Estimación puntual de Parámetros

Juan Sosa, PhD

I - 2018

Estimadores

Objetivo

1. Estamos interesados en un parámetro θ que toma valores en el espacio de parámetros Θ.
2. Dado un modelo estadístico $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$, ¿cuál es una **aproximación razonable** para el parámetro θ basada en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de la población?

Estimador (estadístico)

Un **estimador** del parámetro θ es una función de la muestra aleatoria $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ que toma valores en el espacio de parámetros Θ.

Estimador vs. Estimación

Los estimadores son variables aleatorias (sobre las cuales es posible calcular probabilidades), mientras que **las estimaciones son realizaciones** particulares de los estimadores.

Función de verosimilitud

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población X con función de densidad (o masa) $f_X(x;\theta)$. La **función de verosimilitud** de $X_1, \ldots, X_n$ es

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta)$$

La función de verosimilitud no es más que la **función de densidad (o masa) conjunta** de una muestra aleatoria, pero entendida como una **función del parámetro dadas las observaciones**.

Estimador de Máxima Verosimilitud (MLE)

El **estimador de máxima verosimilitud** de θ, denotado con $\hat{\theta}_{\text{MLE}}$, maximiza la función de verosimilitud, es decir,

$$\hat{\theta}_{\text{MLE}} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

Log-verosimilitud

La log-verosimilitud es el logaritmo (natural) de la función de verosimilitud:

$$\ell(\theta) = \log L(\theta)$$

Estadístco Suficiente (definición informal)

Si $\log L(\theta)$ depende de $x_1, \ldots, x_n$ unicamente a través de $t = T(x_1, \ldots, x_n)$, se dice que el estadístico $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ es un **estadístico suficiente** para θ.

Si queremos decir algo sobre un el parámetro θ y la estadística T es suficiente para θ, entonces reportar la realización de T da tanta información acerca de θ como la realización de la muestra completa.

Estimador Insesgado

$\hat{\theta}$ es un **estimador insesgado** de θ si $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$.

Observación

Existen más cracterísticas de los estimadores:

- Consistencia.
- Eficiencia.
- Completez.

Estimadores de Máxima Verosimilitud (cont.)

Información Observada de Fisher

La información observada de Fisher se define como

$$\hat{I} = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,\ell(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}_{\textsf{MLE}}}$$

Teorema (distribución asintótica del MLE)

Sea $X_1,\ldots,X_n$ una muestra aleatoria de una población X cuya distribución depende de un parámetro desconocido θ. Si el tamaño de la muestra es "grande", entonces bajo algunas *condiciones de regularidad* se tiene que

$$\hat{\theta}_{\textsf{MLE}} \overset{\textsf{A}}{\sim} \textsf{N}\left(\theta, \hat{I}^{-1}\right)$$

Intervalo de confianza

Un **intervalo de confianza para $\hat{\theta}_{\textsf{MLE}}$ usando una confiabilidad del $100(1-\alpha)\%$** es

$$\hat{\theta}_{\textsf{MLE}} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{I}^{-1}}$$

donde $\hat{\theta}_{\textsf{MLE}}$ es el MLE de θ, $\hat{I}$ es la información observada de Fisher, y $z_{1-\alpha/2}$ es el percentíl $100(1-\alpha/2)$ de la distribución Normal estándar.