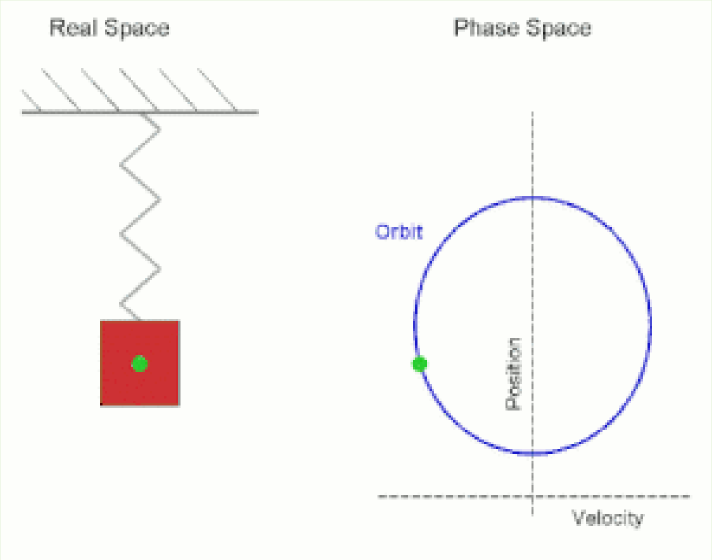
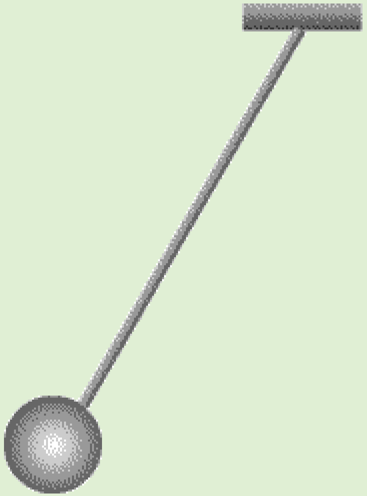
Movimiento Armónico Simple (MAS)



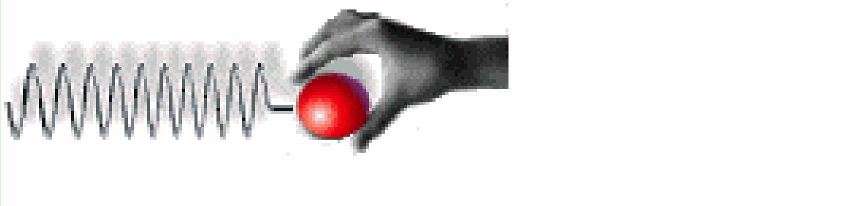
Resortes

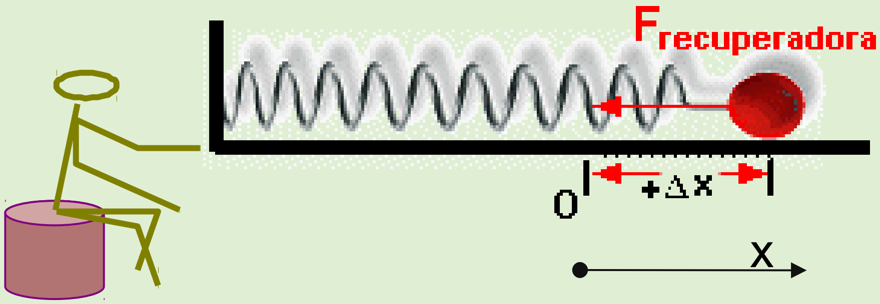


Péndulos

Características

- **Periódico**: todas la variables cinemáticas repiten sus valores a intervalos iguales de tiempo (T: período, tiempo que se tarda en completar un ciclo)
- **Oscilatorio**: El apartamiento de la posición de equilibrio pasa periódicamente por un máximo y un mínimo. Máximo apartamiento: amplitud (A)
- Oscilatorio y periódico independientemente del tiempo transcurrido desde el inicio (A=cte)





Una bola que está adosada a un resorte sobre un piso liso, es apartada de la posición de equilibrio del resorte y luego es liberada.

<u>Sistema bajo estudio:</u> **bola**

<u>Sistema de referencia:</u> **SRI** (niño sentado)

<u>Sistema coordenado:</u> **ejes cartesianos (x,y) y reloj**

- Analizamos las fuerzas que actúan en x una vez liberada la bola.

$$\sum F_x = F_{resorte} = -kx = ma_x$$

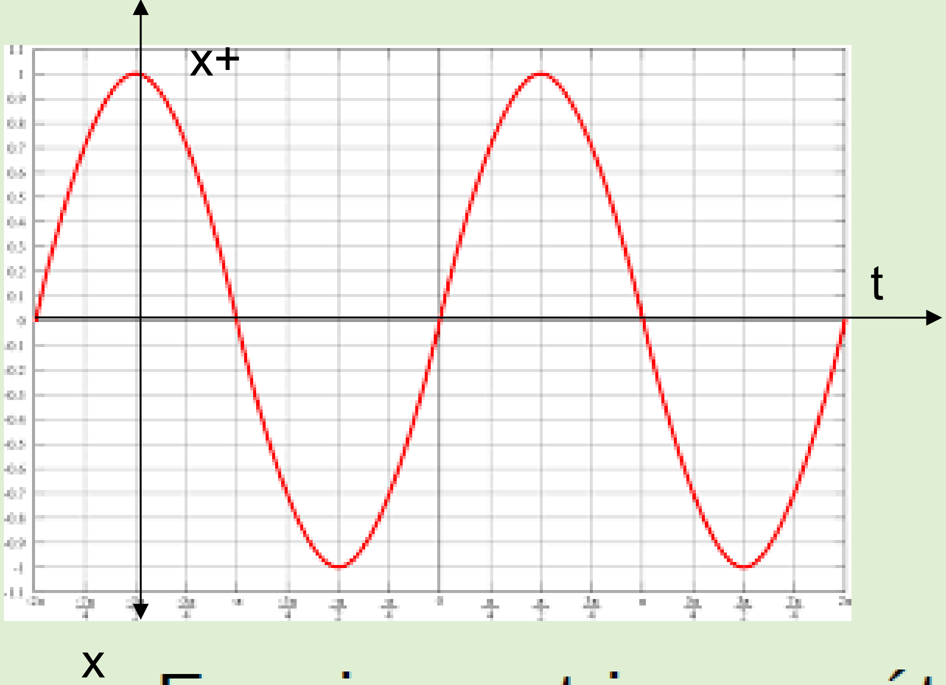
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = k/m$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Ecuación diferencial

Funciones trigonométricas seno y coseno

$$x(t) = sen(at) \qquad x(t) = \cos(at)$$

$$x'(t) = a\cos(at) \qquad x'(t) = -a\,sen(at)$$

$$x''(t) = -a^2 sen(at) \qquad x''(t) = -a^2\cos(at)$$

- La solución de la ec. diferencial del MAS es;

$$\boxed{x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)}$$

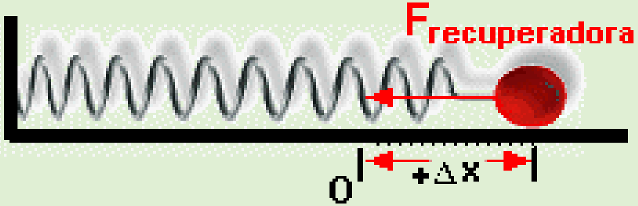
$$-A\omega^2 sen(\omega t + \phi_0) + \omega^2 A\,sen(\omega t + \phi_0) = 0$$

¿Qué representan A y Φ0?

¿Cómo se obtienen?

A partir de las condiciones a un tiempo dado.

- A tiempo t=0, la bola se encuentra a una distancia **Δx** y tiene velocidad **nula** entonces



$$x(0)=\Delta x = A\,sen(\omega 0+\phi_0)=A\,sen(\phi_0)$$

$$v_x(0)=0=A\,\omega\cos(\omega 0+\phi_0)=A\,\omega\cos(\phi_0)$$

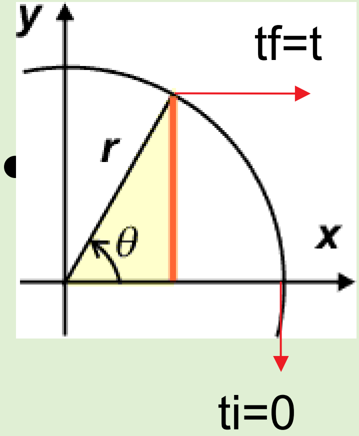
A≠0 y Φ_0≠0 $\longrightarrow$ $\cos(\phi_0)=0$ $\longrightarrow$ $\phi_0=\frac{2n+1}{2}\pi$

$sen(\frac{2n+1}{2}\pi)=1$ $\longrightarrow$ $\Delta x = A$

A amplitud de oscilación

Φ_0 ángulo o fase inicial

- Los argumentos del seno y coseno son ángulos, luego ωt tienen que representar un ángulo.



- Desde t=0 a un cierto t, se describe un ángulo θ, que en realidad es un $\Delta\theta=\theta-\Phi$ con Φ en este caso nulo.

- Se define la **frecuencia angular** como $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ tal que ωt representa al ángulo que se barre.

- **ω**: depende del sistema (valor de la masa y de la constante del resorte)

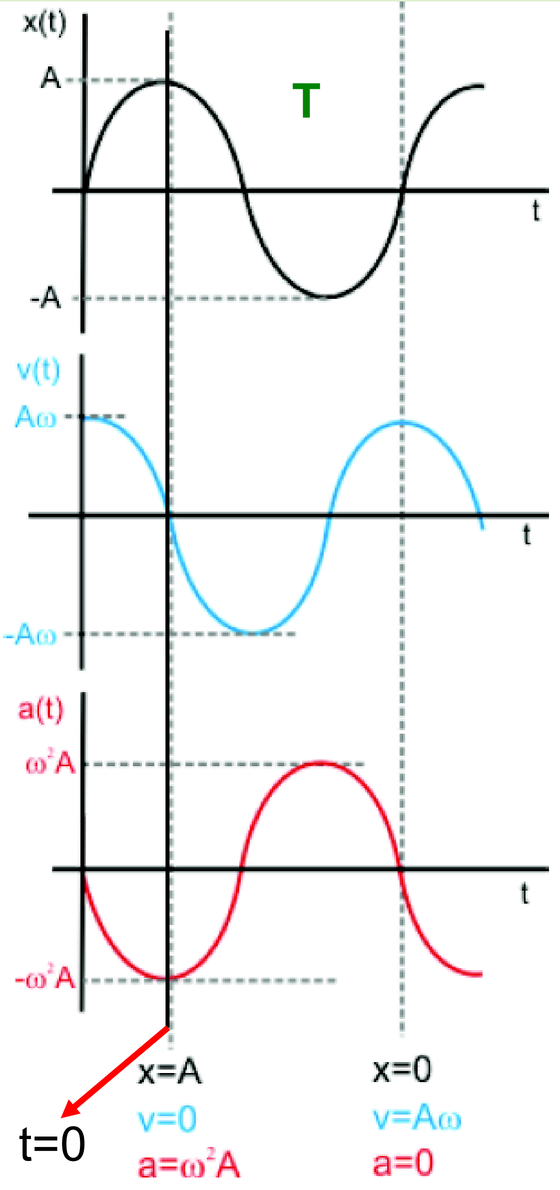
- **A** y **Φ0** : dependen de las condiciones dadas a un tiempo determinado (normalmente a tiempo t=0, condiciones iniciales)

- **T** (período): tiempo necesario para realizar una oscilación completa.

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)$$

$$v_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$a_x(t) = -A\omega^2 sen(\omega t + \phi_0)$$



A t=0

El desplaza-miento es máx.

La velocidad nula.

La acelera-ción es máx. c/ sentido opuesto a x.

- x(t)=x(t+**T**)

$$x(t)=A\,sen(\omega t+\phi_0)=x(t+T)=A\,sen(\omega(t+T)+\phi_0)$$

$$\omega T=2\pi \quad \longrightarrow \quad \boxed{T=2\pi\sqrt{m/k}=\frac{1}{f}}$$

siendo ***f*** la frecuencia

$$\sum F_c = T - mg\cos\theta = ma_c = m\omega^2 L$$

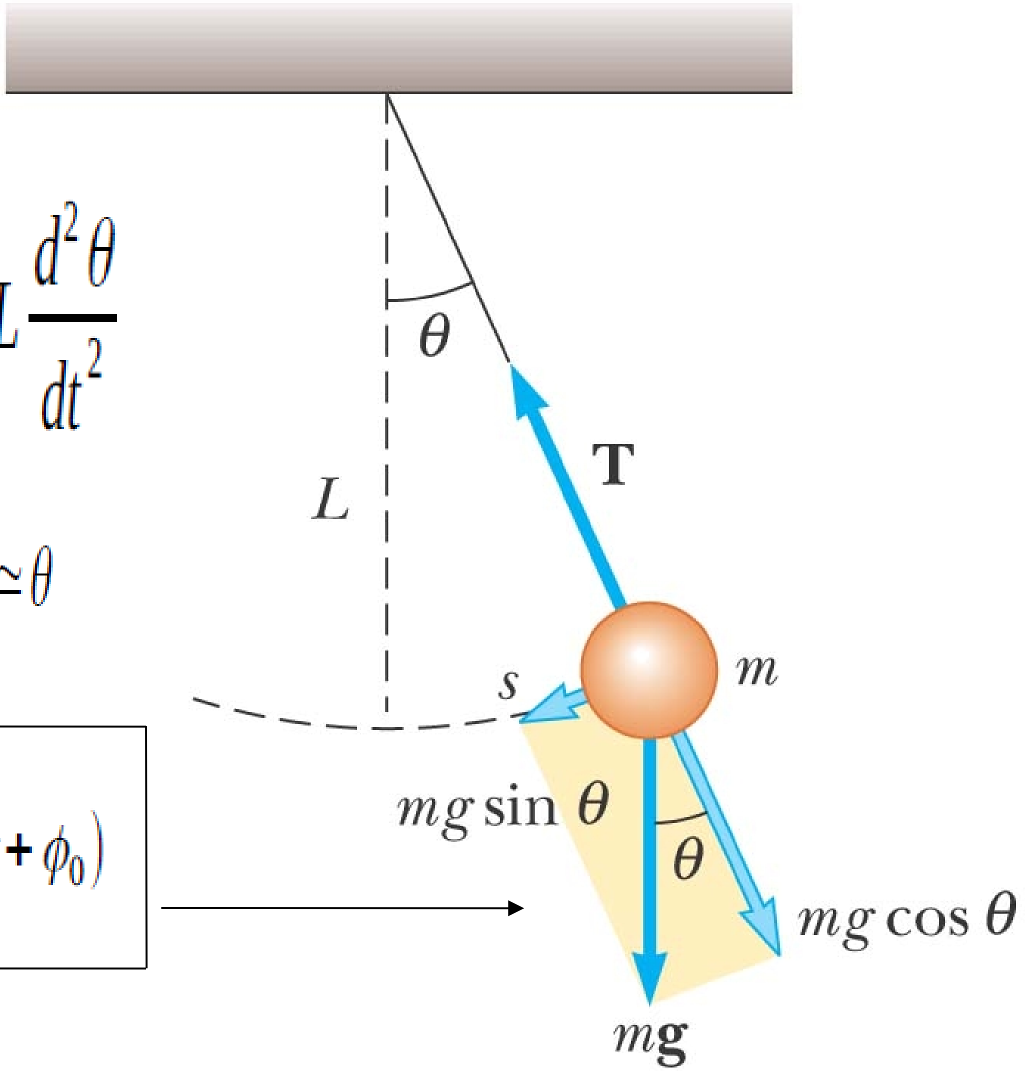
$$\sum F_t = -mg\,sen\,\theta = ma_t = m\alpha L = m\frac{d(\omega L)}{dt} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-g\,sen\,\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

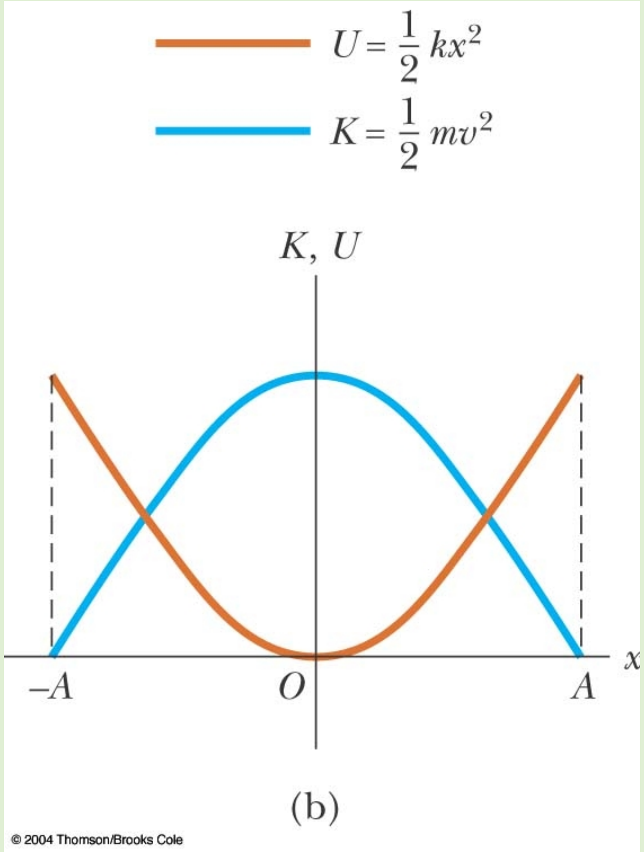
$$\theta \ll 1 \Rightarrow sen\,\theta \simeq \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \phi_0\right)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

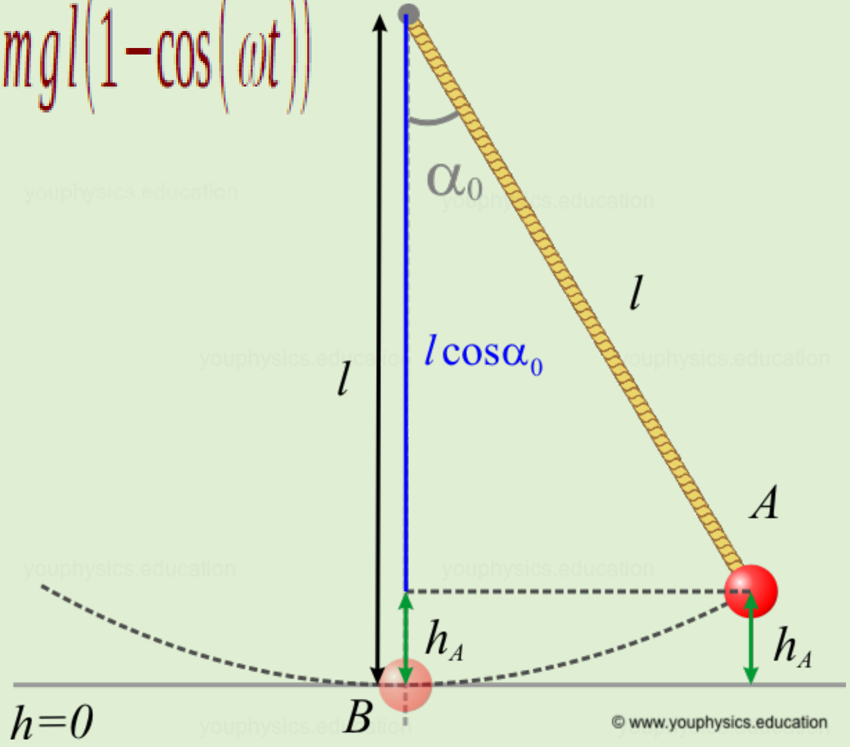


- En un MAS, las fuerzas responsables del movimiento son **CONSERVATIVAS** → $\Delta Em = 0$



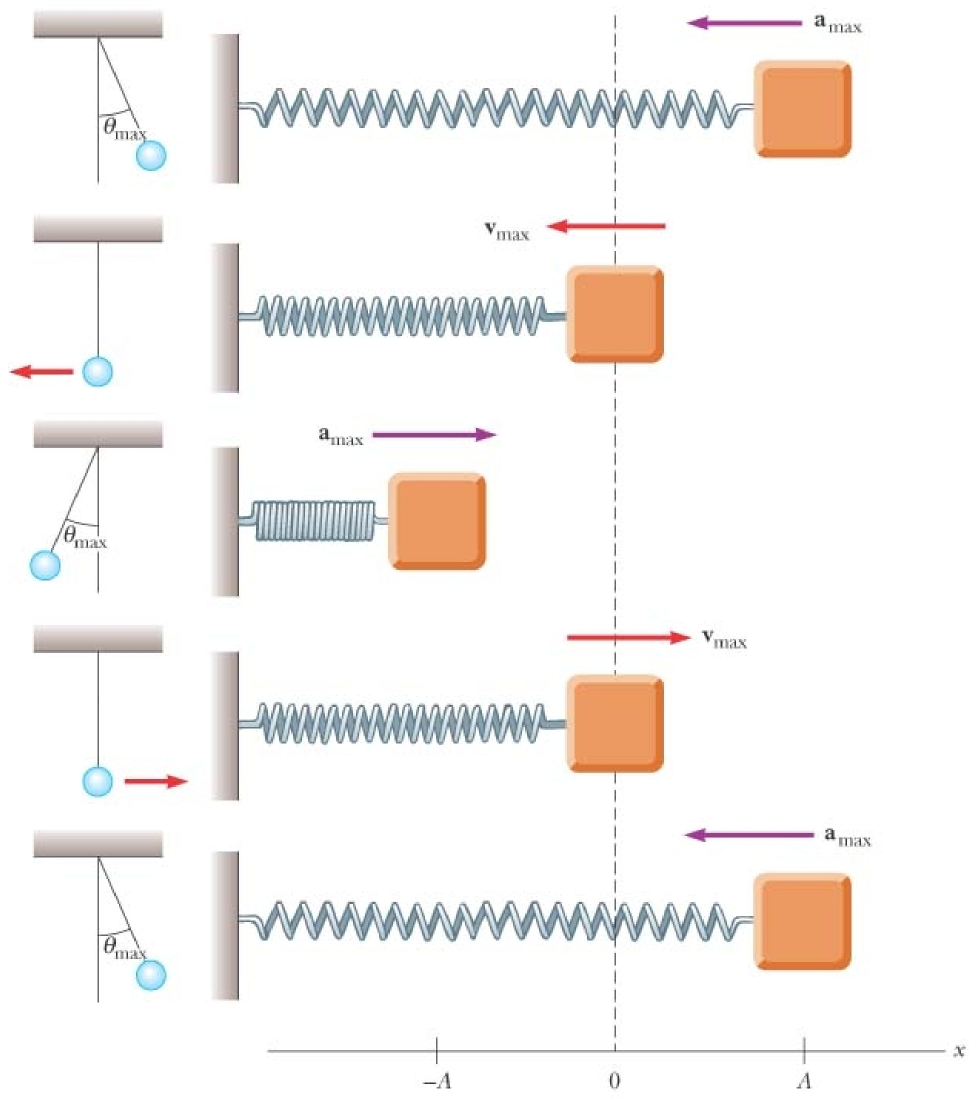
$$U = mgh = mg(l - l\cos(\alpha)) = mgl(1 - \cos(\omega t))$$

$$K = \frac{m}{2} v^2$$



Resorte horizontal

Péndulo



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Movimiento oscilatorio amortiguado

F_{roce}

rozamiento seco (**Froce**= cte)

$$\boxed{x'' + \omega^2 x + \mu g = 0}$$

$$\boxed{x(t) = A_0 sen(\omega t + \phi_0) - \frac{\mu g}{\omega^2}}$$

Rozamiento prop. a **v** (aire) (**Froce**=-b**v**)

$$x'' + \frac{b}{m} x' + \omega_0^2 x = 0$$

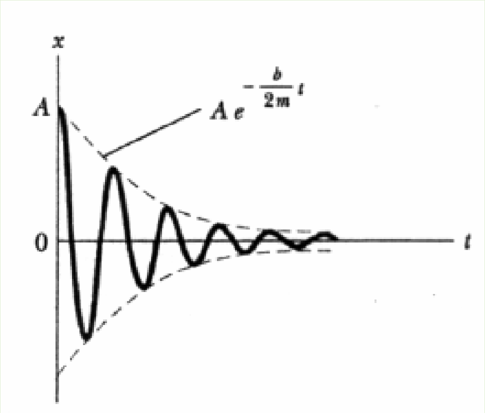
$$\boxed{x(t) = A(t) sen(\Omega t + \phi_0)}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} = A_0 e^{-\gamma t}$$

γ cte de amortiguamiento

- Si $\omega_0^2 > \gamma^2$ **sist. subamortiguado**

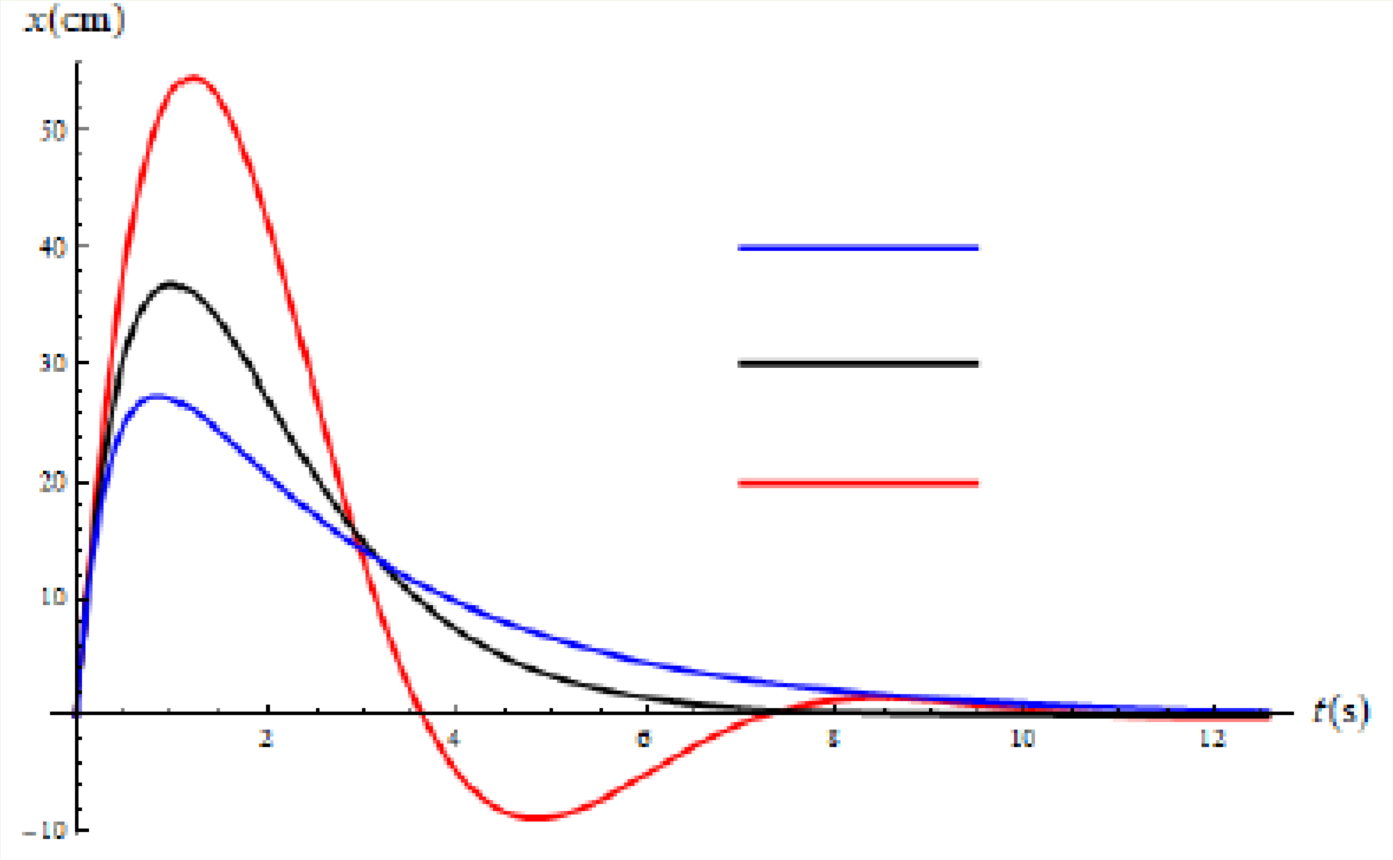


- Si $\omega_0^2 = \gamma^2$ el sistema NO oscila, está **críticamente amortiguado**.

$$x(t) = (A_0 + \hat{A}\, t)\, e^{\frac{-b}{m}t}$$

- Si $\omega_0^2 < \gamma^2$ el sistema NO oscila, está **sobreamortiguado**

$$x(t) = (A_1 e^{-|\lambda_1| t} + A_2 e^{-|\lambda_2| t}) \qquad \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad \lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



subamortiguado

críticamente amortiguado

sobreamorti-guado

Movimiento oscilatorio forzado

Se añade una **F**=F_0 cos (ω_Ft) tal que $x''+\omega_0^2 x=F_0\cos(\omega_F t)$

Movimiento oscilatorio forzado amortiguado

$$x''+\frac{b}{m}x'+\omega_0^2 x=F_0\cos(\omega_F t)$$

Las soluciones de las ecs. diferenciales NO homogéneas

$x(t)=x_{hom}(t)+x_{part}(t)$ cuando $t\Rightarrow\infty$ (largos) $x_{hom}(t)\Rightarrow 0$

$$x_{part}(t) = A\cos(\omega_F t - \delta)$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_F\right)^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{\frac{b}{m}\omega_F}{\omega_0{}^2 - \omega_F{}^2}$$

Cuando $\omega_0 = \omega_F$, el sistema está en **resonancia**. La amplitud es máx.

Video

https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU

Simulaciones

MAS

https://sites.google.com/site/physicsflash/home/shm?
fbclid=IwAR1smGO4YWjDylrLMCWYZ3C0IaaLxKixbdbuSSXHIFgL3YGIbTZuN4EdNAo

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_es.html

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html

MOA

https://www.geogebra.org/m/sAAwEXgy

MOFA

https://www.walter-fendt.de/html5/phes/resonance_es.htm