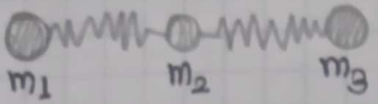
Pre-Parcial #2 Ondas y Fluidos

Nombre: Thomas Andrade Hernández   Código: 202214695

① Una molécula de CO_2 se puede modelar con un sistema compuesto de una masa central m_2 conectada por dos resortes iguales de constante k a dos masas m_1 y m_3. Encuentre la razón de los modos normales de vibración cuando $m_1 = m_3 = 16u$ y $m_2 = 12u$



$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k(x_1-x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k(x_2-x_1)-k(x_2-x_3) \\ m_3\ddot{x}_3 &= -k(x_3-x_2) \end{aligned}\right\} \text{Sistema de ecuaciones}$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_1}(x_1-x_2) = x_1\left(-\frac{k}{m_1}\right) + x_2\left(\frac{k}{m_1}\right)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m_2}(x_2-x_1) - \frac{k}{m_2}(x_2-x_3) = x_1\left(\frac{k}{m_2}\right) + x_2\left(-\frac{k}{m_2}\cdot 2\right) + x_3\left(\frac{k}{m_2}\right)$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m_3}(x_3-x_2) = x_2\left(\frac{k}{m_3}\right) + x_3\left(\frac{-k}{m_3}\right)$$

Reemplazando los valores de masa:

$$\ddot{x}_1 = x_1\left(\frac{-k}{16u}\right) + x_2\left(\frac{k}{16u}\right) = x_1\left(\frac{-\omega_0^2}{16}\right) + x_2\left(\frac{\omega_0^2}{16}\right).$$

$$\ddot{x}_2 = x_1\left(\frac{k}{12u}\right) + x_2\left(\frac{-k}{12u}\cdot 2\right) + x_3\left(\frac{k}{12u}\right) = x_1\left(\frac{\omega_0^2}{12}\right) + x_2\left(-\frac{\omega_0^2}{6}\right) + x_3\cdot\left(\frac{\omega_0^2}{12}\right).$$

$$\ddot{x}_3 = x_2\left(\frac{k}{16u}\right) + x_3\left(\frac{-k}{16u}\right) = x_2\left(\frac{\omega_0^2}{16}\right) + x_3\left(\frac{-\omega_0^2}{16}\right).$$

De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\omega_0^2}{16} & \frac{\omega_0^2}{16} & 0 \\ \frac{\omega_0^2}{12} & -\frac{\omega_0^2}{6} & \frac{\omega_0^2}{12} \\ 0 & \frac{\omega_0^2}{16} & -\frac{\omega_0^2}{16} \end{bmatrix}}_{-\omega^2} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

← Esto tiene la forma de $\ddot{x} = -\omega^2 x$ matricial. Si se asume $x = Ae^{i(\bar{\omega}t)}$ entonces se tiene una relación

$$-\bar{\omega}^2 A = -\omega^2 A.$$

Toca obtener los valores propios y sus respectivos ~~val~~ vectores buscando

$$\det(\omega^2 - \bar{\omega}^2 \cdot \mathbb{I})$$

$$\det(\omega^2 - \bar{\omega}^2 \cdot \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} \frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2 & -\frac{\omega_0^2}{16} & 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{12} & \frac{\omega_0^2}{6} - \bar{\omega}^2 & -\frac{\omega_0^2}{12} \\ 0 & -\frac{\omega_0^2}{16} & \frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2\right)\left(\left(\frac{\omega_0^2}{6} - \bar{\omega}^2\right)\left(\frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2\right) - \left(\frac{\omega_0^2}{12}\right)\left(\frac{\omega_0^2}{16}\right)\right) + \frac{\omega_0^2}{16} \cdot \left(\left(\frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2\right)\left(-\frac{\omega_0^2}{12}\right)\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2\right)\left(\frac{\omega_0^4}{96} - \frac{11\omega_0^2\bar{\omega}^2}{48} + \bar{\omega}^4 - \frac{\omega_0^4}{192}\right) + \frac{\omega_0^2}{16} \cdot \left(-\frac{\omega_0^4}{192} + \frac{\omega_0^2\bar{\omega}^2}{12}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\omega_0^2}{16} - \bar{\omega}^2\right)\left(\frac{\omega_0^4}{192} - \frac{11\omega_0^2\bar{\omega}^2}{48} + \bar{\omega}^4\right) + \left(\frac{-\omega_0^6}{3072} + \frac{\omega_0^4\bar{\omega}^2}{192}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow \left(\cancel{\frac{\omega_0^6}{3072}} - \frac{11\omega_0^4\bar{\omega}^2}{768} + \frac{\omega_0^2\bar{\omega}^4}{16} - \cancel{\frac{\omega_0^4\bar{\omega}^2}{192}} + \frac{11\omega_0^2\bar{\omega}^4}{48} - \bar{\omega}^6\right) + \left(-\cancel{\frac{\omega_0^6}{3072}} + \cancel{\frac{\omega_0^4\bar{\omega}^2}{192}}\right) = 0$$

$$\hookrightarrow -\frac{11\omega_0^4\bar{\omega}^2}{768} + \omega_0^2\bar{\omega}^4\left(\frac{1}{16} + \frac{11}{48}\right) - \bar{\omega}^6 = 0$$

De este factor sale $\bar{\omega}_3^2$

$$-\bar{\omega}^2\left(\bar{\omega}^4 - \bar{\omega}^2\omega_0^2\left(\frac{14}{48}\right) + \omega_0^4\left(\frac{11}{768}\right)\right) = 0$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \left(\frac{14}{48}\right) \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4}{4}\left(\frac{14}{48}\right)^2 - \omega_0^4\left(\frac{11}{768}\right)}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{14}{48}\right) \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4}{768} \cdot \frac{784}{48} - \frac{\omega_0^4}{768} \cdot \frac{528}{48}} = \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{14}{48}\right) \pm \sqrt{\frac{\omega_0^4 \cdot \overbrace{256}^{16^2}}{16 \cdot 48^2}}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2} \cdot \left(\frac{14}{48}\right) \pm \frac{\omega_0^2 \cdot 4}{48}$$

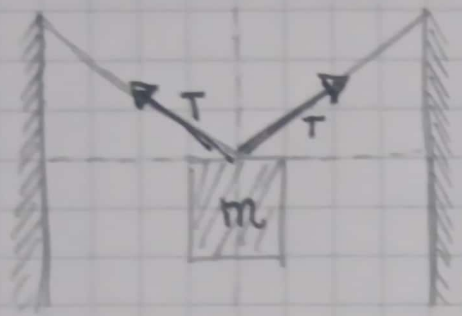
$$\bar{\omega}_1^2 = \frac{\omega_0^2}{48}(7+4) = \omega_0^2 \cdot \frac{11}{48} \qquad \bar{\omega}_2^2 = \frac{\omega_0^2}{48}(7-4) = \omega_0^2 \cdot \frac{3}{48}$$

$$\bar{\omega}_3^2 = 0$$

Estos son los valores de las frecuencias de los modos normales de oscilación

Nota: No me dio tiempo a calcular la relación de amplitudes.

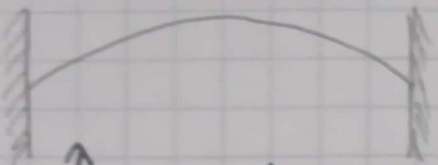
2) Una cuerda ligera, con una masa por unidad de longitud de 8.00 g/m, tiene colgada una masa del centro de la cuerda. ¿Cuál debe ser la masa del objeto suspendido de la cuerda si la rapidez de onda es de 60 m/s.?



↳ Sabemos que $v = \sqrt{T/\mu}$, entonces $T = v^2 \cdot \mu$

$$T = (60)^2 \cdot 0.008 \ \frac{kg\,m}{s^2} = 28.8\,N$$

3) Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina en Sol, con $f_G = 392\,Hz$ ¿Donde debe colocar su dedo el violinista para tocar La, con $f_A = 440\,Hz$?



↑ Cuerda de violín.

↳ Busquemos la longitud a la que ello debe realizarse:

$$f_G = \frac{v}{2L} = 392\,Hz \rightarrow f_A = \frac{v}{2\alpha L} = \frac{1}{\alpha} \cdot 392$$

$$\alpha = \frac{392}{f_A} = \frac{392\,Hz}{440} = 0.891$$

$$d = \alpha L = 0.891 \times 0.350\,m$$

$$= 0.312\,m$$

4) [...] la función de onda es:

$$y = 0.002 \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(100\pi t)$$

a) ¿Cuántos bucles hay en el patrón?