

Física I

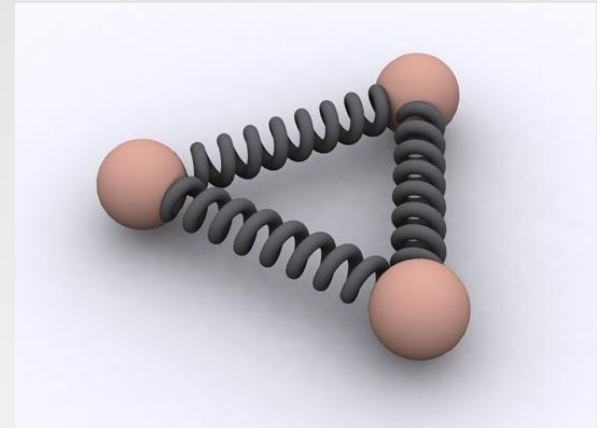
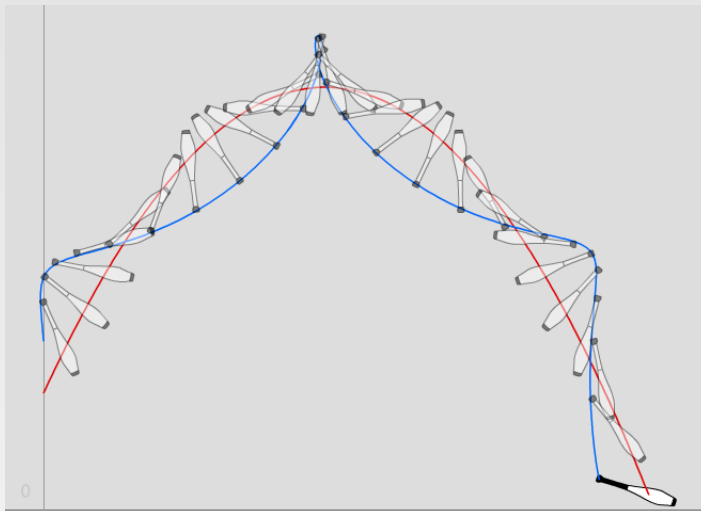
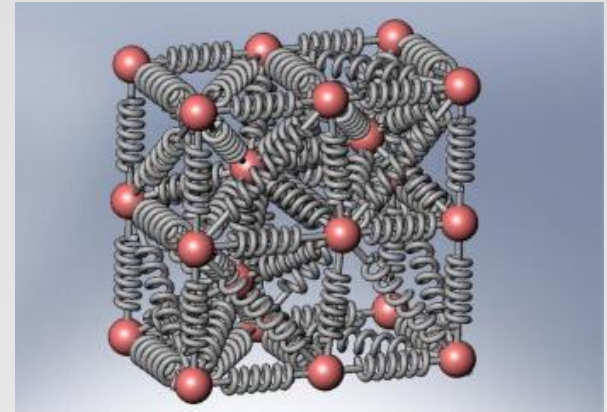
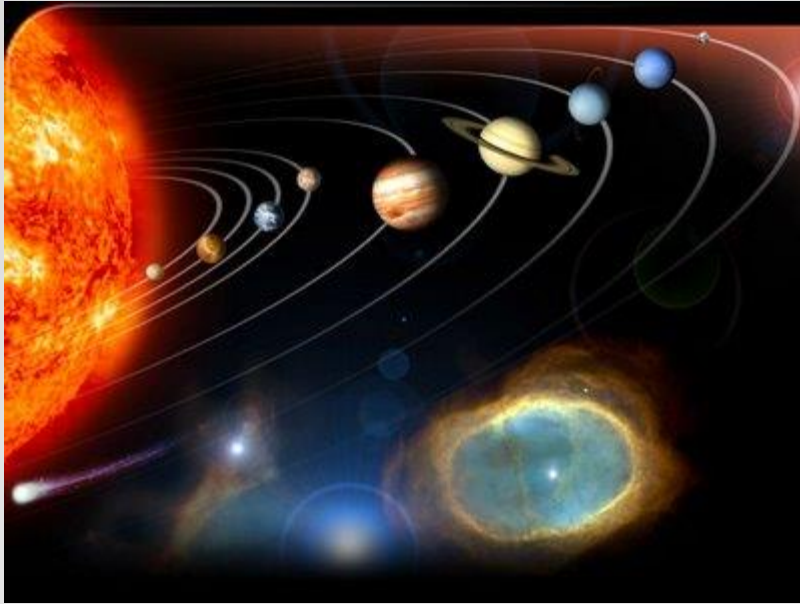
Turno H

Apuntes de Clase 9

Turno H

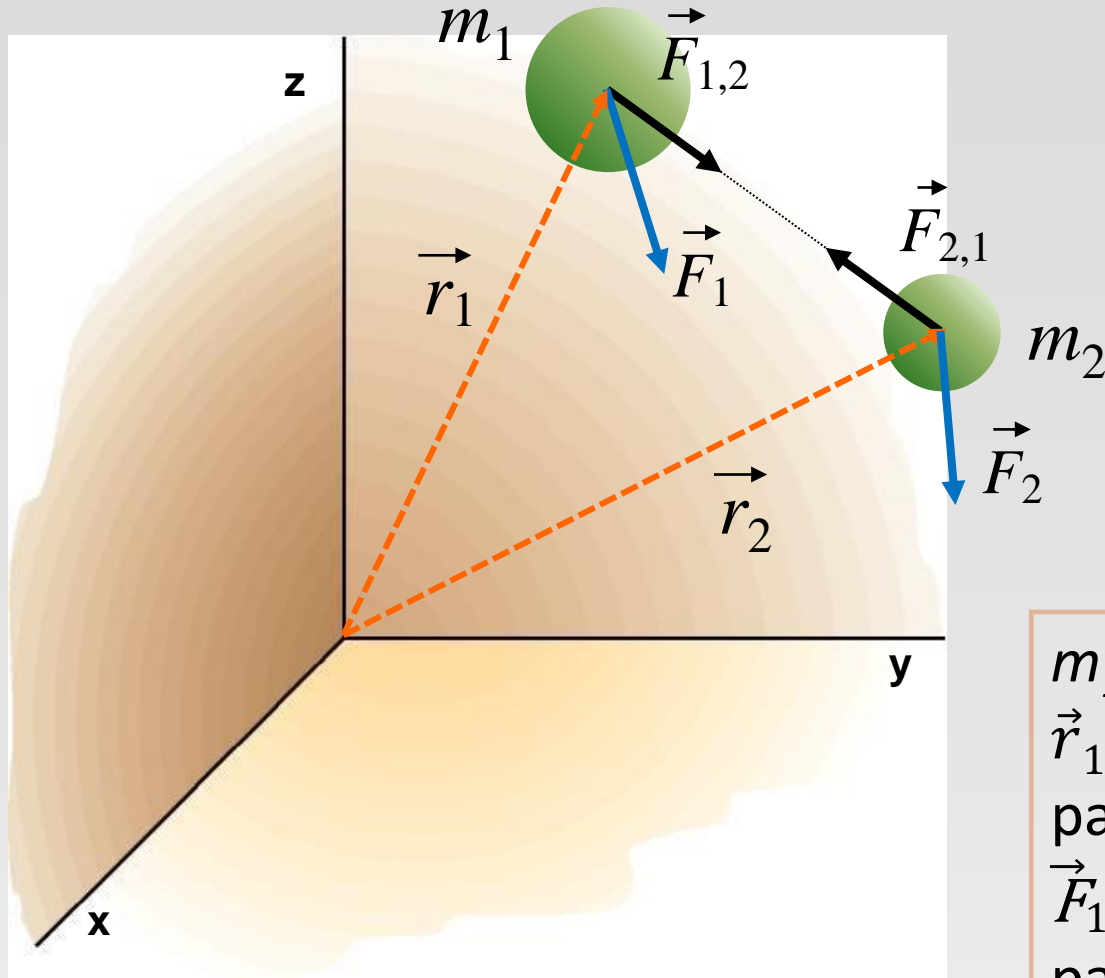
Prof. Pedro Mendoza Zélis

Sistemas de partículas



Hasta aquí hemos aplicado las leyes de Newton tratando a los objetos como si fueran partículas puntuales que tienen masa pero no tamaño, aunque muchas de las aplicaciones se extendían a objetos como bolas, bloques e incluso automóviles. En esta clase justificaremos estas aplicaciones considerando que un objeto extenso es un sistema de partículas y aplicando las leyes de Newton a todas ellas. Demostraremos que existe un punto del sistema cuyo movimiento bajo la influencia de fuerzas externas puede ser analizado como el de una partícula simple. Este punto se llama centro de masa. El movimiento de cualquier objeto o sistema de partículas, por complejo que sea, puede describirse en función del movimiento del centro de masas más el movimiento de las partículas respecto al centro de masas. En esta clase describiremos cómo hallar el centro de masa de los objetos y demostraremos que las Leyes de Newton aplicadas al movimiento del centro de masa de un sistema complejo nos conducen a la segunda de las grandes leyes de la conservación que encontraremos: la conservación de la cantidad de movimiento.

Sistema de dos partículas:



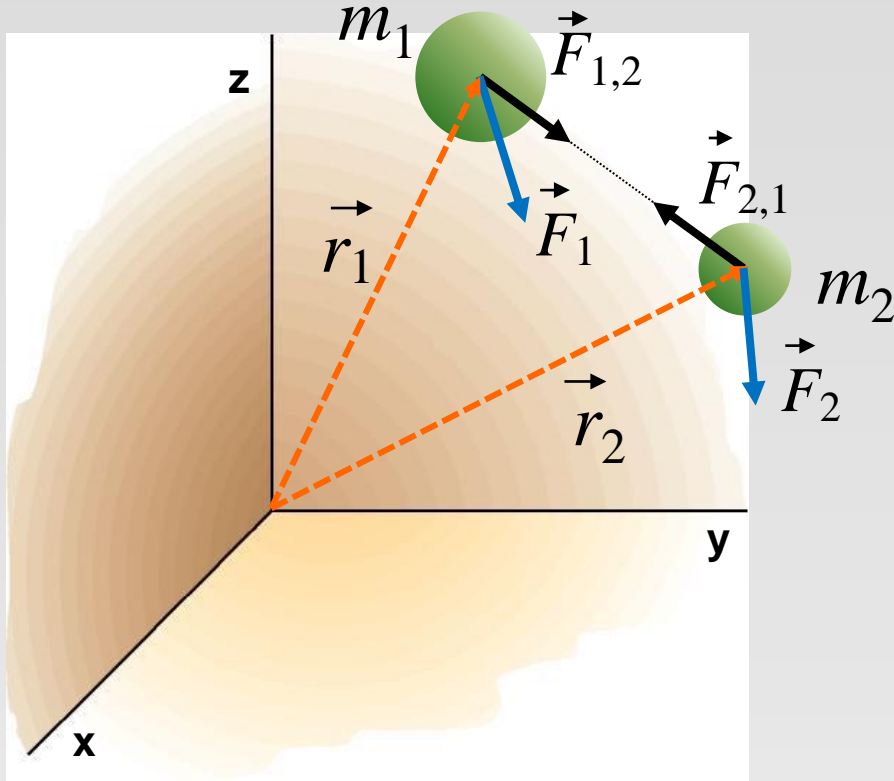
m_1 : masa de la partícula 1

\vec{r}_1 : vector posición de la partícula 1

\vec{F}_1 : fuerza externa sobre la partícula 1

$\vec{F}_{1,2}$: fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la partícula 1

Sistema de dos partículas:



Tercera ley de Newton

(acción y reacción)

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

Aplicamos la Segunda Ley de Newton a cada partícula por separado:

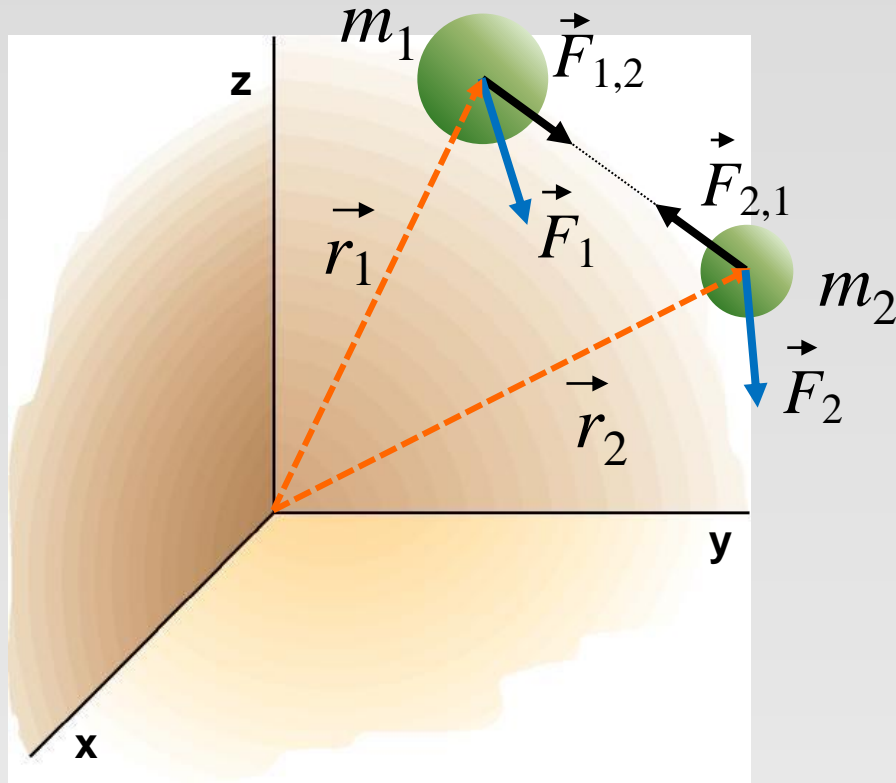
$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_{1,2} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{2,1} = m_2 \vec{a}_2 \end{cases}$$

$$\vec{F}_1 + \cancel{\vec{F}_{1,2}} + \cancel{\vec{F}_{2,1}} + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

Sistema de dos partículas:



Si definimos:

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \right)$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

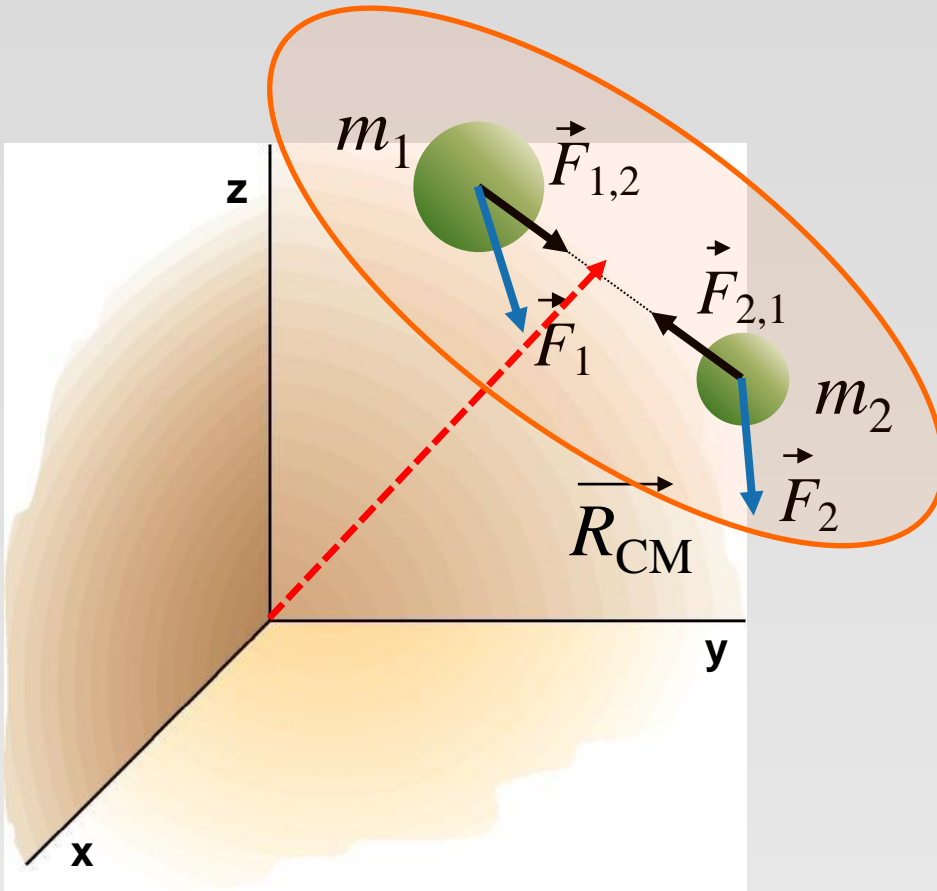
$$M = m_1 + m_2 \quad \Downarrow$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \right)$$



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M \frac{d^2 \vec{R}_{CM}}{dt^2}$$

Sistema de dos partículas:



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = M \frac{d^2 \vec{R}_{CM}}{dt^2}$$

$$M = m_1 + m_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \right)$$

Esta expresión es semejante a la 2da Ley de Newton para el caso de una partícula puntual:

El centro de masa de un sistema se mueve como una partícula de masa M sometida a la influencia de la suma de las fuerza externas que actúan sobre el sistema

Sistema de dos partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

Posición del centro de masa

$$\begin{aligned}\vec{V}_{CM} &= \frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)\end{aligned}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de dos partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

Posición del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

Velocidad del centro de masa

$$\begin{aligned}\vec{A}_{CM} &= \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2)\end{aligned}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de dos partículas:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$$

Posición del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2)$$

Aceleración del centro de masa

$$M = m_1 + m_2$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con 2 partículas: \longrightarrow

$$M = m_1 + m_2 \quad \longrightarrow$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad \longrightarrow$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \quad \longrightarrow$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2) \quad \longrightarrow$$

Sistema con N partículas:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N)$$

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_N \vec{a}_N)$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con N partículas:

Masa total del sistema

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$$

Posición del centro de masa

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N)$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N)$$

Aceleración del centro de masa

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_N \vec{a}_N)$$

Sistema de N partículas: centro de masa

Sistema con N partículas:

Masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Posición del centro de masa

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Aceleración del centro de masa

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

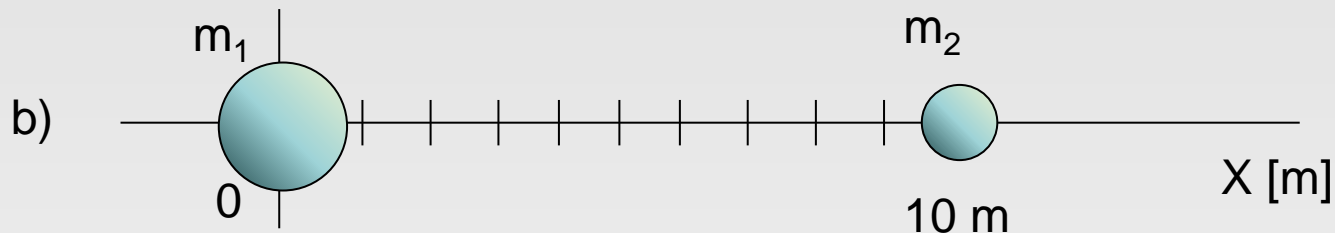
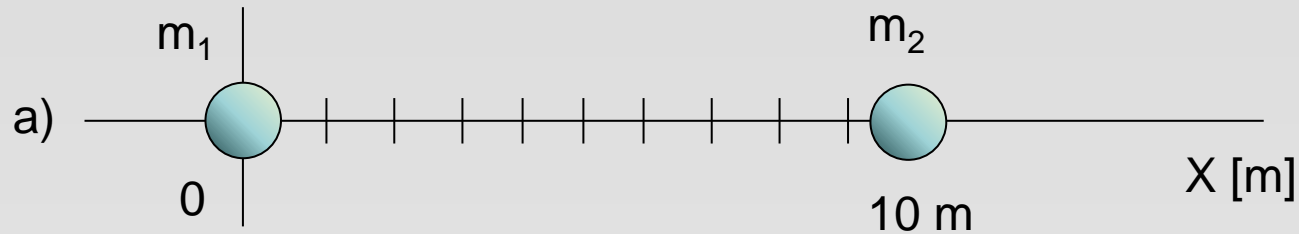
Sistema de N partículas: centro de masa

Podemos descomponer al vector posición del centro de masas en sus tres componentes:

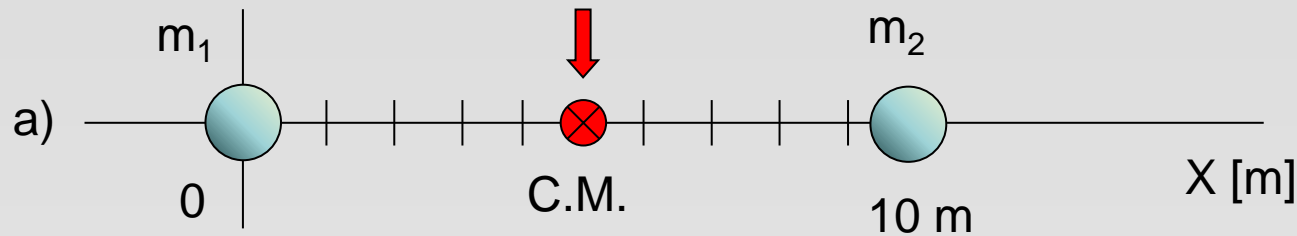
$$\vec{R}_{CM} = X_{CM} \hat{i} + Y_{CM} \hat{j} + Z_{CM} \hat{k}$$

$$\vec{R}_{CM} \left\{ \begin{array}{l} X_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \\ Y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \\ Z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} \end{array} \right.$$

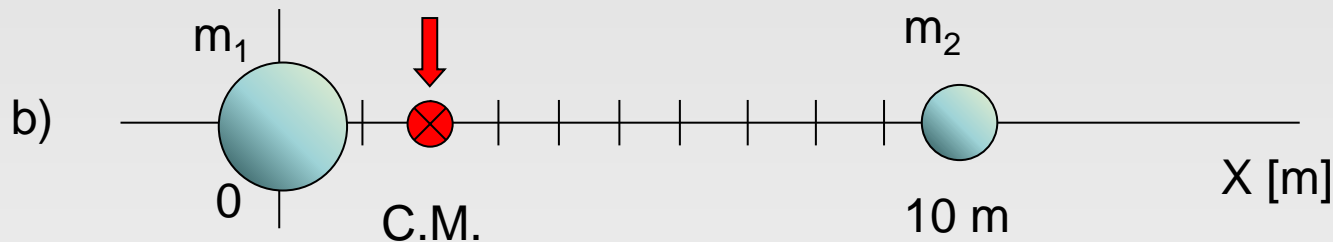
Ejemplo: Supongamos dos partículas m_1 y m_2 , cada una de masa 2 kg, ubicadas como indica la figura. a) Hallar la posición del C.M. b) Si $m_1 = 8$ kg, hallar la posición del C.M. en este caso



Ejemplo: Supongamos dos partículas m_1 y m_2 , cada una de masa 2 kg, ubicadas como indica la figura. a) Hallar la posición del C.M. b) Si $m_1 = 8$ kg, hallar la posición del C.M. en este caso

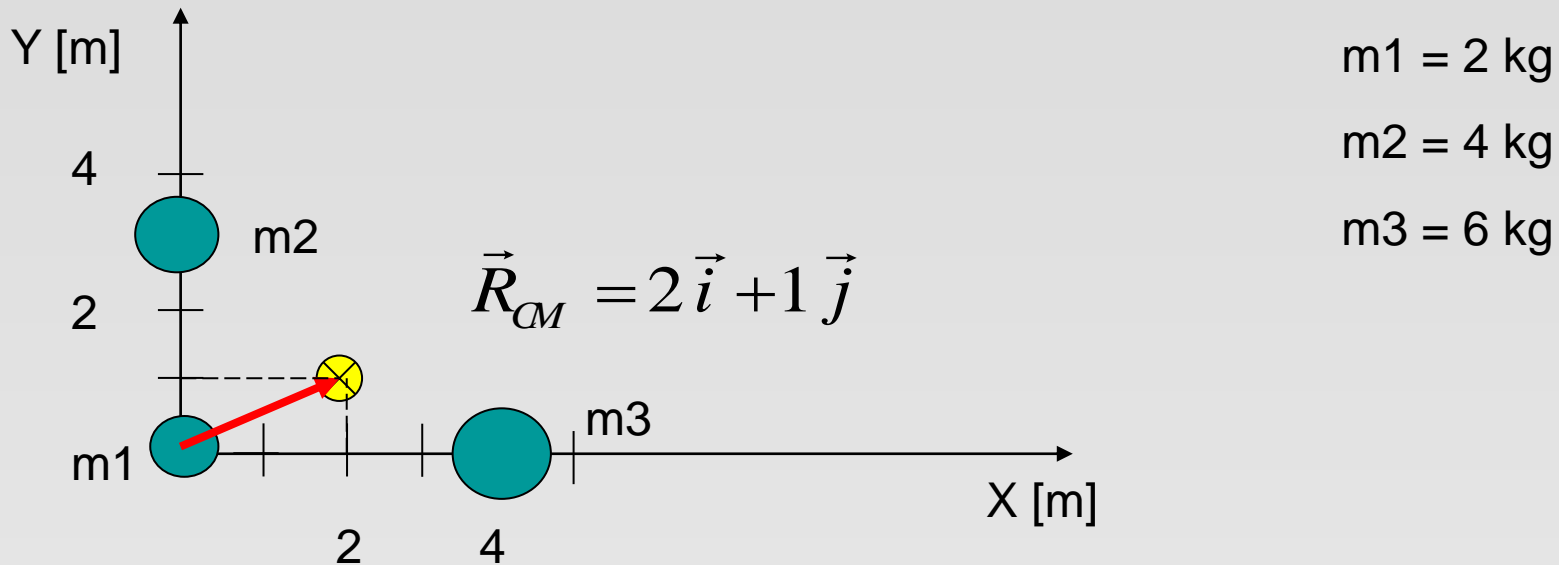


$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 0 + 2 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{4 \text{ kg}} = 5 \text{ m}$$



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{8 \text{ kg} \cdot 0 + 2 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{10 \text{ kg}} = 2 \text{ m}$$

Ejemplo: Determinar el C.M. del sistema de 3 partículas mostrado en la figura



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 0 + 4 \text{ kg} \cdot 0 + 6 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m}}{12 \text{ kg}} = 2 \text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 0 + 4 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m} + 6 \text{ kg} \cdot 0}{12 \text{ kg}} = 1 \text{ m}$$

Centro de masa: cuerpo continuo

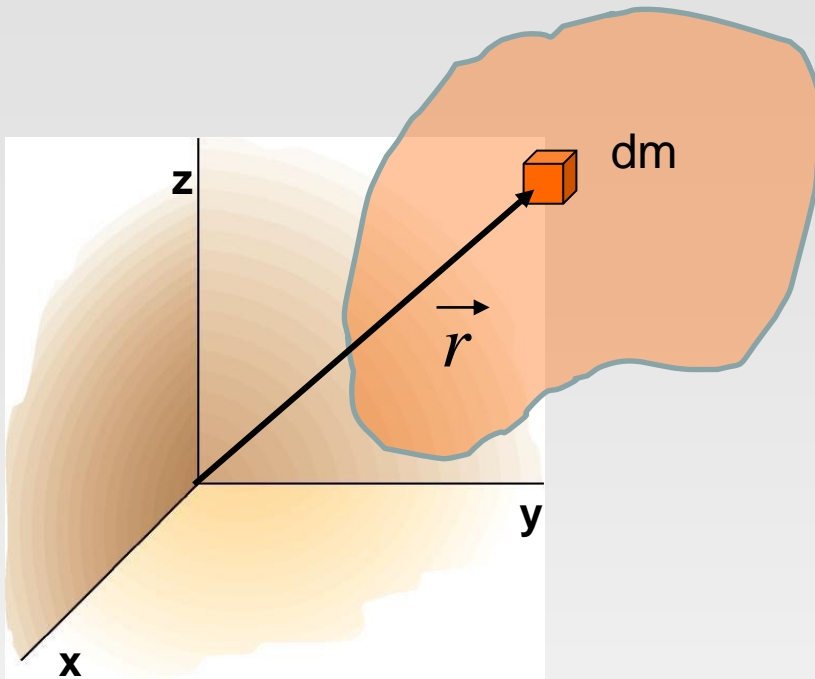
Sistema de partículas

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

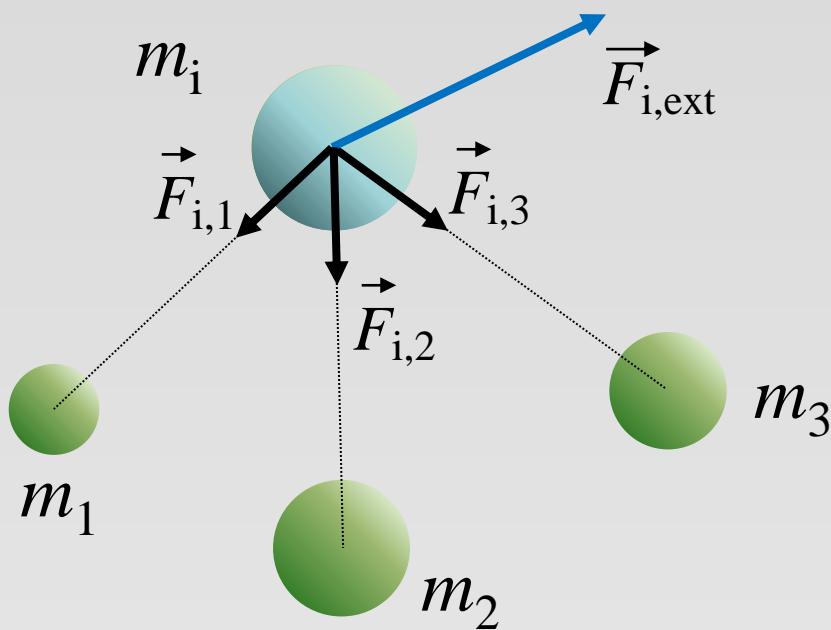
Para un cuerpo continuo, la suma se sustituye por una integral:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{volumen}} \vec{r} \, dm$$

en donde dm es un elemento de masa localizado en la posición \vec{r} .



Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa



Por 2da Ley de Newton

$$\vec{F}_{R,i} = \vec{F}_{R,i,int} + \vec{F}_{R,i,ext}$$

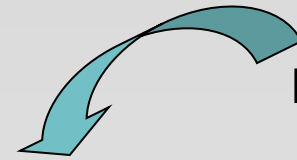
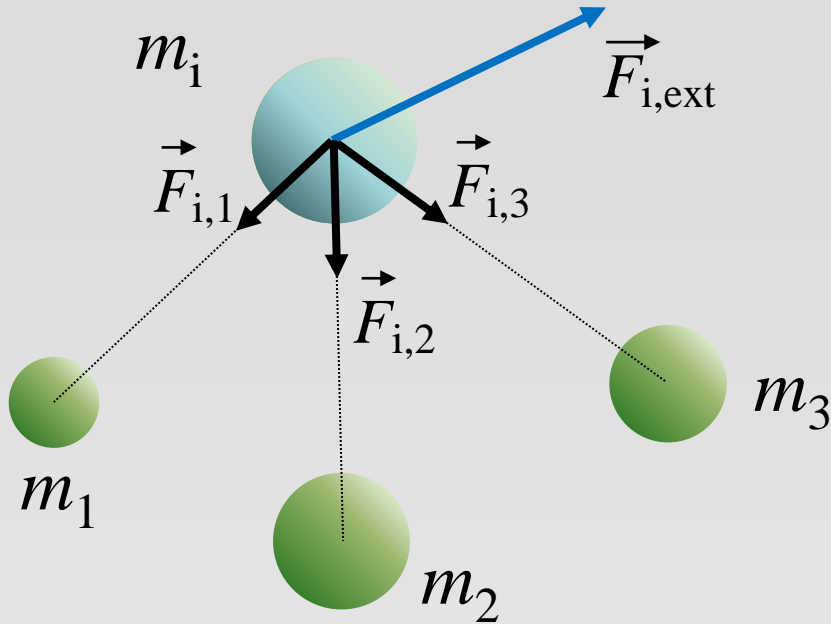
$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

$$M \vec{A}_{CM,S} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_{R,i,int} + \sum_i \vec{F}_{R,i,ext}$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula i pueden dividirse en dos categorías:

- las fuerza interiores debidas a las interacciones con otras partículas que se encuentran dentro del sistema
- las fuerzas externas ejercidas por agentes ajenos al sistema

Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa



Por 2da Ley de Newton

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{R,i} = \vec{F}_{R,i, \text{int}} + \vec{F}_{R,i, \text{ext}}$$



$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

$$M \vec{A}_{CM, S} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \cancel{\vec{F}_{R,i, \text{int}}} + \sum_i \vec{F}_{R,i, \text{ext}}$$

Por la 3ra Ley de Newton las fuerzas internas se presentan en parejas de fuerza iguales pero opuestas, es decir $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Entonces, la suma total de todas las fuerzas internas es nula.

$$M \vec{A}_{CM, S} = \sum_i \vec{F}_{R,i, \text{ext}} = \vec{F}_{net a, \text{ext}}$$

Sistema de N partículas: dinámica del centro de masa

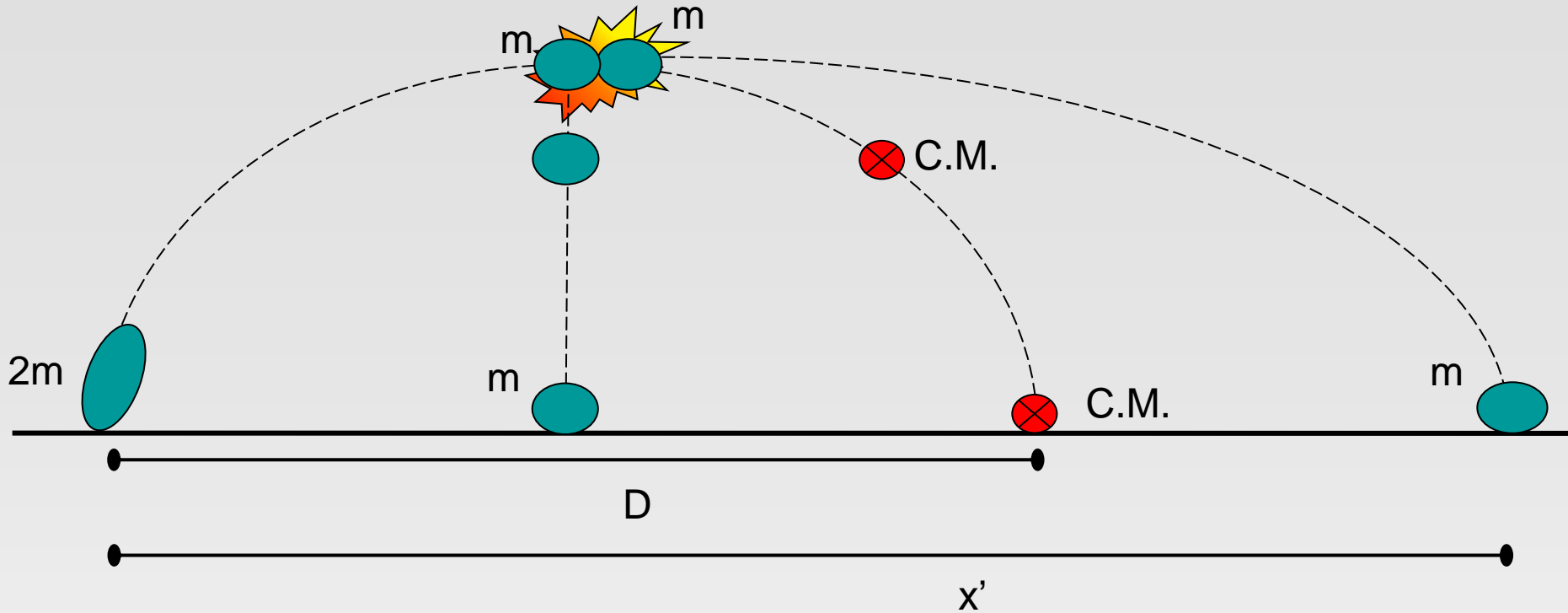
El centro de masas se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza neta externa ejercida sobre el sistema.

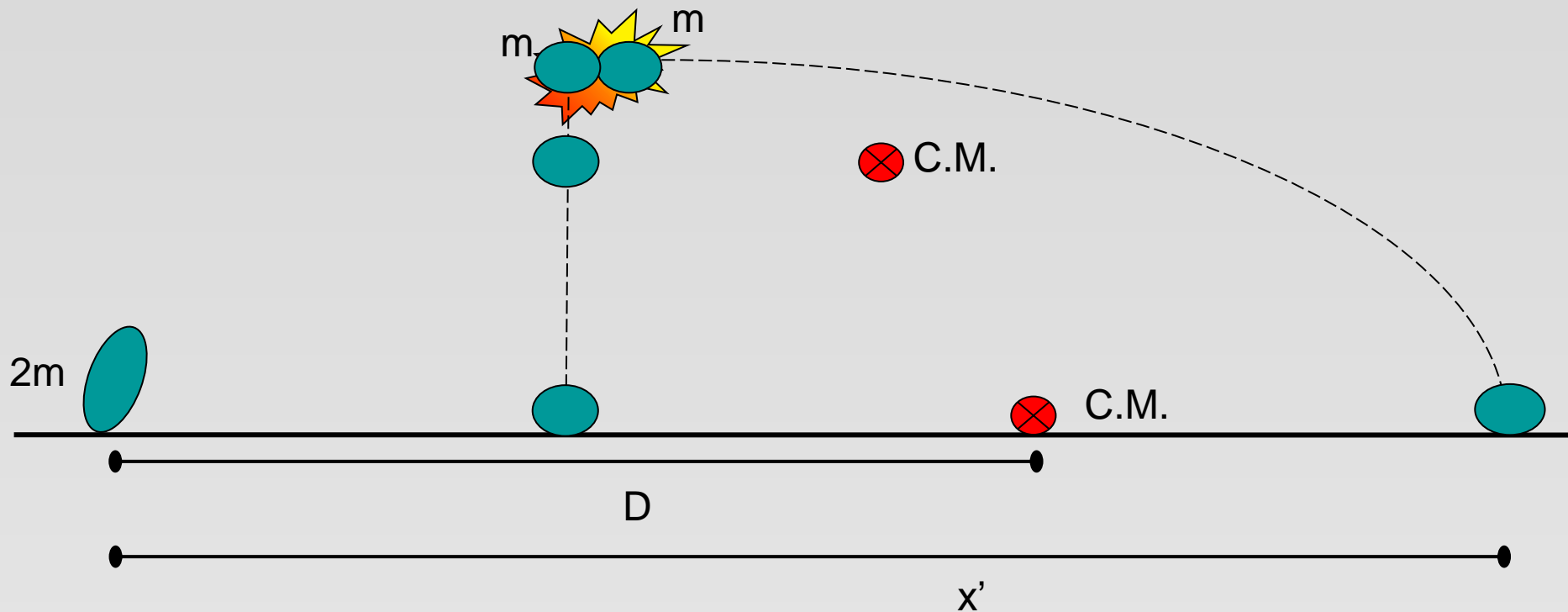
$$M \vec{A}_{CM,S} = \vec{F}_{neta, ext}$$

$$M = \sum_i m_i$$

Ejemplo: un proyectil de masa $2m$ es lanzado y al llegar al punto de máxima altura explota en dos fragmentos, de tal forma que uno de ellos cae verticalmente.

¿A qué distancia caerá el otro trozo sabiendo que el proyectil entero hubiera caído a una distancia D ?






El segundo fragmento colisionará contra el piso en una posición x' . Sabiendo que el centro de masa, a pesar de la explosión, continuará describiendo su trayectoria parabólica, podemos afirmar que:

$$x_{CM} = D = \frac{m \frac{D}{2} + m x'}{2m} \quad \longrightarrow \quad x' = \frac{2mD - \frac{1}{2}mD}{m} = \frac{3}{2}D$$

Sistema de N partículas: cantidad de movimiento

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N \\ &= m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N \\ &= \sum_i m_i \vec{v}_i = M \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_{CM,S}\end{aligned}$$
$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$


La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM,S}$$

Sistema de N partículas: cantidad de movimiento

$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM,S}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = M\vec{A}_{CM}$$



$$M\vec{A}_{CM,S} = \vec{F}_{neta, ext}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{neta, ext}$$

La segunda Ley de Newton
para un sistema de partículas

Sistema de N partículas: conservación de la cantidad de movimiento

$$\text{Si } \vec{F}_{neta,ext} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

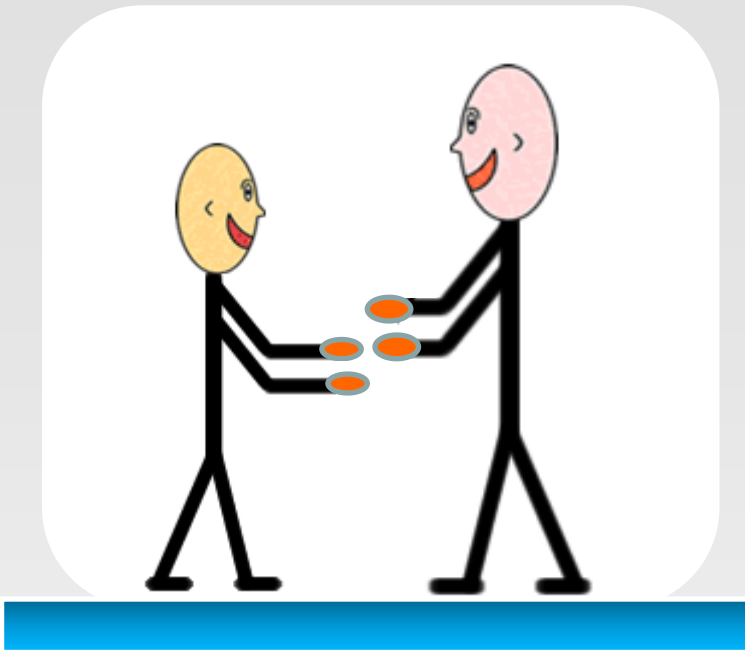


$$\vec{P} = M \vec{V}_{CM,S} = cte$$

Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es igual a cero, la velocidad del centro de masa del sistema es constante y la cantidad de movimiento del sistema se conserva

Para resolver en clase:
Ejercicio N° 2:

Un hombre de 70 kg y un muchacho de 50 kg están de pie juntos sobre una superficie de hielo lisa. Se empujan uno al otro y el hombre adquiere una velocidad de 0.5 m/s respecto del hielo. ¿Qué velocidad respecto al hielo adquiere el muchacho? ¿Varía la velocidad del CM del sistema?



Impulso y promedio temporal de una fuerza

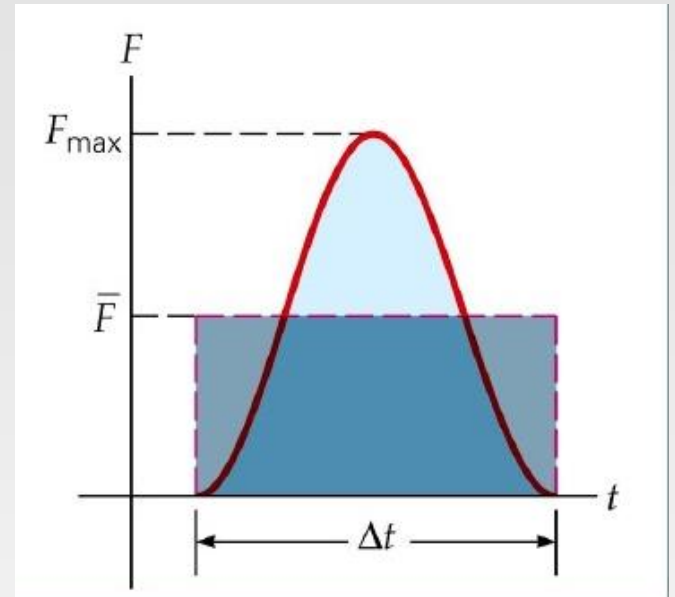
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{neta,ext}$$

$$d\vec{P} = \vec{F}_{neta,ext} dt$$

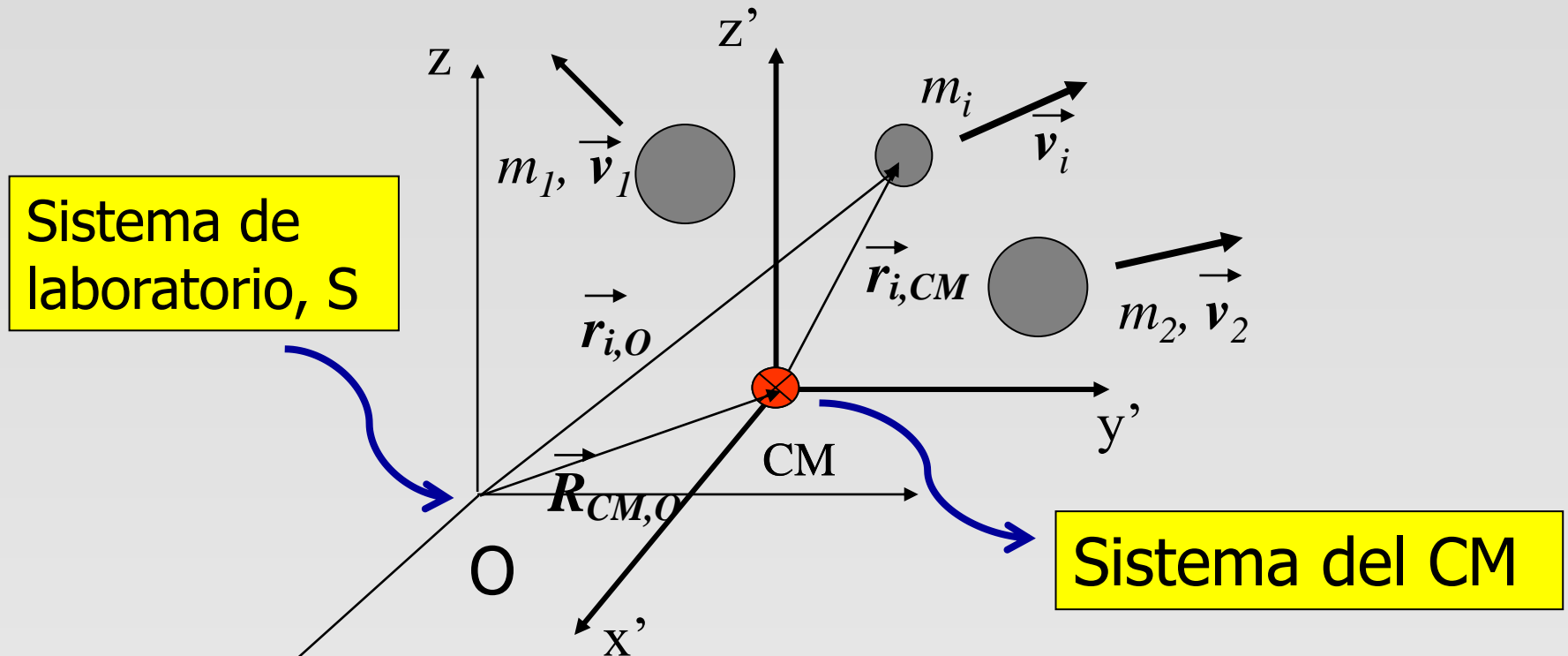
$$\int_i^f d\vec{P} = \int_i^f \vec{F}_{neta,ext} dt$$

$$\vec{F}_{neta,ext}^{Media} = \frac{1}{\Delta t} \int_i^f \vec{F}_{neta,ext} dt = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$$

Fuerza media



Sistema de referencia del C.M.



$$\begin{cases} \vec{r}_{i,O} = \vec{r}_{i,CM} + \vec{R}_{CM,O} \\ \vec{v}_{i,O} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O} \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\vec{R}_{CM,S} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{i,o}}{M};$$

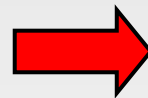
$$\vec{V}_{CM,S} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_{i,o}}{M};$$

Respecto al sistema de referencia original S, el sistema de referencia del CM se mueve con

$$\vec{V}_{CM,S} = \text{cte} \quad \text{si} \quad \sum \vec{F}_{ext} = 0$$

En este sistema de CM se cumple que:

$$\vec{R}_{CM,CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_{i,CM}}{M} = 0$$



$$\vec{V}_{CM,CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_{i,CM}}{M} = 0$$

En el sistema de referencia del CM también se cumple:

$$\vec{P}_{CM,CM} = M \vec{V}_{CM,CM} = 0$$

¿Qué relación hay entre las velocidades de una partícula cuando es observada desde los dos sistemas S y CM?

A partir de la ec. (I), se obtiene:

$$\vec{v}_{i,O} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O} \quad (II)$$

Velocidad del CM
respecto de S

Velocidad de partícula
respecto de S

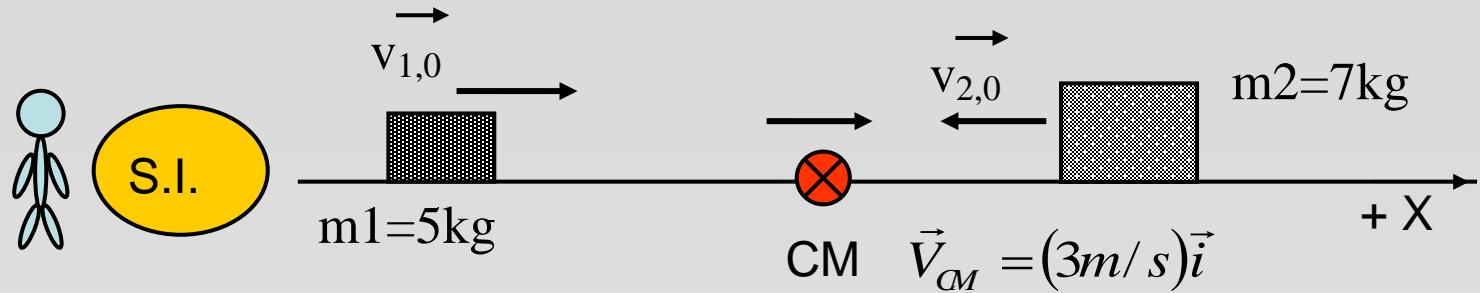
Velocidad de la
partícula respecto del
CM

Ejemplo:



$$\vec{v}_{1,0} = (10\text{m/s})\vec{i}; \quad \vec{v}_{2,0} = (-2\text{m/s})\vec{i}$$

Ejemplo:



$$\vec{v}_{1,0} = (10 \text{ m/s})\vec{i}; \quad \vec{v}_{2,0} = (-2 \text{ m/s})\vec{i}$$

a) ¿ $\vec{P}_{\text{tot},O}$? $\vec{P}_{\text{tot},O} = m_1 \vec{v}_{1,0} + m_2 \vec{v}_{2,0} = 5 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})\vec{i} + 7 \text{ kg} \cdot (-2 \text{ m/s})\vec{i}$

$$\vec{P}_{\text{tot},O} = (50 \text{ kg m/s})\vec{i} - (14 \text{ kg m/s})\vec{i} = 36 (\text{kg m/s})\vec{i}$$

b) ¿ $\vec{V}_{\text{CM},O}$?

$$\vec{V}_{\text{CM},O} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_{i,0}}{M} = \frac{(36 \text{ kg m/s})\vec{i}}{12 \text{ kg}} = 3 (\text{m/s})\vec{i}$$

c) ¿ $\vec{v}_{1,\text{CM}}$? ¿ $\vec{v}_{2,\text{CM}}$?

$$\vec{v}_{i,0} = \vec{v}_{i,\text{CM}} + \vec{V}_{\text{CM},O} \Rightarrow (10 \text{ m/s})\vec{i} = \vec{v}_{1,\text{CM}} + (3 \text{ m/s})\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{1,\text{CM}} = (7 \text{ m/s})\vec{i}$$

$$(-2 \text{ m/s})\vec{i} = \vec{v}_{2,\text{CM}} + (3 \text{ m/s})\vec{i} \Rightarrow \vec{v}_{2,\text{CM}} = (-5 \text{ m/s})\vec{i}$$

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

La energía cinética total de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,o}^2 \quad (\text{III})$$

Pero además sabemos que: $\vec{v}_{i,o} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,o}$



(ver demostración al final de la clase)

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM,o}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM,o}^2 + E_{c,rel} \quad (\text{IV})$$

Energía cinética
del CM

Energía cinética
relativa al CM

donde: $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema de partículas.

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM,O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM,O}^2 + E_{c,rel} \quad (IV)$$

Energía cinética
del CM

Energía cinética
relativa al CM

$$E_c = E_{c,CM} + E'_{c,rel} \quad (V)$$

♦ El término $E_{c,CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ { representa la energía cinética del CM y depende del sistema de coordenadas asociado al sistema inercial S.

♦ El término $E'_{c,rel} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2$ { depende sólo de las velocidades de las partículas respecto al CM y no depende del sistema de coordenadas asociado al sistema inercial S.

Esta forma de describir la energía cinética de un sistema de partículas permite entender más claramente lo que ocurre en el caso de colisiones.

Si sobre un sistema de partículas la resultante de las fuerzas externas es nula, entonces:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d \vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{P}_{CM} = cte \quad \Rightarrow \quad E_{c,CM} = \frac{1}{2} M V_{CM,o}^2 = cte$$

y el 1er término de la ec. (V) no varía. **Sólo la energía relativa al CM (2do término de la ec. (V)) puede ser la responsable de un aumento o disminución de la energía cinética total del sistema de partículas.**

Como ejemplo podemos citar el caso del niño y el muchacho que se empujan con las manos sobre una superficie helada originando un aumento de la energía cinética total debido al aumento de la energía cinética relativa al CM. En el caso de una bala que queda empotrada en un bloque, se produce una disminución de la energía cinética total debido a una disminución de la energía cinética relativa al CM.

Teorema de trabajo y energía para un sistema de partículas no rígidas

Utilizando la expresión (V), el teorema de trabajo-energía cinética para un sistema de partículas ahora nos queda:

$$\Delta E_c = \Delta E_{c, CM} + \Delta E'_{c, rel} = W_{F \text{ ext}} + W_{F \text{ int}}$$

The diagram illustrates the components of the work-energy theorem. A red arrow points from the yellow oval labeled "estados" (states) to the left side of the equation, specifically to ΔE_c . A red bracket points from the right side of the equation, specifically to $W_{F \text{ ext}} + W_{F \text{ int}}$, to the yellow oval labeled "Procesos de transferencia" (transfer processes).

$$\Delta E_c = \Delta E_{c, \mathcal{M}} + \Delta E'_{c, rel} = W_{F \text{ ext}} + W_{F \text{ int}}$$

W_{FC}
↓
 $-\Delta E_{p, \mathcal{M}}$

W_{FNC}
↓
 $-\Delta E_{p, \text{int}}$

W_{fc}
↓
 $-\Delta E_{p, \text{int}}$

W_{fnc}

$\underbrace{(\Delta E_{c, \mathcal{M}} + \Delta E_{p, \mathcal{M}})}_{\Delta E_{nec, \mathcal{M}}} + \underbrace{(\Delta E'_{c, rel} + \Delta E_{p, \text{int}})}_{\Delta U} = W_{FNC} + W_{fnc}$

$\Delta E_{nec, \mathcal{M}} + \Delta U = W_{FNC} + W_{fnc}$

“Energía macroscópica”

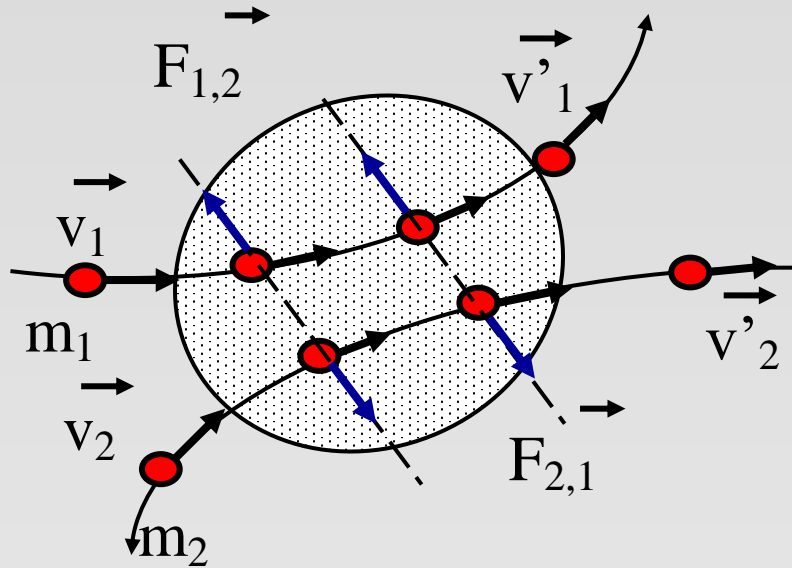
“Energía interna” (microscópica)

$$\text{Si } W_{FNC} + W_{fnc} = 0 \Rightarrow \Delta E_{mec, CM} + \Delta U = 0$$

$$\Rightarrow E_{mec, CM} + U = cte$$

De lo contrario, si alguno de los términos W_{FNC} (externas) o W_{fnc} (internas) es diferente de 0, existirá algún cambio en la energía mecánica del sistema de partículas, que deberá analizarse para cada caso particular.

Colisiones



En una colisión entre dos objetos, éstos se aproximan uno al otro, interactúan fuertemente en una zona dada y luego se separan. En el sentido microscópico no existe necesariamente contacto entre las 2 partículas.

La interacción puede ser breve (bolas de billar) o durar siglos (choques entre 2 estrellas).

Antes de la colisión, es decir cuando ambos objetos están alejados, cada uno de ellos posee una dada velocidad. Luego del choque se mueven con velocidades diferentes de las que tenían antes de la colisión.

Para el caso de 2 partículas, si:

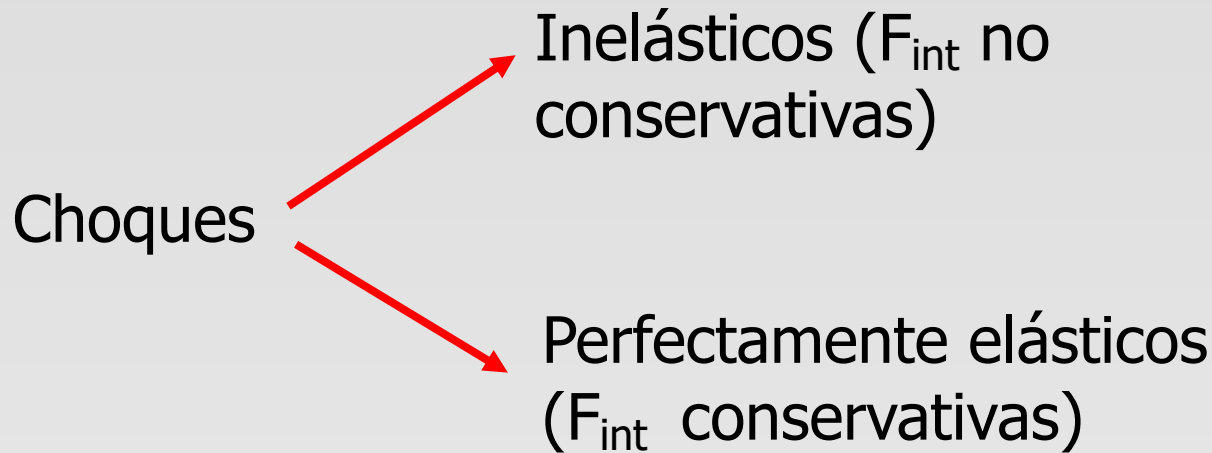
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{P}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

 $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{antes} = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2')_{después}$

$$(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)_{inicial} = (m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')_{final}$$

Cuidado!! Recordar que es una ecuación vectorial: hay que trabajar con cada una de las componentes!!!

Los distintos tipos de colisiones o choques se pueden clasificar de acuerdo al tipo de F_{int} involucradas.



Choques inelásticos: son los que ocurren en la mayoría de los casos de nuestra vida cotidiana.

$$\text{Si } \sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{total} = cte$$

$$F_{int} \text{ no cons.} \Rightarrow E_{cin} \neq cte$$

Un caso especial de los choques inelásticos lo constituye el choque de tipo “plástico”, en el que las partículas intervinientes quedan totalmente adheridas.

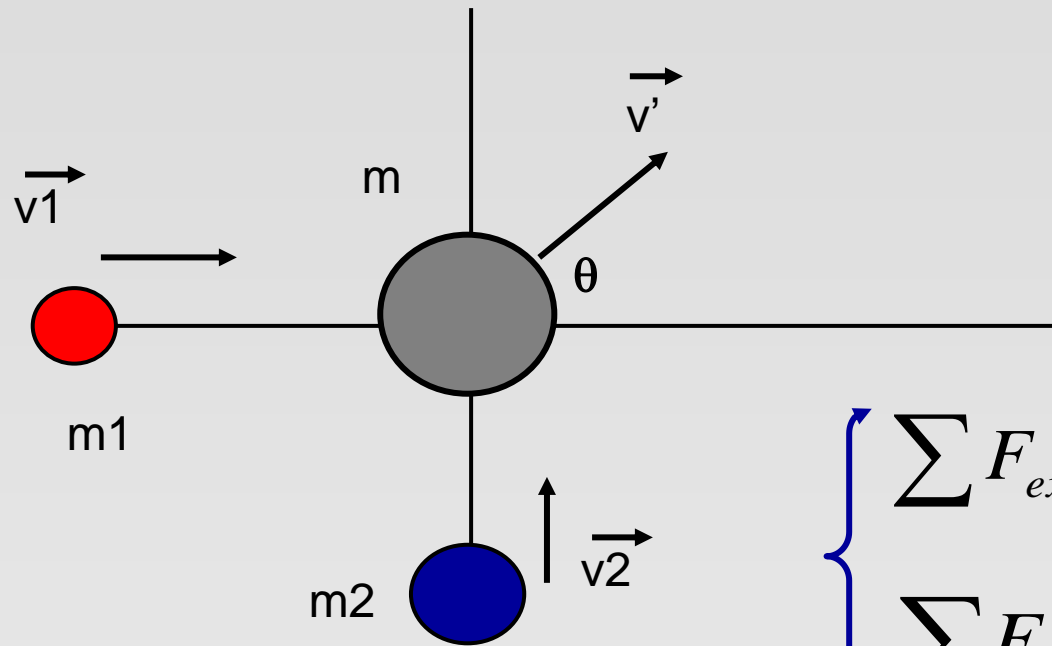
Choques elásticos:

$$\text{Si } \sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{total} = cte$$

$$F_{int} \text{ son cons.} \Rightarrow E_{cin} = cte$$

Advertencia: para determinar el tipo de choque: 1) hallar las veloc. finales de cada una de las partículas y 2) determinar la E_{cin} final total del sistema.

Ejemplo: colisión plástica en 2D sobre una superficie lisa:



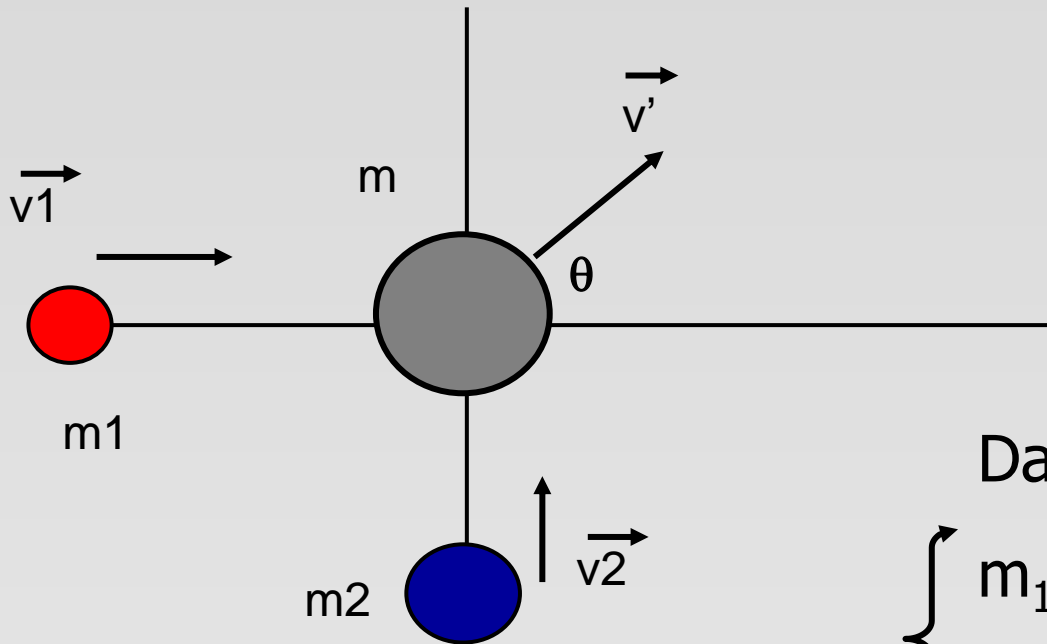
$$m = m_1 + m_2$$

Incógnitas: ¿ v' ? ¿ θ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ext. x} = \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = cte \\ \sum F_{ext. y} = \frac{dp_y}{dt} = 0 \Rightarrow p_y = cte \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum p_x = m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) \cdot v' \cdot \cos \theta \\ \sum p_y = m_1 \cdot 0 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \cdot \sin \theta \end{array} \right.$$

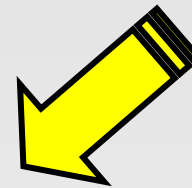
2 ecuaciones y 2 incógnitas.....



Incógnitas: ¿ v' ? ¿ θ ?

Datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 3 \text{ kg}; v_1 = 5 \text{ m/s} \\ m_2 = 4 \text{ kg}; v_2 = 3 \text{ m/s} \end{array} \right.$$



$$v' = 2,7 \text{ m/s}$$

$$\theta = 38,6^\circ$$

Resumen de la clase

- El centro de masa de un sistema se mueve como una partícula de masa M sometida a la influencia de la suma de las fuerza externas que actúan sobre el sistema

Masa total del sistema

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Posición del centro de masa

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Velocidad del centro de masa

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i$$

Aceleración del centro de masa

$$\vec{A}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i$$

- Cantidad de movimiento de un sistema de partículas

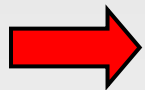
$$\overrightarrow{P_{total}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = M \vec{V}_{CM,S} = \overrightarrow{P_{CM}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{P_{total}}}{dt} = \vec{F}_{neta,ext}$$

La segunda Ley de Newton
para un sistema de partículas

Si la suma de fuerzas externas es cero:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \Rightarrow \vec{P}_{CM} = cte$$



$$(\vec{p}_{total})_{antes} = (\vec{p}_{total})_{después}$$

Cuidado!! Recordar que es una ecuación vectorial: hay que trabajar con cada una de las componentes!!!

Teorema de trabajo y energía para un sistema de partículas no rígidas

Utilizando la expresión (V), el teorema de trabajo-energía cinética para un sistema de partículas ahora nos queda:

$$\Delta E_c = \Delta E_{c, CM} + \Delta E'_{c, rel} = W_{F \text{ ext}} + W_{F \text{ int}}$$

The diagram illustrates the components of the work-energy theorem. A red arrow points from the yellow oval labeled "estados" (states) to the left side of the equation, specifically to ΔE_c . A red bracket points from the right side of the equation, specifically to $W_{F \text{ ext}} + W_{F \text{ int}}$, down to the yellow oval labeled "Procesos de transferencia" (transfer processes).

Energía de un sistema de partículas

$$\Delta E_{mec,CM} + \Delta U = W_{FNC} + W_{fnc}$$

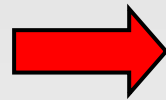
"Energía macroscópica"



"Energía interna" (microscópica)



Si $W_{FNC} + W_{fnc} = 0 \Rightarrow \Delta E_{mec,CM} + \Delta U = 0$



$$E_{mec,CM} + U = cte$$

De lo contrario, si alguno de los términos W_{FNC} (externas) o W_{fnc} (internas) es diferente de 0, existirá algún cambio en la energía mecánica del sistema de partículas, que deberá analizarse para cada caso particular.

Deducción: Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

La energía cinética total de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de cada una de ellas:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,o}^2 = \quad (III)$$

Pero además sabemos que: $\vec{v}_{i,o} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,o}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{i,o} \bullet \vec{v}_{i,o} = (\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,o}) \bullet (\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,o})$$

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

Desarrollando el producto escalar

$$\rightarrow \vec{v}_{i,O} \bullet \vec{v}_{i,O} = (\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O}) \bullet (\vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O})$$

$$\vec{v}_{i,O} \bullet \vec{v}_{i,O} = \vec{v}_{i,CM} \bullet \vec{v}_{i,CM} + \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{V}_{CM,O} + 2\vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{v}_{i,CM}$$

Reemplazando en la ec. (III) nos queda:

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{i,CM} \bullet \vec{v}_{i,CM} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{V}_{CM,O} + \sum_i m_i \vec{V}_{CM,O} \bullet \vec{v}_{i,CM}$$

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{i,CM})^2 + \frac{1}{2} (V_{CM,O})^2 \sum_i m_i + \vec{V}_{CM,O} \bullet \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM}$$

Energía cinética de un sistema de partículas no rígidas

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{i,CM})^2 + \frac{1}{2} (V_{CM,O})^2 \sum_i m_i + \vec{V}_{CM,O} \bullet \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM}$$

Usando que $M = \sum_i m_i$

Y que $\vec{P}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_{i,CM} = 0$

La cantidad de movimiento de todo el sistema respecto al centro de masas es cero

$$E_c = \frac{1}{2} M V_{CM,O}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM,O}^2 + E_{c,rel} \quad (IV)$$

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i V_{CM,o}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,CM}^2 = \frac{1}{2} M V_{CM,o}^2 + E_{c,rel} \quad (IV)$$

Energía cinética
del CM

Energía cinética
relativa al CM

donde: $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema de partículas.

$$E_c = E_{c,CM} + E'_{c,rel} \quad (V)$$

La energía cinética de un sistema de partículas está constituida por dos términos:

- (1) La energía cinética "del CM" ($E_{c,CM}$)
- (2) La energía cinética "relativa" al CM ($E'_{c,rel.}$)