

## Taller 06

Universidad Externado de Colombia

Departamento de Matemáticas

Estadística 2

Juan Sosa, Ph. D.

June 22, 2018

### Estimadores de Máxima Verosimilitud

1. De Thijseen (2016), leer y sintetizar la Sección 6.5 (*An useful asymptotic result*, p. 92).
2. (Hogg et al. 2015, 6.4-5 (a)) Let  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}$ ,  $0 < x < \infty$ ,  $0 < \theta < \infty$ . Let  $X_1, \dots, X_n$  be a random sample of size  $n$  from this distribution.
  - a. Plot the density function for three different values of  $\theta$ .
  - b. Provide a general expression for the maximum likelihood estimator of  $\theta$  and the margin of error of  $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$  when  $n$  is “large”.

### Distribución Exponencial

(Hogg et al. 2015, example 6.4-1) Let  $X_1, \dots, X_n$  be a random sample from the Exponential distribution with probability density function

$$f(x; \theta) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty, \quad \lambda > 0.$$

Provide a general expression for the margin of error of  $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$  when  $n$  is “large”.

## Distribución Poisson

(Rice 2007, Sec. 8.5, example A) Let  $X_1, \dots, X_n$  be a random sample from the Poisson distribution with probability mass function

$$f(x; \lambda) = \mathbb{P}r[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \lambda > 0.$$

Provide a general expression for the margin of error of  $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$  when  $n$  is “large”.

## Distribución Geométrica

(Rice 2007, Chap. 8, problem 7) Let  $X_1, \dots, X_n$  be a random sample from the Geometrix distribution with probability mass function

$$f(x; \theta) = \mathbb{P}r[X = x] = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x \in \{1, 2, \dots\}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Provide a general expression for the margin of error of  $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$  when  $n$  is “large”.

## Tiempos de espera

El conjunto de datos en `tiempos.txt` contiene los tiempos de espera (en minutos) de una muestra aleatoria de clientes de un banco en un día determinado. Este conjunto de datos se recolectó debido a una queja reiterada de los clientes, quienes alegaban que los tiempos de espera eran demasiado largos. De acuerdo con los registros del departamento de servicios del banco, el tiempo de espera de los clientes debería ser de aproximadamente un (1) minuto. Por tanto, la gerencia planea hacer una intervención si el estudio revela que existen *diferencias significativas* respecto a lo que asegura el departamento de servicios.

- a. ¿Cuál es la variable objeto de estudio? ¿Cuáles son las unidades de medición? ¿Esta variable es discreta o continua? ¿Cuál es la población objetivo?
- b. Calcular las medidas de localización (mínimo, máximo, cuartiles, promedio) de los tiempo de espera.

- c. Calcular las medidas de dispersión (rango, desviación estándar, coeficiente de variación) de los tiempos de espera.
- d. Hacer un histograma y un diagrama de caja para los tiempos de espera.
- e. Comentar brevemente los resultados obtenidos en los tres numerales anteriores.
- f. Considere la distribución Exponencial con parámetro (*rate*)  $\lambda$ . En la literatura estadística se ha visto que esta distribución es adecuada para modelar tiempos de espera. Usando el método de máxima verosimilitud, encontrar una expresión general para el estimador de  $\lambda$  y reportar la estimación correspondiente. Visual y analíticamente (criterio de la segunda derivada), rectificar que efectivamente el valor reportado corresponde al máximo.
- g. Usando  $\lambda = \hat{\lambda}_{MLE}$ , graficar la distribución estimada de la población sobre el histograma de los tiempos de espera de la muestra. ¿Este modelo parece ser adecuado en este caso? ¿Por qué?
- h. Encontrar una expresión general para la información (observada) de Fisher. Reportar el valor específico para la estimación de  $\lambda$  y con este valor calcular el margen de error correspondiente. Usar una confiabilidad del 99%.
- i. Con base en los resultados del numeral anterior, ¿se debería recomendar a la gerencia implementar la intervención? ¿Por qué?
- j. Usando  $\lambda = \hat{\lambda}_{MLE}$ , calcular la probabilidad estimada de que el tiempo de espera sea de al menos un (1) minuto. De acuerdo con esta probabilidad, ¿los clientes estaban en lo cierto al quejarse?