PROYECCION ORTOGONAL Y BASES ORTOGONALES

Proyección ortogonal de un vector sobre una recta

- Sea $v \in \mathbb{R}^n$. La proyección ortogonal de V sobre la recta (que pasa por el origen) generada por el vector no nulo $S \in \mathbb{R}^n$ es el vector:

$$P_s(v) = \frac{\vec{s} \cdot \vec{v}}{\vec{s} \cdot \vec{s}} \cdot \vec{s} \qquad s \cdot (V - P_s(v)) = 0$$

- La distancia mínima de V a la recta generada por s esta dada por: $D_{min} = |V - P_s(v)|$

Definición:

- Los n vectores no nulos $b_1, \ldots, b_n$ son mutuamente ortogonales si todo par de vectores son ortogonales $\Rightarrow b_i \cdot b_j = 0 \quad \forall\, i \neq j$
(si son no nulos y ortogonales son L.I).

Una base ortogonal $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de un E.V V es una base formada por vectores mutuamente ortogonales.

Una base ortonormal $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de un E.V V es una base ortogonal en la que ademas los n vectores b_i tienen longitud 1.

$$b_i \cdot b_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \qquad i,j = 1, \ldots, n$$

MÉTODO DE ORGANIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

Dado un conjunto $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ L.I de m vectores $v \in V$ que generan un subespacio $S_m \subset V$ de dimensión m:

$$k_1 = V_1$$

$$k_2 = V_2 - P_{k_1}(V_2) = V_2 - \frac{k_1 V_2}{k_1 k_1} k_1$$

$$k_3 = V_3 - P_{k_1}(V_3) - P_{k_2}(V_3) = V_3 - \frac{k_1 V_3}{k_1 k_1} k_1 - \frac{k_2 V_3}{k_2 k_2} k_2$$

$\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ forman una base ortogonal de S_m

Definición:

- Dos subespacios S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales si todo vector de S_1 es ortogonal a todo vector de S_2, es decir, si:

  $\forall v \in S_1$ y $\forall w \in S_2 \rightarrow v.w = 0$

El complemento ortogonal de un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ se define como el conjunto de vectores de R ortogonal a todo vector de S.

$S_\perp = \{w \in \mathbb{R}^n / v.w = 0 \ \forall v \in S\}$

La proyección ortogonal de un vector V sobre S es la suma de las proyecciones ortogonales de V sobre los vectores de una base ortogonal S.

$P_s(v) = P_{k_1}(v) + \ldots + P_{k_m}(v)$ $\quad$ $B_s = \{k_1, \ldots, k_m\} \rightarrow$ base ortogonal

será el vector mas cercano de S a V.

$D_{min} = |V - P_s(v)|$

$DimS + DimS\perp = n$

$n = DimV$