Física-Mecánica

Modelos físicos, sistemas de referencia, sistemas de coordenadas, magnitudes cinemáticas

Física

Describe los fenómenos de la naturaleza

Desarrollo de modelos, representaciones idealizadas y simplificadas del objeto a analizar, no son el fenómeno en sí.
Puede utilizar experiencias de laboratorio

Lenguaje: matemática

Formulación de teorías dentro de un marco teórico adecuado para predecir el comportamiento del objeto

Se comparan las predicciones de las magnitudes relevantes con las obtenidas observacionalmente mediante mediciones.

Mecánica clásica

- Su objetivo es poder describir y predecir los movimientos (y los posibles cambios) de los objetos.

***Marco teórico:** Leyes de Newton

***Rango de validez:** las dimensiones "d" deben ser $d>>d_{ATOM}$, y las velocidad "v" deben ser $v<<v_L$ (siendo v_L=300000 km/s velocidad de la luz)

Los objetos que estudia la mecánica se los considera como inertes (sin vida), esto quiere decir que se supone que no pueden realizar movimientos por sí solos.

- **Sistema bajo estudio (SE):** el objeto a analizar y su exterior.
- **Sistema de referencia (SR):** encargado de observar al objeto a examinar, no forma parte del sistema bajo estudio, ni lo puede modificar. Es como un “ente neutral” en el análisis y está “limitado” por el marco teórico.
- **Sistema de unidades (SU):** (MKS, CGS, UN, etc.) Una vez definido, las magnitudes deben estar en dicho sistema.
- **Sistema de coordenadas (SC):** se utiliza esta herramienta matemática para ubicar el fenómeno en el espacio (sistema de coordenadas espacial, con un origen definido y ejes: por ejemplo los ejes cartesianos x-y) y en el tiempo (mediante el uso de un reloj).

- **Traslación:** es el movimiento más simple.

*__Modelo de partícula:__ se considera a un objeto como un punto material (que se lo puede ubicar en el espacio mediante un sistema de ejes coordenados) con una masa definida m y densidad ρ, pero sin dimensiones (se desprecian).

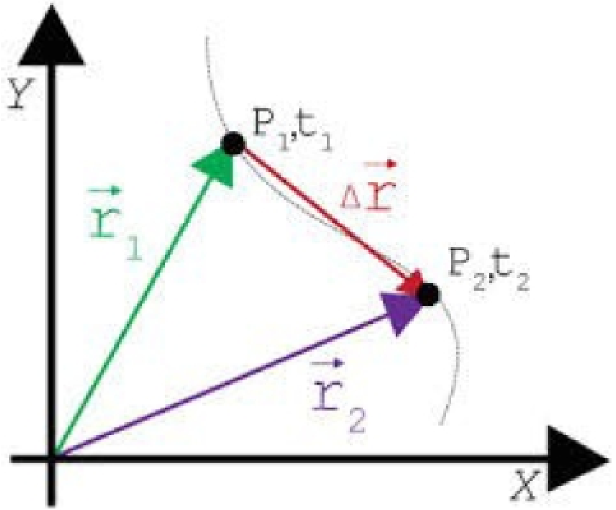
-Masa (m[kg]): mag. física escalar que expresa la resistencia de un cuerpo al cambio de movimiento.
-Densidad (ρ[kg/m^3]): mag. física escalar que expresa la cantidad de masa que se halla en un determinado volumen.

Movimiento del avión
Partícula √

Movimiento de la
polea del aljibe
Partícula X

Descripción de movimiento → *Variables cinemáticas (posición, velocidad y aceleración)
*Sistema de coordenadas

IMPORTANTE Recordar que un vector tiene módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. Se puede descomponer en componentes en un eje de coordenadas.



***POSICIÓN** $\vec{r}$ (mag. vectorial)

Establecidos los SR y SC, $\vec{r}$ representa la ubicación de la partícula respecto del origen del SC. Unidad de medida: longitud (m, km,pies, etc).

La partícula a t_1 se encuentra en P_1, con una posición $\vec{r}_1$. En un posterior t_2, se encuentra en P_2, teniendo otra posición $\vec{r}_2$.

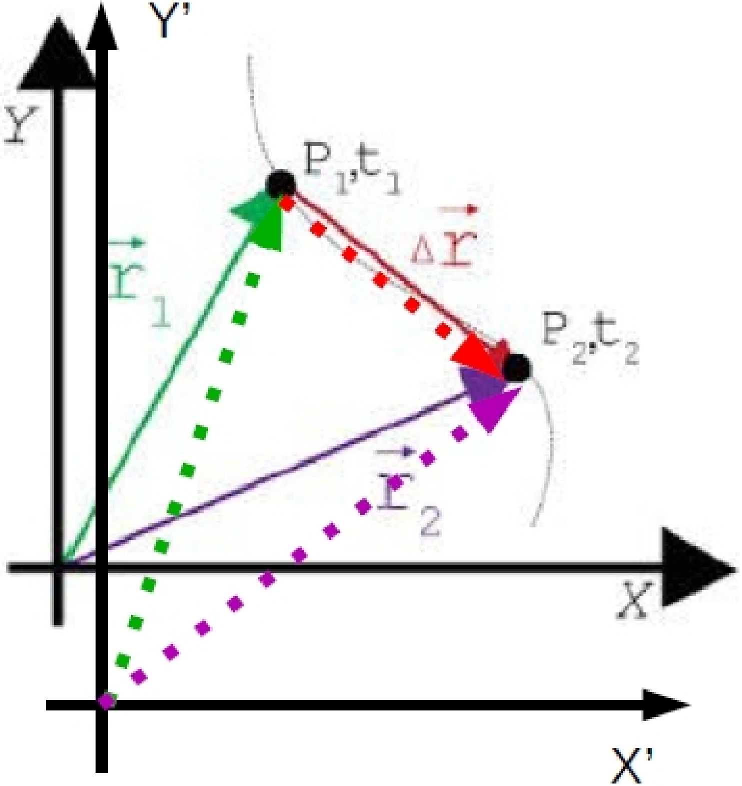
LA LETRA GRIEGA DELTA (Δ) . En física se usa la delta para indicar una variación de una magnitud entre un valor final y uno inicial. Por ejemplo $\Delta x = x_f - x_i$

*TRAYECTORIA (mag. escalar)
Es el recorrido que describe un objeto que desplaza por el espacio en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$; puede ser recto, curvo, etc.

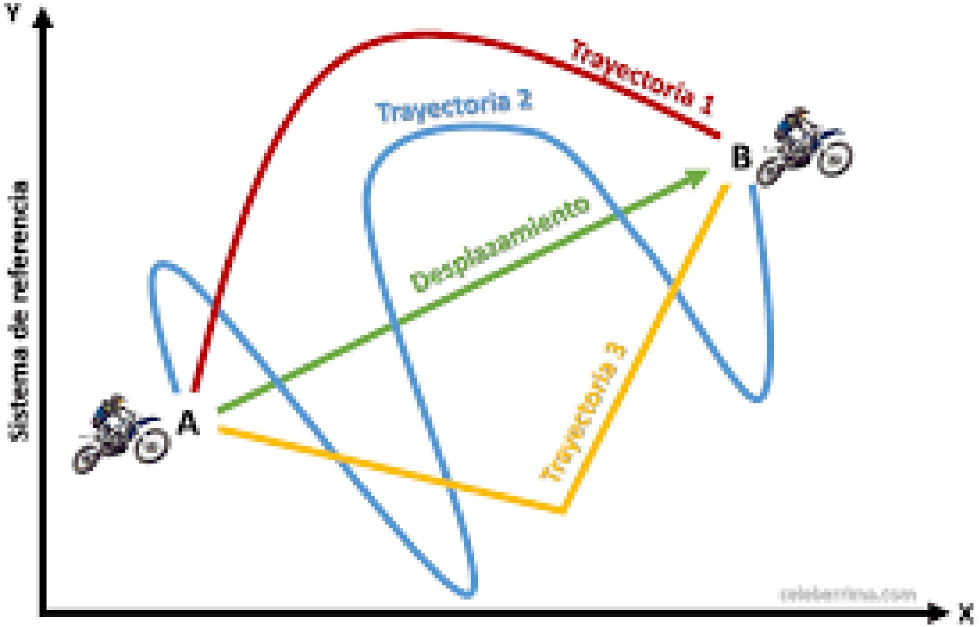
*DESPLAZAMIENTO (mag. vectorial)
Es la resta entre dos vectores posición
Es *independiente* del sistema de coordenadas elegido.

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Ambas magnitudes tienen unidades de medida de longitud (km, pies, etc).



Ejemplo A



Ejemplo B Juan está parado en un esquina, camina una cuadra (100 m) y vuelve al lugar inicial. El desplazamiento es nulo porque $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}_0 - \vec{r}_0 = 0\,m$ mientras que la trayectoria es de 2 m

*VELOCIDAD PROMEDIO (mag. escalar)

representa al cociente entre la trayectoria recorrida y el intervalo de tiempo empleado $v_{prom}=\frac{trayectoria}{\Delta t}$.

*VELOCIDAD MEDIA (mag. vectorial)

representa al cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo empleado $\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t_f)-\vec{r}(t_i)}{t_f-t_i}$. Esta magnitud no contempla lo que

ocurre en tiempos intermedios entre t_i y t_f .

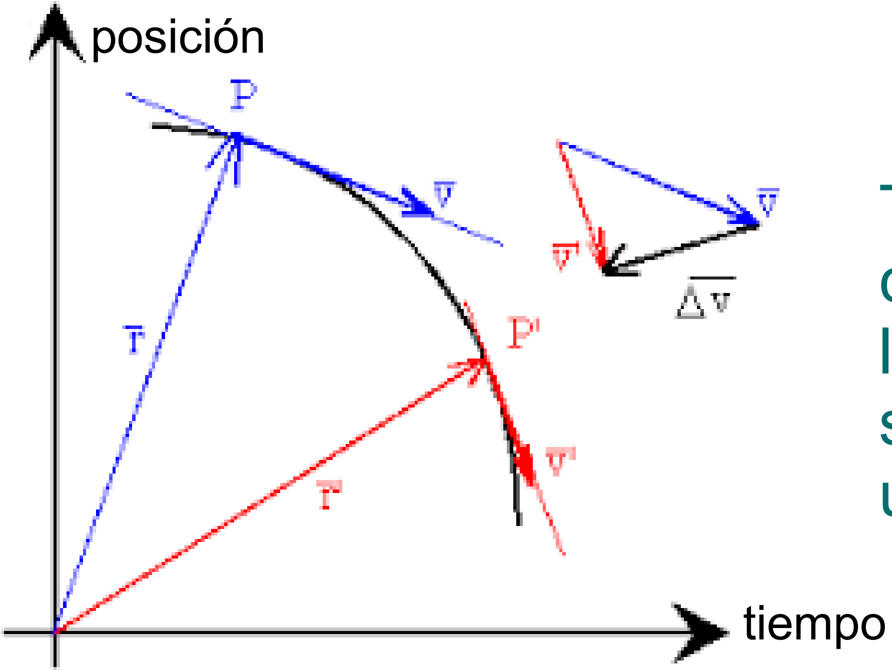
*VELOCIDAD INSTANTÁNEA (mag. vectorial)

es el cambio de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

La velocidad describe qué tan rápido se mueve la partícula y hacia dónde lo hace.

*RAPIDEZ (mag. escalar) es el módulo del vector velocidad.



Todas estas magnitudes relacionadas con la velocidad tienen unidades de longitud sobre tiempo (metros por segundo [m/s] en MKS, u otras veces se utiliza kilómetro por hora [km/h], etc.)

*ACELERACIÓN MEDIA (mag. vectorial)
representa cociente entre el cambio de velocidad y el intervalo de tiempo en el que se produce $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$. Esta magnitud no contempla lo que ocurre en tiempos intermedios entre t_f y t_i.

*ACELERACIÓN INSTANTÁNEA (mag. vectorial)
es el cambio de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

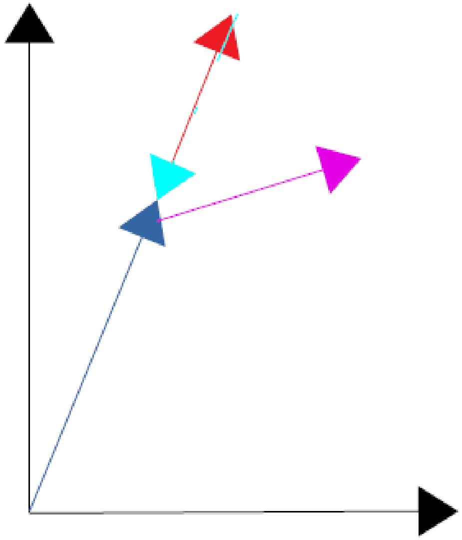
La unidad de medida de la aceleración está dada por el cociente entre la longitud y el tiempo al cuadrado (m/s^2 , km/h^2, $pies/s^2$ c)

Variables cinemáticas

-Posición $\vec{r}(t)$

-Velocidad $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}$

-Aceleración $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$



Al ser magnitudes vectoriales tienen módulo, dirección, sentido y punto de aplicación; una modificación en cualquiera de estas propiedades genera un cambio en la magnitud.

Repaso de operaciones con vectores

$$\vec{A}=\left(A_x, A_y, A_z\right)$$

$$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{A_x^{\,2}+A_y^{\,2}+A_z^{\,2}}$$

Módulo

Suma y resta

$$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{C}=\left(A_x\pm B_x, A_y\pm B_y, A_z\pm B_z\right)=\left(C_x, C_y, C_z\right)$$

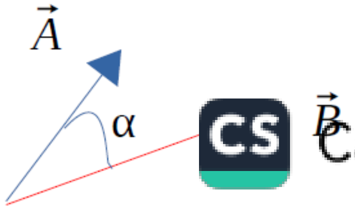
Producto con un escalar

$$g.\vec{A}=\vec{C}=\left(g.A_x, g.A_y, g.A_z\right)=\left(C_x, C_y, C_z\right)$$

Producto escalar entre vectores

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\alpha$$

escalar



Producto vectorial

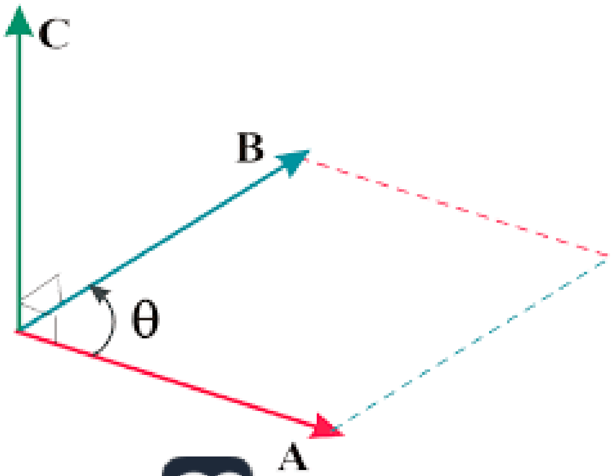
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y.B_z - B_y.A_z, B_x.A_z - A_x.B_z, A_x.B_y - B_x.A_y \right)$$

$$\vec{A} x \vec{B} = -\vec{B} x \vec{A} = \vec{C} = \left(C_x, C_y, C_z \right)$$

$$C_x = A_y.B_z - B_y.A_z$$

$$C_y = B_x.A_z - A_x.B_z$$

$$C_z = A_x.B_y - B_x.A_y$$



Módulo del producto vectorial

$$\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

Leyes de Newton-Aplicaciones

Mecánica clásica

- **Marco teórico:** Leyes de Newton, cuerpos inertes
- Para sean válidas el SR debe cumplir:
  *Isotropía espacial: no hay una dirección preferencial de observación.
  *Homogeneidad espacial: todos los puntos tienen las mismas propiedades.
  *Homogeneidad temporal: en cualquier momento, las propiedades no cambian.

De ser así, el SR es inercial **"SRI"**, esto quiere decir que no está acelerado, $\vec{v}(t)$ es cte.

- Una fuerza es una magnitud vectorial que representa a una interacción entre dos o más cuerpos .

- La unidad de medida de la fuerza es el Newton $N=\frac{kg\,m}{s^2}$ en el sistema de unidades MKS, o también se puede medir en dinas si el sistema es CGS $dinas=\frac{g\,cm}{s^2}$

- La fuerza neta o resultante es la suma de todas fuerzas actuantes sobre un cuerpo.

- Existen fuerzas de contacto (roce, tensión, etc) y otras a distancia (gravitatoria, eléctrica, magnética, etc).

- **Primera ley de Newton:** *"Si la fuerza neta que se ejerce sobre un cuerpo es nula, entonces éste mantendrá su estado de movimiento (su velocidad permanece constante)".*
- Es necesario de un SRI para poder percibir su validez.
- **Inercia:** propiedad de los cuerpos a intentar mantener su estado de movimiento.

https://www.edumedia-sciences.com/es/media/938-marco-de-referencia-inercial

https://www.vascak.cz/data/android/physicsatschool/template.php?s=mech_newton1&l=en

https://phet.colorado.edu/sims/html/forces-and-motion-basics/latest/forces-and-motion-basics_es.html

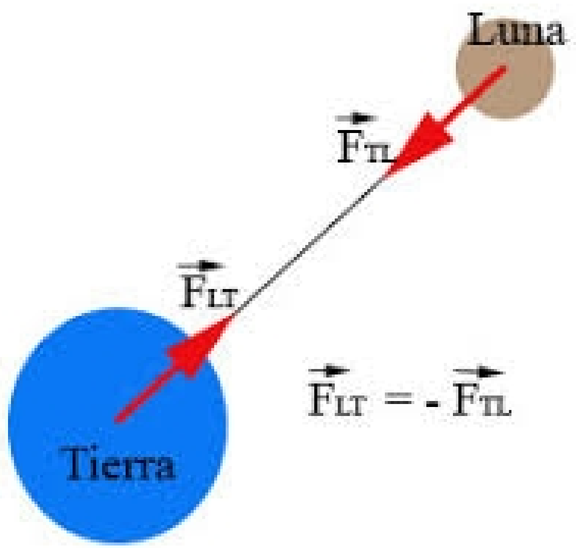
- **Segunda ley de Newton:** *"Si una fuerza neta actúa sobre un cuerpo, éste se acelerará. Su aceleración será proporcional a la fuerza total aplicada teniendo la misma dirección y sentido"*

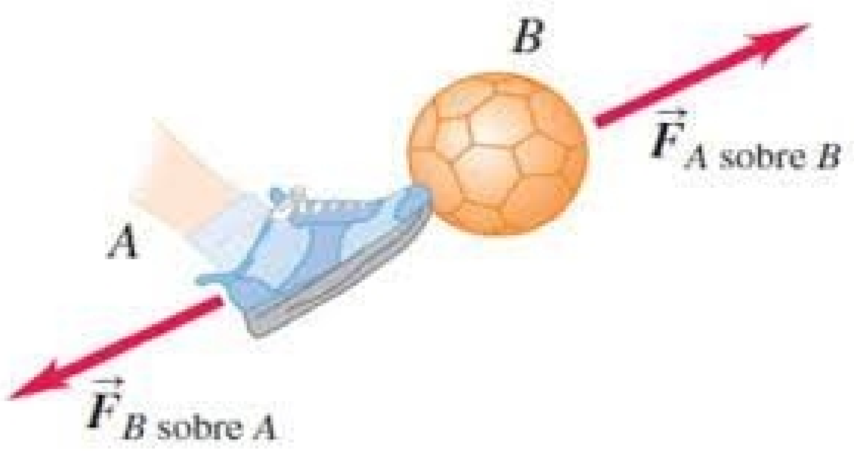
$$\underbrace{\vec{F}_{neta}=\sum \vec{F}_i}_{\text{Causa}}=\underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}=m\,.\,\vec{a}}_{\text{Efecto}}$$

Masa del cuerpo, asumiendo que es cte.

- La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial $\vec{p}=m\,.\,\vec{v}$

- **Tercera ley de Newton:** *"Si un agente A ejerce una fuerza sobre un agente B, éste le aplicará a "A" una fuerza de igual magnitud y dirección pero sentido opuesto (y diferente punto de aplicación)".*





Aplicaciones en la Tierra

- En gral. se toma a la Tierra como SRI (modelado de Tierra plana (TP))

- Una vez definidos los SE, SRI, SU y SC; se modela el SE y se tienen en cuenta las aproximaciones.

- Sobre todo cuerpo con masa que se encuentra en las cercanías de la Tierra actúa la fuerza gravitatoria generada por la Tierra llamada “Peso”. Asumiendo un modelo TP,

$$\vec{P} = m\,.\,\vec{g}$$

siendo $g \approx 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$ la aceleración de la gravedad. El sentido de esta fuerza apunta hacia el centro de la Tierra (atractiva) con dirección perpendicular al “plano”.

- # Aproximaciones:

*En gral. los efectos del aire de desprecian.

*Superficie ideal: sin roce.
*Varilla ideal: inextensible, sin masa, rígida.

*Cuerda ideal: inextensible, sin masa, en tensión transmite toda la fuerza.

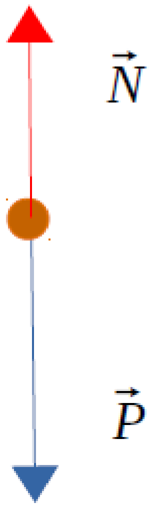
Ejemplo 1 Una caja de masa m que se halla en reposo sobre el piso.¿Cuánto vale la fuerza de contacto con el piso?

SE: caja (piso yTierra, agentes exteriores) con modelado de partícula.

SRI: fijo a la Tierra

SU: MKS y SC: ejes coord.

La caja permanece en reposo $\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F}_i = 0$. Sin embargo, como la caja tiene masa, está actuando la fuerza Peso; por lo tanto el suelo debe ejercer una sobre la caja de igual módulo y dirección pero de sentido contrario.

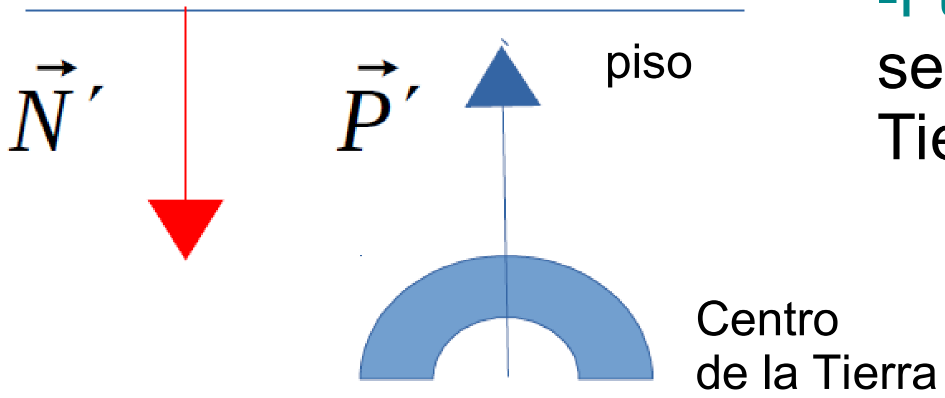


-Fuerzas sobre la caja (partícula):

Peso y F de contacto (piso). Ambas están en el eje y ($F_x = F_z = 0$).

$$F_{neta\,y} = \sum F_{i\,y} = N - P = 0$$

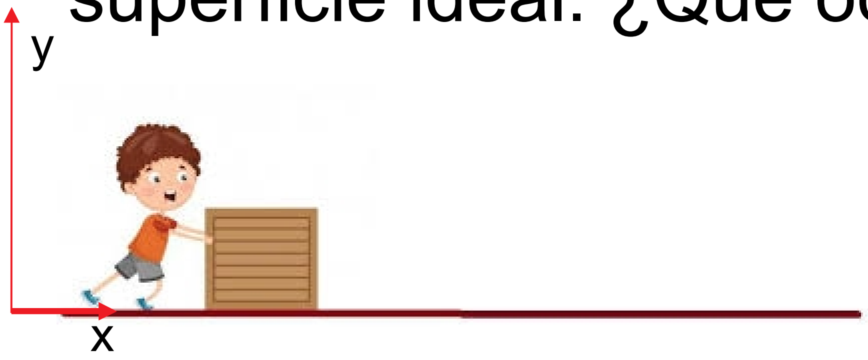
Luego $N = P = mg$, valor de la F de contacto.



-Fuerzas ejercidas por la caja (3ra ley):

se hallan en el piso y en el centro de la Tierra

Ejemplo 2 Un niño empuja la caja del ejercicio anterior (aplicando una fuerza horizontal) siendo el piso una superficie ideal. ¿Qué ocurrirá?



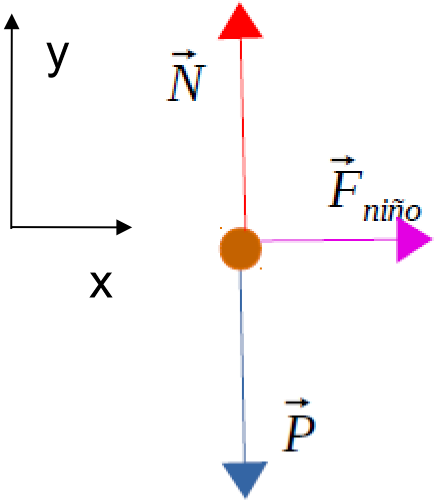
SE: caja (piso, niño y Tierra, agentes exteriores) con modelado de partícula.

SRI: fijo a la Tierra

SU: MKS y SC: ejes coord.

-En el eje y $F_{neta\,y} = 0$, como el niño no actúa en dicho eje, sólo actúan (en este eje) la Tierra y el piso.

-En el eje x el niño ejerce una fuerza y el piso no tiene roce, entonces $F_{neta\,x} \neq 0$ cambia el estado de mov. de la caja.



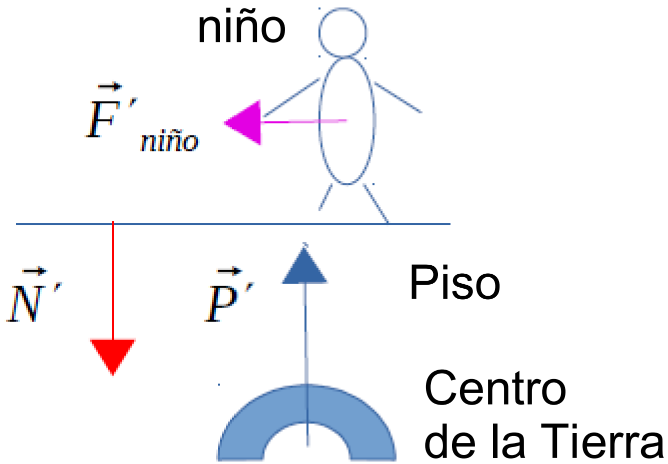
-Fuerzas sobre la caja (partícula) en el eje y: Peso y F de contacto (piso).

$$F_{neta\,y}=\sum F_{i\,y}=N-P=0$$

Luego $N=P=mg$, valor de la F de contacto.

-Fuerzas sobre la caja (partícula) en el eje x: la F de contacto (niño).

$$F_{neta\,x}=\sum F_{i\,x}=F_{niño}=m\,.\,a_x$$



-Fuerzas ejercidas por la caja (3ra ley): se hallan en el piso, en el niño y en el centro de la Tierra.

Ejemplo 3 Un hombre empuja la caja del ejercicio anterior (aplicando una fuerza oblicua $\vec{F}$) siendo el piso una superficie ideal. ¿Qué ocurrirá?

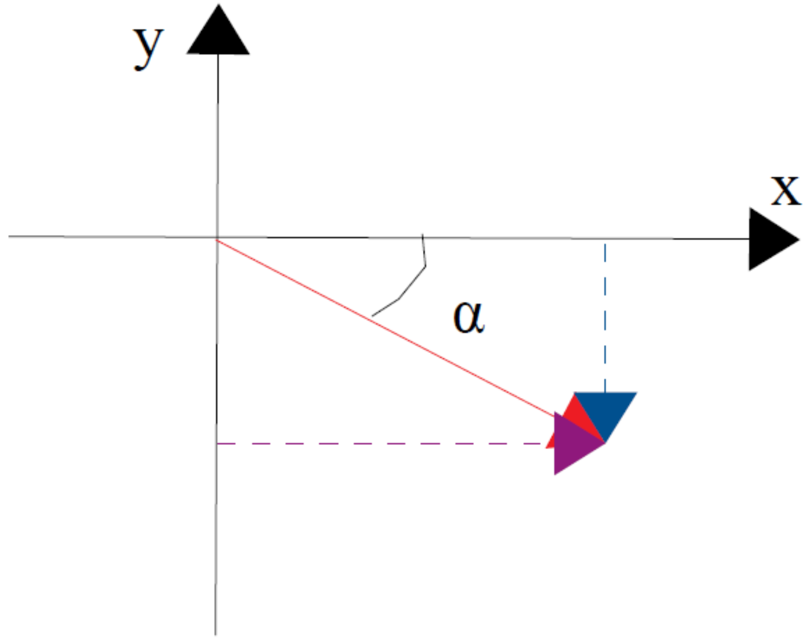
SE: caja (piso, hombre y Tierra, agentes exteriores) con modelado de partícula.

SRI: fijo a la Tierra

SU: MKS y SC: ejes coord.

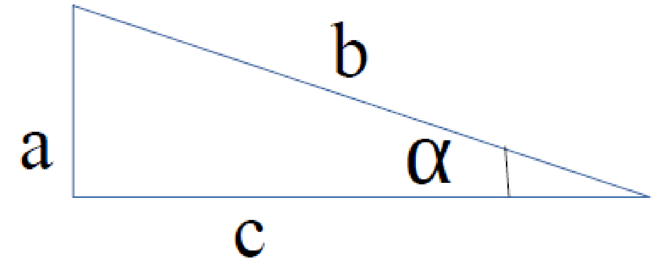
La fuerza generada por el hombre es oblicua, tiene componentes en ambos eje x e y. En el eje y no hay cambio en el estado de movimiento, mientras que en el eje x sí.

$$\vec{F}=(F_x,F_y)$$

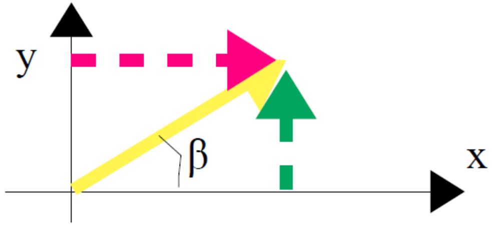


$$F_x=F\cos(\alpha)$$
$$F_y=-F\sin(\alpha)$$

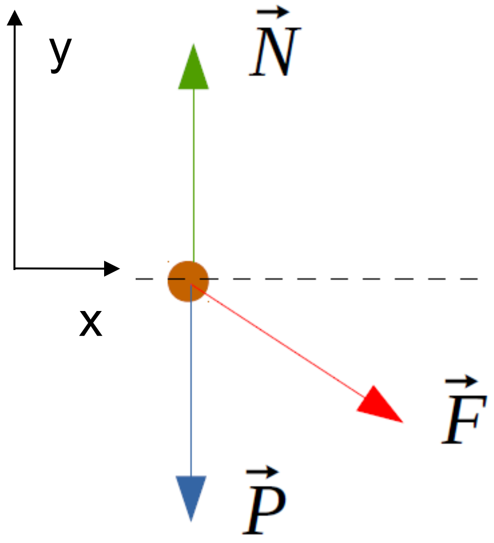
Trigonometría



$$\sin(\alpha)=\frac{a}{b}$$
$$\cos(\alpha)=\frac{c}{b}$$
$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{a}{c}$$



$$F_x=F\cos(\beta)$$
$$F_y=F\sin(\beta)$$



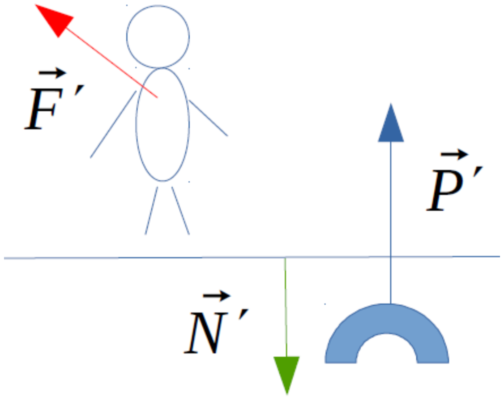
-Fuerzas sobre la caja (partícula) en el eje y: Peso, F de contacto (piso) y F_y de contacto (hombre).

$$F_{neta\ y} = \sum F_{yi} = N - P + F_y = N - P - F\sin\left(30^0\right) = 0$$

Luego $N = P + F\sin(30^0) = mg + F\sin(30^0)$, valor de la F de contacto generada por el piso.

-Fuerzas sobre la caja (partícula) en el eje x: la F de contacto (hombre).

$$F_{neta\ x} = \sum F_{xi} = F\cos\left(30^0\right) = m . a_x$$



-Fuerzas ejercidas por la caja (3ra ley): se hallan en el piso, en el hombre y en el centro de la Tierra.

Dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se colocan en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.12a. Una fuerza horizontal constante $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica a m_1 como se muestra.

A) Encuentre la magnitud de la aceleración del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Elabore ideas de la situación mediante la figura 5.12a y observe que ambos bloques deben experimentar la *misma* aceleración porque están en contacto mutuo y permanecen en contacto por todo el movimiento.

Categorizar Este problema se clasifica como una partícula bajo una fuerza neta porque se aplica una fuerza a un sistema de bloques y se busca la aceleración del sistema.

Analizar Primero represente la combinación de los dos bloques como una sola partícula. Aplique la segunda ley de Newton a la combinación:

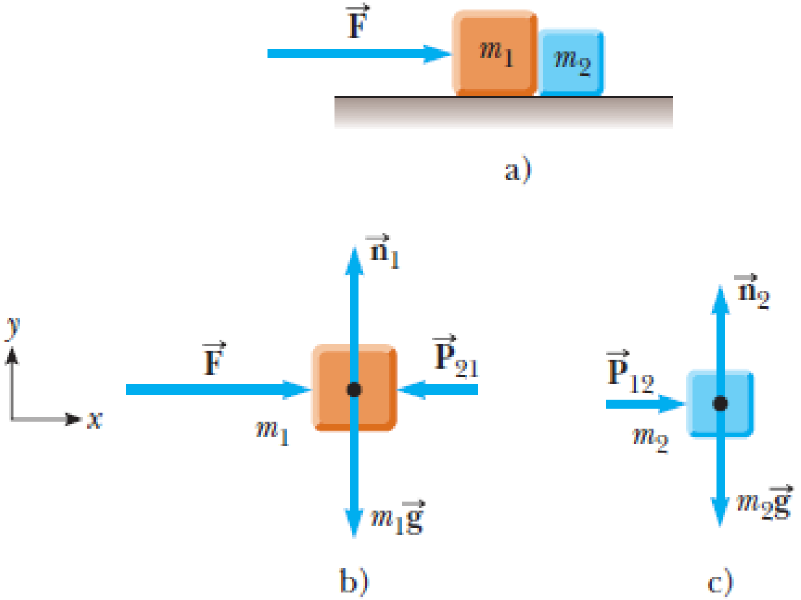


Figura 5.12 (Ejemplo 5.7). a) Se aplica una fuerza se a un bloque de masa m_1, que empuja a un segundo bloque de masa m_2. b) Diagrama de cuerpo libre para m_1. c) Diagrama de cuerpo libre para m_2.

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$1) \quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

B) Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La fuerza de contacto es interna al sistema de los dos bloques. Por lo tanto, no es posible hallar la fuerza al representar el sistema como un todo (los dos bloques) en una sola partícula.

Categorizar Considere ahora cada uno de los dos bloques de manera individual al clasificar cada uno como una partícula bajo una fuerza neta.

Analizar Construya primero un diagrama de cuerpo libre para cada bloque, como se muestra en las figuras 5.12b y 5.12c, donde la fuerza de contacto se denota $\vec{\mathbf{P}}$. A partir de la figura 5.12c se ve que la única fuerza horizontal que actúa sobre m_2 es la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ (la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2), que se dirige hacia la derecha.

Aplique la segunda ley de Newton a m_2:

$$2)\quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Sustituya el valor de la aceleración a_x que proporciona la ecuación 1) en la ecuación 2):

$$3)\quad P_{12} = m_2 a_x = \boxed{\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F}$$

Finalizar Este resultado muestra que la fuerza de contacto P_{12} es *menor* que la fuerza aplicada F. La fuerza que se requiere para acelerar el bloque 2 debe ser menor que la fuerza requerida para producir la misma aceleración para el sistema de dos bloques.

Para finalizar, compruebe esta expresión para P_{12} al considerar las fuerzas que actúan sobre m_1, que se muestran en la figura 5.12b. Las fuerzas que actúan horizontales sobre m_1 son la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ hacia la derecha y la fuerza de contacto $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ hacia la izquierda (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1). A partir de la tercera ley de Newton, $\vec{\mathbf{P}}_{21}$ es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{P}}_{12}$, de modo que $P_{21} = P_{12}$.

Aplique la segunda ley de Newton a m_1:

$$4)\quad \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Resuelva para P_{12} y sustituya el valor de a_x de la ecuación 1):

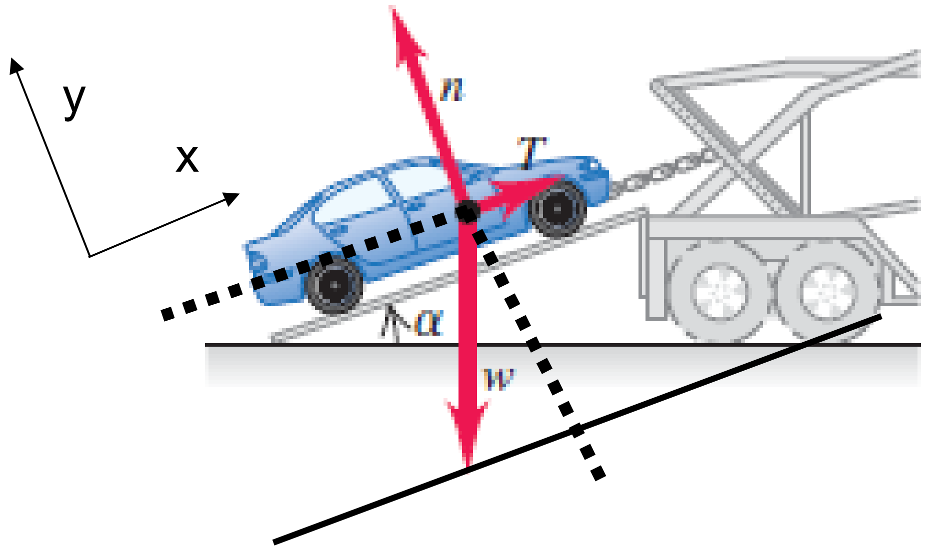
$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1\left(\frac{F}{m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)F$$

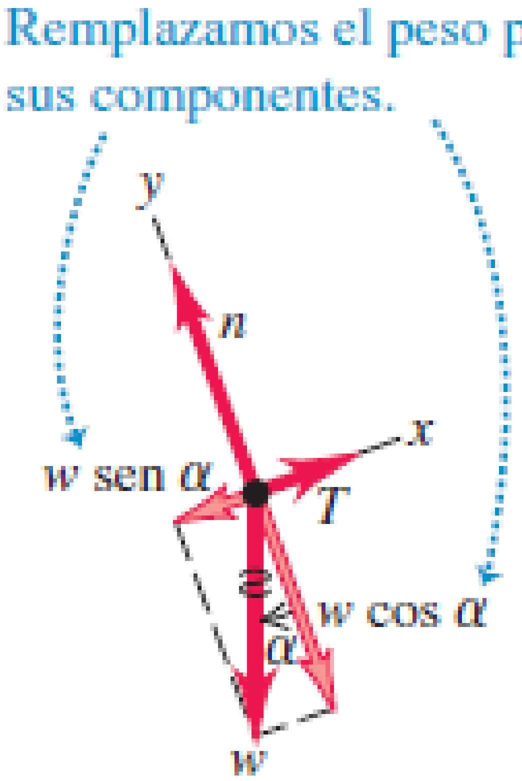
Este resultado concuerda con la ecuación 3), como debe ser.

¿Qué pasaría si? Imagine que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 5.12 se aplica hacia la izquierda en el bloque derecho de masa m_2. ¿La magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es la misma que cuando la fuerza se aplicó hacia la derecha sobre m_1?

Respuesta Cuando la fuerza se aplica hacia la izquierda sobre m_2, la fuerza de contacto debe acelerar m_1. En la situación original, la fuerza de contacto acelera m_2. Puesto que $m_1 > m_2$, se requiere más fuerza, de modo que la magnitud de $\vec{\mathbf{P}}_{12}$ es mayor que en la situación original.

Un auto de peso w descansa sobre una rampa. Un cable conectado al auto y a la armazón del remolque evita que el auto baje la rampa (Los frenos y la transmisión del auto están desactivados.) Calcular la tensión en el cable y la fuerza que genera el plano sobre los neumáticos.





$$w_y = -w\cos(\alpha)$$

$$w_x = -w\sin(\alpha)$$

-Fuerzas sobre el auto (partícula) en el eje *y*: la componente w_y del peso y F de contacto (piso).

$$F_{neta\,y} = \sum F_{yi} = n + w_y = n - w\cos(\alpha) = 0$$

Luego $n = -w_y = w\cos(\alpha)$, valor de la F que genera el piso.

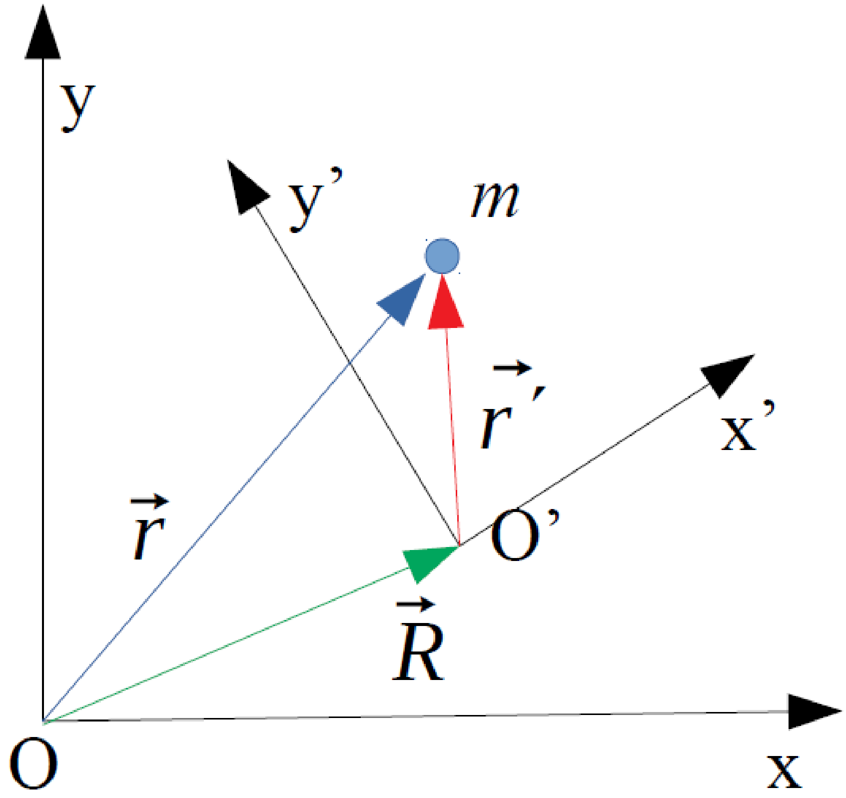
-Fuerzas sobre la caja (partícula) en el eje *x*: la componente w_x del peso y la tensión del cable.

$$F_{neta\,x} = \sum F_{xi} = T + w_x = T - w\sin(\alpha) = 0$$

Luego $T = -w_x = w\sin(\alpha)$, valor de la tensión de la cuerda.

Leyes de Newton
Aplicaciones cont.-Fuerzas variables

Transformaciones de Galileo



2 SRI c/ coord O (x,y) y O' (x',y') resp.
O' se mueve con $\vec{V}$ cte respecto a O.
Ambos ven a una part. de masa m que c/ $\vec{v}$ respecto a O, y $\vec{v}\,'$ respecto a O'.

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}\,'(t)$$

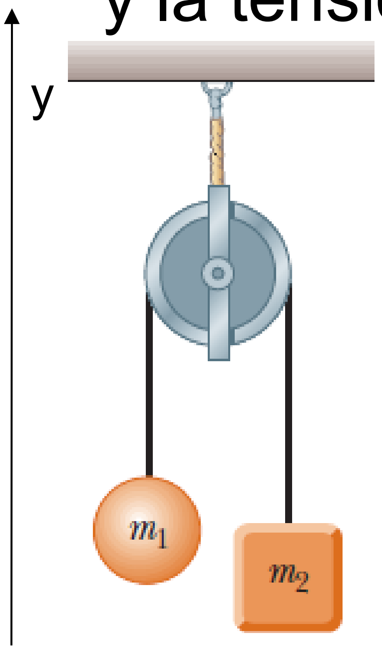
$$\underbrace{\vec{v}}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}(t) = \underbrace{\vec{V}}_{\frac{d\vec{R}}{dt}}(t) + \underbrace{\vec{v}\,'}_{\frac{d\vec{r}\,'}{dt}}(t)$$

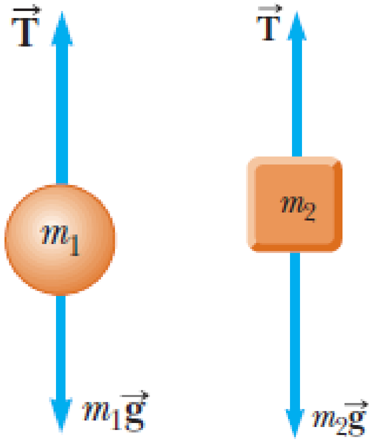
$$\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt}}_{=0} + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} \longrightarrow \vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t)$$

En mec. clásica
$t = t'$

- **Polea ideal:** su masa se desprecia y no tiene roce. Cambia la dirección de la tensión que transmite pero no su módulo.

Ejemplo Una máq. de Atwood está formada por 2 cuerpos que cuelgan de una polea. Si ésta y la soga son ideales, y las masas son m_1 y m_2 respectivamente, calcular la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.





$$F_{1\,neta\,y}=\sum F_{1\,yi}=T-m_1 g=m_1 a$$
$$F_{2\,neta\,y}=\sum F_{2\,yi}=T-m_2 g=-m_2 a$$
$$a=\frac{(m_2-m_1)\,g}{m_2+m_1}$$
$$T=m_1(g+a)=\frac{2\,m_1 m_2}{m_1+m_2}g$$

Si la masa m_2 se reemplaza por una fuerza de igual módulo ($T=m_2g$), se tendría

$$F_{1\,neta\,y}=\sum F_{1\,yi}=T-m_1\,g=m_1\,a$$

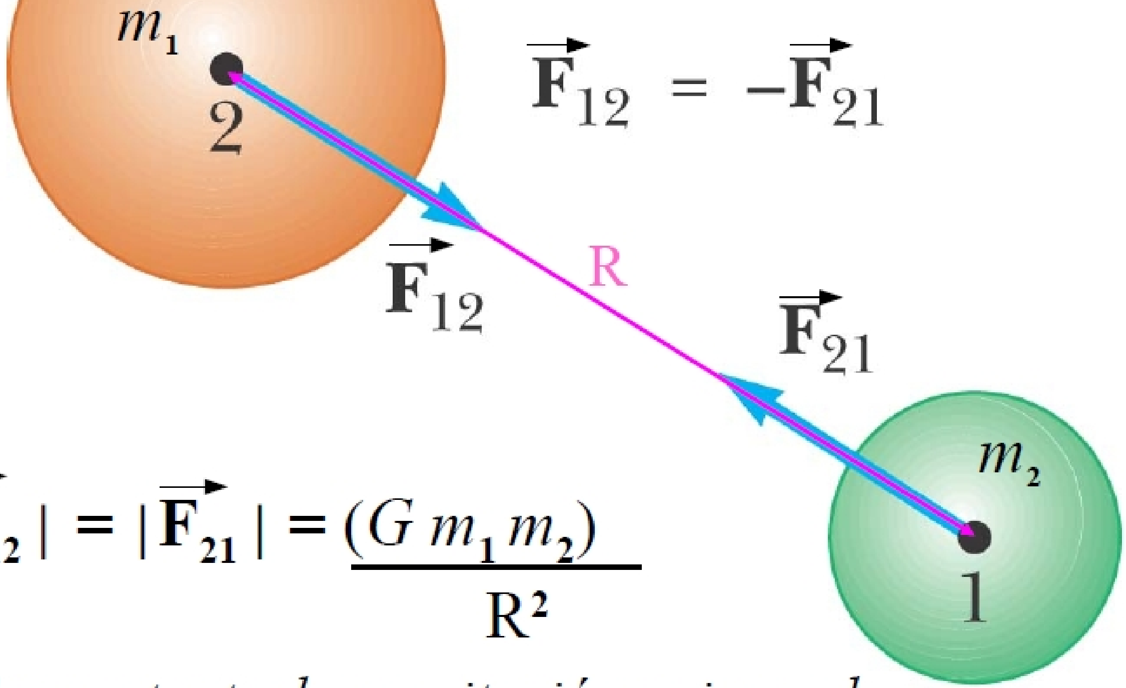
$$a=\frac{(m_2-m_1)\,g}{m_1}$$

Fuerzas variables

- No todas las fuerzas son ctes. Algunas dependen de la posición y del tiempo.

NEWTON

Ley de gravitación universal



$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$$

$$|\vec{\mathbf{F}}_{12}| = |\vec{\mathbf{F}}_{21}| = \frac{(G\, m_1 m_2)}{R^2}$$

G: constante de gravitación universal

$G = (6{,}6742 \pm 0{,}0010)\ N\, m^2\, kg^{-2}$

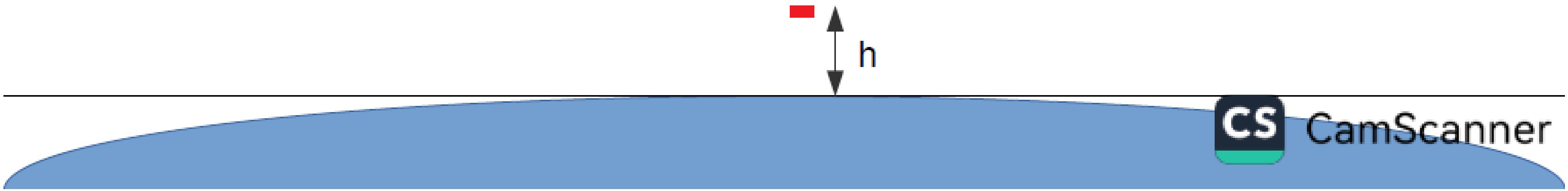
https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-and-orbits/latest/gravity-and-orbits_es.html

$$|\vec{F}_{gravT}| = G\frac{M_T m}{r^2} \approx G\frac{M_T m}{R_T^2} \approx m g$$

$$r = R_T + h \approx R_T$$

$$h \ll R_T$$

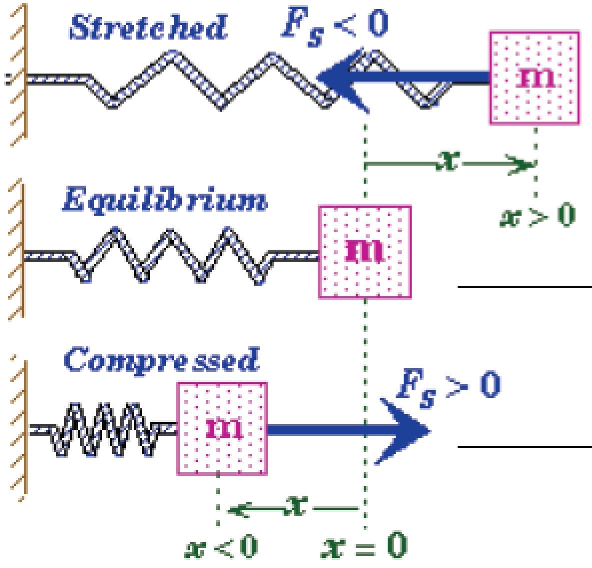
$$g = \frac{G M_T}{R_T^2}$$



Ley de Hooke (resortes)

La fuerza que genera un resorte $\mathbf{F}_s$ depende de la posición y de una cte. k propia de cada resorte que tiene unidades de N/m. La aceleración también dependerá entonces de la posición.

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} = m\vec{a}$$



$$\sum F_x = F_s = -kx = ma_x$$

Aceleración negativa

$F_s = -k\,x$

$$\sum F_x = F_s = 0$$

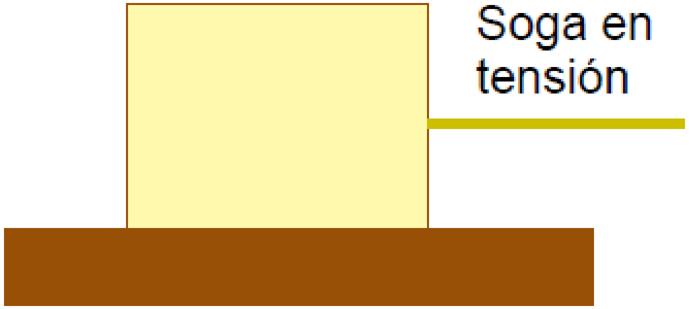
Aceleración nula

$$\sum F_x = F_s = -k(-x) = kx = ma_x$$

Aceleración positiva

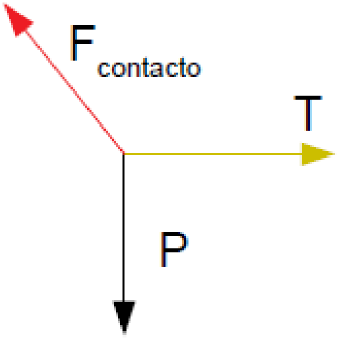
Fuerza de roce

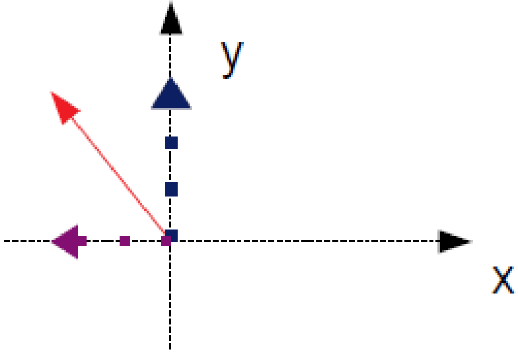
Es la componente tangencial de la fuerza de contacto cuando las superficies no son ideales. Se opone al movimiento relativo entre ellas.



Cuerpo en reposo

$$\sum \vec{F} = 0$$





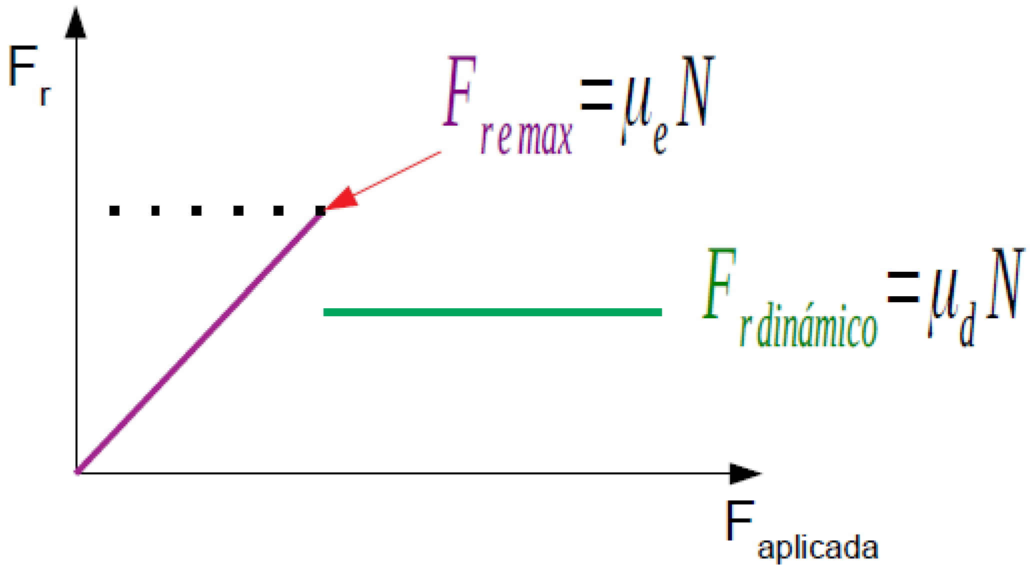
$$\vec{F}_{contacto} = \left(F_{roce}, N\right)$$

$$\sum F_y = N - P = N - mg = 0$$

$$\sum F_x = T - F_{roce} = 0$$

Cuando el cuerpo está en reposo, el módulo de la fuerza de roce es igual al módulo de la fuerza neta tangencial aplicada sobre el cuerpo (sin contar al roce).

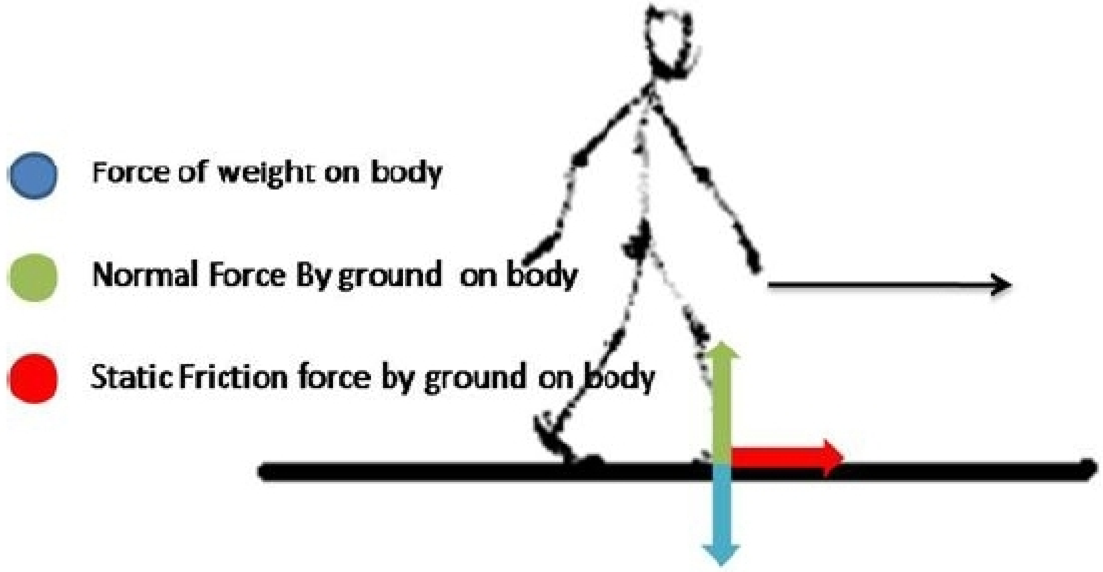
- **Fuerza de roce estática** sólo vale $\mu_e N$ cuando es máx.

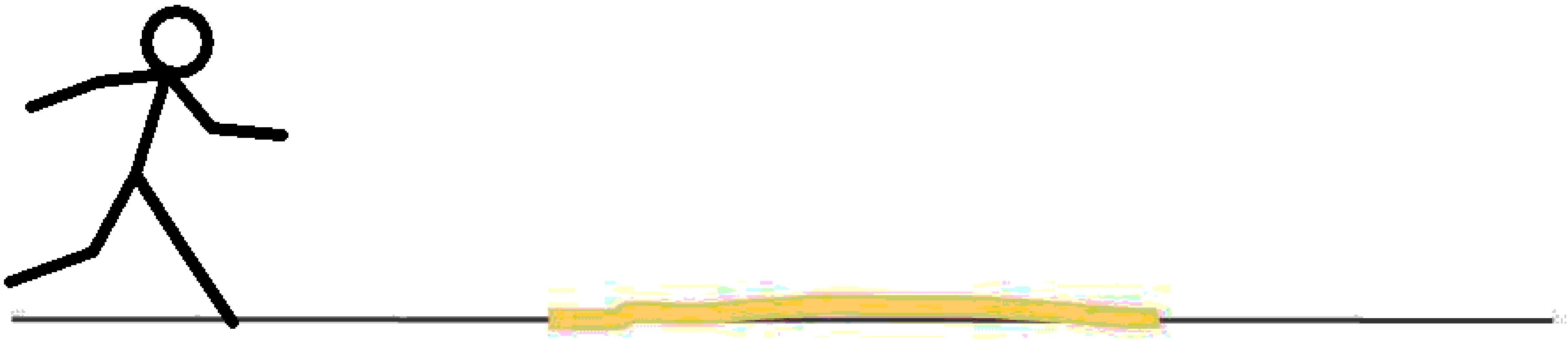


$$0 < \mu_d < \mu_e < 1$$

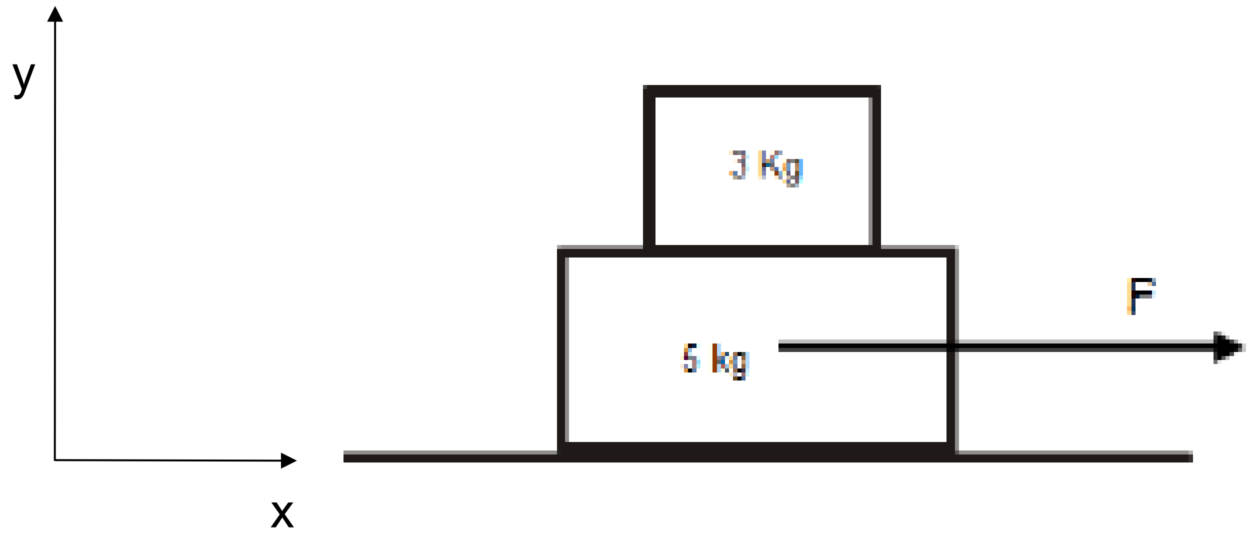
https://phet.colorado.edu/sims/html/forces-and-motion-basics/latest/forces-and-motion-basics_es.html


Movimiento
del pie

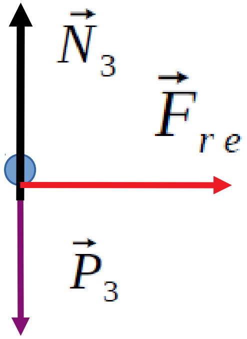

Force of weight on body
Normal Force By ground on body
Static Friction force by ground on body



Un bloque de 3 kg está colocado encima de otro de 5 kg, y este último está sobre una superficie horizontal sin roce, como se muestra en la siguiente figura. El coeficiente de fricción estático y dinámico entre los bloques es 0,2 y 0,1, respectivamente. ¿Cuál es la máxima fuerza F que se puede aplicar sin que los bloques deslicen entre sí?¿Cuál es la aceleración de cada uno de los bloques cuando se aplica una fuerza F = 20 N?



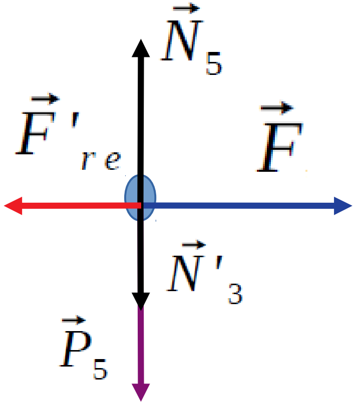
SE 2 bloques por separado que se mueven juntos.



$$F_{3neta\,y}=\sum F_{3yi}=N_3-m_3g=0$$

$$F_{3neta\,x}=\sum F_{3xi}=F_{re}=m_3a$$

$$F_{re}=F_{remax}=\mu_e N_3=\mu_e m_3 g \qquad a=\mu_e g$$

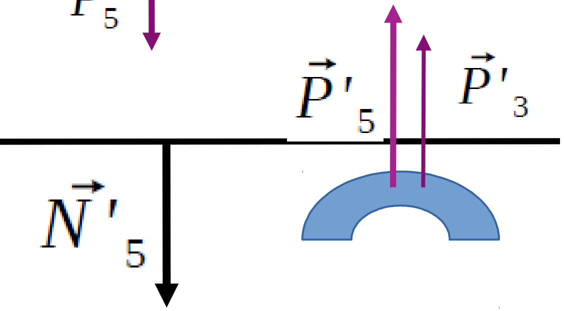


$$F_{5neta\,y}=\sum F_{5yi}=N_5-N'_3-m_5g=0$$

$$F_{5neta\,x}=\sum F_{5xi}=F-F'_{re}=m_5a$$

$$F=(m_3+m_5)\mu_e g=15{,}68\;N$$

fuerza máx.
sin separación



Cuando $F=20N$ $a_3 \neq a_5$ y F_r es ahora dinámica $F_r=\mu_d N_3$

$$F_{3netax}=\sum F_{3xi}=F_{rd}=\mu_d m_3 g=m_3 a_3 \qquad a_3=\mu_d g=0{,}98\, m/s^2$$

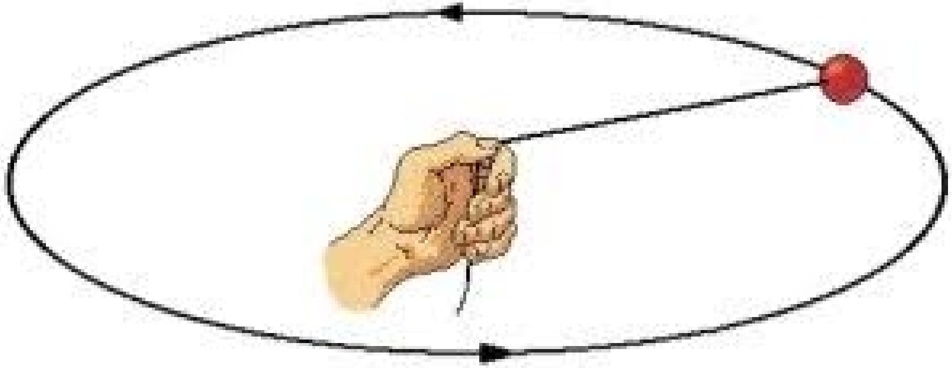
$$F_{5netax}=\sum F_{5xi}=F-F'_{rd}=F-\mu_d m_3 g=m_5 a_5$$

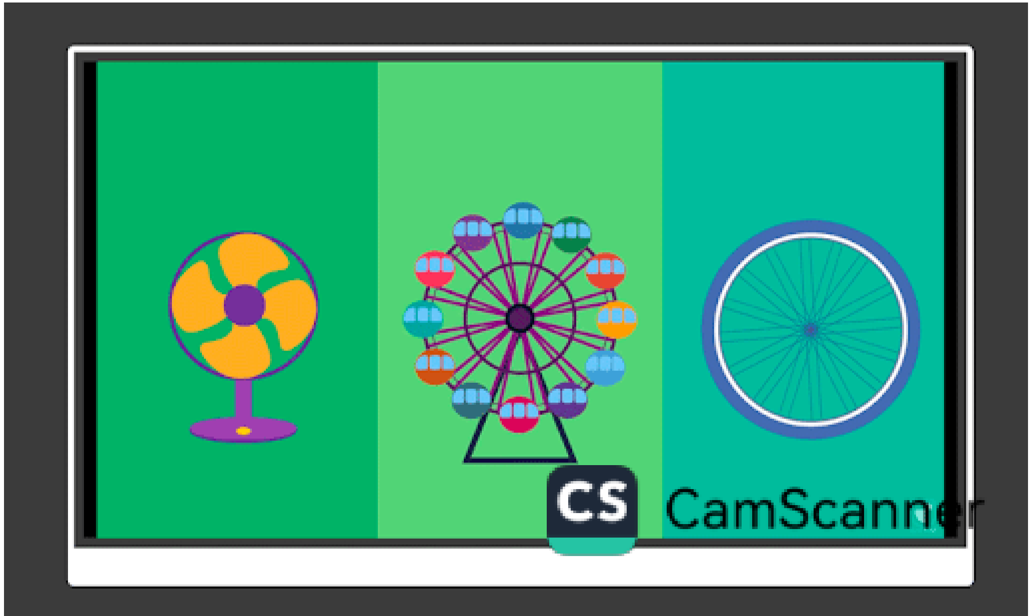
$$a_5=\frac{F-\mu_d m_3 g}{m_5}=3{,}41\, m/s^2$$

El bloque de abajo tiene mayor aceleración, se desplazá más rápido y el de arriba se terminará cayendo por detrás.

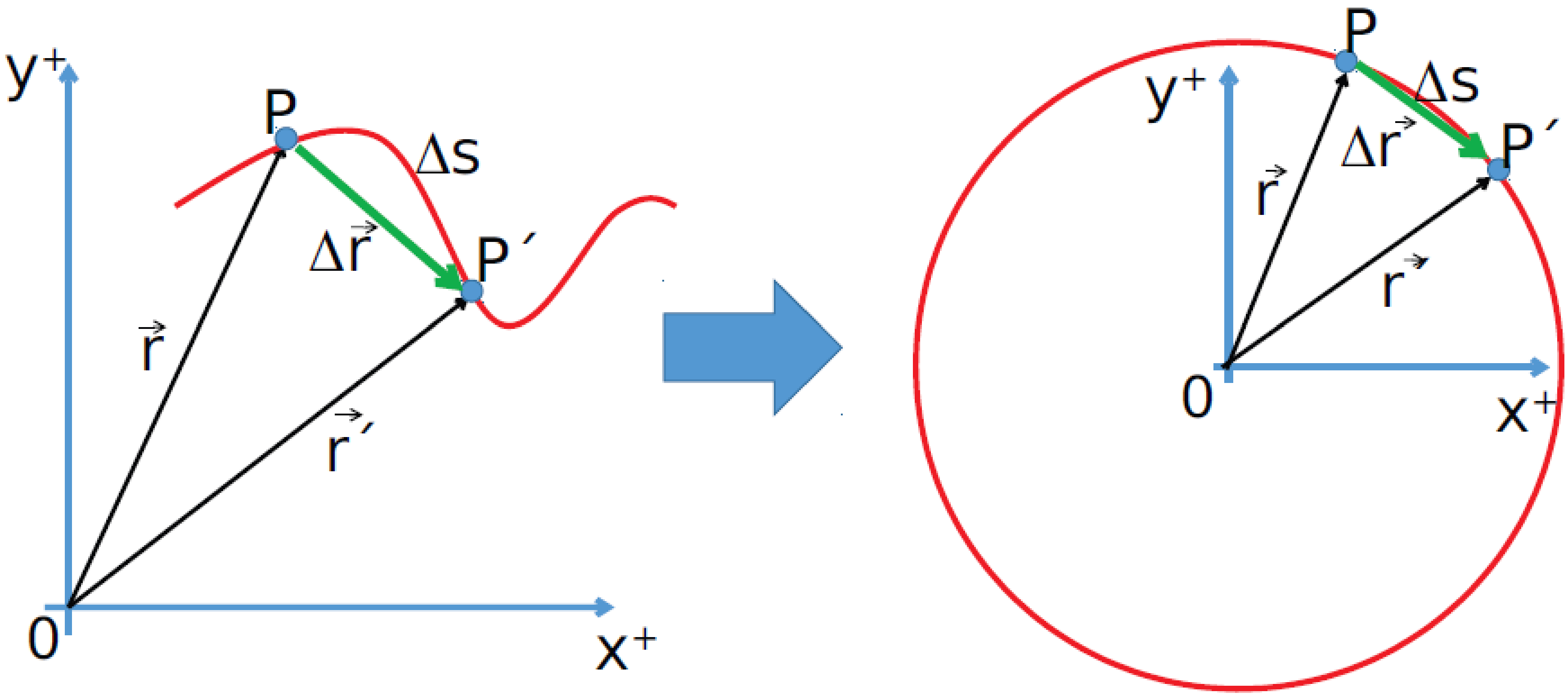
Dinámica y cinemática circular
Ejemplos

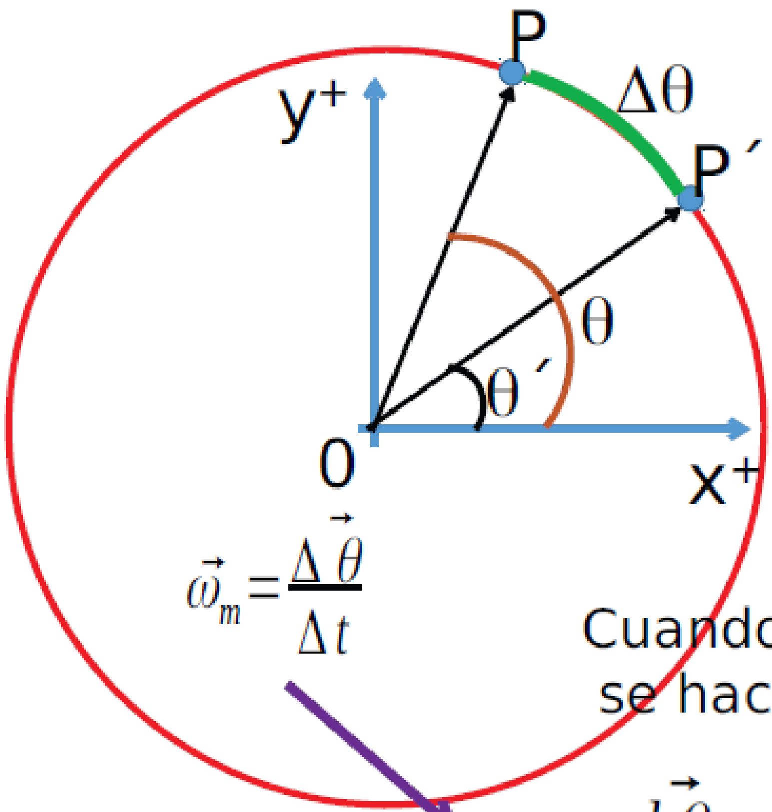

Neptune
Mars
Jupiter
Mercury
Earth
Venus



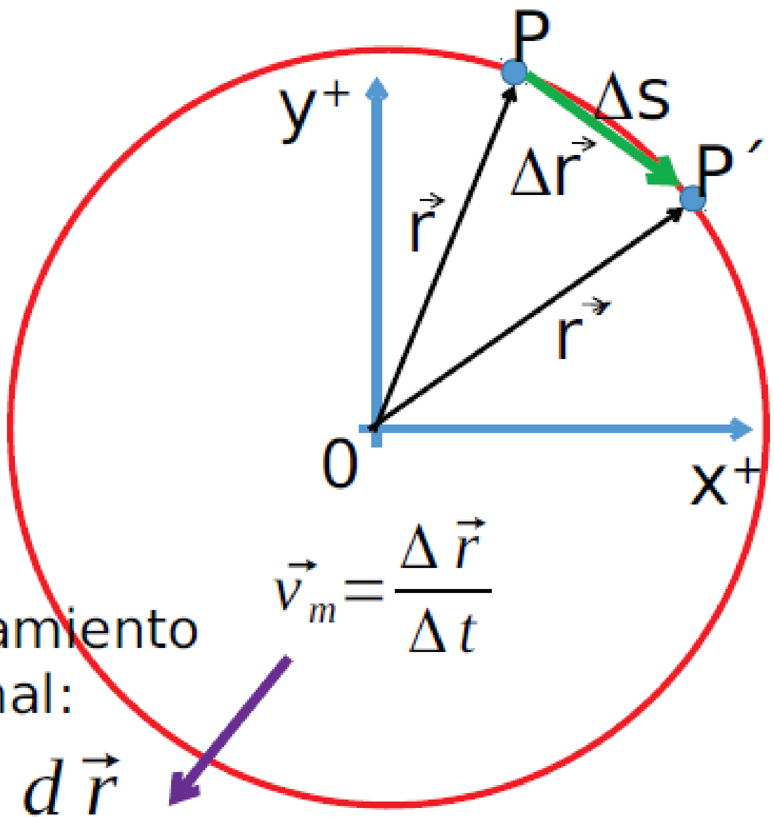


Movimiento circular





$$\vec{\omega}_m = \frac{\Delta \vec{\theta}}{\Delta t}$$



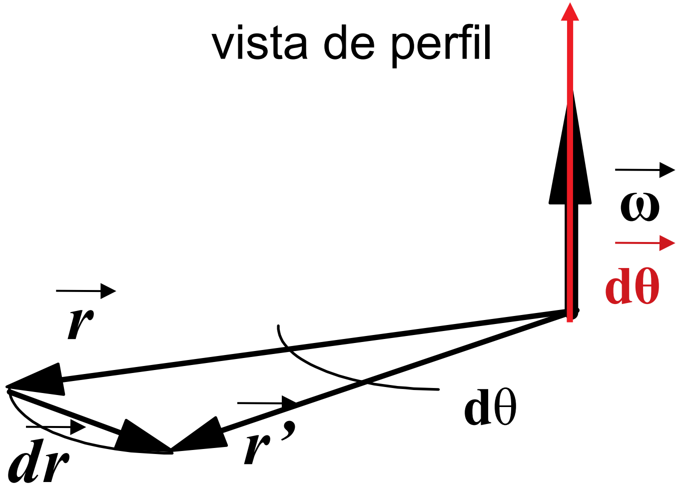
$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Cuando el desplazamiento se hace infinitesimal:

$$\vec{\omega} = \frac{d \vec{\theta}}{d t}$$

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{d t}$$

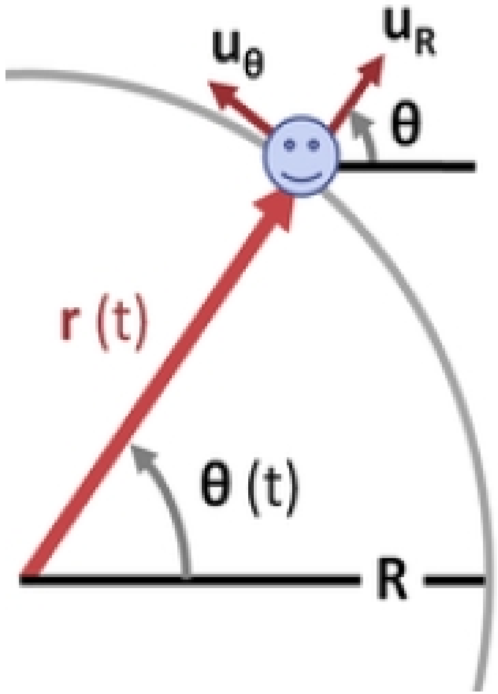
$\vec{\omega}$ representa al cambio angular respecto al tiempo.



Es un vector que se encuentra en el eje de rotación que es ⊥ al plano donde se da la rotación (ej. en este caso eje z).

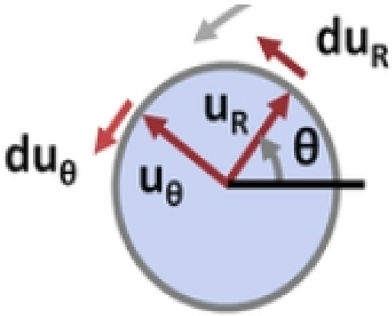
Tiene unidades de ángulo por unidad de tiempo (grados/s, radianes/h, etc.)

Movimiento circular



$$\vec{r}(t) = R\,\hat{u}_R(t)$$

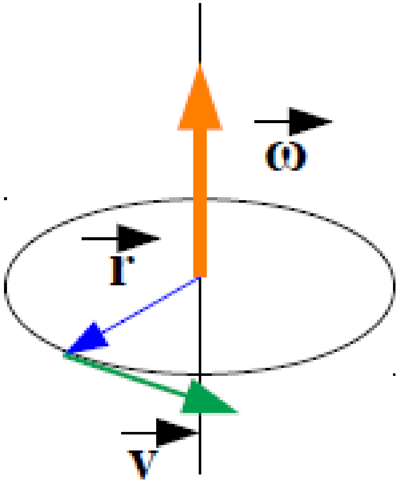
$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{u}_R(t) + R\,\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt}$$



$$\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt} = \frac{d\,\theta}{dt}\hat{u}_\theta(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = R\,\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt} = R\,\omega\,\hat{u}_\theta(t)$$

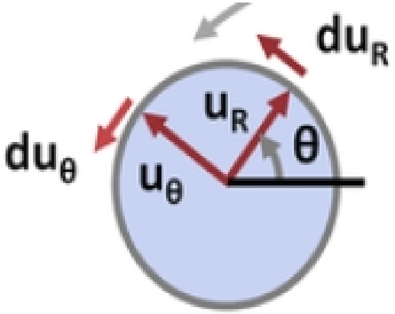
La velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

El vector aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(R\omega\hat{u}_\theta(t)\right)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta(t) + R\omega\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}$$



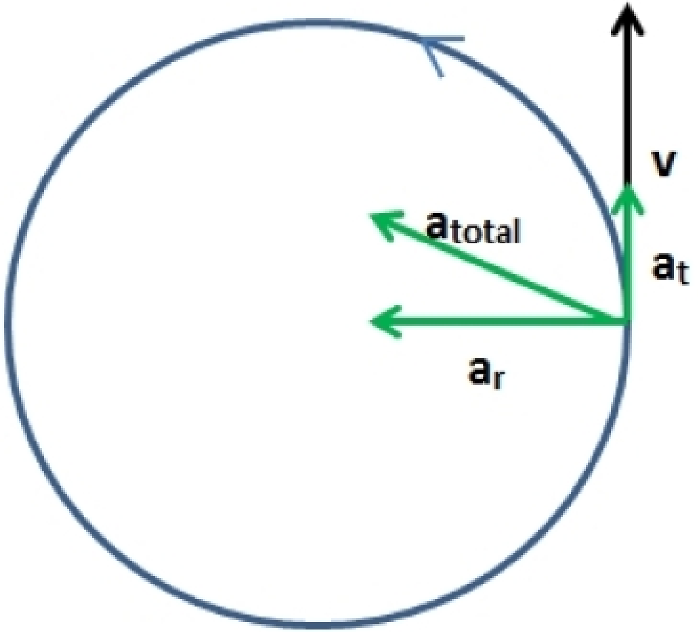
$$\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = \frac{-d\theta}{dt}\hat{u}_R(t) = -\omega\hat{u}_R(t)$$

$$\vec{a}(t) = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta(t) + R\omega\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = R\alpha\hat{u}_\theta(t) - R\omega^2\hat{u}_R(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{rad}(t) + \vec{a}_{\tan}(t)$$

$$-R\,\omega^2 \hat{u}_R(t) = \frac{-|\vec{v}|^2}{R}\hat{u}_R(t)$$

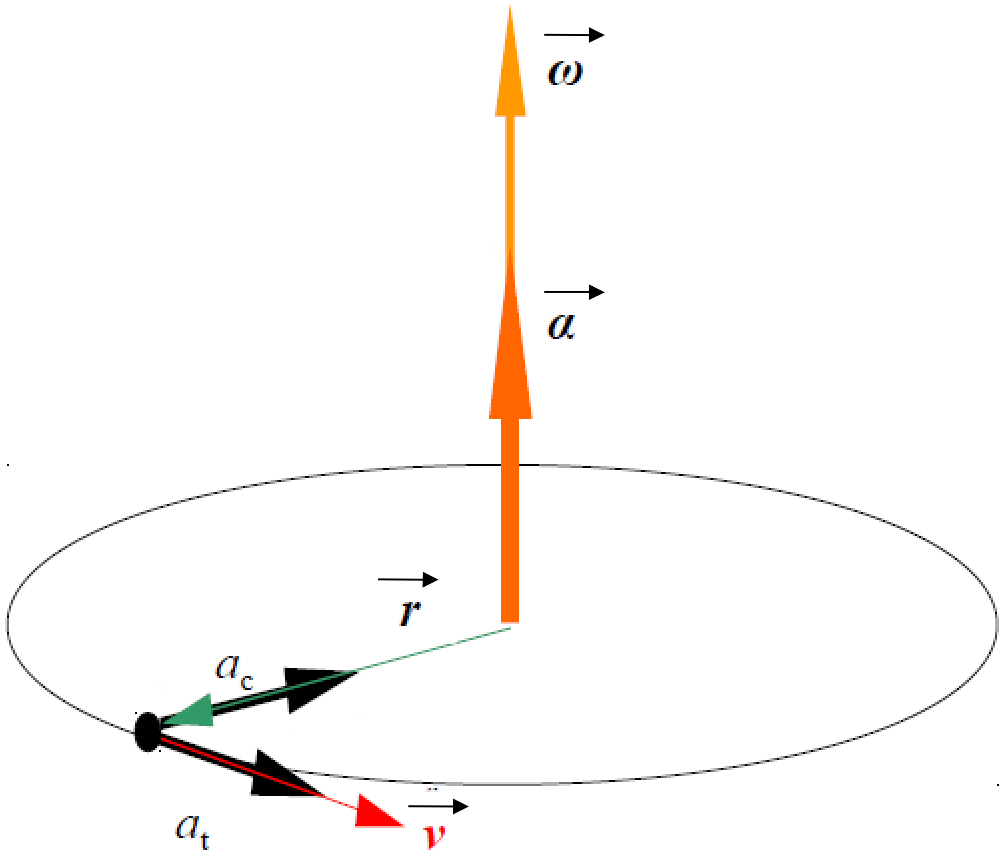
$$R\,\alpha\,\hat{u}_\theta(t)$$



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Aceleración angular (grados/s^2 ,etc)

La componente radial o centrípeta de la aceleración está indicando el cambio en la dirección del vector velocidad; mientras que la componente tangencial indica un cambio en el módulo de la velocidad.



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

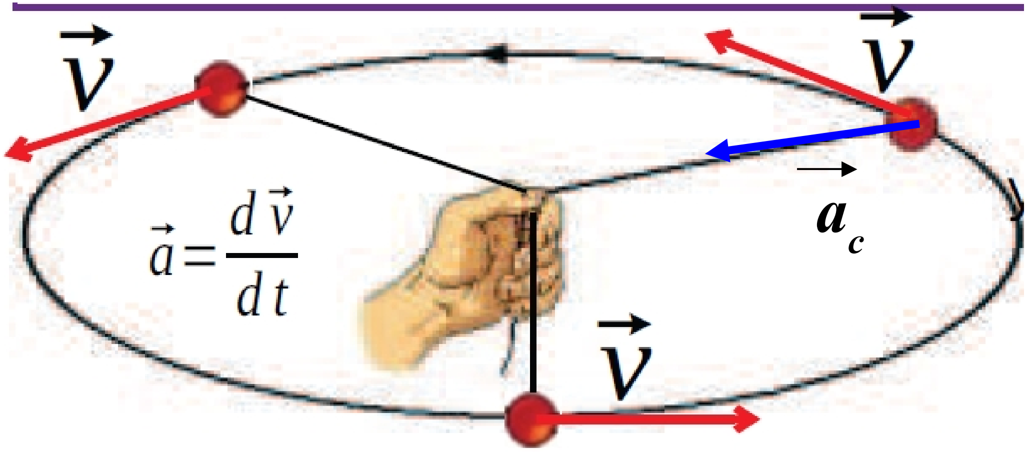
tangencial

radial

https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/rotation/latest/rotation.html?simulation=rotation&locale=es

Dinámica circular

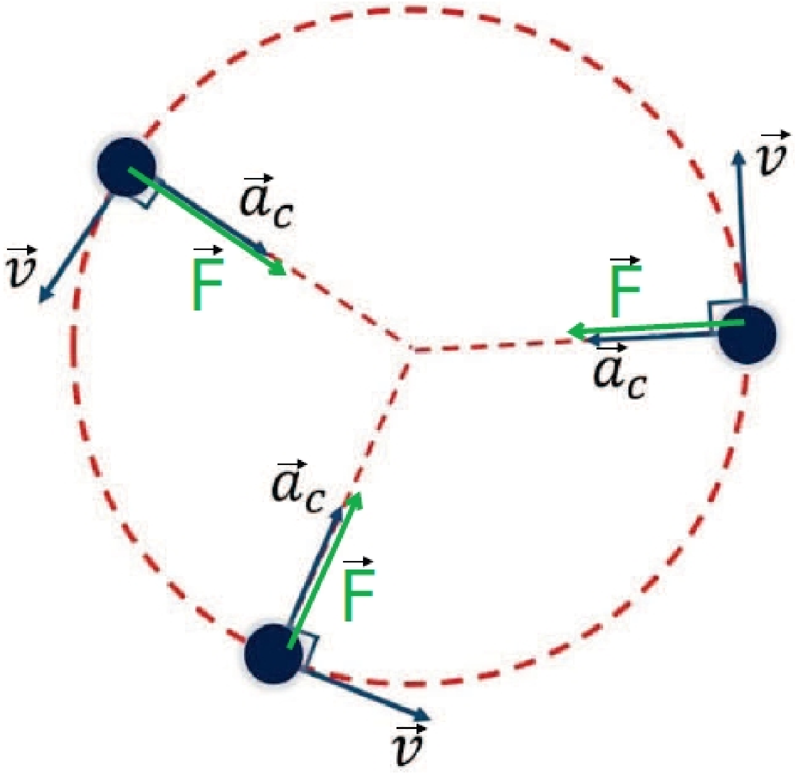
- Todo cuerpo que se mueve en una trayectoria circular estará acelerado aún en el caso donde el módulo de la velocidad sea constante.

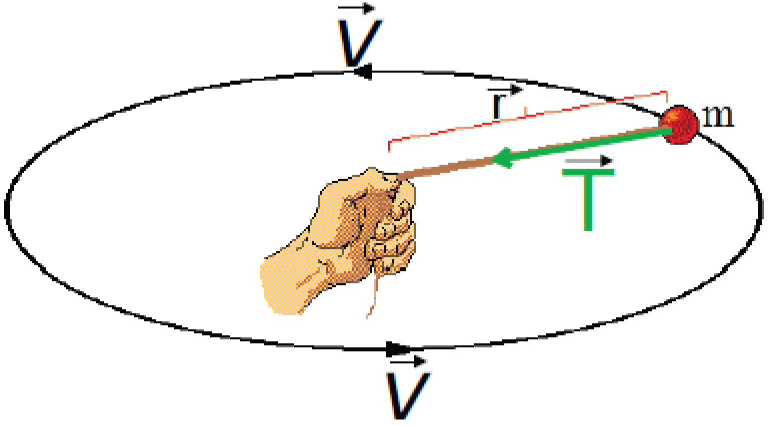


Si esto ocurre la aceleración será sólo radial apuntando hacia el centro de giro. Su módulo es

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

- De acuerdo con las leyes de Newton, si un cuerpo está acelerado, debe haber una fuerza neta actuando sobre él.

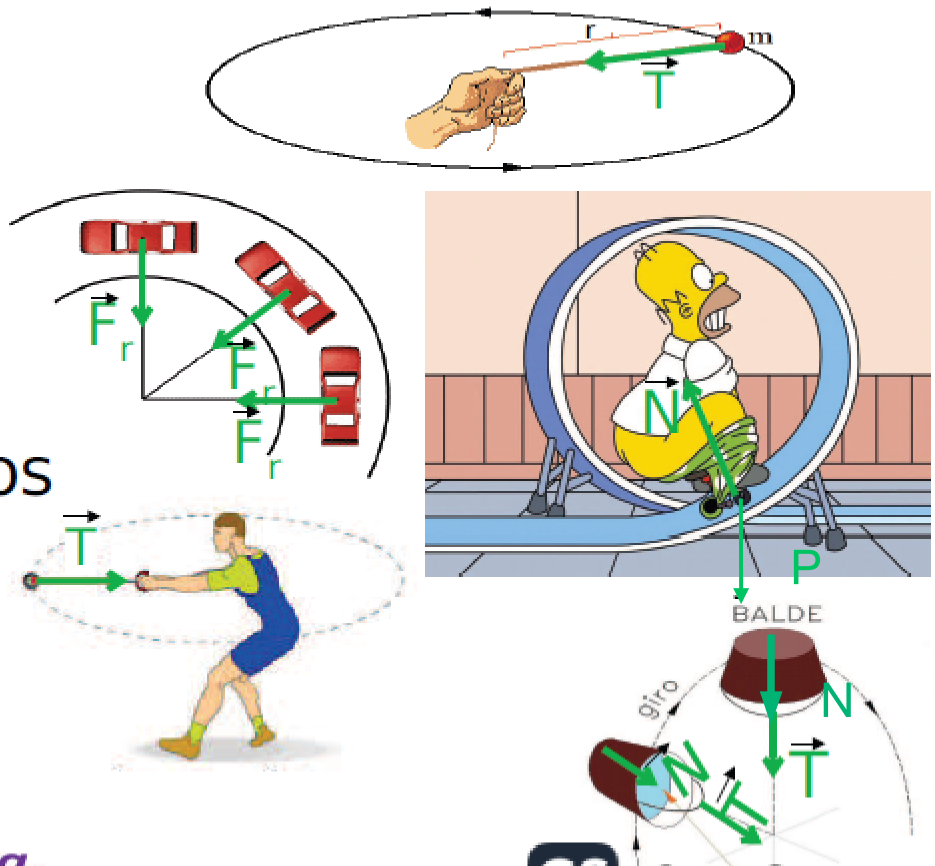




Si la fuerza deja de actuar, el movimiento dejará de ser circular ya que el cuerpo comenzá a moverse con velocidad constante en dicho plano.

Dinámica circular

¡En todos estos casos como la *Fuerza* que apunta hacia el centro de la trayectoria circular (está a 90° de *v*) sólo cambia la dirección del vector velocidad pero no su módulo!



La 2da Ley de Newton en estos casos:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cen}$$

donde $\vec{a}_{cen}$ es la *aceleración centrípeta*.

Dinámica circular

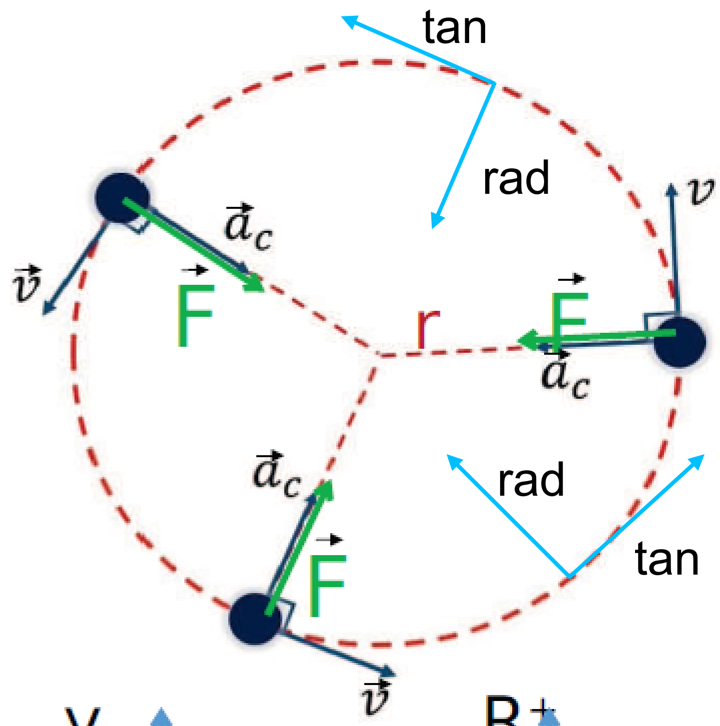
Usando la relación entre *v* y ω que encontramos al principio de esta clase:

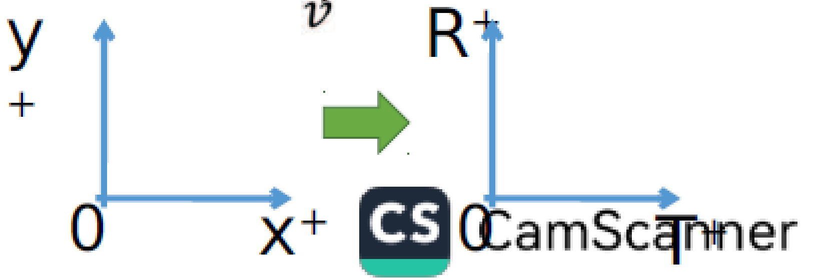
$$v = \omega\, r$$

podemos expresar la a_{cen} también en términos de la velocidad angular ω.

$$\boxed{a_{cen} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Notar que la a_{cen} tiene las mismas unidades que cualquier aceleración(m/s^2).





Tarzán (m = 85 Kg) trata de cruzar un río balanceándose en una liana de 10 m de largo. Su velocidad, cuando pasa por la parte más baja de su trayectoria es de 8 m/s. Tarzán no sabe que la tensión de ruptura de la liana es de 1000 N. ¿Cruzará el río a salvo? Si dispusiera de un sensor de fuerza (lea el apunte que describe cómo funciona) cómo podría armar una experiencia a escala para verificar si su respuesta es correcta.

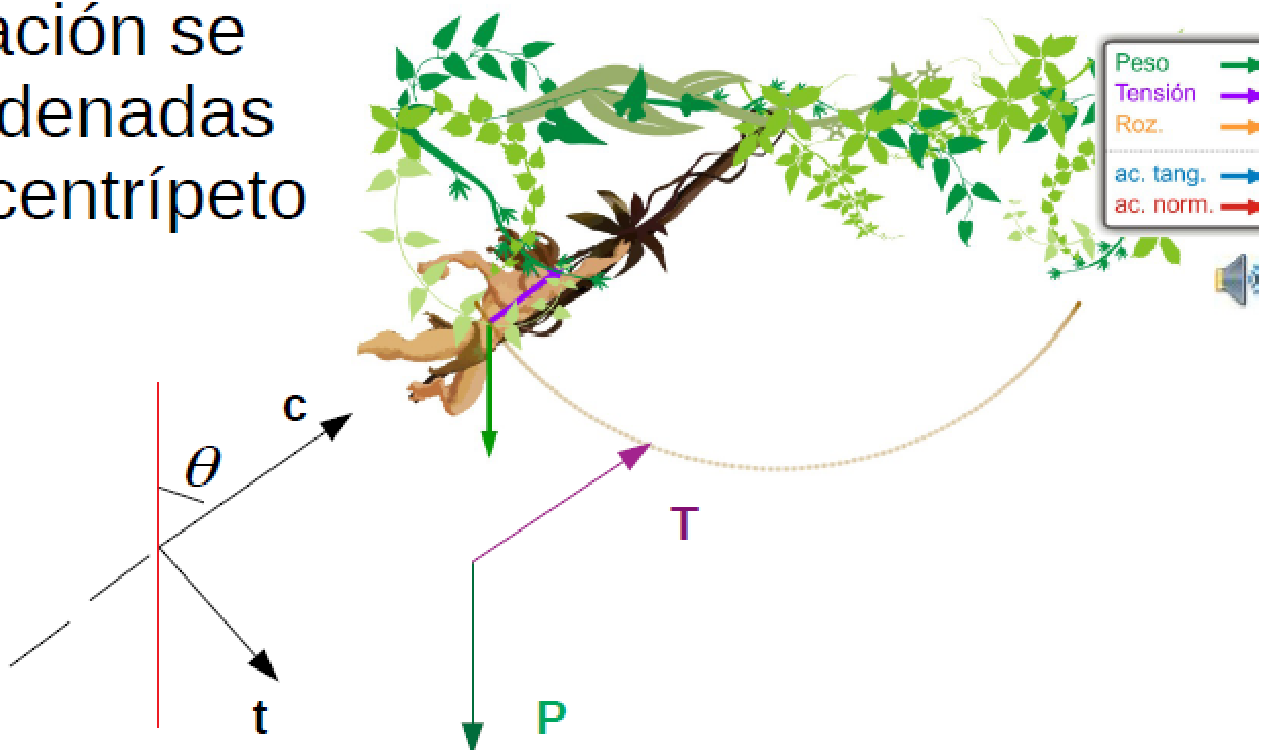
Cuando se columpia, realiza un movimiento circular cuyo radio de giro está dado por la longitud de la liana (r). Despreciando el roce con el aire, las únicas fuerzas que actúan sobre él son el peso P y la Tensión T

Ver simulación de Tarzán

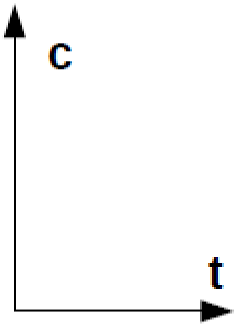
-Para analizar está situación se elije un sistema de coordenadas instantáneo con un eje centrípeto **c** y otro tangencial **t**

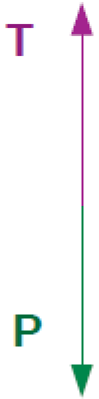
$$\sum F_c = T - P_c = T - mg\cos\theta = m\,a_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\sum F_t = P_t = mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m a_t$$



- Mientras Tarzán se columpia, el ángulo θ va cambiando tal que, cuando se halla en el punto más bajo (θ=0):





$$\sum F_c = T - mg = m a_c = m\frac{v^2}{r}$$

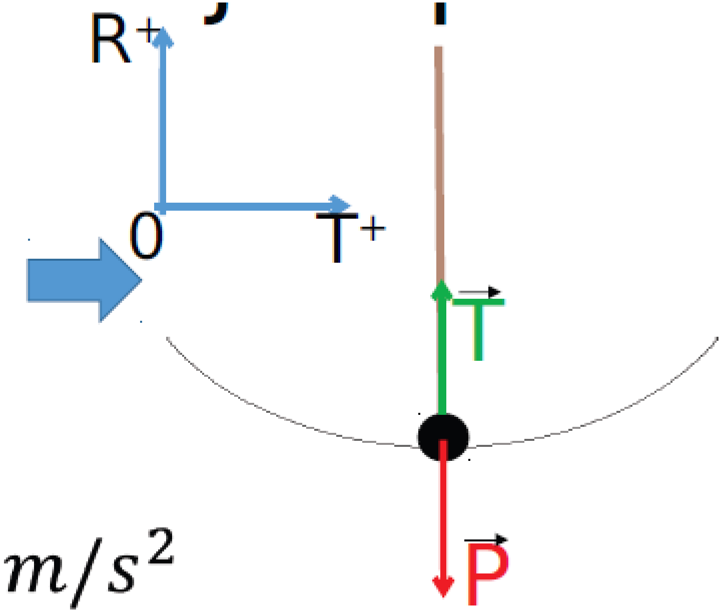
$$\sum F_t = m a_t = 0$$

en este punto la aceleración tangencial es nula.

$$T - P = m\,a_C$$

$$T = m\,a_{cen} + P$$

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$

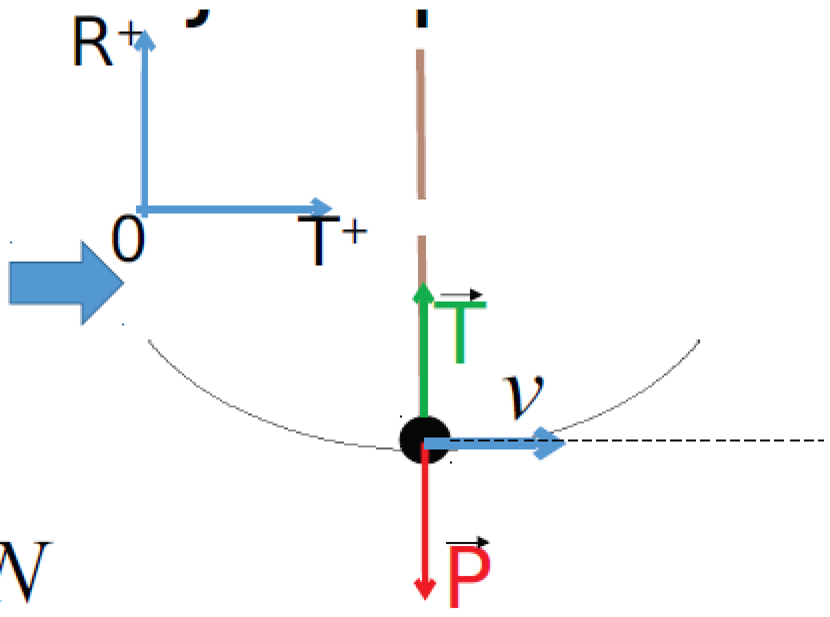


$$T = 85\,Kg\,\frac{(8\,m/s)^2}{10\,m} + 85\,Kg\;9{,}8m/s^2$$

$$T = 544\,\frac{Kg\,m}{s^2} + 833Kg\,\frac{Kg\,m}{s^2} = \boxed{1377\text{ N}}$$

La cuerda no aguanta ➡ Tarzán se cae

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$



Si no hay movimiento (v = 0) y Tarzán sólo cuelga de la liana:

$$T = mg = 80Kg\ 9{,}8m/s^2 = 833N$$

¡La liana en este caso no se rompe!

La tensión en la liana no sólo depende del peso que cuelga de ella, sino también de la velocidad de movimiento.

- Dado que en las otras posiciones (θ≠0) la aceleración tangencial es no nula el módulo de la velocidad va cambiando $|\vec{v}(t_0)| \neq |\vec{v}(t_1)|$ en dichos instantes; mientras que cuando la aceleración centrípeta no es nula, la dirección es la que cambia.

Cinemática circular

$$\vec{\alpha}(t)=\frac{d\,\vec{\omega}(t)}{dt} \longrightarrow \int_{t_i}^{t}\vec{\alpha}(t)\,dt=\int_{t_i}^{t}d\vec{\omega}(t)=\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_i)$$

$$\vec{\omega}(t)=\frac{d\,\vec{\theta}(t)}{dt}$$

$$\int_{t_i}^{t}\vec{\omega}(t)\,dt=\int_{t_i}^{t}\int_{t_i}^{t}\vec{\alpha}(t)\,dt\,dt+\int_{t_i}^{t}\vec{\omega}(t_i)\,dt=\int_{t_i}^{t}d\vec{\theta}(t)=\vec{\theta}(t)-\vec{\theta}(t_i)$$

Si $\vec{\alpha}$ es constante

$$\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_i)=\vec{\alpha}\,\Delta t$$

$$\vec{\theta}(t)-\vec{\theta}(t_i)=\vec{\omega}(t_i)\Delta t+\frac{\vec{\alpha}}{2}(\Delta t)^2$$

Un auto toma una curva a velocidad constante por una carretera plana de radio constante R. Si el coeficiente de roce estático y dinámico entre la superficie y el auto es μ_e y μ_d respectivamente,

a) Indique en un gráfico en qué sentido actuará la fuerza de roce sobre los neumáticos del auto mientras el mismo toma la curva?

b) Hallar la expresión de la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin deslizar, ¿De qué parámetros depende esta $v_{máx}$?

c) Si la carretera se hubiera diseñado con un peralte de ángulo α y se pudiera despreciar el roce, ¿podría tomarse la curva sin deslizar a pesar de la falta de roce? En caso afirmativo hallar la expresión de la velocidad con que debería ser tomada la curva.

http://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/CircularFrictionTestTrack/index.html

Cinemática de la partícula, independencia de movimientos

- Gracias a las leyes de Newton, mediante un análisis de las fuerzas que actúan sobre un sistema (análisis dinámico) podemos determinar si un sistema se encuentra cambiando o no su estado de movimiento.
-

$$\sum_{i} \vec{F}_i = \vec{F}_R = m\vec{a} \qquad (1)$$

- Este tipo de análisis permite determinar la aceleración del sistema $\vec{a}(t)$, pero no proporciona información acerca de $\vec{r}(t)$ ni de $\vec{v}(t)$

- Recordando la definición de $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) = \lim_{t \to 0} \Delta \vec{a} = \lim_{t \to 0} \Delta \vec{v} / \Delta t = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2)$$

- Se tiene que $\int_{t_{inicial}}^{t} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_{inicial}) = \int_{t_{inicial}}^{t} \vec{a}(t)\,dt \quad (3)$

- entonces a partir de $\vec{a}(t)$ y si se conoce la velocidad inicial se puede predecir la velocidad $\vec{v}(t)$

- Por otra parte, por definición $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

- Por ende, $$\int_{t_{inicial}}^{t} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_{inicial}) = \int_{t_{inicial}}^{t} \vec{v}(t)\,dt \qquad (4)$$

- Reemplazando $\vec{v}(t)$ por la expresión que se obtiene de la ec. (3) se llega a

$$\vec{r}(t) = \iint_{t_{inicial}}^{t} \vec{a}(t)\,dt\,dt + \int_{t_{inicial}}^{t} \vec{v}(t_{inicial})\,dt + \vec{r}(t_{inicial}) \qquad (5)$$

- Para predecir $\vec{r}(t)$ a partir de la aceleración $\vec{a}(t)$ es necesario conocer los vectores velocidad y posición iniciales $\vec{v}(t_{inicial})$ y $\vec{r}(t_{inicial})$

- Por otra parte, $\vec{F}$ constantes generan $\vec{a}(t)$ constantes.

- Tomando este caso específico, se tiene que

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(t_{inicial})+\vec{a}\left[t-t_{inicial}\right] \qquad (6)$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_{inicial})+\vec{v}(t_{inicial})\left[t-t_{inicial}\right]+\frac{\vec{a}}{2}\left[t-t_{inicial}\right]^2 \qquad (7)$$

Estas dos expresiones son las llamadas "ecuaciones de la cinemática" o "ecuaciones horarias", son válidas siempre y cuando la aceleración del sistema sea constante. Son ecuaciones **VECTORIALES**

Como se puede percibir estas expresiones NO dependen de la masa de los cuerpos https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html

Trabajo, energía cinética y potencia

Trabajo

- Es una magnitud escalar que se define como

$$W=\int_i^f \vec{F}\,.\,d\vec{r}=\int_i^f F\cos\theta\, ds=\int_i^f F_x dx+F_y dy+F_z dz$$

siendo θ el ángulo entre los vectores.

Una fuerza realiza trabajo cuando, debido a ella, se genera un desplazamiento de su punto de aplicación en la dirección de dicha fuerza cambiando el estado de movimiento del cuerpo donde está aplicada. Tiene unidades de fuerza por longitud.

En MKS $\longrightarrow$ Newton metro=Joule [Nm=J]

- Al ser un producto escalar

$$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow W=0$$

$$\cos\theta = \cos\left(90^0\right) = 0$$

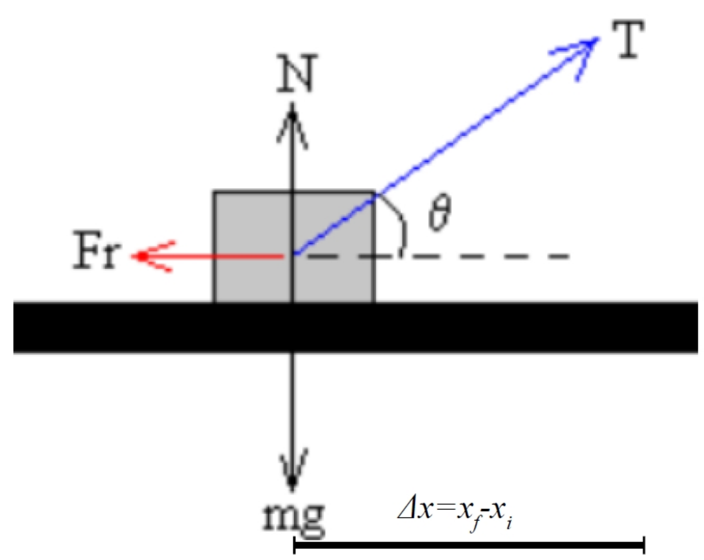
$$\vec{F}\, \tilde{h}\, \vec{r} \Rightarrow W>0$$

$$\cos\theta = \cos\left(0^0\right) = 1$$

$$\vec{F} | \vec{r} \Rightarrow W<0$$

$$\cos\theta = \cos\left(180^0\right) = -1$$

El cuerpo se desplaza hacia la derecha en el eje x un $\Delta x = x_f - x_i$



Las fuerzas Normal y Peso son $\perp$ a Δx , W=0

$$W_T = \int_i^f \vec{T} . d\vec{r} = \int_i^f T_x dx = T\cos\theta \Delta x > 0$$

$$W_{F_r} = \int_i^f \vec{F}_r . d\vec{r} = \int_i^f F_r \cos\left(180^0\right) dx = \int_i^f \left(-F_r\right) dx = -F_r \Delta x < 0$$

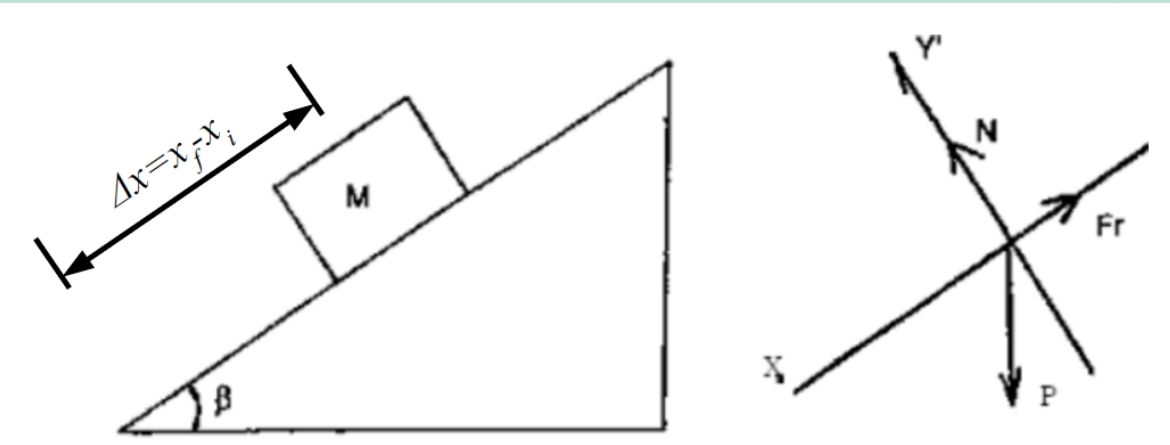
- Un bloque se desliza hacia abajo un $\Delta x = x_f - x_i$ por un planco inclinado rugoso. El sistema coordenado es positivo hacia abajo

$$\sum F_y = N - P\cos\beta = 0 \qquad \sum F_x = P\sin\beta - F_r = ma_x$$

El movimiento está dado en el eje x, entonces la Normal NO hace trabajo.

$$W_P = \int_i^f \vec{P}.d\vec{r} = \int_i^f P\underbrace{\cos\left(270^0+\beta\right)}_{\cos\left(270^0+\beta\right)=\cos\left(90^0-\beta\right)=\sin\beta} dx = P\sin\beta\Delta x$$

$$W_{F_r} = \int_i^f \vec{F}_r.d\vec{r} = \int_i^f F_r\cos\left(180^0\right)dx = -F_r\Delta x$$



Teorema de trabajo y energía cinética

$$W_{neto}=\int_i^f \overrightarrow{F_{neta}}.d\vec{r}=\int_i^f F_{nx}dx+F_{ny}dy+F_{nz}dz=\int_i^f m\left(a_x dx+a_y dy+a_z dz\right)=\int_i^f m\left(\frac{dv_x}{dt}dx+\frac{dv_y}{dt}dy+\frac{dv_z}{dt}dz\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=v_x \qquad \frac{dy}{dt}=v_y \qquad \frac{dz}{dt}=v_z$$

$$W_{neto}=m\int_i^f \left(v_x dv_x+v_y dv_y+v_z dv_z\right)=m\left(\int_i^f v_x dv_x+\int_i^f v_y dv_y+\int_i^f v_z dv_z\right)=\frac{m}{2}\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)\Big|_i^f$$

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=\vec{v}^{\,2}$$

$$W_{neto}=\int_i^f \overrightarrow{F_{neta}}.d\vec{r}=\frac{m}{2}\left(\vec{v}_f^2-\vec{v}_i^2\right)$$

$$\vec{v}^2=v^2$$

Se dice que una cierta **masa** tiene **energía** cuando tiene la capacidad de producir un **trabajo**

ENERGÍA CINÉTICA $E_c=\frac{mv^2}{2}$, es una magnitud escalar que representa a la energía asociada al movimiento

$$W_{neto}=\int_i^f \overrightarrow{F_{neta}}.d\vec{r}=E_{c_f}-E_{c_i}=\Delta E_c$$

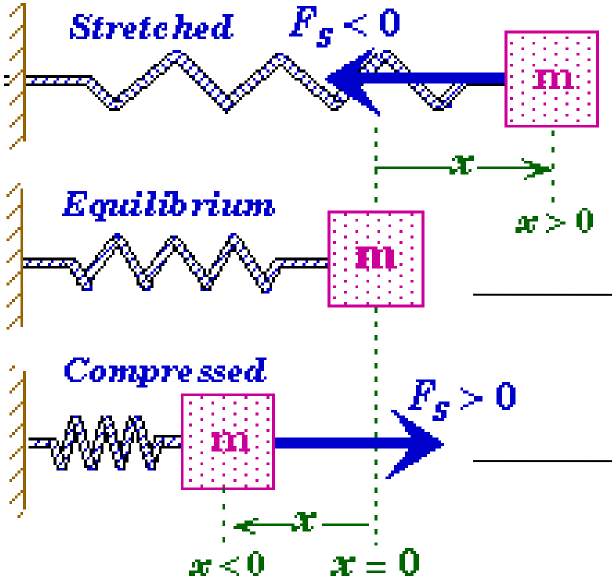
- La expresión anterior sintetiza matemáticamente al teorema que dice:
  - ***El trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un sistema es igual a la variación de la energía cinética del mismo.***

$$W_{neto} = \Delta E_c$$

Ley de Hooke (resortes)

La fuerza que genera un resorte $\vec{F}_s$ depende de la posición y de una cte. k propia de cada resorte que tiene unidades de N/m. La aceleración también dependerá entonces de la posición.

$$\vec{F}_s = -k\vec{x} = m\vec{a}$$



$$\sum F_x = F_s = -kx = ma_x$$

Aceleración negativa

$F_s = -k\,x$

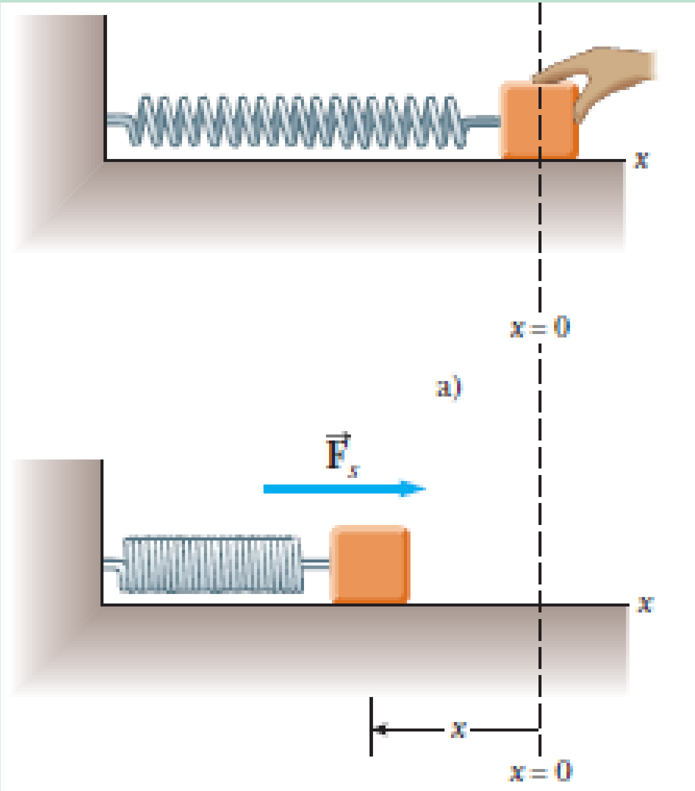
$$\sum F_x = F_s = 0$$

Aceleración nula

$$\sum F_x = F_s = -k\left(-x\right) = kx = ma_x$$

Aceleración positiva

- El trabajo realizado por la fuerza que ejerce un resorte comprimido sobre un cuerpo cuando se lo libera y recorre una distancia x está dado por:



$$W_{elástica} = \int_{-x}^{0} \vec{F}_{elástica} \cdot d\vec{r} = \int_{-x}^{0} (-kx)\cos(0^0)\,dx = \int_{0}^{-x} kx\,dx$$

$$W_{elástica} = \frac{k}{2}\left((-x)^2 - 0^2\right) = \frac{k}{2}\Delta(x^2) = \frac{k}{2}x^2$$

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_es.html

- La potencia instantánea nos indica el cambio de la energía respecto al tiempo. Tomando al trabajo como una forma de transferencia de energía

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt}=\vec{F}.\vec{v}$$

- La potencia promedio $P_{prom}=\frac{W}{\Delta t}$

La potencia es un escalar cuya unidad de medida es energía sobre tiempo.

En MKS Watt= Joule/seg

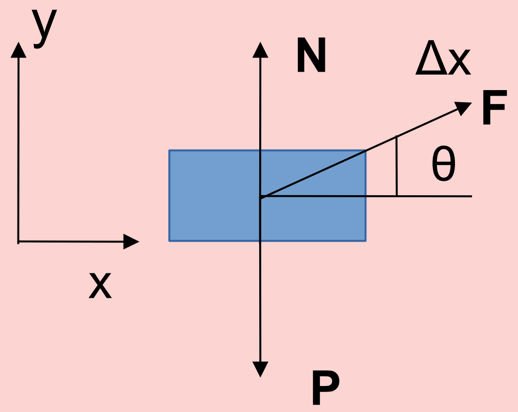
Un niño arrastra su locomotora de madera de masa m sobre una superficie sin roce, tirando de un hilo, que forma un ángulo θ con la horizontal, con una fuerza **F** constante.

a) Utilizando la definición de trabajo de una fuerza, calcule qué trabajo realiza dicha fuerza al cambiar en Δx la posición de su punto de aplicación (que coincide con un punto de la locomotora).

b) Utilizando conceptos de trabajo y energía, hallar la expresión de la velocidad que tendrá la locomotora después de experimentar el desplazamiento Δx. En clase se resolvió utilizando conceptos de dinámica y cinemética llegando al mismo resultado.

Luego de recorrer un Δx el niño se da la vuelta y recorre el mismo trayectoria pero en sentido contrario volviendo a su posición inicial.

c) Calcule el trabajo total realizado por la fuerza **F**

- 

a) $$W_F = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Sólo la componente x de **F** Realiza trabajo sobre la locomotora

$$W_F = \int_{x_i}^{x_f} F\cos\theta dx = F\cos\theta\left(x_f - x_i\right) = F\cos\theta\Delta x > 0$$

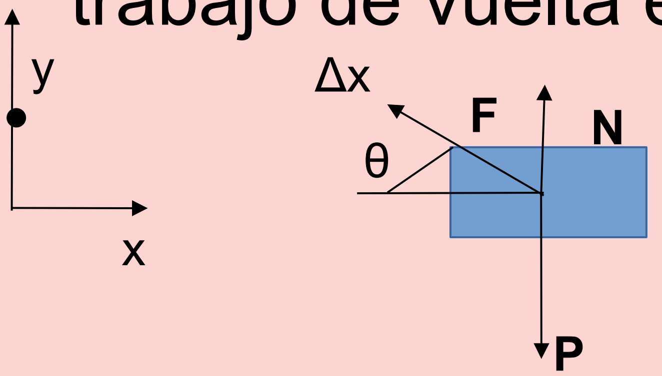
b) Utilizando el teorema de trabajo y energía cinética $W_{neto} = \Delta E_c$

La energía cinética inicial es 0 ya que parte del reposo.

$$W_{neto} = W_F = \Delta E_c$$

$$F\cos\theta\Delta x = \frac{m}{2} v_f^{\ 2} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2F\cos\theta\Delta x}{m}}$$

- c) El trabajo de ida es $W_F = F\cos\theta\Delta x$ mientras que el trabajo de vuelta está dado por:



$$W_{F_v} = \int_{x_f}^{x_i} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{x_f}^{x_i} F_x dx = \int_{x_f}^{x_i} \left(-F\cos\theta\right) dx$$

$$W_{F_v} = \int_{x_i}^{x_f} F\cos\theta\left(dx\right) = F\cos\theta\left(x_f - x_i\right) = F\cos\theta\Delta x > 0$$

Luego el trabajo total realizado por la fuerza **F**

$$W_{F_{total}} = W_F + W_{F_v} = F\cos\theta\Delta x + F\cos\theta\Delta x$$

$$W_{F_{total}} = W_F + W_{F_v} = 2F\cos\theta\Delta x > 0$$

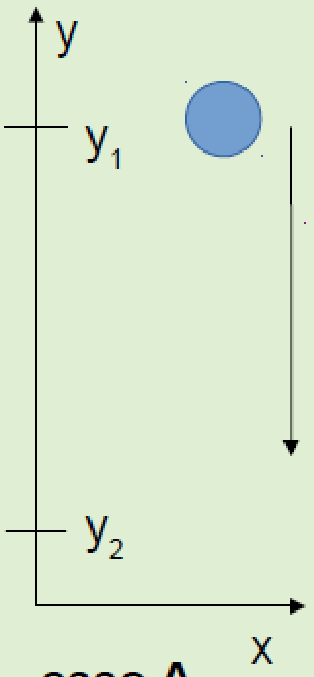
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA, FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO CONSERVATIVAS

• FUERZA CONSERVATIVA:

- si el **W** que realiza sobre un sistema es independiente a la trayectoria, sólo depende de las posiciones iniciales y finales

si el **W** que realiza sobre un sistema en una trayectoria cerrada es **nulo**

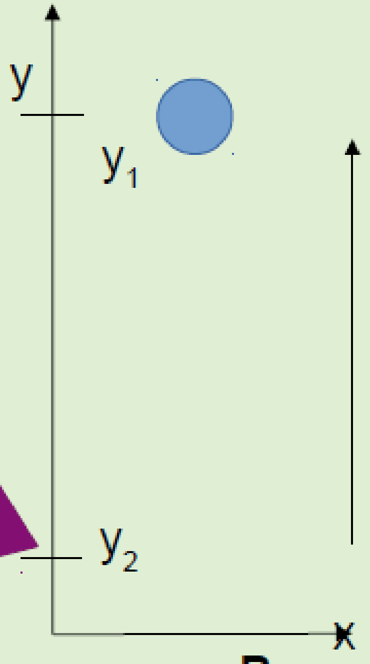
Ejemplos de fuerzas conservativas:



caso A

$$W_{\vec{F}_{gA}} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_g . d\vec{r} = -\int_{y_1}^{y_2} mg\,dy = mg\left(y_1 - y_2\right)$$

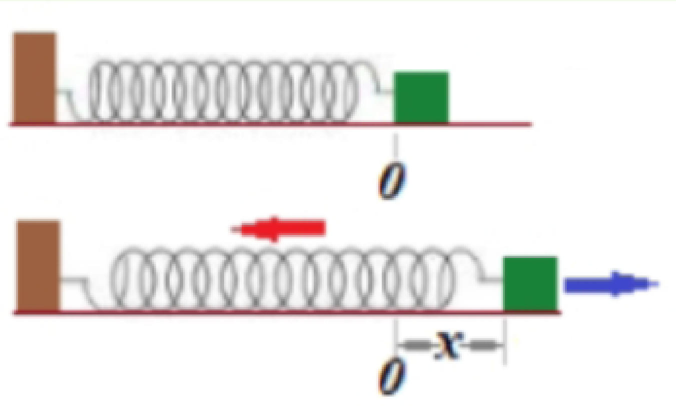
$$W_{\vec{F}_{gB}} = \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}_g . d\vec{r} = -\int_{y_2}^{y_1} mg\,dy = mg\left(y_2 - y_1\right)$$



caso B

La suma de **caso A** y **caso B** nos da una trayectoria cerrada, y el trabajo total de la fuerza gravitatoria es $W_{\vec{F}_{gT}} = W_{\vec{F}_{gA}} + W_{\vec{F}_{gB}} =$

Un bloque pegado a un resorte se desplaza de 0 a x



$$W_{el1}=\int_0^x \vec{F}_{el}.d\vec{r}=\int_0^x F_{el}dx=-\int_0^x kx\,dx=\frac{-kx^2}{2}$$

Y luego vuelve de x a 0

$$W_{el2}=\int_x^0 \vec{F}_{el}.d\vec{r}=\int_x^0 F_{el}dx=-\int_x^0 kx\,dx=\frac{kx^2}{2}$$

El trabajo neto realizado por el resorte (de 0 a X y de X a 0) es la suma de los trabajos

$$W_{neto}=W_{el1}+W_{el2}=0$$

- La **ENERGÍA POTENCIAL** es aquella forma de energía que depende la **posición** del sistema.

- Anteriormente vimos que el trabajo de un fuerza conservativa, sólo depende de las posiciones inicial y final, entonces el trabajo de este tipo de fuerzas está asociado a la energía potencial tal que

- $$W_{\vec{F}_{cons}} = -\Delta E_{potencial} = E_{potencial_i} - E_{potencial_f}$$

$$E_{pot\,grav}(y) = m g y$$

$$E_{pot\,\text{elástica}}(x) = \frac{k}{2} x^2$$

- Retomando el teorema de la clase anterior

$$W_{neto} = \Delta E_{cinética}$$

$$W_{\vec{F}_{no\,cons}} + W_{\vec{F}_{cons}} = \Delta E_{cinética}$$

$$W_{\vec{F}_{no\,cons}} + \left(-\Delta E_{potencial}\right) = \Delta E_{cinética}$$

$$W_{\vec{F}_{no\,cons}} = \Delta E_{cinética} + \Delta E_{potencial} = \Delta E_{mecánica}$$

- Se define a la **ENERGÍA MECÁNICA** de un sistema como la **suma** de sus **ENERGÍAS CINÉTICA** y **POTENCIAL**

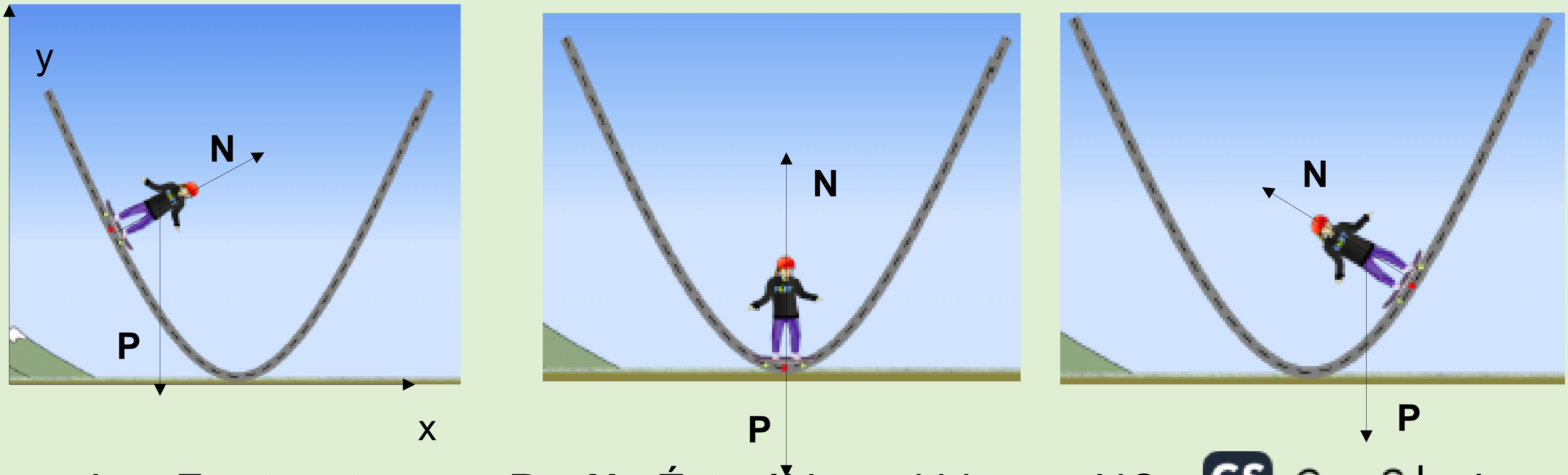
TEOREMA DE TRABAJO Y ENERGÍA MECÁNICA

El trabajo de las fuerzas NO conservativas que actúan sobre un sistema es igual a la variación de la energía mecánica del mismo.

$$W_{\vec{F}_{no\ cons}} = \Delta E_{mecánica}$$

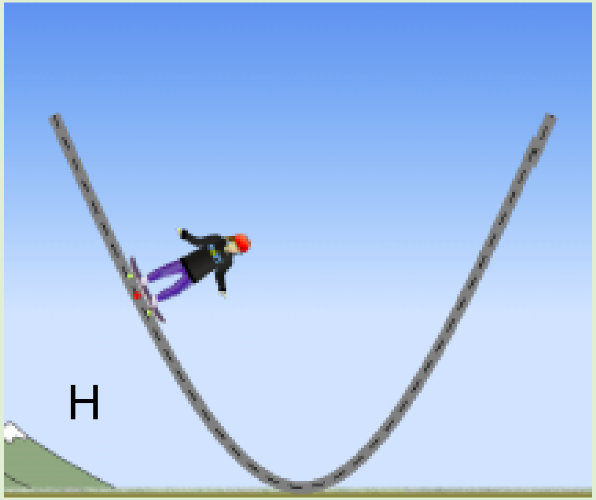
Si no hay W_{FNC} energía potencial puede transformarse en energía cinética sin que la energía mecánica del sistema cambie.

RAMPA SIN ROCE



Las **F** actuantes son **P** y **N** . Ésta última si bien es NC es siempre ⊥ al desplazamiento, NO hace W.

- La única fuerza que hace W es el **P** que es CONSERVATIVA. El niño de masa m está a una inicialmente a una altura H quieto, entonces:

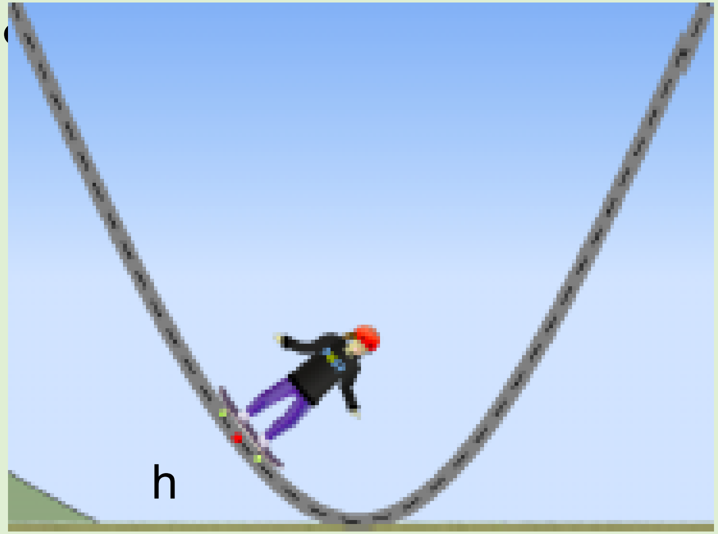


$$E_{pg_i} = m g H$$

$$E_{c_i} = 0$$

$$E_{m_i} = E_{pg_i} + E_{c_i} = m g H$$

La energía mecánica se conserva (es cte.), entonces a medida que el niño desciende (H>h), decrece su E_{pg} y aumenta su E_c pero de manera tal que E_m=cte.



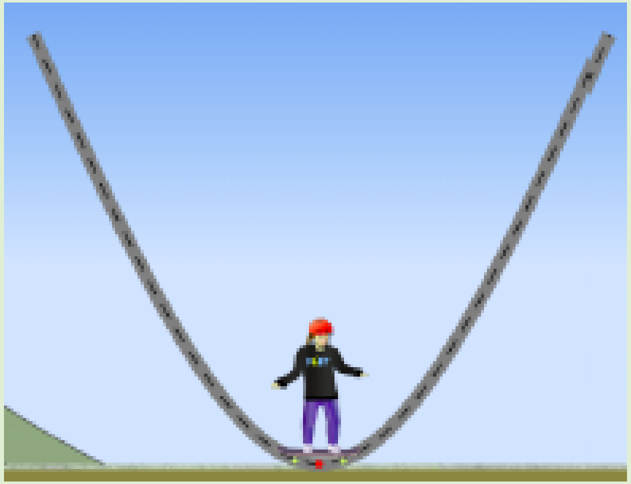
En este instante “x” (H>h),

$$E_{pg_x}=mgh \qquad E_{c_x}=\frac{m}{2}v_x^{2}$$

$$E_{m_x}=E_{pg_x}+E_{c_x}=mgh+\frac{m}{2}v_x^{2}=mgH$$

$$E_{pg_i}>E_{pg_x} \quad \text{y} \quad E_{c_i}<E_{c_x} \longleftarrow E_{m_x}=E_{m_i}=cte$$

$$v_x=\sqrt{2g\left(H-h\right)}$$



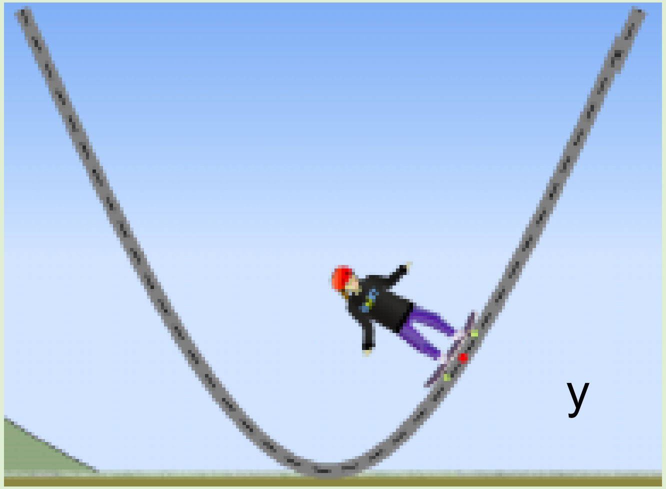
En el instante que llega a la base,

$$E_{pg_b}=0 \qquad E_{c_b}=\frac{m}{2}v_b^{\,2} \qquad \vec{v}_b=máx$$

$$E_{m_b}=E_{pg_b}+E_{c_b}=\frac{m}{2}v_b^{\,2}=m\,g\,H$$

$$E_{pg_i}>E_{pg_x}>E_{pg_b} \quad \text{y} \quad E_{c_i}<E_{c_x}<E_{c_b} \longleftarrow E_{m_b}=E_{m_x}=E_{m_i}=cte$$

$$v_b=\sqrt{2\,gH}$$



Cuando el niño comienza a ascender, encontrándose a una altura *y* (H>*y*)

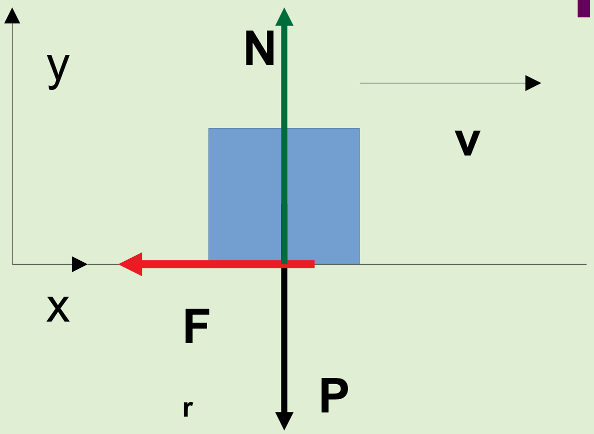
$$E_{pg_y} = m g y \qquad E_{c_y} = \frac{m}{2} v_y^2$$

$$E_{m_y} = E_{pg_y} + E_{c_y} = m g y + \frac{m}{2} v_y^2 = m g H$$

$$E_{pg_i} > E_{pg_y} > E_{pg_b} \quad \text{y} \quad E_{c_i} < E_{c_y} < E_{c_b} \longleftarrow E_{m_y} = E_{m_b} = E_{m_x} = E_{m_i} = cte$$

$$v_y = \sqrt{2g(H - y)}$$

- ¿Cuál es la altura máx a la que puede subir?
  - Usando que E_m=cte, la altura máx es H. La energía potencial es máxima y la energía cinética es nula



- ## Plano horizontal con roce

Un cuerpo que se mueve a una v_i =v entra en contacto con una superficie que tiene roce. Se desplaza una cierta distancia sobre ella hasta que termina y luego sigue moviéndose a una v_f . ¿ Cómo es esta velocidad respecto de la v_i ? ¿Cuál es el trabajo de la fuerza de roce?

El desplazamiento se da en el eje x, por ende NO hay trabajo de la **N** y del **P** entonces ΔE_{pg}=0, E_{pg}=cte. En este caso es nula. Sólo hay W de la **F_r** que es NO CONSERVATIVA, de hecho quita energía mecánica. Es una FUERZA DISIPATIVA, la velocidad v_f será menor que v_i.

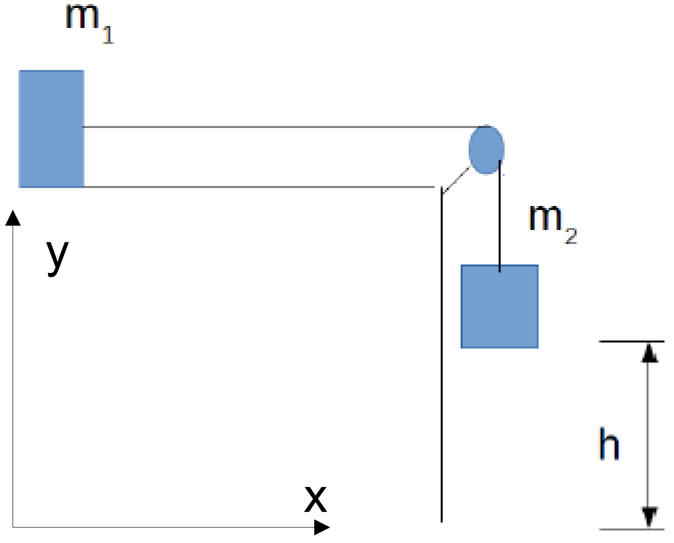
$$W_{F_r} = \Delta E_m = \frac{m}{2} v_f^2 - \frac{m}{2} v_i^2 < 0$$

Ejercicio 4 En uno de los extremos de una cuerda ligera e inextensible se ata una masa de m_1=0,25 kg, la cual está sobre una mesa horizontal con roce. La cuerda pasa por una polea de masa despreciable y sin roce, y se ata a otra masa de m_2=0,4 kg en el otro extremo, de forma que cuelga verticalmente. El coeficiente de roce dinámico entre el bloque y la mesa es μ_d=0,2.

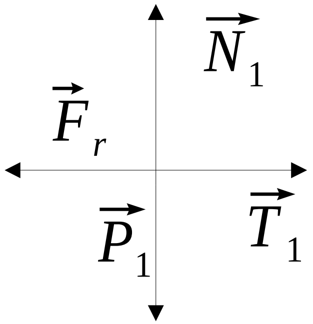
a) Enuncie el teorema de Trabajo y Energía Mecánica.

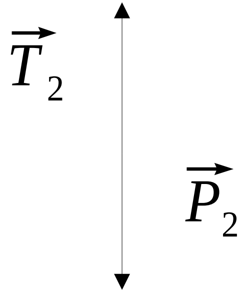
b) Determinar la velocidad de los bloques cuando cada uno de ellos se desplaza h=2 m desde el reposo.

a) El trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre un sistema es igual a la variación de la energía mecánica del mismo.



b) Como la cuerda es ideal, si m_2 desciende un $\Delta y=-h$, m_1 se deplaza un $\Delta x=h$, y ambos tienen la misma velocidad y aceleración.





m_1 se desplaza sobre el eje horizontal por ende, las fuerzas $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{P_1}$ no realizan trabajo, sólo lo hacen las fuerzas $\boldsymbol{F_r}$ y $\boldsymbol{T_1}$, que no son conservativas.

$$W_{T_1}=\int_0^h \vec{T}_1 . d\vec{x}=\int_0^h T_1 dx=T_1 h$$

$$W_{F_r}=\int \vec{F}_r . d\vec{x}=-\int F_r dx=-F_r h$$

Sobre el cuerpo 2 ambas fuerzas (***P**$_2$* y ***T**$_2$*) hacen trabajo. ***P**$_2$* es conservativa, entonces su trabajo está asociado al cambio en la energía potencial sin modificar a la energía mecánica.

$$W_{T_2}=\int_h^0 \vec{T}_2 . d\vec{y}=\int_h^0 T_2 dy=-T_2 h \qquad W_{P_2}=-\Delta E_{pg}=E_{pgi}-E_{pgf}=m_2 gh-0$$

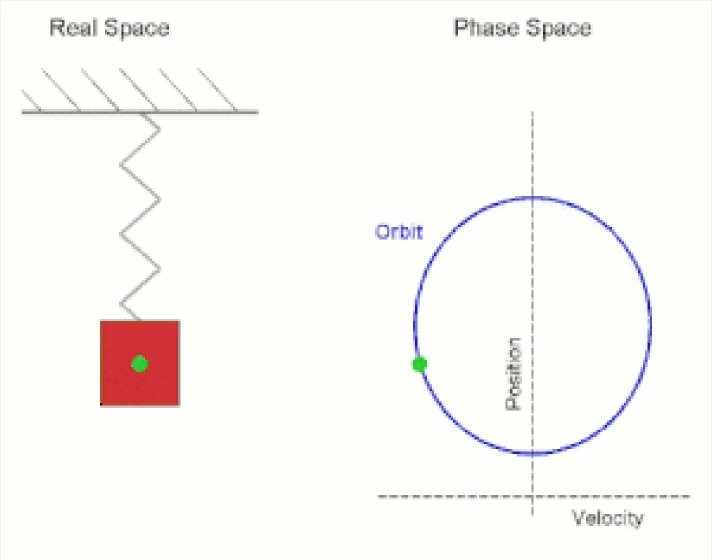
Si tomamos a los dos cuerpos como un sistema $W_{Fr}+W_{T1}+W_{T2}+W_{P2}=\Delta Ec$

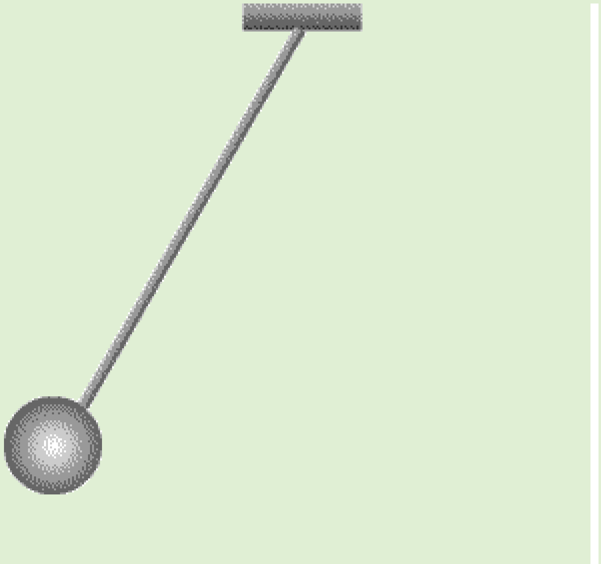
$|T_1|=|T_2|$

$$-F_r h+\cancel{T_1 h}-\cancel{T_2 h}+m_2 gh=m_1 v^2/2+m_2 v^2/2=(m_1+m_2)v^2/2$$

$$v^2=2(m_2 hg-F_r h)/(m_1+m_2)$$

Movimiento Armónico Simple (MAS)





Resortes

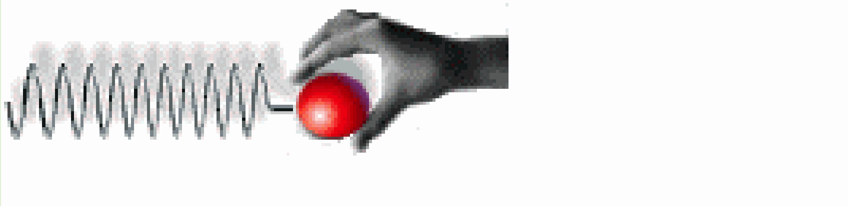
Péndulos

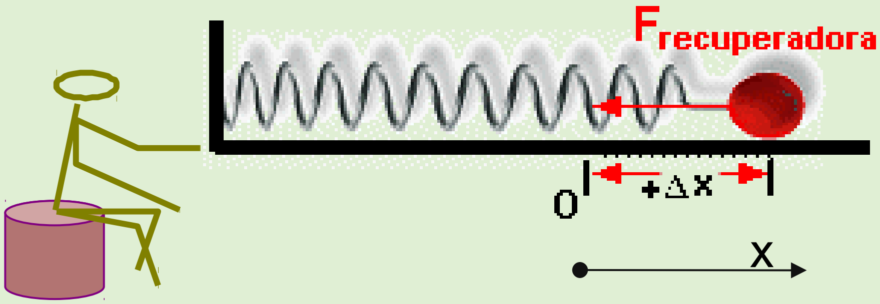
Características

- **Periódico**: todas la variables cinemáticas repiten sus valores a intervalos iguales de tiempo (T: período, tiempo que se tarda en completar un ciclo)

- **Oscilatorio**: El apartamiento de la posición de equilibrio pasa periódicamente por un máximo y un mínimo. Máximo apartamiento: amplitud (A)

- Oscilatorio y periódico independientemente del tiempo transcurrido desde el inicio (A=c





Una bola que está adosada a un resorte sobre un piso liso, es apartada de la posición de equilibrio del resorte y luego es liberada.

<u>Sistema bajo estudio:</u> **bola**

<u>Sistema de referencia:</u> **SRI** (niño sentado)

<u>Sistema coordenado:</u> **ejes cartesianos (x,y) y reloj**

- Analizamos las fuerzas que actúan en x una vez liberada la bola.

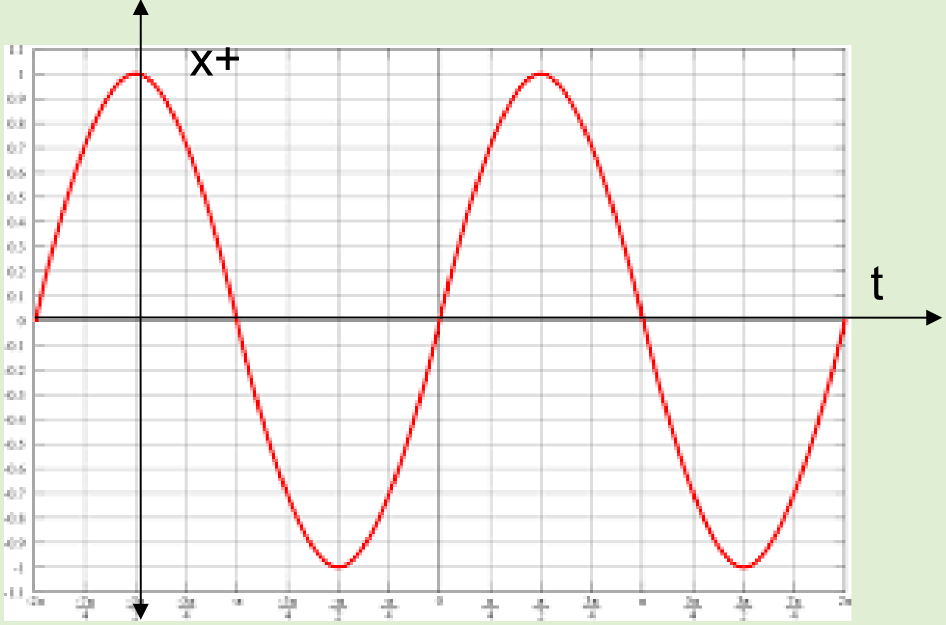
$$\sum F_x = F_{resorte} = -kx = m a_x$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\longrightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = k/m$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$

Ecuación diferencial

Funciones trigonométricas seno y coseno

$$x(t)=sen(at) \qquad x(t)=\cos(at)$$

$$x'(t)=a\cos(at) \qquad x'(t)=-a\,sen(at)$$

$$x''(t)=-a^2 sen(at) \qquad x''(t)=-a^2\cos(at)$$

- La solución de la ec. diferencial del MAS es;

$$\boxed{x(t) = A\,sen(\omega t + \phi_0)}$$

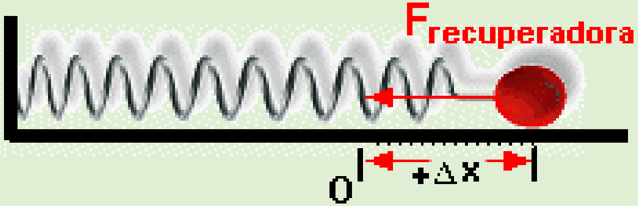
$$-A\omega^2 sen(\omega t + \phi_0) + \omega^2 A\,sen(\omega t + \phi_0) = 0$$

¿Qué representan A y Φ0?

¿Cómo se obtienen?

A partir de las condiciones a un tiempo dado.

- A tiempo t=0, la bola se encuentra a una distancia **Δx** y tiene velocidad **nula** entonces



$$x(0)=\Delta x=A\,sen(\omega 0+\phi_0)=A\,sen(\phi_0)$$

$$v_x(0)=0=A\,\omega\cos(\omega 0+\phi_0)=A\,\omega\cos(\phi_0)$$

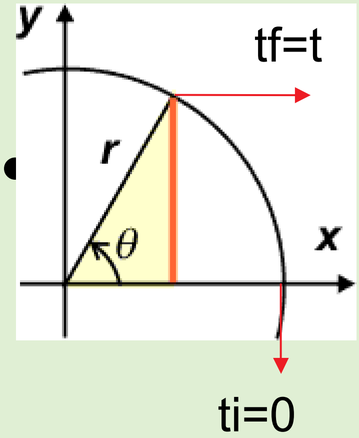
A≠0 y Φ_0≠0 $\longrightarrow \cos(\phi_0)=0 \longrightarrow \phi_0=\frac{2n+1}{2}\pi$

$$sen\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=1 \longrightarrow \Delta x=A$$

A amplitud de oscilación

Φ_0 ángulo o fase inicial

- Los argumentos del seno y coseno son ángulos, luego ωt tienen que representar un ángulo.



- Desde t=0 a un cierto t, se describe un ángulo θ, que en realidad es un $\Delta\theta=\theta-\Phi$ con Φ en este caso nulo.

- Se define la **frecuencia angular** como $\omega=\frac{d\theta}{dt}$ tal que ωt representa al ángulo que se barre.

- **ω**: depende del sistema (valor de la masa y de la constante del resorte)

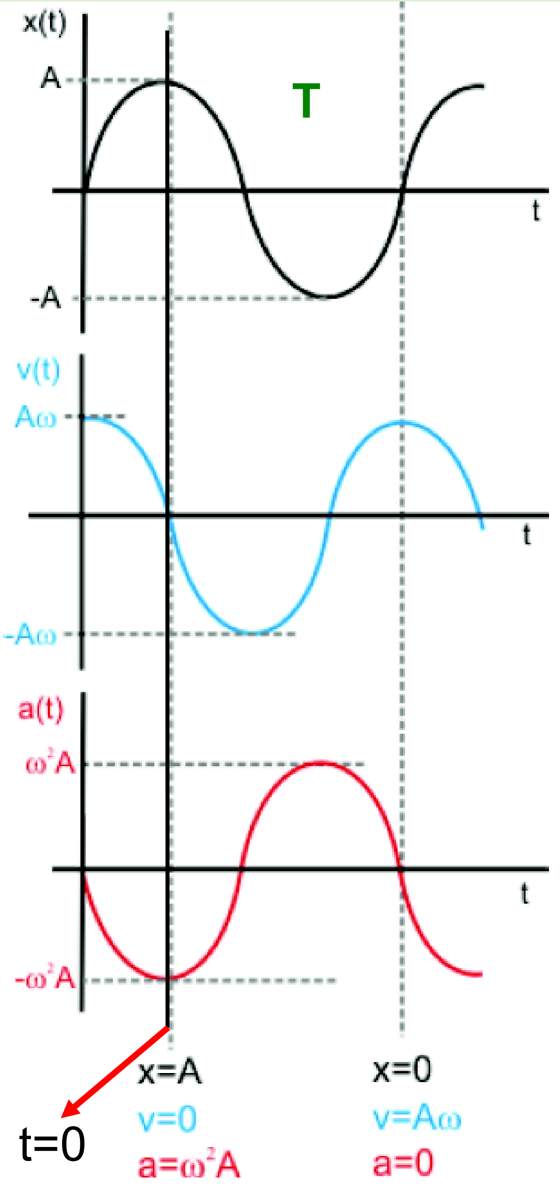
- **A** y **Φ0** : dependen de las condiciones dadas a un tiempo determinado (normalmente a tiempo t=0, condiciones iniciales)

- **T** (período): tiempo necesario para realizar una oscilación completa.

$$x(t)=A\,sen(\omega t+\phi_0)$$

$$v_x(t)=A\,\omega\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$a_x(t)=-A\,\omega^2\,sen(\omega t+\phi_0)$$



A t=0

El desplaza-miento es máx.

La velocidad nula.

La acelera-ción es máx. y sentido opuesto a x.

- x(t)=x(t+**T**)

$$x(t)=A\,sen(\omega t+\phi_0)=x(t+T)=A\,sen(\omega(t+T)+\phi_0)$$

$$\omega T=2\pi \longrightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{m/k}=\frac{1}{f}}$$

siendo ***f*** la frecuencia

$$\sum F_c = T - mg\cos\theta = m a_c = m\omega^2 L$$

$$\sum F_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m a_t = m\alpha L = m\frac{d(\omega L)}{dt} = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

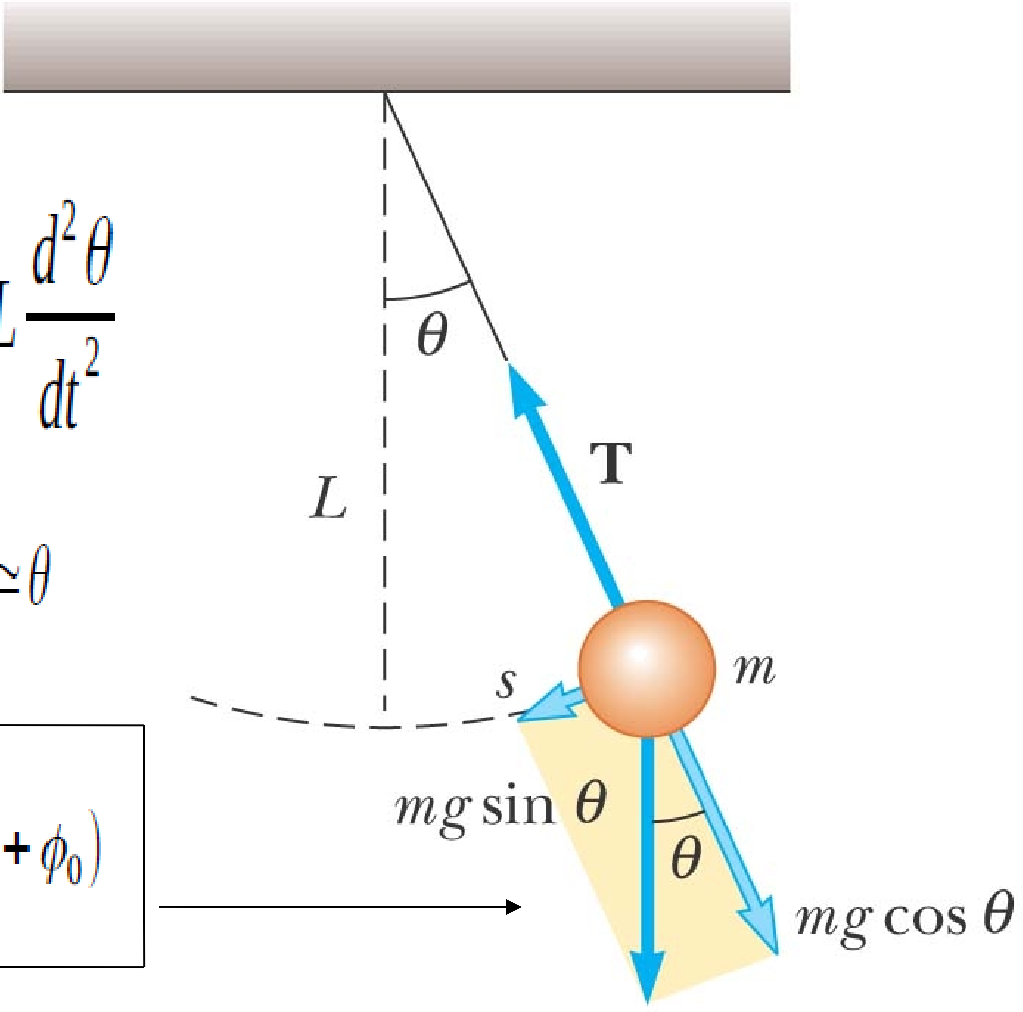
$$-g\,\mathrm{sen}\,\theta = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$$

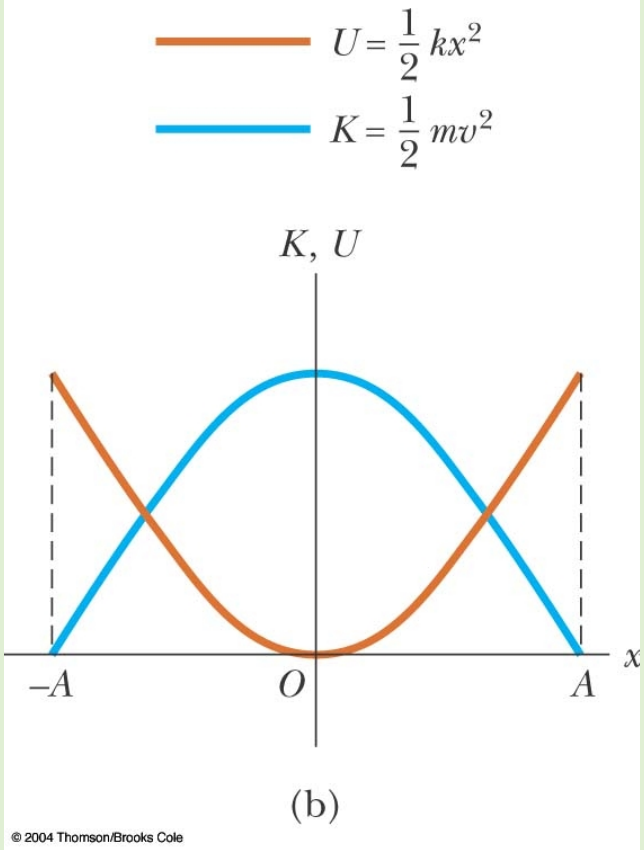
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

$$\boxed{\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \phi_0\right)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

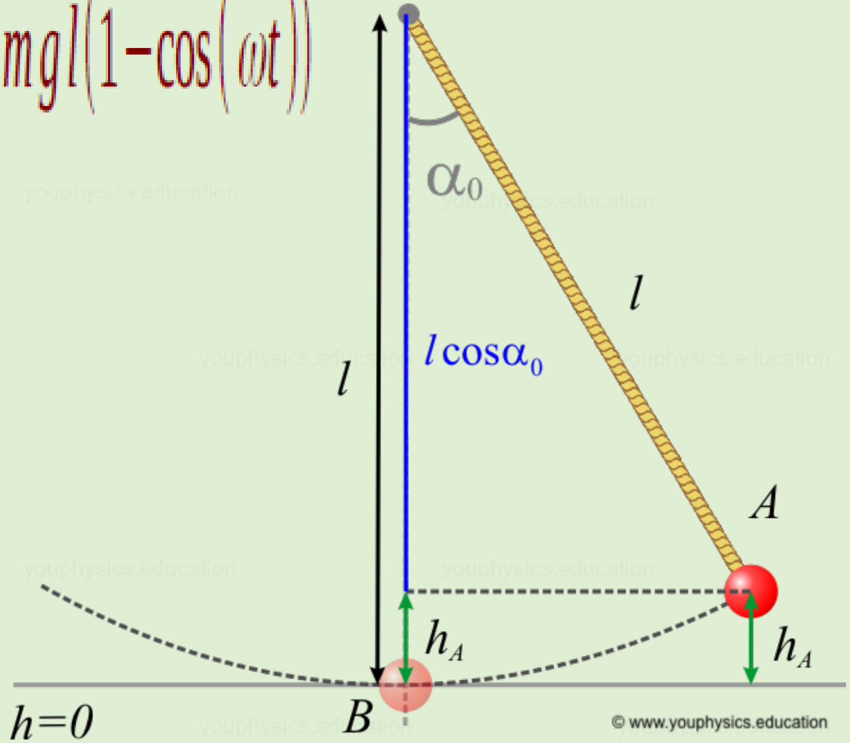


- En un MAS, las fuerzas responsables del movimiento son **CONSERVATIVAS** → $\Delta Em = 0$



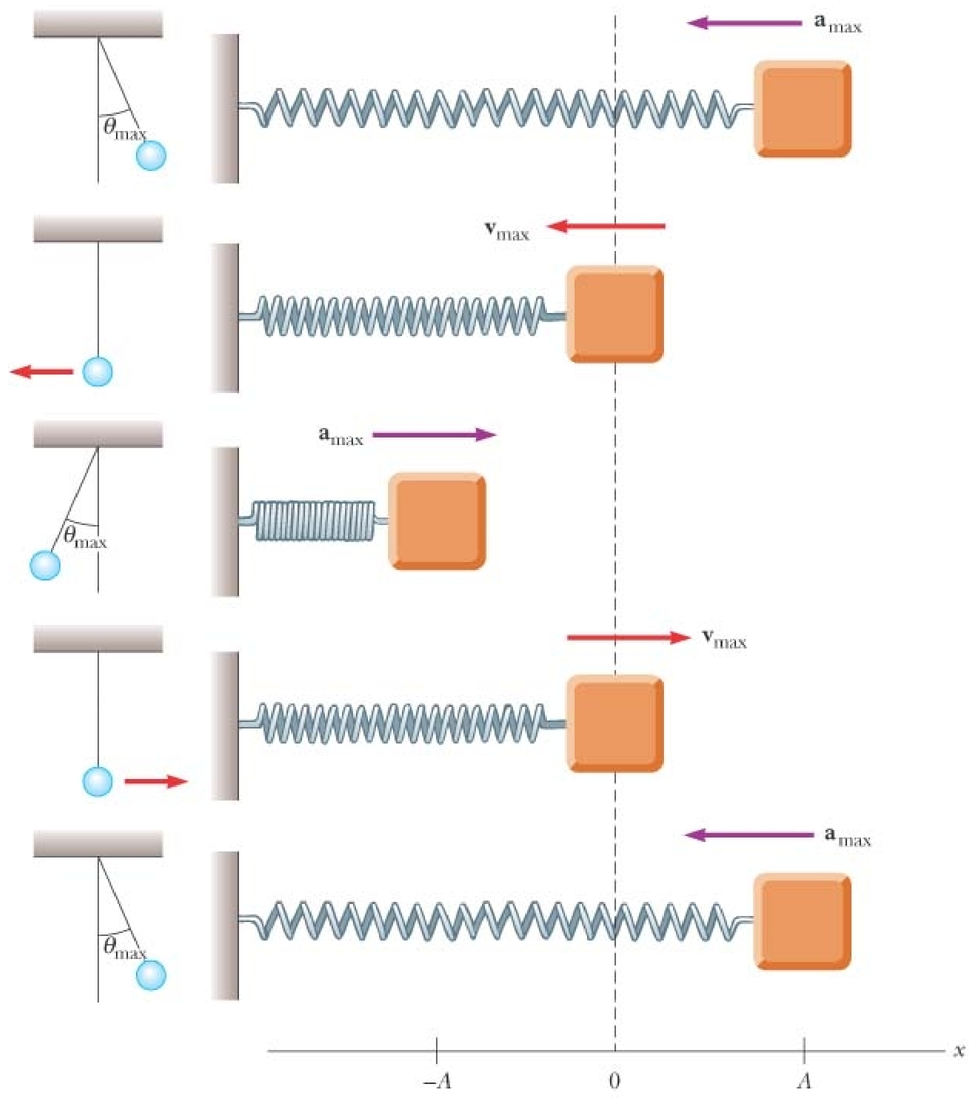
$$U = mgh = mg(l - l\cos(\alpha)) = mgl(1 - \cos(\omega t))$$

$$K = \frac{m}{2} v^2$$



Resorte horizontal

Péndulo



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Movimiento oscilatorio amortiguado

F_{roce}

rozamiento seco (**Froce**= cte)

$$\boxed{x''+\omega^2 x+\mu g=0}$$

$$\boxed{x(t)=A_0 sen(\omega t+\phi_0)-\frac{\mu g}{\omega^2}}$$

Rozamiento prop. a **v** (aire) (**Froce**=-b**v**)

$$x''+\frac{b}{m}x'+\omega_0^2 x=0$$

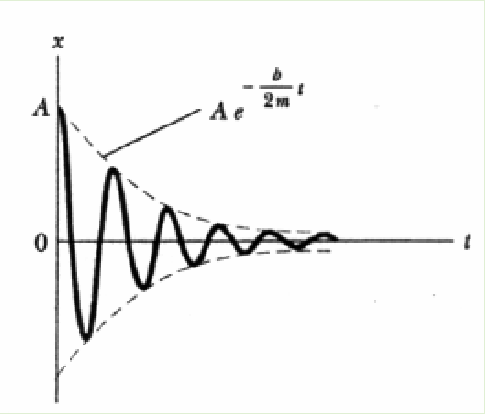
$$\boxed{x(t)=A(t)sen(\Omega t+\phi_0)}$$

$$\Omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

$$A(t)=A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}=A_0 e^{-\gamma t}$$

γ cte de amortiguamiento

- Si $\omega_0^2 > \gamma^2$ **sist. subamortiguado**



- Si $\omega_0^2 = \gamma^2$ el sistema NO oscila, está **críticamente amortiguado**.

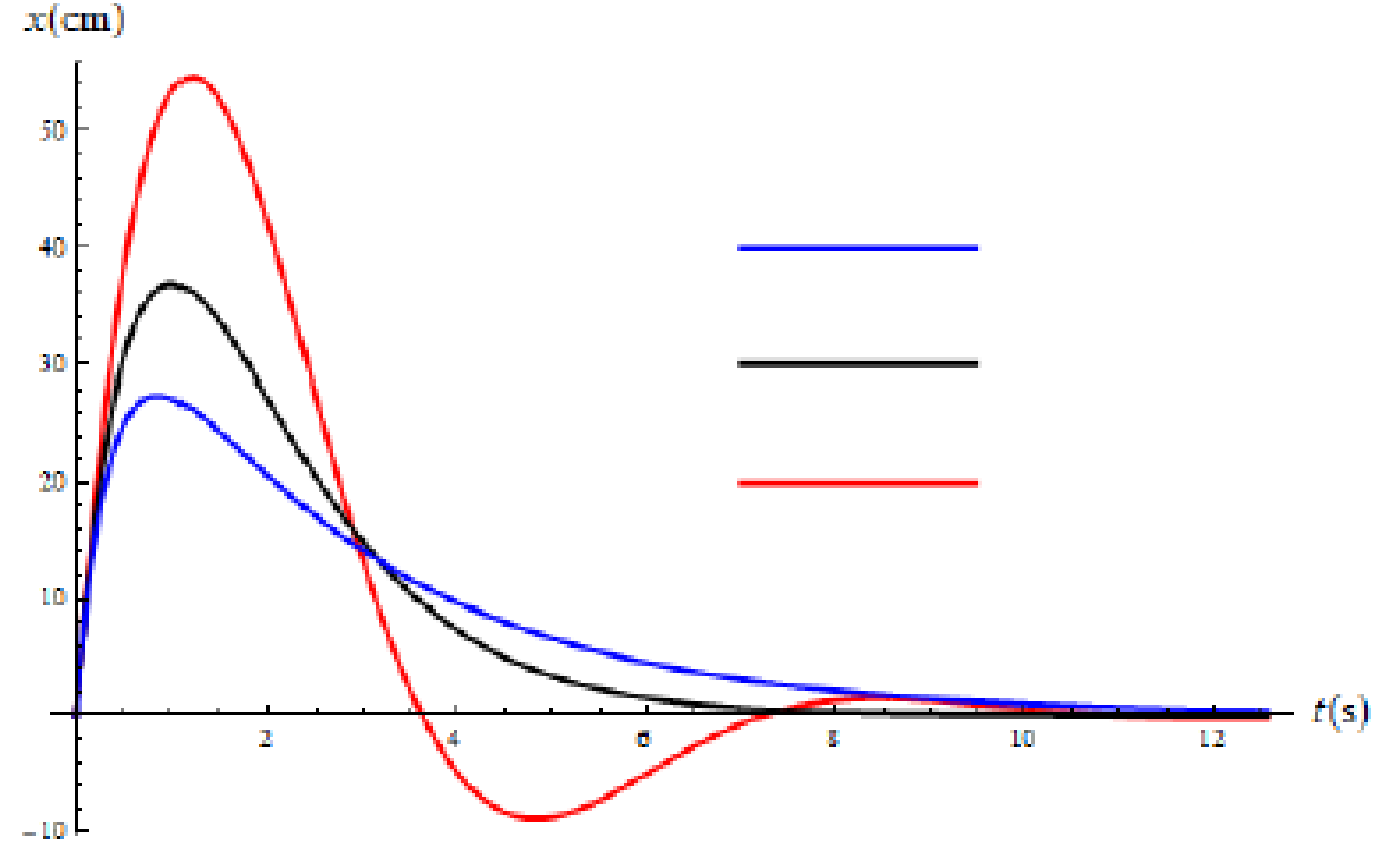
$$x(t) = (A_0 + \hat{A}\,t)\,e^{\frac{-b}{m}t}$$

- Si $\omega_0^2 < \gamma^2$ el sistema NO oscila, está **sobreamortiguado**

$$x(t) = (A_1 e^{-|\lambda_1|t} + A_2 e^{-|\lambda_2|t})$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



subamortiguado

críticamente amortiguado

sobreamortiguado

Movimiento oscilatorio forzado

Se añade una **F**$=F_0 \cos(\omega_F t)$ tal que $x'' + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_F t)$

Movimiento oscilatorio forzado amortiguado

$$x'' + \frac{b}{m} x' + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_F t)$$

Las soluciones de las ecs. diferenciales NO homogéneas

$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t)$ cuando $t \Rightarrow \infty$ (largos) $x_{hom}(t) \Rightarrow 0$

$$x_{part}(t) = A\cos(\omega_F t - \delta)$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega_F\right)^2}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{\frac{b}{m}\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}$$

Cuando $\omega_0 = \omega_F$, el sistema está en **resonancia**. La amplitud es máx.

Video

https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU

Simulaciones

MAS

https://sites.google.com/site/physicsflash/home/shm?
fbclid=IwAR1smGO4YWjDyIrLMCWYZ3C0IaaLxKixbdbuSSXHIFgL3YGIbTZuN4EdNAo

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_es.html

https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_es.html

MOA

https://www.geogebra.org/m/sAAwEXgy

MOFA

https://www.walter-fendt.de/html5/phes/resonance_es.htm

Sistema de partículas

- Aplicando la 2da ley de Newton a ambas partículas.

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{21} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1]$$

+

$$\sum \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext2} + \vec{F}_{12} = d/dt\,[m_2\vec{v}_2]$$

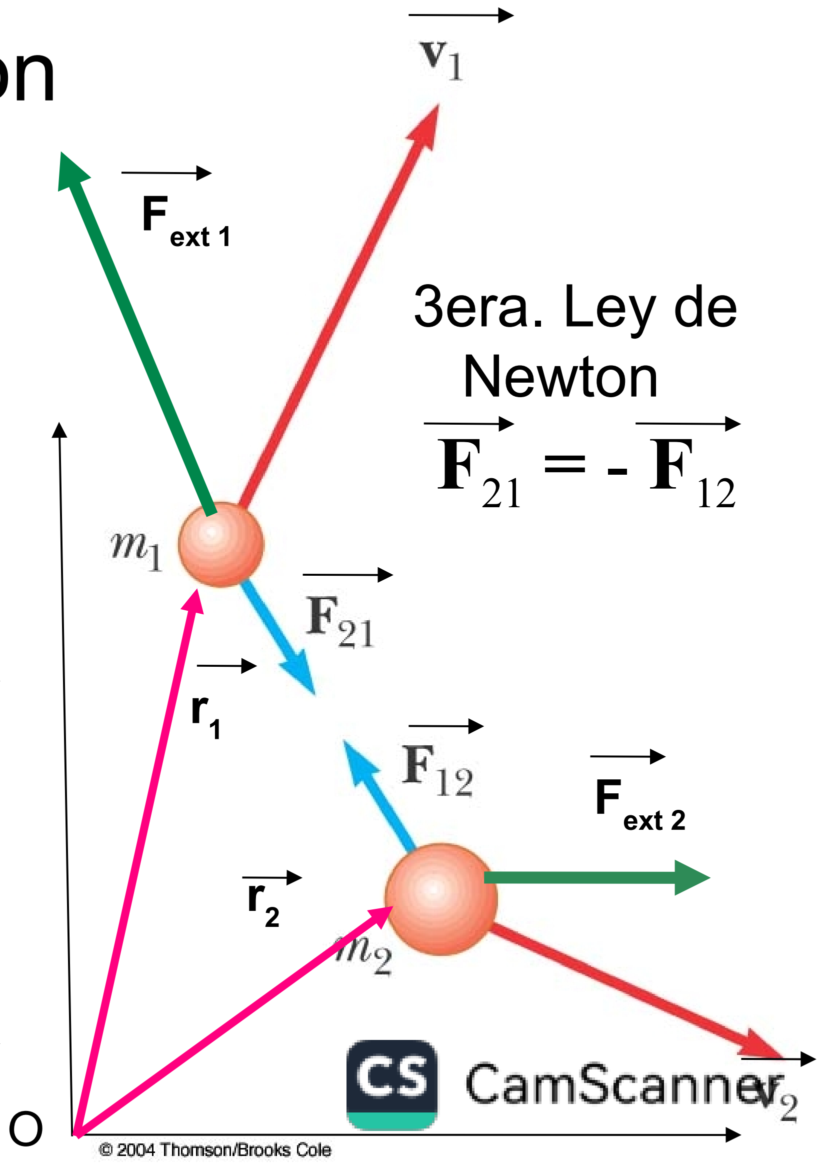
$$\sum \vec{F}_1 + \sum \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2]$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2]$$

3era. Ley de Newton

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



- Si tuviésemos n partículas

- $$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \sum_{\mathbf{i}}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext i}} = d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i] = M\, d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i / M] \qquad M = \sum_{i}^{n} m_i$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = M\, d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i / \sum_{i}^{n} m_i] = M\, d^2/dt^2\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i / \sum_{i}^{n} m_i]$$

- **Centro de masas:** punto imaginario geométrico de masa M que dinámicamente se comporta como si en él estuviesen aplicadas todas las $\mathbf{F}_{ext}$ que actúan sobre el sistema. Sus variables cinemáticas son

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i / \sum_{i}^{n} m_i \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i / \sum_{i}^{n} m_i \qquad \vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i / \sum_{i}^{n} m_i$$

- Se define cantidad de movimiento $\longrightarrow$ $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{p}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM} = \sum_i^n m_i\vec{v}_i = \sum_i^n \vec{p}_i$$

- El sistema como un todo se comporta como una partícula
- de masa M, vector posición $\vec{r}_{CM}$ y cantidad de movimiento $\vec{p}_{CM}$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \sum_i^n \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext } i} = \sum_i^n d\vec{\mathbf{p}}_i/dt = d\vec{p}_{CM}/dt$$

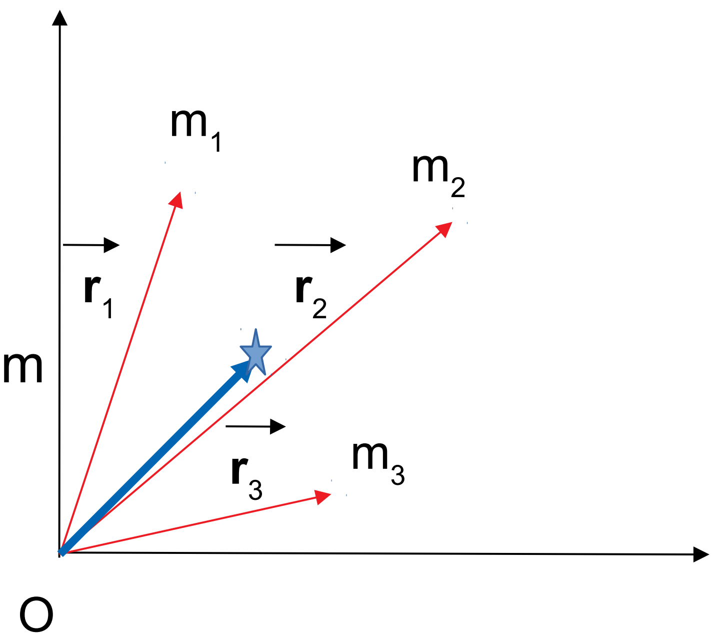
2da ley de Newton para un sistema de partículas

- Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de un sist. de partículas (aplicación de las leyes de Newton):

“Si no hay fuerzas externas actuando sobre un sistema, su cantidad de movimiento se conserva”

- Si $\Sigma_i \vec{\mathbf{F}}_{ext} = 0 \longrightarrow \vec{\mathbf{p}}_{sist} = \Sigma_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{CM} = cte$

- **Ejemplo** A tiempo t las partículas m_1=1Kg, m_2=0,5 Kg y m_3=2Kg,se encuentran en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1=(1;4)$m, $\vec{\mathbf{r}}_2=(4;3,5)$m y $\vec{\mathbf{r}}_3=(2,8;0,8)$m La posición del CM está dado por:

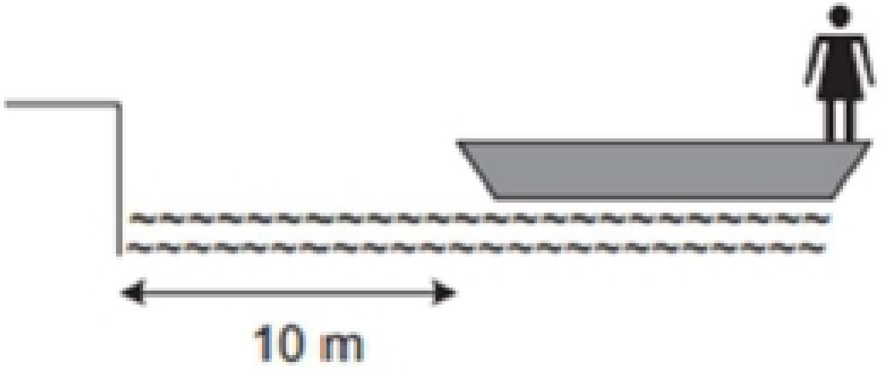


$$\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = (m_1\vec{\mathbf{r}}_1+m_2\vec{\mathbf{r}}_2+m_3\vec{\mathbf{r}}_3)/(m_1+m_2+m_3)$$

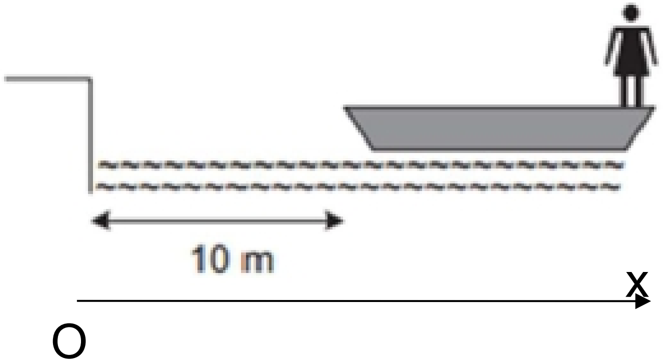
$$\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = ((1;4)\text{Kgm}+(2;1,75)\text{Kgm}+(5,6;1,6)\text{Kgm})/3,5\text{Kg}$$

$$\vec{r}_{CM} = (8,6;7,35)\text{Kgm}/3,5\text{Kg}=(2,45;2,1)\text{m}$$

Un bote de 100kg y 8m de longitud se encuentra en reposo en un lago, a 10m de tierra. En el extremo del bote más alejado de la orilla está sentada una muchacha de 50kg. La muchacha camina hasta el otro extremo del bote, donde se detiene. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra entonces? (Despreciar la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre el bote).

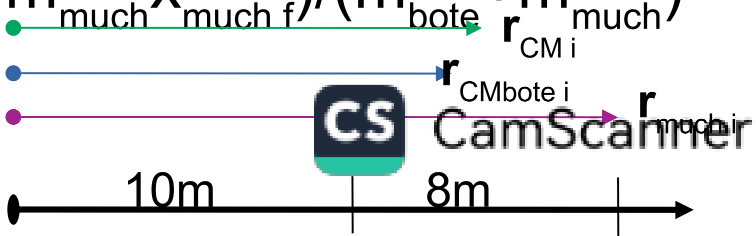


- Despreciando el roce con el agua, las únic $\mathbf{F}_{ext}$ que actúan sobre el sistema barco-muchacha son los pesos y la normal generada por el agua tal que $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}=0$

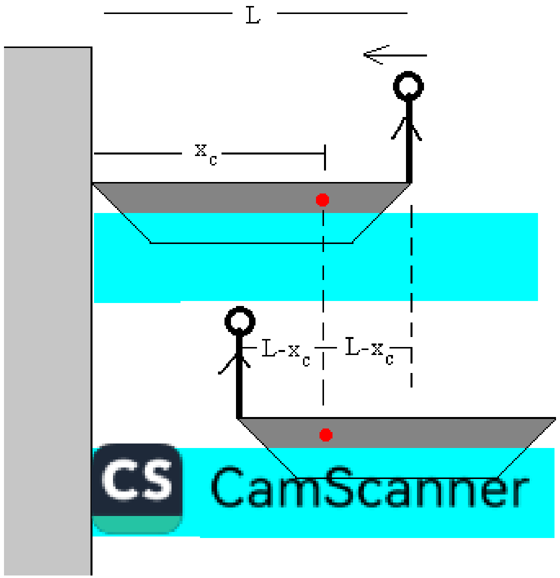


- Luego $\vec{\mathbf{p}}_{sist}$=cte . Antes de comenzar a moverse la muchacha, el sistema está en reposo en $\vec{\mathbf{v}}_{CM}=0$ y tiene que permanecer así por lo tanto $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$=cte. Antes de empezar a moverse la muchacha
$x_{CM\,i}=(m_{bote}\,x_{CMbote\,i}+m_{much}x_{much\,i})/(m_{bote}+m_{much})=(1400+900)/150$ m
$X_{CM\,i}=(15{,}33;0)$m
Luego del movimiento, $x_{CM\,f}=(m_{bote}\,x_{CMbote\,f}+m_{much}x_{much\,f})/(m_{bote}+m_{much})$

- $x_{CM\,i}=\ x_{CM\,f}$



- $x_{CM\,i}= x_{CM\,f}=(m_{bote}x_{CMbote\,f}+m_{much}x_{much\,f})/(m_{bote}+m_{much})$
- $x_{CM\,i}=(m_{bote}(x_{CMi}+(x_{CMi}-x_{CMbote\,i})+m_{much}x_{much\,f})/(m_{bote}+m_{much})$
- $(m_{bote}+m_{much})x_{CM\,i}=2m_{bote}x_{CMi} - m_{bote}14m+m_{much}x_{much\,f}$
- $x_{much\,f}=((-m_{bote}+m_{much})x_{CM\,i}+m_{bote}14m)/m_{much}$
- $x_{much\,f}=((-100Kg+50Kg)15{,}33m+100Kg14m)/50Kg$
- $x_{much\,f}=12{,}67\ m$



$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext } i} = d\vec{\boldsymbol{p}}_{CM}/dt$$

Impulso de la fuerza F_{neta}:

$$\vec{\mathbf{I}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}}\, dt = \int d\vec{\boldsymbol{p}}_{CM} = \Delta \vec{\boldsymbol{p}}_{CM}$$

variación de la cantidad de movimiento del centro de masas

- La cantidad de movimiento del sistema no cambia con t sí y sólo sí, $\vec{\mathbf{I}} = 0$

$$\vec{\mathbf{I}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}}\, dt = \mathbf{0} \qquad \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \mathbf{0}$$

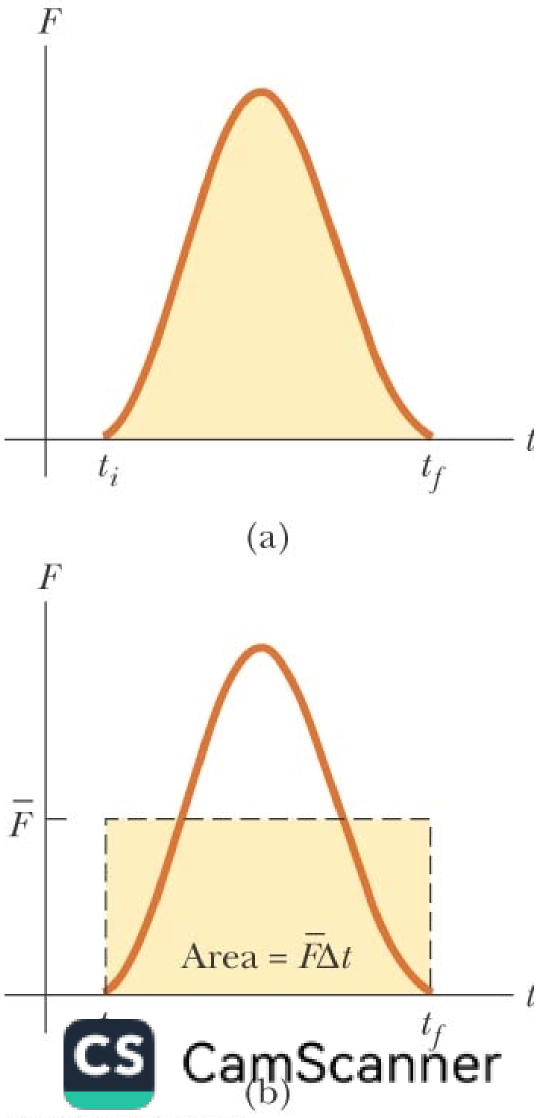
$\Delta t = \mathbf{0}$ **intervalo de tiempo muy corto**

- $$\vec{I} = \int \vec{F}_{neta}\, dt$$

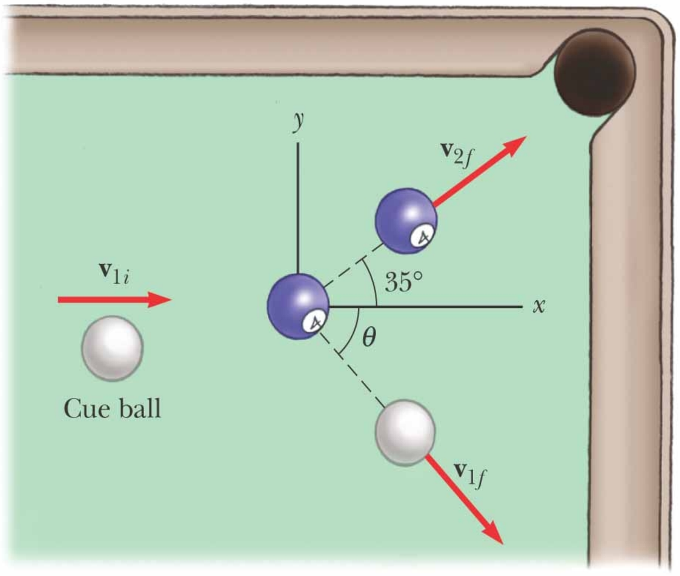
- El impulso es el área bajo la curva.

- La fuerza media $\vec{F}_m = \langle \vec{F}_{neta} \rangle$ es cte. y su valor es tal que su área bajo la curva es igual al impulso.

- $\langle \vec{F}_{neta} \rangle = \Delta \vec{p} / \Delta t \longrightarrow \vec{I} = \langle \vec{F}_{neta} \rangle \Delta t$



- Una bola de billar que se mueve de izq. a der. con una v_{1i} choca con otra bola que está en reposo, tal que comienza a moverse con una v_{2f} y un ángulo de 35^0. Sus masas son m_1 y m_2. ¿Cuál es la velocidad (módulo y dirección) de la primera bola luego del choque? ¿Y v_{CM} antes y después?



- Si se desprecia el roce de la bola con el paño, las únicas F_{ext} actuantes son sobre el sistema formado por ambas bolas son los **pesos** y las **normales** (actúan en el eje z que es ⊥ a la pantalla y $\Sigma F_z = N_1 + N_2 - P_1 - P_2 = 0$).

- Por lo tanto, no hay $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ actuando sobre el sistema entonces $\vec{\mathbf{p}}_{sist}$ se conserva, es constante ($\vec{\mathbf{p}}_{sist\ i}=\vec{\mathbf{p}}_{sist\ f}$). Antes del choque $\vec{\mathbf{p}}_{sist\ i}=\vec{\mathbf{p}}_{1i}+\vec{\mathbf{p}}_{2i}=(p_{1xi}+p_{2xi},\ p_{1yi}+p_{2yi})=(m_1v_{1i},0)$.
- Luego del choque, $\vec{\mathbf{p}}_{sist\ f}=\vec{\mathbf{p}}_{1f}+\vec{\mathbf{p}}_{2f}=(p_{1xf}+p_{2xf},\ p_{1yf}+p_{2yf})=(p_{xf},p_{yf})$
$(p_{xf},p_{yf})=(m_1v_{1fx}+m_2v_{2f}\cos(35^0),\ m_1v_{1fy}+m_2v_{2f}\sin(35^0))$
- Entonces $m_1v_{1i} = m_1v_{1fx}+m_2v_{2f}\cos(35^0)$ y

$$0 = m_1v_{1fy}+m_2v_{2f}\sin(35^0)$$

Luego $v_{1fx}= (m_1v_{1i} - m_2v_{2f}\cos(35^0))/m_1 = v_{1f}\cos\theta$ y

$$v_{1fy}= -\ m_2v_{2f}\sin(35^0)/m_1 = v_{1f}\sin\theta$$

$$|v_{1f}|=\sqrt{(v_{1fx})^2+(v_{1fy})^2}$$

$$\tan\theta = |v_{1fy}|/|v_{1fx}|$$

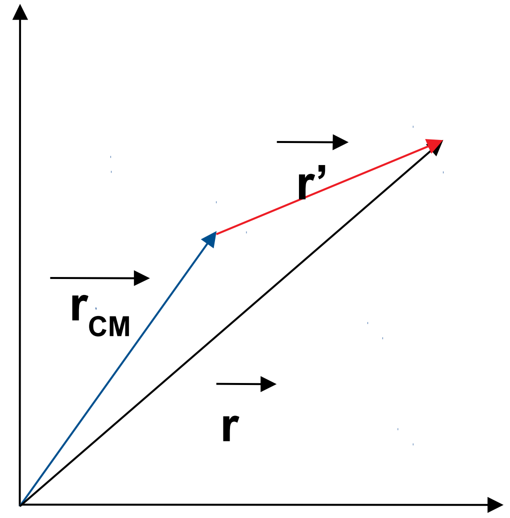
- Como $\vec{\mathbf{p}}_{sist}=\vec{\mathbf{p}}_{CM}=cte \longrightarrow \vec{\mathbf{v}}_{CM}=cte$
- $\vec{\mathbf{v}}_{CMi}=(m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i}+m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i})/(m_1+m_2)=(m_1v_{1xi}/(m_1+m_2),0)$
- $\vec{\mathbf{v}}_{CMf}=(m_1\vec{\mathbf{v}}_{1f}+m_2\vec{\mathbf{v}}_{2f})/(m_1+m_2)$

$$=[(m_1v_{1i}-m_2v_{2f}\cos(35^0))+m_2v_{2f}\cos(35^0),$$
$$-m_2v_{2f}\sin(35^0)+m_2v_{2f}\sin(35^0)]/(m_1+m_2)$$

- $\vec{\mathbf{v}}_{CMf}=(m_1v_{1xi}/(m_1+m_2),0)$

$$\vec{\mathbf{v}}_{CMi}=\vec{\mathbf{v}}_{CMf}$$

En un sistema de partículas la posición **r** de una partícula, $\vec{r}=\vec{r}_{CM}+\vec{r}'$ donde $\vec{r}_{CM}$ es la posición del CM y $\vec{r}'$ la posición de la partícula relativa al CM.



- Luego $\vec{v}=\vec{v}_{CM}+\vec{v}'$ y

$$\vec{a}=\vec{a}_{CM}+\vec{a}'$$

Como $\vec{p}_{sist}=\Sigma_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM}=\vec{p}_{CM}$ $\longrightarrow$ $\Sigma_i m_i \vec{v}'_i=0$

también se puede deducir una relación similar de las otras variables cinemáticas.

Teorema de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

- $W_{TF} = \Delta E_{c\,sist}$
- La energía cinética del sistema $E_{c\,sist}$:

$$E_{csist} = \sum_{i}^{n} \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_{i}^{n} \frac{m_i}{2} \left(v_{CM} + v'_i\right)^2 = \sum_{i}^{n} \frac{m_i}{2} \left(v_{CM}^2 + 2 v_{CM} v'_i + v'^2_i\right)$$

como $\sum_{i}^{n} m_i v'_i = 0$

$$E_{csist} = \sum_{i}^{n} \frac{m_i}{2} v_{CM}^2 + \sum_{i}^{n} \frac{m_i}{2} v'^2_i \longrightarrow E_{csist} = E_{cCM} + E_{crelCM}$$

- Entonces $\Delta E_{csist} = \Delta E_{cCM} + \Delta E_{crelCM}$
- ¿Cómo es el W_{TF} en un sistema de partículas? Tomemos el caso de 2 part., sobre ellas actúan $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ (externas) y $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ (internas). La part. 1 se desplaza un d$\mathbf{r}_1$ y la part. 2 d$\mathbf{r}_2$

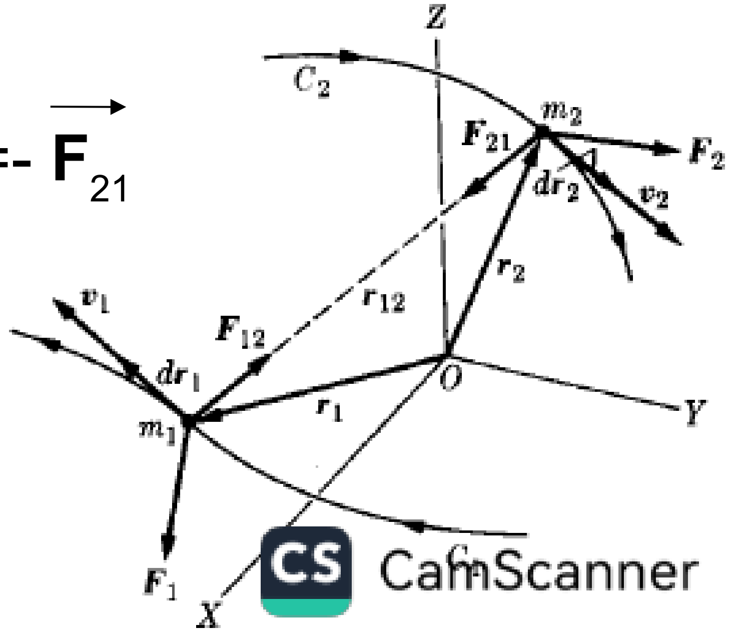
$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_{12} . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{21} . d\vec{r}_2$$

Como $\overrightarrow{\mathbf{F}_{12}} = - \overrightarrow{\mathbf{F}_{21}}$

$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{12} . \left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 \right)$$

como $d\overrightarrow{\mathbf{r}_1} \neq d\overrightarrow{\mathbf{r}_2}$

$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{12} . d\vec{r}_{12}$$



$$W_{TF}=\int_i^f \vec{F}_1.d\vec{r}_1+\int_i^f \vec{F}_2.d\vec{r}_2+\int_i^f \vec{F}_{12}.d\vec{r}_{12}$$

$$W_{TF}=W_{F_{ext}}+W_{F_{internas}}$$

$$W_{TF}=W_{F_{ext}}+W_{F_{internas}}=\Delta E_c=\Delta E_{cCM}+\Delta E_{crelCM}$$

el cambio de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas exteriores e interiores.

Que las fuerzas internas se cancelen entre sí en un sistema de partículas NO conlleva a que sus trabajos también se cancelen entre sí.

- **Choque y/o explosión:** interacción vigorosa entre partículas con una duración relativamente corta (accidentes automovilísticos, bolas que chocan en una mesa de billar, etc).
- **Choque elástico:** cuando la $\Delta E_{csist}=0$.
- **Choque inelástico:** cuando la $\Delta E_{csist}<0$.
- **Choque plástico:** cuando los cuerpos quedan pegados y $\Delta E_{csist}<0$.
- **Explosión:** cuando un cuerpo se fragmenta $\Delta E_{csist}>0$.

- **Coeficiente de restitución e:** mide el grado de conservación de la energía cinética en un choque entre partículas clásicas. Es el cociente entre la velocidad relativa final y la velocidad relativa inicial de dos objetos sometidos a colisión, donde final significa tras la colisión, e inicial antes de la misma. $0 \leq e \leq 1$

$$e = \frac{|v_{1f}| - |v_{2f}|}{|v_{1i}| - |v_{2i}|}$$

- En la gran mayoría de los choques reales el coeficiente de restitución es inferior a la unidad, lo que supone en una mayor o menor medida una deformación inelástica de los cuerpos sometidos a colisión.