

Diferenciabilidad

Ejemplos y contraejemplos

Juan Cristi
email jcristi@fi.uba.ar

1 de junio de 2020

En cada caso analizar si la función

- Es continua
- Tiene derivadas parciales
- Tiene derivadas direccionales para toda dirección
- Es diferenciable
- es C^1

1. Una función discontinua, no derivable

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. Una función continua, no derivable

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. Una función discontinua, derivable en toda dirección

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Una función continua, derivable (solo parciales)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Una función continua, derivable en toda dirección, no diferenciable

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Una función continua, derivable en toda dirección (nulas), no diferenciable

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{si } y \neq x^2 \end{cases}$$

7. Una función diferenciable, pero no C^1

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8. Una función C^1

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$