

Ejercicios de parcial por tema

Juan Cristi

28 de mayo de 2020

Esta es una recopilación de ejercicios de parcial de la materia Análisis Matemático II de la FIUBA ordenados por tema.

En rojo figuran comentarios a los ejercicios.

Los ejercicios en azul son la versión en el tema 2 de ejercicios anteriores, por lo que pueden obviarse. Los dejo para el que quiera entender cuanto varían los ejercicios cuando cambia el tema.

Al inicio de cada ejercicio figura la fecha del parcial, el tema y el número de tal ejercicio.

1. TPII

1.1. Dominio, conjuntos de nivel, y otros conjuntos definidos a partir de funciones

1. (10/12/19-T1-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{xy-x}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f .
2. (10/12/19-T2-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2-y}}{\sqrt{xy-y}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f .
3. (21/11/18-T?-3) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y) = 2x^2y - y^2$, **determine** y **grafique** el conjunto H del plano xy en cuyos puntos la función $h = f'_x f'_y$ resulta con valores positivos y **analice** si H es conexo.
4. (19/11/19-T?-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{(x-1)y}}{\sqrt{x-y}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D y el conjunto de nivel 1 de f .

5. (16/11/19-T1-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy-x^3}}{\sqrt{x^2+y-2}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de punto frontera de D (Uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).
6. (16/11/19-T2-2) Dada $f(x, y) = \frac{\sqrt{xy-y^3}}{\sqrt{x+y^2-2}}$, **determine** y **grafique** su dominio natural D e **indique** un ejemplo de punto interior a D y dos de punto frontera de D (Uno perteneciente y otro que no pertenezca a D).
7. (21/10/19-T1-2) Sea $f(x, y) = \frac{\ln(4-x^2-y^2)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural D . **Determine** y **grafique** D y el conjunto de nivel 0 de f .
- 7-bis. (Este ejercicio surgió como un error al copiar el ejercicio 7. Lo dejo por compatibilidad con versiones anteriores) Sea $f(x, y) = \frac{\ln(xy-x^3)}{y^2-x^2}$ definida en su dominio natural D . **Determine** y **grafique** D y el conjunto de nivel 0 de f .
8. (19/10/19-T1-2) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x, y) = (\ln(y-x), \ln(x^2-xy))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\bar{f}'_x(x, y) + \bar{f}'_y(x, y) = (0, -1)$.
9. (19/10/19-T1-2) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \bar{f}(x, y) = (\ln(y-x), \ln(y^2-xy))$ donde D es su dominio natural. **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $\bar{f}'_x(x, y) + \bar{f}'_y(x, y) = (0, 1)$.
10. (02/07/19-T1-4) Sea $f(x, y) = \sqrt{\ln(2x+y-1)}$ definida en su dominio natural D . **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x, y) < \ln(3)$.
11. (02/07/19-T2-4) Sea $f(x, y) = \sqrt{\ln(x+2y-1)}$ definida en su dominio natural D . **Determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos S donde resulta $f^2(x, y) < \ln(3)$.
12. (10/06/19-T?-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \sqrt{xy-y}$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $y = x^2 + 1$ donde f queda definida.
13. (08/06/19-T1-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} / f(x, y) = \ln(x+y^2)$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $x = y^2 - 21$ donde f queda definida.

14. (08/06/19-T2-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y) = \ln(y + x^2)$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos M de la curva de ecuación $y = x^2 - 21$ donde f queda definida.
15. (13/05/19-T?-1) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Dada $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f'_y(x, y) = 1$.
16. (11/05/19-T1-1) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Dada $f(x, y) = \ln(x^2 y)$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y) = 0$.
17. (11/05/19-T2-1) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Dada $f(x, y) = \ln(xy^2)$ definida en su dominio natural D , **determine** y **grafique** D y el conjunto de puntos H para los cuales $f''_{xx}(x, y) - f''_{yy}(x, y) = 0$.
18. (11/12/18-T1-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/\vec{f}(x, y) = (\ln(y - x^2), \sqrt{9 - y - x^2})$ donde D es el dominio natural de \vec{f} , **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.
19. (11/12/18-T2-4) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/\vec{f}(x, y) = (\ln(x - y^2), \sqrt{9 - x - y^2})$ donde D es el dominio natural de \vec{f} , **determine** y **grafique** el mencionado dominio D y el conjunto H en cuyos puntos alguna de las componentes del campo resulte nula.
20. (17/11/18-T1-1) **Este ejercicio incluye temas del TPIII y del TPV** Siendo $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3xy^2$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinante hessiano $H(x, y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor. **No resolver la parte en verde hasta llegara a extremos en el TP V.**
21. (17/11/18-T2-1) **Este ejercicio incluye temas del TPIII y del TPV** Siendo $f(x, y) = y^3 - 6xy + 3yx^2$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, **grafique** el conjunto de puntos H^+ del plano xy para el cual el determinante hessiano $H(x, y)$ de f resulta positivo y **analice** en cuáles de dichos puntos la función f produce extremo local, **clasificándolo** y **calculando** su valor. **No resolver la parte en verde hasta llegara a extremos en el TP V.**
22. (22/10/18-T?-5) Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{\ln(y - x)}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio

D y el conjunto de nivel 0 de f . **Indique** un ejemplo de punto exterior y otro de punto frontera de D .

23. (20/10/18-T1-1) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y) = \frac{\ln(x-y)}{\sqrt{x-1}}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f . **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de D .
24. (20/10/18-T2-1) Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y) = \frac{\ln(y-x)}{\sqrt{y-1}}$, donde D es el dominio natural de la función. **Determine** y **grafique** el dominio D y el conjunto de nivel 0 de f . **Indique** un ejemplo de punto interior y otro de punto frontera de D .

1.2. Límites y continuidad

1. **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice si f es continua en $(0, 0)$, en base a su conclusión **opine** con fundamento si la función puede tener derivadas parciales continuas en un entorno de dicho punto.

2. (02/07/19-T1-3) **Este ejercicio incluye temas del TPIII** Siendo $f(x, y) = (e^{x^2+y^2} - 1)/(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, determine $f(0, 0)$ de manera que f resulte continua en el origen y, en ese caso, analice la derivabilidad de f en $(0, 0)$ según distintas direcciones.

2. TPIII

2.1. Curvas

1. (10/12/19-T1-3) **Este ejercicio se puede resolver más fácilmente con temas más avanzados** Sea C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\Sigma_1 : x^2y + xz = 3 \text{ y } \Sigma_2 : xy - z^2 = 1.$$

Si r o es la recta tangente a C en $P = (1, 2, 1)$, calcule la distancia entre los dos puntos A y B donde r o interseca a la superficie de ecuación $z = x^2$.

2. (19/11/19-T?-4) Sea C la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2 + t, t - t^3, 2t^4)$ con $t \in \mathbb{R}$. Si r_A y r_B son las rectas tangentes a C en los puntos $A = (2, 0, 2)$ y $B = (0, 0, 2)$, analice si existe un plano que contenga a ambas rectas.
3. (02/07/19-T1-1) Considere la curva C de ecuación $\vec{X} = (t^2 - t, 2t + 2, t^2)$ con $t \in \mathbb{R}$ y sea Π_o el plano normal a C en el punto $(0, 4, 1)$. Determine cuál es el punto de Π_o más cercano al origen de coordenadas y calcule la distancia desde dicho punto al origen.
4. (08/06/19-T1-2) Sea la curva C incluida en la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u + v, u - v, u + v + 2(u - v)^2)$ con $H(-2, -1) = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que la proyección de C sobre el plano xy tiene ecuación $x + y = 1$, analice si la recta tangente a C en $(2, -1, 4)$ tiene algún punto en común con el plano xz .
5. (11/05/19-T1-2) Siendo C la curva de ecuación $\vec{X} = (t^4 - 2t^2, t^3 - 2t, t^3 - 3t)$ con $t \in \mathbb{R}$, halle las ecuaciones de las rectas tangentes a C en aquellos puntos donde dichas rectas son paralelas al “eje y ” y analice si existe un plano que contenga a dichas rectas; en caso afirmativo halle una ecuación para ese plano.
6. (20/10/18-T1-2) **Este ejercicio se termina de resolver con temas más avanzados.** Sabiendo que los puntos de la curva de ecuación $X = (t^2, 2t + 1, 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$ pertenecen a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, halle una aproximación lineal para $f(0,98; 3,01)$ teniendo en cuenta que $f'_x(1, 3) = 5$.
7. (De 2018) Sea C una curva cuyos puntos pertenecen a la superficie de ecuación $x^2z - y^2 + z = 4$. Sabiendo que la proyección ortogonal de C sobre el plano xy tiene ecuación $y = x^2$, analice si la recta tangente a C en $(2, 4, z_0)$ interseca en algún punto al eje z .
8. (De 2018) Dada la curva C definida como intersección de las superficies σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : z &= x^2 + y + 1 && \text{con } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Sigma_2 : \vec{X} &= (u, u^2, v) && \text{con } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

analice si la recta tangente a C en $(2, y_0, z_0)$ tiene algún punto en común con el plano xz .

9. (De 2018) Halle el punto medio del segmento \overline{AB} , sabiendo que sus puntos extremos (A y B) son aquellos donde la curva de ecuación $\vec{X} = (t^2, 2t, t^4 + 4t)$ con $t \in \mathbb{R}$ interseca a la superficie de ecuación $\vec{X} = (u + v, u - v, 4uv)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
10. (De 2018) Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva incluida en la superficie Σ de ecuación $z = xy + 4$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sabiendo que una ecuación vectorial para C es $X = (t - 1, t + 1, g(t))$ con $t \in \mathbb{R}$, halle una ecuación para el plano normal a C en $(2, y_0, z_0)$.

2.2. Derivadas parciales

De la sección 1.1, los ejercicios: 3, 8, 9, 15, 16, 17.

De la sección 1.2, los ejercicios: 1, 2.

1. (17/11/18-T1-2) Dada

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x^3 + xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$. Analice si f admite derivada parcial de 1º orden respecto de la variable x en todo punto de su dominio.

2.3. Derivadas direccionales

1. (21/10/19-T?-5) Sabiendo que $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y que $f(0, 0) = 0$, **verifique** que f admite derivada direccional en toda dirección en $(0, 0)$ y **determine** los versores para los que dicha derivada resulta nula.
2. (13/05/19-T?-3) Siendo $f(x, y) = \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$, verifique que f admite derivada direccional en $(0, 0)$ en toda dirección e indique si en base a lo obtenido se puede opinar con fundamento acerca de la diferenciabilidad de f en el origen de coordenadas.

3. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(y)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0, 0)$.

4. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analice la derivabilidad de f según distintas direcciones en el punto $(0, 0)$.

2.4. Aproximación lineal

- (16/11/19-T1-3) La curva de ecuación $v = f(u)$, en el plano uv , tiene recta tangente de ecuación $2u + v = 8$ en el punto $(2, v_0)$. Siendo $h(x, y) = x2y + f(xy)$, calcule aproximadamente $h(0,98, 2,03)$ mediante una aproximación lineal.

2.5. Plano tangente y recta normal

- (10/12/19-T1-1) Sea Π_0 el plano tangente en $(10, 2, 5)$ a la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (u^2 + v, u - v, u + 2v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, halle una ecuación para la recta que contiene a los puntos donde Π_0 interseca a los ejes x e y .
- (21/11/18-T?-4) La superficie Σ de ecuación $z = x$ y admite la recta normal r_0 en el punto $A = (1, 2, z_0)$, dicha recta interseca a σ en otro punto B . Calcule la longitud del segmento cuyos puntos extremos son A y B .
- (21/11/18-T?-5) Dada la superficie Σ de ecuación $\vec{X} = (uv, u+v, 2u-v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, analice si el plano tangente a Σ en el punto $A = (6, 5, 1)$ tiene puntos en común con la curva C de ecuación $\vec{X} = (t^2, \frac{3-t}{2}, \frac{21+7t}{2})$ con $t \in \mathbb{R}$.
- (16/11/19-T1-1) Dada la superficie Σ de ecuación $x^2y + xz = 0$, siendo r_A y r_B sus rectas normales en los puntos $A = (1, -1, 1)$ y $B = (-1, 1, 1)$ respectivamente, verifique que dichas rectas se intersecan en un punto y halle una ecuación para el plano que las contiene.

5. (21/10/19-T1-1) Sea Σ la superficie de ecuación $\vec{X} = (uv, 2u^2+v, u-v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. **Halle** ecuaciones para la recta normal (n_o) y el plano tangente (Π_o) a Σ en el punto $A = (2, 4, -1)$ y **determine** los puntos de n_o cuya distancia a Π_o resulte igual a $2\sqrt{38}$.
6. (19/10/19-T1-3) Sea r_o la recta normal a la superficie de ecuación $x = yz^2 + z$ en el punto $(2, 1, 1)$. Determine los puntos en los que r_o interseca a los planos coordenados y halle la ecuación de un plano que contenga a dichos puntos y al origen de coordenadas.
7. (08/06/19-T1-1) **Este ejercicio necesita temas de la guía 5 para resolverse completamente.** Dada la superficie Σ de ecuación $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 8$, halle los puntos de Σ en los que el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy) y analice en cuáles de dicho puntos el valor de f es un extremo local indicando, en ese caso, si es máximo o mínimo local.
8. Sean C_1 y C_2 dos curvas incluidas en la superficie regular S . Sabiendo que ambas curvas contienen al punto $A = (4, 4, 3)$ y que sus correspondientes ecuaciones vectoriales son:

$$C_1 : \vec{X} = (2t, t^2, 2t-1) \text{ con } t \in \mathbb{R} \text{ y } C_2 : \vec{X} = (2u-2, u+1, u^2) \text{ con } u \in \mathbb{R},$$
analice si la recta normal a Σ en A tiene algún punto en común con el plano $x + y + z = 27$.
9. (22/10/18-T?-2) Dada la superficie Σ de ecuación $z = xy - 3xy + y + 4$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, halle los puntos de Σ donde el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy) y analice si dichos puntos son colineales (pertenecen a la misma recta).
10. (De 2018) Sabiendo que la recta normal a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(5, y_0, z_0)$ admite la ecuación $\vec{X} = (1 + 2u, 3u, u + 4)$ con $u \in \mathbb{R}$, calcule una aproximación lineal para $f(4, 98; 6, 01)$.

2.6. Gradiente y sus propiedades

1. (19/10/19-T1-4) Siendo $f(x, y) = x + \sin(xy)$, halle los versores \hat{r} tales que la derivada direccional de f en $A = (3, 0)$ según \hat{r} resulte igual al 50 % de la máxima derivada direccional en dicho punto.
2. (10/06/19-T?-2) Sea r_o la recta tangente en $(1, 2, 1)$ a la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones $z + 4 =$

$x^2z + y^2$ y $xz^2 + y^2 = 5$ respectivamente. **Determine** los puntos donde r_o interseca a la superficie de ecuación $z^2 = x + y$.

3. (13/05/19-T?-2) Siendo C la curva definida por la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 cuyas ecuaciones son

$$\Sigma_1 : 3xy + \ln(x + yz - 6) - 2z = 0 \text{ y } \Sigma_2 : z = x^2y + e^{xy-2},$$

analice si el plano normal a C en $A = (1, 2, z_o)$ tiene algún punto en común con el eje x .

4. (17/11/18-T1-5) Halle el punto (x_0, y_0, z_0) donde la recta definida por la intersección de los planos de ecuaciones $x - y + z = 7$ y $2y - x + 3z = 18$ es normal a la superficie de ecuación $z = x + yx^2$.
5. (22/10/18-T?-1) Siendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}/f(x, y, z) = e^{(2x+y+z-7)}$, analice si la recta normal al conjunto de nivel 1 de f en $(1, 2, 1)$ interseca en algún punto al plano de ecuación $x = 3z$.
6. (22/10/18-T?-4) Analice si la intersección de las superficies Σ_1 y Σ_2 de ecuaciones:

$$\Sigma_1 : z = 2y^2 - x^2 \tag{1}$$

$$\Sigma_2 : x \ln(yz) + y \ln(xz) = z - 1 \tag{2}$$

define una curva C en un entorno del punto $A = (1, 1, 1)$. En caso afirmativo, determine si existe algún punto en el que la recta tangente a C en A interseca al eje x .

7. (De 2018) Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sabiendo que $X = (u, v^2, v)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es una ecuación de la superficie de nivel 1 de f , que para $A = (2, 1, 1)$ resulta $f(A) = 1$ y que la derivada direccional $f'(A, \hat{r}) = 3$ para $\hat{r} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, calcule el valor de la mínima derivada direccional de f en el punto A .