1-Cinemática

1.1 Cinemática: vector de posición, vector desplazamiento, velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración instantánea, ecuación de la trayectoria.

$$\vec{r}(0) = x(0)\,\vec{i} + y(0)\,\vec{j} + z(0)\,\vec{k}$$

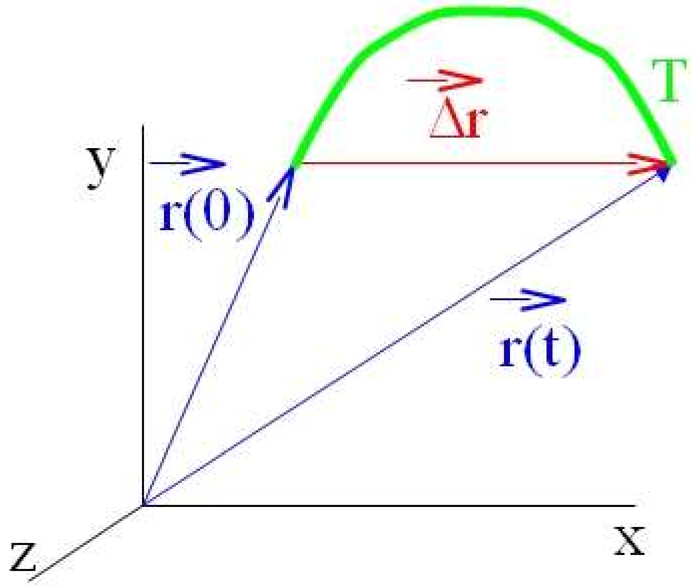
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{\Delta} r = \vec{r}(t) - \vec{r}(0) \rightarrow \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t d\,\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

$$\vec{\Delta} v = \vec{v}(t) - \vec{v}(0) \rightarrow \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t d\,\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)dt$$



Si el móvil se desplaza en un plano la ecuación de la trayectoria($y = f(x)$) se obtiene a partir del vector de posición $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$

Ejemplo 1: Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano XY varían con el tiempo de acuerdo con las ecuaciones $x = -\mathbf{5sin}\, \omega t \; m$ ***e*** $y = \mathbf{4 - 5cos}\, \omega t \; m$ ***, determinar: (a) las expresiones de los vectores de posición, velocidad y aceleración en cualquier instante, (b) la ecuación de la velocidad y de la aceleración para t = 0, (c) la ecuación de la trayectoria del objeto.***

(a) $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} \rightarrow \vec{r}(t) = -5\sin\omega\, t\,\vec{i} + (4 - 5\cos\omega\, t)\,\vec{j} \;\; m$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \rightarrow \vec{v}(t) = -5\omega\cos\omega\, t\,\vec{i} + 5\omega\sin\omega\, t\,\vec{j} \;\; \frac{m}{s}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t) = 5\omega^2\sin\omega\, t\,\vec{i} + 5\omega^2\cos\omega\, t\,\vec{j} \;\; \frac{m}{s^2}$$

(b) $\vec{v}(0) = -5\omega\;\vec{i}\;\dfrac{m}{s}, \;\; \vec{a}(0) = 5\omega^2\,\vec{j}\;\dfrac{m}{s^2}$

(c) de la expresión de $\vec{r}(t)$ se obtiene: $\sin\omega t = -\dfrac{x}{5}$, $\cos\omega t = -\dfrac{y-4}{5}$ como

$\sin^2\omega\, t + \cos^2\omega\, t = 1$ la ecuación de la trayectoria será $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1$,que es la ecuación de una circunferencia de 5 m de radio centrada en el punto (0,4) m.

Ejemplo 2: Una partícula que se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas tiene una aceleración $\vec{a} = \mathbf{3}\,\vec{j}\,\dfrac{m}{s^{\mathbf{2}}}$ ***y una velocidad inicial*** $\vec{v}_{\mathbf{0}} = \mathbf{5}\,\vec{i}\,\dfrac{m}{s}$***. Encontrar (a) los vectores velocidad y aceleración en cualquier instante, (b) la velocidad y posición de la partícula a los 2 s.***

(a) $\int_0^t d\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t)dt \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}\,t = 5\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}\,\dfrac{m}{s}$

(b) $\vec{v}(2) = 5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\,\dfrac{m}{s},\;,\; v(2) = \sqrt{5^2 + 6^2} = 7.81\,\dfrac{m}{s}$

$$\int_0^t d\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \left(5\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}\right)dt = 5t\,\vec{i} + \frac{3t^2}{2}\,\vec{j}\;\;m$$

$$\vec{r}(2) = 10\,\vec{i} + 6\,\vec{j}\;\;m$$

1.2 Cinemática: composición de movimientos, MRU's perpendiculares, MRU y MRUA perpendiculares, tiro parabólico.

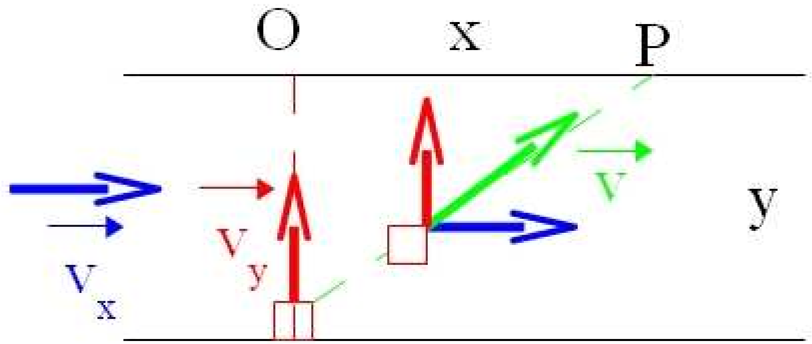
Cuando dos movimientos actúan al mismo tiempo sobre un cuerpo, se pueden analizar de forma independiente los dos movimientos.

<u>MRU's perpendiculares</u>:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = v_x \cdot t\, \vec{i} + v_y \cdot t\, \vec{j}$$

$$x = v_x \cdot t\ ,\ ,\ y = v_y \cdot t \rightarrow y = \frac{v_y}{v_x} x$$



<u>MRUA y MRU perpendiculares:</u>

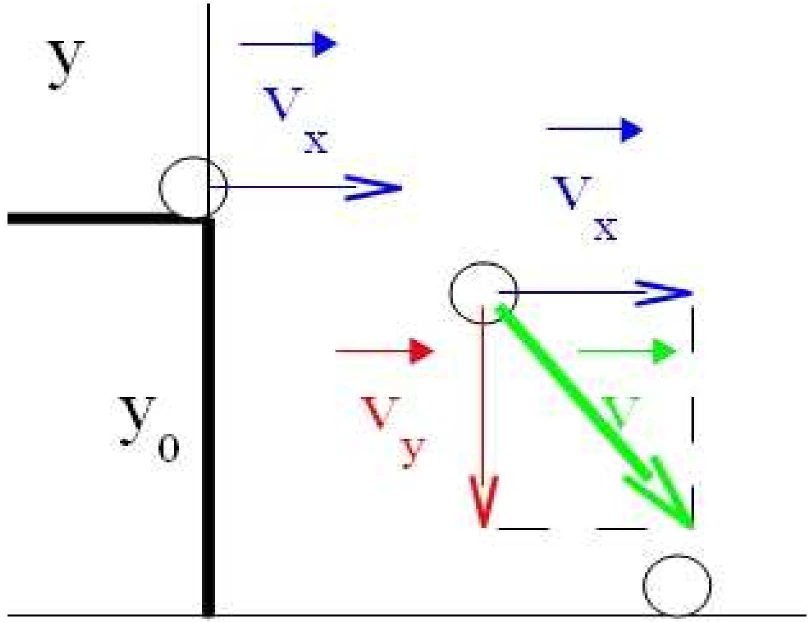
MRU: $x = v_x \cdot t$

MRUA: $\vec{v}_y = -gt\,\vec{j}$

$$\int_0^y dy = \int_0^t -gt\,dt \rightarrow y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

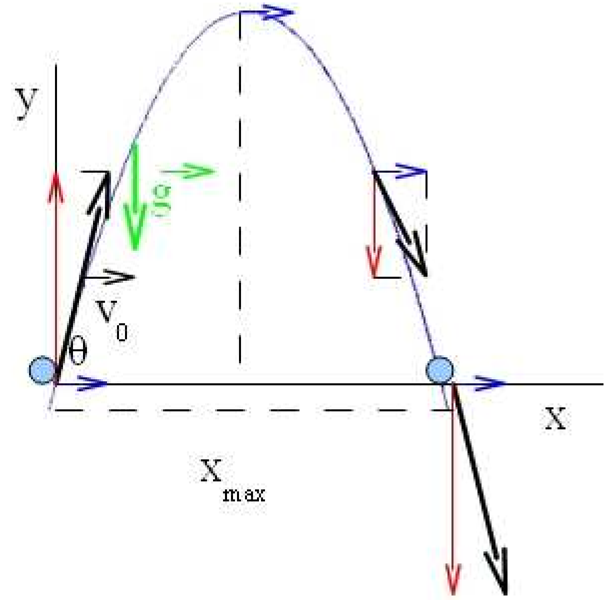
$$\vec{r}(t) = v_x t\,\vec{i} + \left(y_0 - \frac{gt^2}{2}\right)\vec{j}$$

$$t = \frac{x}{v_x} \rightarrow y = y_0 - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2 \rightarrow y = y_0 - \frac{g}{2v_x^2}x^2$$



Tiro parabólico

Se trata de un MRU y un MRUA perpendiculares y simultáneos.



MRU: $x = v_0 t\cos\theta$

MRUA: $y = v_0 t\sin\theta - \dfrac{gt^2}{2}$

La ecuación de la trayectoria será:

$$y = v_0 \frac{x}{v_0\cos\theta}\sin\theta - \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

$y = \tan\theta\, x - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$ que coincide con la de una parábola.

En el punto más alto de la trayectoria $v_y = 0 \rightarrow 0 = v_0\sin\theta - gt \rightarrow t = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

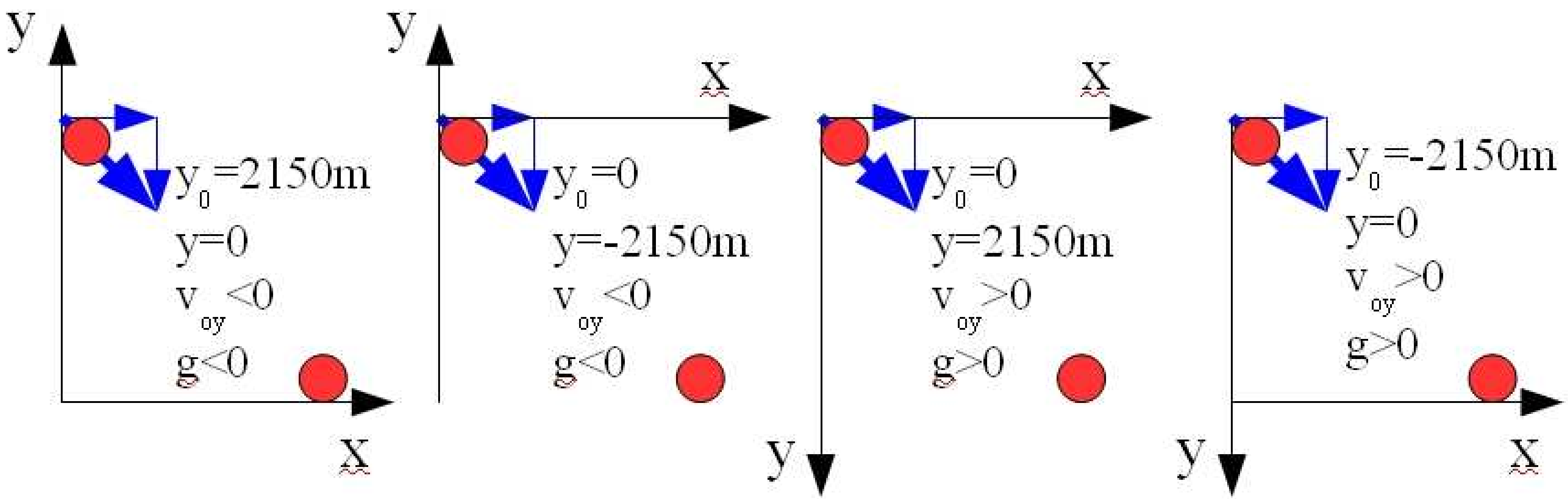
El alcance del proyectil será $x_{\max} = \dfrac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$

Ejemplo 3: Un avión lleva una velocidad de 280 m/s y vuela con un ángulo de 33.4º por debajo de la horizontal. Cuando la altura del avión es de 2.15 km deja caer una bomba. Calcula la distancia horizontal entre el impacto en el suelo y la vertical del avión en el momento en que se desprende la bomba.

Se calcula el tiempo que tarda en caer la bomba y luego el espacio horizontal que ha avanzado en ese tiempo.

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \; 2150 = 280\sin(33.4)t + \frac{1}{2}\cdot 9.8t^2 \rightarrow t = 10,\ 47s$$

$$x = v_{0x}t \rightarrow x = 280\cos(33.4)\cdot 10.47 = 2447m$$


y
x
y0=2150m
y=0
voy<0
g<0
y
x
y0=0
y=-2150m
voy<0
g<0
x
y
y0=0
y=2150m
voy>0
g>0
y0=-2150m
y=0
voy>0
g>0
y
x

