Universidade de Santiago
Departamento Ciência & Tecnologia

Álgebra Linear - Eng. Informática/Eng. Civil

Folha Prática 3 - Determinantes Ano lectivo: 2024/2025

---

1. Determine a matriz inversa A^{-1} da matriz A, e verifique o resultado obtido:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Dada uma matriz quadrada A, indique que alterações sofre $det(A)$, quando se efectuam sobre A as seguintes operações:

a) Troca de duas linhas/colunas;

b) Multiplicação de uma linha/coluna por um número real não nulo;

c) Transposição da matriz;

d) Substituição de uma linha/coluna pela sua adição com um múltiplo de outra linha/coluna.

4. Se $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7$ determine, justificando, os determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 5c_1 \\ a_2 & b_2 & 5c_2 \\ a_3 & b_3 & 5c_3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix}$

5. Determine todos os valores de x para os quais

$$\begin{vmatrix} x+2 & -1 & 3 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

6. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando:

a) $|A^T|$;
b) $|AB|$;
c) $|A^4|$;
d) $|2A|$;
e) $|2A^{-1}|$;
f) $|(2A)^{-1}|$;
e) $|AB^{-1}A^T|$.

7. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

a) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

8. Calcule o determinante das seguintes matrizes, usando a expansão por linhas/colunas (Teorema de Laplace):

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{pmatrix};$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{pmatrix};$

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 9 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

9. Seja $A = \begin{pmatrix} -2 & \mu+3 & -\lambda \\ 1 & 0 & \lambda \\ 2 & 4 & 3\lambda \end{pmatrix}$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Utilizando propriedades dos determinantes, transforme A numa matriz triangular e verifique que $det(A) = \lambda(1-\mu)$;

b) Determine os valores λ e μ para os quais A é invertível;

c) Calcule o complemento algébrico (cofactor) do elemento na posição $(3,2)$ da matriz A.

10. Por suas palavras diga o que intende por matriz adjunta de A ou simplesmente por adjunta de A.

11. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determine $adj(A)$;

b) Calcule $det(A)$;

c) Mostre que $A(adj(A)) = det(A)I_3$;

d) Calcule A^{-1}.

12. Calcule os complementos algébricos (cofactores) dos elementos $(1,2)$ e $(3,2)$ das inversas (caso existam), das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. Determine o elemento $(2,3) \in A^{-1}$ de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

14. Verifique se a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

é invertível para todo escalar a, b e c.

15. Considere os sistemas de equações lineares que se seguem:

$$(A) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 & = & 9 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & -2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = & 6 \end{array} \right. \qquad (B) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 8 \\ -2x_1 + 6x_2 + 7x_3 & = & -3 \end{array} \right.$$

a)Determine o valor de x_2 no SEL (A), aplicando a regra de Cramer.

a)Determine a solução do SEL (B), aplicando a regra de Cramer.