TRANSFORMACIONES Lineales

transformaciones

- Las transformaciones lineales son una clase de funciones que transforman un vector v de un espacio vectorial V en otro vector w de un espacio vectorial W.
  - Si V = W es operador es lineal.
  - $L : V \longrightarrow W$
  - $L(v) = w$, $v \quad V, w \quad W$
- Toda transformación lineal debe satisfacer que:

  $L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ o bien $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$

  $L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall\, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

- Para $\alpha = 0 \Rightarrow L : V \longrightarrow W$ satisface $L(0_V) = 0_W$ con 0_V y 0_W los vectores nulos de V y W, ya que
  $L(0_V) = L(0v) = 0L(v) = 0_W$ $\quad L(-v) = -L(v) \quad \forall\, v \in V$ propiedades

- Sea $L : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.
  Núcleo: conjunto de vectores v de V que son transformados o enviados al vector nulo 0_W de W.

  $Nu(L) = \{v \in V : L(v) = 0_W\}$

Imagen de un subespacio S de V:

- $L(S) = \{w \in W : w = L(v)$ para algún $v \in S\} = \{L(v), v \in S\}$

Imagen de L:

$L(V) \rightsquigarrow Im(L) = L(V) = \{L(v), v \in V\} \subset W$. Cada uno de estos conjuntos son subespacios.

Teorema: si $L : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, entonces:

1. Nu(L) es un subespacio de V.
2. Si S es un subespacio de V, L(S) es un subespacio de W. Esto implica en particular que la imagen Im(L) = L(V) es un subespacio de W.
3. Si V es de dimensión finita, la suma de la dimensión de la imagen Im(L) y la dimensión del núcleo Nu(L) es la dimensión del espacio V:
   - $\dim Im(L) + \dim Nu(L) = \dim V$

Una T.L es inyectiva si $L(v_1) \neq L(v_2)$ $\forall v_1 \neq v_2$

- Esto ocurre <=> $Nu(L) = \{0_V\}$
- Si la transformación lineal es inyectiva => conserva la independencia lineal.
- $\dim V \leq \dim W$

Una T.L es sobreyectiva si $L(V) = W$

- $\dim V = \dim Im(L) + \dim Nu(L) = \dim W + \dim Nu(L)$
- $\dim V \geq \dim W$

Una T.L se dice biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. En este caso L es un isomorfismo, y si $V = W$ se dice automorfismo.

Un isomorfismo transforma cualquier base de V en un base de W.

Una función L tiene inversa L^{-1} <=> L es biyectiva.

$L(V) = W$ $\quad L^{-1}(W) = V$ → también será un isomorfismo.

Representación matricial: cualquier T.L entre E.V de dimensión finita se puede representar mediante una matriz A.

- $L(x) = Ax$
- $A = [L]_{BC}^{BC}$

$\text{rango}(A) = \dim Im(L)$ $\quad$ $\text{nulidad}(A) = Nu(L)$

$$\begin{cases} \dim Im(L) + \dim Nu(L) = \dim V \\ \dim EC(A) + \dim N(A) = n \end{cases}$$

CAMBIO DE BASE:

- Si $A = [L]_B^B$ es la representación matricial de L en la base B y A' es la representación de L en la base B' → $A' = [L]_{B'}^{B'}$

=> $A' = S^{-1}AS$ $\quad$ $SA'S^{-1} = A$ → son matrices semejantes.

⇓

$S = ([v_1']_B, \ldots, [v_n']_B)$

$\det(A) = \det(A')$

$TrA = TrA'$

$\det(A - \lambda I) = \det(A' - \lambda I)$

COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES:

- $L: V \longrightarrow W \quad G: W \longrightarrow U$
- $G(L(V)) = (GL)(V) = u \in U$
- $(GL)(V) = A_G A_L V \Rightarrow A_{GL} = A_G A_L$
- $L(L(V)) = L^2(V) \quad L^2 = A_L^2$