Informe de ondas mecánicas en la superficie del agua

Juan Carlos Rojas Velásquez* and Thomas Andrade Hernández**
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
(Dated: 26 de octubre de 2023)

I. INTRODUCCIÓN

La Transformada de Fourier es una herramienta matemática que permite descomponer en una combinación lineal de funciones de la forma

$$a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)$$

La definición formal de la Transformada de Fourier es

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

Joseph Fourier, mostró que cualquier función puede ser escrita como una suma infinita de funciones seno y coseno así:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \right]$$

Siendo esta la correspondencia en series de Fourier de la función [1].

Hay algoritmos como el de la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT), también a veces mencionada como *Transformada Rápida de Fourier* que permiten obtener los valores para las frecuencias de las que se compone la función original. Hay varios programas que implementan la FFT como los es la librería de Python `scipy.fft` [2].

II. MONTAJE EXPERIMENTAL

Para la práctica se utilizó un osciloscopio TBS 1102B-EDU y un generador de frecuencias AFG1022 ambos de marca Tektronix. Se generaron tres tipos de ondas: sinusoidal, rectangular y triangular, que tenían como caraterísitcas una frecuencia de 150 Hz y una amplitud de 7.5 Vpp. Se tomaron los datos medidos por el osciloscopio y se hizo el análisis de Fourier por medio del paquete `sci.fft` de Python. Además de esto, se hizo también un análisis de Fourier con los datos datos para la práctica, los cuales correspondían a osciladores acoplados.

* Correo institucional: jc.rojasv1@uniandes.edu.co
** Correo institucional: t.andrade@uniandes.edu.co

III. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A. Análisis cualitativo

- Si se quisiera graficar una función $f(t) = A \operatorname{sen} t + B \cos t$, ¿es necesario que A y B sean del mismo orden de magnitud para ver la transformada de Fourier? ¿Por qué?

  Para poder distinguir la interacción entre estas dos funciones es necesario que ambos coeficiente, A y B tengan el mismo orden de magnitud. Esto debido a que, si no es así, una de las funciones se va a imponer a la otra, dificultando el discernimiento entre ambas funciones.

- Para la suma de funciones $f(t) = A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, ¿es necesario que $\omega_1 \neq \omega_2$ para distinguirlos al calcular la FFT? ¿Qué pasaría si fueran iguales?

  Si ambas frecuencias angulares fueran iguales, entonces se tendría que

$$\begin{gathered} A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \cos \omega_1 t \\ C \cos \delta \operatorname{sen} \omega_1 t + C \operatorname{sen} \delta \cos \omega_1 t \\ C \operatorname{sen}(\omega_1 t + \delta) \end{gathered}$$

  Entonces, en la transformada de Fourier únicamente se vería un pico de frecuencia, correspondiente a la asociada a ω_1. Por lo que es necesario que tenga una diferente omega para que sean distinguibles.

- ¿Qué aplicaciones de las transformadas podría ver útiles en las prácticas que ya realizó en el curso?

  Teniendo en cuenta que el sonido del ambiente siempre está presente en mediciones de audio, la transformada de Fourier podría deshacerse de este tipo de ruido de fondo si es que ya se tiene una idea de las frecuencias que en realidad se quieren medir. Además de esto, la transformada de Fourier permitiría, entonces, poder obtener de cualquier conjunto de datos que presenten un movimiento armónico, o una combinación de movimientos armónicos, su frecuencia de oscilación y su aportación al movimiento conjunto, como en la práctica de osciladores acoplados.

- ¿Cómo se ve afectada la resolución temporal respecto a la resolución en frecuencia cuando se hacen transformadas de Fourier?

  Estas dos cantidades con variables conjugadas, por lo que entre más aumente la resolución de uno, la del otro empeorará.

B. Análisis cuantitativo

1. *Funciones generadas*

Para la primera fase de la práctica se obtuvieron los datos mostrados en la Figura 1. A estas señales obtenidas se les aplicó la FFT, y se obtuvieron los valores mostrados en la Figura 2.

Como se puede apreciar en la Figura 2, las frecuencias encontradas para las gráficas de la Figura 1 tienen un pico en la frecuencia de 150 Hz. Esto es consistente con los valores fijados de la frecuencia en el generador de señales en la práctica. Para la señal sinusoidal mostrada en la Figura 1a se encontró que la frecuencia de oscilación de la función sinusoidal es de 150 Hz y, como se mencionó anteriormente, es consistente con lo establecido en el generador de señales.

Adicionalmente, para las ondas rectangulares y triangulares mostradas en las Figuras 1b y 1c, respectivamente; las frecuencias principales son de 150 Hz para las dos gráficas. Además, hay frecuencias secundarias, que representarían los valores de los otros modos normales que, como no se puede ver, tienen menos recurrencia que el modo normal principal.

2. *Funciones dadas*

Para las funciones dadas, se tienen tres conjuntos de datos. Para el primer conjunto de datos, se tiene una función con ruido, mostrada en la Figura 3.

En la Figura 3 se pueden observar los datos de las funciones dadas y sus respectivas *Transformadas Rápidas de Fourier*. Para la gráfica de la función con ruido mostrada en la Figura 3a muestra un comportamiento que parece ser únicamente afectado por una única función sinusoidal. Esto es asegurado con su FFT, mostrada en la Figura 3d pues solamente hay un pico a una frecuencia de 1.3 Hz. Teniendo en cuenta el valor de la frecuencia, se tiene que la función que describe los datos se muestra en (1).

$$y_{\text{ruido}}(t) = 6.27\,\text{sen}(2\pi \cdot 1.3 \text{ Hz}(t - 0.87)) \tag{1}$$

El ajuste junto con los datos originales se muestran en la Figura 4.

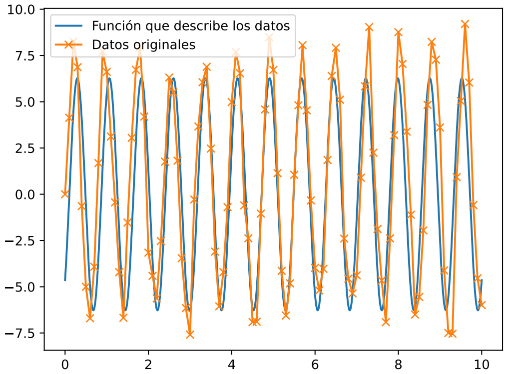


Figura 4: Se muestra la gráfica con el ajuste de curva mostrada en la ecuación (1) junto con los datos originales.

Nótese que la curva no se ajusta completamente a los datos, es es debido al ruido de los datos originales.

Por otro lado, para la función con fase, mostrada en la Figura 3b se encuentra, por medio de su FFT mostrada en la Figura 3e, se compone por funciones con frecuencias 0.1 Hz, 0.5 Hz y 1.3 Hz. Haciendo un ajuste de curva se obtiene que se ajusta a la función (2).

$$\begin{aligned} y_{\text{fase}}(t) = &- 2.07\,\text{sen}(2\pi \cdot 0.1 \text{ Hz}(t - 0.92)) \\ &+ 4.23\,\text{sen}(2\pi \cdot 0.5 \text{ Hz}(t - 0.92)) \\ &- 6.14\,\text{sen}(2\pi \cdot 1.3 \text{ Hz}(t - 0.92)) \end{aligned} \tag{2}$$

El ajuste de curva con los datos originales se muestran en la Figura 5.

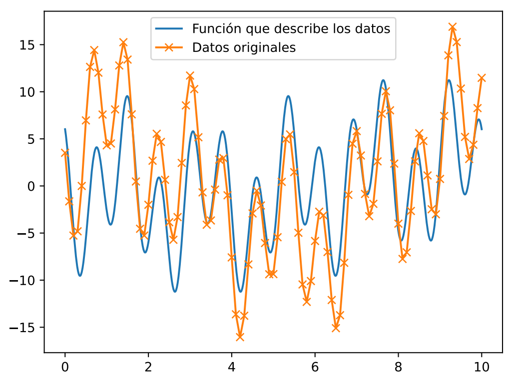
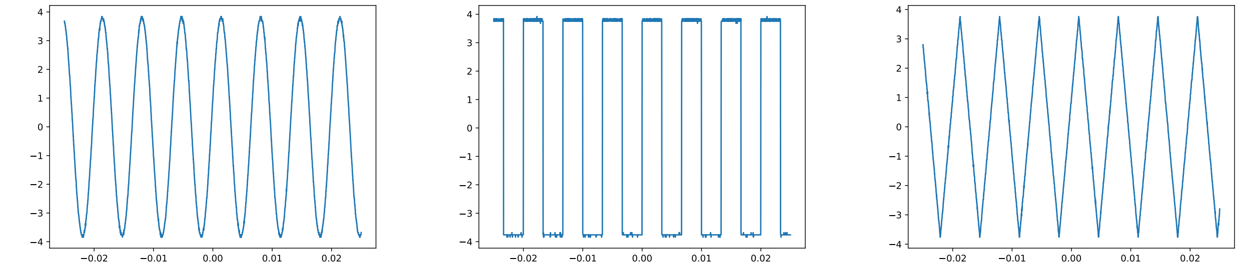
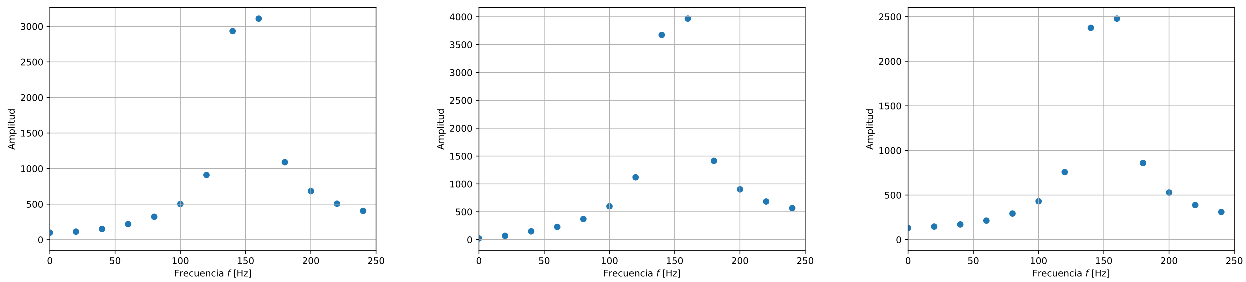


Figura 5: Se muestra la gráfica con el ajuste de la curva mostrada en la ecuación (2) junto con los datos originales.



(a) Señal sinusoidal. (b) Señal rectangular. (c) Señal triangular.

Figura 1: Señales obtenidas del osciloscopio creadas por el generador de frecuencias. Cada gráfica tiene una amplitud de 7.5 Vpp y frecuencia de 150 Hz.



(a) Señal sinusoidal. (b) Señal rectangular. (c) Señal triangular.

Figura 2: Transformadas Rápidas de Fourier obtenidas para las señales mostradas en la Figura 1.

Adicionalmente, para los datos mostrados en la Figura 3c se obtuvieron, por medio de la FFT, de la Figura 3f que la frecuencia de las funciones que la constituyen son 0.1 Hz, 0.5 Hz y 1.3 Hz lo cual es consistente con los datos con fase, pues son las mismas funciones. Se obtuvo que la función que describe los datos está dada por la ecuación (3).

$$
\begin{aligned}
y_{\text{fasen't}} = \; & 4.93\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0.1 \text{ Hz}(t - 0.1)) \\
& + 3.91\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 0.5 \text{ Hz}(t - 0.1)) \\
& + 6.23\,\mathrm{sen}(2\pi \cdot 1.3 \text{ Hz}(t - 0.1))
\end{aligned} \tag{3}
$$

El ajuste de curva junto con los datos originales se muestra en la Figura 6.

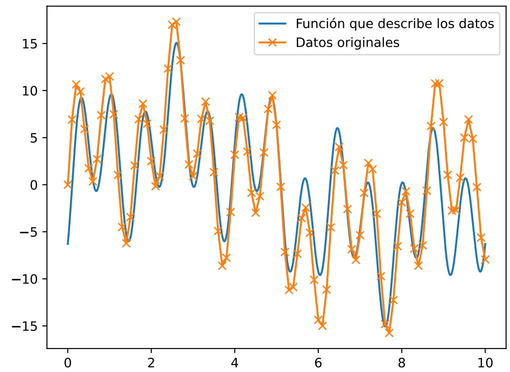
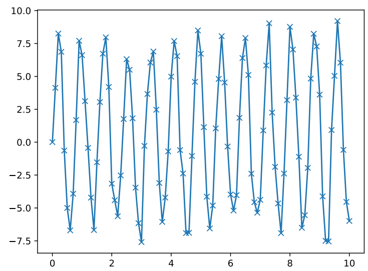


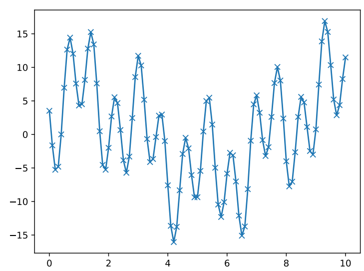
Figura 6: Se muestra la gráfica con el ajuste de la curva mostrada en la ecuación (3) junto con los datos originales.

Las funciones se ajustan relativamente correcta a los datos originales.

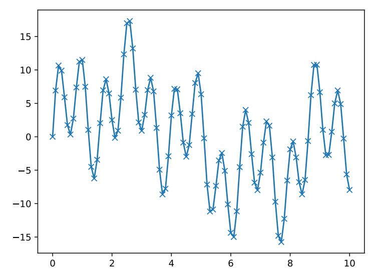
Estas oscilaciones corresponden a osciladores acoplados. Dado que hay 3 picos de frecuencia, entonces hay



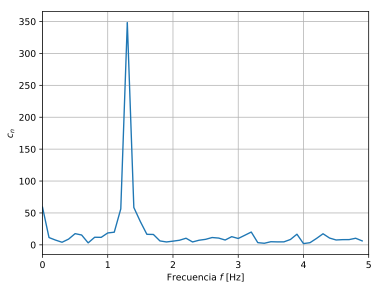
(a) Función con ruido.



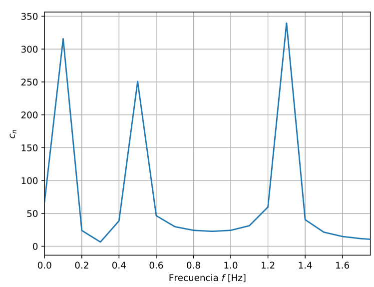
(b) Suma de funciones con fase.



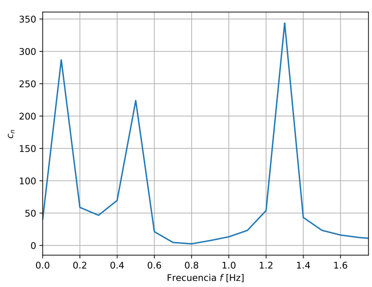
(c) Suma de funciones sin fase.



(d) FFT de la función con ruido.



(e) FFT de la suma de funciones con fase.



(f) FFT de la suma de funciones sin fase.

Figura 3: Datos de las funciones dadas en para la práctica de laboratorio junto con sus respectivas FFT.

3 modos normales con frecuencias de 0.1 Hz, 0.3 Hz y 1.3 Hz y por ende hay 3 objetos que están en oscilación acoplada.

Las funciones parecen comportarse de manera parecida exceptuando por el desfase temporal que presenta.

IV. CONCLUSIONES

La Transformada de Fourier es una herramienta que permite analizar datos que tienen un movimiento oscilatorio asociado. Para los datos generados se permitió revelar la frecuencia de estos, al aplicar la *Transformada Rápida de Fourier* o por sus siglas en inglés FFT. Para las señales sinusoidal, rectangular y triangular se encontró que su frecuencia es de 150 Hz para cada una.

Por otro lado, para las otras funciones dadas, se encontró una ecuación que describe sus datos, a pesar del ruido en ellos y que, al saber que los datos están asociados al movimiento de osciladores acoplados, que hay 3 objetos en oscilación debido a que hay 3 modos normales de frecuencias 0.1 Hz, 0.3 Hz y 1.3 Hz.

[1] N. Berrío Herrera, *Guías de Laboratorio. Ondas y fluidos.* (Universidad de Los Andes, 2023).
[2] *Fourier Transform (scipy.fft) - SciPy v1.11.3 Manual* (2023).