Trabalho Prático nº 2 – Perguntas para o Relatório

<u>Objectivo</u>: *Pretende-se analisar sistemas em tempo discreto, usando a Transformada de Z, e determinar a sua resposta a determinados sinais de entrada, utilizando o Matlab. Pretende-se também ilustrar os conceitos de frequência e de filtragem e efectuar a análise de sinais pelas Transformadas de Fourier.*

<u>Linguagem de Programação</u>: *Matlab*

<u>Relatório e Código relativamente a perguntas específicas sobre este trabalho</u>:
- <u>Data de entrega</u>: 21 de Março de 2013.
- <u>Submissão</u>: na plataforma *Nónio* (https://inforestudante.uc.pt).

<u>Perguntas</u>:

1. Considere o seguinte sistema (SLIT) definido em tempo discreto e causal:
   $y[n] = b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3] + b_4 x[n-4] + b_5 x[n-5] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - a_3 y[n-3]$ em que:
   $a_1 = -2.1 - 0.2\,\mathrm{mod}(G\#,2), a_2 = 1.43 + 0.31\,\mathrm{mod}(G\#,2), a_3 = -0.315 - 0.117\,\mathrm{mod}(G\#,2),$
   $b_2 = 0.9167\,\mathrm{mod}(1+G\#,2), b_3 = 0.3137\,\mathrm{mod}(G\#,2), b_4 = -0.5867\,\mathrm{mod}(1+G\#,2), b_5 = -0.1537\,\mathrm{mod}(G\#,2)$
   $G\#$ é o número do Grupo de Trabalho.
   Sempre que necessário, considere condições iniciais nulas.
   1.1. Determine a expressão da função de transferência do sistema, $G(z)$.
   1.2. Obtenha os vectores *b* e *a* com os coeficientes dos polinómios da função de transferência do sistema e responda às seguintes questões com base num script em *Matlab* ou *Octave*:
      1.2.1. Calcule os pólos e os zeros e apresente a sua localização no plano z.
      1.2.2. Verifique, justificadamente, a estabilidade do sistema.
      1.2.3. Determine a expressão da resposta a impulso do sistema, $h[n]$.
      De notar que a expressão de $h[n]$ pode ser obtida por duas vias: a) usando a função de cálculo simbólico *iztrans* que recebe a expressão de $H(z)$ e obtém a expressão de $h[n]$ válida para $n \geq 0$; b) expandindo $H(z)$ em fracções parciais (com o apoio da função numérica *residuez*) e calculando $h[n]$ pela Transformada inversa de Z de cada parcela, sabendo que:

$$Z^{-1}\left\{\frac{r_1 z^{-m}}{1-p_1 z^{-1}}\right\} = r_1 p_1^{n-m} u[n-m] = \left(r_1 p_1^{-m}\right) p_1^{n} u[n-m] =$$

$$= -\left(r_1 p_1^{-m}\right)\delta[n] - \left(r_1 p_1^{-m}\right) p_1 \delta[n-1] - \ldots - \left(r_1 p_1^{-m}\right) p_1^{m-1}\delta[n-m+1] + \left(r_1 p_1^{-m}\right) p_1^{n} u[n] =$$

$$= -\left(r_1 p_1^{-m}\right)\delta[n] - \left(r_1 p_1^{-m+1}\right)\delta[n-1] - \ldots - \left(r_1 p_1^{-1}\right)\delta[n-m+1] + \left(r_1 p_1^{-m}\right) p_1^{n} u[n]$$

1.2.4. Obtenha a resposta a impulso do sistema $h[n]$ para n de 0 a 70, usando a expressão obtida em 1.2.3 ($h1[n]$), a função *impz* ($h2[n]$) e a função *dimpulse* ($h3[n]$), e representa graficamente a sobreposição de $h1[n]$ com *stairs*, $h2[n]$ com pontos 'o' e $h3[n]$ com pontos '+'.

1.2.5. Determine a expressão da resposta do sistema ao degrau unitário ($u[n]$).

1.2.6. Obtenha a resposta a degrau unitário do sistema $y[n]$ para n de 0 a 70, usando a expressão obtida em 1.2.5 ($y1[n]$) e a função *dstep* ($y2[n]$), e representa graficamente a sobreposição de $y1[n]$ com *stairs* e $y2[n]$ com pontos 'o'.

1.2.7. Receba uma entrada $x[n]$ (sinal de teste: $x[n]=4\left(u[n-3]-u[n-9]\right)$ para n entre 0 e 70) e determine a expressão da resposta do sistema, $y[n]$, a essa entrada.

1.2.8. Obtenha a resposta do sistema à entrada recebida em 1.2.7, $y[n]$ para n de 0 a 70, usando a expressão obtida em 1.2.7 ($y1[n]$), a função *filter* ($y2[n]$) e a função *dlsim* ($y3[n]$), e represente graficamente a sobreposição de $y1[n]$ com *stairs*, $y2[n]$ com pontos 'o' e $y3[n]$ com pontos '+'.

1.2.9. Obtenha e represente graficamente (amplitude em *dB* e fase em graus, recorrendo à função *unwrap* para evitar eventuais saltos na sequência de valores da fase) a resposta em frequência do sistema, $H(\Omega)$, para Ω entre 0 e π *rad*. Os gráficos da amplitude e da fase devem ser representados separadamente numa mesma figura.

1.2.10. Obtenha o ganho do sistema em regime estacionário usando a função *ddcgain*. Comprove que esse valor pode ser obtido pela aplicação do Teorema do Valor Final (calculando o valor da resposta do sistema, em regime estacionário, ao degrau unitário), a partir da saída $y[n]$, obtida em 1.2.6, e a partir da resposta em frequência $H(\Omega)$, obtida em 1.2.9.

2. Pretende-se determinar e representar os coeficientes da Série de Fourier de um sinal periódico, $x(t)$, e apresentar graficamente o sinal original e o aproximado pela Série com um dado número de harmónicos.

2.1. Para isso escreva um script em *Matlab* que efectue as seguintes operações:

2.1.1. Pedir o valor do período fundamental, T0, do sinal a analisar.

2.1.2. Definir a sequência temporal t, durante um período, com, por exemplo, 500 elementos.

2.1.3. Obter o sinal $x(t)$ usando um menu que permita escolher uma onda quadrada periódica, uma onda em dente de serra (rampa que varia de 0 a 1 durante um período) ou uma expressão a introduzir.

2.1.4. Determinar e representar graficamente os valores dos coeficientes ($\boldsymbol{C_m}$ e $\boldsymbol{\theta_m}$) da Série de Fourier trigonométrica com o valor de *m_max* da Série de Fourier igual a 100.

2.1.5. Obter e representar graficamente a sobreposição do sinal original e dos sinais aproximados a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para vários valores de *m_max* (por exemplo, para *m_max* = 0, 1, 3, 5, 10, 50 e 100).

2.1.6. Obter e representar graficamente amplitude e fase dos valores do coeficiente $\boldsymbol{c_m}$ para m entre -100 e 100, da Série de Fourier complexa, a partir dos coeficientes $\boldsymbol{C_m}$ e $\boldsymbol{\theta_m}$.

2.2. Utilize o script de 2.1 para os seguintes sinais:

2.2.1. Onda quadrada de período 2π *s*.

2.2.2. Onda em dente de serra de período 2π *s*.

2.2.3. $x(t) = 1 + 2\,\mathrm{mod}(G\#, 2)\sin(12\pi t + \pi/4)\cos(21\pi t) + 2\,\mathrm{mod}(1 + G\#, 2)\cos(20\pi t - \pi/4)\sin(45\pi t)$.

2.2.4. $x(t) = -2 + 4\cos(4t + \pi/3) - 2\sin(10t)$.

2.3. Determine analiticamente os coeficientes não nulos da Série de Fourier trigonométrica, $\boldsymbol{C_m}$ e $\boldsymbol{\theta_m}$, dos sinais indicados em 2.2.3 e 2.2.4.

2.4. Determine os coeficientes não nulos da Série de Fourier complexa, $\boldsymbol{c_m}$, dos sinais indicados em 2.2.3 e 2.2.4, através da expressão $c_m = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt$.

3. Acrescentar ao *script* em *Matlab*, desenvolvido em 2.1, a possibilidade de calcular e de representar os coeficientes da Série de Fourier de um sinal periódico com ruído. Deve também poder escolher um filtro a aplicar sobre o sinal com ruído e apresentar graficamente o sinal, o sinal com ruído e o sinal filtrado.

3.1. Para isso acrescente ao script de 2.1 o código que efectue as seguintes operações:

3.1.1. Criar um menu que permita escolher o ruído a adicionar ao sinal original (ruído completamente aleatório, ruído aleatório mas definido numa dada gama de frequências, ruído definido por uma expressão a introduzir ou sem ruído).

3.1.2. Obter o sinal *xr*(*t*) = *x*(*t*) + *ruido*(*t*) correspondente a cada opção dos menus.

3.1.3. Criar um menu que permita escolher o Tipo de Filtro (ideal) a aplicar (Passa-Baixo, Passa-Alto, Passa-Banda ou Rejeita-Banda). Deve pedir o(s) valor(es) da(s) frequência(s) a considerar para o filtro: o Passa-Baixo deve manter todas as componentes das frequências inferiores a uma dada frequência; o Passa-Alto deve manter todas as componentes das frequências superiores a uma dada frequência; o Passa-Banda deve manter todas as componentes das frequências no intervalo definido por duas frequências dadas; o Rejeita-Banda deve manter todas as componentes das frequências não pertencentes ao intervalo definido por duas frequências dadas.

3.1.4. Obter e representar graficamente, numa figura, o sinal original *x*(*t*), o sinal com ruído *xr*(*t*) e o sinal filtrado *xrf*(*t*) e, noutra figura, o valor dos coeficientes da Série de Fourier, antes e depois da filtragem.

3.2. Utilize o script de 2.1 e de 3.1 para os seguintes sinais:

3.2.1. Onda quadrada unitária de período 2π *s*; Ruído: aleatório; Filtro: que permita atenuar o ruído e manter, se possível, as características fundamentais do sinal.

3.2.2. Onda em dente de serra de período 2π *s*; Ruído: aleatório na gama ω∈[4, 6] rad/s; Filtro: que permita atenuar o ruído e manter, se possível, as características fundamentais do sinal.

3.2.3. $x(t) = 1 + 2\,\mathrm{mod}(G\#, 2)\sin(12\pi t + \pi/4)\cos(21\pi t) + 2\,\mathrm{mod}(1 + G\#, 2)\cos(20\pi t - \pi/4)\sin(45\pi t)$; Ruído: aleatório na gama ω∈[20π, 30π] *rad/s*; Filtro: que permita obter o sinal sem ruído.

3.2.4. $x(t) = -2 + 4\cos(4t + \pi/3) - 2\sin(10t)$; Ruído: $ruido(t) = 0.2\cos(9t)^2$; Filtro: que permita obter o sinal original sem a sua componente contínua e sem ruído.

4. Considere o seguinte sinal de tempo contínuo não periódico:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-at}\sin(4\pi t) & ,a > 0 \text{ e } 0 \le t < 6 \\ 0 & ,t \notin [0;6[\end{cases} \quad ,\text{com } A = 2 \text{ e } a = 0.7\,.$$

4.1. Determinar a expressão e representar graficamente, em módulo e em fase, a Transformada de Fourier do sinal $x(t)$, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$, em função da frequência angular ω entre -30π rad/s e 30π rad/s, com um passo de π/6 rad/s.

4.2. Reconstruir o sinal a partir da Transformada de Fourier, $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, e comparar graficamente com o sinal original.

4.3. Calcular o valor dos coeficientes da Série de Fourier complexa, c_m para $-25 \le m \le 25$, de um sinal periódico $xp(t)$ que coincide com $x(t)$ para $0 \le t < 6$. Comparar com os resultados obtidos em 4.1.

5. Considere uma sequência de dados $x[n]$ que resultou da amostragem de um determinado sinal de tempo contínuo $x(t)$ com um dado período de amostragem T_s.

5.1. Utilize o script de 2.1, com eventuais adaptações, para:

5.1.1. Determinar e representar graficamente os valores dos coeficientes ($\boldsymbol{C_m}$ e $\boldsymbol{\theta_m}$) da Série de Fourier trigonométrica com um valor adequado de m_max da Série de Fourier.

5.1.2. Obter e representar graficamente a sobreposição do sinal original e dos sinais aproximados a partir dos coeficientes da Série de Fourier trigonométrica para vários valores de m_max.

5.1.3. Obter e representar graficamente amplitude e fase dos valores do coeficiente c_m, da Série de Fourier complexa, a partir dos coeficientes ($\boldsymbol{C_m}$ e $\boldsymbol{\theta_m}$).

5.2. A partir da análise efectuada, o que pode concluir sobre as características principais do sinal de tempo contínuo $x(t)$?

<u>Nota 1</u>: O *dataset* para a resolução deste problema será disponibilizado na plataforma *Nónio* (https://inforestudante.uc.pt).

<u>Nota 2</u>: Deve realizar, pelo menos, este problema de forma supervisionada numa das aulas PL.