Ejercicios de parcial por tema

Juan Cristi
email jcristi@fi.uba.ar

30 de junio de 2020

Esta es una recopilación de ejercicios de parcial de la materia Análisis Matemático II de la FIUBA ordenados por tema.

En rojo figuran comentarios a los ejercicios.

Los ejercicios en azul son la versión en el tema 2 de ejercicios anteriores, por lo que pueden obviarse. Los dejo para el que quiera entender cuanto varían los ejercicios cuando cambia el tema.

Al inicio de cada ejercicio figura la fecha del parcial, el tema y el número de tal ejercicio.

Si encontrás errores en este documento no dudes en escribirme a jcristi@fi.uba.ar.
Encontrá siempre la versión más actualizada y corregida de este documento en `https://github.com/jcristi/parciales-por-tema/blob/master/parciales_por_tema.pdf`

1. TPII

1.1. Dominio, conjuntos de nivel, y otros conjuntos definidos a partir de funciones

1. (10/12/19-T1-2) Dada $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{xy-x}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f.

2. (10/12/19-T2-2) Dada $f(x,y) = \frac{\sqrt{y^2-y}}{\sqrt{xy-y}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f.

3. (21/11/18-T?-3) Este ejercicio incluye temas del TPIII Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = 2x^2y - y^2$, **determine** y **grafique** el conjunto H del plano xy en cuyos puntos la función $h = f'_x f'_y$ resulta con valores positivos y **analice** si H es conexo.

4. (19/11/19-T?-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{(x-1)y}}{\sqrt{x-y}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f.

5. (16/11/19-T1-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy-x^3}}{\sqrt{x^2+y-2}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de punto frontera de D (Uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).

6. (16/11/19-T2-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy-y^3}}{\sqrt{x+y^2-2}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de punto frontera de D (Uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).

7. (21/10/19-T1-2) Sea $f(x, y) = \frac{\ln(4-x^2-y^2)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural D. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de nivel 0 de f.

7-bis. (Este ejercicio surgió como un error al copiar el ejercicio 7. Lo dejo por compatibilidad con versiones anteriores) Sea $f(x, y) = \frac{\ln(xy-x^3)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural D. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de nivel 0 de f.

8. (19/10/19-T1-2) Este ejercicio incluye temas del TPIII Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x, y) = (\ln(y - x), \ln(x^2 - xy))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\bar{f}'_x(x, y) + \bar{f}'_y(x, y) = (0, -1)$.

9. (19/10/19-T1-2) Este ejercicio incluye temas del TPIII Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x, y) = (\ln(y - x), \ln(y^2 - xy))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\bar{f}'_x(x, y) + \bar{f}'_y(x, y) = (0, 1)$.

10. (02/07/19-T1-4) Sea $f(x, y) = \sqrt{\ln(2x + y - 1)}$ definida en su dominio natural D. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x, y) < \ln(3)$.

11. (02/07/19-T2-4) Sea $f(x,y)=\sqrt{\ln(x+2y-1)}$ definida en su dominio natural D. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x,y)<\ln(3)$.

12. (10/06/19-T?-4) Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/f(x,y)=\sqrt{xy-y}$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $y=x^2+1$ donde f queda definida.

13. (08/06/19-T1-4) Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/f(x,y)=\ln(x+y^2)$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $x=y^2-21$ donde f queda definida.

14. (08/06/19-T2-4) Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/f(x,y)=\ln(y+x^2)$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $y=x^2-21$ donde f queda definida.

15. (13/05/19-T?-1) Este ejercicio incluye temas del TPIII Dada $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f'_y(x,y)=1$.

16. (11/05/19-T1-1) Este ejercicio incluye temas del TPIII Dada $f(x,y)=\ln(x^2y)$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f''_{xx}(x,y)-f''_{yy}(x,y)=0$.

17. (11/05/19-T2-1) Este ejercicio incluye temas del TPIII Dada $f(x,y)=\ln(xy^2)$ definida en su dominio natural D, **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f''_{xx}(x,y)-f''_{yy}(x,y)=0$.

18. (11/12/18-T1-4) Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\vec{f}(x,y)=(\ln(y-x^2),\sqrt{9-y-x^2})$ donde D es el dominio natural de $\vec{f}$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.

19. (11/12/18-T2-4) Dada $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/\vec{f}(x,y)=(\ln(x-y^2),\sqrt{9-x-y^2})$ donde D es el dominio natural de $\vec{f}$, **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.

20. (17/11/18-T1-1) Este ejercicio incluye temas del TPIII y del TPV Siendo $f(x,y)=x^3-6xy+3xy^2$ con $(x,y))\in\mathbb{R}^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinsnte hessiano $H(x,y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor. No resolver la parte en verde hasta llegara a extremos en el TP V.

21. (17/11/18-T2-1) Este ejercicio incluye temas del TPIII y del TPV Siendo $f(x,y) = y^3 - 6xy + 3yx^2$ con $(x,y)) \in \mathbb{R}^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinsnte hessiano $H(x,y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor. No resolver la parte en verde hasta llegara a extremos en el TP V.

22. (22/10/18-T?-5) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln(y-x)}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f. **Indique** un ejemplo de punto exterior y otro de punto frontera de D.

23. (20/10/18-T1-1) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x,y) = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{x-1}}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f. **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de D.

24. (20/10/18-T2-1) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x,y) = \frac{\ln(y-x)}{\sqrt{y-1}}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f. **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de D.

1.2. Límites y continuidad

1. Este ejercicio incluye temas del TPIII Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analice si f es continua en $(0,0)$, en base a su conclusión **opine** con fundamento si la función puede tener derivadas parciales continuas en un entorno de dicho punto.

2. (02/07/19-T1-3) Este ejercicio incluye temas del TPIII Siendo $f(x,y) = (e^{x^2+y^2} - 1)/(x^2+y^2)$ para $(x,y) \neq (0,0)$, **determine** $f(0,0)$ de manera que f resulte continua en el origen y, en ese caso, **analice** la derivabilidad de f en $(0,0)$ según distintas direcciones.

2. TPIII

2.1. Curvas

1. (10/12/19-T1-3) Este ejercicio se puede resolver más fácilmente con temas más avanzados Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : x^2y + xz = 3 \text{ y } \Sigma_2 : xy - z^2 = 1.$$

Si r o es la recta tangente a C en $P = (1, 2, 1)$, **calcule** la distancia entre los dos puntos A y B donde r o interseca a la superficie de ecuación $z = x^2$.

2. (19/11/19-T?-4) Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2 + t, t - t^3, 2t^4)$ con $t \in \mathbb{R}$. Si r_A y r_B son las rectas tangentes a C en los puntos $A = (2, 0, 2)$ y $B = (0, 0, 2)$, **analice** si existe un plano que contenga a ambas rectas.

3. (02/07/19-T1-1) Considere la curva C de ecuación $\vec{X} = (t^2 - t, 2t + 2, t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$ y sea Π_o el plano normal a C en el punto $(0, 4, 1)$. **Determine** cuál es el punto de Π_o más cercano al origen de coordenadas y **calcule** la distancia desde dicho punto al origen.

4. (08/06/19-T1-2) Sea la curva C incluida en la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u + v, u - v, u + v + 2(u - v)^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy tiene ecuación $x + y = 1$, **analice** si la recta tangente a C en $(2, -1, 4)$ tiene algún punto en común con el plano xz.

5. (11/05/19-T1-2) Siendo C la curva de ecuación $\vec{X} = (t^4 - 2t^2, t^3 - 2t, t^3 - 3t)$ con $t \in \mathbb{R}$, **halle** las ecuaciones de las rectas tangentes a C en aquellos puntos donde dichas rectas son paralelas al " eje y" y **analice** si existe un plano que contenga a dichas rectas; en caso afirmativo **halle** una ecuación para ese plano.

6. (20/10/18-T1-2) Este ejercicio se termina de resolver con temas más avanzados. Sabiendo que los puntos de la curva de ecuación $X = (t^2, 2t + 1, 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$ pertenecen a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, **halle** una aproximación lineal para $f(0{,}98; 3{,}01)$ teniendo en cuenta que $f'_x(1, 3) = 5$.

7. (De 2018) Sea C una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $x^2z - y^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de C

sobre el plano xy tiene ecuación $y = x^2$, **analice** si la recta tangente a C en $(2, 4, z_0)$ interseca en algún punto al eje z.

8. (De 2018) Dada la curva C definida como intersección de las superficies σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} &\Sigma_1 : z = x^2 + y + 1 && \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Sigma_2 : \vec{X} = (u, u^2, v) && \text{con } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

analice si la recta tangente a C en $(2, y_0, z_0)$ tiene algún punto en común con el plano xz.

9. (De 2018) **Halle** el punto medio del segmento $\bar{AB}$, sabiendo que sus puntos extremos (A y B) son aquellos donde la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2, 2t, t^4 + 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$ interseca a la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v, u - v, 4uv)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

10. (De 2018) Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $z = xy + 4$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que una ecuación vectorial para C es $X = (t - 1, t + 1, g(t))$ con $t \in \mathbb{R}$, **halle** una ecuación para el plano normal a C en $(2, y_0, z_0)$.

2.2. Derivadas parciales

De la sección 1.1, los ejercicios: 3, 8, 9, 15, 16, 17.

De la sección 1.2, los ejercicios: 1, 2.

1. (17/11/18-T1-2) Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x^3 + xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$. Analice si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x en todo punto de su dominio.

2.3. Derivadas direccionales

1. (21/10/19-T?-5) Sabiendo que $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+2y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y que $f(0,0) = 0$, **verifique** que f admite derivada direccional en toda dirección en $(0,0)$ y **determine** los versores para los que dicha derivada resulta nula.

2. (13/05/19-T?-3) Siendo $f(x,y) = \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, verifique que f admite derivada direccional en $(0,0)$ en toda dirección e indique si en base a lo obtenido se puede opinar con fundamento acerca de la diferenciabilidad de f en el origen de coordenadas.

3. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0,0)$.

4. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0,0)$.

2.4. Aproximación lineal

1. (16/11/19-T1-3) La curva de ecuación $v = f(u)$, en el plano uv, tiene recta tangente de ecuación $2u + v = 8$ en el punto $(2, v_0)$. Siendo $h(x,y) = x^2y + f(x,y)$, **calcule** aproximadamente $h(0{,}98; 2{,}03)$ mediante una aproximación lineal.

2.5. Plano tangente y recta normal

1. (10/12/19-T1-1) Sea Π_0 el plano tangente en $(10,2,5)$ a la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u^2+v, u-v, u+2v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, **halle** una ecuación para la recta que contiene a los puntos donde Π_0 interseca a los ejes x e y.

2. (21/11/18-T?-4) La superficie Σ de ecuación $z = x$ y admite la recta normal r_0 en el punto $A = (1, 2, z0)$, dicha recta interseca a Σ en otro punto B. Calcule la longitud del segmento cuyos puntos extremos son A y B.

3. (21/11/18-T?-5) Dada la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (uv, u+v, 2u-v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, **analice** si el plano tangente a Σ en el punto $A = (6, 5, 1)$ tiene puntos en común con la curva C de ecuación $\vec{X} = \left(t^2, \frac{3-t}{2}, \frac{21+7t}{2}\right)$ con $t \in \mathbb{R}$.

4. (16/11/19-T1-1) Dada la superficie Σ de ecuación $x^2y + xz = 0$, siendo r_A y r_B sus rectas normales en los puntos $A = (1, -1, 1)$ y $B = (-1, 1, 1)$ respectivamente, verifique que dichas rectas se intersecan en un punto y **halle** una ecuación para el plano que las contiene.

5. (21/10/19-T1-1) Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u2+v, u-v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. **Halle** ecuaciones para la recta normal (n_o) y el plano tangente (Π_o) a Σ en el punto $A = (2, 4, -1)$ y **determine** los puntos de n_o cuya distancia a Π_o resulte igual a $2\sqrt{38}$.

6. (19/10/19-T1-3) Sea r_o la recta normal a la superficie de ecuación $x = yz^2 + z$ en el punto $(2, 1, 1)$. **Determine** los puntos en los que r_o interseca a los planos coordenados y **halle** la ecuación de un plano que contenga a dichos puntos y al origen de coordenadas.

7. (08/06/19-T1-1) Este ejercicio necesita temas de la guia 5 para resolverse completamente. Dada la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 8$, **halle** los puntos de Σ en los que el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy) y **analice** en cuáles de dicho puntos el valor de f es un extremo local indicando, en ese caso, si es máximo o mínimo local.

8. (11/12/18-T1-1) Sean C_1 y C_2 dos curvas incluidas en la superficie regular Σ. Sabiendo que ambas curvas contienen al punto $A = (4, 4, 3)$ y que sus correspondientes ecuaciones vectoriales son:

   $C1 : \vec{X} = (2t, t^2, 2t-1)$ con $t \in \mathbb{R}$ y $C_2 : \vec{X} = (2u-2, u+1, u)$ con $u \in \mathbb{R}$,

   analice si la recta normal a Σ en A tiene algún punto en común con el plano $x + y + z = 27$.

9. (22/10/18-T?-2) Dada la superficie Σ de ecuación $z = x^3y - 3x^2y + y^2 + 4$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **halle** los puntos de Σ donde el plano tangente

es horizontal (paralelo al plano xy) y **analice** si dichos puntos son colineales (pertenecen a la misma recta).

10. (De 2018) Sabiendo que la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(5, y_0, z_0)$ admite la ecuación $\vec{X} = (1+2u, 3u, u+4)$ con $u \in \mathbb{R}$, **calcule** una aproximación lineal para $f(4{,}98; 6{,}01)$.

2.6. Gradiente y sus propiedades

1. (19/10/19-T1-4) Siendo $f(x, y) = x+sen(xy)$, **halle** los versores $\hat{r}$ tales que la derivada direccional de f en $A = (\sqrt{3}, 0)$ según $\hat{r}$ resulte igual al 50 % de la máxima derivada direccional en dicho punto.

2. (10/06/19-T?-2) Sea r_o la recta tangente en $(1, 2, 1)$ a la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones $z + 4 = x^2z + y^2$ y $xz^2 + y^2 = 5$ respectivamente. **Determine** los puntos donde r_o interseca a la superficie de ecuación $z^2 = x + y$.

3. (13/05/19-T?-2) Siendo C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son

$$\Sigma_1 : 3xy + \ln(x + yz - 6) - 2z = 0 \text{ y } \Sigma_2 : z = x^2y + e^{xy-2},$$

analice si el plano normal a C en $A = (1, 2, z_o)$ tiene algún punto en común con el eje x.

4. (17/11/18-T1-5) **Halle** el punto $(x0, y0, z0)$ donde la recta definida por la intersección de los planos de ecuaciones $x-y+z = 7$ y $2y-x+3z = 18$ es normal a la superficie de ecuación $z = x + yx^2$.

5. (22/10/18-T?-1) Siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/f(x, y, z) = e^{(2x+y+z-7)}$, **analice** si la recta normal al conjunto de nivel 1 de f en $(1, 2, 1)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $x = 3z$.

6. (22/10/18-T?-4) Analice si la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones:

$$\Sigma_1 :z = 2y2 - x2 \qquad (1)$$
$$\Sigma_2 :x \ln(yz) + y \ln(xz) = z - 1 \qquad (2)$$

define una curva C en un entorno del punto $A = (1, 1, 1)$. En caso afirmativo, **determine** si existe algún punto en el que la recta tangente a C en A interseca al eje x.

7. (De 2018) Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1(R^3)$. Sabiendo que $X = (u, v^2, v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es una ecuación de la superficie de nivel 1 de f, que para $A = (2, 1, 1)$ resulta $f(A) = 1$ y que la derivada direccional $f'(A, \hat{r}) = 3$ para $\hat{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, **calcule** el valor de la mínima derivada direccional de f en el punto A.

3. TPIV

3.1. Composición y regala de la cadena

1. (10/12/19-T1-4) Sea $h(x, y) = f(g(x, y))$ con $g(x, y) = (x^2y, y - x^2)$ y $\nabla f(u, v) = (u+2v, 2u)$. Calcule una aproximación lineal para $h(1{,}02, 1{,}97)$ sabiendo que el punto $(1, 2, 5)$ pertenece a la superficie de ecuación $z = h(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (19/11/19-T?-3) Sea $h(x, y) = f(g(x, y))$ con $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, donde $g(x, y) = (xy+x, x^2y)$ y se conoce el polinomio $p(u, v) = u+v2+uv+3$ que permite aproximar $f(u, v)$ por Taylor de 2º orden en un entorno de $(2, 1)$. Siendo Π_o el plano tangente a la superficie de ecuación $z = h(x, y)$ en $(1, 1, z_o)$, halle el punto en que Π_o interseca al eje x.

3. (16/11/19-T1-5) Siendo $z = f(u, v)$ con $(u, v) = (x + y2, xy)$, resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y que las derivadas direccionales $f'((5, 2), (1, 0)) = 8$ y $f'((5, 2), (0{,}8, 0{,}6)) = 4$, calcule el valor que debe tener z o para que la recta normal a la superficie de ecuación $z = h(x, y)$ en el punto $(1, 2, z_o)$ tenga un punto en común con el eje x.

4. (02/07/19-T1-5) Siendo $z = f(x - 2y, 2y - x)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, analice si $2z'_x + z'_y = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. (10/06/19-T?-5) Sea $h(x, y) = f(g(x, y))$ con f, g diferenciables en $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que $\nabla h(1, 2) = (-2, 10)$ y que $\vec{g}(x, y) = (x^2y, x + 2y)$, calcule la máxima derivada direccional de f en $(2, 5)$ e indique en qué dirección se produce dicha derivada máxima.

6. (13/05/19-T?-5) Sea la superficie Σ de ecuación $X = h(u, v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $h(u, v) = f(g(u, v))$, donde la matriz jacobiana de f es $D\vec{f}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \beta & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{g}(u, v) = (uv, u^2)$. Analice si la recta normal a Σ en $h(1, 2) = (2, 3, 5)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $x+y = 13$.

7. (11/05/19-T1-3) Sean $f, \vec{g}$ definidos en $\mathbb{R}^2$ con $f(u,v) = u^2v + v^3$ y $D\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y-2) & x\cos(y-2) \\ 3 & 2y \end{pmatrix}$ la matriz jacobiana de $\vec{g}$. Sabiendo que $g(1,2) = (3,1)$ y que $h = f \circ g$, halle los versores según los cuales la función h tiene derivadas direccionales máxima, mínima y nula en el punto $(1,2)$ y calcule los valores de dichas derivadas.

8. (11/12/18-T1-5) Sea S la superficie de ecuación $z = f(g(x,y))$ con $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Si $g(x,y) = (x^2y, xy)$, $f(0,0) = 4$ y para todo punto A y versor $\hat{r} = (u,v)$ la derivada direccional $f'(A,\hat{r}) = 2u + 4v$, halle los puntos de S donde su plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy).

9. (17/11/18-T1-3) Dada $h(x,y) = f(x^2 - y^2)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$, calcule una aproximación lineal para $h(2{,}02, 0{,}99)$ sabiendo que la curva de ecuación $v = u^2 + f(u^2 - 1)$ del plano uv tiene recta tangente horizontal (paralela al eje u) en el punto $(2,5)$.

10. (22/10/18-T?-3) Sea $h(x,y) = f(g(x,y))$ con $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Sabiendo que el punto $(1,2,7)$ pertenece a la gráfica de h, que $g(x,y) = (xy, 2x - y)$ y que $\nabla h(1,2) = (4,4)$, calcule una aproximación lineal para $f(1{,}98, 0{,}01)$.

11. (20/10/18-T1-5) Sea $h(x,y) = f(x^2, xy)$ siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que $\nabla f(4,2) = (1,3)$, halle la dirección para la cual la máxima derivada direccional de h en $(2,1)$ es máxima y calcule el valor de dicha derivada.

12. (2018) Sabiendo que $h(x,y) = f(\vec{g}(x,y))$ admite la aproximación lineal $h(x,y) \approxeq 3x + 2y - 1$ en un entorno de $(1,2)$ y que $\vec{g}(x,y) = (x - y, 2xy)$, con $f \in C^1$, calcule la máxima derivada direccional de f en el punto $(-1,4)$ e indique en qué dirección se produce dicha derivada.

13. (2018) Dada $h(x,y) = f(x^2 - y)$ con $f \in C^1(R)$ tal que la curva de ecuación $v = f(u)$ admite recta tangente $u + 2v = 5$ en el punto $(1, v_0)$, calcule una aproximación lineal para $h(0{,}9, 0{,}2)$.

3.2. Teorema de la función implícita

1. (21/11/18-T?-2)Siendo que $z = f(u,v)$ con $(u,v) = (x^2, 2xy)$, resulta $z = h(x,y)$. Calcule una aproximación lineal para $h(2{,}02, 2{,}98)$ sabiendo que f queda definida implícitamente mediante la ecuación $uv + z + ln(z + u - 5) - 50 = 0$

2. (19/11/19-T?-3) Verifique que existe z o para el cual la ecuación $xyz + xz2 + \ln(2z + y - 4) - 6 = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$ en un entorno de $(1, 1)$, calcule la derivada direccional máxima de f en $(1, 1)$ e indique en qué dirección se produce dicha derivada máxima.

3. (21/10/19-T1-4) Siendo $z = f(u)$ con $u = x^2 + 2xy$ resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que f queda definida implícitamente mediante la ecuación $zu + e^{z-2} - 15 = 0$ en un entorno del u o adecuado, calcule una aproximación lineal para $h(1{,}02, 2{,}99)$.

4. (19/10/19-T1-5) Calcule una aproximación lineal de $f(1{,}98, 0{,}99)$, verificando previamente que la ecuación $3xyv + \ln(1 + 2v - xy) - 6 = 0$ define implícitamente a $v = f(x, y)$ en un entorno de un punto (x_o, y_o) apropiado.

5. (02/07/19-T1-2) Sea $h(x, y) = xy^2 + g(x)$, donde g queda definida en forma implícita en un entorno de $x_o = 2$ mediante la ecuación $ux + \ln(u - x)/x - 6 = 0$. Calcule un valor aproximado de $h(1{,}98, 2{,}02)$ usando una aproximación lineal.

6. (10/06/19-T?-3) Dada la ecuación $xz + yz + ex + z - 3 - 7 = 0$, analice si define implícitamente a $z = f(x, y)$ en un entorno de $(1, 2)$. En caso afirmativo, calcule aproximadamente $f(0{,}98, 1{,}99)$ mediante una aproximación lineal.

7. (08/06/19-T1-5) Dada $z = u + v^2u^3$ con $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = f(x, y) \end{cases}$ resulta $z = h(x, y)$. Sabiendo que f queda definida en forma implícita mediante la ecuación $xv + \ln(yv - 1) - 1 = 0$ en un entorno de $(x_o, y_o) = (1, 2)$, halle una ecuación para la recta normal a la superficie $z = h(x, y)$ en el punto $(1, 2, z_o)$.

8. (11/05/19-T1-3) Sea Σ la superficie de ecuación $z = xf(x, y)$ con (x, y) en un entorno de $A = (2, 1)$. Halle el punto en el que la recta normal a Σ en $(2, 1, z_o)$ interseca al plano yz, sabiendo que la función f queda definida implícitamente mediante la ecuación $ux + e^{x+2y+u-7} - 7 = 0$.

9. (11/12/18-T1-2) Verifique que la ecuación $x^2yz + xz + \ln(z + 2x - 3) - 6 = 0$ define implícitamente $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$ y calcule $f(1{,}02, 1{,}98)$ mediante una aproximación lineal.

10. (17/11/18-T1-3) El sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy + e^{uz-2} + z - 4 = 0 \\ xz + e^{yz-2} + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ se cumple en $(x0, y0, z0, u0) = (1, 1, 2, 1)$. Verifique que dicho sistema define implícitamente $z = f(x, y)$ y $u = g(x, y)$ en un entorno de $(1, 1)$ y halle una ecuación para el plano tangente a la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ en $(1, 1, f(1, 1))$.

11. (20/10/18-T1-3) Analice si la ecuación $x^2z+\ln(2x+y+z-6)+yz-10 = 0$ define implícitamente a la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ con (x, y) en un entorno del punto $(2, 1)$. En caso afirmativo, estudie si la recta normal a S en $(2, 1, f(2, 1))$ tiene algún punto en común con el plano de ecuación $z = y$.

12. (2018) Siendo $h(x, y) = f(x - y^2, 2x + y)$ calcule aproximadamente $h(1{,}02, 0{,}99)$, usando aproximación lineal, sabiendo que $w = f(u, v)$ queda definida implícitamente mediante la ecuación $wu+\ln(w+v-u) = 0$ en un entorno de $(u_0, v_0) = (0, 3)$.

13. (2018) Dada $y = f(x, z)$ definida implícitamente por $xy + xz + \ln(1 + yz) - 4 = 0$ en un entorno de $(x0, z0) = (2, 0)$, calcule aproximadamente $f(1{,}98, 0{,}03)$ mediante Taylor de 1º orden. El taylor de 1º orden es una aproximación lineal.

14. (2018) Sean la ecuación $ve^{uw} + 2vw = 9$ que define implícitamente a $w = f(u, v)$ en un entorno del punto $(u_0, v_0) = (0, 3)$ y $h(x, y) = f(2x + y, x - y)$. Demuestre que el plano tangente a la gráfica de h en el punto $(1, -2, h(1, -2))$ es paralelo a uno de los ejes coordenados.

4. TPV

4.1. Polinomio de Taylor

1. (08/06/19-T1-3) Siendo $f(x, y) = 2x^2e^{3y+x-5}$, calcule una aproximación de $f(1{,}98, 1{,}01)$ con Taylor de 2º orden.

2. (13/05/19-T?-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/f(x, y) = xy - y + y\ln(x) + 3$, calcule aproximadamente $f(0{,}95, 0{,}02)$ con Taylor de 2º orden y analice si el polinomio correspondiente produce un extremo local en $(1, 0)$. Requiere algunos temas de extremos libres.

3. (20/10/18-T1-4) Sea $p(x, y)$ el polinomio de Taylor de 2º orden que permite aproximar $f(x, y) = 6x^2 + xy^2$ en un entorno del punto $(1, 2)$.

Analice si p produce extremos locales, en caso afirmativo indique en qué punto(s) y cuál es el valor de dicho(s) extremo(s).Requiere algunos temas de extremos libres.

4. (de 2018) Sea $h(x, y) = xf(x, y) + 2y^2 - 4y$, sabiendo que $p(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - y - 1$ permite aproximar los valores de f en un entorno de $(0, 1)$ por Taylor de $2^{\underline{o}}$ orden, analice si $h(0, 1)$ es extremo local; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor. Requiere algunos temas de extremos libres.