Sistema de partículas

- Aplicando la 2da ley de Newton a ambas partículas.

$$\sum \vec{F}_1 = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{21} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1]$$

+

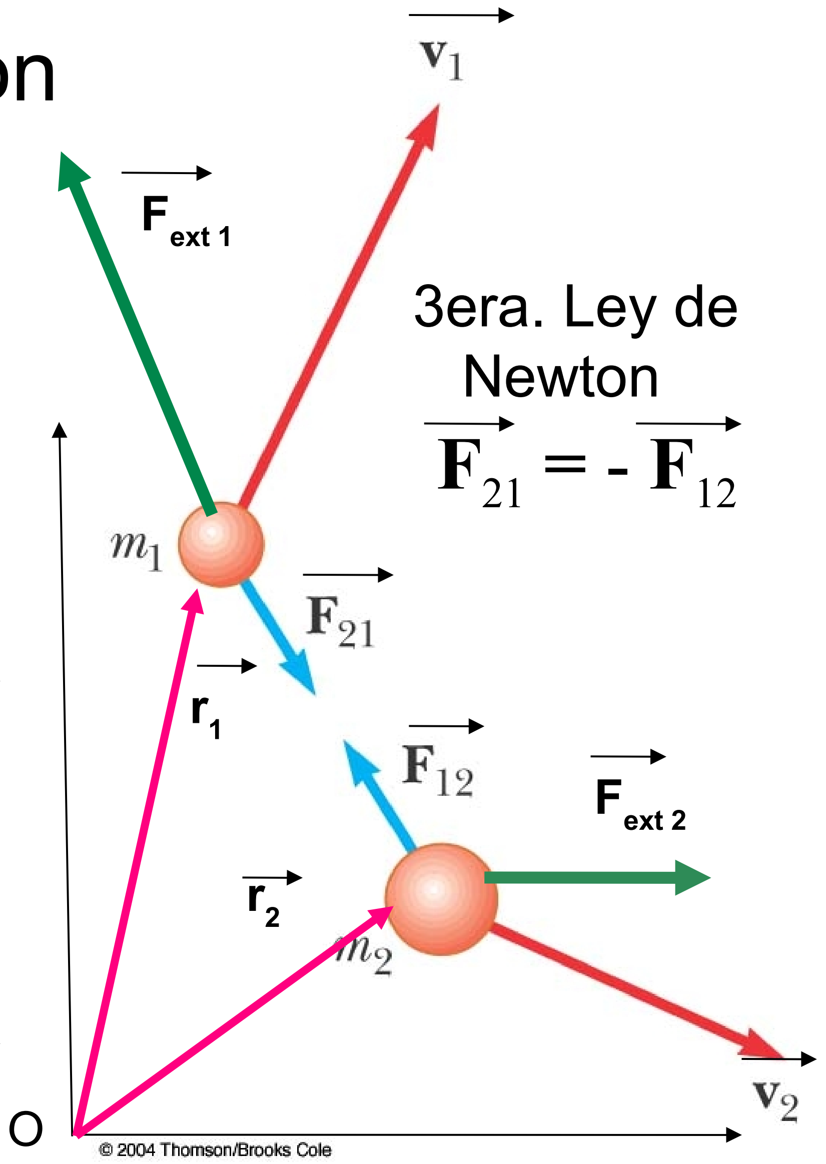
$$\sum \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext2} + \vec{F}_{12} = d/dt\,[m_2\vec{v}_2]$$

$$\sum \vec{F}_1 + \sum \vec{F}_2 = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2]$$

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{ext1} + \vec{F}_{ext2} = d/dt\,[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2]$$

3era. Ley de Newton

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



- Si tuviésemos n partículas

- $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \sum_{\mathbf{i}}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext i}} = d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i] = M\,d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i/M]$ $\qquad M = \sum_{i}^{n} m_i$

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = M\,d/dt\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i / \sum_{i}^{n} m_i] = M\,d^2/dt^2\,[\sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i / \sum_{i}^{n} m_i]$$

- **Centro de masas:** punto imaginario geométrico de masa M que dinámicamente se comporta como si en él estuviesen aplicadas todas las $\mathbf{F}_{ext}$ que actúan sobre el sistema. Sus variables cinemáticas son

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i / \sum_{i}^{n} m_i \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{v}}_i / \sum_{i}^{n} m_i \qquad \vec{\boldsymbol{a}}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{\boldsymbol{a}}_i / \sum_{i}^{n} m_i$$

- Se define cantidad de movimiento → $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{p}_{CM} = M\,\vec{v}_{CM} = \sum_{i}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i}^{n} \vec{p}_i$$

- El sistema como un todo se comporta como una partícula
- de masa *M*, vector posición $\vec{r}_{CM}$ y cantidad de movimiento $\vec{p}_{CM}$

$$\vec{F}_{neta} = \sum_{i}^{n} \vec{F}_{ext\ i} = \sum_{i}^{n} d\vec{p}_i/dt = d\vec{p}_{CM}/dt$$

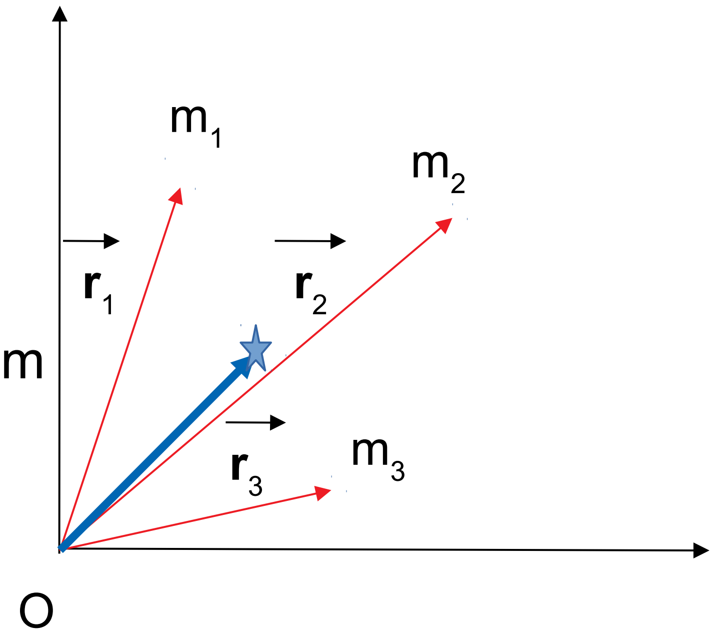
2da ley de Newton para un sistema de partículas

- Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de un sist. de partículas (aplicación de las leyes de Newton):

“Si no hay fuerzas externas actuando sobre un sistema, su cantidad de movimiento se conserva”

- Si $\Sigma_i \vec{\mathbf{F}}_{ext}=0 \longrightarrow \vec{\mathbf{p}}_{sist} = \Sigma_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{CM} = cte$

- **Ejemplo** A tiempo t las partículas m_1=1Kg, m_2=0,5 Kg y m_3=2Kg,se encuentran en las posiciones $\vec{\mathbf{r}}_1$=(1;4)m, $\vec{\mathbf{r}}_2$=(4;3,5)m y $\vec{\mathbf{r}}_3$=(2,8;0,8)m La posición del CM está dado por:

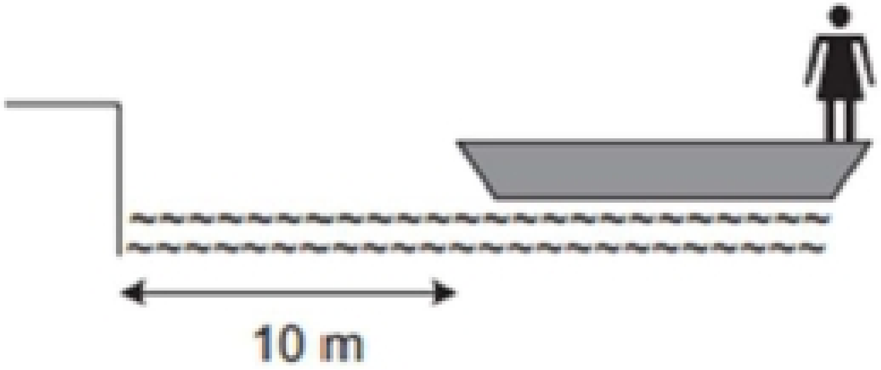


$$\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = (m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2 + m_3\vec{\mathbf{r}}_3)/(m_1+m_2+m_3)$$

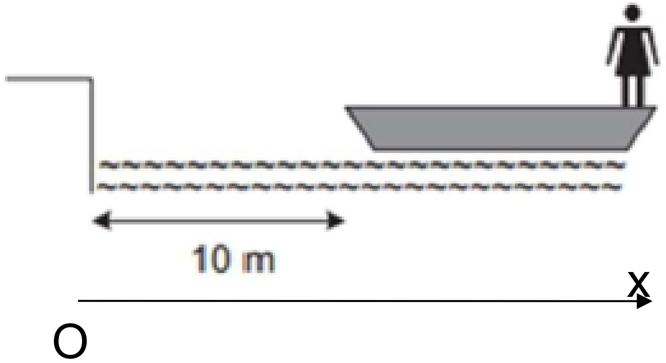
$$\vec{r}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i / \sum_i m_i = ((1;4)\mathrm{Kgm} + (2;1,75)\mathrm{Kgm} + (5,6;1,6)\mathrm{Kgm})/3,5\mathrm{Kg}$$

$$\vec{r}_{CM} = (8,6;7,35)\mathrm{Kgm}/3,5\mathrm{Kg} = (2,45;2,1)\mathrm{m}$$

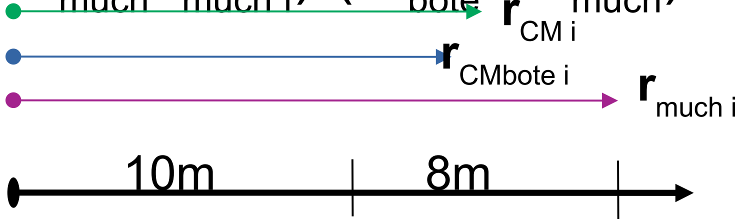
Un bote de 100kg y 8m de longitud se encuentra en reposo en un lago, a 10m de tierra. En el extremo del bote más alejado de la orilla está sentada una muchacha de 50kg. La muchacha camina hasta el otro extremo del bote, donde se detiene. ¿A qué distancia de la orilla se encuentra entonces? (Despreciar la fuerza horizontal ejercida por el agua sobre el bote).



- Despreciando el roce con el agua, las únic $\mathbf{F}_{ext}$ que actúan sobre el sistema barco-muchacha son los pesos y la normal generada por el agua tal que $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}=0$

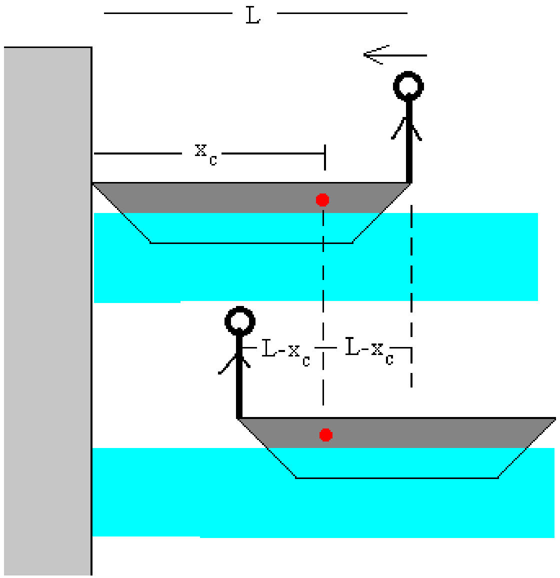


- Luego $\vec{\mathbf{p}}_{sist}$=cte . Antes de comenzar a moverse la muchacha, el sistema está en reposo en $\vec{\mathbf{v}}_{CM}=0$ y tiene que permanecer así por lo tanto $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$=cte. Antes de empezar a moverse la muchacha
$x_{CM\,i}=(m_{bote}\, x_{CMbote\,i}+m_{much} x_{much\,i})/(m_{bote}+m_{much})=(1400+900)/150$ m
$X_{CM\,i}=(15{,}33;0)$m
Luego del movimiento, $x_{CM\,f}=(m_{bote}\, x_{CMbote\,f}+m_{much} x_{much\,f})/(m_{bote}+m_{much})$



- $x_{CM\,i} = x_{CM\,f}$

- $x_{CM\ i} = x_{CM\ f} = (m_{bote} x_{CMbote\ f} + m_{much} x_{much\ f})/(m_{bote} + m_{much})$
- $x_{CM\ i} = (m_{bote}(x_{CMi} + (x_{CMi} - x_{CMbote\ i}) + m_{much} x_{much\ f})/(m_{bote} + m_{much})$
- $(m_{bote} + m_{much}) x_{CM\ i} = 2m_{bote} x_{CMi} - m_{bote} 14m + m_{much} x_{much\ f}$
- $x_{much\ f} = ((-m_{bote} + m_{much}) x_{CM\ i} + m_{bote} 14m)/m_{much}$
- $x_{much\ f} = ((-100Kg + 50Kg)15{,}33m + 100Kg14m)/50Kg$
- $x_{much\ f} = 12{,}67\ m$



$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext i}} = d\vec{\boldsymbol{p}}_{CM}/dt$$

Impulso de la fuerza F_{neta}:

$$\vec{\mathbf{I}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}}\, dt = \int d\vec{\boldsymbol{p}}_{CM} = \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{CM}$$

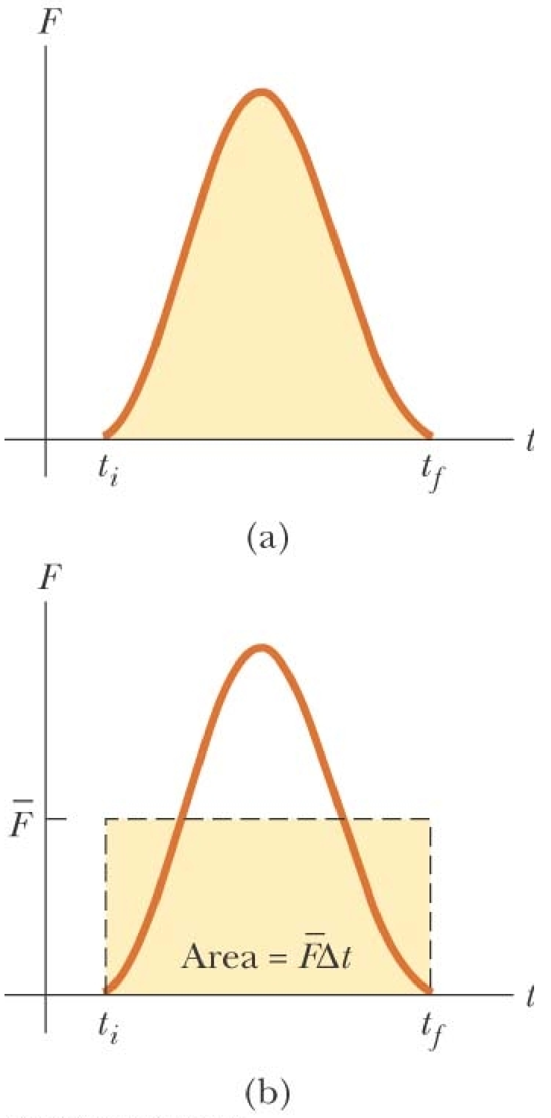
variación de la cantidad de movimiento del centro de masas

- La cantidad de movimiento del sistema no cambia con t sí y sólo sí, $\vec{\mathbf{I}} = 0$

$$\vec{\mathbf{I}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}}\, dt = \mathbf{0} \qquad \vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{neta}} = \mathbf{0}$$

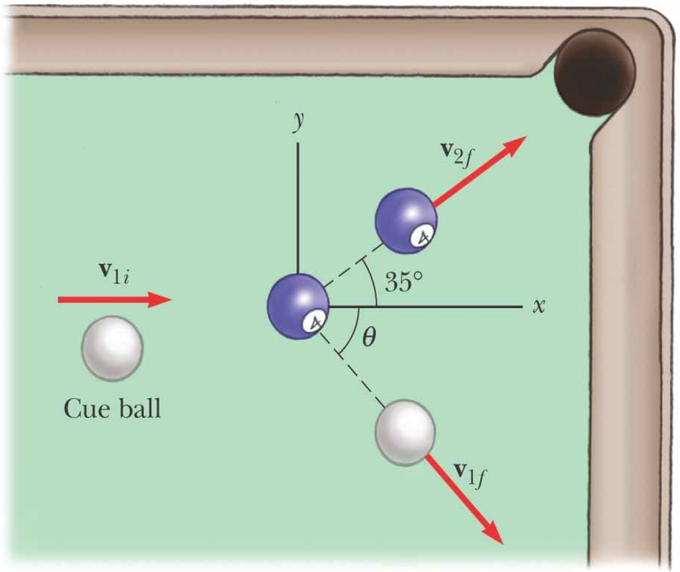
$\Delta t = \mathbf{0}$ **intervalo de tiempo muy corto**

- $$\vec{I} = \int \vec{F}_{neta}\, dt$$
- El impulso es el área bajo la curva.
- La fuerza media $\vec{F}_m = <\vec{F}_{neta}>$ es cte. y su valor es tal que su área bajo la curva es igual al impulso.
- $<\vec{F}_{neta}> = \Delta\vec{p}/\Delta t \longrightarrow \vec{I} = <\vec{F}_{neta}>\Delta t$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

- **Una bola de billar que se mueve de izq. der. con una v_{1i} choca con otra bola que está en reposo, tal que comienza a moverse con una v_{2f} y un ángulo de 35^0. Sus masas son m_1 y $m_{2.}$ ¿Cuál es la velocidad (módulo y dirección) de la primera bola luego del choque? ¿Y v_{CM} antes y después?**



© 2004 Thomson/Brooks Cole

- Si se desprecia el roce de la bola con el paño, las únicas $\mathbf{F}_{ext}$ actuantes son sobre el sistema formado por ambas bolas son los **pesos** y las **normales** (actúan en el eje z que es ⊥ a la pantalla y $\Sigma F_z = N_1 + N_2 - P_1 - P_2 = 0$).

- Por lo tanto, no hay $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ actuando sobre el sistema entonces $\vec{\mathbf{p}}_{sist}$ se conserva, es constante ($\vec{\mathbf{p}}_{sist\ i}=\vec{\mathbf{p}}_{sist\ f}$). Antes del choque $\vec{\mathbf{p}}_{sist\ i}=\vec{\mathbf{p}}_{1i}+\vec{\mathbf{p}}_{2i}=(p_{1xi}+p_{2xi},\ p_{1yi}+p_{2yi})=(m_1v_{1i},0)$.
- Luego del choque, $\vec{\mathbf{p}}_{sist\ f}=\vec{\mathbf{p}}_{1f}+\vec{\mathbf{p}}_{2f}=(p_{1xf}+p_{2xf},\ p_{1yf}+p_{2yf})=(p_{xf},p_{yf})$ $(p_{xf},p_{yf})=(m_1v_{1fx}+m_2v_{2f}\cos(35^0),\ m_1v_{1fy}+m_2v_{2f}\sin(35^0))$
- Entonces $m_1v_{1i} = m_1v_{1fx}+m_2v_{2f}\cos(35^0)$ y

  $0 = m_1v_{1fy}+m_2v_{2f}\sin(35^0)$

  Luego $v_{1fx}= (m_1v_{1i} - m_2v_{2f}\cos(35^0))/m_1=v_{1f}\cos\theta$ y

  $v_{1fy}= - m_2v_{2f}\sin(35^0)/m_1 =v_{1f}\sin\theta$

$$|v_{1f}|=\sqrt{(v_{1fx})^2+(v_{1fy})^2}$$

$$\tan\theta=|v_{1fy}|/|v_{1fx}|$$

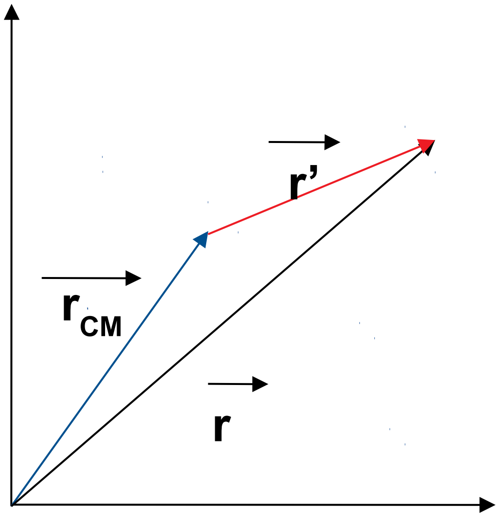
- Como $\vec{\mathbf{p}}_{sist} = \vec{\mathbf{p}}_{CM} = cte \longrightarrow \vec{\mathbf{v}}_{CM} = cte$
- $\vec{\mathbf{v}}_{CMi} = (m_1 \vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2 \vec{\mathbf{v}}_{2i})/(m_1 + m_2) = (m_1 v_{1xi}/(m_1 + m_2), 0)$
- $\vec{\mathbf{v}}_{CMf} = (m_1 \vec{\mathbf{v}}_{1f} + m_2 \vec{\mathbf{v}}_{2f})/(m_1 + m_2)$

$$= [(m_1 v_{1i} - m_2 v_{2f} \cos(35^0)) + m_2 v_{2f} \cos(35^0),$$
$$- m_2 v_{2f} \sin(35^0) + m_2 v_{2f} \sin(35^0)]/(m_1 + m_2)$$

- $\vec{\mathbf{v}}_{CMf} = (m_1 v_{1xi}/(m_1 + m_2), 0)$

$$\vec{\mathbf{v}}_{CMi} = \vec{\mathbf{v}}_{CMf}$$

En un sistema de partículas la posición **r** de una partícula, $\vec{r}=\vec{r}_{CM}+\vec{r}'$ donde $\vec{r}_{CM}$ es la posición del CM y $\vec{r}'$ la posición de la partícula relativa al CM.



- Luego $\vec{v}=\vec{v}_{CM}+\vec{v}'$ y

$$\vec{a}=\vec{a}_{CM}+\vec{a}'$$

Como $\vec{p}_{sist}=\Sigma_i m_i \vec{v}_i=M\vec{v}_{CM}=\vec{p}_{CM}$ ⟶ $\Sigma_i m_i \vec{v}'_i=0$

también se puede deducir una relación similar de las otras variables cinemáticas.

Teorema de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

- $W_{TF} = \Delta E_{c\,sist}$
- La energía cinética del sistema $E_{c\,sist}$:

$$E_{csist} = \sum_i^n \frac{m_i}{2} v_i^2 = \sum_i^n \frac{m_i}{2} \left(v_{CM} + v'_i\right)^2 = \sum_i^n \frac{m_i}{2} \left(v_{CM}^2 + 2 v_{CM} v'_i + v'^2_i\right)$$

como

$$\sum_i^n m_i v'_i = 0$$

$$E_{csist} = \sum_i^n \frac{m_i}{2} v_{CM}^2 + \sum_i^n \frac{m_i}{2} v'^2_i \longrightarrow E_{csist} = E_{cCM} + E_{crelCM}$$

- Entonces $\Delta E_{csist} = \Delta E_{cCM} + \Delta E_{crelCM}$
- ¿Cómo es el W_{TF} en un sistema de partículas? Tomemos el caso de 2 part., sobre ellas actúan $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ (externas) y $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{21}$ (internas). La part. 1 se desplaza un d$\mathbf{r}_1$ y la part. 2 d$\mathbf{r}_2$

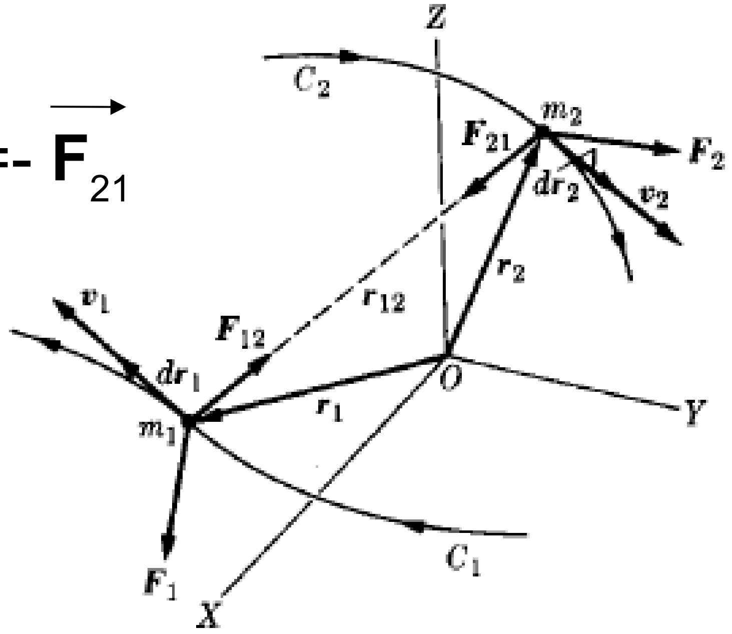
$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_{12} . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{21} . d\vec{r}_2$$

Como $\overrightarrow{\mathbf{F}_{12}} = - \overrightarrow{\mathbf{F}_{21}}$

$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{12} . \left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 \right)$$

como $d\overrightarrow{\mathbf{r}_1} \neq d\overrightarrow{\mathbf{r}_2}$

$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{12} . d\vec{r}_{12}$$



$$W_{TF} = \int_i^f \vec{F}_1 . d\vec{r}_1 + \int_i^f \vec{F}_2 . d\vec{r}_2 + \int_i^f \vec{F}_{12} . d\vec{r}_{12}$$

$$W_{TF} = W_{F_{ext}} + W_{F_{internas}}$$

$$W_{TF} = W_{F_{ext}} + W_{F_{internas}} = \Delta E_c = \Delta E_{cCM} + \Delta E_{crelCM}$$

el cambio de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas exteriores e interiores.

Que las fuerzas internas se cancelen entre sí en un sistema de partículas NO conlleva a que sus trabajos también se cancelen entre sí.

- **Choque y/o explosión:** interacción vigorosa entre partículas con una duración relativamente corta (accidentes automovilísticos, bolas que chocan en una mesa de billar, etc).
- **Choque elástico:** cuando la $\Delta E_{csist}=0$.
- **Choque inelástico:** cuando la $\Delta E_{csist}<0$.
- **Choque plástico:** cuando los cuerpos quedan pegados y $\Delta E_{csist}<0$.
- **Explosión:** cuando un cuerpo se fragmenta y $\Delta E_{csist}>0$.

- **Coeficiente de restitución e:** mide el grado de conservación de la energía cinética en un choque entre partículas clásicas. Es el cociente entre la velocidad relativa final y la velocidad relativa inicial de dos objetos sometidos a colisión, donde final significa tras la colisión, e inicial antes de la misma. $0 \leq e \leq 1$

$$e = \frac{|v_{1f}| - |v_{2f}|}{|v_{1i}| - |v_{2i}|}$$

- En la gran mayoría de los choques reales el coeficiente de restitución es inferior a la unidad, lo que supone en una mayor o menor medida una deformación inelástica de los cuerpos sometidos a colisión.