
Es múltiplo de 11.

1738
7 + 8 – 1 – 3 = 11
Es múltiplo de 11.

4263
4 + 6 – 2 – 3 = 5
No es múltiplo de 11.

Piensa y practica

1. Calcula y contesta.

a) ¿Es 173 múltiplo de 19? ¿Y 228?

b) ¿Es 516 múltiplo de 43? ¿Y 743?

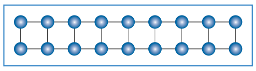
2. Escribe:

a) Los cinco primeros múltiplos de 20.

b) Todos los divisores de 20.

3. Dibuja todas las formas de representar 18 como número rectangular.

18 = 2 · 9



¿Qué relación tienen con los divisores de 18?

4. Escribe todos los divisores del número 70.

Emparéjalos de forma que los productos de los distintos pares sean iguales.

5. Busca:

a) Todos los múltiplos de 7 comprendidos entre 100 y 150.

b) El primer múltiplo de 13 después de 1 000.

6. Copia estos números y sigue las instrucciones.

14 - 21 - 24 - 36 - 40 - 57 - 75 - 96

111 - 180 - 241 - 255 - 308 - 354 - 420

a) Rodea los múltiplos de 2.

b) Tacha los múltiplos de 3.

c) ¿Cuáles son múltiplos de 6?

7. ¿Cuáles de los números del ejercicio anterior son múltiplos de 9? ¿Y de 10?

8. Selecciona, entre estos números, los múltiplos de 11.

286 611 913 1 804 2 444 3 333

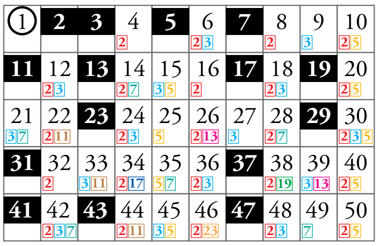
En la web Resuelve los problemas: "Los collares", "Las estanterías".

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Números primos y compuestos

Criba de Eratóstenes

En una tabla de números naturales, por ejemplo hasta 50, se suprimen: los múltiplos de 2, excepto el 2; los de 3, excepto el 3; los de 5, excepto el 5…



①	**2**	**3**	4 2	**5**	6 2 3	**7**	8 2	9 3	10 2 5
11	12 2 3	**13**	14 2 7	15 3 5	16 2	**17**	18 2 3	**19**	20 2 5
21 3 7	22 2 11	**23**	24 2 3	25 5	26 2 13	27 3	28 2 7	**29**	30 2 3 5
31	32 2	33 3 11	34 2 17	35 5 7	36 2 3	**37**	38 2 19	39 3 13	40 2 5
41	42 2 3 7	**43**	44 2 11	45 3 5	46 2 23	**47**	48 2 3	49 7	50 2 5

Los números que quedan, salvo el 1, son los números primos.

NOTA: El 1 no se considera primo, porque no tiene dos divisores.

En la web

Clasifica en primos y compuestos.

- Los divisores de un número permiten su descomposición en forma de producto de dos o más factores.

  Por ejemplo, los divisores de 40 son: 1 - 2 - 4 - 5 - 8 - 10 - 20 - 40

  $$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

  Los números que, como el 40, se pueden descomponer en factores más simples se llaman *números compuestos.*

- Sin embargo, otros números, como el 13, solo tienen dos divisores, 13 y 1, y, por tanto, no se pueden descomponer en forma de producto:

  $$13 = 13 \cdot 1 \;\rightarrow\; \text{no se puede descomponer}$$

  Los números que, como el 13, no se pueden descomponer en factores se llaman *números primos.*

- Un número que no se puede descomponer en factores es un **número primo.**
- Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Los números que no son primos se llaman **compuestos.**

Estos son los números primos menores que 100:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Descomposición de un número en factores primos

El mayor nivel de descomposición factorial de un número se alcanza cuando todos los factores son primos.

Para descomponer un número en factores primos, conviene actuar ordenadamente. Observa cómo descomponemos el número 594:

594 : 2 = 297	594	2	
297 : 3 = 99	297	3	
99 : 3 = 33	99	3	$594 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 =$
33 : 3 = 11	33	3	$= 2 \cdot 3^3 \cdot 11$
11 : 11 = 1	11	11	
	1		

Para **descomponer un número en factores primos (factorizar),** lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, … y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

Recuerda

Para descomponer un número en factores primos, ten en cuenta los criterios de divisibilidad.

Divisible por 2 →	594	2
→	297	3
Divisible por 3 →	99	3
→	33	3
Divisible por 11 →	11	11
	1	

En la web

Recuerda cómo hay que descomponer un número en sus factores primos.

En la web

Practica la descomposición de un número en factores primos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores primos

Para facilitar la comprensión del resto de la unidad, conviene que nos paremos a reflexionar sobre la estructura de los múltiplos y los divisores de un número que se presenta descompuesto en factores primos.

Tomemos, por ejemplo, el número 150 descompuesto en factores primos:

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

- Los múltiplos de 150 se obtienen multiplicando 150 por un número:

$$\left.\begin{array}{l} 300 = 150 \cdot 2 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 2 \\ 450 = 150 \cdot 3 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 3 \\ 600 = 150 \cdot 4 = \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 2 \cdot 2 \\ \qquad \ldots \end{array}\right\}$$

Un múltiplo de 150 contiene *todos* los factores primos de 150.

Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

Observa

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$180 = \overset{36}{\boxed{2^2 \cdot 3^2}} \cdot 5$$

- 180 es múltiplo de 36.
- 36 es divisor de 180.

- Los divisores de 150 son, aparte de él mismo y de la unidad:

$$\left.\begin{array}{l} 150 = 2 \cdot 75 = \boxed{2} \cdot \boxed{3 \cdot 5 \cdot 5} \\ 150 = 3 \cdot 50 = \boxed{3} \cdot \boxed{2 \cdot 5 \cdot 5} \\ 150 = 5 \cdot 30 = \boxed{5} \cdot \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5} \\ 150 = 6 \cdot 25 = \boxed{2 \cdot 3} \cdot \boxed{5 \cdot 5} \\ 150 = 10 \cdot 15 = \boxed{2 \cdot 5} \cdot \boxed{3 \cdot 5} \end{array}\right\}$$

Un divisor de 150 se construye con *algunos* de los factores primos de 150.

Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

En la web

Encuentra los divisores de un número.

Piensa y practica

1. Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos.

29	39	57	83	91
101	111	113	243	341

2. Descompón en dos factores los siguientes números.

93 95 153 168 325 533 663

3. Copia y completa los procesos de descomposición factorial.

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ \square\,\square\,\square & 3 \\ \square\,\square & 7 \\ \square & 7 \\ \square & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 495 & \square \\ 165 & \square \\ 55 & \square \\ 11 & \square\,\square \\ 1 & \end{array}$$

$$294 = \square \cdot \square \cdot \square^2$$

$$495 = \square^2 \cdot \square \cdot \square\square$$

4. Descompón estos números en factores primos.

a) 84 b) 130 c) 160 d) 594

e) 720 f) 975 g) 2 340 h) 5 220

5. Descompón en forma de producto el número 210 de ocho formas diferentes.

6. Escribe factorizados sin hacer ninguna operación:

a) Tres múltiplos de $12 = 2^2 \cdot 3$.

b) Todos los divisores de $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

7. Teniendo en cuenta que $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $n = 2^3 \cdot 3$, escribe:

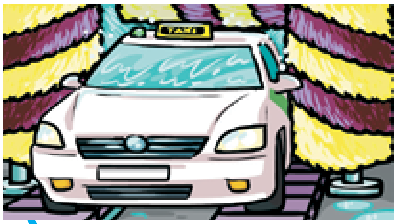
a) Tres múltiplos comunes de m y n.

b) Tres divisores comunes de m y n.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Mínimo común múltiplo de dos números

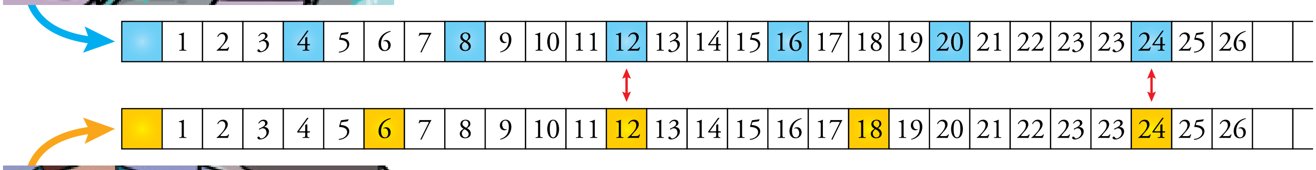
La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:



Ejemplo

En una compañía de taxis, tienen por norma lavar los coches cada cuatro días y revisar el nivel de aceite cada 6 días.

¿Cada cuántos días coinciden en un coche ambas tareas de mantenimiento?



Ambas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

$$12 \xrightarrow{+12} 24 \xrightarrow{+12} 36 \xrightarrow{+12} 48 \xrightarrow{+12} \dots$$

El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

> El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a*, *b*, *c*, … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:
>
> mín.c.m. (*a*, *b*, *c*, …)

Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4 → 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24

múltiplos de 6 → 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36

múltiplos comunes → 12 - 24 - 36 - 48

mín.c.m. (4, 6) = 12

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 …

Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 …

Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …

El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. → mín.c.m. (10, 15) = 30

Cálculo del mínimo común múltiplo (método óptimo)

El método anterior resulta apropiado para números sencillos, pero se complica demasiado con números mayores.

Observa una nueva forma de calcular el mínimo común múltiplo con los números descompuestos en factores primos.

Ejemplo

Calcular mín.c.m. (20, 30).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2\\ 10 & 2\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \quad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del mín.c.m.

  Recordando que el mín.c.m. ha de ser múltiplo de 20 y de 30, y lo más pequeño posible, hemos de tomar:

  — Todos los factores primos de 20.
  — Todos los factores primos de 30.
  — El mínimo número de factores que sea posible.

  20
  2 · 2 · 5
  mín.c.m. (20, 30) = 2 · 2 · 3 · 5
  2 · 3 · 5
  30

  Comprueba que todos los factores escogidos son imprescindibles, pues si se suprime cualquiera de ellos, deja de ser múltiplo de alguno de los números.

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el mín.c.m.

  mín.c.m. (20, 30) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Problema resuelto

Un distribuidor de electrodomésticos desea cargar dos palés, uno con lavavajillas de 45 kg y otro con frigoríficos de 40 kg, de forma que ambos pesen lo mismo y lo menos posible. ¿Cuánto pesará cada palé?

La carga de un palé será un múltiplo común de 45 kg y de 40 kg, y además el más pequeño posible, es decir, su mínimo común múltiplo.

$$\text{mín.c.m. } (45, 40) = 360 \text{ kg} \begin{cases} 360 : 45 = 8 \text{ lavavajillas} \\ 360 : 40 = 9 \text{ frigoríficos} \end{cases}$$

Solución: Cada palé pesará 360 kilos, uno con 8 lavavajillas y el otro con 9 frigoríficos.

Método artesanal

múltiplos de 20 → 20 - 40 - 60 - 80 …
múltiplos de 30 → 30 - 60 - 90 - 120 …

mín.c.m. (20, 30) = 60

En la web

Calcula el mín.c.m. de dos números.

Ten en cuenta

Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el mín.c.m. es el mayor.

Ejemplo: mín.c.m. (15, 30) = 30

Compruébalo.

15 = 3 · 5 30 = 2 · 3 · 5

15
3 · 5
mín.c.m. (15, 30) = 2 · 3 · 5 = 30
2 · 3 · 5
30

Cálculo del mín.c.m. (45, 40)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3\\ 15 & 3\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2\\ 20 & 2\\ 10 & 2\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}$$

mín.c.m. (45, 40) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Copia, observa y completa a simple vista.

a) $\dot{6} \rightarrow$ 6 12 18 24 30 36 42 48 54 …

$\dot{8} \rightarrow$ 8 16 24 32 40 48 56 …

mín.c.m. (6, 8) = ☐

b) $\dot{9} \rightarrow$ 9 18 27 36 45 54 63 72 …

$\dot{12} \rightarrow$ 12 24 36 48 60 72 84 …

mín.c.m. (9, 12) = ☐

c) $\dot{15} \rightarrow$ 15 30 45 60 75 90 105 …

$\dot{25} \rightarrow$ 25 50 75 100 125 150 …

mín.c.m. (15, 25) = ☐

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

a) mín.c.m. (5, 8) b) mín.c.m. (8, 12)

c) mín.c.m. (12, 24) d) mín.c.m. (30, 40)

e) mín.c.m. (50, 75) f) mín.c.m. (200, 300)

3. Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (6, 9) b) mín.c.m. (6, 12)

c) mín.c.m. (5, 10) d) mín.c.m. (15, 20)

4. Observa, completa en tu cuaderno y calcula.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & \square \\ 20 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = \dots \\ 54 = \dots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{mín.c.m.}\,(30, 40) = \dots \\ \text{mín.c.m.}\,(40, 54) = \dots \end{array}$$

5. Calcula mín.c.m. (a, b) por el método óptimo:

a) $a = 2 \cdot 11$ b) $a = 2^4 \cdot 5$ c) $a = 5^2 \cdot 7$

$b = 3 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 5^2$ $b = 5 \cdot 7^2$

d) $a = 2^4 \cdot 3^2$ e) $a = 2 \cdot 5 \cdot 11$ f) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $b = 3 \cdot 5 \cdot 11$ $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

6. Calcula.

a) mín.c.m. (20, 25) b) mín.c.m. (28, 35)

c) mín.c.m. (35, 40) d) mín.c.m. (36, 54)

e) mín.c.m. (42, 63) f) mín.c.m. (72, 108)

g) mín.c.m. (99, 165) h) mín.c.m. (216, 288)

7. Calcula mín.c.m. (a, b) en cada caso. ¿Qué observas?:

a) $a = 4$ b) $a = 5$ c) $a = 4$ d) $a = 6$

$b = 8$ $b = 10$ $b = 12$ $b = 18$

8. ¿Verdadero o falso?

a) El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.

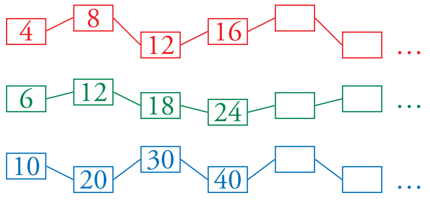
b) El mín.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.

c) mín.c.m $(1, k) = k$

d) Si a es múltiplo de b, mín.c.m. $(a, b) = a$.

e) El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.

9. Julio cuenta de cuatro en cuatro; Adela, de seis en seis, y Virginia, de diez en diez. ¿Cuáles son los tres primeros números en los que coinciden?

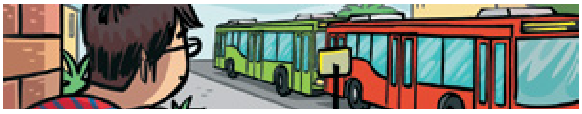


10. Victoria tiene fichas de colores que puede apilar en montones de 8 y, también, en montones de 10 sin que sobre ninguna. Explica cuántas fichas puede tener Victoria y justifica tu respuesta.

11. Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuándo volverán a coincidir?

12. Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?

13. El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos. Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?



En la web Resuelve los problemas: “Las balizas”, “Los coches”.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Máximo común divisor de dos números

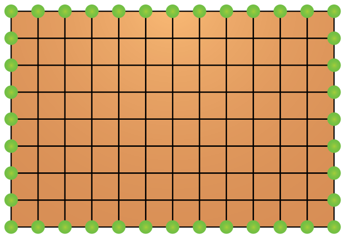
También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

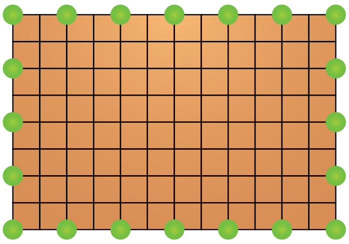
Se van a colocar maceteros, a intervalos iguales, en las esquinas y bordes de un patio interior de 8 × 12 metros.

¿A qué distancia se debe colocar un macetero del siguiente?

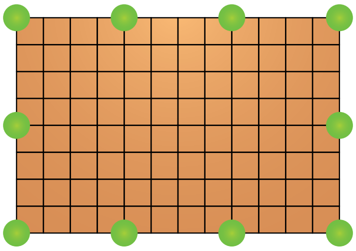
Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:



A 1 metro de distancia.



A 2 metros de distancia.



A 4 metros de distancia.

Cálculo del máx.c.d. (8, 12)

divisores de 8 → ①-②-④- 8

divisores de 12 → ①-②- 3 -④- 6 - 12

divisores comunes } → 1 - 2 - 4

máx.c.d. (8, 12) = 4

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

1 - 2 - 4

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

> El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, … se llama **máximo común divisor,** y se expresa así:
>
> máx.c.d. (a, b, c, …)

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30)

Divisores de 20 → ① ② 4 ⑤ ⑩ 20

Divisores de 30 → ① ② 3 ⑤ 6 ⑩ 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Cálculo del máximo común divisor (método óptimo)

El método que has aprendido en la página anterior resulta adecuado para números sencillos.

En casos más complicados, resulta mucho más cómodo utilizar la descomposición en factores, como se muestra a continuación.

Ejemplo

Calcular máx.c.d. (40, 60).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 40 = 2^3 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del máx.c.d.

  Recordando que el máx.c.d. ha de ser divisor de 40 y de 60, y lo más grande posible, hemos de tomar:

  — Los factores comunes de 40 y 60.

  — Ningún factor no común.

  — El máximo número de factores que sea posible.

$$40 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2 \cdot \boxed{5}$$
$$60 = \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 3 \cdot \boxed{5}$$
$$\text{máx.c.d. } (40, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el máx.c.d.

  máx.c.d. (40, 60) = 2 · 2 · 5 = 20

Para calcular el máximo común divisor de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Problema resuelto

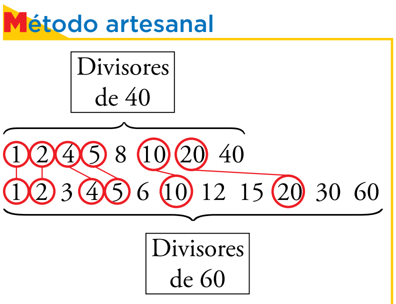
En un almacén quieren envasar, para su distribución, 200 kilos de manzanas y 260 kilos de naranjas en cajones del mismo peso y de la mayor carga que sea posible. ¿Cuántos kilos deben poner en cada cajón?

El peso de un cajón debe ser un divisor común de 200 y 260, y además el mayor posible, es decir, su máximo común divisor.

$$\text{máx.c.d. } (200, 260) = 20 \text{ kg} \begin{cases} 200 : 20 = 10 \text{ cajones de manzanas} \\ 260 : 20 = 13 \text{ cajones de naranjas} \end{cases}$$

Solución: Cada cajón pesará 20 kilos y llenarán 10 cajones de manzanas y 13 de naranjas.

Método artesanal



máx.c.d. (40, 60) = 20

En la web

Calcula el máx.c.d. de dos números.

Ten en cuenta

Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el máx.c.d. es el menor.

Ejemplo: máx.c.d. (15, 30) = 15

Compruébalo.

$$15 = \boxed{3} \cdot \boxed{5}$$
$$30 = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5}$$

máx.c.d. (15, 30) = 3 · 5 = 15

Cálculo del máx.c.d. (200, 260)

$$\begin{array}{r|l} 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

máx.c.d. (200, 260) = 2^2 · 5 = 20

Piensa y practica

1. Copia en tu cuaderno, observa y completa.

a) Div. de 12 → ① ② 3 ④ 6 12
   Div. de 16 → ① ② ④ 8 16
   máx.c.d. (12, 16) = ☐

b) Div. de 15 → ① 3 ⑤ 15
   Div. de 20 → ① 2 4 ⑤ 10 20
   máx.c.d. (15, 20) = ☐

c) Div. de 24 → ① ② ③ 4 ⑥ 8 12 24
   Div. de 30 → ① ② ③ 5 ⑥ 10 15 30
   máx.c.d. (24, 30) = ☐

2. Calcula como en el ejercicio anterior.

a) máx.c.d. (6, 8) b) máx.c.d. (8, 20)
c) máx.c.d. (10, 15) d) máx.c.d. (12, 24)
e) máx.c.d. (18, 24) f) máx.c.d. (40, 50)

3. Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (2, 3) b) máx.c.d. (4, 5)
c) máx.c.d. (3, 9) d) máx.c.d. (6, 9)
e) máx.c.d. (30, 40) f) máx.c.d. (50, 75)

4. Completa en tu cuaderno y calcula.

60	2
30	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

90	2
45	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

100	2
50	☐
☐☐	☐
☐	☐
1	

$$\left.\begin{array}{r} 60 = 2 \cdot \ldots \\ 90 = 2 \cdot \ldots \\ 100 = 2 \cdot \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{máx.c.d.}\,(60, 90) = \ldots \\ \text{máx.c.d.}\,(60, 100) = \ldots \\ \text{máx.c.d.}\,(90, 100) = \ldots \end{array}$$

5. Calcula máx.c.d. (*a*, *b*) por el método óptimo.

a) $a = 3 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7$
b) $a = 2^4 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 3^3$
c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7^2$
d) $a = 3 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 11$
e) $a = 2^3 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
f) $a = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

6. Calcula.

a) máx.c.d. (20, 24) b) máx.c.d. (24, 36)
c) máx.c.d. (54, 60) d) máx.c.d. (56, 70)
e) máx.c.d. (120, 144) f) máx.c.d. (140, 180)
g) máx.c.d. (168, 196) h) máx.c.d. (180, 270)

7. Calcula máx.c.d. (*a*, *b*) en cada caso. ¿Qué observas?:

a) $a = 4$, $b = 8$
b) $a = 5$, $b = 10$
c) $a = 4$, $b = 12$
d) $a = 6$, $b = 18$

8. ¿Verdadero o falso?

a) El máximo común divisor de dos números es igual al menor de ellos.

b) El máx.c.d. de dos números contiene solo los factores primos comunes a ambos números.

c) máx.c.d. (1, *k*) = *k*

d) El máx.c.d. de dos números primos es uno.

e) Si *a* es divisible entre *b*, máx.c.d. (*a*, *b*) = *b*.

9. Supón que tienes una hoja de papel de 30 cm × 21 cm, y quieres dibujar sobre ella una cuadrícula lo más grande que sea posible en la que no haya cuadros fraccionados. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadros?

10. Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas, todas iguales, y ha comprado un lapicero de 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un bolígrafo de 80 céntimos. ¿Cuál puede ser el valor de cada una de esas monedas si siempre ha dado el precio exacto? (Busca todas las soluciones posibles).

11. Alberto tiene 45 fichas rojas y 36 fichas verdes, y quiere apilarlas en columnas iguales, lo más altas que sea posible, y sin mezclar colores en la misma pila. ¿Cuántas fichas pondrá en cada montón?

12. El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

13. Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Sistemas de numeración

1. Copia y completa.

a) … centenas hacen 13 decenas de millar.

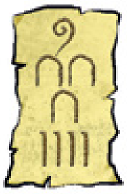
b) Mil millares hacen un …

c) … decenas de millar hacen 180 millones.

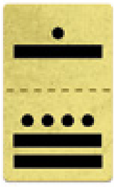
d) Un millón de millones hacen un …

2. Observa un número escrito en dos sistemas de numeración diferente:

Sistema de numeración egipcio.



Sistema de numeración maya.



a) Explica el significado de los signos en cada caso.

b) Escribe en ambos sistemas el número anterior y el siguiente.

3. Copia, calcula y completa.

a) 23 min 45 s → … s

b) 1 h 13 min 27 s → … s

c) 587 min → … h … min

d) 6 542 s → … h … min … s

Operaciones

4. Calcula y escribe, paso a paso, el proceso para llegar a cada solución.

a) $30 : 5 - 2^2 + 2 \cdot 7 - 5 = 11$

b) $(30 : 5 - 2)^2 + 2 \cdot (7 - 5) = 20$

c) $30 : (5 - 2^2 + 2 \cdot 7 - 5) = 3$

d) $30 : [(5 - 2^2 + 2) \cdot (7 - 5)] = 5$

e) $[(30 : 5 - 2)^2 + 2)] \cdot (7 - 5) = 36$

5. Calcula paso a paso y comprueba que obtienes la solución que se indica.

a) $19 - 11 - 7 + 13 + 6 - 12 = 8$

b) $18 - 5 \cdot 3 + 12 : 6 - 5 = 0$

c) $43 - 4 \cdot (6 + 3) + 28 : (10 - 3) = 11$

d) $[(13 + 7) : (6 - 1)] \cdot (5 + 1) = 24$

e) $12 - 48 : [40 - 3 \cdot (21 - 13)] = 9$

f) $(6^2 + 2^2) : [(12 - 8) \cdot (9 - 7)] = 5$

6. Resuelve con tu calculadora las expresiones del ejercicio anterior.

Múltiplos y divisores

7. Responde y justifica tu respuesta.

a) ¿Es 132 múltiplo de 11?

b) ¿Es 11 divisor de 132?

c) ¿Es 574 múltiplo de 14?

d) ¿Es 27 divisor de 1 542?

8. Calcula.

a) Los cinco primeros múltiplos de 10.

b) Los cinco primeros múltiplos de 13.

c) Los cinco primeros múltiplos de 31.

9. Calcula.

a) Todos los divisores de 15.

b) Todos los divisores de 23.

c) Todos los divisores de 32.

10. Copia estos números y selecciona:

66	71	90	103	105
156	220	315	421	825
1 000	2 007	4 829	5 511	6 005

a) Los múltiplos de 2.

b) Los múltiplos de 3.

c) Los múltiplos de 5.

d) Los múltiplos de 11.

Números primos y compuestos

11. Escribe.

a) Los diez primeros números primos.

b) Los números primos comprendidos entre 50 y 60.

c) Los números primos comprendidos entre 80 y 100.

d) Los tres primeros primos mayores que 100.

12. Descompón en factores primos.

a) 48 b) 54 c) 90 d) 105

e) 120 f) 135 g) 180 h) 200

13. Descompón en el máximo número de factores.

a) 378 b) 1 144 c) 1 872

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

14. Calcula.

a) Los diez primeros múltiplos de 10.

b) Los diez primeros múltiplos de 15.

c) Los primeros múltiplos de 10 y 15.

d) El mínimo común múltiplo de 10 y 15.

15. Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (2, 3) b) mín.c.m. (6, 9)

c) mín.c.m. (4, 10) d) mín.c.m. (6, 10)

e) mín.c.m. (6, 12) f) mín.c.m. (12, 18)

16. Calcula.

a) mín.c.m. (12, 15) b) mín.c.m. (24, 60)

c) mín.c.m. (48, 54) d) mín.c.m. (90, 150)

e) mín.c.m. (6, 10, 15) f) mín.c.m. (8, 12, 18)

17. Escribe.

a) Todos los divisores de 18.

b) Todos los divisores de 24.

c) Los divisores comunes de 18 y 24.

d) El máximo común divisor de 18 y 24.

18. Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (4, 8) b) máx.c.d. (6, 9)

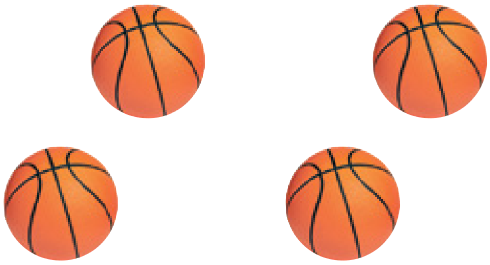
c) máx.c.d. (10, 15) d) máx.c.d. (12, 16)

e) máx.c.d. (16, 24) f) máx.c.d. (18, 24)

Reflexiona, decide, aplica

19. Marta ha comprado varios balones por 69 €. El precio de un balón era un número exacto de euros, sin decimales.

¿Cuántos balones ha comprado y cuánto costaba cada balón?



20. ¿Verdadero o falso? En una división:

a) Si se multiplica el dividendo por 3, el cociente también se multiplica por 3.

b) Si se multiplica el divisor por 5, el cociente también se multiplica por 5.

c) Si se multiplican el dividendo y el divisor por 2, el cociente no varía y el resto tampoco.

d) Si se multiplican el dividendo y el divisor por 4, el cociente no varía, pero el resto también se multiplica por 4.

21. En mi colegio hay dos clases de 2.º ESO: 2.º A, con 24 estudiantes, y 2.º B, con 30. Tenemos que hacer equipos con el mismo número de miembros, pero sin mezlcar de las dos clases. Describe todas las formas posibles de hacer los equipos.

Resuelve problemas

22. Una compañía de danza de 156 bailarines hace una coreografía formando filas y columnas. Si en una fila hay 20 bailarines más que en una columna, ¿cuántas filas y cuántas columnas son?

23. El responsable de una agencia de viajes, que debe trasladar del aeropuerto al hotel a un grupo de 40 turistas, recibe un mail informando de que el autobús previsto para ese servicio tiene avería.

Entonces se le ofrecen dos opciones: hacer el traslado en taxis o hacerlo en furgonetas. Con esta segunda opción necesitaría cinco vehículos menos porque en cada furgoneta entrarían cuatro turistas más. ¿De cuántas plazas dispone cada taxi y de cuántas cada furgoneta?

24. En el grupo de chicos y chicas inscritos en un curso de baloncesto:

– Si hacen equipos de 5, sobran 4 (o falta 1).

– Si hacen equipos de 6, no sobra ninguno.

¿Cuántos son, sabiendo que para trasladarlos se utilizan dos autobuses de 45 plazas casi llenos?

25. En un encuentro cultural entre dos clubes, A y B, se organizan equipos iguales, sin mezclar elementos de uno y otro. El club A presenta 40 socios, y el B, 60 socios. ¿Cuántos elementos tendrá, como máximo, cada equipo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

26. Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista. ¿A qué altura coinciden las cimas de ambas torres?

27. Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m sin desperdiciar nada?

28. De cierta parada de autobús parten dos líneas, A y B, que inician su actividad a las 7 h de la mañana. La línea A presta un servicio cada 24 minutos, y la línea B, cada 36 minutos. ¿A qué hora vuelven a coincidir en la parada los autobuses de ambas líneas?

29. Para pavimentar el suelo de una nave de 12,3 m de largo por 9 m de ancho, se han empleado baldosas cuadradas, que han venido justas, sin necesidad de cortar ninguna. ¿Qué medida tendrá el lado de cada baldosa, sabiendo que se han empleado las mayores que era posible?

30. Julia ha formado el cuadrado más pequeño posible uniendo piezas rectangulares de cartulina, de 12 cm por 18 cm. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado? ¿Cuántas piezas ha empleado?

31. Se desea envasar 125 botes de conserva de tomate y 175 botes de conserva de pimiento en cajas del mismo número de botes, y sin mezclar ambos productos en la misma caja.

a) ¿Cuál es el mínimo número de cajas necesarias?

b) ¿Cuántos botes irán en cada caja?

Autoevaluación

1. Calcula.

a) $37 - 6 \cdot 5 - 5 + 56 : 7$

b) $(64 - 42) : 11 + 63 : (35 - 26)$

c) $11 \cdot (2^3 - 1) - 2 \cdot 6^2 - 6^2 : 18$

d) $\left(12 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5}\right) : 2$

2. Responde y justifica:

a) ¿Es 31 divisor de 744?

b) ¿Es 999 múltiplo de 99?

3. Escribe.

a) Los cuatro primeros múltiplos de 12.

b) Todos los divisores de 60.

4. ¿Es el 60 un número rectangular? ¿De cuántas formas rectangulares diferentes se puede expresar?

5. Escribe los números primos comprendidos entre 20 y 40.

6. Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:

897 - 765 - 990 - 2713 - 6077 - 6324 - 7005

7. Descompón en factores primos los números 150 y 225.

8. Calcula.

a) máx.c.d. (150, 225)

b) mín.c.m. (150, 225)

9. Calcula mentalmente máx.c.d. (15, 20, 25) y mín.c.m. (15, 20, 25).

10. Se desea poner rodapié de madera en dos de las paredes de una habitación rectangular de 420 cm × 540 cm. Para no tener que cortar, se van a encargar en la carpintería tramos de listón, todos iguales y lo más largos que sea posible, que encajen en número exacto en ambas paredes. ¿Cuánto debe medir cada uno de los trozos a encargar en la carpintería?

11. En una fábrica se oye el escape de una válvula de gas cada 45 segundos y el golpe de un martillo pilón cada 60 segundos. Si se acaban de oír ambos sonidos simultáneamente, ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Los números enteros

Los objetos existen, pero los números son un invento humano en el terreno de las ideas.

Los números negativos surgen mucho después de los naturales, respondiendo a las necesidades del comercio y tras aparecer los sistemas de numeración dotados del cero, elemento imprescindible para su construcción.

Se los ha llamado números falsos y números absurdos, lo que refleja su dificultad y los ubica en un nivel más elaborado del mundo de las ideas.

Los números negativos no aparecen sistematizados hasta el siglo VII, en escritos hindúes, ligados a cuestiones y actividades cotidianas como *tener* en contraste con *deber*.

> "Una deuda restada de la nada se convierte en un bien".
>
> "Un bien restado de la nada se convierte en una deuda".

En este tipo de enunciados observamos que manejaban el cero y la regla de los signos.

La introducción en Europa de los números negativos fue lenta y desigual.

Muchos matemáticos desde el siglo XVI teorizaron sobre ellos, pero no fue hasta finales del siglo XIX, que el pensamiento matemático se desvincula de modelos físicos, cuando el conjunto de los números enteros negativos es aceptado y reconocido como objeto matemático de pleno derecho.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....