SERIES NUMÉRICAS

Repase los conceptos teóricos que utilizará para fundamentar las respuestas de los ejercicios.

- ¿Qué es una *serie de números reales*? ¿A qué se llaman *sumas parciales* de la serie? ¿Cuándo se dice que una serie es *convergente* y en caso de serlo a qué se llama *suma* de la serie?
- ¿Cuándo se dice que una serie es *geométrica*? ¿Cómo se determina si converge o diverge? ¿Cuándo se dice que una serie es *telescópica*? ¿Cómo se determina si converge o diverge?
- ¿Qué es una p-serie? ¿Para qué valores de p converge?
- ¿Qué significa que una serie sea absolutamente convergente? ¿Y condicionalmente convergente?
- ¿Cuándo una serie es alternada?

Analice la convergencia de las series:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+25}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-2}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ h) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{\sqrt{n!}}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+1}}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+4}$

m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n+2^n}$ n) $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ o) $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{4^n+9^n}}$

<u>Rta</u>

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$

Aplicando la condición suficiente de divergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{es divergente}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ es divergente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+25}$

Por comparación directa:

$$a_n = \frac{n^3}{n^5+25} \leq \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2} = b_n \quad \text{para todo } n \geq 1 \text{ pues } n^5 + 25 \geq n^5$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser p-serie con $p = 2 > 1$.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5+25}$ es convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2e^{-(n+1)}}{n^2e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2e^{-(n+1)}}{n^2e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2e^{-(n+1)}}{n^2e^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{e}=\frac{1}{e}<1$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ n^2e^{-n}$ es convergente.

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{3(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}$

La serie es geométrica. En efecto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{3(-2)^{(n+1)-1}}{5^{(n+1)+1}}}{\frac{3(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}}=\frac{\frac{3(-2)^{n}}{5^{n+2}}}{\frac{3(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}}=\frac{3(-2)^n5^{n+1}}{3(-2)^{n-1}5^{n+2}}=-\frac{2}{5}$$

no depende de n. La razón de esta serie geométrica es $r=-\frac{2}{5}$

El valor absoluto de la razón es $|r|=\left|-\frac{2}{5}\right|=\frac{2}{5}$

Como $|r|=0{,}4<1$ la serie es convergente. Su suma es el primer término de la serie dividido por $1-r$:

$$S=\frac{\frac{3(-2)^{0-1}}{5^{0+1}}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=-\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{5}}=-\frac{3}{14}$$

Entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-2)^{n-1}}{5^{n+1}}=-\frac{3}{14}$$

e) $\sum_{n=2}^{\infty}\ \frac{\sqrt{n}}{2n-2}$

Aplicaremos comparación en el límite. Para generar un término de comparación examinamos cuidadosamente la magnitud del término general cuando $n\to\infty$:

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{2n\ -\ 2}=\frac{\sqrt{n}}{2n\left(1\ -\ \frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{n}\left(1\ -\ \frac{1}{n}\right)}\underbrace{\cong}_{n\text{ grande}}\frac{1}{2\sqrt{n}}=b_n$$

Se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}\left(1\ -\ \frac{1}{n}\right)}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\ -\ \frac{1}{n}}=1\in(0,\infty)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2n\ -\ 2}\ \text{ diverge }\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{[*]}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}\ \text{ diverge}$$

La serie de comparación $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ es divergente. En efecto, su término general se obtiene a partir del de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ multiplicándolo por el factor constante no nulo $c = 1/2$, que no altera el carácter de la serie. Es decir:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ diverge } \overbrace{\Leftrightarrow}^{[**]} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

A su vez, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge pues difiere de la p-serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ en una cantidad finita de términos (sólo el primero). Es decir:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge } \overbrace{\Leftrightarrow}^{[***]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}$$

La p-serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente porque $p = \frac{1}{2} < 1$. Luego, por [***] resulta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente. Entonces por [**] es $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ divergente. Por lo tanto, en base a [*] la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-2}$ es divergente.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

Esta serie diverge. Se justifica aplicando la condición suficiente de divergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \neq 0$$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

Se trata de una serie telescópica. En efecto:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = b_n - b_{n+1} \text{ donde } b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

El término general de la sucesión de sumas parciales es la suma parcial n-ésima:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

El segundo término de cada paréntesis se cancela con el primer término del paréntesis siguiente. Resulta:

$$S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

La serie es pues convergente y su suma es $S = 1$. Es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$$

h) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n}\right)$

Analicemos el término general:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n}=\frac{n^{\frac{2}{3}}-1}{n}=\frac{n^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)}{n}=\frac{1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{n}}\underbrace{\cong}_{n\text{ grande}}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=b_n$$

Aplicamos el criterio de comparación en el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)=1\in(0,\infty)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n}\right)\ \text{diverge}\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{[*]}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ \text{diverge}$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ difiere de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ en un solo término. Por lo tanto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ \text{diverge}\ \overbrace{\Leftrightarrow}^{[**]}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ \text{diverge}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ es divergente por ser una p-serie con $p=\frac{1}{3}<1$. Luego, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverge. Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{(-5)^n}{\sqrt{n!}}$

Analizamos la serie de los valores absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n!}}$$

Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}}}{\frac{5^n}{\sqrt{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\sqrt{n!}}{5^n\sqrt{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}5\sqrt{\frac{n!}{(n+1)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\sqrt{\frac{n!}{(n+1)\,n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n+1}}=0<1$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ |a_n|$ es convergente. Entonces por el criterio de la convergencia absoluta, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{(-5)^n}{\sqrt{n!}}$ converge (absolutamente).

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + ln(n)}$

El término general tiende a cero cuando $n \to \infty$ pues:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1 + \underbrace{\frac{ln(n)}{n}}_{\substack{\to 0 \text{ pues} \\ \ln n \ll n \text{ para} \\ n\to\infty}}\right)} = 0$$

Analicemos la serie de los módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + ln(n)}$$

Por comparación en el límite:

$$|a_n| = b_n = \frac{1}{n + ln(n)} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{ln(n)}{n}\right)} \underbrace{\cong}_{n \text{ grande}} \frac{1}{n} = c_n$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ diverge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge porque es la serie armónica (p-serie con $p = 1$). Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente. Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente. Resta por determinar si es divergente o si converge de manera condicional.

Se trata de una serie alternada:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n + ln(n)} = (-1)^n b_n \text{ donde } b_n = |a_n| = \frac{1}{n + ln(n)}$$

Veamos que el criterio de Leibniz es aplicable:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \text{ (ya se probó)}$$

La sucesión de valores absolutos $\{|a_n|\}_{n\geq 1}$ es decreciente:

$$|a_n| = b_n = \frac{1}{n + ln(n)}$$

Si bien esto es evidente en este caso (dado que el denominador en este cociente claramente aumenta con n mientras que el numerador permanece fijo), podemos justificarlo introduciendo la función auxiliar:

$$f(x) = \frac{1}{x + ln(x)} \text{ para } x \geq 1$$

Bastará probar que esta función decrece para $x \geq 1$. Como es derivable, examinamos el signo de su derivada:

$$f'(x) = -\frac{1+\frac{1}{x}}{[x\ +\ln(x)]^2} < 0 \ \text{ si } x > 1$$

Luego f decrece para $x \geq 1$. Por lo tanto $\{b_n\}_{n\geq 1}$ decrece. Entonces en virtud del criterio de Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)}$ es convergente.

Luego, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)}$ converge pero la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+ln(n)}$ diverge, podemos afirmar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+ln(n)}$ es condicionalmente convergente.

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+1}}$

Analicemos la serie de valores absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{\sqrt{n^3+1}}$$

Aplicando comparación directa:

$$|a_n| = \frac{|\operatorname{sen} n|}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = b_n$$

La primera desigualdad se debe a que $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ para todo $n \geq 1$. La segunda desigualdad se debe a que

$$n^3 + 1 \geq n^3 \ \text{ (evidente)}$$

$$\sqrt{n^3+1} \geq \sqrt{n^3} \ \text{ porque la raíz cuadrada es creciente}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \ \text{ porque la función } f(x) = \frac{1}{x} \text{ es decreciente si } x \geq 1$$

La serie de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ es una p-serie con $p = \frac{3}{2} > 1$ por lo que resulta convergente. Luego, por el criterio de comparación directa la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Entonces por el criterio de la convergencia absoluta la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n^3+1}}$ es absolutamente convergente.

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+4}$

Analicemos la serie de los módulos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n^2+4}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

Aplicamos comparación en el límite:

$$|a_n| = \frac{n}{n^2+4} = \frac{n}{n^2\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} \underbrace{\cong}_{n \text{ grande}} \frac{1}{n} = c_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n^2}} = 1 \in (0,\infty)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ diverge } \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ diverge}$$

La serie de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (serie armónica). Luego, la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es absolutamente convergente. Vamos si diverge o si converge de manera condicional.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4} \text{ es serie alternada}$$

En efecto:

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4} = (-1)^n \frac{n}{n^2 + 4} = (-1)^n b_n \text{ donde } b_n = \frac{n}{n^2 + 4}$$

Se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2 + 4} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)} = 0$$

La sucesión de valores absolutos $\{|a_n|\}_{n \geq 1}$ es decreciente:

$$|a_n| = b_n = \frac{n}{n^2 + 4}$$

Podemos justificarlo introduciendo la función auxiliar:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \text{ para } x \geq 1$$

Bastará probar que esta función decrece para $x \geq 1$. Como es derivable, examinamos el signo de su derivada:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) - x.2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} < 0 \text{ si } x > 2$$

Luego $f(x)$ decrece para $x \geq 2$. Por lo tanto $\{b_n\}_{n \geq 2}$ decrece. Entonces en virtud del criterio de Leibniz la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ es convergente.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ difiere de la anterior en un solo término, entonces resulta también convergente.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}\right|$ diverge. Esto prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}$ es condicionalmente convergente.

m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n + 2^n}$

Estudiemos la serie de los valores absolutos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n + 2^n}$$

Por comparación directa:

$$|a_n| = \frac{|\cos n|}{n + 2^n} \leq \frac{1}{n + 2^n} \leq \frac{1}{2^n} = b_n$$

La primera desigualdad se debe a que $|\cos n| \leq 1$ para todo $n \geq 1$. La segunda desigualdad se debe a que:

$$n + 2^n \geq 2^n \text{ (evidente)}$$

La serie de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge puesto que es geométrica de razón $r = 1/2$ de modo que $|r| = \frac{1}{2} < 1$.

Luego, por comparación directa la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Entonces por el criterio de la convergencia absoluta la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n + 2^n}$ es absolutamente convergente.

n) $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$

Podemos analizarla por comparación directa:

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = b_n$$

En efecto:

$$n - \sqrt{n} \leq n \quad \text{(evidente)}$$

La serie de comparación es $\sum_{n=20}^{\infty} b_n = \sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n}$ la que difiere de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ en un número finito de términos (los primeros 19). Como la armónica diverge, entonces $\sum_{n=20}^{\infty} b_n$ también diverge. Por lo tanto la serie $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$ es divergente. Dejamos como ejercicio mostrar que se llega a la misma conclusión aplicando comparación en el límite.

o) $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

Podemos aplicar comparación en el límite:

$$a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \underbrace{\cong}_{n \text{ grande}} \frac{1}{n} = b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0, \infty)$$

Luego:

$$\sum_{n=20}^{\infty} a_n \text{ diverge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=20}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

La serie de comparación $\sum_{n=20}^{\infty} b_n$ diverge porque difiere de la armónica en un número finito de términos (los primeros 19). Como la armónica diverge, entonces $\sum_{n=20}^{\infty} b_n$ también diverge. Por ende la serie $\sum_{n=20}^{\infty} a_n = \sum_{n=20}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ diverge.

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{4^n+9^n}}$

Aplicamos comparación directa:

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{4^n + 9^n}} \leq \frac{2^n}{\sqrt{9^n}} = \frac{2^n}{\left(\sqrt{9}\right)^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n$$

La desigualdad se justifica mediante:

$$4^n + 9^n \geq 9^n$$

$$\sqrt{4^n + 9^n} \geq \sqrt{9^n} = 3^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{4^n + 9^n}} \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{2^n}{\sqrt{4^n + 9^n}} \leq \frac{2^n}{3^n}$$

La serie de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ es geométrica de razón $r = \frac{2}{3}$. Como el valor absoluto de la razón es menor que 1 dicha serie es convergente. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{4^n+9^n}}$ es convergente.