

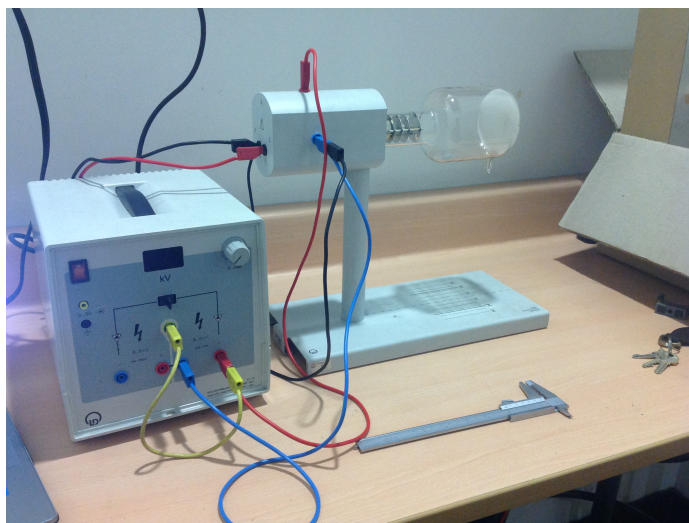
Dualidad onda-partícula: Difracción de electrones

El premio Nobel en física en el año 1929 se otorgó a Prince Louis-Victor Pierre Raymond de Broglie “*por el descubrimiento de la naturaleza ondulatoria de los electrones*”.

El premio Nobel en física en el año 1937 se otorgó a Clinton Joseph Davidson y George Paget Thomson “*por sus descubrimientos experimentales de la difracción de los electrones causada por cristales*”

Equipo

- Tubo de difracción de electrones.
- Fuente de alto voltaje 10kV.
- Cables x6.
- Soporte para tubo.
- Calibrador.



Objetivos

- Evidenciar la dualidad onda-partícula en electrones por medio de difracción de Debye-Scherrer.
- Verificar la ecuación de *de Broglie* concerniente a la longitud de onda de los electrones.
- Hallar experimentalmente las distancias reticulares interplanares para el grafito.

Conceptos Clave

Dualidad Onda-Partícula, Difracción de Electrones, Método de Debye-Scherrer, Ley de Bragg, Ecuación de *de Broglie*, Cristalografía, Material policristalino,

Bibliografía

- [1] Diffraction of electrons in a polycrystalline lattice (debye-scherrer diffraction). http://www.ld-didactic.de/literatur/hb/e/p6/p6151_e.pdf.
- [2] Instruction sheet 555 626, electron diffraction tube (555 626). http://www.ld-didactic.de/documents/en-US/GA/GA/5/555/555626e.pdf?_ga=1.67016110.1036857960.1467059536.
- [3] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 6th edition, 1986.
- [4] Florian Scheck. *Quantum physics*. Springer, 2007.

Marco teórico

De la interpretación del efecto fotoeléctrico y la ley de Planck para la radiación de cuerpo negro se argumenta que la luz viene en cuantos llamamos fotones, cuya energía viene dada por la relación $E = h\nu$. En esta ecuación relacionamos una propiedad que en mecánica clásica asignábamos a una partícula, la energía E , con una propiedad de una onda, su frecuencia ν , donde la constante de proporcionalidad es la famosa constante de Planck $h = 6,62607004 \times 10^{-34}$ J/s. Esta dualidad en la radiación electromagnética y la teoría atómica de Bohr llevaron a Louis de Broglie a postular su hipótesis fundamental [4]: *Todos los objetos masivos y en particular las partículas elementales exhiben un comportamiento ondulatorio. Para una partícula con momento \vec{p} se asigna una onda monocromática que se propaga en la dirección de \vec{p} y cuya longitud de onda viene dada por* [3]

$$\lambda_{deBroglie} = \frac{h}{|\vec{p}|}. \quad (1)$$

Para la naturaleza ondulatoria de las partículas con las que trabajemos, la longitud de onda debe ser del mismo orden de magnitud que las dimensiones lineales del sistema con el que se esté trabajando (e.g., el ancho de la rendija en un experimento de doble rendija). Ya que en este caso estaremos trabajando con electrones (de masa m_e y carga e) y usaremos voltajes (V) del orden de kV para acelerarlos, la longitud de onda la podremos calcular de acuerdo a la conservación de energía

$$eV = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2}. \quad (2)$$

Despejando para λ se obtiene

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eVm_e}}, \quad (3)$$

por lo que un valor típico para unos cuantos kV es de 40pm. Por fortuna, las distancias interatómicas en un cristal (o en su defecto las distancias reticulares interplanares) se encuentran cercanas a este orden de magnitud, permitiendo estudiar la naturaleza ondulatoria de los electrones que incidan sobre tales cristales.

Al incidir sobre los cristales, los electrones sufren una difracción la cual puede ser explicada por la ley de Bragg. Suponga que los electrones inciden sobre planos paralelos en el cristal como se muestra en la Fig.1. Las ondas incidentes se reflejan de forma especular, es decir que se reflejan con el mismo ángulo con el que inciden. Además se considera que el choque es elástico, por lo que la energía de los electrones no cambia. Los rayos difractados se podrán encontrar cuando las reflexiones de diferentes planos interfieran de forma constructiva [3].

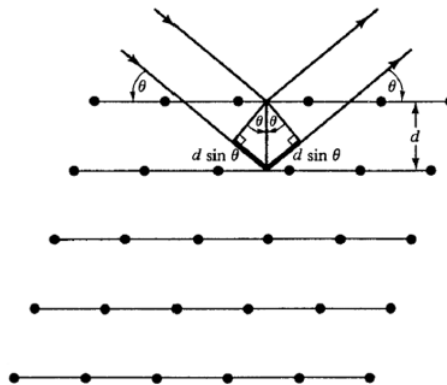


Figura 1: Ondas incidiendo en arreglo cristalino.

Al analizar la diferencia de caminos entre las ondas reflejadas por diferentes planos, es claro de la Fig.1 que la onda reflejada en el plano inferior recorre una distancia adicional de $2d \sin \theta$. Para que la interferencia sea constructiva, esta distancia adicional debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda de los electrones incidentes [3]. Explícitamente

$$2d_i \sin \theta = n\lambda, \quad (4)$$

cumpléndose para longitudes de onda $\lambda \leq 2d_i$. Este resultado se conoce como la condición o ley de Bragg en honor a William Lawrence Bragg y su padre William Henry Bragg, ambos merecedores del premio Nobel en física en el año en 1915 “*por sus contribuciones a la cristalografía de rayos X*”. Tiempo después, en 1927, Davison y Germer, y de forma paralela Thomson¹ verificaron la naturaleza ondulatoria de los electrones al hacerlos incidir sobre un arreglo de Niquel con constante interplanar d conocida, calculando así la longitud de onda de los electrones λ con la ley de Bragg. El resultado que encontraron concordaba con lo que se obtiene usando la ecuación de *de Broglie*. Esta verificación es uno de los objetivos de esta práctica.

En esta práctica se harán incidir electrones sobre grafito, el cual tiene una estructura hexagonal y variadas distancias interplanares d_i como se puede ver en la Fig. 2.

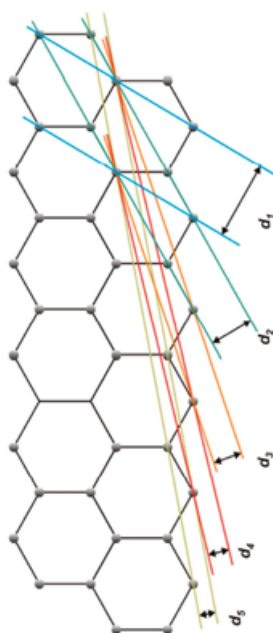


Figura 2: Estructura de un plano de grafito con sus distancias interplanares: $d_1 = 213pm$ y $d_2 = 123pm$.

En nuestro caso, trabajaremos con una muestra policristalina de grafito. Por lo tanto tendremos la estructura hexagonal en pequeños cristales orientados de forma aleatoria en nuestra muestra. Esto nos asegura que encontraremos un plano con una inclinación tal que se tenga interferencia constructiva y podamos registrar el patrón de esta interferencia en una pantalla fluorescente.

Ejercicio 1

1. En la Fig.3. se muestra en rojo un cristal de grafito (dentro de la muestra policristalina) con inclinación θ con respecto al haz de electrones incidente. Usando la ley

¹Hijo de J.J. Thomson, quien recibió el premio Nobel en 1906 por “*en reconocimiento de los grandes méritos de sus investigaciones teóricas y experimentales en la conducción de la electricidad generada por los gases*” y el cual, con su trabajo demostró la naturaleza corpuscular del electrón.

de Bragg demuestre que la longitud de onda de los electrones incidentes se puede expresar como

$$\lambda_{Bragg} = \frac{2d}{n} \sin \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{D}{2L} \right) \right) \quad (5)$$

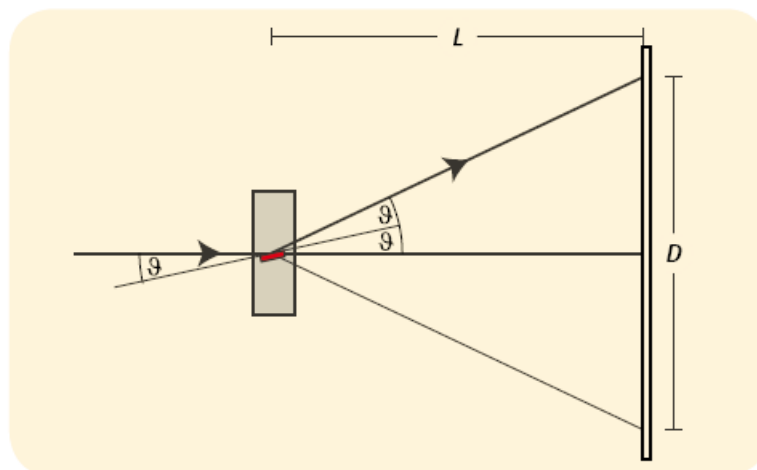


Figura 3: Electrón incidiendo en cristal y registrado en una pantalla. Tomada de [1]

2. Teniendo en cuenta que los cristales que componen el policristal se encuentran orientados de forma aleatoria (en las tres dimensiones), ¿qué geometría en el patrón de difracción espera obtener?
3. Investigue sobre el método de Debye-Scherrer y explique sus ventajas frente a otros métodos para medir la difracción sobre estructuras cristalinas.
4. El grafito tiene estructura hexagonal con parámetros $a = 0,2461nm$ y $c = 0,6708nm$. Utilizando la fórmula

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4}{3} \frac{h^2 + hk + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}, \quad (6)$$

con h, k son números enteros (incluyendo al cero) y $l = 0$ para trabajar en un plano, encuentre las diferentes distancias interplanares d_{hkl} para el grafito y ordénelas de mayor a menor. Debe obtener al menos las 5 primeras distancias en este orden, incluyendo d_1 y d_2 reportadas previamente.

5. El grafito está compuesto por capas de átomos en el arreglo hexagonal que se mostró en la Fig.2 donde la distancia entre cada capa es de 335pm. Usando la densidad del grafito y el peso atómico del carbón estime cuánto es la distancia promedio entre los átomos de carbón en el grafito. ¿Cómo se compara su respuesta con las distancias reticulares interplanares?

Ayuda: Estime el área de la celda unitaria que corresponde a un átomo de carbón y teniendo en cuenta que para el grafito esta celda es un triángulo equilátero, calcule la longitud de uno de los lados.

Montaje y Experimento

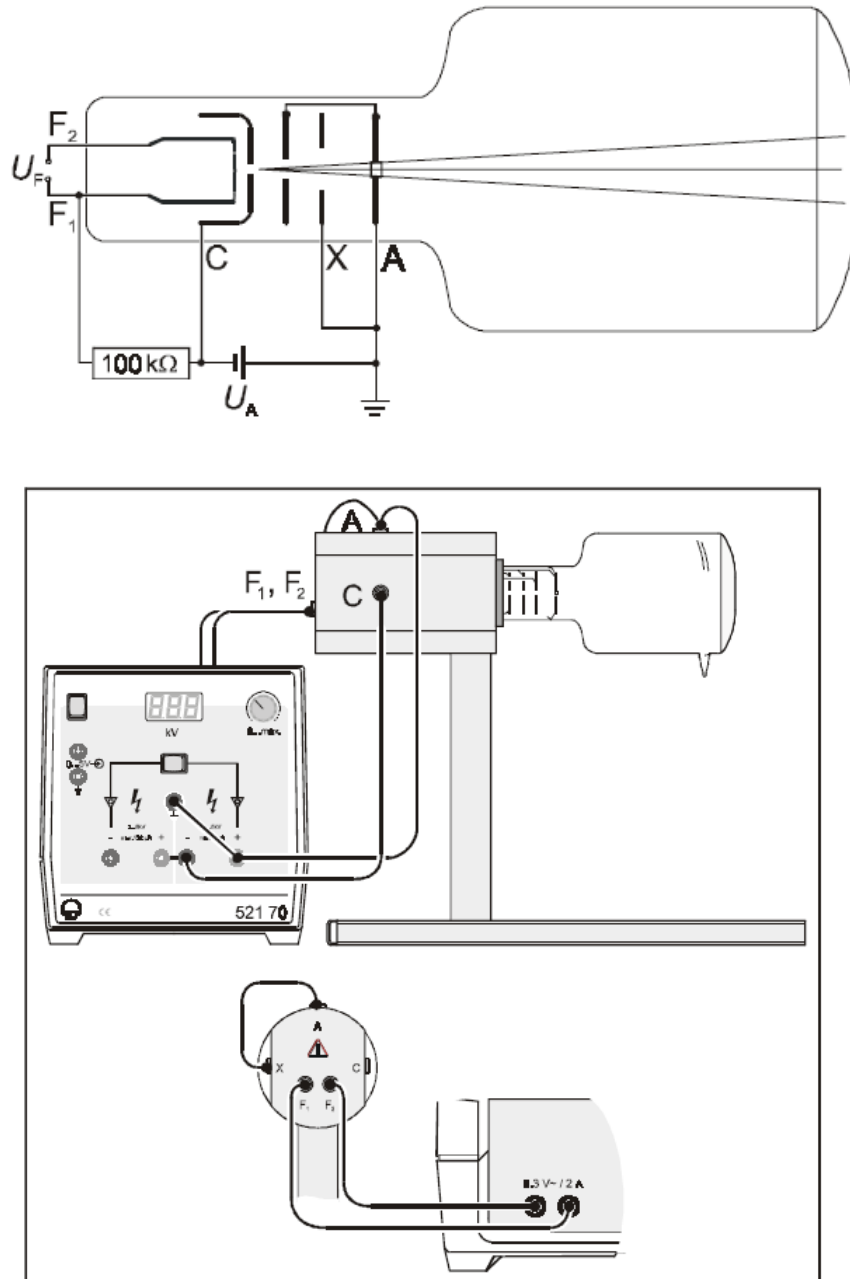


Figura 4: Esquema de conexión para la configuración 1: amplificación de la muestra de grafito. Tomada de [2]

El montaje con el que trabajará cuenta con dos configuraciones posibles. Una muestra en la pantalla fluorescente una imagen ampliada de la muestra de grafito y otra es usada para evidenciar el patrón de difracción de los electrones.

Configuración 1: Muestra de grafito amplificada

Antes de conectar cualquier cable a la fuente o soporte, inserte el tubo de difracción de electrones en el soporte. Tenga mucho cuidado al manipular el tubo ya que este se encuentra a una presión menor a 10^{-6} hPa y las paredes del vidrio son delgadas. Una vez insertado el tubo identifique las 6 ranuras denotadas por C , X , A que corresponden a cátodo, electrodo de enfoque y ánodo respectivamente. Adicionalmente identifique las ranuras F_1 y F_2 sobre las cuales se colocará un voltaje de 6.3V AC con tal de desprender los electrones de forma termoiónica. Un esquema de las conexiones se muestra en la Fig.4 en donde U_A es el voltaje proporcionado por la fuente de alto voltaje.

Recomendación: Al trabajar con una fuente de alto voltaje, revise que las conexiones que usted realizó estén correctas de acuerdo a los diagramas y que los cables queden bien conectados (que no quede ninguna parte metálica expuesta). No supere voltajes de 3kV con la configuración 1. También para preservar el material fluorescente de la pantalla, trabaje por periodos cortos de tiempo en esta configuración, lo suficiente para observar la muestra y registrar con una fotografía su geometría.

Actividad 1

1. Describa brevemente cómo funciona el sistema para emitir, acelerar y enfocar los electrones.
2. Describa lo que ve en la pantalla y con ayuda de un imán (incluido con el montaje), desvíe la trayectoria de los electrones para ver diferentes partes de la muestra de grafito.
3. Investigue sobre los microscopios electrónicos de transmisión y describa brevemente su funcionamiento. Compare el funcionamiento con el montaje experimental en la configuración 1.
4. ¿Por qué no se observan patrones de difracción en esta configuración?

Configuración 2: Difracción de Electrones

Con el tubo de difracción de electrones conectado a la base, realice las conexiones que se muestran en la Fig.5. Cuando se asegure que las conexiones estén de forma correcta, encienda la fuente de alto voltaje y comience a aumentar el voltaje lentamente hasta que llegue a 3kV.

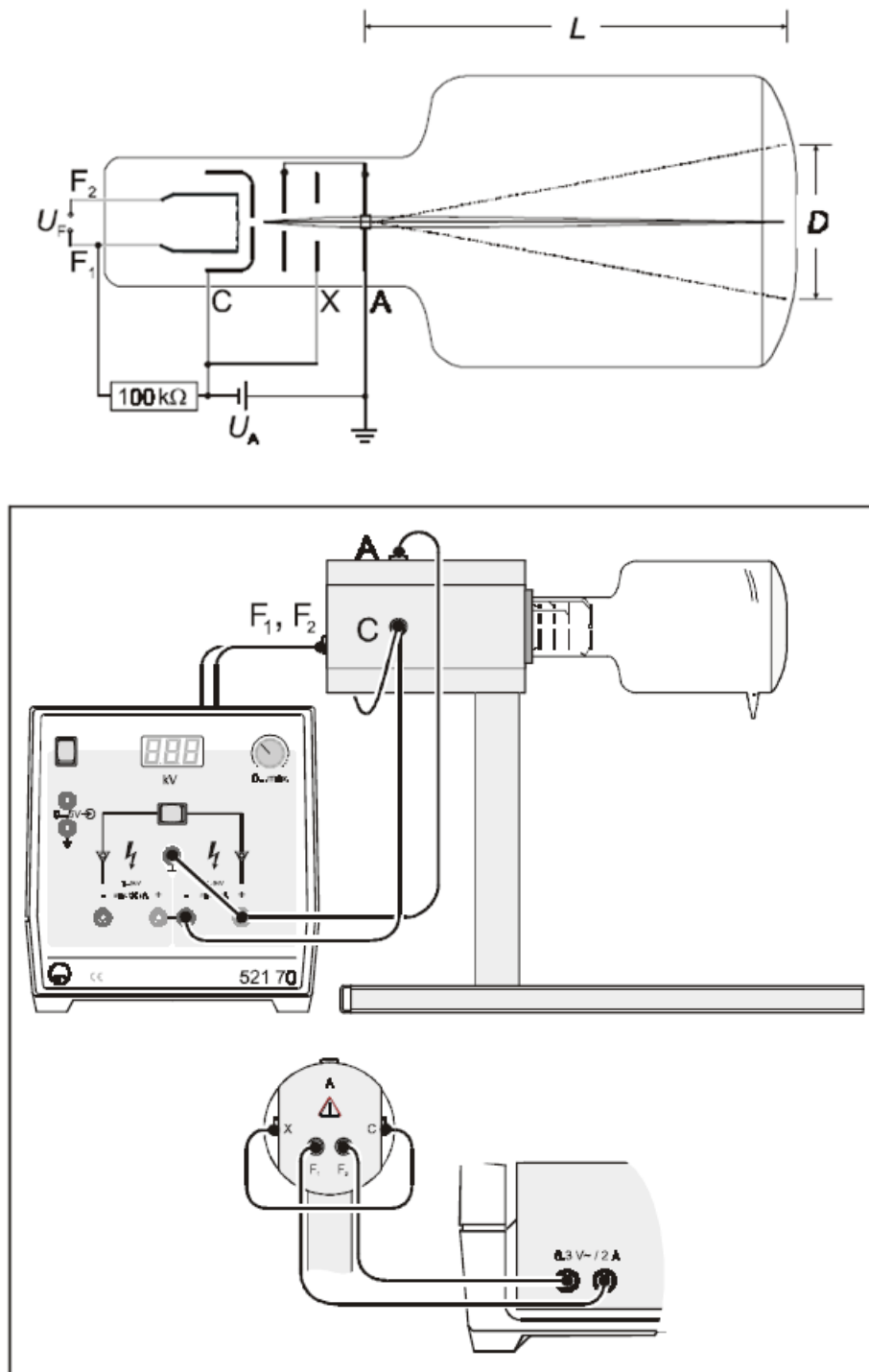


Figura 5: Diagrama de conexión de la configuración 2: difracción de electrones. Tomada de [2]

Lo que debe observar en la pantalla son dos círculos concéntricos cuyo diámetro cambia con cambios en el voltaje de aceleración de los electrones. Según el manual del instrumento la longitud $L = 13,5\text{cm}$. Las variables a medir en esta configuración son los diámetros de

los círculos visibles y el voltaje de aceleración correspondiente.

Recomendación: Tome más de una medida para los diámetros de los círculos; puede tomarlas de forma perpendicular. Si le es posible medir el voltaje de la fuente con otro instrumento (un divisor de voltaje), verifique que lo que indica la fuente es lo que realmente está aplicando al tubo de difracción. No aumente el voltaje de la fuente a más de 5kV, pues se podrían producir rayos X.

Actividad 2

1. Organice sus datos en una tabla. No olvide incluir las incertidumbres asociadas a cada medición.

$U(\text{kV})$	$D_1\text{cm}$	$D_2\text{cm}$

2. Notará que el patrón de difracción circular para un diámetro $D_{1,2}$ presenta un ancho. Mida este ancho y describa cómo cambia ante cambios de voltaje (incluyendo la intensidad del patrón también). ¿Cómo afecta esto a la incertidumbre en la medición de $D_{1,2}$?
3. Determine la longitud de onda según la ecuación de de Broglie y la conservación de la energía $\lambda_{deBroglie}$ y compárela con la calculada de acuerdo a la ley de Bragg λ_{Bragg} . ¿A qué se pueden deber las discrepancias, si las hay? Calcule la incertidumbre y determine si el experimento fue exitoso.
4. Mientras realiza las mediciones de D_1 y D_2 , coloque el imán que viene incluido con el montaje y describa cómo cambia el patrón de difracción en la pantalla. Sustente su respuesta en términos de la dualidad onda-partícula del electrón.
5. De acuerdo a lo que se mostró en la Fig.2 se deberían esperar más círculos en el patrón de difracción. Usando la geometría de la red hexagonal d_j para $j \geq 2$ y conociendo la longitud de onda de los electrones calculada con $\lambda_{deBroglie}$ estime el diámetro de los círculos que deberían verse en la pantalla. Compare este valor con el diámetro del patrón de los electrones que no sufren difracción. ¿Por qué no se observan estos círculos?. Tenga en cuenta el rango de validez de la condición de Bragg.
6. ¿Qué diferencia las dos configuraciones? ¿Qué condiciones debe tener el haz de electrones para que ocurra difracción con el grafito?

Actividad 3

1. En la Actividad 2 se supuso que las distancias reticulares interplanares del grafito eran conocidas. En este ejercicio supondremos que es un valor desconocido y que a partir del experimento las podremos determinar. Realice una gráfica de $D_{1,2}$ contra $V^{-1/2}$.
2. Realice una regresión lineal, teniendo en cuenta que la recta debe pasar por el punto (0,0). Según la ley de Bragg, ¿qué valor debería tomar la pendiente de esta gráfica? ¿cuál es la incertidumbre en esta pendiente? Grafique los residuales y comente sus resultados.
3. Con la pendiente de la regresión lineal y suponiendo $\lambda_{Bragg} = \lambda_{deBroglie}$ calcule las distancias d_1, d_2 . Compare su resultado con los valores reportados en la literatura para el grafito.
4. Por último suponga que las distancias d_1 y d_2 son conocidas y $\lambda_{Bragg} = \lambda_{deBroglie}$. Demuestre que la constante de Planck se puede escribir como

$$h = \sqrt{2m_e e V} \frac{2d}{n} \sin \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{D}{2L} \right) \right). \quad (7)$$

Determine la constante de Planck con su respectiva incertidumbre. Puede usar la aproximación de ángulo pequeño donde lo considere necesario.

Para considerar

1. ¿En qué magnitud cree que afectan las siguientes variables en el experimento? -
 - Campo magnético terrestre o campos electromagnéticos externos.
 - La condición de vacío en el tubo de difracción de electrones.
 - No uniformidad del campo eléctrico que acelera los electrones (causada por el orificio en el ánodo por donde salen los electrones), causando una velocidad un poco menor a la calculada teóricamente.
 - La curvatura de la pantalla
2. ¿Cómo podría (si es posible) minimizar los efectos de las variables mencionadas en el punto 2?