

Experimento de Franck-Hertz

Juan C. Rojas V.* and Katherin A. Murcia S.**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 15 de agosto de 2024)

I. INTRODUCCIÓN

El experimento de James Franck y Gustav Hertz, realizado por primera vez en el año 1914 y por el cual fueron premiados en 1929 con el premio Nobel, es uno de los primeros experimentos de la época que demostraba la naturaleza cuántica de los átomos, intrincada en sus niveles de energía y los estados de sus electrones. Esto por medio del análisis de los máximos y mínimos en la transmisión de electrones acelerados al pasar por un gas de mercurio [1]. Este experimento, entonces, ayudó a que se estableciera y comprobara la teoría de Bohr sobre los átomos y las transiciones electrónicas en los mismos [2].

II. OBJETIVOS

1. Medir la cuantización de la energía de estados electrónicos en átomos de mercurio (Hg).
2. Entender cómo afecta la temperatura a la densidad del gas de mercurio y el camino libre medio de los electrones $\bar{\ell}$.
3. Calcular, a partir de los datos experimentales, la energía entre el estado base y un estado excitado del átomo de mercurio.

III. MARCO TEÓRICO

Como se mencionó en la introducción, el experimento de Franck-Hertz jugó un papel importante en la consolidación de la naturaleza cuántica del átomo y la teoría de los niveles energía de Bohr. Pues al ajustar este modelo atómico, se permitió llegar a una descripción de un fenómeno cuántico que en principio se pensó era resultado de un proceso de ionización [2]. La idea del experimento era hacer colisionar electrones contra átomos de mercurio y ver cómo los átomos podían tanto aceptar como rechazar electrones con ciertos valores específicos de energía, lo cual se podía medir por medio de las variaciones en la corriente luego de que los electrones

pasaran por un gas de mercurio. Estos cambios drásticos en la corriente medida coincidían con la energía de las transiciones permitidas por el modelo de Bohr para los electrones del átomo de mercurio [3]. Estos cambios serían causados por los choques inelásticos de los electrones suficientemente energéticos como para excitar el átomo y perder casi en su totalidad su energía cinética; a diferencia de aquellos electrones que no tienen la energía suficiente y colisionan elásticamente, perdiendo cantidades despreciables de energía cinética permitiéndoles ser detectados como corriente [1].

El átomo de mercurio cuenta con 80 electrones por defecto, de los cuales 2 están en su último nivel de energía; ahora, debido a su baja interacción con el núcleo del átomo, a comparación de aquellos que se encuentran en los niveles más interiores, estos pueden ser excitados a niveles de energía más altos al entregarles energía, en este caso por medio de la colisión con electrones con el átomo [1]. Serán estas transiciones, entonces, las que buscan medir.

A. Ejercicios Teóricos

1. Ejercicios 1

1. Escriba un resumen de la teoría atómica de Bohr, las motivaciones para su desarrollo, los postulados y suposiciones que realizó.

Niels Bohr, motivado por sus recientes estudios en el átomo de hidrógeno, propone en 1913 su teoría atómica. Bohr, en su modelo, toma como base la estructura de Rutherford: un núcleo, formado por protones, y electrones que orbitan alrededor del núcleo. Sin embargo, Bohr propuso que los electrones seguían órbitas circulares, llamados niveles de energía [4]. Para que su teoría tuviese sentido, tuvo que establecer que:

1. Los electrones al hacer sus órbitas alrededor del átomo no disipaban energía.
2. Los electrones únicamente podían transicionar de un nivel de energía a otro si y solo si eran excitados con exactamente la diferencia de energía entre ellos.
3. Las únicas órbitas permitidas en las que los electrones podía rotar son aquellas en las que la mag-

* Correo institucional: jc.rojasv1@uniandes.edu.co

** Correo institucional: k.murcia@uniandes.edu.co

nidad del momento angular del electrón fuera múltiplo de \hbar . Esto es $||\mathbf{L}|| = n\hbar$ con $n \in \mathbb{N}$ [5].

2. Para excitar un electrón en un átomo de hidrógeno desde el estado base hasta el primer estado excitado se requiere una energía de 10.2 eV aproximadamente. Esta energía puede provenir de un fotón incidente como en el efecto fotoeléctrico o de forma alternativa se puede aumentar la temperatura a la que se encuentra el hidrógeno y así convertir energía térmica (debido a las colisiones) en energía de excitación. Suponiendo que la energía térmica promedio del átomo es $\frac{3}{2}k_B T$, calcule la temperatura a la cual se debería calentar el gas de Hidrógeno para provocar la excitación de 10.2 eV . Realice el mismo cálculo con el Mercurio (energía del primer estado excitado 4.67 eV). ¿Es práctico llegar a estas temperaturas en el laboratorio?

Teniendo en cuenta la expresión $\langle E \rangle = \frac{3}{2}k_B T$, se reemplaza $\langle E \rangle$ y se resuelve para T . Así:

1. Para el caso del hidrógeno:

$$\frac{3}{2}k_B T = 10.2 \text{ eV}$$

$$T = \frac{2}{3k_B} 10.2 \text{ eV}$$

$$T = \frac{2}{3(8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} 10.2 \text{ eV}$$

$$T = 78\,913 \text{ K.}$$

2. Para el caso del mercurio:

$$\frac{3}{2}k_B T = 4.67 \text{ eV}$$

$$T = \frac{2}{3k_B} 4.67 \text{ eV}$$

$$T = \frac{2}{3(8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} 4.67 \text{ eV}$$

$$T = 36\,130 \text{ K.}$$

Estas temperaturas son extremadamente altas y no sería práctico llegar a estas en el laboratorio.

2. Ejercicios 2

1. Investigue sobre el acople $\vec{L} - \vec{S}$ e indique cómo afecta en los niveles de energía atómicos.

El acople $\vec{L} - \vec{S}$, también conocido como el acople de Russell-Saunders, resulta de la interacción entre el momento angular de spin total de un átomo, \vec{S} , definido como

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$$

y su momento angular orbital total, \vec{L} , definido como

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

sobre los electrones de valencia del átomo. Siguiéndose así la definición del momento angular total, \vec{J} , que se calcula

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

y que determina los niveles de energía atómicos.

En virtud de lo anterior, y teniendo en cuenta que J puede tomar cualquier valor (entero para un número par de electrones y semi-entero para una cantidad impar) entre $|L - S|$ y $L + S$, se dará lugar a la separación de los niveles de energía atómicos, dando lugar al fenómeno de estructura fina [6] [7].

2. Investigue el tiempo de vida medio de átomo en los estados excitados 1P_1 , 3P_1 , 3P_2 y 3P_0 . A partir de estos valores, ¿qué puede deducir acerca del proceso de excitación de los átomos de mercurio? ¿cuál transición será la más relevante (que se pueda medir) en este experimento?

Los estados 1P_1 y 3P_1 son estados ordinarios, con un tiempo de vida medio del orden de 10^{-8} s . En contraste, los estados 3P_2 y 3P_0 son estados metaestables, cuyo tiempo de vida medio es del orden de 10^{-3} s , cinco órdenes de magnitud mayor que el de los estados ordinarios. Con esto, la probabilidad por segundo de que un electrón realice una transición desde un estado metaestable hasta el estado base es cinco ordenes de magnitud menor que la correspondiente a una transición desde un estado ordinario [1].

Así pues, es posible concluir que el proceso de excitación de átomos de mercurio está dominado por transiciones hasta los estados ordinarios, pues ellos estarán disponibles en mayor medida.

Adicionalmente, teniendo en cuenta que la separación entre los niveles de energía del estado 3P_1 y el estado base es menor que la separación para el estado 3P_1 [1], se tiene que la transición $^3P_1 \rightarrow ^1S_0$ será la más relevante en el experimento.

3. Investigue sobre las reglas de selección para momento angular. ¿Cuáles de estas transiciones podrán emitir fotones?

Para sistemas que siguiendo el acople $\vec{L} - \vec{S}$, las reglas de selección para el momento angular son [6]:

$$\Delta L = \pm 1,$$

$$\Delta J = 0, \pm 1, \text{ pero no } J = 0 \rightarrow J = 0.$$

Siguiendo estas reglas, las transiciones que pueden emitir fotones son $^1P_1 \rightarrow ^1S_0$ y $^3P_1 \rightarrow ^1S_0$ [1].

4. ¿Cómo espera que sea una gráfica de energía de los electrones medida después de atravesar el gas de mercurio en función del voltaje que los acelera?

En la Figura 1 se ve como se esperaría que fuera la gráfica de la energía de los electrones una vez atraviesan el gas de mercurio en función de la diferencia de potencial que los acelera. Esta forma se justifica dado que cuando los electrones chocan con los átomos de mercurio se les entrega energía si y solo si tienen unos valores concretos de energía, los cuales se encontrarían en los valles de la curva.

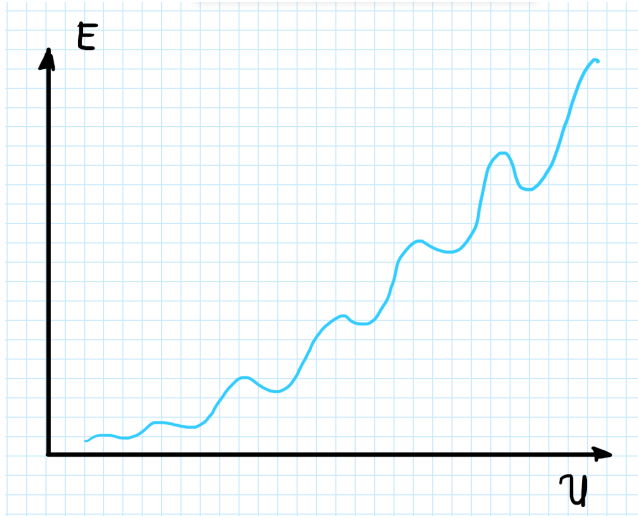


Figura 1. Gráfica cualitativa de la energía de los electrones una vez atravesado del gas de mercurio.

5. El gas de Hg es monoatómico. ¿Qué ventaja se tiene al trabajar con este tipo de gas? ¿Qué cambiará si se trabaja con un gas diatómico?

Los gases monoatómicos cuentan con un grado de libertad menos que los diatómicos, por lo que existe una manera menos de dispersar energía en estos gases. Si se trabajase con un gas diatómico sería posible que los electrones transfiriesen energía a los niveles de energía moleculares, que casi conforman un continuo

[6], dificultando la observación de la cuantización de la energía de estados electrónicos.

6. Si se supone que el electrón choca de forma elástica con el átomo de mercurio (inicialmente en reposo) en una colisión frontal. Muestre que la pérdida de energía cinética del electrón es

$$\Delta K_e = \frac{4m_e M}{(m_e + M)^2} K_0$$

donde m_e es la masa del electrón, M es la masa del átomo de mercurio y K_0 es la energía cinética inicial del electrón. Con los valores de m_e y M calcule cuánto es la pérdida de energía. ¿Cómo se compara con respecto el valor de 4.67 eV?

Dado que el choque es elástico tanto el momento lineal como la energía cinética se conservan en la colisión, por lo que se tiene que:

$$m_e v_{ei} = -m_e v_{ef} + M v_f \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_e v_{ei}^2 = \frac{1}{2} m_e v_{ef}^2 + \frac{1}{2} M v_f^2 \quad (2)$$

donde v_{ei}, v_{ef} son la rapidez inicial y final del electrón y v_f la rapidez del átomo de mercurio luego de la colisión. Usando (2) se puede encontrar una expresión para ΔK_e al restar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{2} m_e v_{ef}^2$ por lo que se obtiene

$$\Delta K_e = -\frac{1}{2} M v_f^2. \quad (3)$$

Adicionalmente, con (1) se puede encontrar la energía cinética final del electrón

$$m_e v_{ei} = -m_e v_{ef} + M v_f$$

$$m_e v_{ei} - M v_f = -m_e v_{ef}$$

$$(m_e v_{ei} - M v_f)^2 = m_e^2 v_{ef}^2$$

$$\frac{1}{2m_e} (m_e v_{ei} - M v_f)^2 = \frac{1}{2} m_e v_{ef}^2. \quad (4)$$

Una vez se tienen estas expresiones, se procede a restarle (4) a (2) para conseguir:

$$\frac{1}{2} m_e v_{ei}^2 - \frac{1}{2} m_e v_{ef}^2 + M v_{ei} v_f - \frac{1}{2} \frac{M^2}{m_e} v_f^2 = \frac{1}{2} M v_f^2$$

$$M v_{ei} v_f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M}{m_e} \right) M v_f^2$$

$$M v_{ei} v_f = - \left(\frac{m_e + M}{m_e} \right) \Delta K_e$$

Además, teniendo en cuenta que la energía cinética inicial del electrón es $K_0 = \frac{1}{2} m_e v_{ei}^2 \implies v_{ei} = \sqrt{\frac{2K_0}{m_e}}$ y de manera análoga con la expresión (3) se obtiene

$v_f = \sqrt{\frac{-2\Delta K_e}{M}}$ por lo que si se reemplaza en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} M\sqrt{\frac{2K_0}{m_e}}\sqrt{\frac{-2\Delta K_e}{M}} &= -\left(\frac{m_e + M}{m_e}\right)\Delta K_e \\ M^2\left(\frac{2K_0}{m_e}\right)\left(\frac{-2\Delta K_e}{M}\right) &= \left(\frac{m_e + M}{m_e}\right)^2\Delta K_e^2 \\ -4m_eMK_0 &= (m_e + M)^2\Delta K_e \\ -\frac{4m_eM}{(m_e + M)^2}K_0 &= \Delta K_e. \end{aligned}$$

Siendo esta última la expresión que se deseaba. Nótese que es negativa dado que es una **pérdida** de energía. Por otro lado, para las masas del electrón y el mercurio dadas, el número que acompaña a K_0 es extremadamente pequeño (del orden de $\sim 10^{-5}$). Por lo que es despreciable al lado de 4.67eV .

7. El camino medio libre de un electrón $\bar{\ell}$ se puede calcular de acuerdo a la ecuación

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

donde n es la densidad de átomos de mercurio y σ es la sección transversal. Esta cantidad indica la longitud que debe recorrer un electrón en promedio antes de colisionar. Suponga que el mercurio se comporta como gas ideal $n = P/k_B T$. En el intervalo de 300 K a 500 K la presión en el gas es aproximadamente $P = 8.7 \times 10^{-3} \text{ }^{110}/T$. Haga la gráfica de $\bar{\ell}$ en función de la temperatura y compare este valor con la longitud entre el cátodo y el ánodo.

La gráfica del camino medio libre del electrón puede verse en la Figura 2. En esta se puede ver que para las temperaturas de trabajo del experimento (i.e. $\sim 180^\circ\text{C}$), el camino medio libre es del orden de centésimas de milímetro. Si se compara con los 12 cm que hay entre el cátodo y ánodo es una distancia relativamente pequeña. Este haría que hayan muchas más colisiones dentro del espacio entre los electrodos pero no afectaría el número de picos observados pues estos indicarían las transiciones energéticas del mercurio.

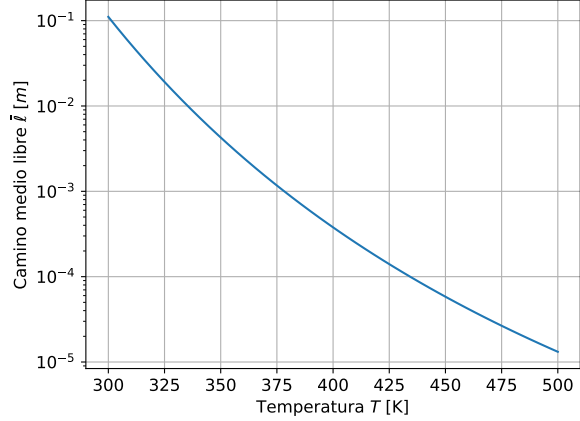


Figura 2. Gráfica del camino medio libre $\bar{\ell}$, medido en metros en función de la temperatura T , medida en kelvin, en escala logarítmica. La curva mostrada sigue $\bar{\ell} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}P\sigma}$. Con $\sigma = \pi \times (1.5 \times 10^{-10}\text{m})^2$ [1] y $k_B = 1.38 \times 10^{-23}\text{J/K}$.

8. De acuerdo a los calculado en los ejercicios, los electrones pierden una cantidad de energía cinética despreciable cuando chocan elásticamente con los átomos de mercurio, es decir, cuando sus energías son menores a la primera energía de excitación del mercurio ($E_a = 4,67\text{eV}$).

Cuando los electrones alcanzan esta energía ya se puede producir una colisión inelástica con algún átomo de mercurio, sin embargo primero debe encontrarse uno en su camino, como se ve en la figura 3(a). Se mostró que la longitud que recorre un electrón antes de chocar es $\bar{\ell}$, por lo tanto durante esa longitud adquirirá una energía δ_1 . Así pues, la energía que gana el electrón debido al voltaje de aceleración es (para una sola colisión)

$$E = E_a + \delta_1.$$

Ya que se observó que a medida que el voltaje de aceleración se aumenta el electrón puede tener más de una colisión con un átomo del gas de mercurio, como se indica en la figura 3(b) para $n = 2$, se podrá generalizar la energía que adquiere el electrón debido al potencial de aceleración para n colisiones como

$$E_n = n(E_a + \delta_n), \quad (5)$$

con δ_n , la energía adquirida por el electrón al recorrer una distancia $\bar{\ell}$, dada por

$$\delta_n = e\epsilon_n\bar{\ell}, \quad (6)$$

y E_a la energía adquirida por el electrón al recorrer una distancia d , dada por

$$E_a = e\epsilon_n d, \quad (7)$$

siendo e la carga del electrón y ϵ_n la magnitud del campo eléctrico generado por el voltaje de aceleración capaz de generar n colisiones a lo largo del trayecto completo que recorre el electrón [1], en donde $\delta_n > \delta_{n-1}$ y $E_n > E_{n-1}$

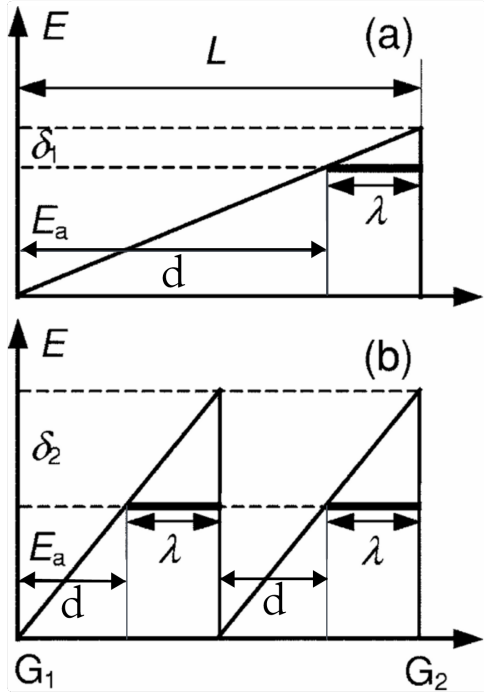


Figura 3. Energía de un electrón para el caso de un voltaje de aceleración suficiente para (a) una colisión y (b) dos colisiones. $\lambda = \bar{\ell}$. L es la longitud entre cátodo y ánodo. Tomada de [8] y editada.

De esta manera, es posible definir el número de colisiones, n , siguiendo la figura 3 y la ecuación (7),

$$n = \frac{L}{d + \bar{\ell}} = \frac{L}{\frac{E_a}{e\epsilon_n} + \bar{\ell}},$$

y, resolviendo para $e\epsilon_n$,

$$\begin{aligned} L &= \frac{nE_a}{e\epsilon_n} + n\bar{\ell} \\ e\epsilon_n &= \frac{nE_a}{L - n\bar{\ell}} \\ e\epsilon_n &= \frac{\frac{nE_a}{L}}{1 - \frac{\bar{\ell}}{L}}, \end{aligned}$$

que se puede aproximar (ya que $\bar{\ell} \ll L$, con L la longitud entre cátodo y ánodo) por la expresión

$$e\epsilon_n = \frac{nE_a}{L} \quad (8)$$

entonces, reemplazando (8) en (6), se obtiene

$$\delta_n = \frac{nE_a\bar{\ell}}{L}.$$

Ahora bien, lo que se puede medir experimentalmente es la diferencia entre dos de estas energías, que corresponde a la distancia entre el mínimo n y $n-1$, explícitamente

$$\begin{aligned} \Delta E(n) &= E_n - E_{n-1} \\ \Delta E(n) &= n \left(E_a + \frac{nE_a\bar{\ell}}{L} \right) - \left((n-1) \left(E_a + \frac{(n-1)E_a\bar{\ell}}{L} \right) \right) \\ \Delta E(n) &= E_a + \frac{2nE_a\bar{\ell}}{L} - \frac{E_a\bar{\ell}}{L} \\ \Delta E(n) &= \left(1 + \frac{\bar{\ell}}{L}(2n-1) \right) E_a. \end{aligned} \quad (9)$$

De acuerdo a la ecuación (9) la distancia entre los mínimos aumenta con el orden del mínimo.

IV. MONTAJE EXPERIMENTAL

El montaje que se utilizará para desarrollar el experimento consiste de un tubo de Franck-Hertz al interior de una estufa y conectado a una unidad de control y medición.

Las conexiones del tubo de Franck-Hertz siguen el esquema ilustrado en la figura 4. En donde el voltaje U_H

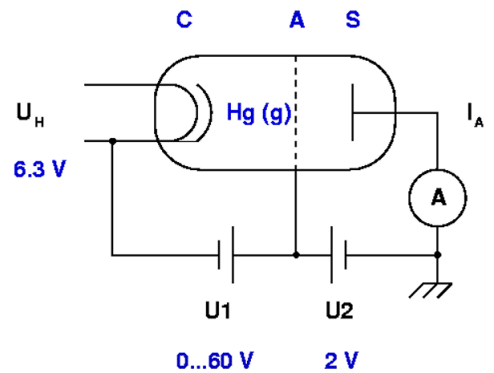


Figura 4. Vista esquemática del tubo de Franck-Hertz. C es el cátodo, A es el ánodo y S es el electrodo colector. Tomada de [9]

es el voltaje usado para generar la emisión termoiónica de los electrones, que son posteriormente acelerados por el voltaje U_1 y frenados por el potencial U_2 tras colisionar con los átomos de mercurio en su trayectoria entre el cátodo y el ánodo del tubo. La longitud entre cátodo y ánodo es mucho mayor que el camino medio libre de

los electrones en el vapor de mercurio a la temperatura de operación, maximizando las probabilidades de impactos. La medida de la corriente de electrones al final del tubo permite observar la relación entre la energía impartida sobre ellos y la disipada en las colisiones con los átomos de mercurio. Se recomienda manejar parámetros de:

- $T = (175 \pm 10) ^\circ\text{C}$.
- $U_H = (6.3 \pm 0.5)\text{V}$; corriente de la fuente de calor $< 150 \text{ mA}$.
- $U_1 = 0 \dots 60\text{V}$.
- $U_2 = (2.0 \pm 0.5)\text{V}$.

El módulo de control y medición sigue el diagrama en la figura 5 siendo

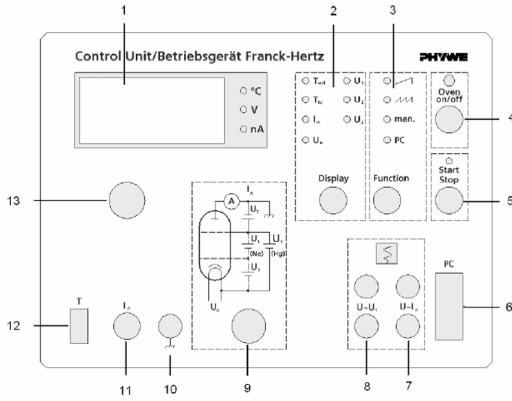


Figura 5. Interfaz del módulo de control y medición para el experimento de Franck-Hertz. Tomada de [10]

1. Pantalla digital en donde se pueden leer los valores de T , U_1 , U_2 , U_H , I_A .
2. Selector de cantidad física a mostrar.
3. Selector de modo de medición.
4. Interruptor de la estufa (no se usará, la temperatura se controlará desde la estufa).
5. Interruptor para iniciar y detener mediciones.
6. Conexión para computador.
7. Salida analógica de corriente I_A ($10\text{V} \Rightarrow 50\text{nA}$).
8. Salida analógica del voltaje U_1 ($10\text{V} \Rightarrow 100\text{V}$).
9. Suministro de voltajes U_1 , U_2 , U_H para el tubo de Franck-Hertz.
10. Tierra.
11. Entrada BNC para medición de corriente.
12. Entrada para termocupla.
13. Perilla para ajuste de las cantidades T_{nominal} , U_1 , U_H , U_2 .

[1] D. W. Preston and E. R. Dietz, *The art of experimental physics* (1991).

[2] G. Hanne, *American Journal of Physics* **56**, 696 (1988).

[3] R. Rubenzahl and B. Peng, *The Franck-Hertz Experiment*.

[4] N. Bohr and P. Mag, (1913).

[5] G. Chen, Z. Ding, S.-B. Hsu, M. Kim, and J. Zhou, *Journal of mathematical physics* **47** (2006).

[6] M. A. C and J. Napolitano, *Experiments in modern physics* (Academic Press, 2003).

[7] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, 1995).

[8] G. Rapior, K. Sengstock, and V. Baev, *American Journal of Physics* **74**, 423 (2006).

[9] Robert-Bosch-Breite, *Operating instructions franck-hertz tube on a panel, franck-hertz oven*, PHYWE Systeme GmbH & Co. KG, Göttingen (2016), 10 D-37079. Available at https://www.phywe.com/physics/modern-physics/quantum-physics/franck-hertz-hg-tube-on-plate_1628/.

[10] Robert-Bosch-Breite, *Operating instructions Franck-Hertz Control Unit*, PHYWE Systeme GmbH & Co. KG, Göttingen (2016), 10 D-37079. Available at https://www.phywe.com/physics/modern-physics/quantum-physics/franck-hertz-control-unit_1626/.