Redes

Jose Parra

Experimentos “Mundo Pequeño" (Small-World)

- Comprende varios experimentos llevados a cabo por el psicólogo social **Stanley Milgram.** Lo innovador de esta investigación, fue la revelación de que la sociedad humana es una red social que presenta la estructura de un mundo pequeño, caracterizada por interconexiones mucho más cortas de lo esperadas.

- **Milgram** cuantifico la distancia entre actores en redes sociales (**distancia geodésica**).

Experimentos “Mundo Pequeño" (Small-World)

1. Milgram típicamente elegía individuos en las ciudades norteamericanas de Omaha, Wichita y Boston, para ser el principio y el final de una cadena de correspondencia.
2. A los individuos de Omaha y Wichita seleccionados al azar, se les enviaba paquetes con información. Estos incluían cartas que detallaban el propósito del estudio, e información básica acerca del destinatario que debía ser contactado en Boston. Contenían además una lista en la que las personas que participaban debían inscribir sus nombres, y tarjetas de respuesta pre-dirigidas a Harvard.
3. Junto con recibir la invitación a participar, al individuo se le preguntaba si acaso él o ella conocía personalmente al destinatario descrito en la carta. En caso de que así fuera, la persona debía reenviarle la carta directamente.

Experimentos “Mundo Pequeño" (Small-World)

4. En el caso de que la persona no conociese personalmente al destinatario, la persona debía pensar en un amigo o pariente al que conocieran personalmente, y que tuviese más probabilidades de conocer personalmente al destinatario. La primera persona debía entonces inscribir su nombre en la lista y reenviar el paquete a la segunda persona. También debía enviarse una tarjeta de respuesta a los investigadores en Harvard, de modo que estos pudiesen rastrear el progreso de la cadena hacia el destinatario.
5. Cuando el paquete finalmente alcanzaba al destinatario, los investigadores podían examinar la lista para contar el número de veces que había sido reenviada de persona a persona. En aquellos casos en los que los paquetes nunca alcanzaban al destinatario, los investigadores podían identificar el punto de quiebre de la cadena, gracias a las tarjetas recibidas.

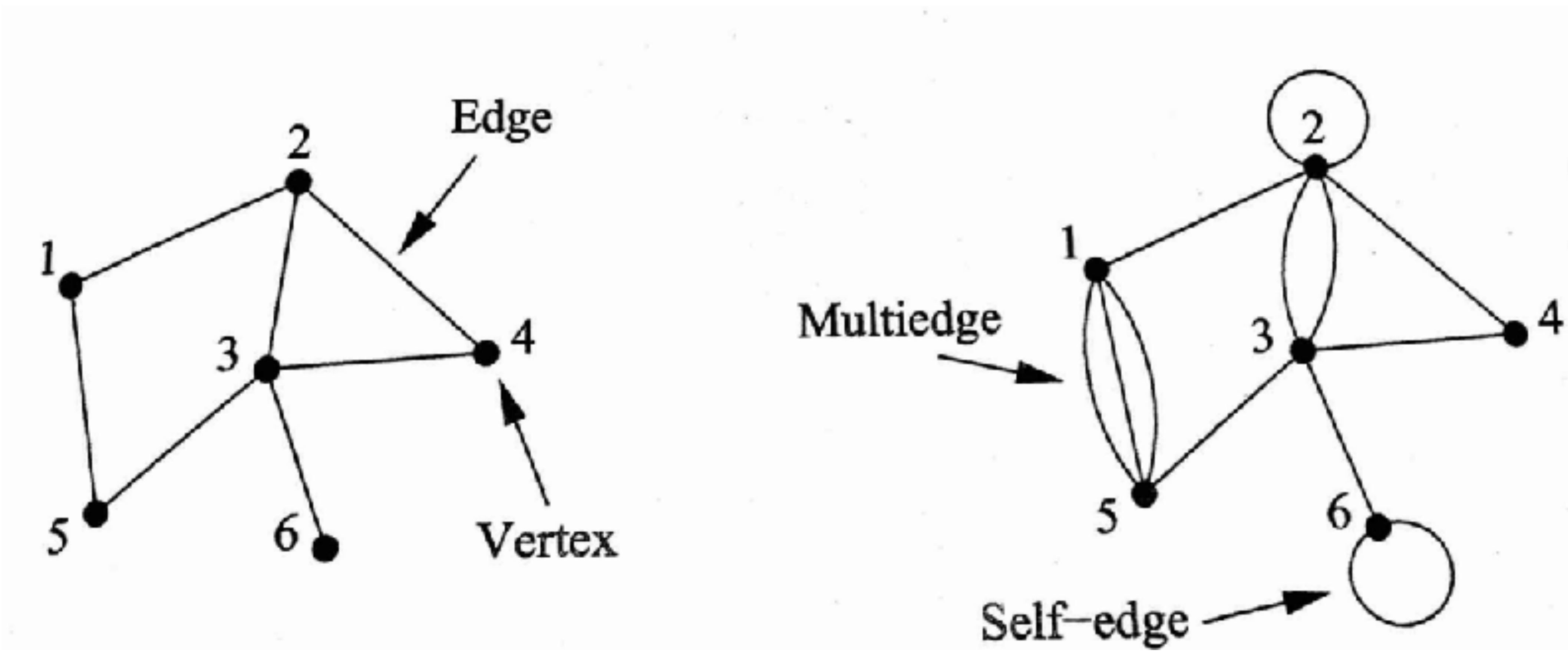
Redes y sus Representaciones

- En matemáticas una red es llamado grafo. Un grafo es una colección de vertices unidos a traves de aristas.

- En ciencias de la computación son llamados nodos y enlaces(links).

- El número de vertices en una red es denotado por la letra n y el número de aristas por la letra m, esta es la notación mas común en la literatura sobre matemáticas.

Redes y sus Representaciones



Matriz de Adyacencia.

- Es una matriz cuadrada que se utiliza como una forma de representar grafos.

$$A_{grafo1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_{grafo2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

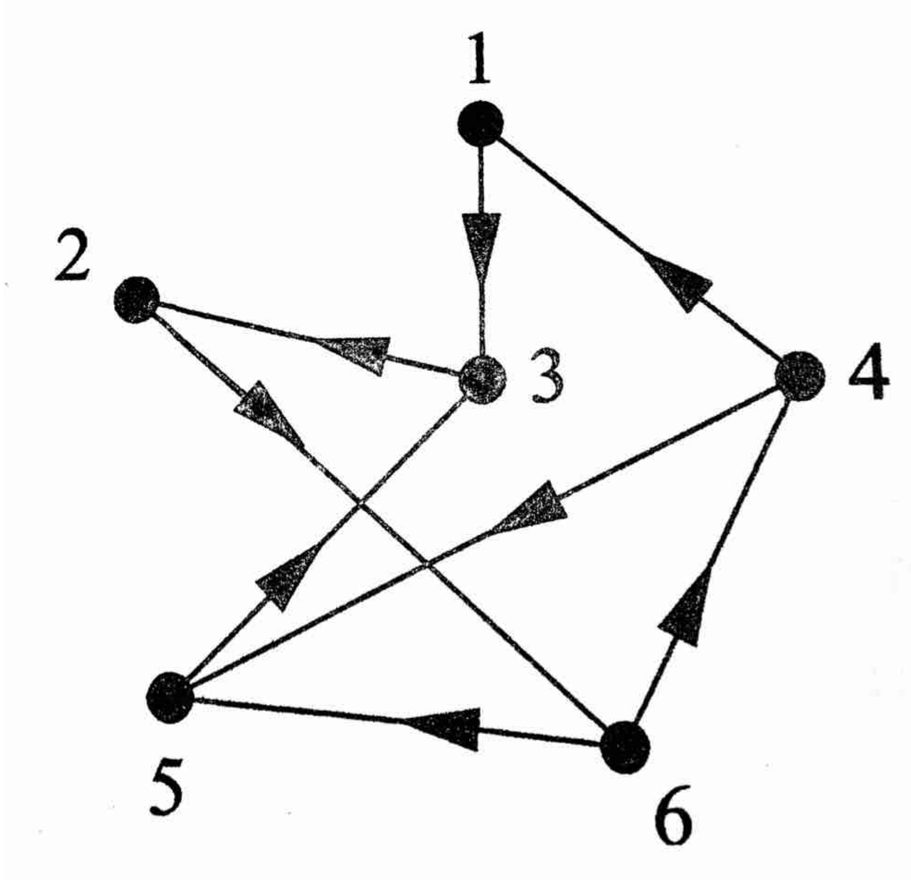
Redes Ponderadas

- Una red ponderada es una red en la que los enlaces entre los nodos tienen pesos asignados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

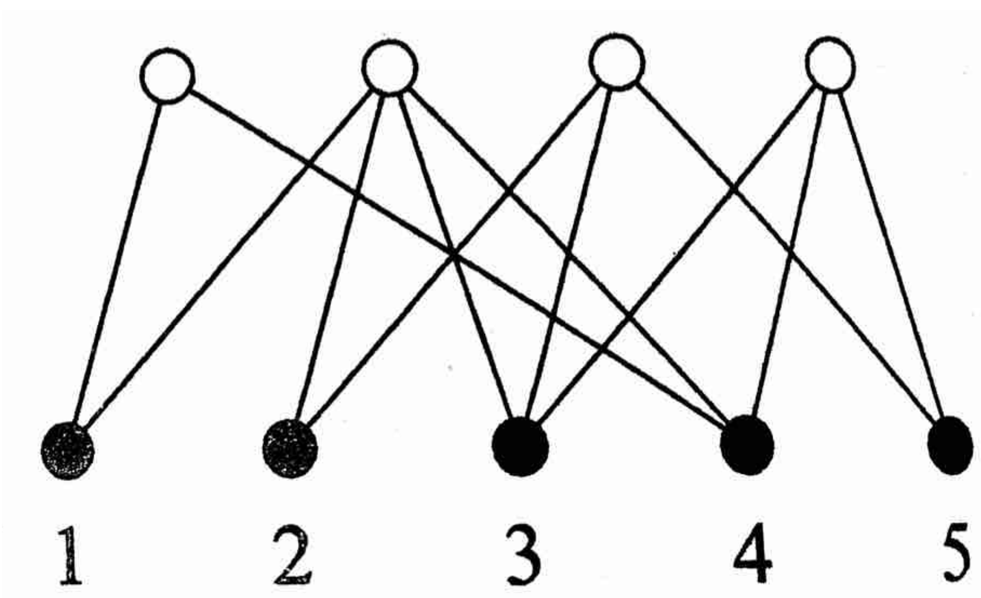
Redes Dirigidas o Grafos Dirigidos

- Es una red en la cual cada enlace tiene una dirección, apuntando de un vértice a otro. Cada enlace es llama enlace dirigido.



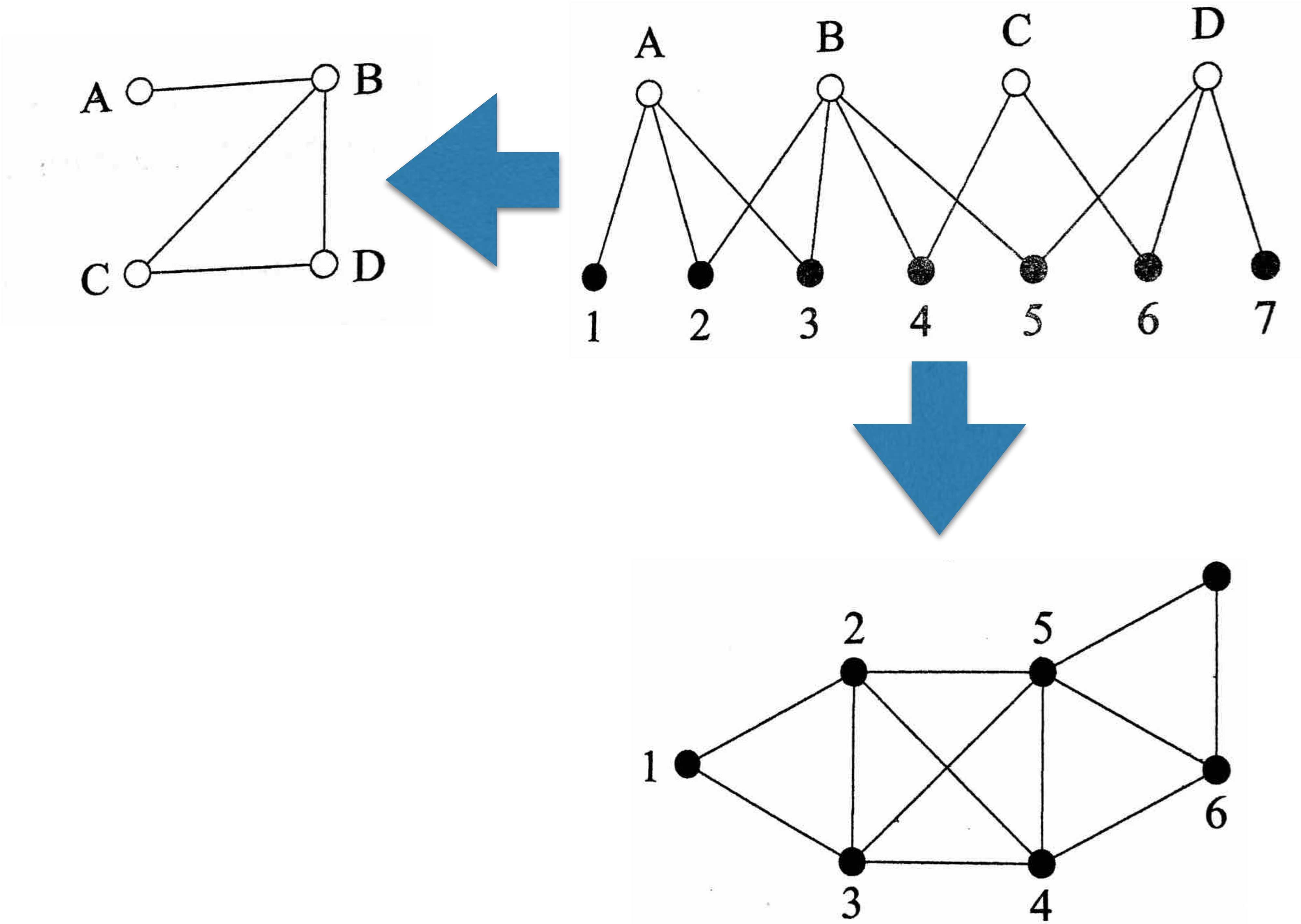
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Redes Bipartitas



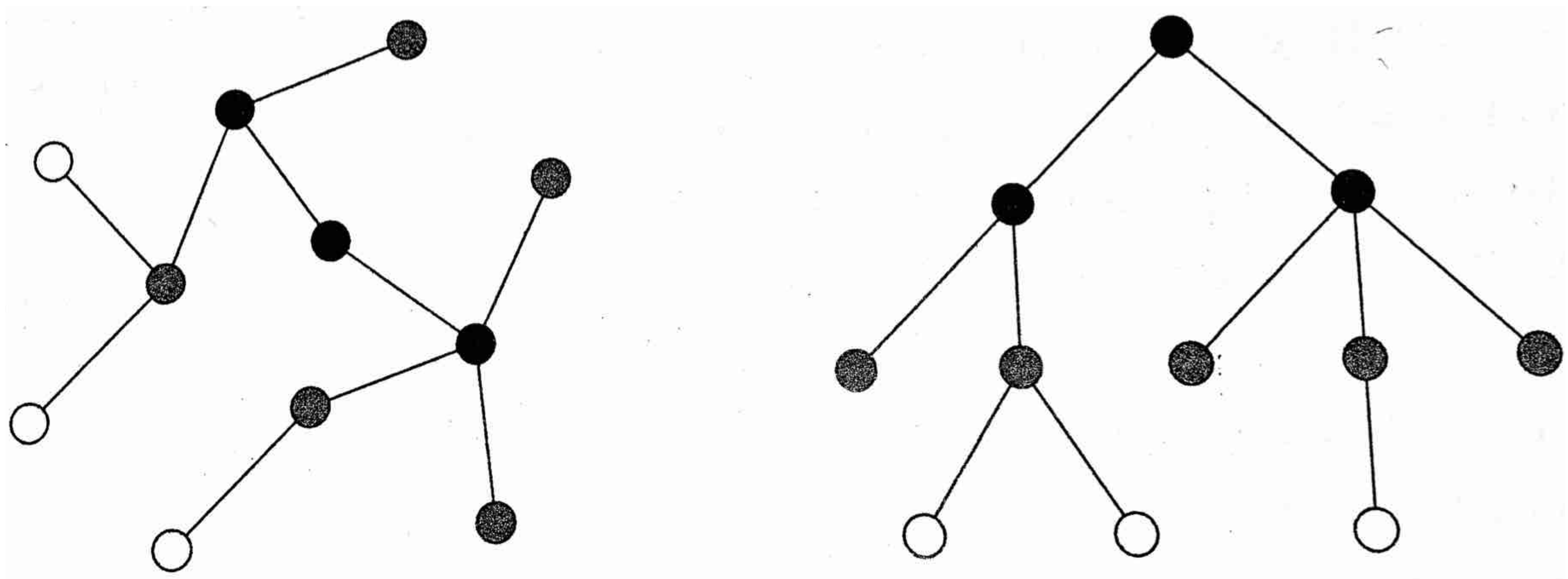
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Redes Bipartitas



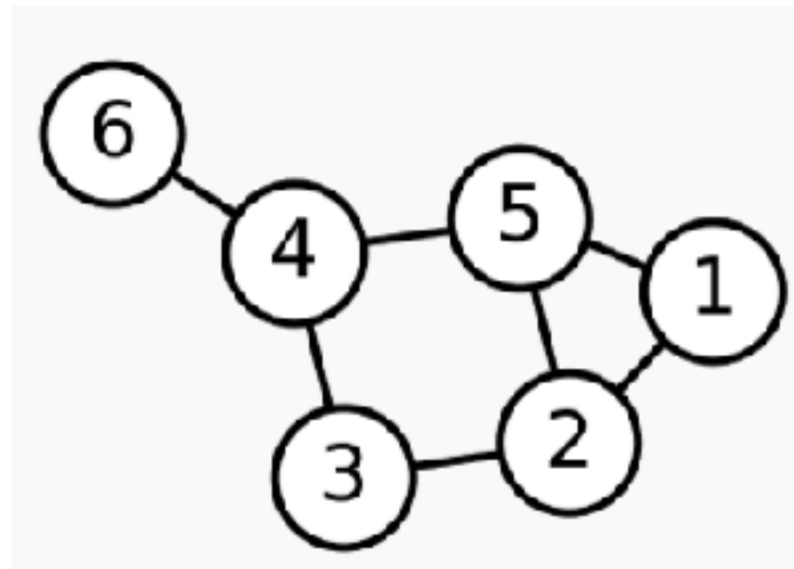
Arboles

- Es una red no dirigida que contiene ciclos no cerrados. Cualesquiera dos vértices están conectados por exactamente un camino.



Matriz Laplaciano

- **L = D - A**



Degree matrix	Adjacency matrix	Laplacian matrix
$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Centralidad de Grado

- Es simplemente el número de relaciones directas que un nodo tiene.

$$C_{DEG}(v) = grado(v)$$

$$C_{DEG}(j) = \sum_{i} a_{ij}$$

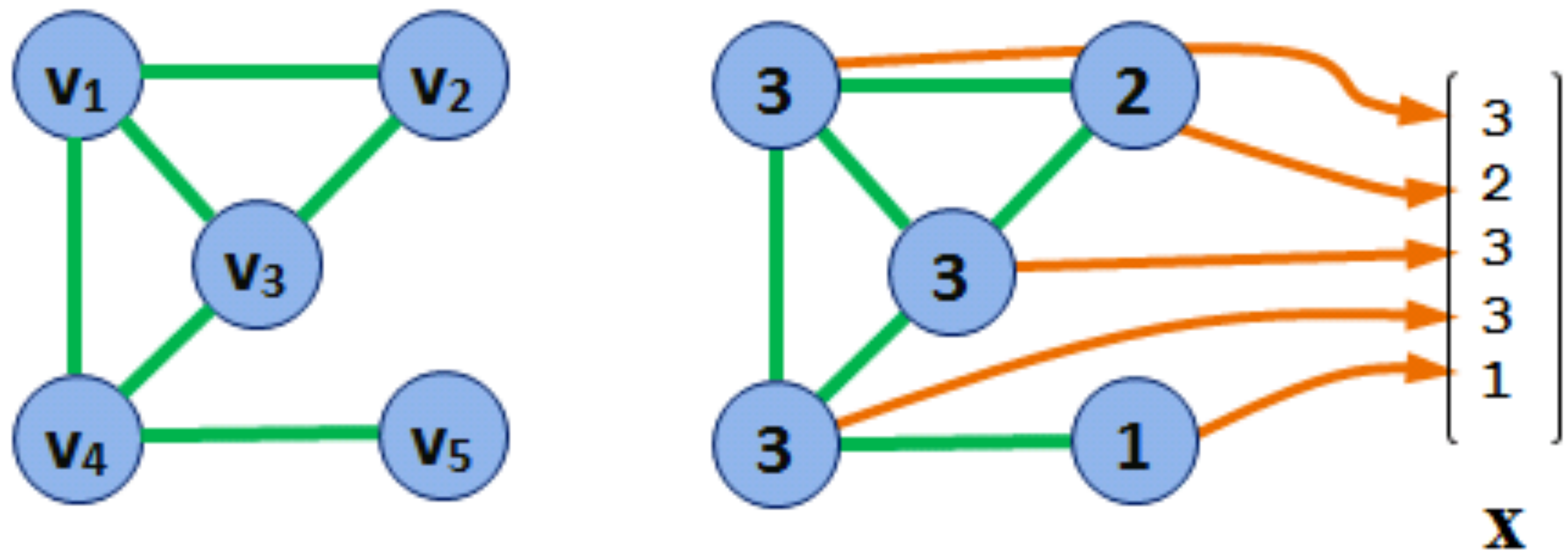
Centralidad de Vector Propio(Eigenvector Centrality)

- Mide la **influencia de un nodo** en el grafo de modo que esta centralidad será elevada si un nodo está conectado a muchos nodos, los cuales están a su vez conectados a muchos nodos.

$$x_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

$$\lambda x = Ax$$

Centralidad de Vector Propio(Eigenvector Centrality)



$$\mathbf{A} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x3 + 1x2 + 1x3 + 1x3 + 0x1 \\ 1x3 + 0x2 + 1x3 + 0x3 + 0x1 \\ 1x3 + 1x2 + 0x3 + 1x3 + 0x1 \\ 1x3 + 0x2 + 1x3 + 0x3 + 1x1 \\ 0x3 + 0x2 + 0x3 + 1x3 + 0x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Centralidad por Cercanía (Closeness Centrality)

- La medida de cercanía, definida por el matemático **Murray Beauchamp** en 1965 y luego popularizada por Freeman en 1979, es la más conocida y utilizada de las medidas radiales de longitud.

- Se basa en calcular la suma o bien el promedio de las distancias más cortas desde un nodo hacia todos los demás

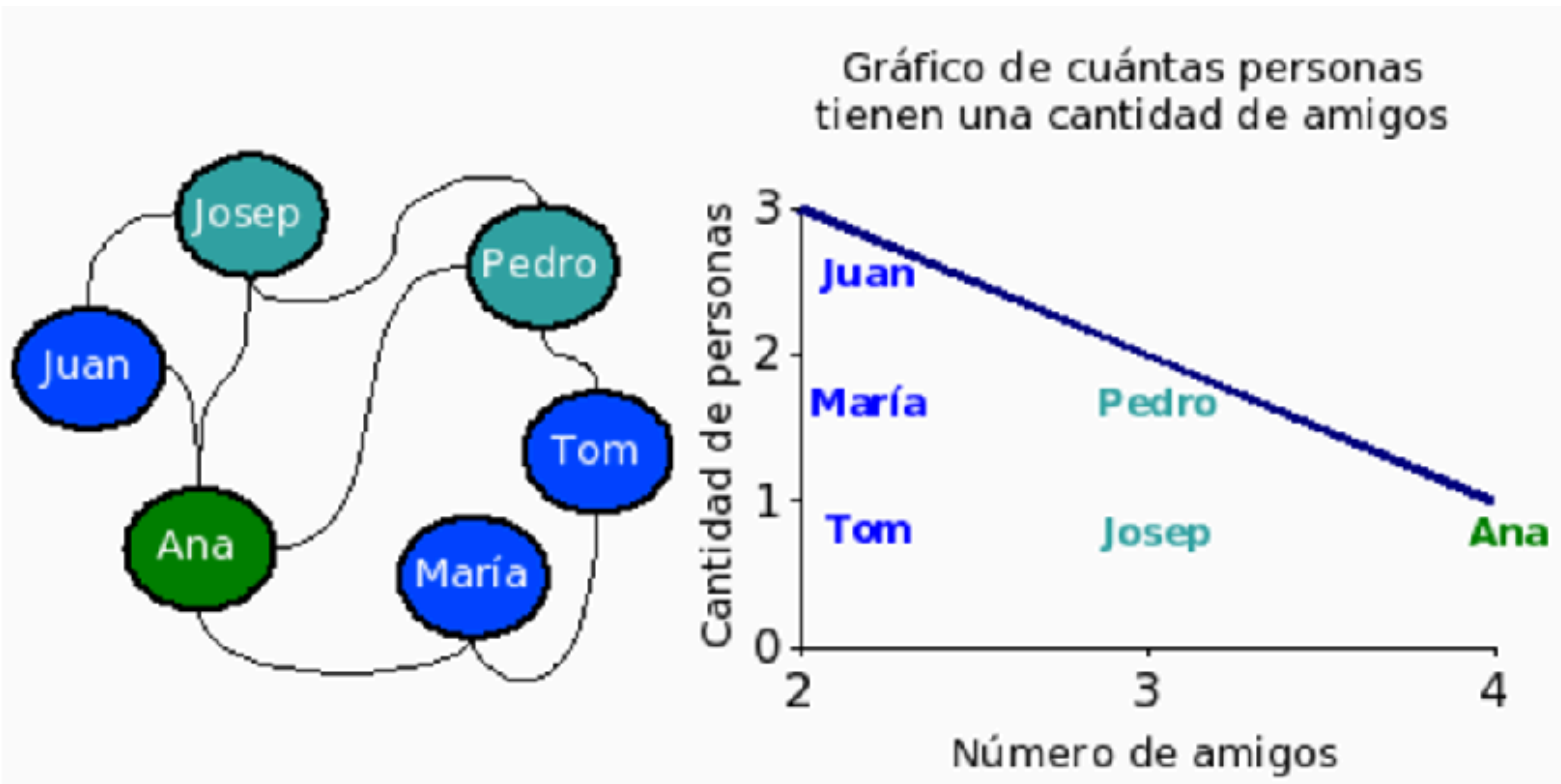
Centralidad de Intermediación (Betweenness Centrality)

- Es una medida que cuantifica la frecuencia o el número de veces que un nodo actúa como un puente a lo largo del camino más corto entre otros dos nodos.

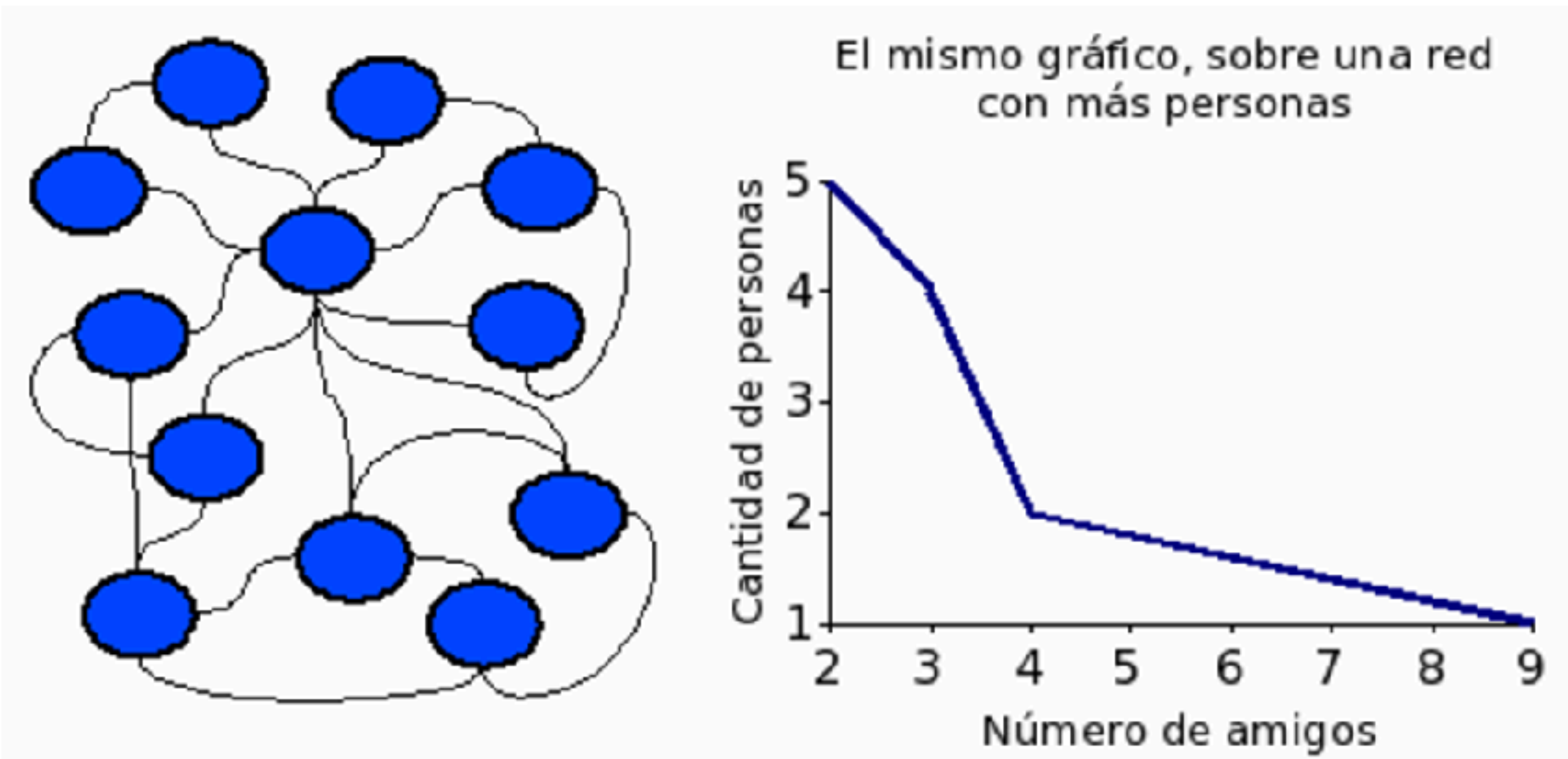
Redes de Libre Escala

- Una **red libre de escala** (scale-free network) es una red compuesta de nodos y enlaces, que tiene la particularidad de que los enlaces están distribuidos de forma muy dispareja. Internet es una red de este tipo, así como las redes de amistades entre las personas, las redes de comercio entre empresas, etc.

Redes de Libre Escala

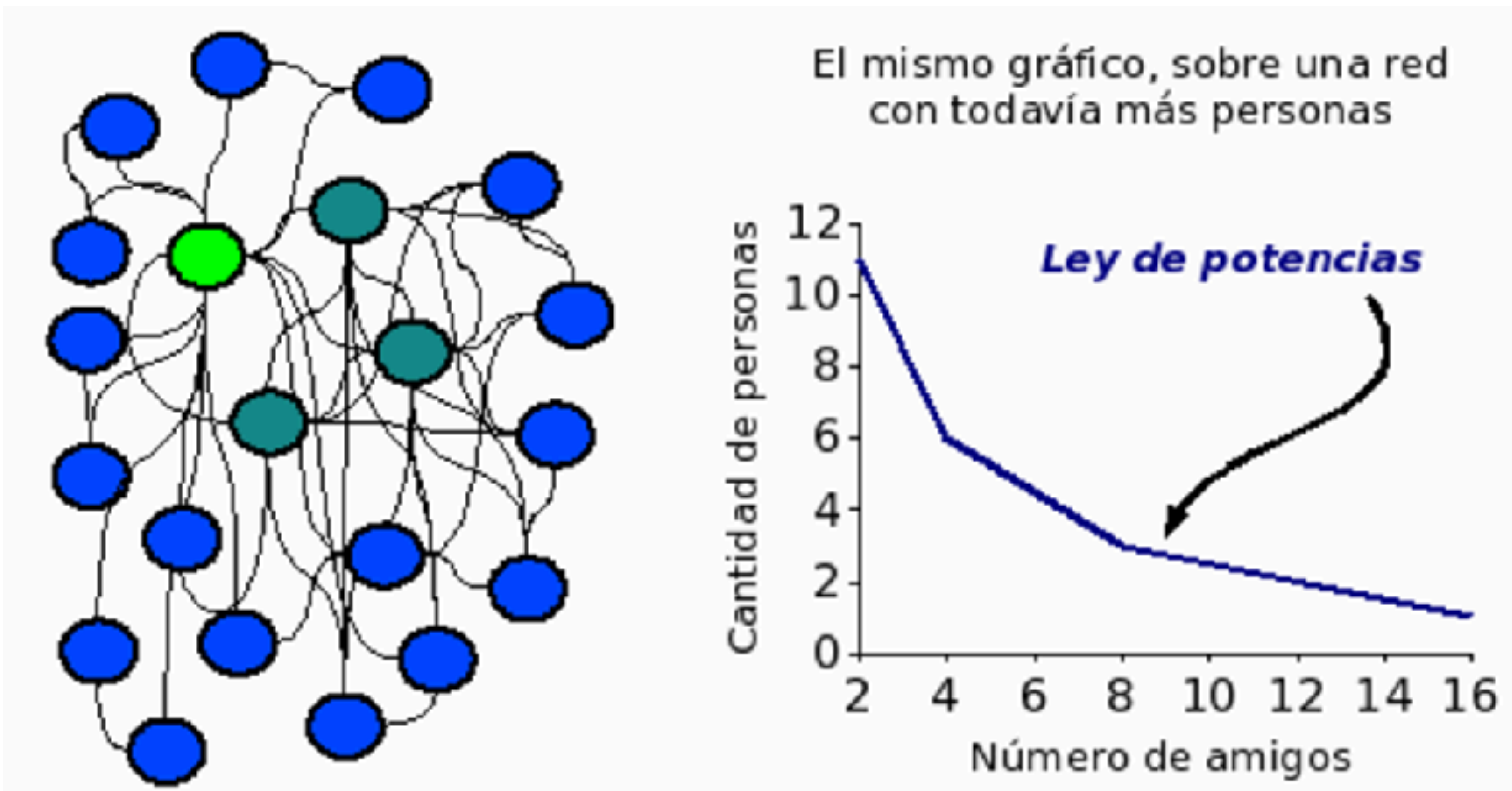


Redes de Libre Escala



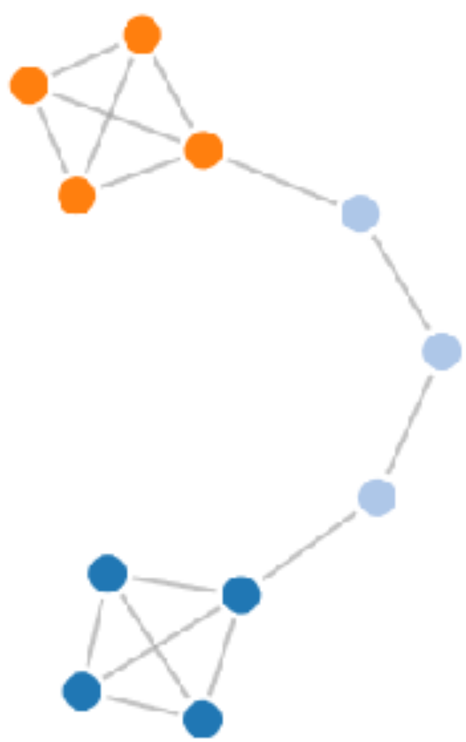
Redes de Libre Escala

$$y = Cx^{-alfa}$$



NetWorkX

- **NetworkX** es una biblioteca desarrollada en a Python para la creación, manipulación y estudio de la estructura, dinámicas y funciones de redes complejas.(https://networkx.github.io/)



```python
import networkx as nx
```

Grado

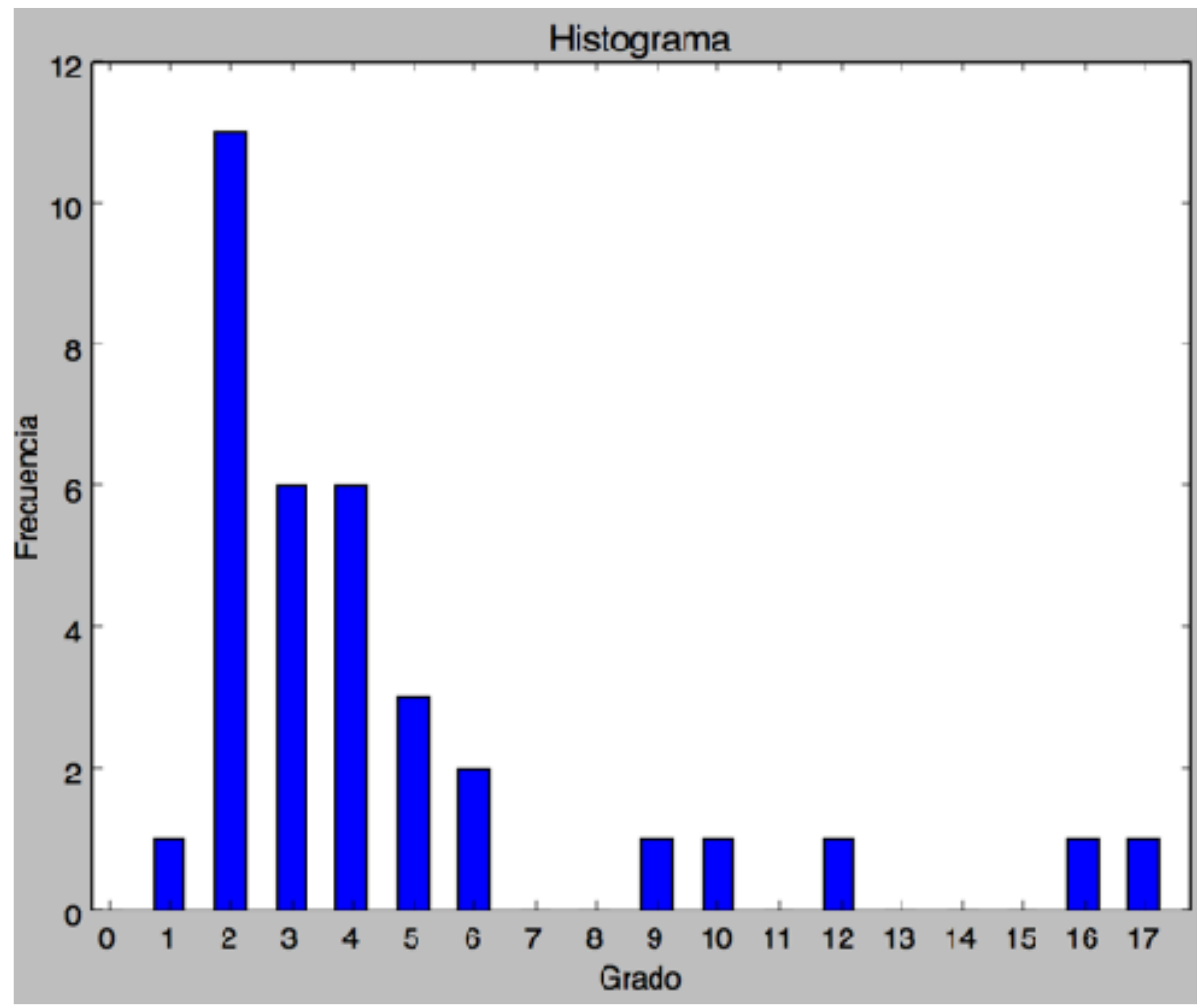
- **degree(Red, nbunch=None)**: Retorna el grado de un nodo o de un conjunto de nodos. Si el parámetro nbunch es omitido, entonces retorna el grado de todos los nodos en un diccionario.

```
g=nx.karate_club_graph();
lista=g.degree();
print lista
```

RESULTADO: {0: 16, 1: 9,…,32: 12, 33: 17}

Distribución de Grado

```
g=nx.karate_club_graph();
histograma=nx.degree_histogram(g)
num_nodos=nx.number_of_nodes(g)
distribucion_grado=np.array(histograma)/float(num_nodos)
print histograma
print distribucion_grado
```



Coeficiente de Agrupamiento

```
g=nx.karate_club_graph();
agrupacion=nx.clustering(g)
watz=nx.average_clustering(g)

print agrupacion
print watz
```

RESULTADO:

{0: 0.15, 1: 0.3333, 2: 0.2444,…, 32: 0.1969, 33: 0.1103}
0.570638478208

Distancia Geodésica

```
g = nx.karate_club_graph()
path = nx.shortest_path(g, 16, 25)
caminos=nx.all_shortest_paths(g,16,25)
longitud=nx.shortest_path_length(g,16,25)
print path
print([p for p in caminos])
print longitud
```

RESULTADOS:

[16, 5, 0, 31, 25]
[[16, 5, 0, 31, 25], [16, 6, 0, 31, 25]]
4

Distancia Geodésica

```
g=nx.karate_club_graph()
distancia=nx.dijkstra_path(g, 16,25)
print distancia
print nx.dijkstra_path_length(g, 16,25)
print nx.floyd_warshall(g)
```

Centralidad de Intermediación (Betweenness Centrality)

```
print nx.betweenness_centrality(g)
print nx.edge_betweenness_centrality(g)
```

Redes Aleatorias

- Una red aleatoria es un **grafo aleatorio** que es generado por algún tipo de proceso aleatorio.
- La teoría de los grafos aleatorios cae en la intersección entre la teoría de grafos y la teoría de probabilidades y se fundamenta en el estudio de ciertas propiedades de los grafos aleatorios.

Modelo Erdös–Rényi

- Nombrado así por ser un estudio que realizaron los matemáticos **Paul Erdős y Alfréd Rényi**, es uno de los métodos empleados en la generación de grafos aleatorios. En este modelo se tiene que un nuevo nodo se enlaza con igual probabilidad con el resto de la red, es decir posee una independencia estadística con el resto de nodos de la red.

Modelo Erdös–Rényi

- **erdos_renyi_graph**(n, p, seed=None, directed=False)
- **binomial_graph**(n, p, seed=None, directed=False)
- **gnp_random_graph**(n, p, seed=None, directed=False)
- Complejidad: **O(n^2)**
- Donde:
  - **n=** número de nodos
  - **p=** probabilidad de creación de un nuevo enlace
  - **seed=** semilla
  - **directed=** si es verdadero retorna un grafo dirigido.

Modelo Erdös–Rényi

- **fast_gnp_random_graph**(n, p, seed=None, directed=False)
- Complejidad: **O(n+m)**
- Donde:
    - **n=** número de nodos
    - **p=** probabilidad de creación de un nuevo enlace
    - **seed=** semilla
    - **directed=** si es verdadero retorna un grafo dirigido.

Modelo Erdös–Rényi

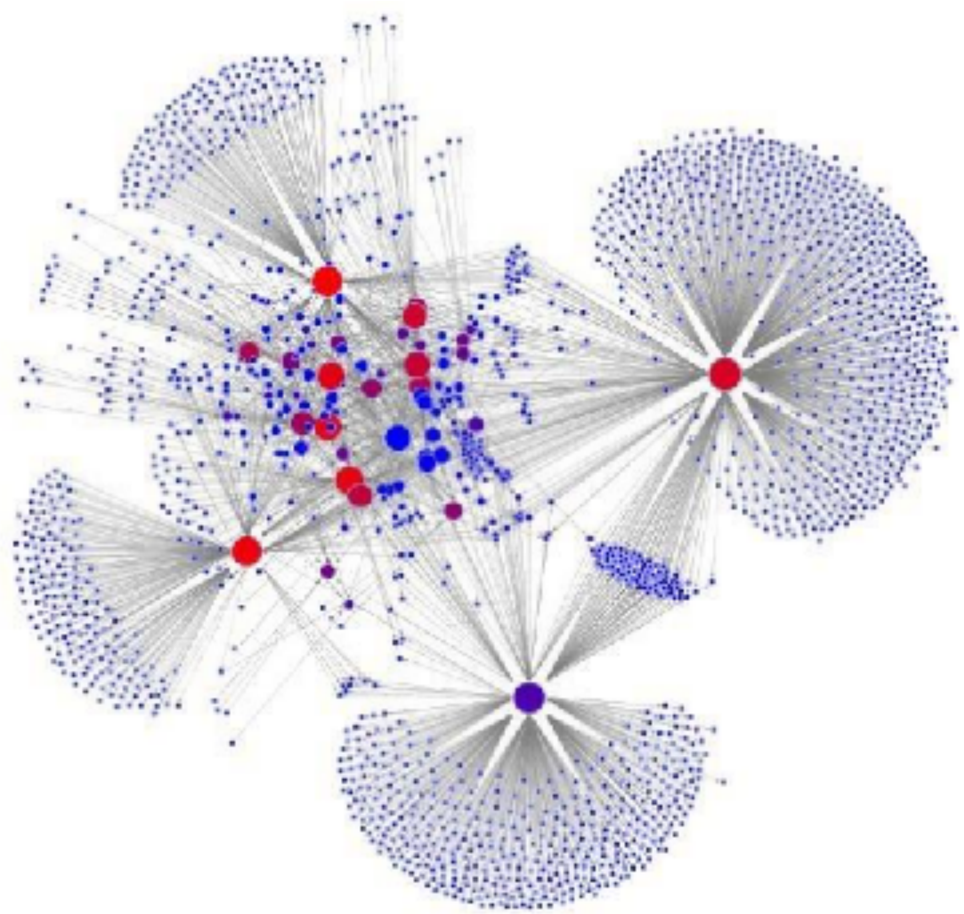
- Las **aplicaciones** de este modelo son muy **limitadas** debido a que pocas redes reales se comportan tal y como se describe en el modelo Erdös–Rényi

- No obstante existen aproximaciones en teoría de redes sobre todo en el campo de las redes sociales (**redes de afiliación y grafos bipartitos**).

- Una diferencia clara entre las redes reales y las generadas por este modelo es la distribución de grado, que en el caso de las generadas por este modelo son **poissonianas**, mientras que en la **realidad tienden a ser más exponenciales**.

Real Networks (power-law)

- Nodos aparecen con el tiempo (**growth model**)
- Nodos prefieren unirse a nodos populares (**preferential model**)



Real Networks (power-law)

- **random_powerlaw_tree**(n, gamma=3, seed=None, tries=100)
- Donde:
  - **n=** Número de nodos
  - **gamma=** Exponente de la ley de potencias
  - **seed=** Semilla
  - **tries=** Número de intentos para ajustar la secuencia del árbol.