

# Movimiento Armónico Amortiguado en un Circuito RCL

Juan Carlos Rojas Velásquez\* and Thomas Andrade Hernández\*\*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 19 de septiembre de 2023)

## I. INTRODUCCIÓN

En la naturaleza se pueden observar diferentes tipos de oscilaciones que pueden describirse de manera precisa. Un ejemplo de esto es son las oscilaciones de un circuito RLC, el objetivo de la práctica presentada en el documento. Mediante análisis de circuitos por las leyes de Kirchhoff, se tiene que la corriente en el circuito sigue la ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

definiendo  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  y  $\gamma = \frac{R}{L}$ , se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (1)$$

La ecuación (1) puede tener 3 soluciones de comportamiento diferente dependiendo de los valores de  $\omega_0$  y  $\gamma$  que estén en la ecuación. Estos tipos son:

- **Sobreamortiguado:** En caso de que  $\gamma^2/4 > \omega_0^2$  la solución del problema tendrá la forma

$$I(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

- **Críticamente amortiguado:** En caso de que  $\frac{\gamma^2}{4} = \omega_0^2$  La solución tendrá la forma

$$I(t) = A_1 t e^{-\gamma/2t} + A_2 e^{-\gamma/2t}$$

- **Subamortiguado:** En caso de que  $\gamma^2/4 < \omega_0^2$ , la solución de la ecuación diferencial tiene la forma

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma/2t} \cos \omega t$$

en las soluciones  $\omega$  está definido como

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

y,  $r_1$  y  $r_2$  corresponden a las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}.$$

En la práctica se pretende verificar estos casos de oscilación en el circuito RLC por medio de un generador de ondas.

## II. MONTAJE EXPERIMENTAL

Para la práctica se empleó el montaje que se puede apreciar en la Figura 1.

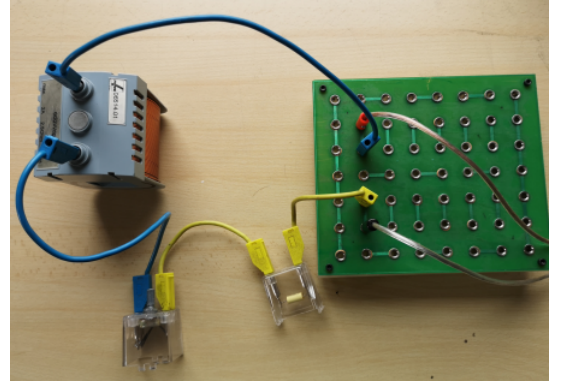


Figura 1. Montaje experimental empleado. De izquierda a derecha se tiene la inductancia, el potenciómetro, el condensador y la tarjeta de circuitos. Los cables que aparecen en la derecha provienen del generador de ondas para poder generar la perturbación esperada.

El procedimiento general consistió en modificar el valor de la resistencia interna del potenciómetro para observar los cambios en el voltaje inducido por el generador de ondas.

Este cambio en la resistencia del circuito derivó inmediatamente en cambios en las observaciones realizadas en el osciloscopio, generando movimientos armónicos sobreamortiguados, con amortiguamiento crítico y subamortiguados, tal y como se aprecia en las Figuras 2, 3 y 4 respectivamente.

\* Correo institucional: jc.rojasv1@uniandes.edu.co

\*\* Correo institucional: t.andrade@uniandes.edu.co

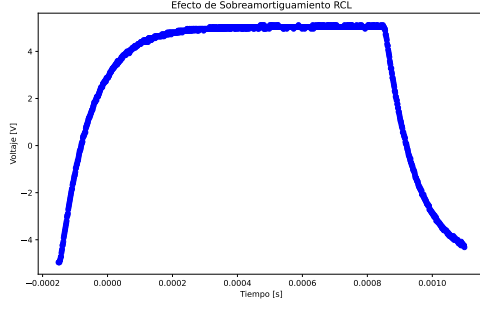


Figura 2. Fenómeno de sobreamortiguamiento presente para una resistencia en el potenciómetro del valor de  $2\ \Omega$ .

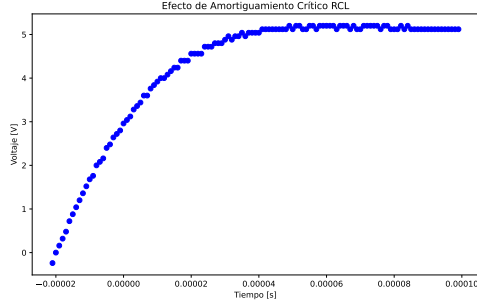


Figura 3. Fenómeno de amortiguamiento crítico presente para una resistencia en el potenciómetro del valor de  $657\ \Omega$ .

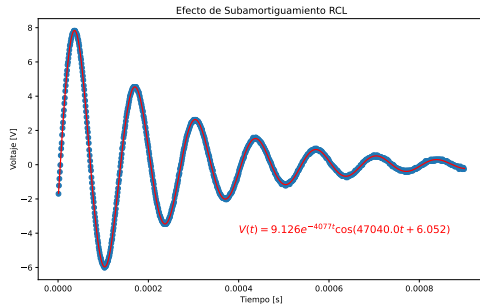


Figura 4. Fenómeno de subamortiguamiento presente para una resistencia en el potenciómetro del valor de  $2820\ \Omega$ . Se elaboró un ajuste no lineal que nos servirá para un estudio posterior.

De estas tres mediciones realizadas la más interesante en general resulta ser la del subamortiguamiento dada su estrecha relación con los fenómenos físicos convencionales. Sobre este conjunto de datos se generó una regresión de la forma:

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t/2} \cdot \sin(\omega' t + \delta)$$

donde  $V_0 = 9.126 \pm 0.006\ \text{V}$ ,  $\gamma = (8.154 \pm 4) \times 10^3\ \text{s}^{-1}$ ,  $\omega' = (4.7040 \pm 0.0003) \times 10^4\ \text{rad/s}$  y  $\delta = 5.060 \pm 0.001\ \text{rad}$ . Los valores de las incertidumbres fueron obtenidos directamente por *Logger Pro*.

### III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se dará respuesta a las preguntas esenciales de este laboratorio, dividiéndolas entre la visión cualitativa o teórica y la cuantitativa o experimental:

#### A. ANÁLISIS CUALITATIVO

- Matemáticamente, ¿Qué pasa si no está el elemento de la resistencia en el circuito?

Si removemos del circuito a la resistencia proveída por el potenciómetro, la ecuación diferencial para el circuito se reducirá a lo siguiente:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Ecuación diferencial que se soluciona inmediatamente como:

$$i(t) = i_0 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t + \delta\right)$$

De la cual se puede concluir que la corriente no posee ninguna reducción en su totalidad, simplemente oscila a lo largo del tiempo.

- Considera un oscilador amortiguado mecánico, como una masa unida a un resorte. ¿Qué analogía se puede establecer con los elementos usados en este experimento? Es decir, ¿qué es la resistencia, la inductancia, la capacitancia, el voltaje y la corriente con respecto al resorte, la masa del bloque, la constante del resorte y demás variables involucradas?

De las ecuaciones relacionadas al resorte se tendría que el coeficiente de viscosidad del medio sería la resistencia del circuito ( $b = R$ ), la masa sería la inductancia ( $m = L$ ) y la constante elástica sería el recíproco de la capacitancia ( $k = 1/C$ ), esto se aprecia de la siguiente forma:

$$\gamma = \frac{b}{m} = \frac{R}{L} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{1/C}{L} = \frac{1}{LC}$$

De esta manera, la corriente del sistema representaría la distancia recorrida por el péndulo en un momento  $t$ .

- ¿Qué valores de los elementos (resistencia, inductancia y/o capacitancia) podría modificar para que el tiempo característico de un caso subamortiguado aumente?

Dado que el tiempo característico de un circuito es proporcional a  $\omega_0$ , lo más factible sería reducir el valor de la capacitancia. De esta manera el cociente  $1/LC$  se hará más grande, el factor de calidad también incrementará (manteniendo la oscilación subamortiguada) e incrementando el tiempo característico.

## B. ANÁLISIS CUANTITATIVO

- Verifique si en cada caso de amortiguamiento se cumple la relación de  $R^2$  respecto a  $4L/C$ . Argumente.

Como se puede observar en el Cuadro I, los valores para los que el tipo de oscilación es medianamente consistente con la predicción teórica se remite a los extremos del sobreamortiguamiento y subamortiguamiento. En el caso del amortiguamiento crítico, el valor obtenido difiere considerablemente del teórico, situación posiblemente relacionada a un error sistemático dada la alta sensibilidad del potenciómetro empleado.

Tipo de Oscilación	Valor $R^2$	Condición
Subamortiguada	4	$4 < 2250000$ ✓
Amortiguada Críticamente	431649	$431649 \neq 2250000$
Sobreamortiguada	7952400	$7952400 > 2250000$ ✓

Cuadro I. Información del valor  $R^2$  para cada tipo de oscilación. Las marcas ✓ muestran qué tipo de oscilación es consistente con la teoría.

- Determine los valores de  $\gamma$  y  $\omega'$  teóricos y compa-

relo para los valores obtenidos con la regresión.

Los valores teóricos esperados para cada parámetro son:

$$\omega'_{\text{Teórico}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \approx 48621$$

$$\gamma_{\text{Teórico}} = \frac{R}{L} = \frac{2}{9 \times 10^{-3}} \approx 222$$

- Verifique si en el resultado con su incertidumbre están los valores calculados de  $\gamma_{\text{Teórico}}$  y  $\omega'_{\text{Teórico}}$ . Argumente su resultado.

Como se puede apreciar en los resultados previos, el valor que menos cercanía guarda con su contraparte teórica es el relacionado con  $\gamma$ , el cual tiene un valor de  $\gamma = (8.154 \pm 4) \times 10^3 \text{s}^{-1}$ , mientras que su contraparte teórica es 222. Técnicamente este valor se encuentra encerrado por la incertidumbre asociada. Algo similar sucede para el omega, el cual tiene un valor de  $\omega' = (4.7040 \pm 0.0003) \times 10^4 \text{s}^{-1}$ , en contraparte con el valor de 48621, donde se tiene una cercanía mucho más prominente, pero esta similitud es más con los valores en sí y no por las aproximaciones de error.

## IV. CONCLUSIONES

Dado los resultados del Cuadro I, las oscilaciones amortiguadas y sobreamortiguadas fueron descritas de forma exitosa mientras que los valores para la oscilación críticamente amortiguada no muestra resultados concordes con la teoría. Por otro lado, los valores encontrados para  $\gamma$  y  $\omega'$  por medio de regresiones fueron  $\gamma = (8.154 \pm 4) \times 10^3 \text{s}^{-1}$  y  $\omega' = (4.7040 \pm 0.0003) \times 10^4 \text{s}^{-1}$ . Esto es, se consiguió una buena aproximación para las constante de frecuencia natural pero no se logró obtener un valor experimental cercano a la teoría.

---

[1] N. Berrío Herrera, *Guías de Laboratorio. Ondas y fluidos*. (Universidad de Los Andes, 2023).