TP5. 2

. Nos piden Butter de 2 orden.

→ Polinomio de Butter de 2do orden normalizado:

$$\Phi(s) = (s^2 + Q^{-1} s + 1) = s^2 + \sqrt{2}\, s + 1$$

Nuestro filtro quedaría:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + 1} \xrightarrow[\omega_0 = 2\pi\, 1KHz]{} \frac{(2\pi\ 1KHz)^2}{s^2 + \sqrt{2}(2\pi\ 1KHz)s + (2\pi\ 1KHz)^2}$$

$$H(s) = \frac{39{,}478 \times 10^6}{s^2 + 8835{,}765\, s + 39{,}478 \times 10^6} = \frac{c}{s^2 + bs + c}.$$

. Aplico la transformada bilineal: $s = 2fs\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$, uso una fórmula para ahorrar el álgebra (ya lo hice varias veces a mano).

$$H(z) = \frac{\frac{c}{a^2 + ab + c}\left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 + \frac{2c - 2a^2}{a^2 + ab + c} z^{-1} + \frac{a^2 - ab + c}{a^2 + ab + c} z^{2}} \quad \rightarrow a = 2fs = 200KHz$$

$$H(z) = \frac{0{,}0675 + 0{,}135\, z^{-1} + 0{,}06745\, z^{-2}}{1 - 1{,}143\, z^{-1} + 0{,}413\, z^{-2}}.$$

Ejercicio ③

ⓐ. $h_1(k) = (1, 1) \longrightarrow H_1(z) = 1 + z^{-1}$

→ Transferencia del sistema.

$$H(z) = 1 + z^{-1}$$

→ Singularidades en el plano z.

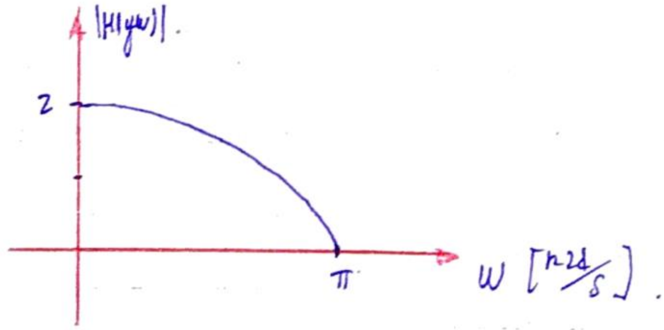
$$H(z) = \frac{z+1}{z} \rightarrow$$ cero en $(-1, 0)$
polo en $(0, 0)$.

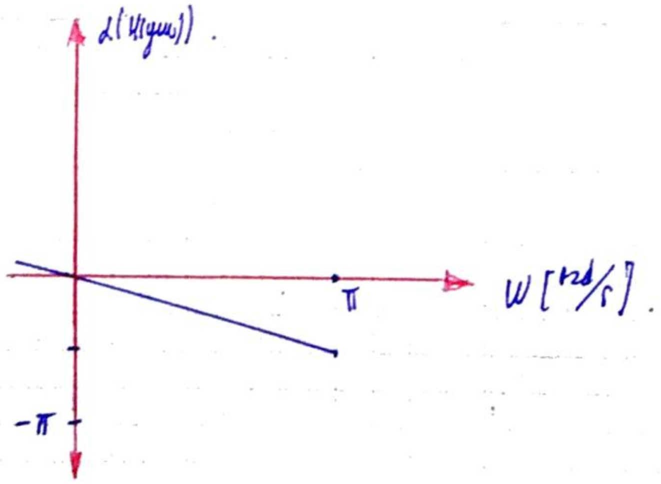
→ Respuesta de módulo y Fase.

$$H(z) = e^0 + e^{-jw} = e^{-j\frac{w}{2}}\left(e^{j\frac{w}{2}} + e^{-j\frac{w}{2}}\right)$$

$$|H(jw)| = 2 \cdot \cos\left(\frac{w}{2}\right).$$

$$\alpha(H(jw)) = -\frac{w}{2}.$$





$h_2(k) = (1, 1, 1) \longrightarrow H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$

→ Transferencia del sistema.

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

→ Singularidades en el plano z.

$$H(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

→ Respuesta de Módulo y fase.

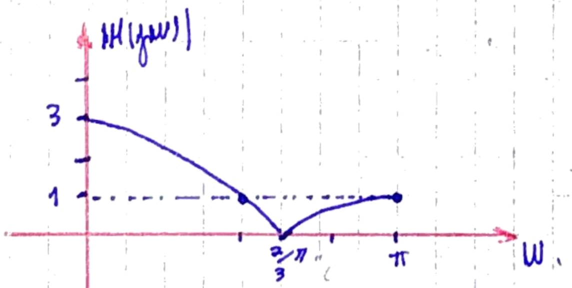
$$H(jw) = e^{0} + e^{-jw} + e^{-2jw}$$

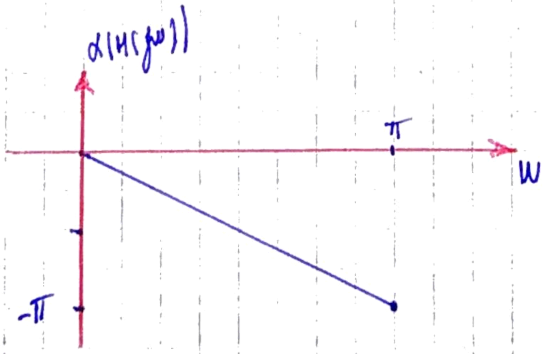
$$H(jw) = e^{-jw}\,(1e^{jw} + e^{-jw} + 1)$$

$$H(jw) = e^{-jw}\,(2\cdot\cos(w) + 1)$$

$$|H(jw)| = 2\cdot\cos(w) + 1$$

$$\alpha(H(jw)) = -w$$





① ¿Que modificación debería implementarse para que la respuesta represente la media aritmética?

Deberíamos dividir a todos los pesos de los elementos por el peso total de todos los elementos:

$$h_1(k) = (1/2, 1/2)$$

$$h_2(k) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

② ¿Que frecuencia de muestreo se debería utilizar para eliminar el ruido de 50Hz?

$$\Omega = \frac{2}{3}\pi \rightarrow f_N = \frac{1}{3} = 50Hz$$

$$\therefore f_s = 1 = 150Hz$$

ⓑ Filtro diferenciador.

$$h(k) = (1, -1) \rightarrow H(z) = 1 - z^{-1}$$

→ Transferencia del sistema.

$$H(z) = \frac{z-1}{z}$$

→ Singularidades.

cero en $(1,0)$ / polo en $(0,0)$.

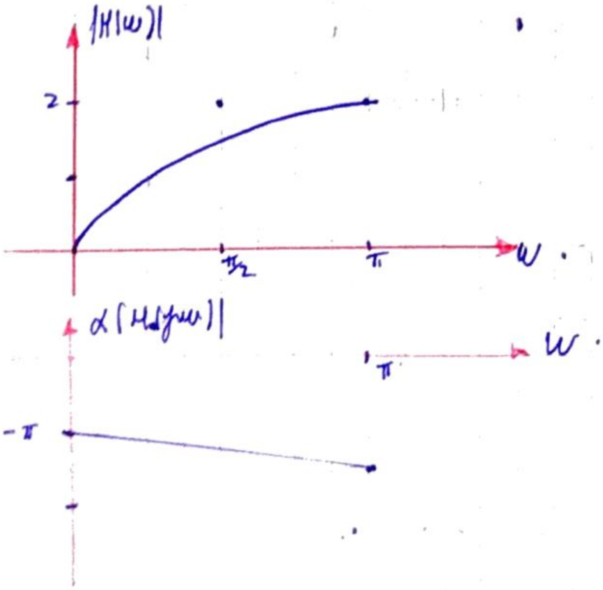
→ Respuesta de módulo y fase.

$$|H(jw)| = |1 - e^{-jw}| = |e^{-jw/2}(e^{jw/2} - e^{-jw/2})|.$$

$$|H(jw)| = |e^{-jw/2} . 2i . sen(w/2)|.$$

$$|H(jw)| = 2 . sen(w/2).$$

$$\measuredangle(H(jw)) = \measuredangle(e^{-jw/2} e^{-j\pi}) = -w/2 - \pi.$$



$h_2(n) = (1, 0, -1) \rightarrow H(z) = 1 - z^{-2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}.$

→ Transferencia del sistema.

$$H(z) = 1 - z^{-2}.$$

→ polos y ceros del sistema.

ceros $(1,0); (-1,0)$.

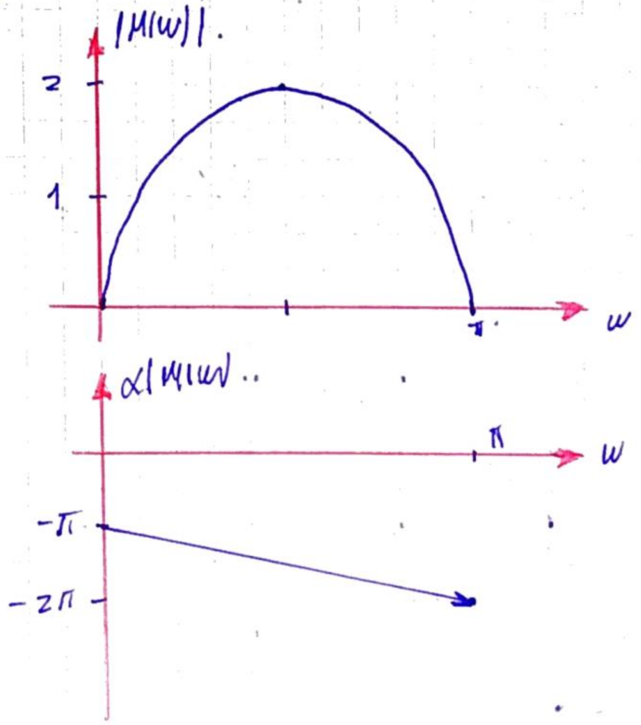
polos $(0,0)^2$.

→ Módulo y fase.

$$H(jw) = \frac{z^2-1}{z^2} = 1 - z^{-2} = e^0 - e^{-2jw} = 2i\, e^{-jw} \cdot sen(w).$$

$$|H(jw)| = 2 \cdot sen(w).$$

$$\measuredangle(H(jw)) = -w - \pi.$$



① ¿Que demora introducen ambos sistemas? demora $= -\frac{d\alpha}{dw}$. En el primer sistema tenemos un delay de $1/2$ y en el segundo sistema tenemos un delay de 1.

② Hasta que frecuencia se comportan como un derivador ideal.

$$2\, sen(w) = w + w \cdot \frac{5}{100}$$

$$\hookrightarrow w = 1{,}837.$$

$$\hookrightarrow f|_{fs} = 0{,}292 \sim 0{,}3$$

La respuesta sería admisible hasta el 30% de la frecuencia de muestreo.