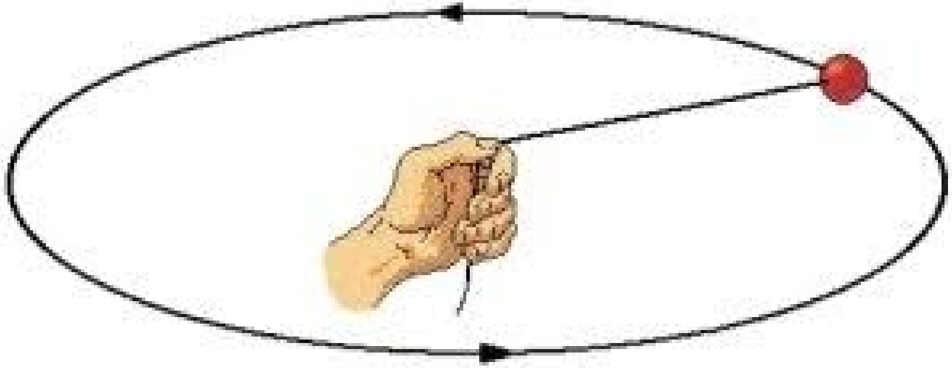
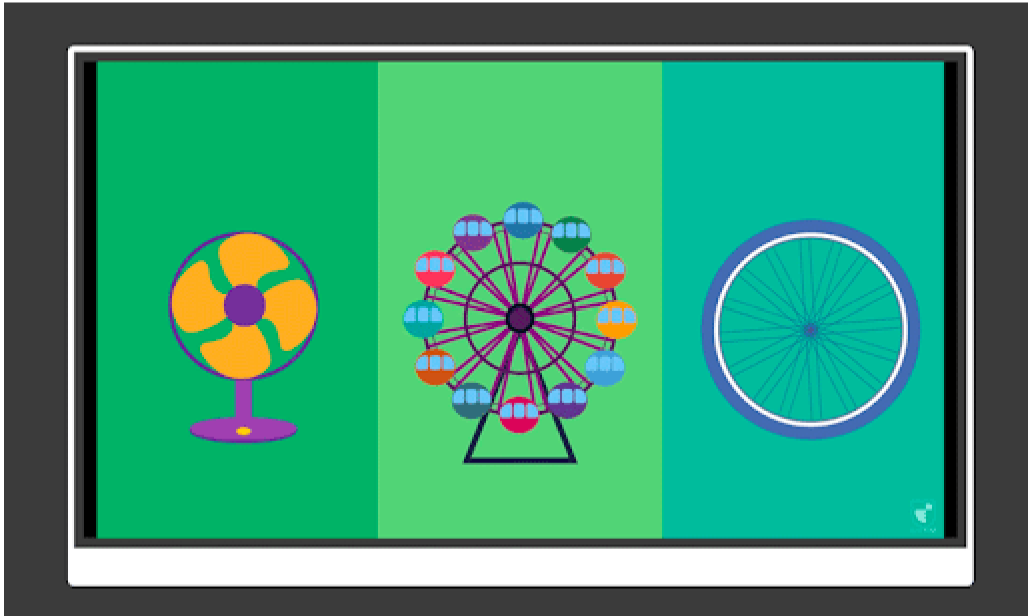
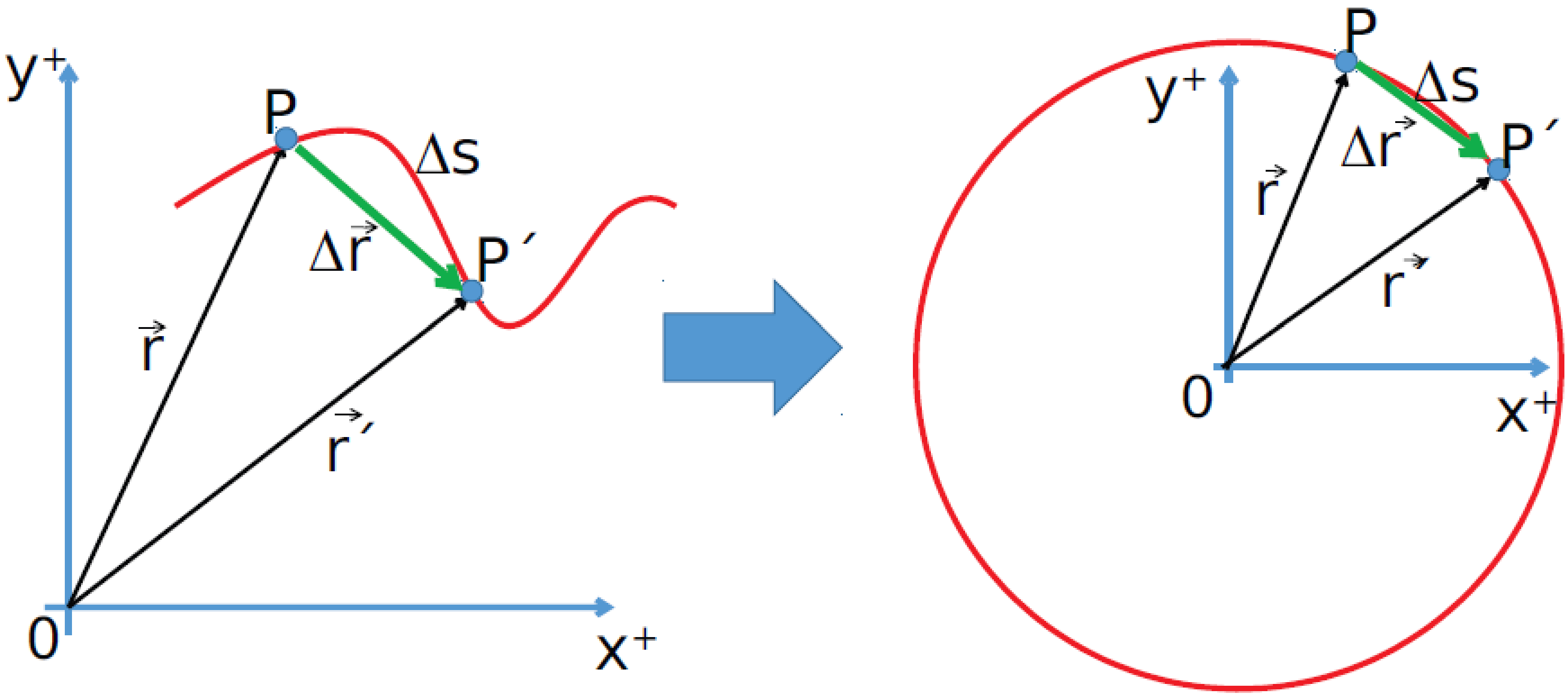
# Dinámica y cinemática circular
# Ejemplos

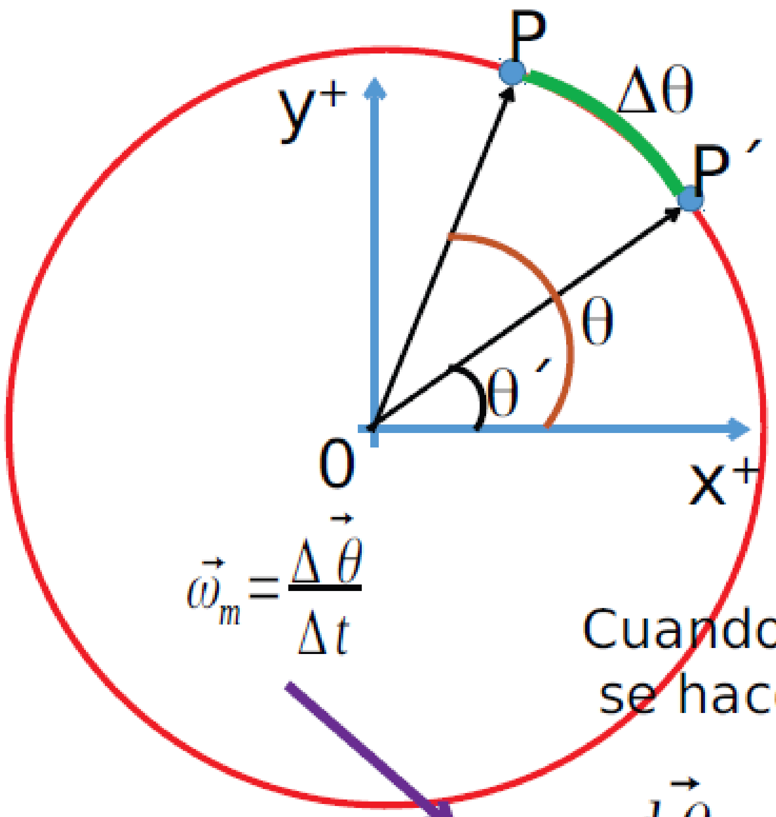

Neptune
Mars
Mercury
Earth
Venus



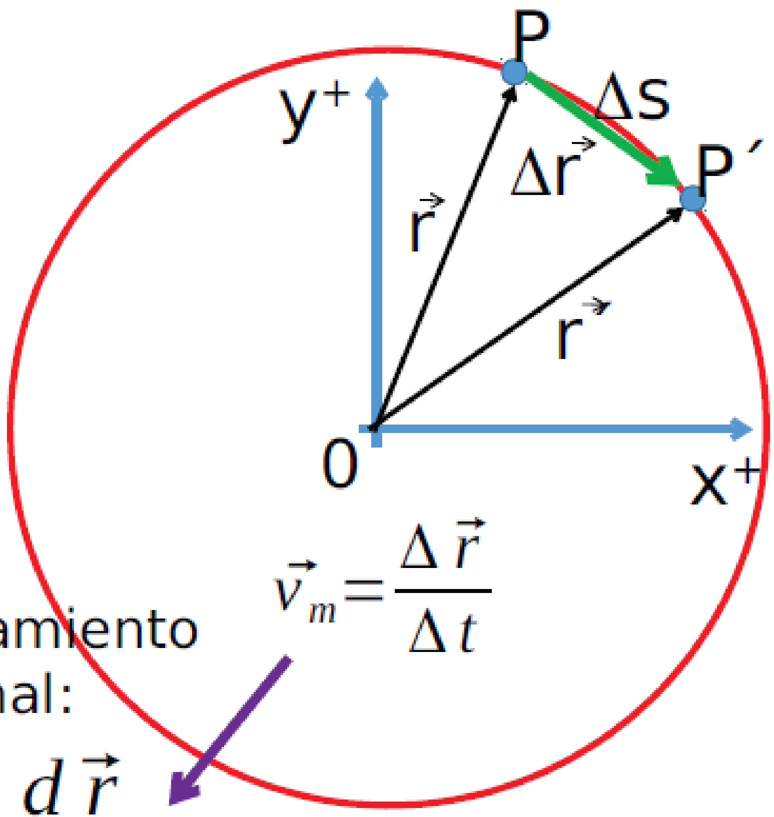


# Movimiento circular






$$\vec{\omega}_m = \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t}$$



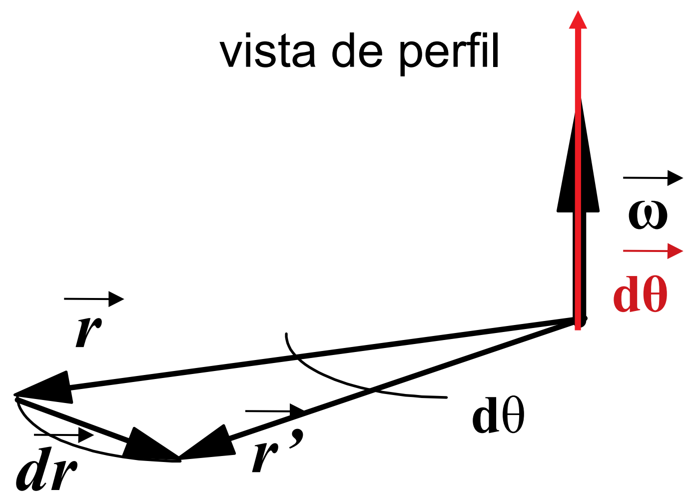

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Cuando el desplazamiento se hace infinitesimal:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

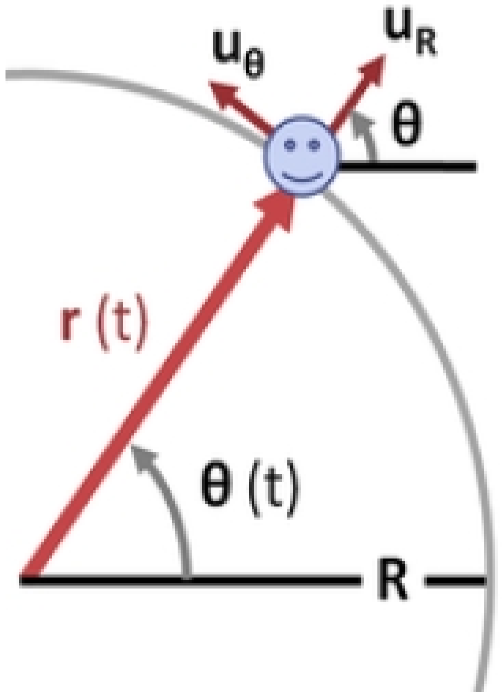
$\vec{\omega}$ representa al cambio angular respecto al tiempo.




Es un vector que se encuentra en el eje de rotación que es ⊥ al plano donde se da la rotación (ej. en este caso eje $z$ ).

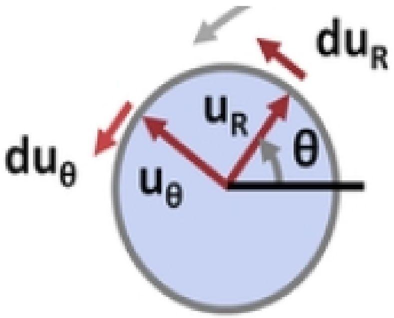
Tiene unidades de ángulo por unidad de tiempo (grados/s, radianes/h, etc.)

# Movimiento circular




$$\vec{r}(t) = R\,\hat{u}_R(t)$$

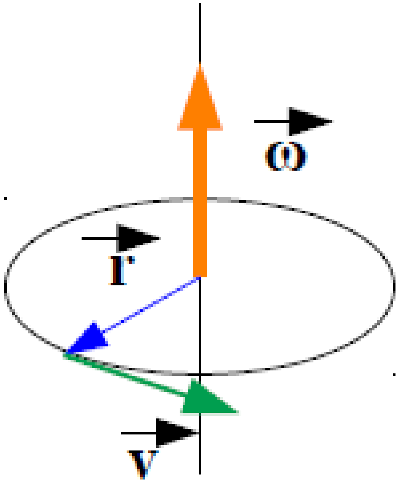
$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dR}{dt}\hat{u}_R(t) + R\,\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt}$$




$$\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt} = \frac{d\,\theta}{dt}\hat{u}_\theta(t)$$

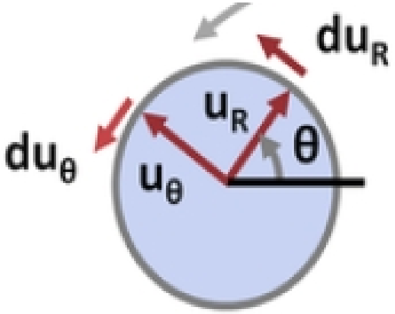
$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = R\,\frac{d\,\hat{u}_R(t)}{dt} = R\,\omega\,\hat{u}_\theta(t)$$

La velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto




$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

El vector aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.




$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d(R\omega\hat{u}_\theta(t))}{dt}=R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta(t)+R\omega\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}$$

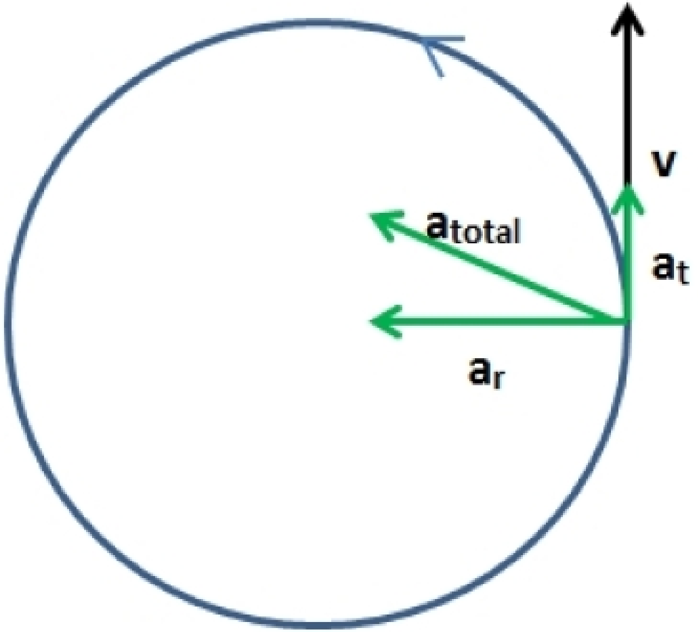
$$\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}=\frac{-d\theta}{dt}\hat{u}_R(t)=-\omega\hat{u}_R(t)$$

$$\vec{a}(t)=R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_\theta(t)+R\omega\frac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt}=R\alpha\hat{u}_\theta(t)-R\omega^2\hat{u}_R(t)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{rad}(t) + \vec{a}_{\tan}(t)$$

$$R\,\alpha\,\hat{u}_{\theta}(t)$$

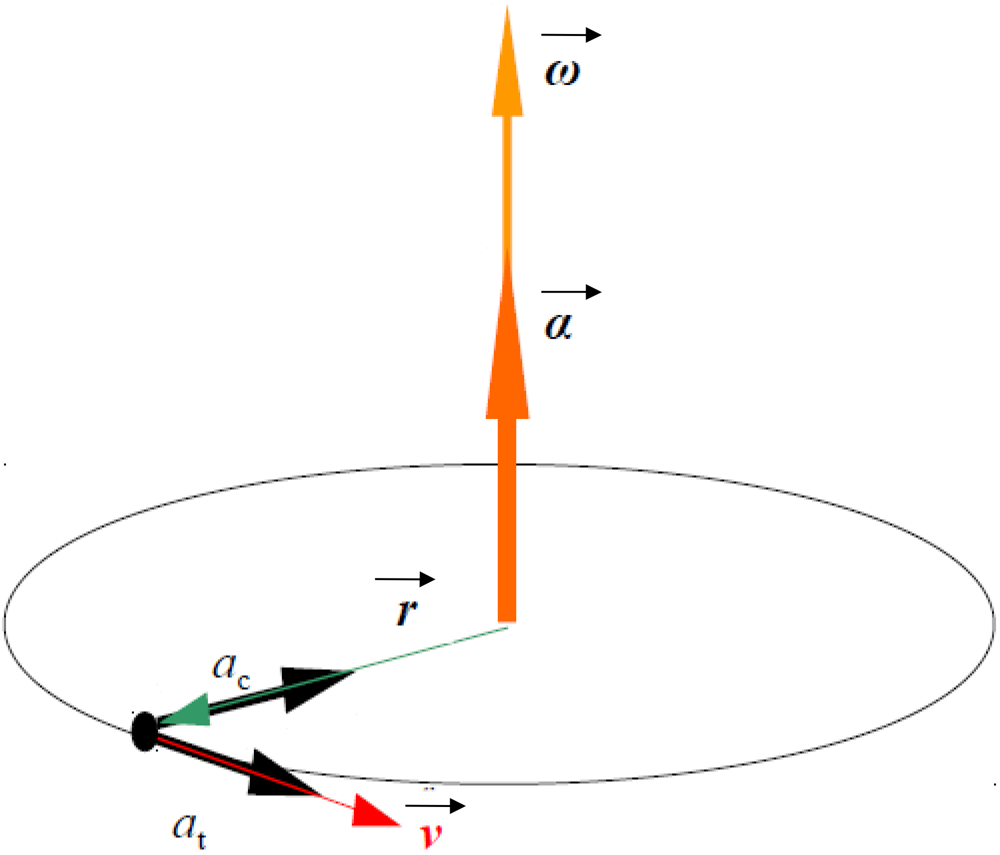
$$-R\,\omega^2\,\hat{u}_R(t) = \frac{-|\vec{v}|^2}{R}\,\hat{u}_R(t)$$




$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Aceleración angular (grados/s$^2$ ,etc)

La componente radial o centrípeta de la aceleración está indicando el cambio en la dirección del vector velocidad; mientras que la componente tangencial indica un cambio en el módulo de la velocidad.

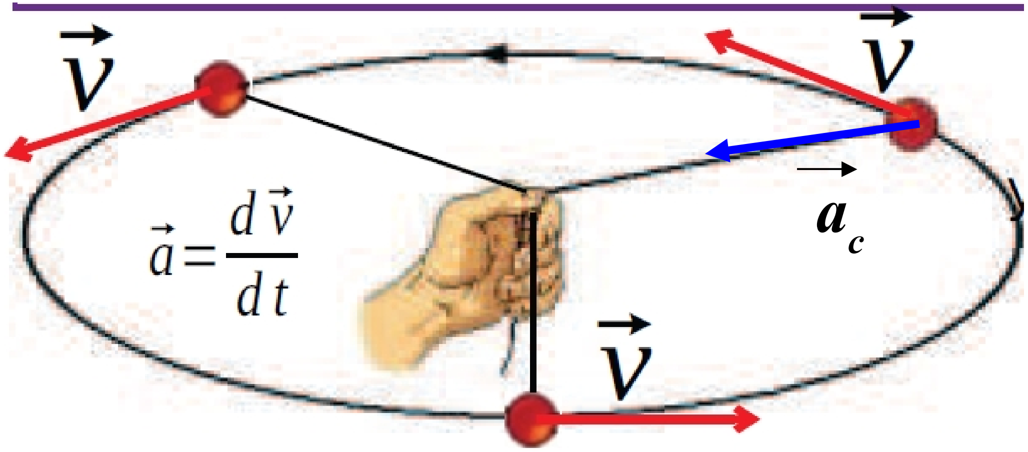



$$\vec{a}=\frac{d\,\vec{v}}{dt}=\underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{tangencial}}+\underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{radial}}$$

https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/rotation/latest/rotation.html?simulation=rotation&locale=es

# Dinámica circular

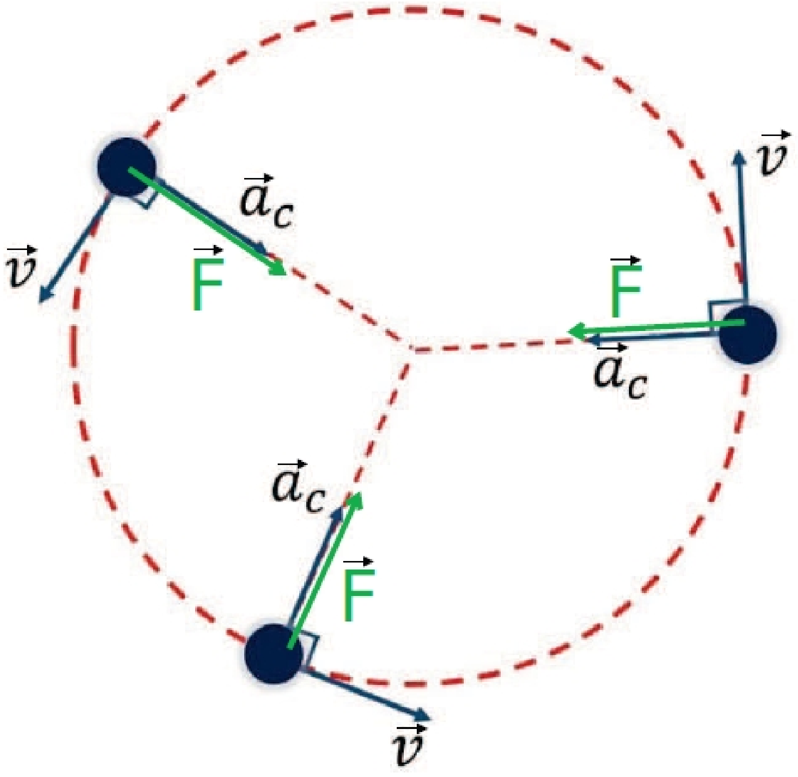
- Todo cuerpo que se mueve en una trayectoria circular estará acelerado aún en el caso donde el módulo de la velocidad sea constante.

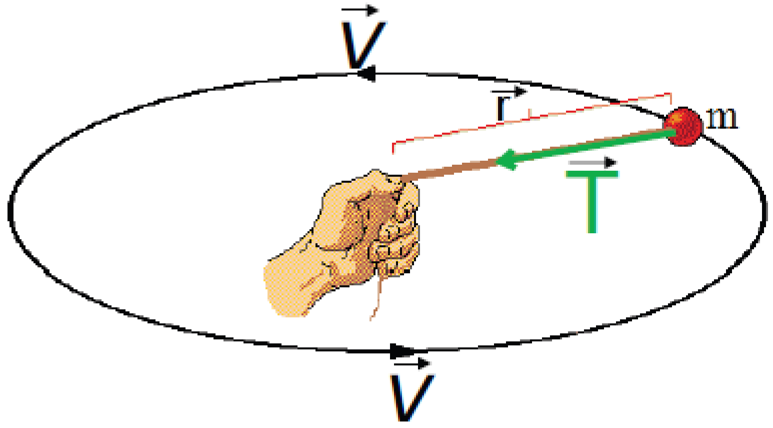



Si esto ocurre la aceleración será sólo radial apuntando hacia el centro de giro. Su módulo es

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

- De acuerdo con las leyes de Newton, si un cuerpo está acelerado, debe haber una fuerza neta actuando sobre él.




Si la fuerza deja de actuar, el movimiento dejará de ser circular ya que el cuerpo comenzá a moverse con velocidad constante en dicho plano.

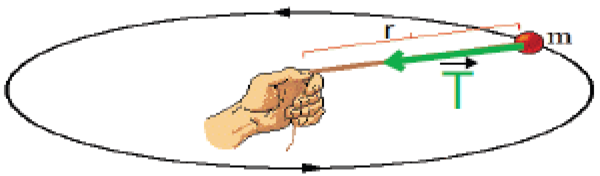
# Dinámica circular

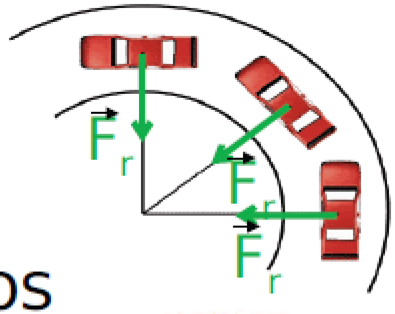
¡En todos estos casos como la *Fuerza* que apunta hacia el centro de la trayectoria circular (está a 90° de *v*) sólo cambia la dirección del vector velocidad pero no su módulo!

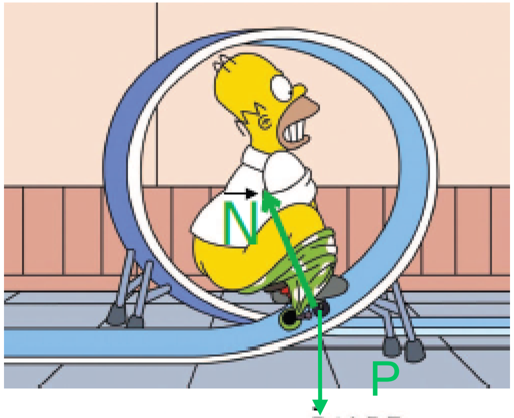
La 2da Ley de Newton en estos casos:

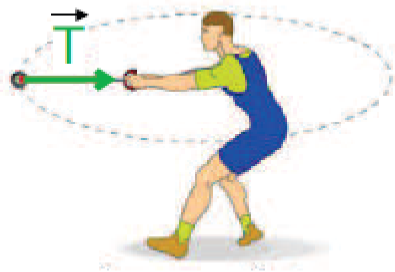
$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_{cen}$$

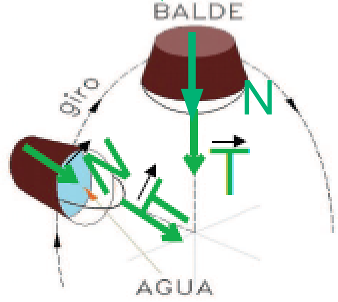
**donde $\vec{a}_{cen}$ es la *aceleración centrípeta*.**



# Dinámica circular

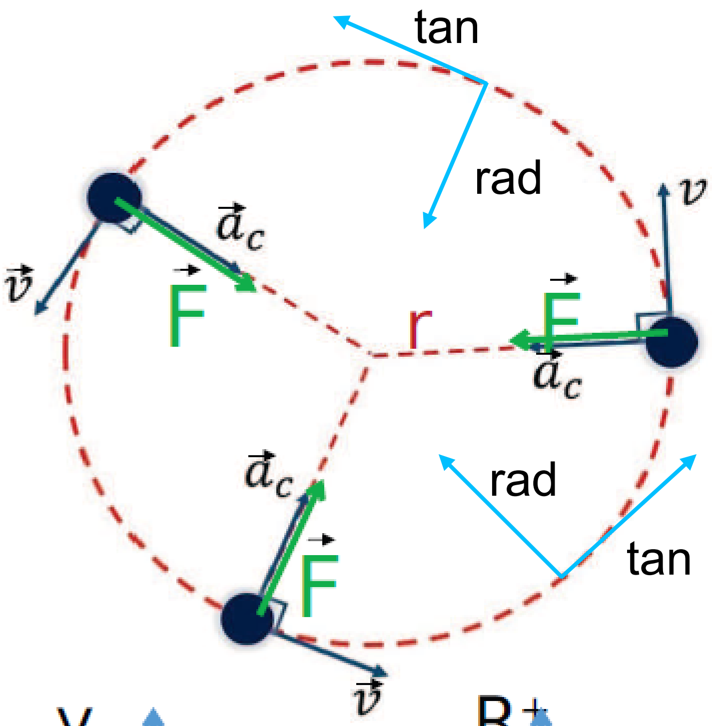
**Usando la relación entre $v$ y $\omega$ que encontramos al principio de esta clase:**

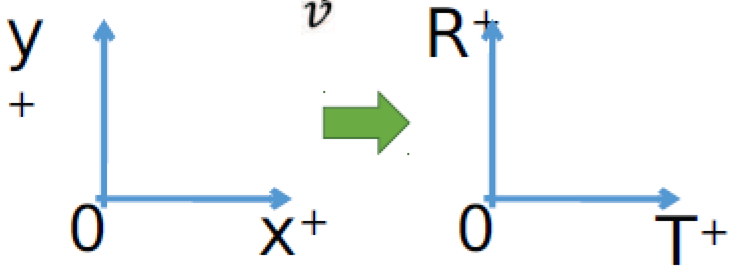
$$v = \omega r$$

**podemos expresar la $a_{cen}$ también en términos de la velocidad angular $\omega$.**

$$\boxed{a_{cen} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Notar que la $a_{cen}$ tiene las mismas unidades que cualquier aceleración($m/s^2$).



Tarzán (m = 85 Kg) trata de cruzar un río balanceándose en una liana de 10 m de largo. Su velocidad, cuando pasa por la parte más baja de su trayectoria es de 8 m/s. Tarzán no sabe que la tensión de ruptura de la liana es de 1000 N. ¿Cruzará el río a salvo? Si dispusiera de un sensor de fuerza (lea el apunte que describe cómo funciona) cómo podría armar una experiencia a escala para verificar si su respuesta es correcta.

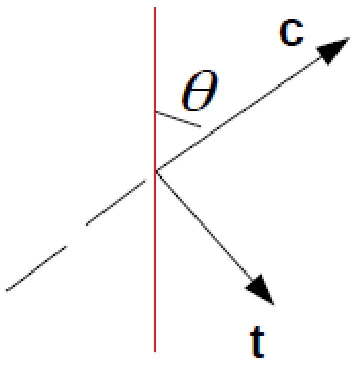
Cuando se columpia, realiza un movimiento circular cuyo radio de giro está dado por la longitud de la liana (r). Despreciando el roce con el aire, las únicas fuerzas que actúan sobre él son el peso P y la Tensión T

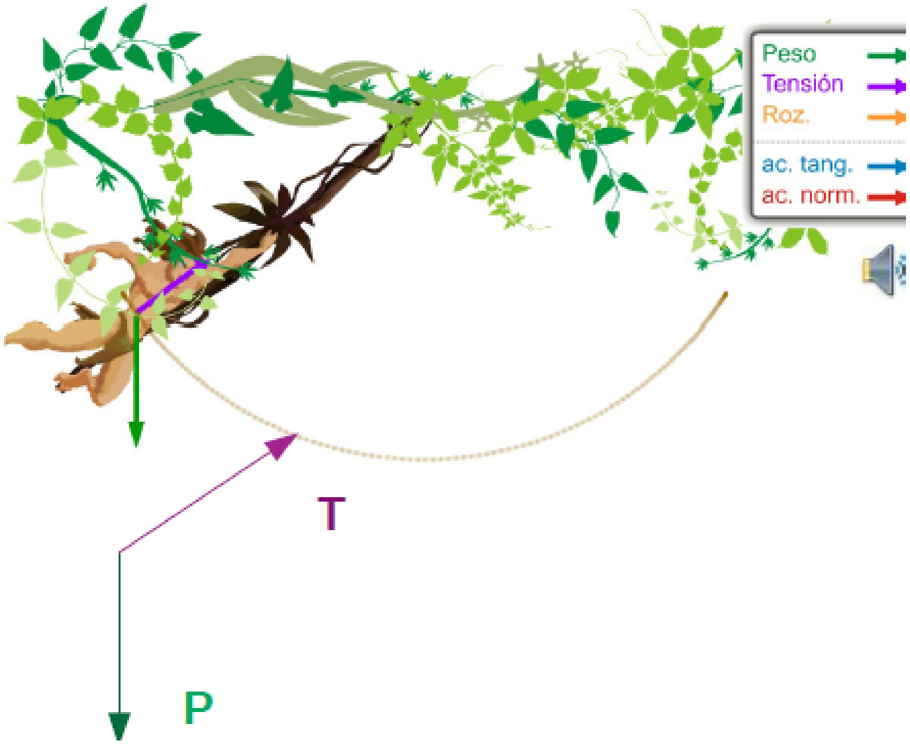
Ver simulación de Tarzán

-Para analizar está situación se elije un sistema de coordenadas instantáneo con un eje centrípeto **c** y otro tangencial **t**

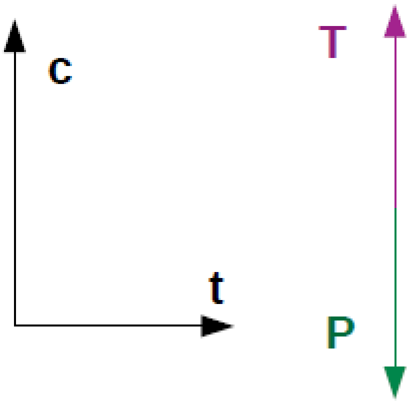
$$\sum F_c = T - P_c = T - mg\cos\theta = m\,a_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\sum F_t = P_t = mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_t$$



- Mientras Tarzán se columpia, el ángulo θ va cambiando tal que, cuando se halla en el punto más bajo (θ=0):


$$\sum F_c = T - mg = m a_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\sum F_t = m a_t = 0$$

en este punto la aceleración tangencial es nula.

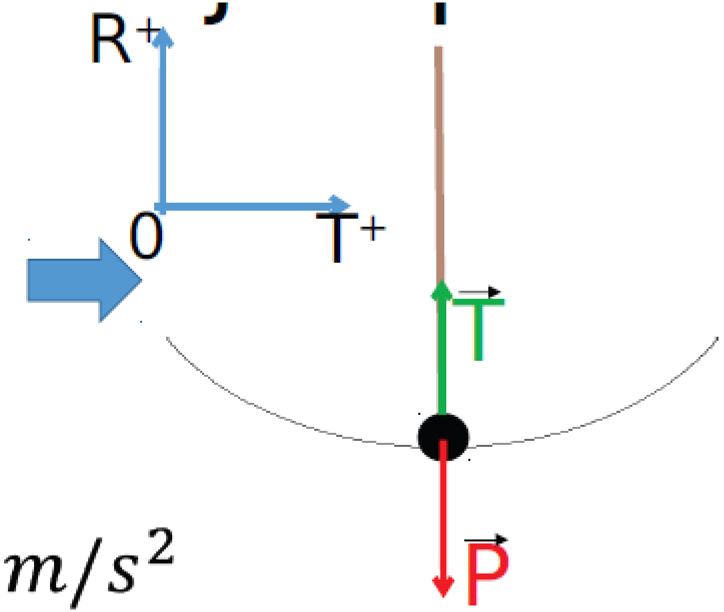
$$T - P = m\,a_C$$

$$T = m\,a_{cen} + P$$

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$

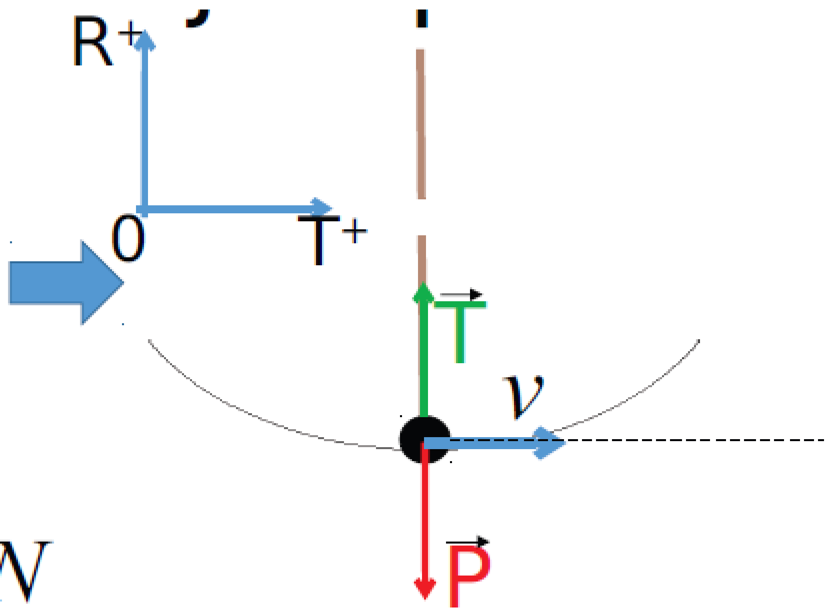
$$T = 85\,Kg\,\frac{(8\,m/s)^2}{10\,m} + 85\,Kg\;9{,}8m/s^2$$

$$T = 544\,\frac{Kg\,m}{s^2} + 833Kg\,\frac{Kg\,m}{s^2} = \boxed{1377\ N}$$




La cuerda no aguanta → Tarzán se cae

$$T = m\frac{v^2}{r} + mg$$




Si no hay movimiento ($v$ = 0) y Tarzán sólo cuelga de la liana:

$$T = mg = 80Kg\ 9{,}8m/s^2 = 833N$$

¡La liana en este caso no se rompe!

*La tensión en la liana no sólo depende del peso que cuelga de ella, sino también de la velocidad de movimiento.*

- Dado que en las otras posiciones (θ≠0) la aceleración tangencial es no nula el módulo de la velocidad va cambiando $|\vec{v}(t_0)| \neq |\vec{v}(t_1)|$ en dichos instantes; mientras que cuando la aceleración centrípeta no es nula, la dirección es la que cambia.


# Cinemática circular

$$\vec{\alpha}(t)=\frac{d\,\vec{\omega}(t)}{dt} \longrightarrow \int_{t_i}^{t}\vec{\alpha}(t)\,dt=\int_{t_i}^{t}d\vec{\omega}(t)=\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_i)$$

$$\vec{\omega}(t)=\frac{d\,\vec{\theta}(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{t_i}^{t}\vec{\omega}(t)\,dt=\int_{t_i}^{t}\int_{t_i}^{t}\vec{\alpha}(t)\,dt\,dt+\int_{t_i}^{t}\vec{\omega}(t_i)\,dt=\int_{t_i}^{t}d\vec{\theta}(t)=\vec{\theta}(t)-\vec{\theta}(t_i)$$

Si $\vec{\alpha}$ es constante

$$\vec{\omega}(t)-\vec{\omega}(t_i)=\vec{\alpha}\,\Delta t$$

$$\vec{\theta}(t)-\vec{\theta}(t_i)=\vec{\omega}(t_i)\Delta t+\frac{\vec{\alpha}}{2}(\Delta t)^2$$

Un auto toma una curva a velocidad constante por una carretera plana de radio constante $R$. Si el coeficiente de roce estático y dinámico entre la superficie y el auto es $\mu_e$ y $\mu_d$ respectivamente,

a) Indique en un gráfico en qué sentido actuará la fuerza de roce sobre los neumáticos del auto mientras el mismo toma la curva?

b) Hallar la expresión de la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin deslizar, ¿De qué parámetros depende esta $v_{máx}$?

c) Si la carretera se hubiera diseñado con un peralte de ángulo $\alpha$ y se pudiera despreciar el roce, ¿podría tomarse la curva sin deslizar a pesar de la falta de roce? En caso afirmativo hallar la expresión de la velocidad con que debería ser tomada la curva.

http://www.thephysicsaviary.com/Physics/Programs/Labs/CircularFrictionTestTrack/index.html