Apuntes sobre Ecuaciones Diferenciales

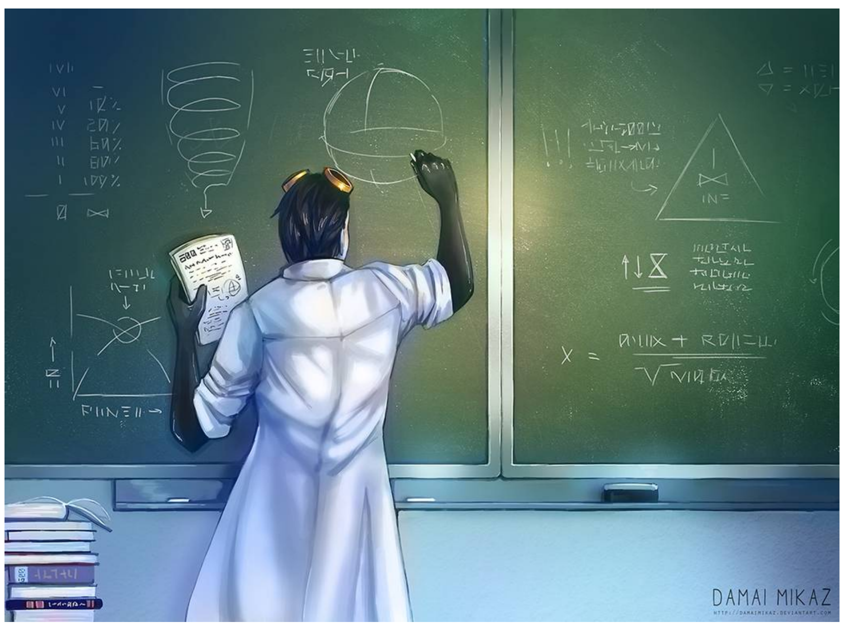
Mario I. Caicedo S.

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción



1.1. Objetivo

Estas notas son el resultado de una tutoria a distancia [Bogota/Colombia-Delft/Netherlands] a un estudiante de Ingenieria Aeroespacial de la Delft University of Technology que en el momento de la tutoria tomaba un curso de Ecuaciones Diferencialescuyo texto esra la decimo primera edicion (2017) del libro: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* de Boyce Diprima y Meade. El teto,de m'as de 600 paginas resulta algo intimidante y en ocasiones, el estudiante bajo mi tutoria lo encontraba algo oscuro. La tutoria se llevo a cabo con una combinacion de reuniones sincronicas y asincronicas. En las primeras el estudiante presentaba un resumen de contenidos y ejemplos que le habian colocado en el curso y en las reuniones asincronicas discutiamos las respuestas que -por escrito- yo daba a sus inquietudes. Estas notas constitituyen un compenio de esas respuestas.

El curso original se basa en metodos analiticos de resolucion sin hacer referencia alguna a los metodos cualitaivos.

El objetivo del material consiste en presentar el material de la manera más resumida y práctica posible. Las notas contienen numerosos ejemplos desarrollados en detalle, los ejemplos están numerados de acuerdo al capítulio y sección en que se encuentran.

No se pretende sustituir a ningún libro de texto.

Mi formacion y experiencia me sugirieron utilizar los siguientes libros para consulta:

- L. Elsgoltz, "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional". Editorial MIR, Moscu, 1977.
- Birkhoff, G. and Rota, G.-C. "Ordinary Differential Equations". 4th Edition, Wiley, New York. 1989
- George Brown Arfken, Hans Jürgen Weber, Frank Ephraim Harris, "Mathematical Methods For Physicists". Academic Press. 2011

1.2. Como navegar estas notas

Los capítulos 2 y 3 contienen repasos muy breves a los que pueden acudir cuando lo consideren necesario.

Los capítulos 4, 5 y 6 tratan técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE).

El capítulo 7 introduce el tema presentándolo como técnica alternativa de resolución de ODEs

El capitulo 8 de EDPS y tiene como prerequisitos los caps 4, 5 a 6

El capítulo 9 trata en detalle (y desde dos puntos de vista) un problema físico, a saber, la cuerda tena entre dos extremos fijos.

Capítulo 2

Memento: Álgebra Lineal

En los cursos de física elemental pensamos en los *vectores* como flechitas[1], rápidamente aprendemos ciertas operaciones ente ellos y en poco tiempo, sabemos que en un plano, un vector se expresa como *combinación lineal* de dos vectores ortogonales de magnitud (longitud) 1 $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$, es decir,

$$\mathbf{v} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_1 \, , \tag{2.1}$$

El par de vectores ortogonales unitarios se denomina **base ortonormal** y evidentemenrte existen infinitas bases ortonormales diferentes. En el acaso de la física elemental, el álgebra entre vectores, es decir, su suma y producto tiene una clara interpretación (¿o inspiración?) geométrica. Las componetes, a_1, a_2 se calculan como las longitudes de las proyecciones del vector ($\mathbf{v}$) sobre cada elemento de la base incluyendo un signo que corresponde a si la proyección es paralela ($+$) o antiparalela ($-$) al vector de base.

En los libros de física introductoria se suele definir el producto escalar ente dos vectores como

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta \, , \tag{2.2}$$

donde $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$ son las magnitudes (longitudes) de cada vector y θ el ángulo entre ellos.

[1] segmentos orientados para los amantes del lenguaje pomposo

Las propiedades abstractas de el conjunto de todos los vectores del plano pueden ser generalizadas a muchos conjuntos. Podemos tomar el ejemplo de los polinomios reales de hasta segundo grado definidos en elintervalo $[-1,1]$, en efecto, un tal polinomio se puede pensar como

$$\begin{gathered} P(x) = a_0 P_1 + a_1 P_1 + a_2 P_2 \qquad \text{con} \\ P_0 = 1\,, P_1 = x\,, P_2 = x^2\,, \end{gathered} \tag{2.3}$$

un ejercicio importante consiste en convencerse de que efectivamente el conjunto de todos estos polinomios junto con las reglas de suma de polinomios y el producto de un polinomioi por un número satisface las mismas reglas algebráicas que la suma de y producto por un número que los vectores del plano. Si adicionalmente incluimos la siguiente definición para un producto escalar (que de ahora en adelante denominaremos producto interno):

$$\langle P, Q\rangle \equiv \int_{-1}^{1} dx\, P(x)Q(x) \tag{2.4}$$

ocurre que los tres polinomios:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \end{aligned} \tag{2.5}$$

resultan ser ortogonales en el sentido de que los productos internos son

$$\langle P_i, P_j\rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{2}{2j+1} & i = j\,, \end{cases} \tag{2.6}$$

de manera que los P_ℓ juegan el paple de una base ortogonal.

2.1. Espacios Vectoriales

El concepto de un conjunto con una suma y producto por un escalar puede generalizarse mucho más. En cada caso, al conjunto se le denomina *espacio vectorial* y a sus elementos *vectores*, en un espacio vectorial siempre es posible encontrar un conjunto ($\mathcal{B}$) *maximal* de vectores

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, ...\mathbf{v}_N\} \tag{2.7}$$

que satisfacen la propiedad

$$\sum_{k=1}^{N} a_i \mathbf{v}_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i\,, \tag{2.8}$$

a un tal conjunto de vectores se le denomina una base del espacio vectorial y al número N, su dimensión.

La mayor parte de los epacios vectoriales cuenta con una operación matemática adicional denominada **producto interno** o escalar, este producto, que generaliza la noción $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta$ involucra a dos vectores y tiene como resultado un número (escalar).

- El producto escalar, usualmente denotado por $\langle\ ,\ \rangle$ es bilineal, es decir,

$$\begin{array}{c} \langle a\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{z}\rangle \\ \langle \mathbf{v}, a\mathbf{w} + \mathbf{z}\rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{z}\rangle \end{array}, \tag{2.9}$$

  adicionalmente,

- Dos vectores no nulos son ortogonales si y solo si, su producto interno es cero.

- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \geq 0$ y es nulo solo cuando $\mathbf{v}$ es el vector cero.

- La propiedad anterior se utiliza como base para definir la longitud (mangnitud o norma) de un vector como: $|\mathbf{v}|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$

2.2. bases y componentes

Esta sección es muy importante y será utilizada recurrentemente a lo largo de todas las notas

Antes de seguir la discusión introduciremos un objeto de mucho interés,

Definición 2.2.1 *La delta de Kronecker* δ_{kp} *está dada por*

$$\delta_{np} = \begin{cases} 1 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases} . \tag{2.10}$$

En términos de la delta de Kroneker el producto escalar entre los elementos de una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \dots\}$ de un espacio vectorial se escribe como

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{2.11}$$

En el caso general, podemos asegurar que un espacio vectorial de dimensión finita (D) con un producto interno posee una base compuesta por D vectores ortonormales $\hat{\mathbf{e}}_i$, en términos de los cuales, todo vector se expresa como una combinación lineal,

$$\mathbf{v} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + ...a_{D-1}\hat{\mathbf{e}}_{D-1} + a_D\hat{\mathbf{e}}_D = \sum_{k=1}^{D} a_k\hat{\mathbf{e}}_k \,, \tag{2.12}$$

Para encontrar las componentes (a_p) de un vector, tomamos el producto interno de ambos lados de la igualdad 2.12 por $\hat{\mathbf{e}}_p$ para obtener,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \mathbf{v} \rangle = a_1\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \hat{\mathbf{e}}_1 \rangle + a_2\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \hat{\mathbf{e}}_2 \rangle + ...a_{D-1}\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \hat{\mathbf{e}}_{D-1} \rangle + a_D\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \hat{\mathbf{e}}_D \rangle \,, \tag{2.13}$$

supongamos que escogimos $p = 3$, en tal caso, como la base es ortonormal, casi todos los productos internos $\langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_\ell \rangle$ resultan ser nulos salvo $\langle \hat{\mathbf{e}}_3, \hat{\mathbf{e}}_3 \rangle = 1\rangle$. La delta de Kronecker es útil para descibir esto mismo, en efecto,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \mathbf{v} \rangle = \sum_{k=1}^{D} a_k\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \hat{\mathbf{e}}_k \rangle = \sum_{k=1}^{D} a_k\delta_{pk} \,, \tag{2.14}$$

la delta provoca que la suma colapse a un solo término, aquel con $k = p$ es decir,

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_p, \mathbf{v} \rangle = a_p \,, \tag{2.15}$$

así, que resumiendo, la componente a_p de $\mathbf{v}$ se calcula como

$$\boxed{a_p = \langle \hat{\mathbf{e}}_p, \mathbf{v} \rangle} . \tag{2.16}$$

2.3. Problemas espectrales

Esta sección es un prerequisito indispensable para el capítulo 6

Cuando una matriz cuadrada se multiplica por un vector, el resultado es un vector en el mismo espacio que el vector original, en particular, si el resultado del producto es paralelo (o antiparalelo) al vector original estamos en presencia de un autovector de la matriz,

$$\mathbf{M}\,\mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}\,, \tag{2.17}$$

Un problema fundamental de álgebra lineal es el de encontrar los autovalores y auovectores de una matriz cuadrada, a este problema se le denomina, problema espectral.

2.3.1. Un teorema Importante

Pensemos en una matriz $\mathbf{M}$ $n \times n$, el problema de autovalores y autovectores de $\mathbf{M}$ consiste en encontrar números (escalares) λ y vectores columna $n \times 1$ $\mathbf{v}$ que satisfagan la igualdad

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\,,$$

el **teorema espectral**[2] establece que cuando $\mathbf{M}$ es una matriz *hermítica*[3], el conjunto de autovectores de $\mathbf{M}$ constituye una base del espacio vectorial n-dimensional sobre el que actúa $\mathbf{M}$. Más aun, los autovectores asociados a autovalores diferentes son ortogonales entre sí.

Ejemplo 2.3.1 *Consideremos un ejemplo sencillo, el problema de autovalores y autovectores para la matriz*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{2.18}$$

[2] álgebra lineal

[3] Es decir, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ si $\mathbf{M}$ tiene entradas reales, o $\mathbf{M}^\dagger = \mathbf{M}$ donde $\dagger$ significa tomar la compleja conjugada de la matriz transpuesta a $\mathbf{M}$

expresada en la base ortonormal

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \quad \hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

M *es sin duda una matriz hermítica y como expresa el teorema espectral, sus autovectores (normalizados) asociados a autovalores distintos, son ortogonales (cuadro 2.1), en este caso de dimensión*

Autovalor	Autovector
1	$\hat{\mathbf{u}}_1 = (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2)/\sqrt{2}$
-1	$\hat{\mathbf{u}}_2 = (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)/\sqrt{2}$

Cuadro 2.1: Autovalores y autovectores para la matriz **M** del ejemplo 2.3.1

2 *la existencia de dos autovalores diferentes garantiza que los dos autovectores constituyen una base para el plano, es decir, todo vector* **v** *puede expresarse como una única combinación lineal*

$$\mathbf{v} = a_1\hat{\mathbf{u}}_1 + a_2\hat{\mathbf{u}}_2\,. \tag{2.20}$$

En el caso general en dimension finita en que puede haber degeneración de algunos autovalores, el teorema espectral garantiza que los autovecotres de matriz **M** *pueden ortonormalizarse para obtenrr una base del espacio sobre el que actúa* **M***. En el caso de dimensión infinita pueden surgir algunos detalles que compliquen las cosas.*

Capítulo 3

Memento: Series de Taylor

Cuando se habla de series de Taylor mucha gente se pone en alerta, y hasta dicen cosas como "uy, noooo, eso es algo con una formulota"

En verdad se trata de un concepto muy sencillo. Pensemos en una función (de una variable) suave y sin discontinuidades y preguntémonos si esa función se puede aproximar por un polinomio, es decir, preguntémonos si será posible escribir

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \,, \tag{3.1}$$

de ser posible, pues debería ocurrir que las derivadas se calcularan como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ f'(x) &= a_1 x + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \\ f''(x) &= 2 \times a_2 + 3 \times 2 \times a_3 \times x + 4 \times 3 \times a_4 \times x^2 + \dots \\ f^{(3)}(x) &= 3 \times 2 \times a_3 + 4 \times 3 \times 2 \times a_4 \times x + 5 \times 4 \times 3 \times a_5 \times x^2 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.2}$$

En consecuencia, al evaluar en $x = 0$ obtendríamos

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f^{(3)}(0) &= 3 \times 2 \times a_3 \\
f^{(4)}(0) &= 4 \times 3 \times 2 \times a_3 \\
\ldots & \\
f^{(k)}(0) &= k(k-1)(k-2)\ldots 3 \times 2 = k! \\
\ldots &
\end{aligned} \tag{3.3}$$

de manera que los coeficientes serían:

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(0) \\
a_1 &= f'(0) \\
a_2 &= \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!} \\
a_3 &= \frac{f^{(3)}(0)}{3 \times 2} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \\
a_4 &= \frac{f^{(4)}(0)}{4 \times 3 \times 2} = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \\
\ldots & \\
a_k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \\
\ldots &
\end{aligned} \tag{3.4}$$

El grado del polinomio no es una limitante (al menos para la idea) así que lo que estamos dicendo es que, siempre que f sea una función suave podemos poner

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \,, \tag{3.5}$$

y si en lugar de usar 0 como punto de evaluación, usamos otro punto, la "formulota" queda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \, . \tag{3.6}$$

Así que realmente, como dijimos al principio, estamos hablando de una *idea general* muy sencilla.

3.1. Tres ejemplos importantes

Las tres funciones e^x, $sen(x)$ y $cos(x)$ no solo pueden definirse a través de series de Tasylor, sino que sus series permiten establecer la fórmula de Moivre que las vincula entre si.

Ejemplo 3.1.1 *Consideremos $f(x) = e^x$. Las derivadas son $f^{(k)}(x) = e^x$, y por lo tanto, $f^{(k)}(0) = 1$ lo qu eimplica que la serie de Taylor de la función exponencial centrada en $x = 0$ es*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots . \tag{3.7}$$

Ejemplo 3.1.2 *En este caso examinemos la función $f(x) = sen(x)$. Ciertamente,*

$$\begin{aligned} sen'(x) &= cos(x) \\ sen''(x) &= -sen(x) \\ sen^{(3)}(x) &= -cos(x) \\ cos^{(4)}(x) &= sen(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

de manera que las derivadas presentan un ciclo de cuatro pasos y

$$\begin{aligned} sen^{(0)}(0) &= 0 \\ sen^{(1)}(0) &= 1 \\ sen^{(2)}(0) &= 0 \\ cos^{(3)}(0) &= -1 \\ sen^{(4)}(0) &= 0 \\ & \dots \end{aligned} \tag{3.9}$$

en conclusión

$$sen(x) = x - \frac{x}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{3.10}$$

Un cálculo muy similar resulta en

$$cos(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots . \tag{3.11}$$

Otra manera de llegar a estos dos resultados, consiste en recordar la fórmula de Moivre

$$\boxed{e^{ix} = cos(x) + i\, sen(x)} \tag{3.12}$$

En efecto, si usamos la serie de la función exponencial,

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned} \tag{3.13}$$

agrupando tenemos

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right], \tag{3.14}$$

y la comparación con la fórmula de Moivre nos entrega las series de potencias que ya habíamos encontrado.

3.2. La Serie Geométrica

Una serie muy importante es la serie geométrica

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots, \tag{3.15}$$

para ver que función representa consideremos la suma geométrica finita de N términos

$$S_N = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^N \tag{3.16}$$

y su producto por x,

$$xS_N = x + x^2 + x^3 + ... + x^{N+1}\,, \tag{3.17}$$

al restar obtenemos

$$S_N(x-1) = x^{N+1} - 1 \tag{3.18}$$

y de allí,

$$S_N = \frac{x^{N+1}-1}{x-1}\,. \tag{3.19}$$

Ahora bien, si $|x| < 1$

$$\lim_{N\to\infty} x^N = 0$$

de manera que e index shifting

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}\,. \tag{3.20}$$

En definitiva, la función aproximada por la serie geométrica es

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... \tag{3.21}$$

De esta serie se pueden deducir varios resultados de mucho interés.

Por ejemplo, si hacemos el cambio $x \to -x$ queda,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... \tag{3.22}$$

Integrando esta última serie aprendemos que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ... \tag{3.23}$$

3.3. Igualdad entre series y corrimiento de índices

De vez en cuando aparece la pregunta de si dos series son iguales. A decir verdad, con esas fórmulas horribles,la pregunta da como miedo, pero al final dl día resulta que la respuesta no es tan dificil.

Supongamos que tenemos dos series

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \\ S_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, x^j\, . \end{aligned} \tag{3.24}$$

La condición para que $S_1 = S_2$ es bastante simmple, los coeficientes de ambas series tienen qe ser iguales orden por orden en potencias de x. En el caso del ejemplo, a_0 tiene que ser cero porque no hay potencias de orden cero en S_2 y además de eso, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, etc.

UNa habilidad necesaria para la comparación de series es la de *correr los índices*[1], esta no es otra cosa que saber como modificar el índice de suma en una serie.

Veamos un ejemplo del texto de Boyce DiPrima. Se trata de modificar la serie

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, x^n\,, \tag{3.25}$$

para que luzca como

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\text{vaya uno a saber que resulte acá})\,, \tag{3.26}$$

es decir, queremos modificar el índice de suma para que comienze en cero en lugar de hacerlo en 2. Esto es facil si uno se da cuenta de que es posible cambiar variables dentro de la suma de la misma manera que se hace con una integral. En el dialécto de las series, decimos que *el índice de suma es mudo*.

[1] index shifting

Si hacemos el *cambio de variable* $n = k + 2$ el límite inferior de la suma empezará en $k = 0$ y el superior se mantendrá igual (al infinito no le importa que le sumemos 2), así que parece ser que la serie

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\, x^{k+2}\,, \tag{3.27}$$

pero, quizá aun quede duda y preguntemlos, ¿será cierto que $\mathcal{S} = S$, solo hay una manera de estar seguros, usar la fuerza bruta, es decir, calcular,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, x^n = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots\,, \\ \mathcal{S} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\, x^{k+2} = a_{0+2}x^{0+2} + a_{0+3}x^{0+3} + +a_{0+4}x^{0+4} + \dots = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \end{aligned} \tag{3.28}$$

efectivamente, ambas sumas son iguales. Finalmente, como el “nombre” índice de suma es irrelevante (esto se expresa diciendo que el índice de suma es “mudo”) podemos escribir,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}\, x^{n+2}\,, \tag{3.29}$$

Hagamos un par de ejemplos adicionales,

Ejemplo 3.3.1 *Reescribir*

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n\,(x - x_0)^{n-2}\,, \tag{3.30}$$

como una serie que empieza sumando desde $n = 0$.

Si pensamos un poco es evidente que al cambiar n por $n + 2$ podemos empezar la suma desde cero con tal de que hagamos todos los cambios correspondientes,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}\,(x - x_0)^{n}\,, \tag{3.31}$$

Ejemplo 3.3.2 *Reescribir la serie*

$$S = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\, a_n\, x^{r+n-1} \tag{3.32}$$

de manera que las potencias tenganla forma x^{n+n}. Comenzamos por introducir el término x^2 en la suma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\, a_n\, x^{r+n+2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\, a_n\, x^{r+n+1} \tag{3.33}$$

y ahora cambiamos $n = k-1$, así, cuando $k = 0$ $n = 1$, es decir,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (r+k-1)\, a_{k-1}\, x^{r+k} \tag{3.34}$$

y cambiando el nombre del índice mudo

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n-1)\, a_{n-1}\, x^{r+n} \tag{3.35}$$

3.4. Comentarios Finales

Si tomamos la expresión general

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x-x_0)^k\,, \tag{3.36}$$

y reflexionamos un monento, nos daremos cuenta de que la cantidad

$$\Delta \equiv x - x_0\,, \tag{3.37}$$

no es otra cosa que la separación entre el punto x_0 en que estamos centrando la serie y el punto x en que queremos evaluarla, esto nos permite expresar la serie de Taylor en una forma que a veces resulta muy útil,

$$f(x_0+\Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, \Delta^k\,, \tag{3.38}$$

Muchísimas funciones está definidas por sus series de Taylor, así, por ejemplo, la función de Bessel (sección 5.7) de orden 0 se define como

$$J_0(x) \equiv \left[1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \ldots\right] . \tag{3.39}$$

Ahora bien, los matemáticos se han dedicado a estudiar los aspectos técnicos de las series de Taylor (o series de potencia) y han encontrado teoremas acerca del radio de convergencia, el tipo de convergencia y otros asuntos de cierto grado de delicadeza que hay que consultar en los libros especializados.

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es una ecuación de la forma

$$F(y'(x), y(x); x) = 0 \tag{4.1}$$

en la que la incognita es la función $y(x)$.

4.1. Ecuaciones Lineales

Definición 4.1.1 *Una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea, tiene la forma*

$$a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = g(x) \tag{4.2}$$

Antes de intentar resolver la ecuación 4.2 estudiaremos algunas ecuaciones más simples.

4.1.1. Ecuación de primer orden homogénea a coeficientes constantes

Este tipo de ecuación

$$a\,y'(x) + b\,y(x) = 0\,, \tag{4.3}$$

se acaracteriza porque a y b son constantes. La solución utilizando el denominado **método de variables separables** es muy sencilla. Reescribimos la ecuación 4.3 en la forma

$$y'(x) = -\frac{b}{a}\,y(x)\,, \tag{4.4}$$

ó

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{b}{a}\,y(x) \tag{4.5}$$

a continuación despejamos

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b}{a}\,dx \tag{4.6}$$

lo que nos permite integrar para obtener

$$ln(y) - ln(y_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{b}{a}\,ds\,, \tag{4.7}$$

en donde $y(x_0) = y_0$ es la **condición inicial**. Una exponenciación inmediata arroja el resultado final

$$\boxed{y(x) = y(x_0)\,e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}\,.} \tag{4.8}$$

De esta manera, hemos visto como la técnica de separación de variables nos ha permitido encontrar la solución general de una una ecuacion diferencial de primer orden lineal, homogénea a coeficientes constantes.

Ejemplo 4.1.1 *La ecuación que describe la descarga de un condensador conectado a un circuito* $R-C$ *en serie es,*

$$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = 0}$$

donde $q(t)$ es la carga acumulada en el condensador y R y C son la resistencia y la capacidad de la resistencia. Al examinar la ecuación diferencial es facil notar que el producto RC es característico del circuito y tiene dimensiones de tiempo lo que sugienre definir la constante de tiempo del circuito como $\tau = RC$.

La ecuación 4.8 nos indica que la solución al problema de descarga del condensador es

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

4.1.2. Ecuación de primer orden no homogénea con coeficientes constantes

La siguiente ecuación diferencial de primer orden en dificultad es la siguiente:

$$y'(x) + a\,y(x) = b\,, \tag{4.9}$$

en donde, notamos de inmediato dos cosas, en primer lugar la existencia de un término independiente[1], y en segundo lugar, que coefficiente que acompaña a la derivada tiene por valor la unidad (1) y decimos que estamos trabajando con la foma **normal** o **mónica** de la ecuación diferencial. Considerar la forma mónica no conlleva ninguna pérdida de generalidad[2].

Existen dos técnicas para resolver la ecuación no homogénea de coeficientes constantes. La primera, consiste en usar directamente la técnica de separacion de variables. La segunda consiste en encontrar primero la solución general de la ecuación homogenea para luego sumarle una solución particular de la ecuación no homogénea

[1] A una ecuación de este tipo se le conoce como **ecuacion diferencial de primer orden lineal, no homogénea a coeficientes constantes**

[2] en efecto, supongamos que no usáramos la forma mónica, la ecuación temndía la forma $p\,y' + q\,y = r$ que puede reescribirse facilemte en la forma $y' + \frac{q}{p}\,y = \frac{r}{p}$ que es, ciertamente, mónica

La primera de las dos técnicas comienza por aislar la derivada reesecribiendo la ecuación en la forma

$$y'(x) = b - a\,y(x)\,, \tag{4.10}$$

en este punto usaos la notación de Leibniz $y' = \frac{dy}{dx}$ para separa las variables como hicimos en el caso homogéneo para quedar con la igualdad:

$$\frac{dy}{b - a\,y} = dx\,, \tag{4.11}$$

A continuacion integramos tomando en cuenta la condición inicial $y(x_0) = y_0$:

$$-\frac{1}{a}\,ln(b - a\,y) + \frac{1}{a}\,ln(b - a\,y_0) = (x - x_0)\,, \tag{4.12}$$

exponenciamos

$$b - a\,y = (b - a\,y_0)\,e^{-a(x-x_0)} \tag{4.13}$$

y finalmemnte hacemos un poquitín de álgebra para quedar con

$$\boxed{y(x) = b/a - (b/a - \ y_0)\,e^{-a(x-x_0)}} \tag{4.14}$$

Como dijimos antes, existe otra técnica para resolver la ecuación 4.9, esta técnica consiste en en sumar a la solución más general posible de la ecuación homogénea una solucion particular de la ecuacion homogénea.

Empecemos por notar que la solución mas general posible de la ecuacion homogenea es (esto ya lo aprendimos)

$$y(x) = C\,e^{-a\,(x-x_0)}\,. \tag{4.15}$$

Ahora nos preguntamos como buscar una solucion **particular** a la ecuación no homogéna, esta parte dela construcción luce, a veces, algo truculenta. Ocurre que si nos arreglamos de cualquier forma (hasta adivinar es válido) para conseguir una solución a la ecuacion no homogénea, esa solución sacada del sombrero mágico puede ser utilizada con toda validez como solución particular de la ecuación no homénea. En el problema que tenemos entre manos, utilizaremos algo de creatividad basada en conocimiento para encontrar una solución a la ecuación no homogénea. Comencemos con notar que el término no homogeneo que estamos considerando es una constante (b) y démonos cuenta de que si propusiéramos una una solución particular constante $y_p(x) = K$ ocurriría que la derivada de $y_p(x)$ seria cero y por lo tanto la ecuacion quedaría como

$$a\,K = b \tag{4.16}$$

que es una ecuación algebráica cuya solución es, evidentemente,

$$K = b/a\,, \tag{4.17}$$

La solución general a la ecuación diferencial no homogénea que estamos estudiando resulta ser entonces:

$$y(x) = b/a + C\,e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}\,. \tag{4.18}$$

Al imponer la condición inicial $y(x_0) = y_0$ resulta:

$$y(x_0) = b/a + C\,e^{-\frac{b}{a}(x_0-x_0)}\,, \tag{4.19}$$

o

$$y_0 = b/a + C\,, \tag{4.20}$$

de acá deducimos que

$$C = -b/a + y_0 = -(b/a - y_0)\,. \tag{4.21}$$

Al reinsertar este valor de C en la fórmula 4.18 obtenemos finalmetne:

$$\boxed{y(x) = b/a - (b/a - y_0)\,e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}\,.} \tag{4.22}$$

que evidentemente coincide con la solución 4.14 que habíamos obtenido anteriormente.

Ejemplo 4.1.2 *Asociado al problema de descarga de un condensador (ejemplo 4.1.1) tenemos el siguiente problema, un condensador conectado a un circuito $R - C$ en serie al que se introduce (también en serie) una fuente de voltaje $v(t)$, en este caso, la carga en el condensador se describe por la ecuación diferencial,*

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{v(t)}{R}$$

para tratarlo con los métodos que acabamos de discutir debemos limitarnos a una fuente de voltaje constante (una batería, por ejemplo), de manera que $v(t) = V_0 =$ constante.

Al identificar las constantes a y b del problema general con los de la ecuación para el circuito obtenemos,

$$q(t) = V_0 C(1 - e^{-t/\tau}) + q(0)e^{-t/\tau}$$

el caso de **carga** *del condensador es aquel en que la carga incicial en el condensador es $q(0) = 0$, que resulta en*

$$q(t) = V_0 C(1 - e^{-t/\tau})$$

4.1.3. Ecuacion lineal homogenea a coeficientes variables

Habiendo estudiado exitosamente las ecuaciones de primer orden a coeficientes varialbes, es evidente que nuestro siguiente (tercer) problema de interes ha de ser el siguiente,

$$y'(x) + a(x)\, y(x) = 0 \tag{4.23}$$

Esta ecuación se resuelve sin problemas utilizando la técnica de separación de variables. Como ya hemos aprendido bastante al respecto podemos intentar saltar un par de pasos y darnos cuenta de que la solución general a la ecuación lineal homogénea de primer orden a coeficientes variables es:

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} \tag{4.24}$$

Arriesgándonos a llamar la atención sobre algo evidente, notemos que la aplicabilidad práctica de la fórmula 4.24 requiere del conocimiento de la forma explicita de la funcion $a(x)$, de lo contrario, la integración es imposible. Notemos en particular, que en el caso $a(x) = constante = a$ la integración es trivial y se obtiene el resultado que habiamos encontrado antes.

4.2. Ecuaciones lineales no homogéneas de primer orden

Hemos llegado al problema de verdadero interés, la búsqueda de la solución de una ecuación diferencial de primer orden llineal no homogénea. Sin pérdida de generalidad, supondremos que la ecuación está dada en su forma mónica o normal, es decir,

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \tag{4.25}$$

4.2.1. La técnica de variación de parametros

Para resolver este tipo de ecuacion se hace lo siguiente (se aprendió con el trabajo de muchos matemáticos), se propone una solución de la forma[3]

$$y(x) = C(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} ds\,a(s)} \tag{4.26}$$

Donde $C(x)$ es una función que intentaremos determinar a posteriori.

Notemos que la derivada de esta funcion tiene dos partes (es la derivada de un producto)

$$y'(x) = C'(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} ds\,a(s)} + C(x)\ [\textit{derivada de la exponencial}] \tag{4.27}$$

Vamos a reemplazar 4.26 y 4.27 en donde corresponden en la ecuacion 4.25, lo que resulta tiene un rostro algo feo al principio, pero rápidamente ocurren cosas divertidas. La sustitución resulta en

[3] esta técnica también se conoce como **técnica de variación de las constantes**

$$\begin{aligned} & C'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} + C(x)\, \left[derivada\ de\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} \right] + \\ & + a(x) C(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} = b(x) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Reagrupando y reordenando juiciosamente los términos, quedamos con

$$\begin{aligned} & C(x) \left[(derivada\ de\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)}) + a(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} \right] + \\ & + C'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} = b(x) \end{aligned} \tag{4.29}$$

¡EUREKA!, el primer sumando (término entre corchetes) es cero porque $e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)}$ es solucion de la ecuacion homogenea. De acuerdo a esto, la solución propuesta 4.26 redujo el problema original al de resolver

$$C'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)} = b(x) \tag{4.30}$$

este nuevo problema es extremadamente sencillo, basta con despejar e integrar. Sin embargo, hay que tener algo de cuidado con los nombres de las variables de integración para evitar confusiones. La solución para la función desconocida $C(x)$ es

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} ds\, b(s) e^{\int_{x_0}^{s} du\, a(u)} \tag{4.31}$$

al reinsertar $C(x)$ en la solucion propuesta obtenemos finalmente una de esas fórmulas de apariencia terrorífica que que se utilizan para poner en los libros o para impresionar a las amistades en las reuniones sociales,

$$\boxed{y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} ds\, b(s) e^{\int_{x_0}^{s} du\, a(u)} \right]\ e^{-\int_{x_0}^{x} ds\, a(s)}} \tag{4.32}$$

4.3. Ecuaciones Diferenciales Exactas

Una ecuación de primer orden de la forma

$$N(x, y)\, y' + M(x, y) = 0\,, \tag{4.33}$$

puede reescribirse en la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0\,. \tag{4.34}$$

Cabe preguntarse si existe una función $u(x,y)$ cuya diferencial

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\,, \tag{4.35}$$

sea

$$du = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\,. \tag{4.36}$$

Si la respuesta fuera afirmativa, la ecuación diferencial podría escribirse como

$$du(x,y) = 0\,. \tag{4.37}$$

Ahora bien, de existir u y si $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial, ocurre que

$$du(x,y(x)) = 0\,. \tag{4.38}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} du(x,y(x)) &= \frac{\partial u(x,y(x))}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y(x))}{\partial y}dy = \\ &= \left[\frac{\partial u(x,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y(x))}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]dx = \\ &= \left[M(x,y(x)) + N(x,y(x))y'(x)\right]dx = 0\,. \end{aligned} \tag{4.39}$$

En donde en la última línea hemos utilizado que $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial 4.33. Ahora bien, como $du(x,y(x)) = 0$ podemos aseMgurar que

$$u(x,y(x)) = C = constante\,. \tag{4.40}$$

Recíprocamente, si existe $y(x)$ tal que

$$u(x,y(x)) = C = constante\,, \tag{4.41}$$

la curva integral

$$u(x, y) = C = constante\,, \tag{4.42}$$

es una integral general de la ecuación diferencial 4.33.

La discusión anterior lleva a preguntarse cuales serán las condiciones para la existencia de una tal función $u(x, y)$. La respuesta es la siguiente,

Teorema 4.3.1 *La expresión*

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy\,, \tag{4.43}$$

es **exacta** *en una región simplemente conexa, es decir, existe $u(x, y)$ tal que*

$$du = M(x, y)\,dx + N(x, y) \tag{4.44}$$

si y solamente si,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{4.45}$$

Ejemplo 4.3.1 *Consideremos la ecuación diferencial no linal de primer orden*

$$(x - y^2 + 3)\frac{dy}{dx} + x + y + 1 = 0 \tag{4.46}$$

o

$$(x - y^2 + 3)dy + (x + y + 1)dx = 0 \tag{4.47}$$

Al calcular las derivadas parciales cruzadas, demostramos que son iguales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x - y^2 + 3) = 1 \\ \frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) = 1 \end{aligned} \tag{4.48}$$

estamos en la hipótesis de existencia de la función $u(x,y)$

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x+y+1)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y^2+3)dy = \\
&= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (x+1)dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y^2+3)dy = \\
&= (x^2/2+x) + (xy-y^3/3+3y) = \\
&= x^2/2+x+xy-y^3/3+3y
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

Con esto en la mano podemos asegurar que la igualdad

$$
u(x,y) = x^2/2+x+xy-y^3/3+3y = C\,, \tag{4.50}
$$

con C =*constante define una solución* $y(x)$ *de la ecuación diferencial como función implícita de* x.

4.3.1. Factores Integrantes

A veces es factible encontrar una función $\mu(x,y)$ de tal forma que la expresión diferencial

$$
M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy\,, \tag{4.51}
$$

se convierta en una diferencial exacta al multiplicarla por μ, es decir,

$$
du(x,y) = \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy\,, \tag{4.52}
$$

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo Orden

5.1. Ecuaciones con Coeficientes constantes

5.1.1. Ecuaciones Homogéneas

Definición 5.1.1 *Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene la forma*

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y' + a_0 y = 0\,, \tag{5.1}$$

donde los coeficiente a_i, $i = 0, 1, 2$ son constantes. Cuando $a_2 = 1$ decimos que la ecuación está en **forma normal**.

La técnica de resolución de este tipo de ecuación es totalmente estándar y consiste en proponer una solución de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$, que al ser sustituida en la ecuación produce el resultado,

$$\begin{aligned} P(\lambda)\, e^{\lambda x} &= 0\,, \qquad \text{donde} \\ P(\lambda) &= a_2\, \lambda^2 + a_1\, \lambda + a_0\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

como la exponencial nunca es nula, λ tiene que ser raiz del **polinomio característico** $P(\lambda)$. En general, $P(\lambda)$ posee dos raices diferentes $\lambda_\pm$ (que pueden ser complejas conjugadas), el caso de una raíz doble debe ser tratado aparte.

Los matemáticos han demostrado rigurosamente que,

Teorema 5.1.1 *El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden homogénea a coeficientes constantes constituye un espacio vectorial de dimensión* 2

Cuando el polinomio característico pose dos raices diferentes, es facil demostrar que la igualdad

$$a_+\, e^{\lambda_+ x} + a_-\, e^{\lambda_- x} = 0 \tag{5.3}$$

solo puede satisfacerce si $a_+ = a_- = 0$, en otras palabras, las funciones

$$y_+(x) = e^{\lambda_+ x} \qquad y_-(x) = e^{\lambda_- x}\,, \tag{5.4}$$

son linealmente independientes y por ser dos, constituyen una base para el espacio de soluciones de la ecuación diferencial 5.11, en consecuencia,

Teorema 5.1.2 *Cuando el polinomio característico la ecuación 5.11 posee dos raices distintas, la solución más general de la ecuación es*

$$y(x) = a_+\, e^{\lambda_+ x} + a_-\, e^{\lambda_- x}\,, \tag{5.5}$$

donde a_+y a_- son contantes que deben calcularse a partir de algunas condiciones adicionales.

Teorema 5.1.3 *Cuando el polinomio característico de la ec 5.11 posee una raíz doble ocurre que $x\, e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación diferencial linealmente independiente de la socución $x\, e^{\lambda x}$ y por tanto, la solución más general posible a la ecuación diferencial es*

$$y(x) = a\, e^{\lambda_+ x} + b\, x e^{\lambda_- x}\,, \tag{5.6}$$

Para convencernos (demostrar) el enunciado del teorema basta con examinar la función

$$u(x) = xe^{\lambda - x}\,, \tag{5.7}$$

claramente,

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1 + x\lambda)\ e^{\lambda x} \\ u''(x) &= \lambda\ e^{\lambda x} + (1 + x\lambda)\,\lambda\, e^{\lambda x} = (x\lambda^2 + 2\lambda)\, u(x) \end{aligned} \tag{5.8}$$

al sustituir en el lado izquierdo de la ecuación diferencial queda

$$\begin{aligned} &\left\{a_2\left[x\lambda^2 + 2\lambda\right] + a_1\ [x\lambda + 1] + a_0\, x\right\}\ e^{\lambda x} = \\ &= x\, P(\lambda)\, e^{\lambda x} + (2a_2\lambda + a_1)\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

El primer término de la suma es cero prque λ es raíz del polinomio característico. Ahora bien, como la raíz es doble, el discriminante (Δ) del polinomio característico es cero y por tanto el valor de la raíz es

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2} = \frac{-a_1}{2a_2}\,, \tag{5.10}$$

lo que asegura que $2a_2\lambda + a_1$ es cero, demostrando que $u(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

La indpendencia lineal entre $u(x)$ y $e^{\lambda x}$ es obvia y eso completa la demostración del teorema.

5.1.2. Ecuaciones No Homogéneas

Definición 5.1.2 *Una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden en forma normal tiene la forma*

$$y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0 y(x) = f(x)\,, \tag{5.11}$$

donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1$ son constantes.

El teorema fundamental para la resolución de este tipo de ecuaciones es el siguiente,

Teorema 5.1.4 *La solución general de la ecuación 5.11 es*

$$y_G(x) = y_{GH}(x) + y_P(x) \tag{5.12}$$

donde $y_{GH}(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea y $y_P(x)$ una solución particular de la ecuación no homogńea.

Hay diversas técnicas que pueden usarse para reslver una ecuación del tipo que estamos discutiendo, quizá el más sencillo sea el

5.1.3. Método de Variación de Parámetros

Este método consiste en proponer una solución de la forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,, \tag{5.13}$$

donde y_1 y y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea.

Para ver como va el método necesitamos calcular la primera y segunda derivadas de la solución propuesta,

$$y' = c1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2' \tag{5.14}$$

ahora bien estamos buscando dos funciones (C1 y C2) y tenemos una sol ecuación, podemos permitirnos imponer un condición adicional, tipicamente se escoge

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \tag{5.15}$$

y en consecuencia

$$y'' = (c_1'y_1' + c_2'y_2') + c_1y_1'' + c_2y_2'' \tag{5.16}$$

Al sustituir la solución propuesta y sus derivadas en la ecuación original, el hecho de que y_1 y y_2 sean soluciones de la ecuación homogénea lleva a cancelaciones importantes y al final obtenemos

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f\,, \tag{5.17}$$

Hemos obtenido las siguientes dos ecuaciones para c_1 y c_2

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Podemos utilizar la primera ecuación para expresar una de las derivadas en función de la otra y luego, sustituyendo en la segunda ecuación obtendremos una ecuación diferencioal de primer orden trivialmente integrable cuya solución nos permitirá encontrar los dos parámetros.

Ejemplo 5.1.1 *Encontrar una solución particular a la ecuación*

$$\ddot{x} + 4x = 3\,cosec(t)\,. \tag{5.19}$$

Es evidente que dos soluciones linealmente independientes a la ecuación homogénea son:

$$y_1 = cos(2t) \quad y \quad y_2 = cos(2t).$$

La solución particular que estamos buscando en términos del método de variación de parámetros es

$$y_p(t) = c_1(t)cos(2t) + c_2(t)sen(2t)$$

al derivar

$$\dot{y}_p(t) = \dot{c}_1(t)cos(2t) + \dot{c}_2(t)sen(2t) - 2c_1(t)sen(2t) + 2c_2(t)cos(2t)\,,$$

en este punto imponemos la condición auxiliar 5.15

$$\dot{c}_1(t)cos(2t) + \dot{c}_2(t)sen(2t) = 0 \tag{5.20}$$

que implica,

$$\dot{y}_p(t) = -2c_1(t)sen(2t) + 2c_2(t)cos(2t)\,,$$

y de acá

$$\ddot{y}_p(t) = -2\dot{c}_1(t)sen(2t) + 2\dot{c}_2(t)cos(2t) - 4c_1(t)cos(2t) - 2c_2(t)cos(2t)\,.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial original,

$$-2\dot{c}_1 sen(2t) + 2\dot{c}_2 cos(2t) - 4c_1 cos(2t) - 4c_2 cos(2t) + 4\left(c_1 cos(2t) + c_2 sen(2t)\right) = 3cosec(t) \tag{5.21}$$

queda

$$-2\dot{c}_1(t)sen(2t) + 2\dot{c}_2(t)cos(2t) = 3cosec(t) \tag{5.22}$$

El sistema de acuaciones para los parámetros es

$$\begin{pmatrix} cos(2t) & sen(2t) \\ -2sen(2t) & 2cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3cosec(t) \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

podemos usar la primera ecuación pata expresar $\dot{u}_2$ *como*

$$\dot{c}_2(t) = -\frac{cos(2t)}{sen(2t)}\dot{u}_1(t) \tag{5.24}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación,

$$-2sen(2t)\dot{c}_1(t) - 2\frac{cos^2(2t)}{sen(2t)}\dot{c}_1(t) = 3cosec(t) \tag{5.25}$$

$$\left[\frac{-2sen^2(2t) - 2cos^2(2t)}{sen(2t)}\right]\dot{c}_1(t) = 3cosec(t) \tag{5.26}$$

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{3}{2}cosec(t)sen(2t) = -3cos(t) \tag{5.27}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\dot{c}_2(t) &= \left(-\frac{cos(2t)}{sen(2t)}\right)(-3cos(t)) = \\
&= 3\left(\frac{1-2sen^2(t)}{2sen(t)cos(t)}\right)cos(t) = \\
&= 3\frac{1-2sen^2(t)}{2sen(t)} = \frac{3}{2}cosec(t) - 3sen(t)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

en resumen

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1(t) &= -3cos(t) \\
\dot{c}_2(t) &= \frac{3}{2}cosec(t) - 3sen(t)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

integrando,

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= -3sen(t) + b_1 \\
c_2(t) &= \frac{3}{2}\ln|cosec(t) - cot(t)| - 3cos(t) + b_2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Ahora debemos construir la solución particular y_p,

$$y_p(t) = \left[-3sen(t) + b_1\right]cos(2t) + \left[\frac{3}{2}\ln|cosec(t) - cot(t)| - 3cos(t) + b_2\right]sen(2t)\,, \tag{5.31}$$

algo más de manioulación utilizando las fórmulas para ámgulos dobles producen el resultado final

$$y_p(t) = 3sen(t) + \frac{3}{2}\ln|cosec(t) - cot(t)|sen(2t) + b_1cos(2t) + b_2sen(2t)\,. \tag{5.32}$$

Es interesante notar la forma de la matriz de coeficientes que aparece en la ecuación 5.18,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\,, \tag{5.33}$$

esta matriz, dependiente de dos soluciones de la versión homogénea de ecuación 5.11, se denomina matriz de Wronski y volveremos sobre ella en la sección 5.4

5.2. Ecuaciones con coeficientes variables

En esta sección vamos a discutir algunos aspectos de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a coeficientes variables, es decir, de ecuaciones de la forma

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = F(x). \tag{5.34}$$

En primer lugar debemos establecer que

Teorema 5.2.1 *Las soluciones de la forma homogénea de la ecuación 5.34, es decir, de la ecuación*

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5.35}$$

constituyen un espacio vectorial de dimensión 2*.*

Corolario 5.2.1 *La solución general de la ecuación 5.35 está dada por:*

$$y_H(x) = A_1\, y_1(x) + A_2\, y_2(x) \tag{5.36}$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes (LI) de la ecuación homogénea y A_1 y A_2 son constantes a determinar a partir de algún conjunto de condiciones auxiliares.

Teorema 5.2.2 *La solución general de la ecuación no homogénea 5.34 se construye como*

$$y_{NH}(x) = y_H(x) + y_P(x) \tag{5.37}$$

donde $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

5.3. Método de Reducción de Orden

Consideremos una solución $y_1(x)$ a la ecuación homogénea 5.35, el método de El método de reducción de orden consiste en proponer una segunda solución de la forma $y_2(x) = \nu(x)y_1(x)$, al hacerlo y tomar derivadas,

$$\begin{aligned} y_2' &= \nu' y_1 + \nu y_1' \\ y_2'' &= \nu'' y_1 + 2\nu' y_1 + \nu y_1''\,. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Sustituyendo en la ecuación 5.35 obtenemos

$$\nu'' y_1 + 2\nu' y_1 + \nu y_1'' + P(\nu' y_1 + \nu y_1') + Q\nu y_1 = 0 \tag{5.39}$$

o reacomodando términos,

$$\nu'' y_1 + (2y_1' + P y_1)\,\nu' + \nu\,(y_1'' + P y_1' + Q y_1) = 0 \tag{5.40}$$

y como y_1 es solución de la ecuación homogénea, obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\nu'' y_1 + (2y_1' + P y_1)\,\nu' = 0 \tag{5.41}$$

que no es otra cosa que una ecuación de primer orden para ν'.

Un ejemplo de este método aparece en el problema de examen 12.2.1

5.4. El Wronskiano

La independencia lineal entre dos funciones cualesquiera se determina a través del determinante wronskiano (ó simplemente wronksiano) definido por

$$W(x) = det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \;=\; y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x). \tag{5.42}$$

Pensando en el teorema 5.2.1 es facil demostrar[1] que el wronskiano de dos soluciones de la ecuación (5.35) satisface la *fórmula de Abel*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} d\xi\, P(\xi)}, \tag{5.43}$$

es menester destacar que

[1]Basta con diferenciar la formula 5.42 y sustituir la ecuación 5.34

1. La fórmula de Abel solo depende de la función $P(x)$ que aparece en (5.35)

2. La fórmula de Abel permite demostrar que dos soluciones de la ecuación homogénea que sean LI en x_0 (un punto en que ambas soluciones existan) son LI en el intervalo máximal a que ambas soluciones puedan extenderse simultaneamente.

Es interesante notar que, en vista de que,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{G(x)}{F(x)}\right) = \frac{F(x)G'(x) - F'(x)G(x)}{F(x)^2} \tag{5.44}$$

el wronskiano de dos funciones cualesquiera puede escribirse en la forma

$$W(x) = F(x)G'(x) - F'(x)G(x) = [F(x)]^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{G(x)}{F(x)}\right)\,, \tag{5.45}$$

esta forma del wronskiano permite diseñar una estrategia para utilizar una solución cualquiera $y_1(x)$ de la ecuación homogénea para hallar una segunda solución $y_2(x)$ LI de la primera. En efecto, si $y_1(x)$ es una solución de (5.35) podemos poner

$$W(x) = [y_1(x)]^2\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) \tag{5.46}$$

es decir,

$$\frac{W(x)}{y_1^2(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\,, \tag{5.47}$$

de donde, integrando

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\,\int_{x_0}^{x} d\xi\,\frac{W(\xi)}{y_1^2(\xi)}}\,, \tag{5.48}$$

en virtud de la fórmula de Abel, el lado derecho de esta igualdad es independiente de y_2 y por lo tanto, $y_2(x)$ es es una solución de la ecuación de la ecuación homogénea que, por construcción es LI de $y_1(x)$.

5.5. Método de Frobenius: Soluciones en Serie

El método de Frobenius es una técnica de resolución de ecuaciones diferenciales de la forma

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5.49}$$

La técnica consiste en proponer una solución del tipo

$$y(x) = x^s[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...] \tag{5.50}$$

donde s no tiene por que ser un entero y tnato s como los coeficientes son las incógnitas a calcular.

En este capítulo exploraremos algunos aspectos del método.

5.5.1. Puntos Singulares Regulares e Irregulares

Observemos que la ecuación

$$y''(x) + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5.51}$$

puede reescribirse en la forma

$$y''(x) = F_1(x; y(x), y'(x)). \tag{5.52}$$

A partir de este punto es evidente que derivando con respecto a x podemos calcular las derivadas de orden superior de y según

$$\begin{aligned}
y^{(3)}(x) &= \frac{dF_1(x; y(x), y'(x))}{dx} = F_2(x; y(x), y'(x)) && (5.53)\\
y^{(3)}(x) &= \frac{dF_2(x; y(x), y'(x))}{dx} = F_3(x; y(x), y'(x)) && (5.54)\\
&\dots\\
y^{(k)}(x) &= \frac{dF_{k-2}(x; y(x), y'(x))}{dx} = F_{k-1}(x; y(x), y'(x)) && (5.55)\\
&\dots
\end{aligned}$$

Table 9.4

	Equation	Regular singularity $x =$	Irregular singularity $x =$
1.	Hypergeometric $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0.$	$0, 1, \infty$	–
2.	Legendre[a] $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$	$-1, 1, \infty$	–
3.	Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$	$-1, 1, \infty$	–
4.	Confluent hypergeometric $xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$	0	∞
5.	Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$	0	∞
6.	Laguerre[a] $xy'' + (1-x)y' + ay = 0.$	0	∞
7.	Simple harmonic oscillator $y'' + \omega^2 y = 0.$	–	∞
8.	Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$	–	∞

[a] The associated equations have the same singular points.

Figura 5.1: Ecuaciones típicas de la física Matemática

en consecuencia, dados x_0, $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ la ecuación diferencial nos permite calcular -en principio- todos los términos de la serie de potencias

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \tag{5.56}$$

que en caso de ser convergente representa la solución de la ecuación diferencial (5.49). Es bastante evidente que

1. Las propiedades de $P(x)$ y $Q(x)$ en x_0 podrían constituir limitantes para el proceso de construcción de $y(x)$

2. para que este algoritmo de construcción de $y(x)$ pueda tener esperanza de ser exitoso es menester poder asignar valores "arbitrarios" a x_0, $y(x_0)$ y $y'(x_0)$

Para elaborar un poco más sobre este particular consideremos el ejemplo

$$x^2\, u''(x) + ax\, u'(x) + b\, u(x) = 0 \tag{5.57}$$

donde a y b son constantes. Si pretendemos utilizar al punto $x = 0$ como centro de la expansión en serie y ocurre que o bien $u''(0)$ ó $u'(0)$ (o ambos) sea infinito, no es posible construir la serie de $u(x)$ alrededor de $x = 0$. Esto motiva la introducción de un conjunto de definiciones

Definición 5.5.1 *x_0 es un punto regular de la ecuación (5.49) si y solo si es posible asignar valores arbitrarios a $y(x_0)$ y $y'(x_0)$, en caso contrario x_0 es llamado un punto singular.*

Definición 5.5.2 *x_0 es un punto singular si bien $P(x)$, $Q(x)$ (ó ambas funciones) divergen en x_0.*

Definición 5.5.3 *x_0 es un punto singular regular si los límites*

$$\lim_{x\to x_0}\, (x - x_0)\, P(x), \ \ y \tag{5.58}$$

$$\lim_{x\to x_0}\, (x - x_0)^2\, Q(x) \tag{5.59}$$

existen. Si qualquiera de estos límites (o ambos) son divergentes el punto se denomina singular irregular.

Al usar la forma normal de la ecuación (5.57):

$$u''(x) + a\,\frac{u'(x)}{x} + b\,\frac{u(x)}{x^2} = 0\,, \tag{5.60}$$

en esta ecuación vemos que: $P(x) = a/x$ y $Q(x) = b/x^2$, por lo tanto $x = 0$ es un punto singular. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} xP(x) &= \lim_{x\to 0} x\frac{a}{x} = a \\ \lim_{x\to 0} x^2Q(x) &= \lim_{x\to 0} x^2\frac{b}{x^2} = b \end{aligned} \tag{5.61}$$

son limites bien definidos y por lo tanto, $x = 0$ es un punto singular regular de esta ecuación.

La clasificación de los puntos singulares y regulares de la ecuación (5.49) es importante para el estudio de las propiedades de su solución en términos de series de potencias (método de Frobenius). La convergencia de una solución en serie alrededor de un punto x_0 puede estar comprometida por la estructura de singularidades de $P(x)$ y $Q(x)$ alredeor de x_0.

Ejemplo 5.5.1 *Antes de continuar consideremos un ejemplo archiconocido, la ecuación*

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{5.62}$$

cuya solución general es

$$y(x) = a\,cos(x) + b\,sen(x) \tag{5.63}$$

De acuerdo al lenguaje que hemos establecido, todo punto del eje real es un punto regular de esta ecuación y por tanto, podemos, sin problema, intentar buscar una solución en serie alrededor de $x = 0$*, es decir, podemos proponer*

$$X(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... \tag{5.64}$$

Tomando derivadas, resulta

$$X''(x) = 2a_2 + 3 \times 2 \times a_3 \times x + ... \tag{5.65}$$

y al sustituir en la ecuación diferencial,

$$(a_0 + 2a_2) + (a_1 + 3 \times 2 \times a_3)x + (a_2 + 4 \times 3 \times a_4)x^2 + ... = 0 \tag{5.66}$$

igualando potencia por potencia

$$\begin{aligned} a_0 + 2a_2 &= 0 \\ a_1 + 3 \times 2 \times a_3 &= 0 \\ a_2 + 4 \times 3 \times a_4 &= 0 \\ \dots \end{aligned} \tag{5.67}$$

y allí observamos las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{aligned} a_0 &= -2a_2 \quad a_2 = -4 \times 3 \times a_4 \ \dots \\ a_1 &= -3 \times 2 \times a_3 \quad a_3 = -5 \times 4 \times a_5 \ \dots \end{aligned} \tag{5.68}$$

de donde sigue,

$$X(x) = a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right] \tag{5.69}$$

que, reconociendo las series como las series para sen(x) y cos(x) es la solución 5.63 que teníamos antes.

Ejemplo 5.5.2 *Queremos extender un poco el ejemplo 5.5.1 de la siguiente manera. Supongamos que tratábamos de resolver la ODE*

$$y'' + y = 0\,,$$

y supongamos adicionalmente que por alguna razón, solo fuimos capaces de encontrar la solución $y_1(x) = sen(x)$.

En ese caso debemos recordar la fórmula 5.48,

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} d\xi \, \frac{W(\xi)}{y_1^2(\xi)} \tag{5.70}$$

que nos permirte encontrar una solución LI de y_1, como insumo para utilizar esta fórmula, es menester utilizar la fórmula de Abel

$$W(x) = W(\pi/2)\, e^{-\int_{x_0}^{x} d\xi\, P(\xi)}, \tag{5.71}$$

para encontrar $W(x)$. En este caso, $P(x) = 0$ y por tanto,

$$W(x) = W(\pi/2) = constante\,. \tag{5.72}$$

Podemos tomar $W(\pi/2) = -1$, en cuyo caso,

$$y_2(x) = sen(x)\int_{\pi/2}^{x} d\xi\,\frac{1}{sen^2(\xi)} = sen(x)\int_{\pi/2}^{x} cosec^2(\xi)d\xi = sen(x)[cotg(x)]|_{\pi/2}^{x} = cos(x)\,, \tag{5.73}$$

que efectivamente, es la solución LI de sen(x) que estábamos buscando.

5.5.2. La Ecuación Indicial

Consideremos la siguiente ecuación diferencial[2]

$$\mathbf{L}[y] = x^2\,y''(x) + x\,P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{5.74}$$

con

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\,x^k, \quad y \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k\,x^k \tag{5.75}$$

Al llevar la ecuación a su forma normal queda,

$$y''(x) + \frac{P(x)}{x}y' + \frac{Q(x)}{x^2}y = 0\,, \tag{5.76}$$

$$y''(x) + \left[\frac{P_0 + P_1x + P_2x^2 + ...}{x}\right]y' + \left[\frac{Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + ...}{x^2}\right]y = 0 \tag{5.77}$$

Estamos interesado en comentar las condiciones bajo las cuales la serie de potencias formal

$$y(x) = x^s\left(1 + c_1x + c_2x^2 + \dots\right)\,, \tag{5.78}$$

[2]los problemas que nos interesan siempre se pueden llevar a esta forma a través de un cambio de variables

o

$$y(x) = x^s + c_1 x^{s+1} + c_2 x^{s+2} + \dots \,, \tag{5.79}$$

resuelve la ecuación.

Notemos que

$$y'(x) = s x^{s-1} + (s+1) c_1 x^s + (s+2) c_2 x^{s+1} + \dots \,, \tag{5.80}$$

$$y''(x) = s(s-1) x^{s-2} + (s+1) s c_1 x^{s-1} + (s+2)(s+1) c_2 x^s + \dots \,, \tag{5.81}$$

La sustitución directa de la serie formal y el uso del método de coeficientes indeterminados lleva de inmediato observar que <u>una condición necesaria</u> para que la serie formal (alrededor de $x_0 = 0$) sea solución de (5.74) es que el exponente α satisfaga la *ecuación indicial*[3]

$$\boxed{s(s-1) + P_0 s + Q_0 = 0} \tag{5.82}$$

condición que debe complementarse con un conjunto de relaciones de recurrencia para los coeficientes c_k.

Nuestro foco de interés está constituido por el siguiente resultado:

Teorema 5.5.1 *Si la ecuación (5.74) tiene un punto singular regular en $x = 0$ al menos una solución formal en serie de potencias satisface la ecuación diferencial. Más aún, a menos que las raices de la ecuación indicial difieran por un entero, existen dos series formales de potencias que constituyen soluciones LI de la ecuación (5.74) y cuyos exponentes (s) son las dos raices de la ecuación indicial*

Ejemplo 5.5.3 *Con el objectivo de mostrar en detalle el método de Frobenius vamos a retomar la ecuación de oscilacions armónicas, aunque esta vez colocaremos de manera explícita la frecuencia*

[3]la ecuación indicial es siempre una ecuación cuadrática para α

angular ω_0*=constante,*

$$y''(x) + \omega_0^2\, y(x) = 0 \tag{5.83}$$

esctrictamente hablando,el método de Frobenius comienza por proponer una solución de la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s\, \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 .....\right) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, x^{s+p}\,, \end{aligned} \tag{5.84}$$

donde, en principio, s *no tiene que ser un entero.*

Fijémonos que la solución que propusimos en el ejemplo 5.5.1 carecía del factor x^s*, esto se debe a que de alguna manera, "hicimos trampa", pero no nos concentremos en eso y continuemos a ver que ocurre ahora. Al calcular las derivadas,*

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(s+p) x^{s+p-1} \\ y''(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(s+p)\,(s+p-1)\, x^{s+p-2} \end{aligned} \tag{5.85}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(s+p)\,(s+p-1)\, x^{s+p-2} + \omega_0^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, x^{s+p} = 0\,, \tag{5.86}$$

si recordamos que la suma debe ser cero orden por orden en potencias y miramos la potencia más baja (x^{s-2})*, obtenemos la condición*

$$a_0\, s(s-1) = 0\,, \tag{5.87}$$

no estamos interesados en que el coeficiente a_0 *sea nulo y por tanto, aparece una condición para* s*,*

$$s(s-1) = 0\,, \tag{5.88}$$

esta es la ecuación indicial. En este caso las solucuiones son[4] $s = 0$ *y* $s = 1$

Al examinar los coeficientes con cuidado obtenemos que la condición de que la igualdad sea válida orden por orden en potencias de x *obtenemos que*

$$a_{p+2}[s+p+2][s+p+1] + \omega_0^2\, a_p = 0\,, \tag{5.89}$$

ó

$$a_{p+2} = -\frac{\omega_0^2}{[s+p+2][s+p+1]}\, a_p\,. \tag{5.90}$$

Al tomar la raiz $k = 0$ *de la ecuación indicial la fórmula de recursión 5.90 lleva a*

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\omega_0^2}{2!}\, a_0 \\ a_4 &= \frac{\omega_0^4}{4!}\, a_0 \\ a_6 &= -\frac{\omega_0^6}{6!}\, a_0 \\ &\dots . \end{aligned} \tag{5.91}$$

y en general,

$$a_{2n} = (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!}\, a_0 \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.92}$$

en definitiva,

$$\begin{aligned} y_{s=0}(x) &= x^0 [\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!}\, x^{2n}]\, a_0 = \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} = a_0\, cos(\omega_0 x)\,. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Al escoger la raíz $k = 1$ *se encuentala siguiente relación de recurrencia,*

$$a_{p+2} = -\frac{\omega_0^2}{[p+3][p+2]}\, a_p\,. \tag{5.94}$$

[4]observe que las raices de la ecuación indicial difieren en un entero

que resulta en

$$a_{2n} = (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n+1)!}\, a_0 \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.95}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} y_{s=1}(x) &= x^1 [\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!}\, x^{2n}]\, a_0 = \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{\omega_0^{2n}}{(2n)!}\, x^{2n+1} = a_0\, sen(\omega_0 x)\,. \end{aligned} \tag{5.96}$$

En este caso, y a pesar de que las raices de la ecuación indicial difieren en un entero, el método de Frobenius fue capaz de dar dos soluciones linealmente de la ecuación diferencial.

5.6. Problemas con las raices de la ecuación indicial

Cuando la ecuación indicial tiene una raiz doble o cuando (en muchos casos) las raices difieren por un entero, el método de Frobenius solo asegura proveer una solución ($y_1(x)$) y quizá haga falta buscar otra solución linealmente independiente.

Supongamos que solo obtuvimos una solución, una técnica para encontrar la solución independiente es a través de la fórmula

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\, \ln(x) + \sum_{k}^{\infty} b_k\, x^{k+r_<}}\,, \tag{5.97}$$

donde $y_1(x)$ es la solución basada en la mayor de las dos raices de la ecuación indicial y $r_<$ es la menor de las raices.

Este resultado es parte del contenido del

Teorema 5.6.1 *(***Fuchs***) toda ecuación diferencial de segundo orden de la forma,*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{5.98}$$

tiene una solución en serie generalizada de Frobenius cuando, o bien

$$p(x)\,,\quad q(x)\quad y\quad g(x) \tag{5.99}$$

sean analíticas en $x = a$ o a sea como más, un punto singular regular.

En otras palabras, bajo las condiciones establecidas, cualquier solución de la ecuación 5.98 puede expresarse en la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{n+s}, \quad a_0 \neq 0 \tag{5.100}$$

para algún número real positivo (s), o

$$y = \ln(x-a)\, y_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^{n+r}, \quad b_0 \neq 0 \tag{5.101}$$

para algún real positivo r, donde $y_0(x)$ es una solución del primer tipo.

Más aún, el radio de convergencia de estas soluciones es -al menos tan grande- como el mínimo entre los radios de convergencia de

$$p(x)\,, q(x)\ y\ g(x) \tag{5.102}$$

5.7. Ecuación y Funciones de Bessel

La ecuación de Bessel es una ecuación diferencial lineal de segundo orden directamente relacionada con las soluciones de la ecuación de Laplace, y que por su forma particular provee de un terreno fértil para discutir los resultados de la sección anterior. La ecuación de Bessel de orden ν está dada por

$$\boxed{z^2\, w'' + z\, w' + (z^2 - \nu^2)\, w = 0} \tag{5.103}$$

$$\boxed{w'' + \frac{1}{z}\, w' + \frac{z^2 - \nu^2}{z^2}\, w = 0} \tag{5.104}$$

esta ecuación tiene un punto singular regular en $z = 0$ y un punto singular irregular en $z = \infty$. Adicionalmente la forma de la ecuación corresponde exactamente con la forma de la ecuación (5.74) con: $P_0 = 1$ y $Q_0 = -\nu^2$, lo que nos permite intentar la búsqueda de una solución en series formal alrededor de $z = 0$. De acuerdo con lo que hemos aprendido, la ecuación indicial asociada a la ecuación de Bessel es

$$I(s) = s^2 - \nu^2 = 0\,, \tag{5.105}$$

de donde,

$$s = \pm\nu\,. \tag{5.106}$$

de manera que la solución formal en serie alrededor de $z = 0$

$$w = z^\nu\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right) \tag{5.107}$$

lleva a las siguientes condiciones para los coeficientes:

$$\begin{aligned} (2\nu+1)a_1 &= 0 & (5.108)\\ (k+2)(2\nu+k+2)\,a_{k+2} + a_k &= 0 \qquad k = 0,1,2,\dots & (5.109) \end{aligned}$$

En consecuencia, $a_1 = 0$ y

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+2)(2k+\nu+1)}\,, \quad k > 0 \tag{5.110}$$

al sustituir iterativamente se obtiene la solución

$$w(z) = z^\nu\left[1 - \frac{1}{\nu+1}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^4 \dots\right] \tag{5.111}$$

que al multiplicarse por el factor convencional:

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$

resulta en la función de Bessel de orden ν:

$$J_\nu(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left[1 - \frac{(z/2)^2}{\nu+1} + \frac{(z/2)^4}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\dots\right] \tag{5.112}$$

al considerar $-\nu$ se consigue otra solución denominada $J_{-\nu}(z)$. Estas soluciones cuya forma explícita es la siguiente:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \\ J_{-\nu}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \tag{5.113}$$

se conocen como **funciones de Bessel de primera especie** de orden $\pm\nu$. Las series convergen para todo valor finito de x.

Siempre que ν sea no entero ambas soluciones son linealmente independientes. Sin embargo, cuando $\nu = n$ es un entero[5] ocurre que

$$J_n(z) = (-)^n J_{-n}(z)$$

lo que implica que las dos soluciones formales no son linealmente independientes y por lo tanto es necesario buscar una solución linalmente independiente.

Aún cuando ν no es un entero, se acostumbra remplazar el par la customary, even if v is not an integer, to replace the pair $J_{\pm\nu}(x)$ por $J_\nu(x)$ y and $N_\nu(x)$ (la función de Newman) (o función de Bessel de segunda especie):

Cuando ν es un entero no negativo J_ν es una <u>función entera</u>. Si ν no es entero, la función:

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (z/2)^{-\nu+2k}}{\Gamma(-\nu+k+1)\Gamma(k+1)} \tag{5.114}$$

es una solución LI de la ecuación de Bessel de orden ν, que por cierto posee un punto de ramificación[6] en $z = 0$.

[5] es decir, el caso en que las raices de la ecuación indicial difieren por un entero

[6] branch point

En este caso podemos recurrir a la fórmula

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} d\xi \, \frac{W(\xi)}{y_1^2(\xi)} \tag{5.115}$$

para buscar una solución linealmente independiente (ver ejemplo 5.5.2).

Ejemplo 5.7.1 *Cuando expresamos la ecuación de Bessel en forma normal, referencia*

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}\, y = 0\,,$$

se destaca que el coeficiente de la primera derivada es $p(x) = 1/x$ y en consecuencia, la fórmula de Abel 5.43 para la ecuación de Bessel es

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} ds/s} = \frac{W(x_0)}{x} = \frac{A}{x} \tag{5.116}$$

Apoyándonos en el ejemplo 5.7.1, concluimos que una solución LI de la ecuación de Bessel de orden entero debe tener la forma,

$$Z_n(z) = J_n(z) \left(B + A \int \frac{dz}{z J_n^2(z)} \right) \tag{5.117}$$

5.7.1. La función de Newman de orden 0

Hagamos el ejercicio de construcción de la solución complementaria para $J_0(x)$, para ello miremos

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \tag{5.118}$$

en consecuencia,

$$y_2(x) = J_0(x) \int_{x_0}^{x} d\xi \, \frac{W(\xi)}{J_0^2(\xi)}\,, \tag{5.119}$$

pero,

$$W(\xi) = \frac{A}{\xi}$$

de donde

$$y_2(x) = AJ_0(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi J_0^2(\xi)}\,, \tag{5.120}$$

y por lo tanto,

$$y_2(x) = AJ_0(x) \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi(1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{64} + \dots)^2}\,, \tag{5.121}$$

ahora bien[7],

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 + (-\frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{64}) + \dots)^2} &= 1 - 2\left[-\frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{64}\right] + 3\left[-\frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{64}\right]^2 + \dots = \\
&= 1 + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^4}{32} + 3\frac{\xi^4}{16} + \dots = \\
&= 1 + \frac{\xi^2}{2} - [\frac{1}{32} - 3\frac{2}{32}]\xi^4 + \dots = \\
&= 1 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{5\xi^4}{32}] + \dots
\end{aligned}$$

sustituyendo,

$$y_2(x) = AJ_0(x) \int^{x} \frac{d\xi}{\xi}\left(1 + \frac{\xi^2}{2} - \frac{5\xi^4}{32} + \dots\right) = AJ_0(x)\left[B/A + \ln(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{128} + \dots\right] \tag{5.122}$$

donde hemos llamado B/A a la constante de integración. Por lo tanto la solución LI a la ecuación de Bessel de orden 0 construida con el método del wronskiano tiene la forma

$$Z_0(x) = J_0(z)\ \left[B + A\left(ln\,x + x^2/4 - 5x^4/128 + \dots\right)\right] \tag{5.123}$$

$$Z_0(x) = [B + A\ln(x)]\,J_0(x) + AJ_0(x)\left[x^2/4 - 5x^4/128 + \dots\right] \tag{5.124}$$

La escogencia usual de constantes consiste en imponer:

$$A = \frac{2}{\pi}, \quad y \qquad B = \frac{2\gamma - 2ln\,2}{\pi} \tag{5.125}$$

[7] $(1 + x)^{-2} \approx 1 - 2x + 3x^2 + ...$

donde $\gamma = 0{,}5772156...$ es la constante de Euler-Mascheroni. Esta escogencia define la función de Newman de orden cero,

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\ln(x) + \gamma - \ln 2\right] J_0(x) + \frac{2}{\pi} J_0(x)\left[x^2/4 - 5x^4/128 + \dots\right] . \tag{5.126}$$

Una vez definida la función de Newman de orden cero, podemos asegurar qu la solución general a la ecuación[8]

$$y''(x) + \frac{1}{x}\, y'(x) + y(x) = 0 \tag{5.127}$$

es de la forma

$$y(x) = AJ_0(x) + BN_0(x)\,, \tag{5.128}$$

donde A y B son constantes.

Las siguientes notas son de mucho interés

- $N_0(x)$ es singular en $x = 0$
- Comportamiento asintótico ($x \to \infty$)

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\left[cos(x - \pi/4)\right] \tag{5.129}$$

$$N_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\left[sen(x - \pi/4)\right] \tag{5.130}$$

5.7.2. Funciones de Newman

Las funciones de Neumann, también conocidas como **funciones de Bessel de segunda especie**[9] son soluciones de la cuación de Bessel de orden ν.

A partir de las funciones de Bessel y Neumann de orden 0 es posible construir una base canónica para las soluciones de la ecuación de Bessel de orden entero para cualquier n.

[8] Besel de orden 0

[9] muy ocasionalmente se les refiere como **funciones de Weber**

Para ver esto es menester observar que si $\mathcal{Z}_\nu(z)$ es solución de la ecuación de Bessel de orden ν entonces

$$\mathcal{Z}_{\nu+1}(z) \equiv\; - z^{\nu}\left(z^{-\nu}\mathcal{Z}_\nu(z)\right)' \tag{5.131}$$

es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\nu+1$.

La relación (5.131) permite definir las funciones de Neumann de para n entero a través de la recurrencia:

$$N_{n+1}(z) = -z^n\left(z^{-n}N_n(z)\right)' \tag{5.132}$$

esta relación de recurrencia permite mostrar que las funciones de Neumann de orden n tienen la forma

$$N_n(z) = J_n(z)\left(f_n(z) + K_n\, ln\, z\right) \tag{5.133}$$

donde f_n es una serie de potencias (i.e. la parte analítica de la expresión encerrada en el paréntesis).

Cuando ν no es entero las funciones de Neumann se definen por

$$N_\nu(z) \equiv \frac{J_\nu(z)cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{sen(\nu\pi)} \tag{5.134}$$

Como note final debemos destacar que todas las funciones de Neumann son singulares en $x=0$.

Capítulo 6

Problemas de Sturm-Liouville

La sección 2.3 es requisito indispensable para este capítulo

6.1. Abreboca

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \lambda y(x)\,, \quad 0 \leq x \leq 1\,, \tag{6.1}$$

donde λ es un parámetro libre, complementada con las condiciones

$$y(0) = 0 \quad y(1) = 0\,, \tag{6.2}$$

que denominaremos *condiciones de frontera*. Si definimos el operador

$$\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2}\,, \tag{6.3}$$

podemos reescribir la ecuación diferencial en la forma

$$\mathbf{L}y = \lambda\, y\,, \tag{6.4}$$

que tiene la apariencia de un problema de autovalores y autovectors para **L**. Sigamos esta idea a ver que ocurre.

La solución general a la ecuación (6.1) que nos interesa tiene tres tipo de solución general, según el signo de λ, por brevedad tomemos el caso en que $\lambda < 0$, en ese caso, la solución general de la ecuación diferencial tiene la forma

$$y(x) = A\,cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,sen(\sqrt{\lambda}x)\,, \tag{6.5}$$

al evaluar las condiciones de frontera tenemos

$$\begin{aligned} y(0) &= A\,cos(\sqrt{\lambda}\,0) + B\,sen(\sqrt{\lambda}\,0) = 0 \\ y(1) &= A\,cos(\sqrt{\lambda}\,1) + B\,sen(\sqrt{\lambda}\,1) = 0\,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

equaciones que corresponden al siguiente sistema lineal, **dependiente de** λ para deterinar A y B

$$\begin{pmatrix} cos(\sqrt{\lambda}\,0) & sen(\sqrt{\lambda}\,0) \\ cos(\sqrt{\lambda}\,1) & sen(\sqrt{\lambda}\,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{6.7}$$

o

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cos(\sqrt{\lambda}) & sen(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{6.8}$$

si la matriz de coeficientes es no singular la única solución al sistema es $A = B = 0$, es decir $y(x) = 0$ que no es nada interesante, por cierto. Por otra parte, si la matriz de coeficientes *es singular*, es decir, si su determinante es nulo, podemos tener soluciones no nulas para A y B y con ello una solución $y(x)$ que no sea idénticamente nula en el intervalo $[0, 1]$. El determinate de la matriz es

$$det\begin{pmatrix} cos(\sqrt{\lambda}0) & sen(\sqrt{\lambda}0) \\ cos(\sqrt{\lambda}) & sen(\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} = sen(\sqrt{\lambda})\,, \tag{6.9}$$

y por tanto, la condición de singularidad de la matriz de coeficientes es:

$$sen(\sqrt{\lambda}) = 0\,, \tag{6.10}$$

que implica, que el parámetro indeterminado λ ha de satisfacer la condición

$$\sqrt{\lambda} = n\pi\,, \quad \text{o} \quad \lambda = n^2\pi^2\,, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{6.11}$$

Al sustituir de vuelta en el sistema para A y B obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{6.12}$$

de donde deducimos: $A = 0$ y B arbitrario.

6.1.1. ¿En que sentido tenemos un problema espectral?

Esta sección va a ser algo rara al principio pero al final ilustrará el sentido que tiene lo que hemos estado estudiando en este capítulo.

Pensemos en una función definida sobre el intervalo $[0,1]$, y en unos cuantos (digamos 10) puntos equiespaciados[1] del dominio. Podemos evaluar la función en esos puntos para obtener una lista de valores $f(0)$, $f(0+h)$, $f(0+2h)$, ..., $f(0+9h) = f(1)$. Por otra parte, pensemos en las fórmulas de Taylor,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \ldots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \ldots \end{aligned} \tag{6.13}$$

de allí deducimos la siguiente fórmula aproximada para la derivada segunda,

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \tag{6.14}$$

[1] la distancia entre dos de los puntos es h

Ahora pensemos en dos cosas, una cierta matriz diagonal por bandas y un vector, la matriz es

$$\mathbf{D2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

y el vector lo formamos con las diez "muestras" de f

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(0) & f(h) & f(2h) & f(3h) & f(4h) & f(5h) & f(6h) & f(7h) & f(8h) & f(9h) \end{pmatrix}^T \tag{6.16}$$

si hacemos el producto $\mathbf{D2}\,\mathbf{f}$,

$$\begin{pmatrix} f(h) - 2f(0) \\ f(2h) + f(0) - 2f(h) \\ f(3h) + f(h) - 2f(2h) \\ f(4h) + f(2h) - 2f(3h) \\ f(5h) + f(3h) - 2f(4h) \\ f(6h) + f(4h) - 2f(5h) \\ f(7h) + f(5h) - 2f(6h) \\ f(8h) + f(6h) - 2f(7h) \\ f(9h) + f(7h) - 2f(8h) \\ f(8) - 2f(9h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \\ f(5h) \\ f(6h) \\ f(7h) \\ f(8h) \\ f(9h) \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

es decir, salvo por los dos puntos extremos del intervalo y el factor $1/h^2$, ¡la matriz **D2** está entregando las muestras de la segunda derivada de f! en otras palabras, el operador de segunda derivada es una matriz de tamaño $\infty \times \infty$. El problema en los dos extremos se debe precisamente a que la matriz que estamos usando no es infinita. En todo caso, **D2** es una matriz hermítica, en consecuencia respeta las hipótesis del teorema espectral, por lo tanto estamos seguros de que sus autovectores constituyen una base para el espacio de dimensión 10 en que viven las muestras de f.

En el caso en que estiremos las cosas a dimensión infinita esperamos que todo vaya igual y el problema en los extremos se resuelve imponiendo las condiciones de borde al problema espectral

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \lambda\, y(x)$$

¿Qué conclusiones hemos alcanzado hasta este punto?.

1. Las condiciones de borde determinan una famila de valores posibles para λ, estos valores posibles son los **autovalores del problema constituido por la ecuación diferencial y las condiciones de borde**

2. Para cada autovalor hay una autofunción asociada.

3. Los matemáticos logran demostrar rigurosamente que la familia de funciones[2]

$$y_n(x) = sen(n\pi x)\,, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{6.18}$$

conforman un conjunto de infinitas soluciones para el problema integrado por la ec diferencial complementada con las condiciones de contorno.

6.1.2. Lo que descubrieron y nos enseñan los matemáticos

Nuestros amigos matemáticos han cavilado profundamente acerca del problema que acabamos de estudiar en esta sección y han concluído cosas mucho más interesantes y detalladas que los items

[2]los índices negativos son irrelevantes

de la lista con que concluyó la sección anterior.

Comencemos por notar que una superposición de dos términos, como por ejemplo,

$$f(x) = a_2\, sen(2\pi x) + a_7\, sen(7\pi x)\,, \tag{6.19}$$

es una solución del problema de contorno ($f(x)$ resuelve la ecuación diferencial y satisface las condiciones de borde). Lo mismo ocurre con una superposición de 5 términos, algo como

$$f(x) = a_3\, sen(3\pi x) + a_4\, sen(4\pi x) + a_{14}\, sen(14\pi x) + a_{77}\, sen(77\pi x) + a_{169}\, sen(169\pi x)\,, \tag{6.20}$$

por extensión, una superposición de infinitos términos de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen(n\pi x)\,, \tag{6.21}$$

es una solución del problema planteado.

Lo que en verdad está ocurriendo es que que el conjunto de soluciones del problema que nos ocupó, constituye un espacio vectorial de dimensión (trompetas, por favor) **infinita**.

Pensado como problema de álgebra lineal, lo que teníamos en la mano era nada más y nada menos que un problema de autovalores y autovectores (sección 2.3) y al encontrar la familia de valores $n\pi$, $n = 1, 2, ...$ encontramos infinitos autovalores al problema y no solo eso, encontramos infinitos autovectores (en este caso, uno asociado a cada autovalor).

De hecho, los matemáticos logran demostrar[3] que, la familia de funciones

$$y_n(x) = sen(n\pi x)\,, \tag{6.22}$$

constituye no solo una familia de *autofunciones* del problema, sino que adicionalmente, constituye una base para el espacio de soluciones del mismo. La fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen(n\pi x)\,, \tag{6.23}$$

[3] esta es una demostración bien larga y dificil

no es otra cosa que la forma del *vector más general posible* de dicho espacio vectorial y si queremos restringirnos a un solo vector particular, es necesario determinar los coeficientes a_n.

6.2. ¿Cómo entender a los matemáticos? o ¿como calcular los coeficientes?

Al mirar la fórmula terrorífica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sen(n\pi x)\,, \tag{6.24}$$

MUAJAJAJAJAJA (mad scientist hysterical laughter), es fundamental que la entendamos como:

$$\begin{aligned} vector &= \text{suma de coeficientes por vectores de base} \\ \mathbf{u} &= \sum a_n\, \mathbf{e}_n\,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

y los $\mathbf{e}_n$ son los vectores **ortogonales** de base obtenidos como autovectores de un problema.

Falta un ingrediente, ¡el producto escalar!. Los matemáticos también resolvieron eso, y establecen lo siguiente:

Definición 6.2.1 *Dadas dos funciones, definidas en el intervalo* $[0,1]$*, el producto interno (escalar)* $\langle f(x), g(x)\rangle$ *está dado por*

$$\langle f(x), g(x)\rangle \equiv \int_0^1 dx f(x) g(x) \tag{6.26}$$

Con este producto, las funciones

$$e_n(x) = sen(n\pi x) \tag{6.27}$$

son ortogonales, en particular,

$$\langle sen(n\pi x), sen(p\pi x)\rangle = \begin{cases} 0 & n \neq p \\ 1/2 & n = p \end{cases}\,, \tag{6.28}$$

que Usando la delta de Kronecker (definición 2.2.1), podemos poner

$$\langle sen(n\pi x), sen(p\pi x)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{np}\,, \tag{6.29}$$

ó

$$\langle e_n(x), e_p(x)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{np}\,. \tag{6.30}$$

Si reescribimos la igualdad 6.24 en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n(x)\,, \tag{6.31}$$

recordamos la seeción 2.2 y tratamos todo como si se tratara de un problema en dimensión finita, queda claro que los coeficientes se obtienen tomando el producto interno de toda la igualdad por $e_k(x)$ como sigue

$$\langle e_k(x), f(x)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\langle e_k(x), e_n(x)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\delta_{kn}\,, \tag{6.32}$$

debido a las propiedades de la delta de Kronecker, el único término no nulo del lado derecho de la fórmula ocurre para $n = k$ y por lo tanto,

$$\langle e_k(x), f(x)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_k\,, \tag{6.33}$$

de donde,

$$a_k = 2\langle e_k(x), f(x)\rangle\,, \tag{6.34}$$

fórmula qur, que reescribiendo el producto scalar, tiene la forma

$$a_k = 2\int_0^1 f(x) sen(k\pi x)\, dx\,. \tag{6.35}$$

Problema 6.2.1 *Resolver el problema de autovalores y autovectores para la ecuación*

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \lambda y(x)\,, \qquad -1/2 \le x \le 1/2\,, \tag{6.36}$$

complementada con las condiciones de borde

$$y(-1/2) = 0 \quad y(1/2) = 0\,, \tag{6.37}$$

El resto de este capítulo trata de generalizar un poco la discusión de este abreboca.

6.3. ¿Qué es un Problema de Sturm-Liouville?

Table 10.1

Equation	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Legendre[a]	$1-x^2$	0	$l(l+1)$	1
Shifted Legendre[a]	$x(1-x)$	0	$l(l+1)$	1
Associated Legendre[a]	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
Chebyshev I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
Shifted Chebyshev I	$[x(1-x)]^{1/2}$	0	n^2	$[x(1-x)]^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
Ultraspherical (Gegenbauer)	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
Bessel[b], $0 \le x \le a$	x	$-n^2/x$	a^2	x
Laguerre, $0 \le x < \infty$	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Associated Laguerre[c]	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-x}$
Hermite, $0 \le x < \infty$	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
Simple harmonic oscillator[d]	1	0	n^2	1

[a] $l = 0, 1, \ldots, -l \le m \le l$ are integers and $-1 \le x \le 1$, $0 \le x \le 1$ for shifted Legendre.
[b] Orthogonality of Bessel functions is rather special. Compare Section 11.2. for details. A second type of orthogonality is developed in Eq. (11.174).
[c] k is a non-negative integer. For more details, see Table 10.2.
[d] This will form the basis for Chapter 14, Fourier series.

Figura 6.1: Problemas de Sturm Liouville. Pirateado de Arfken

Definición 6.3.1 *Una ecuación de Sturm-Liouville es una ecuación diferencial lineal homogénea de* 2^0 *orden de la forma*[4]

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)y'(x)\right] + \left[\lambda\rho(x) - Q(x)\right] y(x) = 0 \tag{6.38}$$

[4] En la notación de Arfken:

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0\,, \quad \mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)u(x)$$

donde λ es un parámetro, mientras que P, Q y ρ son funciones con valores reales.

Introduciendo el operador diferencial

$$\mathbf{L} \equiv \frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d}{dx}\right] - Q(x) \tag{6.39}$$

que actúa como

$$\mathbf{L}[y] = \frac{d}{dx}\left[P(x)y'(x)\right] - Q(x)y(x) \tag{6.40}$$

podemos expresar la ecuación de Sturm-Liouville como

$$\boxed{\mathbf{L}[y] + \lambda\rho(x)y = 0}\,, \tag{6.41}$$

donde a la función $\rho(x)$ se le denomina **densidad**

Definición 6.3.2 *La ecuación de Sturm-Liouville se denomina regular en el intervalo $I = [a, b] \in \Re$ si las funciones P y ρ son diferentes de cero en I y las tres funciones P, Q y ρ son contínuas y acotadas en I.*

Definición 6.3.3 *Un sistema de Sturm-Liouville regular es una ecuación de Sturm Liouville regular en el intervalo finito $I = [a, b]$, en conjunto con un par de condiciones de borde*

$$A\,y(a) + B\,y'(a) = 0 \tag{6.42}$$

$$C\,y(b) + D\,y'(b) = 0 \tag{6.43}$$

Observemos lo que ocurre con un par de funciones regulares cualesquiera definidas en $[a, b]$ y que satisfacen algúna clase adecuada de condiciones de borde del tipo que acabamos de introducir. Al aplicar $\mathbf{L}$ sobre una de ellas, multiplicar por la otra y restar queda

$$u(x)\mathbf{L}[v] - v(x)\mathbf{L}[u] = \frac{d}{dx}\left\{P(x)\left[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)\right]\right\} \tag{6.44}$$

si adicionalmente integramos en el intervalo $[a, b]$ se obtiene

$$\int_a^b dx\, u(x)\mathbf{L}v(x) = \int_a^b dx\, [\mathbf{L}u(x)]v(x) + \{P(x)\,[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)]\}\,|_a^b \tag{6.45}$$

si escogemos en particular $A = A' = 1$ y $B = B' = 0$, los términos de borde desaparecen sin problema y el operador es claramente un **operador autoadjunto** ($\mathbf{L} = \mathbf{L}^\dagger$) como lo demuestra la igualdad

$$\int_a^b dx\, u(x)\mathbf{L}v(x) = \int_a^b dx\, [\mathbf{L}u(x)]v(x) \tag{6.46}$$

El problema de Sturm-Liouville puede en consecuencia interpretarse como un problema de autovalores para el operador autoadjunto $\mathbf{L}$.

Comentario 6.3.1 *Con el fin de simplificar las cosas pensemos en el caso en que la función de densidad es constante, más aún, pongamos $\rho(x) = 1$. En ese caso, el problema de Sturm Liouville corresponde a resolver:*

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}[y] = -\lambda\, y \\ &A\, y(a) + B\, y'(a) = 0 \\ &C\, y(b) + D\, y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Salvo el signo $-$ en frente de y en la ecuación diferencial y el hecho de que las condiciones de borde son un poco más complejas, este problema es muy similar al que estudiamos en la sección 6.1.

Un problema de Sturm-Liouville homogéneo es un problema de autovalores y autovectores para el operador $\mathbf{L}$ que debe ser copmplementado con ciertas condiciones de borde.

Bajo hipótesis muy generales, si el dominio de la variable x es un intervalo cerrado finito, los autovalores constituyen un conjunto infinito discreto $\{\lambda_0, \lambda_1, ...\}$ al que se asocian un conjunto de autofunciones $\phi_n(x)$ que satisfacen, tanto la ecuación diferencial como las condiciones de borde.

El conjunto de soluciones que satisface las condiciones de problema constituye un espacio vectorial de dimensión infinita cuya base está formada por las autofuncones y en consecuencia, la solución *más general posible ($y_h(x)$) del problema se Sturm Liouville homogénmeo es una combinación lineal arbitraria de las autofunciones, es decir,*

$$y_h(x) = \sum_n c_n \phi_n(x)\,, \tag{6.48}$$

evidentemente, esta solución no es única. La unicidad se alcanza cuando se provee algún conjunto de condiciones adicionales que permita determinar los valores de las constantes c_n.

Al igual que lo que ocurre en álgebra lineal en dimensión finita, las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales, en efecto, si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones del problema de Sturm-Liouville asociadas a autovalores distintos se muestra facilmente que

$$[\lambda_1 - \lambda_2] \int_a^b dx\, \rho(x)\, y_1(x) y_2(x) = 0 \tag{6.49}$$

y como por hipótesis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implica la condición de ortogonalidad buscada.

$$\int_a^b dx\, \rho(x)\, y_1(x) y_2(x) \equiv \langle y_1 | y_2 \rangle_\rho = 0 \tag{6.50}$$

Una ecuación de Sturm-Liouville puede estar definida en un intervalo finito, semi-infinito e incluso sobre todo $\Re$. En el caso finito el intervalo puede excluir uno o ambos extremos. La exclusión de alguno (pongamos a por decir algo) extremos puede ser necesaria cuando

$$\lim_{x\to a} P(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} \rho(x) = 0\,,$$

ó cuando alguna de las funciones P,Q, ρ es singular en alguno de los extremos.

Solo cuando el intervalo de definición I es finito y cerrado se puede definir un problema de Sturm-Liouville regular, en los otro casos debemos extender la noción como sigue

Definición 6.3.4 *Un sistema Sturm-Liouville singular es una ecuación Sturm-Liouville definida sobre un intervalo I y que presenta al menos alguna de las siguientes características*

1. *El intervalo I es infinito o semi-infinito*
2. *El intervalo I es finito y al menos una de las funciones P, ρ se anula en uno (o ambos extremos), o si q tiene discontinuidades en $int[I]$*

6.4. Dos ecuaciones muy importantes

En estas notas encontraremos con frecuencia dos ecuaciones difrneciales muy conocidas que nos permitiraán ejemplificar muchos de los conceptos fundamentales de interés.

6.4.1. Ecuación de Legendre

Forma Estándar

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \ell(\ell+1)y = 0 \tag{6.51}$$

Forma Autoadjunta

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \ell(\ell+1)y = 0 \tag{6.52}$$

6.4.2. Ecuación de Bessel

Forma Estándar

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{6.53}$$

Forma Reducida

$$y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{n^2}{x^2})y = 0 \tag{6.54}$$

Forma Autoadjunta

$$\frac{d}{dx}\left[x\,y'\right] + (x - \frac{n^2}{x^2})y = 0 \tag{6.55}$$

Ejemplo 6.4.1 *La ecuación de Legendre*

$$(1-x^2)\, y'' - 2x\, y' + \ell(\ell+1)y = 0 \tag{6.56}$$

se reescribe facilmente como

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'\right] + \ell(\ell+1)y = 0\,, \tag{6.57}$$

con esta forma, es evidente que la ec. de Legendre es una ecuación de Sturm-Liouville con densidad $\rho = 1$, $P(x) = 1 - x^2$, *y* $Q(x) = 0$.

Definida en el intervalo $I = [-1, 1]$ *la ecuaciónde Legendre constituye un sistema de Sturm Liouville singular porque la función* P *tiene raices en ambos extremos del intervalo de definición. Las soluciones de este problema constituyen una sucesión de polinomios de orden* ℓ *denominados polinomois de Legendre de orden* ℓ *(*$P_\ell(x)$*. Si se escoge la normalización* $P_n(1) = 1$*, ocurre que*

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_\ell(x) P_m(x) = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell,m} \tag{6.58}$$

Dicho en otros términos, para la ecuación de Legendre el producto escalar es

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx \tag{6.59}$$

Ejemplo 6.4.2 *La ecuación de Legendre aparece vinculada a varios problemas tridimensionales en que hay que llevar a cabo cmbios de variable. Este ejercicio prepara el camino.*

Demostrar que, usando el cambio de variables $x = cos\theta$*, la ecuación de Legendre*[5]

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n''(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \tag{6.60}$$

se transforma en

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{dP(cos\theta)}{d\theta}\right) + n(n+1)P(cos\theta) = 0$$

[5] Arf P751

Al cambiar variables la regla de la cadena demuestra

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -sin\theta\,\frac{df}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{sin\theta}\frac{df}{d\theta} \tag{6.61}$$

Otra manera de llegar a esta fórmula (que causa escándalo entre algunos matemáticos muy exigentes) consiste en usar el cambio de variables propuesto para poner

$$dx = -sin(\theta)d\theta\,,$$

y de allí

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}$$

Al sustituir la fórmula 6.61 en la ecuación 6.60 resulta

$$(1-cos\theta^2)\frac{1}{sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{sin(\theta)}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right] + 2cos\theta\frac{1}{sin(\theta)}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta} + n(n+1)P_n(cos\theta) = 0$$

Miremos el primer término de la suma

$$\begin{aligned} sin\theta \times \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{sin(\theta)}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right] &= sin\theta \times \left(-\frac{cos\theta}{sin^2\theta}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta} + \frac{1}{sin\theta}\frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}\right) = \\ &= -\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta} + \frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}\,. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Al sumar con el otro término que contiene P'

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}+\frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}\right]+2cos\theta\frac{1}{sin\theta}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}=\\
&=\frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}+\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}=\\
&=\frac{1}{sin\theta}\left[sin\theta\frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}+cos\theta\,\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right]=\\
&=\frac{1}{sin\theta}\left[sin\theta\frac{d^2P_n(cos\theta)}{d\theta^2}+\frac{dsin\theta}{d\theta}\,\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right]=\\
&=\frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[sin\theta\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right]
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Así que, en definitiva

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\theta\,\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right]+n(n+1)P_n(cos\theta)=0 \tag{6.64}$$

Capítulo 7

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace (llamada asi por Pierre-Simon Laplace) es una transformación integral que convierte una función de una variable real (t) a una variable compleja (s). La transformación tiene muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería pues constituye una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. En particular, la transformada de Laplace conviete una ecuación diferencial en una ecuación algebráica y una convolución en un producto.

En términos de las variables, si t tiene dimensiones de tiempo, s tiene unidades de frecuencia (frecuencia compleja)

7.1. La función Gamma

La función Gamma (Γ) es una extensión del factorial a los complejos salvo a los enteros no positivos donde la función resulta ser singular, para los entero positivos,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Daniel Bernoulli encontró la siguiente fórmula integral para los complejos con parte real positiva

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}\, e^{-x} dx\,, \quad \Re(z) > 0\,, \tag{7.1}$$

formula que estaremos usando en el resto del capítulo 7

7.2. Dos funciones Generalizadas para hablar luego

Definición 7.2.1 *La función escalón de Heaviside $H(t)$ ($\Theta(t)$) está definida como*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Definición 7.2.2 *La Delta de Dirac (impulso), $\delta(t)$ es el único objeto que para toda función $f(t)$ satisface,*

$$\int f(t)\, \delta(t - t_o)\, dt = f(t_0)$$

Teorema 7.2.1

$$\frac{dH(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0) \tag{7.2}$$

Definición 7.2.3 *Dada una función $f(t)$, su transformada de Laplace es otra función de variable s que se calcula a ttavés de la fórmula*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, f(t) \tag{7.3}$$

La transformada de Laplace es muy interesante por diversas razones, entre otras, permite cambiar una ecuación diferencial en una ecuación polinómica.

7.3. Algunas Transformadas fundamentales

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\mathcal{L}(f) - f(0) \tag{7.4}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f}{dt^2}\right\} = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \tag{7.5}$$

$$\mathcal{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{s} \tag{7.6}$$

$$\mathcal{L}\left\{H(t-t_o)\right\} = \frac{e^{-st_0}}{s} \tag{7.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_o)\right\} = e^{-st_0} \tag{7.8}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{a-s} \tag{7.9}$$

$$\mathcal{L}\left\{sen(at)\right\} = \frac{a}{s^2+a^2} \tag{7.10}$$

$$\mathcal{L}\left\{cos(at)\right\} = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{7.11}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{p+1}}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{7.12}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \tag{7.13}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1/2}\right\} = \frac{1\times 3\times 5\times 7\times ...\times(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+1/2}}\,, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{7.14}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^p\right\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\,, \quad p > -1 \tag{7.15}$$

7.3.1. Ejemplos de Cálculo

$$\mathcal{L}\left\{H(t-t_o)\right\} = \int_0^\infty dt\, e^{-st}\, H(t-t_0) = \int_{t_0}^\infty dt\, e^{-st} = -\frac{e^{-st}}{s}|_{t_0}^\infty = \frac{e^{-st_0}}{s} \tag{7.16}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty dt\, e^{(a-s)t} = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}|_0^\infty = \frac{1}{s-a} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{sen(at)\right\} &= \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s+ia} - \frac{1}{s-ia}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{s-ia-(s+1a)}{s^2+a^2}\right] = \\ &= \frac{1}{2i}\frac{2ia}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} &= \int_0^\infty dt\,\frac{df}{dt}e^{-st} = \\
&= \int_0^\infty dt\,\left[\frac{d}{dt}\left(f(t)\,e^{-st}\right) + se^{-st}f(t)\right] = \\
&= \left[f(t)\,e^{-st}\right]|_0^\infty + \int_0^\infty dt\,\left[se^{-st}f(t)\right] = \\
&= -f(0)\,e^{-s0} + \int_0^\infty dt\,se^{-st}f(t) = \\
&= s\mathcal{L}(f) - f(0)
\end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{t^p\right\} = \int_0^\infty t^p\,e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}} \tag{7.20}$$

el cambio de variable $u = st$ implica $dt = du/s$ de donde,

$$\mathcal{L}\left\{t^p\right\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\,, \qquad p > -1 \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^n\right\} &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u}\,\frac{du}{s} = \\
&= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^{(n+1)-1}\,e^{-u}\,du \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \qquad n = 1, 2, 3, ...
\end{aligned} \tag{7.22}$$

7.4. Aplicaciones Simples

Ejemplo 7.4.1 *Como se discutió en el ejemplo 4.1.1 la descarga de un condensador se describe por el problema de condici0nes iniciales*

$$\boxed{\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = 0}\,, \qquad q(0) = q_0$$

El producto RC constituye la constant de tiempo del circuito τ.

Al aplicar la transformación de Laplace a la ecuación diferencial obtenemos (Q es la transformada de Laplace de la carga),

$$\boxed{[sQ(s) - q(0)] + \frac{Q(s)}{RC} = 0}$$

reordenando los términos,

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) Q(s) = q(0)$$

y en definitiva,

$$Q(s) = \frac{q(0)}{s + \frac{1}{\tau}}\,,$$

en este punto, examinamos las tablas para llevar la expresión de vuelta al dominio del tiempo obteniendo,

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ejemplo 7.4.2 *Un problema asociado al anterior es el de un condensador conectado a un circuito $R - C$ en serie al que se introduce (también en serie) una fuente de voltaje $v(t)$, en este caso, la carga en el condensador se describe por la ecuación diferencial,*

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{v(t)}{R}$$

Como en el caso anterior, utilizamos la transformada de Laplace para cambiar la ecuación por

$$sQ(s) - q(0) + \frac{Q(s)}{\tau} = \frac{1}{R}V(s)$$

reorganizando los términos,

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right) Q(s) = \frac{1}{R}V(s) + q(0)\,,$$

y de acá,

$$\boxed{Q(s) = \frac{q(0)}{s + \tau^{-1}} + \frac{1}{R}\frac{V(s)}{s + \tau^{-1}}}\,,$$

estamos intresados en el caso en que la fuente de voltaje $v(t)$ *es constante,* $v(t) = V_0$*=constante, que implica*

$$V(s) = \frac{V_0}{s}\,,$$

que al sustituirse en Q *produce la fórmula*

$$Q(s) = \frac{q(0)}{s+\tau^{-1}} + \frac{1}{R}\frac{V_0}{s(s+\tau^{-1})}\,,$$

en este punto es claro que el siguiente paso debe ser regresar al dominio temporal. Para ellos. intentaremos descomponer el segundo miembro del lado derecho en fracciones simples, es decir, queremos poner

$$\frac{1}{R}\frac{V_0}{s(s+\tau^{-1})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\tau^{-1}}$$

ó

$$\begin{aligned}\frac{V_0/R}{s(s+\tau^{-1})} &= \frac{A(s+\tau^{-1}) + Bs}{s(s+\tau^{-1})} = \\ &= \frac{\tau^{-1}A + s(A+B)}{s(s+\tau^{-1})}\end{aligned}$$

de acá deducimos,

$$A\tau^{-1} = V_0/R\,, \qquad B = -A\,.$$

así que

$$\frac{V_0/R}{s(s+\tau^{-1})} = \frac{V_0\tau}{R}\frac{1}{s} - \frac{V_0\tau/R}{s+\tau^{-1}}$$

de manera que sustituyendo,

$$Q(s) = \frac{V_0\tau}{R}\frac{1}{s} + \frac{q(0) - V_0\tau/R}{s+\tau^{-1}}$$

al regresar al dominio del tiempo,

$$q(t) = (q(0) - V_0\tau/R)e^{-t/\tau} + \frac{V_0\tau}{R}$$

que luego de una ligera reorganización se escribe como,

$$q(t) = V_0C(1 - e^{-t/\tau}) + q(0)e^{-t/\tau}$$

el caso de **carga** *del condensador es aquel en que la carga incicial en el condensador es* $q(0) = 0$*, que resulta en*

$$q(t) = V_0C(1 - e^{-t/\tau})$$

Ejemplo 7.4.3 *Este ejemplo es un poco más elaborado, se trata de resolver el problema:*

$$\ddot{x} - 10\dot{x} + 9x = 5t\,, \qquad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 2\,, \tag{7.23}$$

este es un problema de valores iniciales cuya ecuación de movimiento es no homogénea.

Al transformar la ecuacióm según Laplace,

$$\left[s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)\right] - 10\left[sX - x(0)\right] + 9X = \frac{5}{s^2}\,, \tag{7.24}$$

reagrupando,

$$\left[s^2 - 10s + 9\right]X + [10 - s]\,x(0) - \dot{x}(0) = \frac{5}{s^2}\,, \tag{7.25}$$

sustituyendo las condiciones iniciales y

$$\left[s^2 - 10s + 9\right]X + s - 12 = \frac{5}{s^2}\,, \tag{7.26}$$

o, factorizando,

$$(s-9)(s-1)X + s - 12 = \frac{5}{s^2}\,, \tag{7.27}$$

es decir,

$$(s-9)(s-1)X = \frac{5}{s^2} + 12 - s\,, \tag{7.28}$$

y finalmente,

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{5}{s^2(s-9)(s-1)} + \frac{12-s}{(s-9)(s-1)} = \\
&= \frac{5+12s^2-s^3}{s^2(s-9)(s-1)}
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Intentamos la descomposición de X en fracciones simples,

$$
X = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-9} + \frac{D}{s-1}
\tag{7.30}
$$

un poco de trabajo (que no presentaremos acá) permite encontrar las constantes, y na expresión para X es

$$
X = \frac{50}{81s} + \frac{5}{9s^2} + \frac{31}{81(s-9)} - \frac{2}{s-1}\,,
\tag{7.31}
$$

así que en el dominio del tiempo,

$$
\boxed{x(t) = \frac{31}{81}e^{9t} - 2e^t + \frac{5}{9}t + \frac{50}{81}}
\tag{7.32}
$$

7.4.1. Comentarios

Al usar la transfromada de Laplace convertimos una ecuación diferencial en una algebráica.

En general puede ocurrir que el álgebra sea bastante molesta de atacar, pro a pesar de ello, suele ser más sencillo rsolverla que intentar un ataque frontal con las técnicas convencionales de reslución de ecuaciones diferenciales.

Al utilizar la T. de Laplace, las condiciones iniciales se incorporan desde el comienzo.

7.5. Convolución

Definición 7.5.1 *Dadas dos funciones, f y g que satisfacen $f(t)0g(t) = 0$ $t < 0$, la convolución es una operación que define una nueva función a partir de la fórmula*

$$f * g(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

El siguiente resultado es de particular inteŕes,

Teorema 7.5.1

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Ejemplo 7.5.1 *Resolver el problema de valores iniciales*

$$4\ddot{x} + x = \delta(t)\,, \qquad x(0) = 3\,, \dot{x} = -7$$

Al transformar según Laplace,

$$4\left[s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)\right] + X = 1\,.$$

Reordenar y factorizar nos dejan con

$$(4s^2 + 1)X - 12s + 28 = 1\,,$$

y por lo tanto,

$$\boxed{X = \frac{3s}{s^2 + 1/4} - \frac{7}{s^2 + 1/4} + \frac{1}{4(s^2 + 1/4)}}$$

al regresar al dominio del tiempo,

$$x(t) = 3cos(t/2) - 14sen(t/2) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$$

los términos en azul corresponden a la solución del problema de valores iniciales homogéneo.

El término,

$$\boxed{G(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1/4}\right\} = \frac{1}{2} sen(t/2)}$$

es una solución al problema no homogéneo con condicions iniciales nulas se denomina **función de transferencia** *o funcion de Green del sistema.*

Ejemplo 7.5.2 *Consideremos el siguiente problema relacionado con el anterior*

$$4\ddot{x} + x = f(t)\,, \qquad x(0) = 3\,, \dot{x} = -7$$

LOs pasos para resolver el problema uando traqnsfromada de Laplace son los siguientes,

$$4(s^2X - sx(0) - \dot{x}(0)) + X = F(s)$$

$$(4s^2+1)X - 12s + 28 = F(s)$$

Transformada de Laplace de la solución

$$X = \frac{3s}{s^2+1/4} - \frac{7}{s^2+1/4} + \frac{F(s)}{4(s^2+1/4)}$$

Solución en el dominio del tiempo

$$x(t) = 3cos(t/2) - 14sen(t/2) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2+1/4}\right\}$$

una vez más, usamos el color azul para destacar la solución al problema homogéneo con las condicions iniciales propuestas. El término restante es una solución al problema no homogéneo con condiciones iniciales nulas. Reescribimos este término destacando un producto.

$$x(t) = 3cos(t/2) - 14sen(t/2) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+1/4)}F(s)\right\}$$

Al volver al dominio temporal, el teorema de convolución nos indica como tratar adecuadamente el producto,

$$x(t) = 3cos(t/2) - 14sen(t/2) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{2}sen(\tau/2)f(t-\tau)$$

la solución particular al problema no homogéneo es la convolución de la función de transferencia con la fuente.

Capítulo 8

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Las Ecuaciones de Laplacey Helmholtz como Ejemplo. Técnica de Separación de Variables

Muchos fenómenos físicos son descritos por campos, siendo estos, escalares, vectoriales e incluso tensoriales de mayor rango. La cinemática y dinámica de dichos campos suelen modelarse a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Un ejemplo típico, es el del potencial electrostático que se describe a través de la ecuación de Laplace.

En este capítulo vamos a introducir la técnica de **separación de variables para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales**. Esta técnica tiene que formar parte de la caja de herramientas de cualquier persona que se dedicue a la ciencias o la ingeniería.

Como toda herramienta, el método de separación d variable tiene limitaciones, la más importante de ellas y que siempre tenemos que tener en cuenta es que la técnica solo es aplicable en ecuaciones lineales.

La ecuación de Laplace es una de un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que aparece frecuentementen en la física matemática. En tres dimensiones y usando coordenadas cartesianas, la ecuación de Laplace tiene la forma:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\,,\qquad \phi=\phi(x,y,z)\,. \tag{8.1}$$

8.1. Ecuación de Laplace en D=2

8.1.1. Primer encuentro

El problema que nos va a interesar consiste en buscar la solución general a la ecuación,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0\,,\quad \phi=\phi(x,y)\,. \tag{8.2}$$

La técnica de separación de variables tiene varios pasos:

Primer paso: Se propone una solución a la ecuación 8.2 de la forma

$$\phi(x,y)=X(x)Y(y)\,, \tag{8.3}$$

es decir, se propone una solución constituida por el producto de dos funciones de una sola variable.

Segundo paso: Sustituir la solución propuesta en la ecuación, al hacerlo obtenemos

$$\frac{d^2X}{dx^2}Y+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0\,,\quad \text{ó}\quad \frac{d^2X}{dx^2}Y=-X\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.4}$$

donde tenemos que hacer énfasis en que ahora no tenemos derivadas parciales sino derivadas ordinarias de una variable.

Tercer paso: Dividir por ϕ (multiplicar $[X(x)Y(y)]^{-1}$). Este paso transforma la igualdad en

$$\frac{1}{XY}\,\frac{d^2X}{dx^2}Y = -\frac{1}{XY}\,X\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.5}$$

es decir,

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.6}$$

Ahora bien, en este punto, todos los textos expresan: *el lado izquierdo de esta igualdad solo depende de x mientras que el derecho solo depende de y lo que solo es posible si existe una constante (que llamaremos κ^2) tal que*

$$\begin{aligned}\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} &= \kappa^2\\ \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} &= -\kappa^2\,.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Antes de continuar, tratemos de aclarar el origen y significado de lo que acabamos de escribir. Comencemos por reescribir las cosas hasta donde todo iba claro,

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.8}$$

es cierto que el cada lado solo depende de una variable (x o y) así que para estar seguros de que entendemos lo de la fulana constante, empecemos por derivar ambos lados con respecto a alguna de ellas (digamos que x),

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2}\right] = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}\right]\,, \tag{8.9}$$

coo el lado derecho de esta igualdad es independiente de x queda,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2}\right] = 0\,, \tag{8.10}$$

es decir,

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = \text{constante} = \kappa^2\,, \tag{8.11}$$

en algunos libros de matemáticas llaman λ a la constante, pero muchos otros y sobre todo la literatura de física, usa una cantidad al cuadrado (por eso pusimos κ^2). Una vez que hemos entendido esto vovemos a mirar

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.12}$$

donde ahora sabemos que el lado izquierdo tiene por valor la constante κ^2 y por lo tanto,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}\,, \tag{8.13}$$

¡EUREKA!, el origen de las dos igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} &= \kappa^2 \\ \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} &= -\kappa^2\,, \end{aligned} \tag{8.14}$$

ha quedado totalmente aclarado.

Pero, ¿qué significa este par de igualdades?, la respuesta es la siguiente, si queremos que la solución a la ecuación de Laplace tenga la forma $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ tiene que ocurrir que X y Y sean soluciones de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} &= \kappa^2\, X \\ \frac{d^2Y}{dy^2} &= -\kappa^2\, Y. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Habiendo entendido todo hasta este punto pasamos al

Cuarto paso: Las dos ecuaciones ordinarias están acopladas a través del valor de κ^2 y en este momento tenemos que notar que hay tres posibilidades:

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales que tenemos planteadas son a ecuaciones a coeficientes constantes que conocemos bastante bien, y las tres posibilidades que tenemos en función de las

$$\kappa^2 = 0$$
$$\kappa^2 < 0$$
$$\kappa^2 > 0$$

constantes de integración son

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= 0 \\ X(x) &= Ax + B\,, \\ Y(y) &= Cy + D\,. \end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 &< 0 \\ X(x) &= E cos(\kappa\, x) + F sen(\kappa x)\,, \\ Y(y) &= G\, e^{\kappa\, y} + H\, e^{-\kappa y}\,. \end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 &> 0 \\ X(x) &= K\, e^{\kappa\, x} + L\, e^{-\kappa x}\,, \\ Y(y) &= M cos(\kappa\, y) + N sen(\kappa y)\,. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Comentario 8.1.1 *Antes de cotinuar recordemos que,*

$$cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$
$$senh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}\,,$$

de acá es evidente que

$$e^a = cosh(a) + senh(a)$$
$$e^{-a} = cosh(a) - senh(a)$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
Ae^{a} + Be^{-a} &= A[cosh(a) + senh(a)] + B[cosh(a) - senh(a)] = \\
&= [A + B]cosh(a) + [A - B]senh(a)\,,
\end{aligned}
$$

esto demuestra que las soluciones con exponenciales se pueden reescribir en términos de funciones hiperbólicas, lo que a veces resulta conveniente.

Para cada uno de los casos que hemos discutido, la solución de la ecuación de Laplace sería:

$$
\begin{aligned}
\kappa^2 &= 0 \\
\phi(x,y) &= [Ax + B]\,[Cy + D]
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^2 &< 0 \\
\phi(x,y) &= \left[E\,e^{\kappa\,x} + F\,e^{-\kappa x}\right][Gcos(\kappa\,y) + Hsen(\kappa y)]\ .
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^2 &> 0 \\
\phi(x,y) &= [K\,sen(\kappa\,x) + L\,cosh(\kappa x)]\,[M^{\kappa\,y} + Ne^{\kappa y}]\ .
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

Y esto completa el algoritmo de búsqueda de soluciones generales.

Pero, aún nos queda, al menos, una pregunta por responder:

¿Como escogemos entre estas soluciones? ó ¿Como sabemos cuál es el valor de κ?

La respuesta a estas preguntas se asocia al problema que se desea resolver. Recordemos que en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias las soluciones contenían constantes que entendíamos como constantes de integración y que quedaban arbitrarias hasta tanto impusiéramos ciertas condiciones (condiciones iniciales, por ejemplo). Acá ocurre algo similar, **un problema de ecuaciones**

diferenciales viene acompañado de ciertas condiciones que determinan la solución del problema.

Ese será el problema que abordaremos a continuación.

$[Ax+B]\,[Cy+D]$
$[E\,sen(\kappa\,x)+F\,cos(\kappa x)]\,[Gcosh(\kappa\,y)+Hsenh(\kappa y)]$
$[K\,senh(\kappa\,x)+L\,cosh(\kappa x)]\,[Mcos(\kappa\,y)+Nsen(\kappa y)]$

Cuadro 8.1: Ecuación de Laplace $D=2$, coordenadas cartesianas. Resumen de soluciones elementales.

Ejemplo 8.1.1 *Supongamos que se nos pide resolver la ecuación de Laplace en una región rectangular limitada por $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ y supongamos además que $\phi(x,y)$ tiene que satisfacer las condiciones:*

$$\begin{aligned} \phi(x,0)=0\,, &\quad \phi(x,b)=V_0=constante \\ \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}|_{x=0}=0\,, &\quad \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}|_{x=a}=0 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Para resolver este problema tenemos que pensar en todas las condiciones que hemos discutido hasta ahora

Intentemos pensar lo que ocurre si escojemos la denominada solución trivial ($\kappa^2=0$), en cuyo caso,

$$\phi(x,y)=[Ax+B]\,[Cy+D]\ , \tag{8.23}$$

al evaluar las condiciones para $y=0$ y $y=b$ resulta

$$\phi(x,0)=[Ax+B]\,[D]=0\,,\quad \phi(x,b)=[Ax+B]\,[Cb+D]=V_0 \tag{8.24}$$

mientras que las condiciones para la derivada

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}|_{x=0}=A\,[Cy+D]\ ,\quad \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}|_{x=a}=A\,[Cy+D] \tag{8.25}$$

llevan a

$$A\,[Cy + D] = 0\,, \quad A\,[Cy + D] = 0\,, \tag{8.26}$$

de acá sigue $A = 0$, lo que nos deja con

$$B\,[D] = 0\,, \quad B\,[Cb + D] = V_0 \tag{8.27}$$

de este sistema deducimos que $D = 0$ lo que implica que

$$BCb = V_0\,, \tag{8.28}$$

es decir, $BC = V_0/b$.

Ahora podemos sustituir estos valores en la solución, que ahora queda como

$$\phi(x, y) = BCy\,, \tag{8.29}$$

es decir,

$$\phi(x, y) = \frac{V_0}{b}\, y \tag{8.30}$$

y ahora, para cerrar el asunto, un detallito que faltaba.

Hay un teorema que no habíamos mencionado aún, que establece que **para ciertas condiciones (de borde), la solución de la ecuación de Laplace es única***, en el problema que acabamos de tratar, esas condiciones están dadas, y por lo tanto, la solución del problema es, efectivamente*

$$\phi(x, y) = \frac{V_0}{b}\, y \tag{8.31}$$

8.1.2. Segundo encuentro: condiciones de borde y unicidad

Pensemos en el ejemplo 8.1.1 con un poco más de cuidado. En primer lugar, se pretende resolver la ecuación de Laplace en una región limitada del plano. En segundo lugar, la región está limitada por segmentos rectiliíneos que conforman el borde de un rectángulo, y se imponen condiciones a ϕ justamente sobre esos segmentos, a esas condiciones, se les denomina **condiciones de borde o de frontera**.

Las condiciones de frontera que imponen valores a ϕ, se denominan condiciones de **Dirichlet**.

En el ejemplo 8.1.1 aparecen condiciones a la derivada de ϕ con respecto a x en segmentos paralelos al eje y, no solo eso, las derivadas son con respecto a x y justamente, la dirección x es perpendicular a los segmentos en que se imponen las condiciones a las derivadas, es decir, se están impoineido condiciones sobre las derivadas direccionales de ϕ en la dirección perpendicular (normal) a los segmentos. Estas condiciones sobre las derivadas normales se denominan **condiciones de borde de tipo Newmann**

Teorema 8.1.1 *El problema de resolver la ecuación de Laplace en una región rectangular del plano con condiciones de borde mixtas (Dirichlet y/o Newmann) sobre segementos diferentes del borde de la región posee solución única.*

Ejemplo 8.1.2 *Intentemos otro ejemplo usando como región el mismo rectangulo de antes, pero con las condiciones de borde*

$$\begin{aligned} &\phi(0,y) = 0\,, \quad \phi(a,y) = 0 \\ &\phi(x,0) = 0\,, \quad \phi(x,b) = V_0\, sen\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned} \tag{8.32}$$

La primera observación importante es la siguiente, si intentáramos satisfacer las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = 0$ usando la solución trivial ($\kappa^2 = 0$) obtendríamos $\phi(x,y) = 0$ que evidentemente no satisface la consición de borde en $y = b$.

Si por otra parte, intentándo algo como

$$\phi(x,y) = [Asen(\kappa x) + Bcos(\kappa y)][Csenh(\kappa y) + Bcosh(\kappa y)]$$

las condiciones de borde en $x = 0$ y $x = a$ implican

$$\begin{aligned} [Asen(\kappa 0) + Bcos(\kappa 0)][Csenh(\kappa y) + Bcosh(\kappa y)] &= 0 \\ [Asen(\kappa a) + Bcos(\kappa a)][Csenh(\kappa y) + Bcosh(\kappa y)] &= 0\,, \end{aligned} \tag{8.33}$$

que obliga a satisfacer el siguiente sistema algebráico

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ sen(\kappa a) & cos(\kappa a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.34}$$

este sistemna tiene soluciones no triviales si y solo si el determinate de la matriz de coeficientes es nulo, es decir, sii

$$sen(\kappa a) = 0\,,$$

lo que implica las condiciones:

$$\kappa = \frac{n\pi}{a} \quad n = \pm 1, \pm 2, ...$$

y $B = 0$. De esto se decuce que funciones de la forma

$$\phi(x, y) = sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[Csenh\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + Bcosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)]\,, \tag{8.35}$$

son soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen un subconjunto de las condiciones de borde del problema.

Al evaluar estas funciones en $y = 0$ y $y = b$

$$\begin{aligned} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[Csenh\left(\frac{n\pi}{a}0\right) + Bcosh\left(\frac{n\pi}{a}0\right)] &= 0 \\ sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[Csenh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) + Bcosh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)] &= V_0\, sen(\frac{\pi x}{a}) \end{aligned} \tag{8.36}$$

queda

$$\begin{aligned} sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)B &= 0 \\ sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)[Csenh(\frac{n\pi}{a}b) + Bcosh\frac{n\pi}{a}b)] &= V_0\, sen(\frac{\pi x}{a}) \end{aligned} \tag{8.37}$$

La primera de estas dos ecuaciones fija el valor de B en 0, de allí deducimos que

$$sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,Csenh(\frac{n\pi}{a}b) = V_0\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)\,. \tag{8.38}$$

Es evidente que n tiene que ser 1 y por lo tanto, las condiciones de borde se satisfacen con

$$\boxed{\phi(x,y) = \frac{V_0}{senh(\frac{\pi}{a}b)}\,sen\left(\frac{\pi x}{a}\right)senh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\,, \tag{8.39}$$

que es, por lo tanto, la solución al problema.

Comentario 8.1.2 *Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se utilizan ampliamente para modelar fenómenos físicos que varían en tiempo y espacio y son muchas las vces en que el poser alguna intuición acerca de algń problema físico relacionado con la ecuación que se está estudiando puede ser un insumo importante para una mejor conpresnión del problema que se tiene a mano.*

Las ecuaciones de Laplace y Poisson están muy relacionadas con problemas de electrostática y magnetostática. Es por ello que el libro de L. Magid puede ser muy útil. Por cierto, el capítulo 5 de ese texto, contiene numerosos ejemplos que complementan los dos que hemos tratado acá.

8.2. Ecuación de Laplace en D=3

8.2.1. Coordenadas Cartesianas

Consideremos ahora la ecuación,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0\,, \quad \phi = \phi(x,y,z)\,. \tag{8.40}$$

De las lecciones aprendidas, debería resultarnos natural proponer una solución a 8.40 de la forma

$$\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)\,, \tag{8.41}$$

al sustituir la solución propuesta obtenemos

$$\frac{d^2X}{dx^2}YZ + X\frac{d^2Y}{dy^2}Z + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0\,, \tag{8.42}$$

y de allí

$$\frac{1}{XYZ}\,\frac{d^2X}{dx^2}YZ = -\frac{1}{XYZ}\left[X\frac{d^2Y}{dy^2}Z + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right]\,, \tag{8.43}$$

ó

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = -\left[\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}\right]\,. \tag{8.44}$$

Por el mismo tipo de argumento que usamos en el caso bidimensonal, el lado izquierdo de la igualdad es constante, y en este caso ponemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} &= k_x^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} &= -k_x^2\,, \end{aligned} \tag{8.45}$$

que podemos reescribir en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} &= k_x^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} &= -k_x^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}\,, \end{aligned} \tag{8.46}$$

ahora ocurre que podemos asegurar que

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k_y^2\,, \tag{8.47}$$

donde k_y^2 es constante y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} &= k_x^2 \\ \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} &= k_y^2 \\ \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} &= -k_x^2 - k_y^2\,, \end{aligned} \tag{8.48}$$

de manera que la técnica de separación de variables nos ha dejado con las siguientes tres ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dx^2} &= \kappa_x^2\, X\\ \frac{d^2Y}{dy^2} &= \kappa_y^2\, Y\\ \frac{d^2Z}{dz^2} &= -(k_x^2+k_y^2)\, Z\,.\end{aligned} \tag{8.49}$$

Acopladas por dos constantes de sepaación.

Podríamos introducir una tercera constante k_z^2 inponiendo la condición[1]

$$\kappa_x^2+\kappa_y^2+\kappa_z^2=0$$

El tratamiento de la búsqueda de soluciones es la generalización obvia del problema bidimensional así que no continuaremos con esa discusión.

8.3. Coordenadas Polares Planas

Las cosas se ponen mucho más interesantes cuando estudiamos problemas en otros sistemas de coordenadas. Miremos por ejemplo la ecuación de Laplace en coordenadas polares planas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{8.50}$$

En este caso, el método de separación de variables impone la funcion separada

$$\phi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta) \tag{8.51}$$

[1] en el caso bidimensional podemos pensar en dos contantes de separación κ_x^2, κ_y^2 que satisfacen:

$$\kappa_x^2+\kappa_y^2=0$$

a sustituir en la 8.50 obtenemos

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\,, \tag{8.52}$$

de donde

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= \nu^2\,R \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\nu^2\,\Theta \end{aligned} \tag{8.53}$$

y acá vemos la primera cosa interesante, la ecuación radial no es una ecuación a coeficientes constantes.

8.4. Rango angular completo

En esta sección trataremos únicamente problemas en los que $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Las ecuaciones 8.53 nos ofrecen varias posibilidades.

Caso trivial $\nu = 0$

$$\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= 0 \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= 0 \end{aligned} \tag{8.54}$$

la solución radial obedece

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \tag{8.55}$$

es decir

$$\frac{dR}{dr} = \frac{A}{r} \tag{8.56}$$

de donde

$$R(r) = A\,\ln(r) + b\,, \tag{8.57}$$

solución que tiene un carácter divergente para valores muy pequeños de r

La parte angular es bastante más interesante. A primera vista, debería ocurrir que

$$\Theta(\theta) = constante\,\theta + \theta_0\,. \tag{8.58}$$

sin embargo, para la gran mayoría de las aplicaciones, ϕ debe ser monovaluado, es decir,

$$\phi(r,\theta) = \phi(r,\theta + 2\pi)\,. \tag{8.59}$$

en consecuencia, si la región es interés incluye el rango angular completo, el término porporcional a θ no puede aparecer en la solución trivial. Si por el contrario, la región de interés posee n ángulo regular limitado, el término es totalmente lícito.

Cuando $\nu^2 > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\nu^2\,\Theta \\ r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= \nu^2\,R \end{aligned} \tag{8.60}$$

las soluciones para Θ son de tipo trigonométrico. Mientras que para la parte radial

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = \nu^2\,R \tag{8.61}$$

poniendo $R = r^\alpha$ obtenemos

$$[\alpha(\alpha-1)+\alpha]r^\alpha = \nu^2\,r^\alpha \tag{8.62}$$

es decir,

$$R = Ar^\nu + Br^{-\nu} \tag{8.63}$$

Si el rango angular es completo, las soluciones han de ser periódicas, por lo tanto ν tiene que ser un entero y encontramos que la familia de funciones

$$\phi_n(r,\theta) = [A_n r^\nu + B_n r^{-\nu}][D_n cos(n\theta) + C_n sen(n\theta)]\,, \tag{8.64}$$

son soluciones posibles que presentan singularidades para $r \to 0$.

8.5. Ecuación de Helmholtz

La ecuación de Helmholtz está relacionada con varias ecuaciones que aparecen en física matemática, entre ellas, la ecuación de Laplace como con la ecuación de ondas.

En notación compacta, la ecuación de Helmholtz es

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0\,, \tag{8.65}$$

donde k =constante dada.

En tres dimendiones y en coordenadas cartesianas, la ecuación de Helholtz adopta la forma,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + k^2\phi = 0\,, \quad \phi = \phi(x, y, z)\,. \tag{8.66}$$

8.6. La ec. de Helmholtz en coordenadas cilíndricas

En estas coordenadas el operador de Laplace toma la forma

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{8.67}$$

y en consecuencia, la ecuación de Helmholtz en estas coordenadas es

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \tag{8.68}$$

Como ya sabemos, intentaremos la separación de variables proponiendo $U(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, luego de sustituir y dividir por U se obtiene

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2 = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 U}{dz^2} \tag{8.69}$$

acá resulta evidente que podemos introducir una primra constante de separación paa Z obteniendo

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 Z}{dz^2} = \kappa_z^2 Z \\ &\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k^2 = -\kappa_z^2\,, \end{aligned} \tag{8.70}$$

llamando $\nu^2 = k^2 + \kappa_z^2$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \nu^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\,, \tag{8.71}$$

de esta última igualdad surge una nueva constante e separación (m^2) para θ que nos deja con:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta\,, \tag{8.72}$$

y

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (\nu^2 r^2 - m^2)R = 0\,, \tag{8.73}$$

El sistema de ecuaciones ordinarias correspondiente a la separación de la ecuación de Helmholtz en coodenadas cilíndricas es

$$\begin{aligned} \frac{d^2\,Z}{dz^2} - \kappa_z^2 Z = 0 \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2\Theta = 0 \\ r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (\nu^2 r^2 - m^2)R = 0 \\ \nu^2 = k^2 + \kappa_z^2 \end{aligned} \tag{8.74}$$

Por cierto, el cambio de variables: $\nu r = x$, convierte la ecuación 8.73 en[2]

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR}{dx}\right) + (x^2 - m^2)R = 0\,, \tag{8.75}$$

donde deberíamos reconocer que esta última línea es la ecuación de Besssel 5.103.

8.7. La ecuación de Helmholtz en Coordenadas Esféricas

El operador de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2\,U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\,U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial\,U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2\,U}{\partial\phi^2}\,. \tag{8.76}$$

[2]véase la tabla 5.1

Al intentar la separación de variables en estas coordenadas ($U = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$),

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{R\Phi}{r^2 sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\,\Theta}{d\theta}\right) + \frac{R\Theta}{r^2 sen^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0\,. \tag{8.77}$$

Dividiendo por U,

$$\frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\,\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2 = 0\,. \tag{8.78}$$

y de acá

$$\frac{1}{r^2 sen^2\theta\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\left[k^2 + \frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\,\Theta}{d\theta}\right)\right]\,. \tag{8.79}$$

o

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -r^2 sen^2\theta\left[k^2 + \frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\,\Theta}{d\theta}\right)\right]\,. \tag{8.80}$$

En este punto aparecen una primera constante de separación (m^2) y una ecuación diferencial ordinaria para Φ,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \\ &-r^2 sen^2\theta\left[k^2 + \frac{1}{r^2R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,R}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\frac{d\,\Theta}{d\theta}\right)\right] = m^2\,. \end{aligned} \tag{8.81}$$

Al continuar con el método se obtienen las siguentes tres ecuaciones diferenciales ordinariasen que aparecen $2 = 3 - 1$ constantes de separación.

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2\Phi \tag{8.82}$$

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right] - \frac{m^2}{sen^2\theta}\Theta + Q\Theta = 0 \tag{8.83}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] + k^2R + \frac{QR}{r^2} \tag{8.84}$$

En el caso en que $k = 0$ y $m = 0$, la ecuación para Θ se reduce a la ecuación

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left[sen\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right] + \ell(\ell+1)\Theta = 0\,, \tag{8.85}$$

donde hemos puesto $Q = \ell(\ell+1)$. Un cambio de variable adecuado transforma esta última ecuación a la forma estándar de la ecuación de Legendre (ver tabla 5.1, sección6.4.2 y problema 12.1.2)

8.8. Conexión con el capítulo 6

Hasta este punto y para no recargar este capítulo con demasiada información, no habíamos mencionado mayor cosa relacionada con los capítulos anteriores.

Si nos fijamos un poco, notaremos que en todos los casos de separación de variables que hemos estudiado hemos encontrado que, al final del día, el proceso de separación de variables ha llevado a vaios problemas de Sturm Liouville acoplados a través de los valores de las constantes de separación.

8.9. Separación de Variables: "Work Flow"

- Proponer solución separada en variables (ejemplos $X(x)Y(y)Z(z)$, $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$.
- Sustituir la solución propuesta en la EDP.
- Dividir la ecuación por la solución propuesta
- Buscar elementos dependientes de una sola variable y de allí encontrar las ecuaciones diferenciales ordinarias asociándoles constantes de separación
- Resolver las ODEs y reintegrar las soluciones separadas.

Recordemos que el flujo de trabajo descrito solo nos provee de la forma de la solución general a una PDE.
La escogencia de la solución depende de las condiciones que definan cada problema (condiciones de frontera ó condicione iniciales y de frontera)

En muchos casos, la separación de variables suele llevar a una ODE de tipo Sturm-Liouville.
Las condiciones de frontera pueden elevar la ec. de Sturm Liouville a un **Problema de Sturm-Liovuille**

Capítulo 9

Un Ejemplo Físico: La cuerda tensa y la ecuación de ondas

Hasta ahora hemos discutido problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales que han estado conectadas con la física únicamente por el hecho de haber mencionado que existe una conexión.

Este capítulo pretende estudiar en detalle un problema físico hasta llevarle a sus últimas consecuencias en términos de las discusiones de los capítulos anteriores.

9.1. Deducción de la ecuación de Ondas

Nuestro objetivo consiste en deducir que la descripción dinámica de las oscilaciones transversales libres de una cuerda está dada por la ecuación de ondas unidimensional homogénea,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9 \tag{9.1}$$

Comencemos por considerar la dinámica de un pequeño trozo de cuerda cuyos extremos están en los puntos $x - \frac{dx}{2}$ y $x + \frac{dx}{2}$. En ausencia de gravedad y considerando que las oscilaciones son

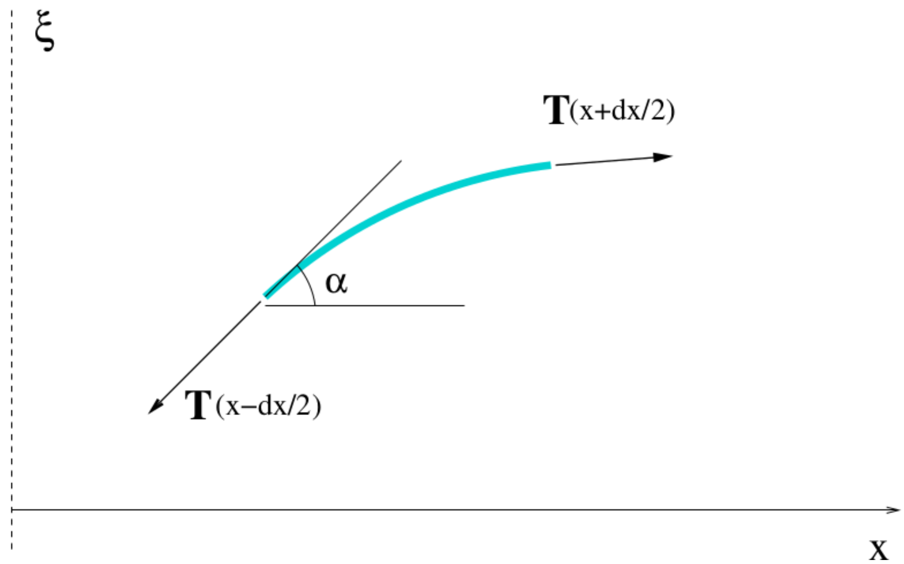


Figura 9.1: Diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial de cuerda.

solo en la dirección y (de manera que la velocidad del trocito de cuerda es simplemente $\partial_t\, u(x,t)$, podemos escribir la ecuación de movimiento para la cuerda (segunda ley de Newton) como

$$\vec{T}(x-\frac{dx}{2})+\vec{T}(x+\frac{dx}{2})=(\mu\, dx)\,\partial_t^2 u(x,t)\,\mathbf{j} \tag{9.2}$$

donde $\vec{T}(x-\frac{dx}{2})$ y $\vec{T}(x+\frac{dx}{2})$ son las fuerzas que actúan en cada extremo de la cuerda. La forma escalar de esta ecuación vectorial es el sistema de ecuaciones

$$T_x(x-\frac{dx}{2})+T_x(x+\frac{dx}{2}) \;=\; 0 \tag{9.3}$$
$$T_y(x-\frac{dx}{2})+T_y(x+\frac{dx}{2}) \;=\; \mu\,\partial_t^2 u(x,t)\,dx \tag{9.4}$$

donde T_x y T_y son las componentes horizontal y vertical de la tensión. Ahora bien, llamemos $\alpha(x)$ al ángulo que forman la cuerda y el eje x en el punto x, así que $T_x(x)=|\vec{T}|\,cos\alpha(x)$ y $T_y(x)=|\vec{T}(x)|\,sen\alpha(x)$ La primera hipótesis que haremos será considerar que la cuerda no ejerce resistencia a la flexión. Como consecuencia de esta hipótesis, las tensiones son tangentes a la cuerda en cada punto, de acuerdo a esto $tan\alpha(x) = \partial_x\, u(x,t)$.

La segunda hipótesis consistirá en considerar un régiman de oscilaciones pequeñas (esto es, que la amplitud de la oscilación en cualquier instante y punto de la cuerda -$u(x,t)$- satisface la condición $u(x,t) << L$ donde L es la longitud de la cuerda. De acuerdo a esta segunda suposición, los ángulos también son chicos, y por lo tanto $cos(\alpha(x - dx/2) \approx cos\alpha(x) \approx cos(\alpha(x + dx/2) \approx 1$, y $sen\alpha(x \pm dx/2) \approx tan\alpha(x \pm dx/2) = \partial_x u(x \pm dx/2, t)$. De acá sigue que

$$T_x(x - \frac{dx}{2}) + T_x(x + \frac{dx}{2}) \approx |\vec{T}(x + \frac{dx}{2})| - |\vec{T}(x - \frac{dx}{2})| \approx 0 \tag{9.5}$$

lo que implica (en esta aproximación) que la magnitud de la tensión es constante ($|\vec{T}(x)| = T$, $\forall x$), por otra parte,

$$T_y(x - \frac{dx}{2}) + T_y(x + \frac{dx}{2}) \;\; = \;\; T\left[\partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x u(x - \frac{dx}{2})\right], \tag{9.6}$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} \partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x(x - \frac{dx}{2}) = &\left[\partial_x u(x,t) + \partial_x^2 u(x,t)\frac{dx}{2} + \ldots\right] - \\ - &\left[\partial_x u(x,t) + \partial_x^2 u(x,t)\frac{-dx}{2} + \ldots\right] \end{aligned} \tag{9.7}$$

de donde resulta

$$T\left[\partial_x u(x + \frac{dx}{2}) - \partial_x u(x - \frac{dx}{2})\right] \approx T\, \partial_t^2 u(x,t)\, dx \tag{9.8}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación para la aceleración vertical del elemento de cuerda obtenemos

$$\partial_x^2\, u(x,t) - \frac{\mu}{T}\, \partial_t^2\, u(x,t) = 0 \tag{9.9}$$

que no es otra cosa que la ecuación de ondas unidimensional con velocidad de fase $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

9.2. Consideraciones Energéticas

Consideremos la tasa de cambio en la energía cinética de un pequeño trozo de cuerda cuyos extremos están identificados por las coordenadas x y $x + dx$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt}, \tag{9.10}$$

donde $\frac{dW}{dt}$ es la potencia[1] que desarrollan las fuerzas que actúan sobre el pequeño trozo de cuerda, es decir

$$\frac{dW}{dt} = \left[\vec{T}(x + dx) + \vec{T}(x)\right].\vec{v}\ . \tag{9.11}$$

Como ya hemos discutido, la velocidad instantánea ($\vec{v}$) con que se desplaza el trozo de cuerda, cuando a través de este viaja una onda transversal[2] está dada por $\vec{v} = \partial_t u(x,t)\,\hat{j}$. Sustituyendo de vuelta en la igualdad (9.11) queda

$$\frac{dW}{dt} = \left[T_y(x + dx) + T_y(x)\right]\,\partial_t u(x,t). \tag{9.12}$$

Ahora bien, la componente vertical de la tensión no es otra cosa que $T_y(x) = T\,\partial_x u(x,t)$ de manera que[3],

$$\frac{dW}{dt} = T\left[\partial_x u(x + dx) - \partial_x u(x,t)\right]\partial_t u(x,t) = T\,\partial_x^2 u(x,t)\,\partial_t u(x,t) dx + O(dx^2)\,, \tag{9.13}$$

así, que en resumen, y despreciando los infinitésimos de orden superior al primero, la rata de cambio de la energía cinética del pequeño trozo de cuerda se puede poner como

$$\frac{dK}{dt} = T\,\partial_x^2 u(x,t)\,\partial_t u(x,t)\,dx. \tag{9.14}$$

[1] recuerde que la potencia instantánea desarrollada por una fuerza ($\vec{F}$) que actúa sobre una partícula que en un cierto instante t se mueve con velocidad $\vec{v}$ es $P(t) = \vec{F}.\vec{v}$

[2] recuerde que en este caso el movimiento es solo en la dirección del vector $\hat{y} = \hat{j}$

[3] es necesario que insistamos en notar que el producto $T\partial_x u(x,t)\,\partial_t u(x,t)$ es la potencia desarrollada por la tensión que actúa en el punto x

Por otra parte, la expresión $\partial_x^2 u(x,t)\partial_t u(x,t)$ que aparece en el miembro derecho de esta última igualdad puede reescribirse como[4]

$$\partial_x^2 u(x,t)\partial_t u(x,t) = \partial_x\left[\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right] - \partial_x u(x,t)\partial_{xt}^2 u(x,t), \tag{9.15}$$

adicionalmente, es facil darse cuenta de que

$$\partial_x u(x,t)\partial_{xt}^2 u(x,t) = \partial_t[\frac{1}{2}(\partial_x u(x,t)^2] \tag{9.16}$$

de manera que

$$\partial_x^2 u(x,t)\partial_t u(x,t) = \partial_x\left[\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right] - \partial_t[\frac{1}{2}(\partial_x u(x,t)^2] \tag{9.17}$$

reinsertando este resultado en la identidad (9.13), y utilizando el hecho de que T =constante obtenemos el siguiente resultado parcial

$$\frac{dK}{dt} = \left\{\partial_x\left[T\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right] - \partial_t[\frac{T}{2}(\partial_x u(x,t)^2]\right\}\,dx. \tag{9.18}$$

ó

$$\frac{dK}{dt} + \partial_t[\frac{T}{2}\,(\partial_x u(x,t)^2]\,dx = \partial_x\left[T\,\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right]\,dx \tag{9.19}$$

Observando que la energía cinética del trozo de cuerda está dada por

$$K = \frac{\mu}{2}(\partial_t u(x,t))^2\,dx \tag{9.20}$$

es posible reescribir la igualdad (9.19) en la forma

$$\partial_t\left[\frac{\mu}{2}(\partial_t u(x,t))^2 + \frac{T}{2}\,(\partial_x u(x,t)^2\right]\,dx = \partial_x\left[T\,\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right]\,dx. \tag{9.21}$$

es decir:

$$\partial_t\left[\frac{\mu}{2}(\partial_t u(x,t))^2 + \frac{T}{2}\,(\partial_x u(x,t)^2\right] = \partial_x\left[T\,\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)\right]. \tag{9.22}$$

[4] observe que esto no es más que el truco para hacer una integración “por partes”: $v\,du = d(vu) - dv\,u$

Detengámonos en este punto para reflexionar. A veces las manipulaciones matemáticas pueden resultar algo oscuras, sobre todo si son largas y llegan a resultados intermedios con la apariencia de la fórmula 9.22.

En primer lugar recordemos que la cantidad $T\,\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)$ que aparece en el lado derecho de 9.22 es la potencia que la tensión entrega a un punto de la cuerda localizado en el punto x, como consecuencia de esto, la derivada $\partial_x\,[T\,\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)]$ representa la potencia suministrada a la cuerda por unidad de longitud.

Por otra parte, es bastante obvio que la cantidad

$$\frac{\mu}{2}(\partial_t u(x,t))^2 \tag{9.23}$$

no es otra cosa que la energía cinética por unidad de longitud de la cuerda.

Queda por interpretar el misteriosos término

$$\frac{T}{2}\,(\partial_x u(x,t)^2\,, \tag{9.24}$$

con este fin en mente tomemos una desviación en nuestra discusión y consideremos la cuerda en reposo. En tal caso la longitud de un trozo diferencial de cuerda es $dl = dx$. Durante el movimiento de la cuerda la longitud del mismo trozo de cuerda cambia ligeramente resultando ser:

$$dl' = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx \tag{9.25}$$

pero, el cociente diferencial $\frac{dy}{dx}$ no es otra cosa que $\partial_x u$ de manera que

$$dl' = \sqrt{1 + (\partial_x u)^2}\;dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\,(\partial_x u)^2\right]\,dx \tag{9.26}$$

de acuerdo a esto, la longitud del elemento de cuerda cambia en la cantidad $ds = dl' - dx = \frac{1}{2}(\partial_x u)^2\,dx$. El producto de la tensión T por esta cantidad, no es otra cosa que el trabajo realizado para cambiar la longitud de la cuerda. En conclusión, el término

$$\frac{T}{2}\,(\partial_x u(x,t)^2\,, \tag{9.27}$$

de la fórmula 9.22 no es otra cosa que la energía potencial elástica de la cuerda por unidad de longitud.

La fórmula 9.22 y el razonamiento que le sigue sugieren introducir tres nuevas cantidad física

$$u_c \equiv \frac{1}{2}\mu\,(\partial_t u)^2 \tag{9.28}$$

$$u_e \equiv \frac{1}{2}T\,(\partial_x u)^2 \tag{9.29}$$

$$\mathcal{E} \equiv u_c + u_e \tag{9.30}$$

A esta altura debería ser evidente que estas tres cantidades tienen dimensiones de energía por unidad de longitud ($\frac{energia}{longitud}$) (**Ejercicio**) de manera que son densidades de energía. $\mathcal{E}$ es denominada *densidad lineal de energía mecánica* o sencillamente *densidad de energía*.

Si imaginamos que cada elemento infinitesimal de longitud de la cuerda es una partícula puntual resulta natural pensar que en cada instante de tiempo la cuerda almacena una energía mecánica total E que es sencillamente la suma de las energías de cada una de las partículas que la forman.

En términos concretos, estamos diciendo que nuestra interpretación de los sumandos que aparecen en el lado izquierdo de la fórmula 9.22, nos ha llevado a entender que la energía mecánica total contenida en un trozo de cuerda vibrante cuyos extremos están localizados en los puntos x_1 y x_2 está dada por

$$E(x_1, x_2; t) = \int_{x_1}^{x_2} dx\ (u_c + u_e) \tag{9.31}$$

donde debemos insistir en que cada trozo de cuerda "almacena" energía en forma de energía cinética y potencial y que estas cantidades son *distribuídas*[5]

[5] más adelante veremos un resultado análogo para el campo electromagnético

9.2.1. Flujo de Energía y vector de Poynting elástico

Consideremos la fórmula 9.22, integrémosla entre dos puntos x_1 y x_2 de la cuerda y expresemos el resultado en los términos que acabamos de introducir:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\,\partial_t\left[u_c + u_e\right] = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\partial_x\left[T\,\partial_x u(x,t)\,\partial_t u(x,t)\right]. \tag{9.32}$$

En vista de que los extremos del intervalo de integración están fijos podemos reescribir la igualdad como

$$\frac{dE(x_1,x_2;t)}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\partial_x[T\,\partial_x\,u\,\partial_t u] \tag{9.33}$$

integrando el lado derecho de la igualdad

$$\frac{dE(x_1,x_2;t)}{dt} = T\,\partial_x u(x_2,t)\,\partial_t u(x_2,t) - T\,\partial_x u(x_1,t)\,\partial_t u(x_1,t) \tag{9.34}$$

Ahora bien, en vista de que la cadena de razonamientos matemáticos que nos llevó hasta esta última igualdad fue enteramente rigurosa y que la interpretación física es natural hemos probado lo siguiente

Teorema 9.2.1 *La tasa de cambio en la energía almacenada en un trozo de cuerda es igual a la potencia que se entrega en los extremos del trozo de cuerda.*

Discutamos un poco más este teorema. Ya sabemos que

$$E = \int_{x_2}^{x_1} dx\,\mathcal{E}$$

es la cantidad de energía almacenada en la cuerda entre los dos extremos de interés x_1 y x_2. Ciertamente, $\frac{dE}{dt}$ es la tasa de cambio de E que puede ser positiva, si la energía almacenada en la cuerda está aumentando o negativa si está disminuyendo. Evidentemente un cambio en la energía solo puede aparecer si alguna fuerza hace trabajo sobre la cuerda. El teorema 9.2.1 establece dos cosas, en primer lugar que el trabajo sobre la cuerda lo ejecuta la tensión que actúa en los extremos del trozo de cuerda que nos interesa y además establece la tasa de entrega de energía (potencia) en cada uno de los dos extremos.

En términos pictóricos podemos imagiunar que el segmento $[x_1, x_2]$ es una caja unidimensional en la cual se almacena energía que entra o sale de la caja a través de “entradas” localizadas en las “tapas” de la caja, es decir en la frontera que separa el interior de la caja del exterior a ella. Existe una manera de hacer preciso lo que acabamos de decir y nos abocaremos a entenderla en el resto de esta sección. Para ello comencemos por introducir un objeto

Definición 9.2.1 *El vector de Poynting*[6] *elástico asociado a las oscilaciones de una cuerda tensa (dirigida a lo largo del eje x) está dado por*

$$\vec{S}(x,t) \equiv \, -T\,\partial_x u(x,t)\,\partial_t u(x,t)\,\hat{\imath} \tag{9.35}$$

Volviendo a considerar nuestra hipotética caja unidimensional notemos que los vectores que definen las normales unitarias exteriores (salientes) a la “superficie” de la caja (los puntos extremos x_1 y x_2) son $\hat{n}_1 = -\hat{\imath}$ y $\hat{n}_2 = \hat{\imath}$. En términos de del vector de Poynting y de estas normales, podemos reexpresar la fórmula (9.34) como

$$\frac{dE(x_1, x_2; t)}{dt} = -\left[\vec{S}(x_2,t).\hat{n}_2 + \vec{S}(x_1,t).\hat{n_1}\right] \tag{9.36}$$

Que nos permite expresar el teorema 9.2.1 en la forma siguiente

Teorema 9.2.2 *La potencia que se entrega a un segmento de cuerda tensa limitado por dos puntos es la suma de los productos entre el vector de Poynting evaluado en cada extremo y las normales unitarias exteriores a la cuerda en dichos puntos.*

Acá bien vale la pena que nos entretengamos en un par de ejemplos explícitos.

[6] Entender este concepto será fundamental para cuando se discuta la teoría electromagnética

Ejemplo 9.2.1 *Consideremos una onda que viaja hacia la derecha $u(x,t) = f(x-vt)$, y calculemos el vector de Poynting en este caso. Si $f'(x) = g(x)$ resulta que $\partial_x u(x,t) = f'(x-vt) = g(x-vt)$ mientras que $\partial_t u(x,t) = -v\, g(x-vt)$ usando la definición resulta*

$$\vec{S}(x,t) = v\, T\, \left[g(x-vt)\right]^2\, \hat{\imath} \tag{9.37}$$

la forma de la dependencia espacio temporal de $\vec{S}$, nos indica que $\vec{S}$ se comporta como una onda viajera que se propaga con la velocidad de fase v.

Es interesante continuar con el ejemplo notando lo que ocurre si calculamos la densidad de energía $\mathcal{E}$. Para ello calculemos

$$u_c = \frac{\mu}{2}\, \left[v\, g(x-vt)\right]^2 \qquad y \qquad u_e = \frac{T}{2}\, \left[g(x-vt)\right]^2 \tag{9.38}$$

de manera que al recordar que $v = \sqrt{T/\mu}$ se obtiene

$$\mathcal{E} = T\, \left[g(x-vt)\right]^2 \tag{9.39}$$

de manera que el vector de Poynting se reescribe como

$$\vec{S}(x,t) = v\, \mathcal{E}\, \hat{\imath} \tag{9.40}$$

y esto deja un ejercicio al lector: interprete este resultado[7]

Ejemplo 9.2.2 *Consideremos una onda armónica monocromática, $u(x,t) = A\, cos(kx - \omega\, t)$. En este caso, el vector $\vec{S}$ está dado por*

$$\vec{S} = A^2 k(-\omega)\, T\, cos^2(kx - \omega\, t)\, (-\hat{\imath}) = A^2\, v\, T\, cos^2(kx - \omega\, t)\, \hat{\imath} \tag{9.41}$$

y el promedio de $\vec{S}$ en un período temporal ($\mathcal{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ completo es

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_t^{t+\mathcal{T}} dt\, A^2\, v\, T\, cos^2(kx - \omega\, t)\, \hat{\imath} = \frac{v\, T}{2} A^2\, \hat{\imath} \tag{9.42}$$

[7] ayuda: fíjese bien en las unidades

En ambos ejemplos podemos observar que la potencia instantánea en cada punto es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda en dicho punto en cada instante de tiempo. En el caso de una onda rmónica monocromática, la potencia media que la onda entrega en un punto arbitrario de la cuerda ($\langle\vec{S}(x,t)\rangle$) es proporcional al cuadrado de la amplitud ($\propto A^2$), esto es característico de las ondas lineales e induce la introducción de una cantidad denominada *intensidad*, que en el caso de las ondas que se propagan en el espacio es la potencia instantánea que la onda deposita en un área unitaria ortogonal al vector que describe la propagación de la energía.

9.2.2. La Ecuación de Continuidad

Resumiendo, en el parágrafo 9.2.1 hemos aprendido que la ecuación para el flujo de energía en un punto de la cuerda puede ponerse en la forma

$$\partial_t\,\mathcal{E}(x,t) + \partial_x\,S_x(x,t) = 0 \tag{9.43}$$

en donde la densidad de energía $\mathcal{E}$ está dada por

$$\mathcal{E}(x,t) = u_c(x,t) + u_e(x,t) \tag{9.44}$$

Es importante que en este momento desviemos completamente nuestra atención y pensemos en otro problema físico. Consideremos un objeto de volumen V que pretendemos cargar eléctricamente con una corriente I, ciertamente, la relación entre la carga del objeto y la corriente es

$$\frac{dQ}{dt} = I, \tag{9.45}$$

ahora bien, la carga total del objeto es evidentemente:

$$Q = \int_V dv\,\rho \tag{9.46}$$

donde ρ es la densidad volumétrica con que la carga eléctrica se distribuye en el objeto, mientras que la corriente que penetra al objeto es $I = -\oint_S\,\vec{J}.\hat{n}\,ds$ donde $\vec{J}$ es el vector de densidad de corriente eléctrica por unidad de área, y S la superficie cerrada que define al objeto. De estamanera, la igualdad (9.45) que representa nada más y nada menos que la ley de conservación de la carga puede reexpresarse en la forma

$$\int_V dv\, \partial_t \rho + \oint_S \vec{J}.\hat{n}\, ds = 0 \tag{9.47}$$

usando el teoremade la divergencia, esta igualdad puede escribirse como

$$\int_V dv\, [\partial_t \rho + \vec{\nabla}.\vec{J}] = 0 \tag{9.48}$$

que por ser una identidad válida para cualquier volumen implica a su vez que -expresando $\vec{\nabla}.\vec{J}$ en forma desarrollada

$$\partial_t \rho + \partial_x J_x + \partial_y J_y + \partial_z J_z = 0 \tag{9.49}$$

que es entonces la forma diferencial de la ley de conservación de la carga para una distribución contínuade carga eléctrica que es transportada por el vector $\vec{J}$.

Las ecuaciones del tipo

$$\partial_t \phi + \vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{9.50}$$

en donde ϕ es la densidad volumétrica asociada a alguna cantidad física y $\vec{V}$ un vector que transporta dicha cantidad se conocen como *ecuaciones de continuidad* y expresan la conservación de la cantidad física. Así, por ejemplo, un fluido de densidad ρ que es transportado a velocidad $\vec{v}$ tiene un vector de densidad de corriente dado sencillamente por $\vec{J} = \rho\vec{v}$ (note que las unidades de $\vec{J}$ son $gr/(cm^2 \times seg)$), de manera que la conservación de la cantidad de fluido se expresa en forma diferencial como

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) = 0 \tag{9.51}$$

Esta disgresión nos muestra claramente, que la igualdad (9.43 con que empezamos esta sección no es otra cosa que la ley de conservación de la energía expresada como una ecuación de continuidad para la densidad de energía en la cuerda y el vector $\vec{S}$ de transporte de potencia.

9.3. La cuerda con extremos fijos

En esta sección queremos presentar una primera discusión acerca de las oscilaciones transversales de una cuerda tensa cuyos extremos, localizados en $x = 0$ y $x = L$ están fijos. En otras palabras vamos a estudiar las ondas en una cuerda en la que los valores de $u(x,t)$ deben satisfacer las *condiciones de frontera*

$$u(0,t) = 0 \tag{9.52}$$

$$u(L,t) = 0 \tag{9.53}$$

Nuestro estudio será llevado a cabo de dos formas distintas, en primer lugar con un enfoque intiuitivo que nos permitirá entender ciertos aspectos del problema y la forma general de su solución y con un enfoque matemáticamente más riguroso que admite extensiones a otros problemas más generales.

9.3.1. Ondas estacionarias y Series de Fourier

Pensemos en la solución general de la ecuación de ondas unidimensional en términos de la superposición de ondas que viajan a la derecha y a la izquierda. Por esta vez utilizaremos la notación trigonométrica, es decir propongamos que en la cuerda se propaga una onda de la forma

$$u(x,t) = A\, sen(kx - \omega t) + B\, sen(kx + \omega t) \tag{9.54}$$

al imponer las condiciones de borde en $x = 0$ y L resulta

$$-A\, sen(\omega t) + B\, sen(\omega t) = 0 \tag{9.55}$$

$$A\, sen(kL - \omega t) + B\, sen(kL + \omega t) = 0 \tag{9.56}$$

la primera ecuación implica $A = B$, esto lleva a que la segunda se reexprese en la forma

$$sen(kL - \omega t) + sen(kL + \omega t) = 0\,, \tag{9.57}$$

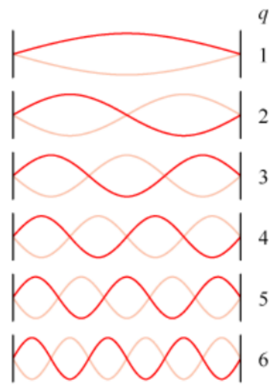


Figura 9.2: En una cuerda con extremos fijos solo pueden formarse ondas armónicas con un número entero de semi-longitudes de onda entre los extremos, es decir, con 0, 1, 2, ... nodos en la región en que la cuerda está libre.

ó, utilizando identidades trigonométricas elementales,

$$2\, sen(kL)\, cos(\omega t) = 0\,. \tag{9.58}$$

Esta última fórmula implica que la superposición de ondas viajeras a la izquierda y la derecha a lo largo de una cuerda con bordes fijos solo es posible si

$$kL = n\,\pi \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{9.59}$$

es decir, la propagación de ondas armónicas monocromáticas es posible si y solo si, cuando en un intervalo de longitud L caben un número entero de semilongitudes de onda de las ondas que se superponen. Es decir, cuando

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{9.60}$$

Volviendo sobre la solución debemos recordar que el número de onda y la frecuencia están relacionados por la relación de dispersión $k = \omega/v$, en virtud de esta identidad, y de las longitudes de onda posibles para la existencia de superposición de ondas armónicas viajeras en la cuerda resulta que esta solo puede vibrar con un conjuto discreto de freecuencias dadas por

$$\omega_n = n\,\omega_o\,, \tag{9.61}$$

donde ω_0, denominada frecuencia fundamental está dada por

$$\omega_0 = \frac{\pi\,v}{L}\,, \tag{9.62}$$

claramente las ondas que hemos obtenido tienen que ser ondas estacionarias lo que se demuestra en forma explícita al reescribir las soluciones obtenidas en la forma

$$u(x,t) = 2\,A\,sen(k_n\,x)\,cos(\omega_n\,t)\,. \tag{9.63}$$

Si en lugar de comenzar con la solución propuesta 9.54 se comienza con

$$u(x,t) = A\,cos(kx-\omega t) + B\,cos(kx+\omega t) \tag{9.64}$$

se obtienen soluciones de la forma [**Ejercicio**]

$$u(x,t) = 2\,A\,sen(k_n x)\,cos(\omega_n t) \tag{9.65}$$

con las mismas condiciones para k_n y ω_n.

En vista del principio de superposición, la solución más general de la ecuación de ondas para una cuerda vibrante con los extremos fijos es una suma sobre todas las ondas estacionarias posibles (modos) esto es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\,sen(n\,\omega_0\,t) + b_n\,cos(n\,\omega_0\,t)]\,sen(\frac{n\pi x}{L}) \quad \text{con: } \omega_0 = \frac{\pi\,v}{L} \tag{9.66}$$

A esta solución se le denomina serie de Fourier doble. En la siguiente sección la construiremos de otra forma y estudiaremos la técnica que nos permitirá calcular los coeficientes a_n y b_n

9.3.2. Resolviendo la ecuación de Ondas a través del método de separación de variables

Vamos a estudiar el mismo problema que acabamos de resolver: el problema de la cuerda vibrante con extremos fijos, es decir, queremos resolver la PDE

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{9.67}$$

sujeta a las condiciones de borde e iniciales,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \phi(x)\,, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x)\,. \tag{9.68}$$

Esta vez vamos a atacar el problema utilizando *separación de variables*, ya sabemos que tenemos que empezar por proponer el siguiente anzats[8] para resolver la ecuación de ondas unidimensional.

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{9.69}$$

al sustituir esta función en la ecuación de ondas se obtiene

$$X''T - \frac{1}{v^2}X\ddot{T} = 0 \tag{9.70}$$

donde ahora las derivadas no son parciales sino ordinarias ($' = \frac{d}{dx}$, $\dot{} = \frac{d}{dx}$), la ecuación (9.70) se puede reescribir en la forma

$$X''T = \frac{1}{v^2}X\ddot{T} \tag{9.71}$$

y al dividir por XT,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} \tag{9.72}$$

acá es que podemos hacer la observación que sustenta el método: '!cada uno de los lados de esta ecuación tiene que ser constante!, y el problema de resolución de la ecuación de ondas unidimensional

[8]una solución de este tipo es denominada solución en *variables separadas*

se ha convertido en el de resolver dos ecuaciones ordinarias acopladas por la *constante de separación* como sigue:

$$\frac{X''}{X} = \kappa^2 \tag{9.73}$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \kappa^2 \tag{9.74}$$

Para el caso que nos ocupa hay tres posibilidades: $\kappa^2 = 0$, $\kappa^2 > 0$ y $\kappa^2 < 0$

En el primer caso $\kappa = 0$ la ecuación para X es la siguiente

$$X'' = 0, \tag{9.75}$$

con solución $X(x) = Ax + B$, al evaluar las condiciones de borde obtenemos

$$X(0) = A0 + B = 0, \quad \text{y} \tag{9.76}$$

$$X(L) = AL + B = 0 \tag{9.77}$$

que es un sistema lineal que solo posee la solución trivial ($A = 0$, $B = 0$).

El segundo caso: $\kappa^2 > 0$ también lleva (**ejercicio**) a $X(x) = 0$

Finalmente, el caso $\kappa^2 < 0$ lleva a un análisis más interesante, que comienza por observar la ecuación diferencial para X

$$X'' = -\kappa^2 X \tag{9.78}$$

cuya solución general es bien conocida

$$X(x) = Asen(\kappa x) + Bcos(\kappa x) \tag{9.79}$$

Al evaluar las condiciones de frontera obtenemos de nuevo un sistema lineal para los coeficientes, en este caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ sen(\kappa L) & cos(\kappa L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9.80}$$

que en notación compacta reescribimos como:

$$\mathbf{MA} = \mathbf{0} \tag{9.81}$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ sen(\kappa L) & cos(\kappa L) \end{pmatrix} \quad \text{y } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{9.82}$$

La existencia de soluciones no triviales para el sistema (9.81) está definida por la *no inversibilidad* de la matriz $\mathbf{M}$, que a su vez está dada por la nulidad de su determinante, al estudiar esta condición obtenemos

$$det(\mathbf{M}) = 0 \iff sen(\kappa L) = 0 \tag{9.83}$$

esta condición implica las siguientes condiciones para el valor de κ (*existencia de un número infinito de autovalores*)

$$\kappa \times L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9.84}$$

o equivalentemente

$$\kappa = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{9.85}$$

¡esta es nuestra vieja condición 9.60 para las longitudes de onda de las ondas estacionarias!, al reinsertarla en el problema lineal queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & cos(n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & cos(n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.86}$$

que implica: $B = 0$ y A arbitrario. De manera que las soluciones espaciales (*autofunciones*) compatibles con las condiciones de frontera tienen la forma

$$X_n(x) = Asen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.87}$$

Para construir la parte temporal ($T(t)$) asociada a cada solución espacial factible, debemos recordar que T obedece la ecuación general: $\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -\kappa^2$, de manera que para cada autofunción espacial, la función temporal correspondiente estará dada por la solución general de

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{9.88}$$

donde debemos destacar la dependencia en los autovalores $n\pi/L$, al reescribir esta ecuación en la forma

$$\ddot{T} = \frac{n^2\pi^2v^2}{L^2}T \tag{9.89}$$

reconocemos de inmediato la frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi\, v/L$ y podemos poner

$$\ddot{T} = -n^2\,\omega_0^2 T \tag{9.90}$$

de donde sigue que

$$T_n(t) = a_n\, sen(\omega_n t) + b_n\, cos(\omega_n t) \quad \omega_n = n\omega_0 \tag{9.91}$$

de esta manera, al multiplicar por la solución espacial correspondiente obtenemos

$$u_n(x,t) = [a_n\, sen(\omega_n t) + b_n\, cos(\omega_n t)]\, sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.92}$$

Ahora bien, debemos notar que para cada n $u_n(x,t)$ es una solución de la ecuación de ondas que sartisface las condiciones de frontera, sin embargo, como la ecuación es **lineal**, la superposición de soluciones también es solución, de manera que -por ejemplo-, la función: $u(x,t) = u_{n_1}(x,t)+u_{n_2}(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas.

Este razonamiento puede extenderse a la superposición de un número arbitrario de soluciones de manera que, la solución más general de la ecuación de ondas compatible con las condiciones de frontera que hemos dado estará dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \tag{9.93}$$

Es decir, por la fórmula 9.66 que habíamos encontrado en la subsección anterior:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n\, sen(\omega_n t) + b_n\, cos(\omega_n t)]\, sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.94}$$

Donde evidentemente, aún tenemos un número infinito de constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales: $u(x,0) = \phi(x)$ y $\partial_t u(x,0) = \psi(x)$.

Antes de abocarnos al cálculo de las constantes es importante que destaquemos que inicialmente buscábamos una solución en variables separadas y que hemos encontrado una solución general que obviamente no posee esta estructura pero (y esto es notable) que está expresada como superposición de soluciones separadas. Más aun, es posible demostrar que (bajo ciertas condiciones), la serie as es convergente y que cualquier solución de la ecuación de ondas puede ser aproximada por una serie del tipo (9.66) tanto como se quiera.

9.3.3. Cálculo de los coeficientes

En la sección anterior habíamos encontrado una expresión para la solución general del problema que describe las oscilaciones transversales de una cuerda con sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, a saber:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n sen(\omega_n t) + b_n cos(\omega_n t)]\, sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.95}$$

y habíamos comentado acerca de la necesidad de utilizar las condiciones iniciales para evaluar los coeficientes, labor a que nos vamos as dedicar a continuación. Al evaluar las condiciones iniciales: $u(x,0) = \phi(x)$ y $\partial_t\, u(x,0) = \psi(x)$ se obtiene:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n sen(\omega_n 0) + b_n cos(\omega_n 0)]\, sen(\frac{n\pi x}{L}) = \phi(x) \tag{9.96}$$

$$\partial_t\, u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \omega_n cos(\omega_n 0) - b_n \omega_n sen(\omega_n 0)]\, sen(\frac{n\pi x}{L}) = \psi(x) \tag{9.97}$$

esto es:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.98}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\omega_n\, sen(\frac{n\pi x}{L}) \tag{9.99}$$

Dicho en pocas palabras: los coeficientes a_n y $\omega_n\, b_n$ son los coeficientes de los desarrollos en serie de Fourier unidimensional de las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$. Ahora bién, cabe preguntarse ¿cómo se calculan los oeficientes?.

Para contestar esta pregunta concentrémonos en calcular los coeficientes de la primera de estas series (9.98). para ello comencemos por multiplicar ambos lados de la igualdad por $sen(\frac{p\pi x}{L})$ luego de lo cual vamos a integrar[9] entre 0 y L para obtener:

$$\int_0^L sen(\frac{p\pi x}{L})\, \phi(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L sen(\frac{p\pi x}{L}) sen(\frac{n\pi x}{L}) dx \tag{9.100}$$

donde "abusivamnete"hemos invertido el orden de la suma y la integración.

Ahora bien, es facil demostrar (**ejercicio**) que

$$\int_0^L sen(\frac{p\pi x}{L}) sen(\frac{n\pi x}{L}) dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & \text{si } n = p \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \tag{9.101}$$

o usando la delta de Kronecker,

$$\int_0^L sen(\frac{p\pi x}{L}) sen(\frac{n\pi x}{L}) dx = \frac{L}{2}\, \delta_{np} \tag{9.102}$$

de acá se obtiene de inmediato

$$b_p = \frac{2}{L} \int_0^L sen(\frac{p\pi x}{L})\, \phi(x) dx = \frac{2}{L} \langle e_p(x), \phi(x)\rangle \tag{9.103}$$

[9] en verdad, estamos introdduciendo el producto interno $\langle f(x), g(x)\rangle \equiv \int_0^L\, f(x)g(x)\, dx$

done $e_n(x) = sen(n\pi x/L)$ análogamente:

$$a_p = \frac{2}{\omega_p L}\langle e_p(x), \psi(x)\rangle \tag{9.104}$$

De esta manera, hemos calculado los coeficientes de la representación en serie de la solución al problema que nos interesaba.

Probablemente, uno de los comentarios más importante que podemos hacer en este momento sea el siguiente:

Los coeficientes de una serie de Fourier son únicos.

Esto significa que si de alguna manera -diferente a calcular- somos capaces de encontrar los coeficientes, ya no hará falta nada más por hacer. A este respecto vale la pena comentar un ejemplo sencillo.

Supongamos que las condiciones iniciales para un problema son

$$\phi(x) = \frac{L}{2}\, sen(\frac{2\pi\, x}{L}) \tag{9.105}$$

$$\psi(x) = \frac{v}{3}\, sen(\frac{3\pi\, x}{L}) \tag{9.106}$$

Para encontrar los coeficientes de las series que nos interesan nos basta con leer para obtener que los únicos coeficientes no nulos son a_2 y b_3, lo que implica que el movimiento de la cuerda en este caso esta dado por

$$u(x,t) = \frac{L}{9\pi}\, sen(\frac{3\pi\, v\, t}{L})\, sen(\frac{3\pi\, x}{L}) + \frac{L}{2}\, cos(\frac{2\pi\, v\, t}{L})\, sen(\frac{2\pi\, x}{L}) \tag{9.107}$$

Un último ejercicion interesante es el siguiente: utilice algún programa de manipulación matemática (por ejemplo: matlab, maple, mathematica, o scilab -que es un softwre de distribución gratuita-) para hacer una animación de lo que acabamos de obtener.

9.4. Ecuación de ondas para la membrana

Para concluir el capítulo estudiemos la construcción de la ecuación que describe el movimiento de una membrana tensa. El análisis es similar al que se llevó a cabo en el estudio de la cuerda en la sección (9.1). La diferencia está en que por ser un problema bidimensional, la membrana posee tensión superficial.

Consideremos un pequeñop trozo rectangular de membrana cuyo punto medio esta localizado en las coordenadas (x, y) y cuyas esquinas están localizadas en los cuatro puntos $(x \pm \frac{dx}{2}, y \pm \frac{dy}{2}$. Queremos estudiar las oscilaciones transversales de la cuerda, es decir, los cambios en la altura z del punto localizado en la posición (x, y) en función del tiempo $(z(t) = u(x, y; t)$.

Para comenzar debemos notar que la diferencia entre la tensión superficial y la tensión en una cuerda consiste en que las fuerzas en un pequeño trozo de cuerda están aplicadas en los extremos del trocito, mientras que en el caso dela membrana las fuerzas están distribuidas a lo largo de los lados del pequeño rectángulo. Así, por ejemplo, la fuerza neta que actúa en el lado localizado entre los puntos $(x - \frac{dx}{2}, y \pm \frac{dy}{2})$ está dada por:

$$\vec{F} = \vec{\mathcal{T}}(x - \frac{dx}{2}, y)\, dy \tag{9.108}$$

donde $\mathcal{T}$ es la tensión superfiucial (cuyas unidades son $\frac{fuerza}{longitud}$ en consecuencia, la fuerza neta que actúa sobre el rectángulo es

$$\vec{F}_{total} = \vec{\mathcal{T}}(x + \frac{dx}{2}, y)\, dy + \vec{\mathcal{T}}(x - \frac{dx}{2}, y)\, dy + \vec{\mathcal{T}}(x, y + \frac{dy}{2})\, dx + \vec{\mathcal{T}}(x, y - \frac{dy}{2})\, dx. \tag{9.109}$$

Como estamos considerando solamente las oscilaciones transversales pequeñas de la membrana (i.e. en la dirección z), podemos seguir muy de cerca el argumento de la sección anterior para mostrar que $|\vec{\mathcal{T}}|$ es aproximadamente constante. Usando esta conclusión parcial y utilizando argumentos geométricos muy parecidos a los que utilizamos en el caso de la cuerda, es muy facil ver[10] que la ley

[10] solo siga el argumento de la cuerda paso a paso

de fuerzas para la pequeña pieza rectangular de la membrana es

$$T\left[\partial_x^2\, u(x,y;t) + \partial_y\, u(x,y;t)\right]\, dx\, dy = \sigma\, \partial_t^2 u(x,y;t)\, dx\, dy \tag{9.110}$$

donde σ es la densidad superficial de masa. Definiendo el operador de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 \tag{9.111}$$

podemos reescribir la ecuación (9.110) en la forma

$$\nabla^2\, u(x,y;t) - \frac{\sigma}{\mathcal{T}}\, \partial_t^2 u(x,y;t) = 0 \tag{9.112}$$

que es la ecuación de ondas bidimensional (ó ecuación de ondas en $2+1$ dimensiones)

Capítulo 10

EDO

Problemas Resueltos

10.1. ODE

Problema 10.1.1 *Considere una partícula (masa puntual) que se mueve en el plano* **euclideo** *de manera que el vector de posición cartesiano de la partícula (como función del tiempo (t) es* $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)$, *en términos de coordenadas polares*[1] (r, θ) *las ecuaciones de movimiento que decriben el movimiento de esta patícula en particular son*

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -\frac{S}{r^2} - \frac{V}{r^3} \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= 0\,, \end{aligned} \tag{10.1}$$

donde S *y* V *son constantes y* $V < 0$. *Suponga que* $0 < \dot{\theta}$, $\forall t$

1. *Encuentre una expresión paramétrica* $u = u(\theta)$ *para la forma de las órbitas periódicas de la partícula, donde* $u = 1/r$.

[1] $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$

2. Que valores de V permiten la exixstencia de órbitas periódicas de período 2π, es decir, funciones $r(\theta)$ con $r(\theta) = r(\theta + 2\pi)$

Comencemos por decir que este es un problema totalmente estándar de mecánica newotoniana, en particular, si $V = 0$ estamos frente al denominado problema de Kepler.

La primera observación en la ruta a resolver el problema totalmente, consiste en observar la segunda ecuación reescribiéndola en la forma

$$r\frac{d}{dt}\left[\frac{d\theta}{dt}\right] + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \tag{10.2}$$

a continuación multipicamos en ambos lados por r obteniendo

$$r^2\frac{d}{dt}\left[\frac{d\theta}{dt}\right] + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0\,, \tag{10.3}$$

finalmente, observando con cuidado, podemos notar que

$$2r\frac{dr}{dt} = \frac{d(r^2)}{dt}\,, \tag{10.4}$$

y esto nos permite reescribir 10.2 como

$$r^2\frac{d}{dt}\left[\frac{d\theta}{dt}\right] + \left[\frac{d(r^2)}{dt}\right]\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\theta}{dt}\right] = 0\,, \tag{10.5}$$

de donde deducimos de inmediato que

$$r^2\dot{\theta} = \ell = constante \tag{10.6}$$

que no e otra cosa que la ley de conservación del momentum angular para los movimientos bajo fuerzas centrales. Este rsultado puede sustituirse convenientemente en la primera de las dos ecuaciones de movimiento para quedar con

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{S}{r^2} - \frac{V}{r^3} \tag{10.7}$$

El siguiente paso que nos interesa consiste en eliminar el tiempo de esta ecuación diferencial, para ver como hacerlo pensemos en una función cualquiera $h(t)$y observemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dh}{d\theta} = \frac{\ell}{r^2}\frac{dh}{d\theta}$$

de acuerdo a esto, podemos establecer que

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta}$$

miremos ahora

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dr}{dt}\right] = \frac{\ell}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\ell}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right] = -\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d(1/r)}{d\theta}\right], \tag{10.8}$$

sustituyendo 10.8 en 10.7

$$-\frac{\ell^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d(1/r)}{d\theta}\right] - \frac{\ell^2}{r^3} = -\frac{S}{r^2} - \frac{V}{r^3}, \tag{10.9}$$

ó

$$-\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d(1/r)}{d\theta}\right] - \frac{1}{r} = \frac{r^2}{\ell^2}\left[-\frac{S}{r^2} - \frac{V}{r^3}\right], \tag{10.10}$$

es decir,

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\ell^2}\left[S + \frac{V}{r}\right], \tag{10.11}$$

y usando elcambio de variable $u = 1/r$,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{\ell^2}\left[S + Vu\right], \tag{10.12}$$

en definitiva,

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left[1 - \frac{V}{\ell^2}\right]u = \frac{S}{\ell^2}}, \tag{10.13}$$

Es absolutamente esencial notar que estas transformaciones deopenden críticamente de que ℓ (el momentum angular satisfaga $\ell \neq 0$.

En cuanto a las soluciones, lo que ya hemos aprendido demuestra que

$$u(\theta) = u_0\, cos(\kappa(\theta + \theta_0)) + \frac{S}{\ell^2}$$

con

$$\kappa = 1 - \frac{V}{\ell^2}$$

falta un poquitín de discusión, pero vamos chévere, estoy cansaaadooo

Problema 10.1.2 *Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria definida sobre el intervalo* $(0, \infty)$

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = f(x) \,, \quad 0 < x \tag{10.14}$$

Cuando $f = 0$*, las soluciones de la ecuación* 10.14 *son funciones de Bessel* J_ν *y* Y_ν*) de primera y segunda clase. El Wronskiano* $W(J_\nu, Y_\nu)$ *toma el valor* $x = 2/\pi$ *en* $x = 1$*, para todo valor del parámetro* ν*.*

- *Utilice el teorema de Abel para encontrar una expresion para* $W(J_\nu, Y_\nu)$*.*

  Solución: ver el ejemplo *5.7.1*

- *Utilice el método e variación de parámetros, deduzca una solución general a la ecuación* 10.14 *cuando* $f(x) = x$*. Exprese la solucióncomo una combinación de funciones de Bessel y sus deivadas o de integrales que involucren tales funciones.*

Capítulo 11

EDP

Problemas Resueltos

11.0.1. Ecuaciones hiperbólicas (Laplace-Helmholtz)

Problema 11.0.1 *Este problema está asociado con el ejemplo 8.1.2*

Resuelva la ecuación de Lapalace en el rectángulo $0 \leq x \leq a$ $0 \leq y \leq b$ *con las condiciones de borde*

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 0\,, \quad \phi(a, y) = 0 \\ \phi(x, 0) &= 0\,, \quad \phi(x, b) = V_0\,. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Este ejemplo debe ser comnparado con el ejemplo 8.1.2

Las condiciones de borde para $x = 0$ *y* $x = a$ *obligan a* $\phi(x, y)$ *a tomar el valor cero en dos puntosw diferentes de la bariable* x*. Esto no es posible con las sooluciones de los tipos*

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [Ax + B][Cy + D] \\ \phi(x, y) &= [Asenh(\kappa x) + Bcosh(\kappa x)][Csen(\kappa y) + Dcos(\kappa y)]\,, \end{aligned} \tag{11.2}$$

en efecto, la primera solución tiene la forma de una recta en x y por tanto solo puede ser nula en un punto ($x = 0$ ó $x = a$). Algo parecido ocurre con el segundo tipo de solución, que por corresponder a exponenciales no puede tener el valor cero en dos puntos diferentes.

De esta manera, podemos descartar facilmente los dos tipos de solución que hemos discutido.

El tercer tipo de solución,

$$\phi(x,y) = [Asen(\kappa x) + Bcos(\kappa x)][Csenh(\kappa y) + Dcosh(\kappa y)]\,, \tag{11.3}$$

ofrece mucho mejores posibilidades- Las funciones trigonométricas son periódicas y por tanto pueden tomar el mismo valor, en este caso, cero, en dos puntos diferentes. AL imponer las condiciones de contorno resulta,

$$\begin{aligned} \phi(0,y) &= [Asen(\kappa 0) + Bcos(\kappa 0)][Csenh(\kappa y) + Dcosh(\kappa y)] = 0 \\ \phi(0,y) &= [Asen(\kappa b) + Bcos(\kappa b)][Csenh(\kappa y) + Dcosh(\kappa y)] = 0\,, \end{aligned} \tag{11.4}$$

esto implica el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} sen(\kappa 0) & cos(\kappa 0) \\ sen(\kappa b) & cos(\kappa b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \tag{11.5}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ sen(\kappa b) & cos(\kappa b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{11.6}$$

Como en el ejemplo 8.1.2 ste sistema solo tiene soluciones no triviales cuando la matriz del sistema es singular, es decir, cuando su determinante es cero, esto impone la condición

$$sen(\kappa a) = 0\,,$$

que determina los autovalores

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}\,,$$

y obliga a $B = 0$. De esta manera, cualquier función de la familia

$$\phi_n(x,y) = \left[C senh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + D cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right] \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,, \tag{11.7}$$

satisface dos de las condicions de borde del problema.

La condición

$$\begin{aligned}\phi_n(x,0) &= \left[C senh\left(\frac{n\pi 0}{a}\right) + D cosh\left(\frac{n\pi 0}{a}\right)\right] \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= [0 + D] \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0\,,\end{aligned} \tag{11.8}$$

implica $D = 0$ reduciendo la familia de funciones que son solucionws de la ec de Laplace en la región de interés y satisfaacen tres de las condiciones de contorno a

$$\phi_n(x,y) = C_n \, senh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,. \tag{11.9}$$

Ahjora bien, debería ser obvio que ninguna de las funciones de esta familia puede tomar un valor constante al evaluarse en $y = b$ como exige la última de las condiciones de borde.

Sin embargo, la linealidad de la ecuación de Laplace nos permite pensar en una supperposición arbitraria de las funciones que hemos encontrado interesantes, como posible solución. En efcto, la función

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, senh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,. \tag{11.10}$$

satisface tres de las condiciones de borde requeridas así que debemos preguntar que ocurre con la igualdad

$$\phi(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \; sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = V_0\,. \tag{11.11}$$

con el fin de abreviar un poco las expresiones aprovechamos el hecho de que b es una constante para definir,

$$B_n = C_n \, senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\,. \tag{11.12}$$

y así escribir,

$$\phi(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = V_0\,. \tag{11.13}$$

esta es una serie de Fourier ordinaria y como aprendimos en la sección 6.2, trabajar con esto es exactamente igual que trabajar con vectores para buscar sus componentes, es decir, necesitamos tomar el producto escalar por un elemen to de la base en ambos lados de la igualdad,

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^a dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \int_0^a dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{a}\right) V_0\,. \tag{11.14}$$

La integral en el lado izquierdo tiene el valor

$$\int_0^a dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}\delta_{np}\,, \tag{11.15}$$

mientras que

$$\int_0^a dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{a}\right) = -\frac{a}{p\pi}\, cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right)|_0^a = -\frac{a}{p\pi}[(-)^p - 1] = \begin{cases} \frac{2a}{\pi p} & p\ par \\ 0 & p\ impar \end{cases}, \tag{11.16}$$

en consecuencia,

$$B_p = \begin{cases} \frac{4}{\pi p} & p\ impar \\ 0 & p\ par \end{cases}, \tag{11.17}$$

y por tanto,

$$C_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{\pi p\, senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} & p\ impar \\ 0 & p\ par \end{cases}, \tag{11.18}$$

así, que en definitiva, la solución completa al problema es

$$\phi(x,b) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n\ impares} \frac{senh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\ sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{n\, senh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\,. \tag{11.19}$$

Problema 11.0.2 *La teoría adecuada para este problema está en la sección 8.3*

Resolver la ecuación de Laplace en el interior de la región $0 < r$, $\theta = 0$, $\theta = \Delta$ *con las condiciones de borde* $\phi(r, 0) = 0$, $\phi(r, \Delta) = V_0$ *=constante. Resolver*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11.20}$$

($0 < r$, $0 \le \theta \le \Delta$*)*

$$\phi(r, 0) = 0\,, \qquad \phi(r, \Delta) = V_0 \tag{11.21}$$

Obviamente este problema trata de un **sector angular**[1] *en el que los límites para el radio son* 0 *e* ∞*. En ambos límites radiales no hay razón para que* ϕ *sea divergente.*

Recordemos que la solución trivial ($\nu = 0$*) tiene la forma general,*

$$\phi(r, \theta) = [A\ln(r) + B]\,[C\theta + D] \tag{11.22}$$

Debido a las dos condiciones de borde angulares podemos intentar utilizar la solución trivial sin incluir $\ln(r)$ *ya que* ϕ *no puede ser divergente cuando* r *se acerca a* 0*, de acuerdo a esto, intentamos la solución*

$$\phi(r, \theta) = A\theta + B\,,$$

al evaluar las condiciones de borde,

$$\begin{aligned} A0 + B &= 0 \\ A\Delta + B &= V_0 \end{aligned} \tag{11.23}$$

podemos resolver los valores de las constantes, encontrando $B = 0$ *y* $A = V_0/Delta$*, en definitiva,*

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0}{\Delta}\theta \tag{11.24}$$

[1] Ver el problema 11.0.6

Problema 11.0.3 *Resolver la ecuación de laplace en el interior de una región anular ($0 < a < r < b$) con las condiciones de frontera,*

$$\phi(a,\theta) = V_1\,, \qquad \phi(b,\theta) = V_2 \tag{11.25}$$

En esta oportunidad, el rango angular es completo, y por lo tanto,, en la solución trivial ($\nu = 0$), el término proporcional a θ tiene que estar ausente. La sencillez de la condición de borde sugiere intentar con

$$\phi(r,\theta) = A\ln(r) + B\,, \tag{11.26}$$

al evaluar,

$$\begin{aligned} A\ln(a) + B &= V_1 \\ A\ln(b) + B &= V_2 \end{aligned} \tag{11.27}$$

restando ambas equaciones queda

$$A\ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_2 - V_1\,,$$

de donde $A = (V_2 - V_1)/\ln(b/a)$, de donde

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)}\ln(r) + B\,, \tag{11.28}$$

Sustituyendo la condición de borde para $r = a$,

$$\frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)}\,\ln(a) + B = V_1\,,$$

de donde,

$$B = V_1 - \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)}\,\ln(a)\,,$$

en consecuencia, la slución al problema es

$$\phi(r,\theta) = \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)}\,\ln(r) + V_1 - \frac{V_2 - V_1}{\ln(b/a)}\,\ln(a)$$

Problema 11.0.4 *Una interesante generlización del problema 11.0.3 es la siguiente,*

Resolver

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{11.29}$$

sujeta a la condiciones de frontera ($a<r<b$), $0<\theta\leq 2\pi$

$$\phi(a,\theta)=f(\theta)\,,\qquad \phi(b,\theta)=g(\theta) \tag{11.30}$$

Como estamo usando el rango angular completo, la solución general de la ecuacióndе Laplace tiene la forma (ver Magid, el apéndice)

$$\phi(r,\theta)=A\,\ln(r)+B+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n+B_nr^{-n}][D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]\,, \tag{11.31}$$

Al evaluar las condiciones de borde tenemos,

$$\begin{aligned}\phi(a,\theta)&=A\,\ln(a)+B+\sum_{n=1}^{\infty}[A_na^n+\frac{B_n}{a^n}][D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]=f(\theta)\\ \phi(b,\theta)&=A\,\ln(b)+B+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nb^n+\frac{B_n}{b^n}][D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]=g(\theta)\end{aligned} \tag{11.32}$$

A partir de estas ecuaciones vamos a calcular los coeficientes.

Comencemos por integrar las ecuaciones 11.40 en ambos lados en un ángulo completo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}d\theta\left[A\,\ln(a)+B+\sum_{n=1}^{\infty}[A_na^n+\frac{B_n}{a^n}][D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]\right]&=\int_0^{2\pi}d\theta f(\theta)\\ \int_0^{2\pi}d\theta\left[A\,\ln(b)+B+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nb^n+\frac{B_n}{b^n}][D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)\right]&=\int_0^{2\pi}d\theta g(\theta)\end{aligned} \tag{11.33}$$

e acá,

$$\begin{aligned}2\pi[A\,\ln(a)+B]+\sum_{n=1}^{\infty}[A_na^n+\frac{B_n}{a^n}]\int_0^{2\pi}d\theta[D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]&=\int_0^{2\pi}d\theta f(\theta)\\ 2\pi[A\,\ln(b)+B]+\sum_{n=1}^{\infty}[A_nb^n+\frac{B_n}{b^n}]\int_0^{2\pi}d\theta[D_ncos(n\theta)+C_nsen(n\theta)]&=\int_0^{2\pi}d\theta g(\theta)\end{aligned} \tag{11.34}$$

debido a la periodicidad, todas las integrales trigonométricas se anulan y queda

$$\boxed{\begin{aligned} A\,\ln(a) + B &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) \\ A\,\ln(b) + B &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta) \end{aligned}} \tag{11.35}$$

este es un sistema 2×2 *para* A *y* B.

Si ahora volvemos atrás y multiplicamos ambos miembros de la primera de las ecuaciones 11.40 por $cos(k\theta)$ *e integramos en el período angular completo, resulta (para* $r = a$*),*

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\theta (A\,\ln(a) + B) cos(k\theta) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [A_n a^n + \frac{B_n}{a^n}] \int_0^{2\pi} d\theta [D_n cos(n\theta) cos(k\theta) + C_n sen(n\theta) cos(k\theta)] = \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) cos(k\theta) \end{aligned} \tag{11.36}$$

las integrales del primer sumando se anulan trivialmente, además, sabemos que

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, cos(k\theta) cos(n\theta) = \pi \delta_{kn}$$

y

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, cos(k\theta) sen(n\theta) = 0 \tag{11.37}$$

fórmulas que reducen la expresión 11.36 a

$$\boxed{[A_k a^k + \frac{B_k}{a^k}] D_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta f(\theta) cos(k\theta)} \tag{11.38}$$

Volviendo de nuevo a las ecuaciones 11.40 y en esta oportunidad multiplicando la segunda de tales ecuaciones por $sen(kx)$ *y utilizamos tanto la fórmula 11.37 como*

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, cos(k\theta) cos(n\theta) = \frac{1}{\pi} \delta_{kn}\,, \quad \int_0^{2\pi} d\theta\, sen(k\theta) sen(n\theta) = \frac{1}{\pi} \delta_{kn}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\theta\, sen(k\theta)[A\,\ln(b)+B]+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n b^n+\frac{B_n}{b^n}]\int_0^{2\pi} d\theta[D_n cos(n\theta)sen(k\theta)+C_n sen(n\theta)sen(k\theta)]=\int_0^{2\pi} d\theta g(\theta)\end{aligned}\tag{11.39}$$

y de acá,

$$\boxed{[A_k b^k+\frac{B_k}{b^k}]C_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} sen(k\theta)g(\theta)d\theta\,.}\tag{11.40}$$

En resumen, los coeficientes deben calcularse como soluciones al sistema de ecuaciones,

$$\boxed{\begin{aligned}A\,\ln(a)+B&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta\\A\,\ln(b)+B&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta\\{}[A_k a^k+\frac{B_k}{a^k}]D_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)cos(k\theta)d\theta\\{}[A_k b^k+\frac{B_k}{b^k}]C_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)sen(k\theta)d\theta\end{aligned}}\tag{11.41}$$

Noótese que si se pone $f(\theta)=V_1$ *y* $g(\theta)=V_2$ *estaremos reproduciendo exactamente el problema 11.0.3. En ese caso ocurre que*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)sen(k\theta)d\theta&=\int_0^{2\pi} V_1 sen(k\theta)d\theta=V_1\int_0^{2\pi} sen(k\theta)d\theta=0\\\int_0^{2\pi} g(\theta)sen(k\theta)d\theta&=\int_0^{2\pi} V_2 cos(k\theta)d\theta=0\,,\end{aligned}\tag{11.42}$$

mientras que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)sen(k\theta)d\theta&=\frac{V_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta=V_1\\\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta&=\frac{V_2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta=V_2\end{aligned}\tag{11.43}$$

de manera que reproducimos exactamente el problema 11.0.3

Problema 11.0.5 *Este problema es particularmente interesante.*

Resolver

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{11.44}$$

en el interior de una región circular de radio a sabiendo que en en medio círculo de frontera, $\phi = v_1$ *y en el oro medio círculo* $\phi = v_2$ *(*v_1 *y* v_2 *constantes) .*

En términos precisos, tomamos en cuenta que la región tiene borde circular y por tanto, lo razonable es utilizar el laplaciano en coordenadas polares para reescribir el problema como

Resolver

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11.45}$$

sujeta a la condiciones de frontera,

$$\phi(a,\theta) = v_1\,, \quad 0 < \theta < \pi\,. \qquad \phi(a,\theta) = v_2\,, \quad -\pi < \theta < 0 \tag{11.46}$$

donde hemos cambiado el dominio angular estándar al dominio (del mismo rango angular) $-\pi < 0 < \pi$.

Hay un detalle técnico que no había mencionado hasta este momento. La región de interés incluye al punto $r = 0$ *y allí la solución genral de la ecuación de Laplace es singular, ahora bien, en este problema no hay ninguna fuente puntual y por lo tanto,ninguna razón por la cuál* ϕ *pueda ser divergente, así que hay una condición de borde implícita que enunciaremos reexpresando el problema como*

Resolver

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11.47}$$

sujeta a la condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} &\phi(a,\theta) = v_1\,, \quad 0 < \theta < \pi\,. \\ &\phi(a,\theta) = v_2\,, \quad -\pi < \theta < 0 \\ &\phi(r,\theta) \text{ debe mantenerse finito en } r = 0\,. \end{aligned} \tag{11.48}$$

Comencemos por introducir dos constantes A *y* B

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_1+v_2}{2} + A \\ v_2 &= \frac{v_1+v_2}{2} + B \end{aligned}} \tag{11.49}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_1 - v_2}{2} \\ B = -A &= \frac{v_2 - v_1}{2} \end{aligned} \tag{11.50}$$

ahora hacemos

$$\phi_1(r,\theta) \equiv \frac{v_1+v_2}{2} \tag{11.51}$$

y estamos seguros de que la solución $\phi(r,\theta)$ *al problema original está dada por* $\phi(r,\theta) = \phi_1(r,\theta) + \phi_2(r,\theta)$ *donde* $\phi_2(r,\theta)$ *es la solución al problema auxiliar, Resolver*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} = 0 \tag{11.52}$$

sujeta a la condiciones de frontera ($V = \frac{v_1 - v_2}{2}$*),*

$$\begin{aligned} &\phi_2(a,\theta) = V\,, \quad 0 < \theta < \pi\,. \\ &\phi_2(a,\theta) = -V\,, \quad -\pi < \theta < 0 \\ &\phi_2(r,\theta) \text{ debe mantenerse finito en } r = 0\,. \end{aligned} \tag{11.53}$$

La simetría (la condición de borde angular es impar en el rango $-\pi < \theta < \pi$ *es* **impar***) va a ser de gran ayuda para resolver este problema auxiliar.*

Como el rango angular es completo, los autovalores que podemos asociar a este problema son 0 *y enteros, de manera, que en principio, la solución general de la ecuación de Laplace que se ajusta a este dominio tiene la forma*

$$\phi_2(r,\theta) = A\,\ln(r) + B + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-n}][D_n cos(n\theta) + C_n sen(n\theta)]\,, \tag{11.54}$$

nótese que, com,o consecuencia de la periodicidad, el factor

$$constante \times \theta\,,$$

en la solución asociada a autovalor 0 *está ausente de la solución.*

Ahora bien, como el origen ($r=0$) *está incluído en la región y no hay fuetes u otrs razones que justifiquen singularidades en ese punto, tanto* $\ln(r)$ *como las potencias negativas de* r *deben etar ausentes, lo que reduce la forma de la solución a*

$$\phi_2(r,\theta) = B + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n [D_n cos(n\theta) + C_n sen(n\theta)]\,, \tag{11.55}$$

aún queda otro "truquito" que podmos usar, la condición de borde es impar en el ángulo y por lo tanto, lsa solución tiene que ser impar, es decir

$$\phi_2(r,\theta) = -\phi_2(r,-\theta)\,,$$

las funciones cos(nθ son opares y por lo tanto, también deben estar auentes de la solución general que vamos a utilizar, es decir, y B=0

$$\phi_2(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n sen(n\theta)\,, \tag{11.56}$$

Evalúo en $r=a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n sen(n\theta) = \begin{cases} +1 & 0<\theta<\pi \\ -1 & -\pi<\theta<0 \end{cases} \tag{11.57}$$

con $D_n = A_n a^n / V$.

La serie de Fourier 11.57 es harto conocida, WolframMathWorld,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1} sen((2n+1)\theta) \begin{cases} +1 & 0<\theta<\pi \\ -1 & -\pi<\theta<0\,, \end{cases} \tag{11.58}$$

así que

$$\phi_2(r,\theta) = \frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} sen((2n+1)\theta)\,, \tag{11.59}$$

y al final del día, recordando que $\phi = \phi_1 + \phi_2$

$$\boxed{\phi_2(r,\theta) = \frac{v_1+v_2}{2} + \frac{4(v_1-v_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} sen((2n+1)\theta)\,,} \tag{11.60}$$

Problema 11.0.6 *Encontrar los autovalores y autofunciones para la ecuación de Laplace en un sector angular cuando las condiciones de borde son (*$0 < \theta \leq \alpha < 2\pi$*)*

$$\phi(r,0) = \phi(r,\alpha) = 0$$

La solución trivial no puede satisfacer estas condiciones angulares, de manera que solo queda la posibilidad

$$\phi_\nu(r,\theta) = \left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu\theta) + \left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu\theta)$$

al evaluar las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu 0) + \left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu 0) = 0 \\ \left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu\alpha) + \left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu\alpha) = 0 \end{aligned} \tag{11.61}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cos(\nu\alpha) & sen(\nu\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu} \\ C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.62}$$

para obtener soluciones diferente de cero tiene que ocurrir que

$$sen(\nu\alpha) = 0\,,$$

de donde,

$$\nu = \frac{n\pi}{\alpha}\,, n = 1,2,3,...$$

al usar estos autovalores, y repasar las condiciones de frotera, $A_n = B_n = 0$ y nos quedamoscon

$$\phi_n(r,\theta) = r^{n\pi/\alpha}\, sen(n\pi\theta/\alpha)\,, \tag{11.63}$$

donde hemos elimnado los coeficientes asociados a las potencias negativas de r porque $r = 0$ está incluído en la región de interés.

Problema 11.0.7 *Encontrar los autovalores y autofunciones para la ecuación de Laplace en un sector angular cuando las condiciones de borde son ($0 < \alpha < 2\pi$)*

$$\frac{\partial\phi(r,0)}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi(r,\alpha)}{\partial\theta} = 0$$

Con estas condiciones de borde hay posibilidades de mantener la solución con $\nu = 0$, en efecto

$$\phi_0(r\,\theta) = [A\ln(r) + B][C\theta + D]$$

de manera que

$$\frac{\partial\phi_o}{\partial\theta} = C[A\ln(r) + B]$$

al evaluar las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}(r,0) &= C[A\ln(r) + B] = 0 \\ \frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}(r,\alpha) &= C[A\ln(r) + B] = 0 \end{aligned} \tag{11.64}$$

se impone $C = 0$, y quedamos con

$$\phi_0(r\,\theta) = B\,,$$

donde el términio logarítmico ha sdo eliminado para que no haya singularidades en $r = 0$.

La solución con $\nu \neq 0$

$$\phi_\nu(r,\theta) = \left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu\theta) + \left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu\theta)$$

se deriva trivialmente con respecto al águlo y al evaluar las condiciones de frontera,

$$
\begin{aligned}
-\nu\left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu 0) + \nu\left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu 0) = 0 \\
-\nu\left[A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}\right] sen(\nu\alpha) + \nu\left[C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\right] cos(\nu\alpha) = 0
\end{aligned}
\tag{11.65}
$$

es decir,

$$
\nu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -sen(\nu\alpha) & cos(\nu\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu} \\ C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-\nu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}
\tag{11.66}
$$

para obtener soluciones diferente de cero tiene que ocurrir que

$$
sen(\nu\alpha) = 0\,,
$$

de donde,

$$
\nu = \frac{n\pi}{\alpha}\,, n = 1, 2, 3, ...
$$

al usar estos autovalores, y repasar las condiciones de frotera, $A_n = B_n = 0$ *y nos quedamoscon*

$$
\phi_n(r,\theta) = r^{n\pi/\alpha}\, cos(n\pi\theta/\alpha)\,,
\tag{11.67}
$$

donde hemos eliminado los coeficientes asociados a las potencias negativas de r *porque* $r = 0$ *está incluído en la región de interés. Las autofunciones que resultan son*

$$
\phi_n(r,\theta) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ r^{n\pi/\alpha}\, cos(n\pi\theta/\alpha) & n = 1, 2, , 3... \end{cases}
$$

Problema 11.0.8 *Encontrar la solución a la ecuación de Laplace en el interior de una región con fomra de cuña (wedge) de ángulo* α *y radio* a*. Las condiciones de borde son*

$$
\phi(r,0) = \phi(r,\alpha) = 0\,, \phi\ \ acotada\ cuando\ r \to 0\,, \quad \phi(r,a) = f(\theta)
$$

Gracias al problema 11.0.6 ya hemos andado parte del camino, en efecto, sabemos que la familia de funciones

$$\phi_n(r,\theta) = r^{n\pi/\alpha}\, sen(n\pi\theta/\alpha)\,, n = 1, 2, 3, ... \tag{11.68}$$

satisfacen las condiciones de borde nulas (homogéneas) en los ángulos y eliminan las singularidades en el origen ($r \to 0$), es decir, son las autofunciones para este problema, de manera qe la solución más general posible que satisface las tres condiciones de frontera mencionadas es

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{n\pi/\alpha}\, sen(n\pi\theta/\alpha)\,, \tag{11.69}$$

al evaluar en $r = a$,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, sen(n\pi\theta/\alpha) \\ c_n &= A_n r^{n\pi/\alpha}\,, \end{aligned} \tag{11.70}$$

y como ya sabemos, los coeficientes c_n se calculan como

$$c_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)\, sen(n\pi\theta/\alpha) \tag{11.71}$$

y de allí,

$$A_n = \frac{2a^{-n\pi/\alpha}}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)\, sen(n\pi\theta/\alpha) \tag{11.72}$$

Problema 11.0.9 *Resolver la ecuación de Laplace en el interior de un sector de disco de ángulo α, con las condiciones de frontera*

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,0) = \frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\alpha) = 0\,, \quad \phi(a,\theta) = f(\theta)\,.$$

En el problema 11.0.7 hemos encontrado las autofunciones para este problema,

$$\phi_n(r,\theta) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ r^{n\pi/\alpha}\, cos(n\pi\theta/\alpha) & n = 1, 2, , 3... \end{cases}$$

De modo que sabemos que la solución más general posible que satisface tres de las condiciones de borde es

$$\phi(r,\theta) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, r^{n\pi/\alpha}\, cos(n\pi\theta/\alpha) \tag{11.73}$$

Al evaluar la condición de contorno en $r = a$,

$$f(\theta) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, a^{n\pi/\alpha}\, cos(n\pi\theta/\alpha)\,, \tag{11.74}$$

ycomo ya hemos practicado estas cosas ad nauseam, sabemos que los coeficientes se calculan como

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)d\theta \\ A_n &= \frac{2\, a^{-n\pi/\alpha}}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(\theta)\, cos(n\pi\theta/\alpha) \end{aligned} \tag{11.75}$$

Problema 11.0.10 *(ÁLVARO) Problema super horrible, jejejej*

Resolver la ecuación de Laplace en el interior de un sector anular de las dimensiones siguientes

$$1 \le r \le 2$$

y

$$0 \le \theta \le \pi/2\,.$$

Las condiciones de borde son las siguientes:

$$u(r,0) = 0$$

$$u(r,\pi/2) = f(r)$$

$$u(1,\theta) = 0$$

$$u(2,\theta) = 0$$

Comencemos por recordar que, si usamos separación de variables ($\phi(r,\theta) = R(\theta)\Theta(\theta)$, llegamos a

$$\boxed{\begin{aligned} r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) &= \lambda^2\,R \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\lambda^2\,\Theta \end{aligned}} \tag{11.76}$$

ó

$$\boxed{\begin{aligned} r^2\frac{dR}{dr} + r\frac{dR}{dr} &= \lambda^2\,R \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= -\lambda^2\,\Theta \end{aligned}} \tag{11.77}$$

donde, por cierto, la ecuación radial es una ec. diferencial ordinaria de tipo Euler.

Intentemos ver que ocurre si escogemos $\lambda^2 < 0$.

En tal caso, las funciones angulares tienen la forma

$$\Theta_\lambda(\theta) = A_\lambda \sinh(\lambda\theta) + B_\lambda \cosh(\lambda\theta)\,, \tag{11.78}$$

y ahora tenemos que estudiar las soluciones de la ecuación radial,

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0. \tag{11.79}$$

Con ese fin, consideremos el cambio de variable $t = \ln(r)$, al utilizarlo,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{dt}\,. \tag{11.80}$$

Ahora bien,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\,, \tag{11.81}$$

de donde,

$$\frac{dr}{dt} = r\,. \tag{11.82}$$

así que

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{dt} = r\frac{d\Omega}{dr}\,. \tag{11.83}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{dR}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[r\frac{dR}{dr}\right] = \frac{dr}{dt}\frac{dR}{dr} + r\frac{d}{dt}\left[\frac{dR}{dr}\right] = \\ &= \frac{dr}{dt}\frac{dR}{dr} + r\frac{d^2R}{dr^2}\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}\frac{dR}{dr} + r\frac{d^2R}{dr^2}r = \\ &= \frac{dr}{dt}\frac{dR}{dr} + r^2\frac{d^2R}{dr^2} = r\frac{dR}{dr} + r^2\frac{d^2R}{dr^2}\end{aligned} \tag{11.84}$$

Otra manera de manejar el cambio de variabe

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dt}\frac{dt}{dr}\,. \tag{11.85}$$

Pero:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\,, \tag{11.86}$$

así que

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dr}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}\frac{dR}{dt}\,. \tag{11.87}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^2R}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\left[\frac{dR}{dr}\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dR}{dt}\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{dR}{dt}\right] = \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{dt^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{dR}{dt}\right)\end{aligned} \tag{11.88}$$

Así que, con el cambio de variable, la ecuación radial se transformna en

$$\frac{d^2R}{dt} + \lambda^2 R = 0, \tag{11.89}$$

con soluciones,

$$R_\lambda(t) = A_\lambda \sin(\lambda t) + B_\lambda \cos(\lambda t)\,, \tag{11.90}$$

que, al deshacer el cambio de variables tienen la forma

$$R_\lambda(r) = A_\lambda \sin(\lambda \ln(r)) + B_\lambda \cos(\lambda \ln(r)). \tag{11.91}$$

Al evaluar ls condiciones de borde radiales $R_\lambda(1) = R_\lambda(2) = 0$,

$$\begin{aligned} R_\lambda(1) &= A_\lambda \sin(\lambda \ln(1)) + B_\lambda \cos(\lambda \ln(1)) = 0 \\ R_\lambda(2) &= A_\lambda \sin(\lambda \ln(2)) + B_\lambda \cos(\lambda \ln(2)) = 0 \end{aligned} \tag{11.92}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\lambda \ln(1)) & \cos(\lambda \ln(1)) \\ \sin(\lambda \ln(2)) & \cos(\lambda \ln(2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\lambda \\ B_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.93}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\lambda \ln(2)) & \cos(\lambda \ln(2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\lambda \\ B_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{11.94}$$

para poder tener soluciones no nulas, el determinante del sistema ha de ser nulo,

$$\sin(\lambda \ln(2)) = 0 \tag{11.95}$$

lo que implica

$$\lambda \ln(2) = n\pi\,, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{11.96}$$

y de acá obtenemos, finalmente,

$$B_\lambda = 0, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{\ln(2)}, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \tag{11.97}$$

De acuerdo a este resultado, las autofunciones radiales tienen la forma

$$R_\lambda(r) = \sin\left(n\pi \frac{\ln(r)}{\ln(2)}\right). \tag{11.98}$$

Al sustituir los autovalores en las soluciones angulares y evaluar la condición de borde en $\theta = 0$ *obtenemos que las funciones angulares han de tener la forma*

$$\Theta_n(\theta) = \frac{\sinh(n\pi\theta/\ln(2))}{\sinh(n\pi^2/2\ln(2))}, \tag{11.99}$$

que asegura que $\Theta(\pi/2) = 1$.

Juntando ambos resultados, la expansión en autofunciones para ϕ *es*

$$\phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sinh(n\pi^2/2\ln(2))} \sin\left(n\pi\frac{\ln(r)}{\ln(2)}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\ln(2)}\right). \tag{11.100}$$

De acuerdo a esto, si queremos obtener los coeficientes A_n *basta con evaluar a* ϕ *sobre la recta* $\theta = \pi/2$. *Es decir,*

$$\phi\left(r,\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\pi\frac{\ln(r)}{\ln(2)}\right). \tag{11.101}$$

En este punto hay que destacar que, el argumento de las funciones de base de este desarrollo no es r *sino* $\ln(r)$. *Lo que está totalmente fuera del análisis de Fourier estándar. Sin embargo, observemos lo siguiente*

$$\int_1^2 \frac{1}{r} \sin\left(n\pi\frac{\ln(r)}{\ln(2)}\right) \sin\left(m\pi\frac{\ln(r)}{\ln(2)}\right)\, dr = \frac{\ln(2)}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\omega)\sin(m\omega)\, d\omega = 0 \tag{11.102}$$

para $n \neq m$ *con* $n, m \in \mathbb{Z}$, *donde* $\omega = \pi\ln(r)/\ln(2)$, *y*

$$\frac{\ln(2)}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\omega)\sin(n\omega)\, d\omega = \frac{\ln(2)}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\ln(2)}{2}. \tag{11.103}$$

Es decir,las autofunciones son ortogonales si se introduce la **función de peso** r^{-1}. *Usando dicha ortogonalidad, los coeficientes de Fourier se calculan según,*

$$A_n = \frac{2}{\ln 2}\int_1^2 \frac{f(r)}{r} \sin\left(n\pi\frac{\ln r}{\ln 2}\right)\, dr. \tag{11.104}$$

Código

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Creando malla de coordenadas polares

r = np.linspace(1, 2, 50)
p = np.linspace(0, np.pi/2, 50)
R, P = np.meshgrid(r, p)

# Calculo de la autofuncion

n=1. # Indice de la autofuncion.

Phin =np.sin(n*np.pi*np.log(R)/np.log(2))*np.sinh(n*np.pi*P/np.log(2))/np.sinh

# Expresando la red de puntos en #coordenadas cartesianas

X, Y = R*np.cos(P), R*np.sin(P)

# Grafico de la superficie (reescalada #por un factor de 2 para mejor #vizual
```

```
ax.plot_surface(X, Y, 2*Phin, cmap=plt.cm.YlGnBu_r)

# Fijando los limites del grafico y
# etiquetando los ejes.

ax.set_zlim(0, 2)
ax.set_xlim(0,2)
ax.set_ylim(0,3)
ax.set_xlabel(r'x')
ax.set_ylabel(r'y')
ax.set_zlabel(r'$\phi$')

plt.show()
```

11.0.2. Ecuaciones Parabólicas (ec. del calor)

Problema 11.0.11 enviado por Marco

Let a metallic rod 20 *cm long be heated to a uniform temperature of* $50^o\ C$*. Suppose that at* $t = 0$*, the ends of the bar are plunged into an ice bath at* $0^o\ C$ *and thereafter mantained at this temperature, but that no heat is allowed to escape through the lateral surface. Find an expression for the temperature ar any point in the bar at any later time. Determine the temperature at the center of the bar at time* $t = 30\ s$ *if the bar is made of (a) silver, (b) aluminum, (c) cast iron.*

El modelo para la fenomenología descrita es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\alpha^2 u_{xx} = u_t\,, \\ &u(0,t) = 0 = u(L,t)\,, \\ &u(x,0) = 50^0\,C \end{aligned} \tag{11.105}$$

es decir, la ecuación del calor unidimensional sujeta a condiciones de borde e iniciales.

Aunque resultemos repetitivos, vamos a resolver este problema en todo detalle.

Para comenzar, separemos variables poniendo

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

al sustituir en la ecuación del calor y dividir por XT se obtiene

$$\frac{1}{XT}\alpha^2 X'' T = \frac{1}{XT} X\dot{T} \tag{11.106}$$

ó

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\dot{T}}{T} = \nu^2 \tag{11.107}$$

donde ν^2 es constante (ya deberíamos saber por que). De esta igualdad se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} X'' &= \nu^2 X \\ \dot{T} &= \alpha^2\nu^2 T \end{aligned} \tag{11.108}$$

La parte espacial del problea es un problema de Sturm-Liouville con autovalor ν^2 que se determina a través de las condiciones de frontera.

Hay tres casos posibles para el signio de ν^2 que implican tres soluciones diferentes a la ecuación para X,

$$\begin{cases} \nu^2 < 0 \rightarrow X = Acos(\nu x) + Bsen(\nu x) \\ = 0 < 0 \rightarrow Cx + D \\ \nu^2 > 0 < 0 \rightarrow Ee^{\nu x} + Fe^{-\nu x} \end{cases},$$

para decidir entre ellos recurrimos a las condiciones de borde (o de frontera), $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ que implican, $X(0) = X(L) = 0$. Ya habíamos encontrado este problema de decisión entre las constantes en las secciones, 6.1 y 8.1. El problema se resuelve evaluando las condiciones de borde en cada posible solución. En este caso, las soluciones $\nu^2 = 0$ y $\nu^2 > 0$ son imposibles (ejercicio, convencerse de que solo encontramos la solución trivial $u(x,t) = 0$), al probar con $\nu^2 < 0$ las condiciones de borde se leen como

$$\begin{aligned} A cos(\nu 0) + B sen(\nu 0) = 0 \\ A cos(\nu L) + B sen(\nu L) = 0 \end{aligned} \tag{11.109}$$

que implican el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cos(\nu L) & sen(\nu L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.110}$$

cuyas soluciones son no triviales si y solo si,

$$sen(\nu L) = 0$$

esta ecuación determina los autovalores,

$$\nu^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \qquad n = 1, 2, ... \tag{11.111}$$

y la condición $A = 0$.

Bajo estas condiciones, la solución para T es

$$T(t) = A\, e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} \tag{11.112}$$

la conclusión es que para cada autovalor la función,

$$u_n(x,t) = A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} \tag{11.113}$$

es una solución de la ecuación del calor que respeta las condiciones de frontera, de esta manera, la solución más general posible de la ecuación del calor que respeta las condiciones de borde dada es una suma de soluciones, es decir,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}\,. \tag{11.114}$$

Para determinar los coeficientes de manera única, es necesario utilizar la condición inicial $u(x,0)$. Al hacerlo

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, e^{-\alpha^2 \frac{n^2\pi^2 t}{L^2}}|_{t=0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,. \end{aligned} \tag{11.115}$$

En esta igualdad, hay que recordar que el lado izquierdo está dado, en seir, es parte de los datos del problema.

Con el producto interno

$$\langle f(x), g(x)\rangle \equiv \int_0^L dx f(x) g(x)\,, \tag{11.116}$$

Las autofunciones que tenemos a mano son ortogonales,

$$\langle sen(n\pi x/L), sen(p\pi x/L)\rangle = \frac{L}{2}\delta_{np} \tag{11.117}$$

Al tomar el producto interno de la igualdad entre la condición inicial y la serie de Fourier,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, \tag{11.118}$$

con la autofunción

$$sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right)$$

obtenemos

$$\int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right) u(x,0) = \int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11.119}$$

invirtiendo el orden de la suma con el de la integración

$$\int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right) u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right)\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{11.120}$$

y al usar la formula de ortogonalidad entre las autofuncones en el lado derecho

$$\int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right) u(x,0) = \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \delta_{np} = \frac{L}{2} A_p \tag{11.121}$$

donde hemos usado la definición de la delta de Kcronecker para notar que de la suma solo sobrevive el término que contiene A_p, en definitiva, los coeficientes de la serie de Fourier se calculan según

$$A_p = \int_0^L dx\, sen\left(\frac{p\pi x}{L}\right) u(x,0) \tag{11.122}$$

Problema 11.0.12 Marco

Consider the equation

$$au_{xx} - bu_t + cu = 0\,, \tag{11.123}$$

where a, b and c are constants.

1. *Let $u(x,t) = e^{\delta t} w(x,t)$ and find a PDE for $w(x,t)$.*

2. *If $b \neq 0$ show that δ can be chosen so that the PDE just found has no term in w. Thus, by a change of dependent variable, it is possible to reduce equation 11.123 to the heat equation.*

La solución de este problema es directa. Al poner $u(x,t) = e^{\delta t}\, w(x,t)$,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= e^{\delta t} w\,, \\ u_t &= \delta e^{\delta t} w + e^{\delta t} w_t\,, \end{aligned} \tag{11.124}$$

sustituimos en la ecuación 11.123

$$ae^{\delta t} w_{xx} - b(\delta e^{\delta t} w + e^{\delta t} w_t) + ce^{\delta t} w = 0 \tag{11.125}$$

y ¡listo!, al tomar $\delta = c/b$ nos quedamos con

$$e^{\delta t}\left[a w_{xx} - b w_t\right] = 0 \tag{11.126}$$

que es equivalente a la ecuación del calor

$$a w_{xx} - b w_t = 0\,, \tag{11.127}$$

para $w(x,t)$.

Problema 11.0.13 *In solving differential equations, the computations can almost always be simplified by the use of* **dimensionless variables**.

1. *Show that if the dimensionless variable $\xi = x/L$ is introduced, the heat equation*

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t\,,\quad 0 \le x \le L\,,\quad t > 0\,, \tag{11.128}$$

becomes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad 0 \le x \le 1\,,\quad t > 0 \tag{11.129}$$

2. *L^2/α^2 has units of time (show it), this suggests introducing the dimensionless variable $\tau = \frac{\alpha^2}{L^2}\,t$. Show that doing so reduces the heat equation to*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\,,\quad 0 \le x \le 1\,,\quad \tau > 0 \tag{11.130}$$

La solución del problema consiste en una aplicación directa de la regla de la cadena que hacemos en dos pasos para sehuir las instrucciones. Al definir, $\xi = x/L$, es evidente que el rango de ξ es $0 \le \xi \le 1$. Ahora usamos la regla de la cadena para el cambio en x,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \xi} \tag{11.131}$$

al sustituir en la derivada segunda espacial,

$$\alpha^2 u_{xx} = \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \alpha^2 \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{L}\frac{\partial}{u}\partial\xi\right] = \frac{\alpha^2}{L} u_{\xi\xi}\,. \tag{11.132}$$

Ahiora hacemos el cambio en t,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\alpha^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\,, \tag{11.133}$$

y al sustituir,

$$\frac{\alpha^2}{L} u_{\xi\xi} = \frac{\alpha^2}{L^2}\frac{\partial u}{\partial \tau}\,, \tag{11.134}$$

es decir,

$$u_{\xi\xi} = u_\tau \tag{11.135}$$

Problema 11.0.14 Marco

La ecuación del calor en dos dimensiones y usando coordenadas polares, tiene la forma

$$\alpha^2\left[u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right] = u_t \tag{11.136}$$

Lleve a cabo la separación de variables.

Ponemos: $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y al sustituir queda,

$$\alpha^2\left\{\Theta T\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{RT}{r^2}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right]\right\} = R\Theta\frac{dT}{dt}\,, \tag{11.137}$$

Multiplicando por $(R\Theta T)^{-1}$

$$\alpha^2\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right]\right\} = \frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\,, \tag{11.138}$$

de lo que hemos aprendido, debe resultar evidente que el lado derecho de esta igualdad solo depende del tiempo (t) y por lo tanto, de acá obtenemos una primera separación,

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{dt} = -\kappa^2 T \\ &\alpha^2\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{1}{r^2\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right]\right\} = -\kappa^2\,, \end{aligned} \tag{11.139}$$

acá ponemos

$$\left\{\frac{1}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{r^2\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right]\right\}=-\frac{\kappa^2}{\alpha^2}\,, \tag{11.140}$$

de donde,

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{\kappa^2}{\alpha^2}r^2=-\frac{1}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right]\,, \tag{11.141}$$

ahora el lado derecho solo depende de θ lo que lleva a una nueva separación,

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-m^2\Theta\\&r^2\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{\kappa^2}{\alpha^2}r^2R=m^2R\,,\end{aligned} \tag{11.142}$$

acá vale la pena notar que

$$\begin{aligned}r^2\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]&=r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}=\\=r\left[r\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{dR}{dt}\right]&=\\=r\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right]&\end{aligned} \tag{11.143}$$

lo que nos permite escribir la ecuación

$$r^2\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{\kappa^2}{\alpha^2}r^2R=m^2R\,, \tag{11.144}$$

en la forma

$$r\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right]+\nu^2\,r^2R=m^2R\quad\text{con }\nu^2=\frac{\kappa^2}{\alpha^2} \tag{11.145}$$

que es exactamente la forma de la ecuación 8.73 que habíamos encontrado en la sección 8.6.

En definitiva, al separar la cuación del calor en coordenadas polares obtenemos el siguiente conjunto de ecuacions diferenciales ordinarias

$$\frac{dT}{dt}=-\kappa^2T \tag{11.146}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -m^2\Theta \tag{11.147}$$

$$r\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \nu^2\, r^2 R = m^2 R \tag{11.148}$$

El cambio de variables: $\nu r = x$, convierte la ecuación 11.148 en la ecuación de Bessel,

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dR}{dx}\right) + (x^2 - m^2)R = 0\,. \tag{11.149}$$

Problema 11.0.15 Marco *La ecuación del calor en dos dimensiones y usando coordenadas cartesianas, tiene la forma*

$$\alpha^2\left[u_{xx} + u_{yy}\right] = u_t \tag{11.150}$$

epare variables y encuientre las ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen las funciones $X(x)$, $Y(y)$ y $T(t)$.

Ponemos $u(x,y,t) = XYT$ y como en el problema anterior, tendremos tres constantes de separación,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\tau T \\ \frac{X''}{X} &= \kappa^2 \\ \frac{\tau}{\alpha^2} - \frac{Y''}{Y} &= \kappa^2 \end{aligned} \tag{11.151}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -\tau T \\ \frac{d^2X}{dx^2} &= \kappa^2 X \\ \frac{d^2Y}{dy^2} &= \left[\frac{\tau}{\alpha^2} - \kappa^2\right] Y \end{aligned} \tag{11.152}$$

Problema 11.0.16 *When a bar which is in contact with a constant (in time) external heat source or sink, the heat equation is modified to*

$$u_t = \alpha^2 \, u_{xx} + s(x) \tag{11.153}$$

where the term $s(x)$ describes the heat bath (it is positive for a source and negative for a sink)- Suppose that the boundary and initial conditions are

$$\begin{aligned} &u(0,t) = T_1 \, , \qquad u(L,t) = T_2 \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned} \tag{11.154}$$

Set

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \, , \tag{11.155}$$

where v and w are the steady state and transient parts of the solution. State the bvp that v and w must satisfy.

Este problema tiene un montón de física que hay que explicar antes de atacarlo siguiendo instrucciones como una mula de carga.

Para un sitema físico cualquiera, la expresión **steady state** refiere a un un estado posee ciertas características que se mantienen en el tiempo (eso es muy distinto a decir que un estado estacionario es constante en el tiempo).

En el caso de este problema en particular, y dada la forma en que se propone la solución, con estado estacionario se quiere designar a una solución de la ecuación del calor que sea independite del tiempo, por eso se propone: $v(x)$, veamos que pasa en la ecuación del calor con fuentes probando una solución de la forma $v(x)$.

Al sustituir queda,

$$\frac{\partial v(x)}{\partial t} = \alpha^2 \, \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + s(x) \, , \tag{11.156}$$

como v es independiente de t, el lado izquierdo de la ecuación se hace cero y en el lado derecho, las derivadas parciales se convierten en ordinarias,

$$0 = \alpha^2 \, \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + s(x)\,, \tag{11.157}$$

es decir,

$$\alpha^2 \, \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -s(x)\,. \tag{11.158}$$

Ahora tenemos que jugar un poco con el ingenio (la creatividad).

Consideremos dos problemas de contorno enteramente nuevos,

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \, \frac{d^2 v(x,t)}{dx^2} + s(x) = 0 \\ &v(0) = T_a\,, \quad v(L) = T_b \\ &\alpha^2 \, w_{xx} = w_t \\ &w(0,T) = T_c\,, \quad w(L,t) = T_d \\ &w(x{,}0) = f(x) - v(x) \end{aligned} \tag{11.159}$$

Si sumamos ambos problemas obtenemos

$$\begin{aligned} &\alpha^2 \, w(x,t)_{xx} + \alpha^2 \, v''(x,t) + s(x) = w(x,t)_t \\ &v(0,T) + w(0,T) = T_a + T_c\,, \quad v(L,T) + w(L,t) = T_b + T_d \\ &w(x{,}0) + v(x) = f(x) \end{aligned} \tag{11.160}$$

si ahora definimos

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)\,, \tag{11.161}$$

y ponemos $T_a + T_c = T_1$ y $T_b + T_d = T_2$ es evidente que el problema *inventado* es exactamente el mismo que el problema propuesto inicialmente.

Para hacer las cosas fáciles, escogemos (en este caso) $T_a = T_1$, $T_b = T_2$ y $T_c = T_d = 0$ para quedar con el problema

$$\boxed{\begin{array}{l} v''(x) + s(x) = 0\,, \quad v(0) = T_1\,, \quad v(L) = T_2 \\ \alpha^2\, w(x,t)_{xx} = w(x,t)_t\,, \quad w(0,T) = 0\,, w(L,t) = 0\,, w(x{,}0) = f(x) - v(x) \end{array}} \tag{11.162}$$

Problema 11.0.17 *1. Para el problema anterior (11.0.16) tome $\alpha^2 = 1$ y con $s(x) = k =$ constante encuentre $v(x)$*

2. Tome $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $f(x) = 0$ para $0 < x < L$ $k = 1/5$ y $L = 20$ y determine $w(x,t)$

Al poner $s(x) = k$ la ecuación para la componente estacionaria de la temperatura ($v(x)$) es

$$v'' = -k\,, \tag{11.163}$$

cuya solución general es

$$v(x) = -\frac{k}{2}x^2 + c_1 x + c_2 \tag{11.164}$$

a continuación debemos encontrar las constantes utilizando las conficiones de frontera,

$$\begin{aligned} v(0) &= -\frac{k}{2}0^2 + c_1 0 + c_2 = T_1 \\ v(L) &= -\frac{k}{2}L^2 + c_1 L + c_2 = T_2 \end{aligned} \tag{11.165}$$

lo que nos deja con

$$\begin{aligned} c_2 &= T_1 \\ c_1 &= (T_2 - T_1)/L + \frac{k}{2}L \end{aligned} \tag{11.166}$$

sustituyendo de vuelta, obtenemos la distribución estacionaria de temperatura

$$\boxed{v(x) = T_1 + \left[(T_2 - T_1)/L + \frac{k}{2}L\right] x - \frac{k}{2}x^2}\,. \tag{11.167}$$

La distribución transitoria de temperatura obedece al problema

$$
\begin{aligned}
& w(x,t)_{xx} = w(x,t)_t \\
& w(0,T) = 0\,, w(L,t) = 0 \\
& w(x{,}0) = -v(x)
\end{aligned}
\tag{11.168}
$$

Ya hemos visto en reiteradas ocasiones, que la separación de variables lleva a que los autovalores y autofunciones de la parte espacial ($X(x)$) de este problema sean

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{n\,\pi}{L} \\
X_n(x) &= sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,,
\end{aligned}
\tag{11.169}
$$

también hemos aprendido que para cada autovalor, la función temporal correspondiente es

$$
T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} = e^{-n^2\pi^2 t/L^2}\,, \tag{11.170}
$$

y por ende, la solución más general posible del problema de valores de frontera es

$$
w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2\pi^2 t/L^2}\; sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,, \tag{11.171}
$$

para encontrar las constantes usamos la condición inicial

$$
\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\left\{T_1 + \left[(T_2 - T_1)/L + \frac{k}{2}L\right]x - \frac{k}{2}x^2\right\}\,, \tag{11.172}
$$

que al sustituir los valores numéricos de k y temperatura se reduce a

$$
\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{10}\left\{x^2 - Lx\right\}\,, \tag{11.173}
$$

y de acá, los coeficientes se calculan como

$$
c_n = \frac{1}{10}\frac{2}{L}\int_0^L dx\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left\{x^2 - Lx\right\} \tag{11.174}
$$

En este punto coloco las siguentes integrales (aparecen en una tabla del examen)

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \int_0^L dx\, x\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{(-)^{n+1}L^2}{n\pi} \\ I_{2,n} &= \int_0^L dx\, x^2\, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{(-)^n(\pi^2n^2-2)+2}{\pi^3n^3}L^3 = \\ &= \frac{(-)^{n+1}(\pi^2n^2-2)-2}{\pi^3n^3}L^3 \end{aligned} \tag{11.175}$$

en estos términos,

$$c_n = \frac{1}{10}\frac{2}{L}\left[I_{2,n} - LI_{1,n}\right] \tag{11.176}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{10}\frac{2}{L}\left[\frac{(-)^{n+1}(\pi^2n^2-2)-2}{\pi^3n^3} - \frac{(-)^{n+1}}{n\pi}\right]L^3 = \\ &= \frac{1}{10}\frac{2}{L}\left[\frac{(-)^{n+1}(\pi^2n^2-2)-2-(-)^{n+1}\pi^2n^2}{\pi^3n^3}\right]L^3 = \\ &= -\frac{4}{10}\left[\frac{1+(-)^{n+1}}{\pi^3n^3}\right]L^2 = \\ &= -\frac{4}{10}\left[\frac{1-(-)^n}{\pi^3n^3}\right]L^2 = \\ &= \frac{4}{10}\left[\frac{(-)^n-1}{\pi^3n^3}\right]L^2 \end{aligned} \tag{11.177}$$

hay un truquito que se puede usar y consiste en poner

$$(-)^n = cos(n\pi) \tag{11.178}$$

al usarlo, queda

$$c_n = \frac{2}{5}\left[\frac{cos(n\pi)-1}{\pi^3n^3}\right]\times 400 \tag{11.179}$$

donde hemos sustituido $L = 20$, al final,

$$c_n = 160\left[\frac{cos(n\pi)-1}{\pi^3n^3}\right] \tag{11.180}$$

en definitiva,

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \frac{1}{10}\left\{x^2 - 20x\right\} \\
w(x,t) &= 160\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{cos(n\pi)-1}{\pi^3 n^3}\right] e^{-n^2\pi^2 t/400}\, sen\left(\frac{n\pi x}{20}\right)
\end{aligned}
\tag{11.181}
$$

NOTA: El texto de Boyce-DiPrima pone,

$$
c_n = 160\,\frac{(cos(n\pi)-1)^n}{\pi^3 n^3} \tag{11.182}
$$

yo no encuentro el exponente n, creo que es un misprint. Pero volveré a revisar.

11.1. Ejercicios

1. Considere de nuevo la ecuación de ondas en el dominio $x \in [0, L]$, pero esta vez piense en el siguiente conjunto de condiciones iniciales.

$$
\partial_x u(0,t) = 0 \tag{11.183}
$$

$$
\partial_x u(0,L) = 0 \tag{11.184}
$$

   a) Utilice la técnica de separación de variables para obtener los *auto-va-lo-res* adecuados para el problema espacial.

   b) Encuentre la solución general de la ecuación y de una interpretación física al *modo cero*

2. En coordenadas polares la Ecuación de Ondas en el plano tiene la forma:

$$
\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} - \frac{1}{v^2}u = 0 \tag{11.185}
$$

   Utilice la técnica de separación de variables para encontrar la forma de la solución general de esta ecuación destacando sus singularidades (si las tiene).

Capítulo 12

Exámenes

12.1. Delft

PREPARATIONS

On the upcoming pages you will find exam assignments. To make the exam different for different participants, these assignments are parameterized.

The following parameters may occur in the assignments: J and K.

Please determine your values of J and K now as follows:

1. Let L1, be the last, non-zero digit of your student number.

2. (a) If possible, let L2, be the second-last, non-zero digit of your student number, that differs from L1. (b) Else: if such L2 does not exist in your student number, then let L1 = 1 and L2 = 2.

3. Choose J to be the smallest of L1 and L2.

4. Choose K to be the largest of L1 and L2.

Example: If your student number would be: 9012770 Then the parameter values for your individual versions of the assignments would be: L1 = 7, L2 = 2, J = 2, K = 7.

Check:

- Both J and K are non-zero, single-digit, integer numbers,
- J and K are different,
- J is smaller than K: J ¡K.

Tip: write down your individual values of J and K on a separate piece of paper. Substitute your individual values for J and K, in each of the exam assignments, whenever they occur.

.....

Problema 12.1.1 *Consider the (non-linear!) ordinary differential equation (ODE)*

$$2\frac{J}{y} + 2Ky' + K\frac{y}{x} = 0 \tag{12.1}$$

(Reminder: Substitute your individual values for the parameters J and K, as prescribed on the front page, into this equation, to obtain your own individual version of it.) Solve the following assignments for your individual version of equation (2):

1. *(a) Equation (2) is not exact. Explain why, without yet solving the differential equation. (3pt)*
2. *(b) Equation (2) has an integrating factor $(xy)^r$, for some value of parameter r, that transforms equation (2) into an exact equation. Derive the value of parameter r. (4pt)*
3. *(c) Derive the general solution of ODE (2); you may present the solution in implicit form. (3pt)*

SOLUCIÓN La teoría necesaria para responder esta pregunta está en la sección 4.3

Si reescribimos la ecuación diferencial en la forma

$$\left[2\frac{J}{y} + K\frac{y}{x}\right] dx + 2Kdy = 0\,, \tag{12.2}$$

podemos comparar las derivadas parciales cruzadas

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left[2\frac{J}{y}+K\frac{y}{x}\right]=-2\frac{J}{y^2}+\frac{K}{x} \quad \text{y} \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[2K\right]=0\,,
\end{aligned} \tag{12.3}$$

como ambas cantidades son diferentes, la ecuación diferencial no es exacta.

Si multiplicamos la ecuación por el factor $(xy)^r$, su forma se modifica a

$$(xy)^r\left[2\frac{J}{y}+K\frac{y}{x}\right]dx+2K(xy)^r dy=0\,, \tag{12.4}$$

en cuyo caso, las derivadas parciales cruzadas cambian como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left\{(xy)^r\left[2\frac{J}{y}+K\frac{y}{x}\right]\right\}=ry^{r-1}x^r\left[2\frac{J}{y}+K\frac{y}{x}\right]+(xy)^r\left[-2\frac{J}{y^2}+\frac{K}{x}\right]= \\
&=\left[2rJx^ry^{r-2}+rKy^rx^{r-1}\right]+\left[-2Jx^ry^{r-2}+Ky^rx^{r-1}\right]= \\
&=(r+1)\left[Ky^rx^{r-1}\right] \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left[2K(xy)^r\right]=2rKy^rx^{r-1}\,,
\end{aligned} \tag{12.5}$$

estas cantidades resultan iguales para $r=1$ y por lo tanto, $u(x,y)=xy$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

Al utilizar el factor integrante, podemos asegurar que existe $u(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned}
du&=xy\left[2\frac{J}{y}+K\frac{y}{x}\right]dx+2Kxydy= \\
&=\left[2Jx+Ky^2\right]dx+2Kxydy\,,
\end{aligned} \tag{12.6}$$

en terminos de u, la igualdad

$$u(x,y)=C\,, \tag{12.7}$$

define a $y(x)$ como solución implícita de la ecuación diferencial.

Para calcular u integramos

$$\begin{aligned} u &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} \left[2Jx + Ky^2\right] dx + 2K \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} xydy = \\ &= \left[J(x^2 - x_0^2) + Ky_0^2(x - x_0)\right] + Kx(y^2 - y_0^2) = \\ &= J(x^2 - x_0^2) + Kxy^2 - Ky_0^2 x_0 \,, \end{aligned} \tag{12.8}$$

y en consecuencia,

$$u = J(x^2 - x_0^2) + Kxy^2 - Ky_0^2 x_0 = C \tag{12.9}$$

define $y(x)$ como solución de la ecuación diferencial con tal que C sea compatible con la condición inicial (x_0, y_0)

Problema 12.1.2 *Sean r, λ y θ las coordenadas, radial,longitudinal y de latitud de un sistema de coordenadas esféricas oblongas.*

Se sabe que para este sistema, la ecuación de Laplace para un potencial ϕ con independencia azimutal (longitudinal) es

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[cos\theta\, cosh(r)\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[cos\theta\, cosh(r)\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]} \tag{12.10}$$

- *Lleve adelante el procediiento de separación de variables proponiendo un potencial de la forma $\phi = R(r)\Theta)(\theta)$*

- *Con el fin d cambiar el dominio de θ $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ al conjunto $-1 < x < 1$ introduzaca el cambio $x = sin\theta$-*

- *Introduzca la función $X(x) = \Theta(\theta(x))$ y demuestre que X satisface la ecuación de Legendre*

  $$(1 - x^2)X'' - 2xX' + n(n + 1)X = 0 \,,$$

  y encuentre la relación entre n y la constante de separación

SOLUCIÓN

En su forma estándar, las coordenadas esferoidales oblongas son intrínsecamene tridimensionales y una de ellas es una coordenada de revolución alrededor de uno de los tres ejes cartesianos. En la notación de WolframMathWorld (también podemos mirar Wikipedia), las coordenadas se caracterizan como se ve en la tabla 12.1. En esta notación, el eje y es el eje de rotación, y la variable ϕ es

Coordenada	Rango
ξ	$[0, \infty)$
η	$[-\pi/2, \pi/2]$
ϕ	$[0, 2\pi)$

Cuadro 12.1: Coordenadas Esferoidales Oblongas

la variable angular de la rotación alrededor de dicho eje.

En el problema planteado, hay simetría azimutal, en consecuencia, la función de potencial es independeniente de la variable de rotación alrededor del eje y y el operador de Laplace en la notación de Wolfram se simplifica a

$$\nabla^2 f = \frac{1}{a(sinh^2\xi + sin^2\eta)} \left[\frac{1}{cosh\xi} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(cosh(\xi) \frac{\partial f}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{cos\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(cos\eta \frac{\partial f}{\partial\eta} \right) \right] .$$

Como la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 f = 0 ,$$

podemos prescindir del factor

$$\frac{1}{a(sinh^2\xi + sin^2\eta)} ,$$

para quedar con

$$\left[\frac{1}{cosh\xi} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(cosh(\xi) \frac{\partial f}{\partial\xi} \right) + \frac{1}{cos\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(cos\eta \frac{\partial f}{\partial\eta} \right) \right] = 0 . \tag{12.11}$$

es decir,

$$\frac{1}{cosh\xi} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(cosh(\xi) \frac{\partial f}{\partial\xi} \right) = -\frac{1}{cos\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(cos\eta \frac{\partial f}{\partial\eta} \right) , \tag{12.12}$$

ó

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(cos\eta\, cosh(\xi)\,\frac{\partial\, f}{\partial\xi}\right) = -\frac{\partial}{\partial\eta}\left(cosh\xi\, cos\eta\,\frac{\partial\, f}{\partial\eta}\right)\,.} \tag{12.13}$$

Que salvo el cambio de notación

$$\begin{aligned} \xi &\to r \\ \eta &\to \theta \\ f &\to \phi \end{aligned} \tag{12.14}$$

Es la ecuación 12.10 del problema 12.1.2

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[cos\theta\, cosh(r)\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[cos\theta\, cosh(r)\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]} \tag{12.15}$$

Para separar variables ponemos

$$\phi(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[cos\theta\, cosh(r)\, R(r)\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = -\frac{\partial}{\partial r}\left[cos\theta\, cosh(r)\,\Theta(\theta)\frac{dR}{dr}\right] \tag{12.16}$$

$$cosh(r)\, R(r)\,\frac{d}{d\theta}\left[cos\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = -cos\theta\,\Theta(\theta)\frac{d}{dr}\left[cosh(r)\,\frac{dR}{dr}\right] \tag{12.17}$$

$$\frac{1}{cos\theta\,\Theta(\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left[cos\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right] = -\frac{1}{cosh(r)\, R(r)}\,\frac{d}{dr}\left[cosh(r)\,\frac{dR}{dr}\right] \tag{12.18}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left[cos\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta}\right] &= \kappa^2\, cos\theta\,\Theta(\theta) \\ \frac{d}{dr}\left[cosh(r)\,\frac{dR}{dr}\right] &= -\kappa^2\, cosh(r)\, R(r) \end{aligned} \tag{12.19}$$

$$cos\theta\,\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} - sen\theta\,\frac{d\Theta}{d\theta} - \kappa^2\, cos\theta\,\Theta(\theta) = 0 \tag{12.20}$$

Acá vamos a seguir lo que hicimos en la sección 6.4.2, usando el cambio de variables: $x = sen\theta$

$$dx = cos\theta \, d\theta$$

$$d\theta = \frac{1}{cos\theta} dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned}
& cos\theta \, \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d\Theta}{d\theta} \right] - sen\theta \, \frac{d\Theta}{d\theta} - \kappa^2 \, cos\theta \, \Theta(\theta) = \\
& [\sqrt{1-x^2}] \, [\sqrt{1-x^2}] \frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2}] \frac{dX}{dx} \right] - x \sqrt{1-x^2}] \frac{dX}{dx} - \kappa^2 \, [\sqrt{1-x^2}] \, X = \\
& \sqrt{1-x^2} \, \frac{d}{dx} \left[\sqrt{1-x^2}] \frac{dX}{dx} \right] - x \, \frac{dX}{dx} - \kappa^2 \, X = \qquad (12.21) \\
& \sqrt{1-x^2} \, \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dX}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2X}{dx^2} \right] - x \, \frac{dX}{dx} - \kappa^2 \, X = \\
& \left[(1-x^2) \frac{d^2X}{dx^2} \right] - 2x \, \frac{dX}{dx} - \kappa^2 \, X \, ,
\end{aligned}$$

así que el cambio de variables ha transformado la ecuación12.20 en

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2X}{dx^2} \right] - 2x \, \frac{dX}{dx} - \kappa^2 \, X = 0 \qquad (12.22)$$

si ponemos $\kappa^2 = \ell(\ell+1)$ queda

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2X}{dx^2} \right] - 2x \, \frac{dX}{dx} - \ell(\ell+1) \, X = 0 \, , \qquad (12.23)$$

que es la forma Sturm-Lioville de la ecuación de Legendre.

Problema 12.1.3 *Considere el problema:*

$$\begin{aligned}
& y'' + \lambda y = -f(x) \, , \quad 0 \leq x \leq 1 \\
& Jy(0) + y'(0) = 0 \qquad (12.24) \\
& y(1) + \alpha y'(1) = 0 \, ,
\end{aligned}$$

donde $f(x)$ es una función dada y α un parámetro.

1. Para $f(x) = 0$ y $\lambda = K^2$. Utilice $J = 5$ y $K^2 = 81$

   a) *Determine la autofunción correspondiente.*

   b) *Determine el valor de α*

2. Al poner $\lambda = K^2$ y

$$f(x) = 1 + p\,g(x)$$

para alguna función contínua $g(x)$ el sistema adopta la forma de un problema de valores de formtera no homogéneo. Manteniedo el valor de α que encontró en el item anterior,

   a) *Encuentre una condición para que el problema no homogéneo tenga una solución.*

   b) *En caso de haber una solución, ¿es única?, de no ser única, ¿por qué?*

SOLUCIÓN

Comencemos por reescribir la ecuación diferencial en la forma

$$y'' + K^2 y = 0\,,$$

que, en vista de que $K^2 > 0$ tiene solución general

$$y(x) = Acos(Kx) + Bsen(Kx)\,,$$

con derivada

$$y'(x) = K\left[-Asen(Kx) + Bcos(Kx)\right]\,,$$

La condición de borde en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} &J[Acos(0) + Bsen(0)] + K[-Asen(0) + Bcos(0)] = 0\,, \qquad \text{es decir,} \\ &JA + KB = 0\,, \end{aligned} \tag{12.25}$$

el conjunto total de condiciones de borde adopta la forma

$$\begin{aligned} &JA + KB = 0 \\ &Acos(K) + Bsen(K) + \alpha K[-Asen(K) + Bcos(K)] = 0\,, \end{aligned} \tag{12.26}$$

que escribimos de manera más conveniente como:

$$\begin{pmatrix} J & K \\ cos(K) - \alpha K sen(K) & sen(K) + \alpha K cos(K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12.27}$$

Al colocar los valores dados, la primera condición de borde es

$$5A + 9B = 0 \tag{12.28}$$

de donde, $B = 5A/9$ de manera que la solución (autofunción) es

$$y(x) = A\left[cos(9x) + \frac{5}{9}sen(9x)\right] \tag{12.29}$$

falta normalizar la autofunción, pero hay diferentes normalizaciones, yo tomaría $A = 1$

Para tener soluciones no nulas la matriz del sistema tiene que ser singular, es decir $det(\mathbf{M}) = 0$, o

$$J\left(sen(K) + \alpha K cos(K)\right) - K\left(cos(K) - \alpha K sen(K)\right) = 0\,,$$

ó

$$\alpha\left(JKcos(K) + K^2 sen(K)\right) = Kcos(K) - Jsen(K)\,,$$

y de allí deducimos que l valor del parámetro es

$$\boxed{\alpha = \frac{Kcos(K) - Jsen(K)}{JKcos(K) + K^2 sen(K)}} \tag{12.30}$$

Al usar los valores propuestos, queda,

$$\alpha = \frac{9cos(9) - 5sen(9)}{5\times 9cos(9) + 81sen(9)} = \frac{1}{9}\frac{9cos(9) - 5sen(9)}{5cos(9) + 9sen(9)}$$

Pensemos ahora en el problema no homogéneo

$$\begin{aligned} & y'' + K^2 y = -(1 + pg(x))\,, \quad 0 \le x \le 1 \\ & Jy(0) + y'(0) = 0 \\ & y(1) + \alpha\, y'(1) = 0\,, \end{aligned} \tag{12.31}$$

Problema 12.1.4 *Let J and K be the numbers derived from your student number, as on the front page of this exam.*

Given your individual value of K, choose λ as follows:

1. *If your individual value of K is odd, choose $\lambda = 1$,*
2. *if your individual value of K is even, choose $\lambda = 2$.*

Substitute your value for λ, thus obtained, in what follows, as well as your individual value for parameter J, to obtain your indivual version of this assignment. Consider the following differential equation, for the function $y = y(x)$:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - Jx - \frac{\lambda^2}{4})y = 0\,, \quad \textit{for all } 0 < x\,. \tag{12.32}$$

The indicial equation of this differential equation has two roots, r_1 and r_2, with $r_2 \le r_1$. In the following, you may express your answers in terms of the solution $y_1(x)$, that is associated with r_1, without specifying further details of $y_1(x)$:

1. *(a) Derive a solution $y = y_2(x)$ that is associated with the root r_2, in terms of generalized power series about the point $x = 0$; $y_2(x)$ is the so-called "second (linearly independent) solution": the*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - Jx - \frac{\lambda^2}{4})y = 0\,, \quad \textit{for all } 0 < x\,. \tag{12.33}$$

one that may have a so-called logarithmic term.

As mentioned above, details of $y_1(x)$ are not asked for, but do calculate the coefficients of at least the first three non-zero terms of any remaining series occuring in your solution for y_2. (10pt)

2. *(b) Describe the structure of the general solution of the differential equation. (3pt)*

3. *(c) What is the radius of convergence of the series occuring in your solution? Why? (2pt)*

La solución de este problema resultará más clara si lees el ejemplo 5.5.3, la definición 5.5.3, el teorema 5.6.1 y la sección 5.7.1.

Comencemos por escribir la ecuación en forma normal,

$$y'' + \frac{1}{x^2}xy' + \frac{1}{x^2}(x^2 - Jx - \frac{\lambda^2}{4})y = 0\,, \quad \text{for all } 0 < x\,. \tag{12.34}$$

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \frac{x^2 - Jx - \lambda^2/4}{x^2}\,y = 0\,, \quad \text{for all } 0 < x\,. \tag{12.35}$$

En esta forma y de acuerdo a la definición 5.5.3, $x = 0$ es un punto singular regular. Por tal razón podemos usar el método de Frobenius para -en principio- hallar $y_1(x)$ con la mayor de las dos raices de la ecuación indicial.

Debido al planteamiento del problema, lo que interesa es buscar la solución alterna con el término logarítmico que aparece en el teorema de Fuchs, que, en vista de que r_2 es la menor de las dos raices, es

$$y_2(x) = \ln(x)\,y_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,x^{n+r_2} \tag{12.36}$$

12.2. Examen

Problema 12.2.1 *Given is a first solution*

$$y_1(x) = x\,,$$

of the differential equation

$$x^2 y'' + (2x + 2)(-xy' + y) = 0\,, \quad 0 < x\,. \tag{12.37}$$

- *Use the method of reduction of order to derive a second linearly independent solution,* $y_2(x)$.
- *Write down the general solution of the differential equation.*

Comencemos reescribiendo la ecuación en su forma normal,

$$y'' - 2\frac{x+1}{x}\,y' + 2\frac{x+1}{x^2}y = 0\,. \tag{12.38}$$

Mirando la sección 5.3, vemos que el método de reducción de orden no es otra cosa que proponer una solución de la forma

$$y_2(x) = \nu(x) y_1(x)\,,$$

a la ecuación diferencial para obtener la siguiente ecuación diferencial de primer orden para $u(x) = \nu'(x)$*:*

$$y_1 s' + (2y_1' + P y_1)\,s = 0 \tag{12.39}$$

donde, en este problema,

$$P(x) = -2\frac{x+1}{x}\,. \tag{12.40}$$

Al sustituir $y_1(x) = x$ *y* $y_1'(x) = 1$ *en la ecuación 12.39 nos queda,*

$$xs' + [2 + (-2x - 2)]\,s = 0 \tag{12.41}$$

$$xs' - 2xs = 0 \tag{12.42}$$

de donde,

$$\frac{ds}{s} = -2\,dx \tag{12.43}$$

$$s = S_0 e^{2x} \tag{12.44}$$

Finalmente, recordamos que $\nu'(x) = x(x)$ *y que stamos buscando* $\nu(x)$ *lo que implica una úñtima integración,*

$$\nu(x) = \frac{S_0}{2} e^{2x} + C \tag{12.45}$$

y de allí,

$$y_2(x) = xe^{2x} \tag{12.46}$$

en donde hemos puesto $C = 0$ *porque al multiplicar por* y_1 *solo ecuperamos la solución* y_1 *misma.*

Solo para verificar,

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{2x} + x(2e^{2x}) = (1+2x)e^{2x} \\ y_2'' &= [2 + 2(1+2x)]e^2 x \end{aligned} \tag{12.47}$$

Al sustituir de regreso en la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} 2(1+(1+2x))e^2x - 2\frac{x+1}{x}(1+2x)e^{2x} + 2\frac{x+1}{x^2}xe^{2x} &= \\ 2(1+(1+2x))e^2x - 2(1+2x)e^{2x} - \frac{2}{x}(1+2x)e^{2x} + 2\frac{1+x}{x}e^{2x} &= \\ 2e^{2x} - 2\frac{e^{2x}}{x} - 4e^{2x} + 2\frac{e^{2x}}{x} + 2e^{2x} &= 0 \end{aligned} \tag{12.48}$$

Problema 12.2.2 *Consider the initial value problem*

$$\begin{aligned} 4\ddot{y}(t) + 12\dot{y} + 9y(t) = u_4(t)e^{-2t/3}cos[\pi(t-4)]\,, \quad 0 \le t \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{aligned} \tag{12.49}$$

the function $u_c(t)$ is the Heaviside function.

En este problema parece haber un missprint, u_4 debería ser u_c

Derive the Laplace transform $Y(s)$ of the solution $y(t)$ and determine $y(t)$ itself.

El problema de valores iniciales que tenemos a mano es

$$\begin{gathered} 4\ddot{y}(t) + 12\dot{y} + 9y(t) = f(t)\,, \quad 0 \leq t \\ y(0) = 0\,, \qquad y'(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{12.50}$$

Con $f(t) = u_4(t)e^{-2t/3}cos[\pi(t-4)]$ Nuestro primer paso será

$$\cos(b-a) = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$$

Para reescribir

$$\begin{aligned} f(t) = u_c(t)e^{-2t/3}cos[\pi(t-4)] = e^{-2t/3}\left[\cos(\pi t)cos(4\pi) + \sin(\pi t)\sin(4\pi)\right] = \\ = e^{-2t/3}\,\cos(\pi t) \end{aligned} \tag{12.51}$$

Cuya transfrormada de Laplace es

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t/3}\,\cos(\pi t)\right] = \left[\frac{s+2/3}{(s+2/3)^2+\pi^2}\right] \tag{12.52}$$

consideremos además, la ecuación diferencial, ($g(t)$) es la función de Green o función de tansferencioa para la ecuación original.

$$\begin{gathered} 4\ddot{g}(t) + 12\dot{g} + 9g(t) = \delta(t)\,, \quad 0 \leq t \\ g(0) = 0\,, \qquad g'(0) = 0\,. \end{gathered} \tag{12.53}$$

cuya transformada de Laplace es,

$$4[s^2G - sg(0) - \dot{g}(0)] + 12[sG - g(0)] + 9G = 1\,. \tag{12.54}$$

$$4s^2G + 12sG + 9G = 1 + 12g(0) + 4\dot{g}(0) + 4sg(0)\,. \tag{12.55}$$

$$
\begin{aligned}
4s^2G + 12sG + 9G &= 1 + 12g(0) + 4\dot{g}(0) + 4sg(0)\,.\\
4(s^2G + 3sG + 9/4)G &= 1 + 12g(0) + 4\dot{g}(0) + 4sg(0)\,.\\
4(s-s_0)^2\,G &= A + Bs \qquad (12.56)\\
A &= 1 + 12g(0) + 4\dot{g}(0)\,,\\
B &= 4g(0)
\end{aligned}
$$

g tiene un polo doble[1] *en* $s_0 = -3/2$

La función de transferencia tiene la transformada de Laplace,

$$
G(s) = \frac{A}{4(s+3/2)^2} + \frac{g(0)s}{(s+3/2)^2} \qquad (12.57)
$$

La función de transferencia en frecuencia,

$$
G(s) = \frac{A}{4(s+3/2)^2} + \frac{g(0)s}{(s+3/2)^2} \qquad (12.58)
$$

Hasta acá trabajé con estos números tan feos. Cambiemos las cosas un poquitín para que los cálculos no lleven 10 años.

Cambiemos el PVI por

$$
\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + 2\dot{y} + y(t) = f(t)\,, &\quad 0 \leq t\\
y(0) = 0\,, &\qquad y'(0) = 0\,.
\end{aligned} \qquad (12.59)
$$

---

[1]

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 9 - 4\times 1\times 9/4 = 0\\
s_\pm &= s_0 = -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$f(t) = u_4(t)e^{-3t}cos(2t - \pi/4)$. En este caso,

$$\mathcal{L}\left[e^{-2t/3}\,\cos(\pi t)\right] = \left[\frac{s+2/3}{(s+2/3)^2+\pi^2}\right] \tag{12.60}$$

La transformada del PVI (con δ) como fuente, es

$$[s^2G - sg(0) - \dot{g}(0)] + [2sG - 2g(0)] + G = 1 \tag{12.61}$$

ó

$$[s^2 + 2s + 1]G = sg(0) + [\dot{g}(0) + 2g(0) + 1] \tag{12.62}$$

así que la transformada de la función de transferencia para este problema es

$$G(s) = \frac{sg(0)}{(s+1)^2} + \frac{\dot{g}(0) + 2g(0) + 1}{(s+1)^2} \tag{12.63}$$

Para volverl al dominio del tiempo descomponemos el lado derecho de esta última expresión en fracciones parciales poniendo

$$\begin{aligned}\frac{sg(0)}{(s+1)^2} + \frac{\dot{g}(0) + 2g(0) + 1}{(s+1)^2} &= \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} = \\ &= \frac{A_1(s+1) + A_2}{(s+1)^2}\end{aligned} \tag{12.64}$$

de donde sigue,

$$\begin{aligned} A_1 &= g(0) \\ A_2 &= \dot{g}(0) + 2g(0) + 1 - A_1 \\ &= \dot{g}(0) + g(0) + 1\,, \end{aligned} \tag{12.65}$$

de acá,

$$G(s) = \frac{g(0)}{s+1} + \frac{\dot{g}(0) + g(0) + 1}{(s+1)^2}\,. \tag{12.66}$$

Al regesar al dominio del tiempo, queda

$$g(t) = g(0)\,e^{-t} + (\dot{g}(0) + g(0) + 1)\,te^{-t} \tag{12.67}$$

Con la fórmula xx en la mano, podemos encontrar la transfromada de Laplace del problema original como

$$Y(s) = \left[\frac{g(0)}{s+1} + \frac{\dot{g}(0) + g(0) + 1}{(s+1)^2}\right] \times \left[\frac{s + 2/3}{(s+2/3)^2 + \pi^2}\right] \tag{12.68}$$

Problema 12.2.3 *Let r and ϕ be polar coordinates: $x = rcos\phi$ and $y = rsin\phi$. In terms of these, an annular region Q in the (x, y) plane is defined by the conditions $1 < r < e$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$; the outer radius equals the number e, which is the base of the natural logarithm: $\ln(e) = 1$.*

Given is the Laplace equation on this region:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0$$

1. *(a) Use the method of separation of variables to derive the general solution $u(r, \phi)$ that furthermore is subject to the following restrictions:*

   - *the solution is real-valued,*
   - *the solution is continuous and single valued throughout the region Q; NB: especially $u(r, -\pi = u(r, \pi)$ for all $1 < r < e$.*

2. *Give the solution $u(r, \phi)$ that furthermore obeys the boundary conditions:*

$$\forall\ \phi\ \ -\pi \leq \phi \leq \pi\,,$$
$$\begin{cases} u(1, \phi) = 1 \\ u(e, \phi) = 2 + \phi(1 - \phi^2/\pi^2) \end{cases} \tag{12.69}$$

Las técnicas que hemos aprendido hasta ahora nos muestran que, debido a la periodicidad en ϕ las autofunciones posibles tienen la forma

$$u(r, \theta) = \begin{cases} A\ln(r) + B & n = 0 \\ [A_n r^n + B_n r^{-n}]cos(n\phi) + [C_n r^n + D_n r^{-n}]\sin(n\phi) & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{12.70}$$

de manera que la solución general que satisface periodicidad en ϕ es

$$u(r,\theta) = A\ln(r) + B + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n r^n + B_n r^{-n}]cos(n\phi) + [C_n r^n + D_n r^{-n}]\sin(n\phi) \tag{12.71}$$

La condición de borde en $r = 1$ impone $A_n = -B_n$, $C_n = -D_n$ y $B = 1$ dejándonos con (renombramos las constantes)

$$u(r,\theta) = A\ln(r) + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[r^n - r^{-n}][A_n cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)] \tag{12.72}$$

al evaluar la condición de borde restante ($r = e$),

$$u(r,\theta) = A + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[e^n - e^{-n}][A_n cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)] = 2 + \phi(1 - \phi^2/\pi^2) \tag{12.73}$$

que implca,

$$\begin{aligned} A + 1 &= 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty}[e^n - e^{-n}][A_n cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)] &= \phi(1 - \phi^2/\pi^2) \end{aligned} \tag{12.74}$$

ahora bien, la función $\phi(1-\phi^2/\pi^2)$ es impar en ϕ lo que obliga a imponer que todos los coeficientes que acompañan a $cos(n\phi)$ sean nulos, así que quedamos con,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(n\phi) = \phi(1 - \phi^2/\pi^2) \tag{12.75}$$

donde $c_n = B_n[e^n - e^{-n}]$, que es un problema estándar de series de Fourier, del que obtenemos los coeficientes

$$c_n = I_n - J_n \tag{12.76}$$

con

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi\,\sin(n\phi)\,d\phi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi\,\sin(n\phi)\,d\phi = \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-)^{n+1}\pi^2}{n\pi}\frac{2(-)^{n+1}}{n} \\
J_n =&\frac{1}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi} \phi^3\,\sin(n\phi)\,d\phi = \frac{2}{\pi^3}\int_{0}^{\pi} \phi^3\,\sin(n\phi)\,d\phi = \\
&= \frac{2}{\pi^3}\left\{\pi^3\frac{[-cos(n\pi)]}{n}\right\} - \frac{6}{n\pi^3}\int_{0}^{\pi} \phi^2\,(-cos(n\phi))\,d\phi = \\
&= \frac{2(-)^{n+1}}{n} + \frac{6}{n\pi^3}\frac{2\pi^3(-)^n}{\pi^2 n^2} = \\
&= \frac{2(-)^{n+1}}{n} + \frac{12(-)^n}{n^3}
\end{aligned} \tag{12.77}$$

Para el cálculo hemos uado las tablas provistas en el examen (y una integracion por partes).

Resumiendo,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2(-)^{n+1}}{n} \\
J_n =&\frac{2(-)^{n+1}}{n} + \frac{12(-)^n}{\pi^2 n^3}
\end{aligned} \tag{12.78}$$

Este es un chequeo hecho con WolframAlpha:

$$J_n = \frac{2}{\pi^2}\frac{(6-n^2\pi^2)(-)^n}{n^3} = \frac{2(-)^{n+1}}{n} + \frac{12(-)^n}{\pi^2 n^3} \tag{12.79}$$

Al sustituir,

$$B_n = (-)^{n+1}[e^n - e^{-n}]\frac{12}{\pi^2 n^3} \tag{12.80}$$

Finalmente, la solución del problema de contorno es

$$\boxed{u(r,\theta) = 1 + \ln(r) + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}(r^n - r^{-n})}{(e^n - e^{-n})}\frac{\sin(n\phi)}{n^3}} \tag{12.81}$$

Problema 12.2.4 *Consider the following boundary value problem for $y(x)$ on the interval $0 \le x \le 1$; ω and p are real-valued parameters. Note the restriction on allowed values for the parameter ω. Parameter p can take any real value.*

$$\begin{aligned} & y''(x) + \omega^2 y(x) = 1 + p\,\sin(\pi x/2)\,, \quad 0 < \omega < \pi/2 \\ & y'(0) = 0\,, \qquad 4y'(1) + \pi y(1) = 0 \end{aligned} \tag{12.82}$$

Use Sturm-Liouville theory to answer the following question: for which values of the parameters ω and p does the boundary value problem have a non-unique solution?

Note: Giving the solution $y(x)$ of the resulting problem itself is not required. Hint: If you need to solve a transcendental equation, recall that $\tan(\pi/4) = 1$.

Problema 12.2.5 *Consider the differential equation*

$$4x^2y''(x) + 8xy'(x) + (1+x)y(x) = 0\,, \quad 0 < x. \tag{12.83}$$

Derive a solution $y_1(x)$ of this equation in terms of a generalized power series about $x = 0$. Furthermore, derive a second linearly independent solution, $y_2(x)$, also in terms of generalized power series about $x = 0$; in this, include a logarithmic term if needed.

In terms of $y_1(x)$ and $y_2(x)$, write down the general solution of the differential equation, about $x = 0$.

Calculate the leading three terms of any power series that occurs in your solution.

Comencemos, como es usual, expresando la ecuación diferencial en forma normal,

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + \frac{1+x}{4x^2}y(x) = 0\,, \quad 0 < x. \tag{12.84}$$

es facil ver que $x = 0$ es un punto singular regular.

La serie generalizada (método de Frobenius) alrededor de $x = 0$ tiene la forma,

$$\begin{aligned} y(x) &= x^s\left(1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots\right) = \\ &= x^s + c_1x^{s+1} + c_2x^{s+2} + \ldots \end{aligned} \tag{12.85}$$

Por tanto,

$$y'(x) = sx^{s-1} + (s+1)c_1x^s + (s+2)c_2x^{s+1} + \dots , \tag{12.86}$$

$$y''(x) = s(s-1)x^{s-2} + (s+1)sc_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)c_2x^s + \dots , \tag{12.87}$$

Al sustituir en la ecación diferencialy mirar las potencias más bajas de x que aparecen $(s-2)$, obtenemos la ecuación indicial

$$s(s-1) + 2s + 1/4 = 0 \tag{12.88}$$

$$s^2 + s + 1/4 = (s+1/2)^2 = 0 \tag{12.89}$$

la ecuación indicial tiene una raíz doble y por lo tanto necesitamos usar las ideas asociadas al teorema de Fuchs.

Por ahora, estudiemos la solución propuesta sustituyéndola en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
&-1/2(-1/2-1)x^{-1/2-2} + (-1/2+1)(-1/2)\,c_1x^{-1/2-1} + (-1/2+2)(-1/2+1)c_2x^{-1/2} + \dots\\
&+2\left[-1/2x^{-1/2-2} + (-1/2+1)c_1x^{-1/2-1} + (-1/2+2)c_2x^{-1/2} + \dots\right] +\\
&+\frac{1+x}{4x^2}\left[x^{-1/2} + c_1x^{-1/2+1} + c_2x^{-1/2+2} + \dots\right] = 0
\end{aligned} \tag{12.90}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
&3/4x^{-5/2} - 1/4\,c_1x^{-3/2} + 3/4c_2x^{-1/2} + \dots\\
&-x^{-5/2} + c_1x^{-3/2} + 3c_2x^{-1/2} + \dots\\
&+\frac{1}{4}x^{-5/2} + \frac{1}{4}c_1x^{-3/2} + \frac{1}{4}c_2x^{-1/2} + \dots\\
&+\frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{4}c_1x^{-1/2} + \frac{1}{4}c_2x^{1/2} + \dots = 0
\end{aligned} \tag{12.91}$$

Igualando a 0 *orden por orden en potencias de* x*,*

$$(1/4 + c_1)x^{-3/2} + (c_1/4 + 4c_2)x^{-1/2} + \frac{1}{4}c_2 x^{1/2} + \cdots = 0 \tag{12.92}$$

$c_1 = -1/4$, $c_2 = -c_1/16 = 1/64$

$$y(x) = x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots$$

La solución independioente se calcula con

$$y_2(x) = y_1(x)\int_{x_0}^{x} d\xi\,\frac{W(\xi)}{y_1^2(\xi)} \tag{12.93}$$

y el Wronskiano se encuientra según la fórmula de Abel,

$$W(x) = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} d\xi\,P(\xi)}\,, \tag{12.94}$$

donde, en este caso,

$$P(x) = \frac{2}{x}$$

Al calcular, obtenemos

$$W(x) = C\,e^{-2\int d\xi/\xi} = Ce^{-2\ln(x)} = \frac{C}{x^2} \tag{12.95}$$

$$y_2(x) = \left[x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots\right] C \int_{x_0}^{x} d\xi\,\frac{1}{\xi^2\left[\xi^{-5/2} - \frac{1}{4}\xi^{-3/2} + \frac{1}{64}\xi^{-1/2} + \dots\right]^2} \tag{12.96}$$

$$y_2(x) = \left[x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots\right] C \int_{x_0}^{x} d\xi\,\frac{1}{\xi^2\left[\xi^{-5/2}(1 - \frac{1}{4}\xi^{-3/2+5/2} + \frac{1}{64}\xi^{-1/2+5/2} + \dots)\right]^2}$$

$$y_2(x) = \left[x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots\right] C \int_{x_0}^{x} d\xi\,\frac{\xi^3}{\left[(1 - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{64}\xi^2 + \dots)\right]^2}$$

Ahora bien,

$$(1+x)^{-2} \approx 1 - 2x + 3x^2 + ...$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left[x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots\right] C \int_{x_0}^{x} d\xi\ \xi^3(1+\frac{1}{2}\xi + \dots) = \\ &= C\left[x^{-5/2} - \frac{1}{4}x^{-3/2} + \frac{1}{64}x^{-1/2} + \dots\right]\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} + \dots\right] = \\ &= C\left[\frac{x^{3/2}}{4} + (1/10 - 1/16)x^{5/2} + \dots\right] = C\left[\frac{x^{3/2}}{4} + \frac{6}{160}x^{5/2} + \dots\right] = \\ &= Cx^{1/2}\left[\frac{x}{4} + \frac{6}{160}x^2 + \dots\right] \end{aligned}$$

12.3. Examen

Problema 12.3.1 *Consider the following equation for $y(x)$, that has parameter Ω*

$$x^2y''(x) + xy' + (x^2 - \Omega^2)y = 0\,, \quad 0 < x\,. \tag{12.97}$$

Take as a first solution of equation $y_1(x) = J_\Omega(x)$; this function is known as the Bessel function of the first kind and order Ω.

Use the method of Reduction of Order, to derive an expression for a corresponding second solution, $y_2(x)$, of the equation. This expression will be of the form

$$y_2(x) = f(x)\int g(x)dx\,,\,,$$

for some functions $f(x)$ and $g(x)$, and it will not be possible to further evaluate the indefinite integral in terms of well-known functions. Hence your answer may, and should, involve an indefinite integral. You may disregard questions of convergence of the integral.

Cuando se tiene una ecuación de la forma,

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

la técnica de reducción de orden consiste en proponer una segunda solución de la forma, $y_2(x) = g(x)y_1(x)$*, donde* $y_1(x)$ *es unasolución de la ecuación original. Esta proposición lleva a la ecuación diferencial auxiliar (ver la ec. 5.41)*

$$y_1 g'' + (2y_1' + P y_1)g' = 0$$

Al reescribr la ecuación de Bessel de orden Ω *en su forma normal,*

$$y''(x) + x^{-1}y' + (x - \Omega^2 x^{-2})y = 0\,, \quad 0 < x\,. \tag{12.98}$$

identificamos,

$$P = x^{-1}$$

Y por tanto la ecuación de reducción de orden queda como $(y_1(x) = J_\Omega(x))$*,*

$$J_\Omega\, s' + (2J_\Omega' + x^{-1}J_\Omega)s = 0$$

$$J_\Omega\, s' = -(2J_\Omega' + x^{-1}J_\Omega)s$$

$$\frac{ds}{s} = -\frac{2J_\Omega' + x^{-1}}{J_\Omega} = -2\frac{J_\Omega'\,dx}{J_\Omega} - \frac{J_\Omega dx}{xJ_\Omega}$$

$$\ln(s) = -2\ln(J_\Omega) - \int \frac{dx}{x} = -2\ln(J_\Omega) - \ln(x) + C$$

$$s(x) = Kexp(-2\ln(J_\Omega) - \ln(x)) = K\,x^{-1}e^{-2\ln(J_\Omega(x))} = K\frac{1}{xJ_\Omega^2(x)} \tag{12.99}$$

Integramos de nuevo

$$g(x) = \int \frac{d\xi}{\xi J_\Omega^2(\xi)} \tag{12.100}$$

Al final,

$$y_2(x) = J_\Omega(x) \int \frac{d\xi}{\xi J_\Omega^2(\xi)} \tag{12.101}$$

Problema 12.3.2 *A Stationary Temperature Distribution in an Arch Segment*

(Reminder: Substitute your individual values for the parameters Λ Ω, as prescribed on the front page, wherever Λ and Ω occur, to obtain your own individual version of this assignment.)

Let r and θ be polar coordinates. In terms of these, a ring segment Q in the (x, y) plane is defined by the conditions $1 < r < \Omega$, $0 < \theta < \pi/\Lambda$

Given is furthermore Laplace's equation on this region Q:

- *Use the method of separation of variables to derive a completea set of fundamental solutions $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ for the given equation that are bounded and continuous on region Q. That is: give a basis, consisting of separated functions.*

- *Give all separable solutions $u(r, \theta)$ of Laplace's equation that obey the boundary conditions*

$$\begin{aligned} u(1, \theta) = 0\,, &\quad 0 < \theta < \pi/\Lambda \\ u(r, 0) = 0\,, &\quad 0 < \theta < \pi/\Lambda \\ u(\Omega, \theta) = 0 &\quad 0 < \theta < \pi/\Lambda\,. \end{aligned} \tag{12.102}$$

las sols fundamentales

$$u(r.\theta) = (A\ln(r) + B)(C\theta + D)\,, \quad \nu = 0$$

$$u(r, \theta) = [A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu}]cos(\nu\theta) + [C_\nu r^\nu + D_\nu r^{-nu}]sen(\nu\theta) \tag{12.103}$$

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = {} & [E_\nu \sin(\nu\ln(r)) + F_\nu \cos(\nu\ln(r))]\, senh(\nu\theta) + \\ & + [G_\nu \sin(\lambda\ln(r)) + H_\nu \cos(\nu\ln(r))]\, cosh(\nu\theta) \end{aligned} \tag{12.104}$$

Problema 12.3.3 *Teoría de Sturm Liouville.*

Considere el siguiente problema espectral para el operador diferencial

$$L[y] = -y - (\Omega\pi)^2 y\,,$$

con las siguientes condiciones de borde y funciones a determinar ($y = y(x)$) en el intervalo $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= \lambda_i y(x)\,, \\ y(0) - y'(0) &= 0 \\ \alpha y(1) - y(0) &= 0\,; \end{aligned} \tag{12.105}$$

acá λ_i es el i-ésimo y α y Ω son parámetros.

- *Sea ϕ_0 la autofunción correspondiente al autovalor $\lambda_i \equiv \lambda_0 = -\Omega\pi^2 - 1$,*

  1. *Determine $\phi_0(x)$.*
  2. *Determine el valor del parámetro α correspondiente.*

- *Sea c el índice para el cual, $\lambda_i = \lambda_c = 0$, y $y(x) = \phi_c(x)$, la autofunción correspondiente.*

  1. *Determine $\phi_c(x)$.*
  2. *¿ α mantiene el mismo valor obtenido en el item anterior?.*

- *¿Qué puede decir del valor de la integral $\int_0^1 \phi_0(x)\phi_1(x)dx$?*

- *Considere ahora el BVP no homogéneo*

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= e^x\,, \\ y(0) - y'(0) &= 0 \\ y(1) - y(0) &= 0\,; \end{aligned} \tag{12.106}$$

  ¿Cuál es su solución general?.

Sturm-Liouville theory

Given is the following eigenvalue problem for the linear differential operator

$$L[y] = -y - (\Omega\pi)^2 y\,,$$

with the indicated boundary conditions and unknown function $y = y(x)$, *with* $0 \leq x \leq 1$*:*

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= \lambda_i y(x)\,, \\ y(0) - y'(0) &= 0 \\ \alpha y(1) - y(0) &= 0\,; \end{aligned} \tag{12.107}$$

in this, λ_i *denote eigenvalues, with index* i*, and* α *is a parameter. For* Ω*, please substitute your individual value, as was defined for* Ω *on the front page of this exam.*

- *for* $\lambda_i \equiv \lambda_0 = -\Omega\pi^2 - 1$*, the given system have an eigenfunction* $y(x) = \phi_0(x)$*.*

  1. *i. Determine this eigenfunction* $\phi_0(x)$*.*
  2. *Determine the corresponding value of parameter* α*.*

- *For* $\lambda_i = \lambda_c = 0$*, the given system has an eigenfunction* $y(x) = \phi_c(x)$*, i.e. for* i *equal to some value* c

  1. *Determine this eigenfunction* $\phi_c(x)$*.*
  2. *Is the value* α *the sme as in the previous item?.*

- *Consider now the non-homogeneous BVP*

$$\begin{aligned} L[y(x)] &= e^x\,, \\ y(0) - y'(0) &= 0 \\ y(1) - y(0) &= 0\,; \end{aligned} \tag{12.108}$$

  give the general solution of this problem.

- *Consider the integral*

$$\int_0^1 \phi_0(x)\phi_1(x)dx\,, \tag{12.109}$$

what can you say about its value?

Cuando usamos $\lambda_0 = -\Omega\pi^2 - 1$ el BVP resutante es ......

Sturm-Liouville Theory

Given: In terms of the linear differential operator

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right) \tag{12.110}$$

, the equation

$$L[y] = \lambda y$$

, for $y = y(x)$, subject to the boundary conditions y, y' remain bounded as $x \to\ -1^+$, (6) y, y' remain bounded as $x \to 1^-$, (7) has as its only eigenfunctions the Legendre polynomials $P_n(x)$, for $n = 0, 1, 2, 3, ...$

The corresponding eigenvalues are $\lambda_n = n(n+1)$. $P_n(x)$ is a polynomial of degree n, with

$$P_n(1) = 1$$

Given: This singular boundary value problem is self-adjoint, i.e. $(L[u], v) = (u, L[v])$, with

$$(u, v) = \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx\,, \tag{12.111}$$

for u, v bounded and differentiable on the interval $I = [-1, 1]$, i.e. for $-1 \le x \le 1$. I Let $g(x)$ be given by $g(x) = \alpha x + e^x$, in which α is a parameter. Then for which value of α, does the non-homogeneous problem

$$L[y] - 2y = g(x)\,, \quad -1 \le x \le 1\,, \qquad (8) \tag{12.112}$$

with boundary conditions (6) and (7), have a solution of the form

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, P_n(x) \tag{12.113}$$

? Is this solution unique? Explain your answer.

The equation we want to solve is:

$$L[y] = 2y + \alpha x + e^x \,, \tag{12.114}$$

Since Legendre polinomials constitute a base, we can assure that there are coefficients a_0, a_1, a_2, ... such that, in the interval of interest,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{12.115}$$

We insert the trial solution for our equation as a superposition of Legendre polinomials and get

$$\begin{gathered} L\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, P_n(x)\right] = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, P_n(x)\right] + \alpha x + e^x = \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, n(n+1) P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2b_n \, P_n(x) + \alpha x + e^x \end{gathered} \tag{12.116}$$

where we have used that $P_1(x) = x$. If we substitute the series for the exponential function,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \, n(n+1) P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2b_n \, P_n(x) + \alpha P_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \tag{12.117}$$

From here, and using the fact that the P_ℓ are linearly independent, we get

$$\begin{gathered} b_n \, n(n+1) = 2b_n + a_n \,, \quad n \neq 1 \\ 2b_1 = 2b_1 + a_1 + \alpha \,. \end{gathered} \tag{12.118}$$

These equations imply

$$b_n = \frac{a_n}{n(n+1) - 2} \,, \quad n \neq 1 \tag{12.119}$$

Therefore, the condition for a solution is

$$\alpha = -a_1 \,. \tag{12.120}$$

which leaves b_1 free implying that the solution is not unique.