Estadística II (Talleres)

Juan Carlos Trejos Iglesias

2025-1

Índice

1. Taller distribuciones muestrales

1.1. Ejercicio 1.

Dada una población de media $\mu = 100$ y varianza $\sigma^2 = 81$ y obteniendo una muestra aleatoria de $n = 25$ responda:

a. ¿Cuáles son la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales en el muestreo?

Aplicando las definiciones teóricas de la distribución de las medias muestrales:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu, \quad \sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{81}{25} = 3{,}24, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Por lo tanto:

- Media de la distribución de las medias muestrales: $\mu_{\bar{x}} = \mu$
- Varianza de la distribución de las medias muestrales: 3,24
- Desviación estándar (error estándar): 1,8

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea mayor a 102?

Suponiendo que la media poblacional es $\mu = 100$, la probabilidad buscada es:

$$P(\bar{x} > 102)$$

Se estandariza usando la fórmula del puntaje Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{102 - 100}{1{,}8} \approx 1{,}11$$

Consultando la tabla de la normal estándar:

$$P(Z > 1{,}11) = 1 - P(Z < 1{,}11) = 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335$$

Respuesta: La probabilidad de que la media muestral sea mayor a 102 es aproximadamente 13,35 %.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea mayor a 98 y menor a 101

Estandarizamos con $\bar{x} = 98$:

$$Z_1 = \frac{98 - 100}{1{,}8} = -1{,}11$$

Consultando la tabla de distribución normal:

$$P(\bar{x} < 98) = P(Z < -1{,}11) = 0{,}1335$$

Estandarizamos con $\bar{x} = 101$:

$$Z_2 = \frac{101 - 100}{1{,}8} = 0{,}55$$

Consultando la tabla de distribución normal:

$$P(\bar{x} < 101) = P(Z < 0{,}55) = 0{,}7088$$

Hayamos la diferencia de las probabilidades para dar la respuesta

$$P(\bar{x} < 101) - P(\bar{x} < 98) = 0,55 - 0,1335 = 0,4165$$

Respuesta: La probabilidad de que la media muestral sea mayor a 98 y menor a 101 es de 41,65 %

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté entre 99 y 101?

$$Z_1 = \frac{99 - 100}{1{,}8} = -0,55$$

$$P(Z < -0{,}55) = 1 - P(Z < 0{,}55) = 1 - 0{,}7088 = 0{,}2912$$

$$Z_2 = \frac{101 - 100}{1{,}8} = 0{,}55$$

$$P(Z < 0{,}55) = 0{,}7088$$

$$P(Z < 0{,}55) - P(Z < -0,55) = 0{,}7088 - 0{,}2912 = 0{,}4176$$

Respuesta:

1.2. 1. Hallar el factor de confiabilidad, $Z_{\alpha/2}$ en cada uno de los casos siguientes:

a. Nivel de confianza del 96

b. Nivel de confianza del 88

c. Nivel de confianza del 80

d. $\alpha = 0{,}07 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}035$, entonces $Z_{\alpha/2} = 1{,}81$

e. $\alpha/2 = 0{,}07 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}48$

1.3. 2. Calcular el margen de error para estimar la media poblacional μ en los siguientes casos:

a. Nivel de confianza del 98

b. Nivel de confianza del 99

1.4. 3. Calcular el límite inferior y superior de confianza

a. $\bar{X} = 50$, $n = 64$, $\sigma = 40$, $\alpha = 0{,}05$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b. $\bar{X} = 510$, $n = 485$, $\sigma = 50$, $\alpha = 0{,}10$, $Z_{\alpha/2} = 1{,}645$

c. $\bar{X} = 585$, $n = 225$, $\sigma^2 = 4000 \Rightarrow \sigma = 63{,}25$, $\alpha = 0{,}01$, $Z_{\alpha/2} = 2{,}58$

1.5. 4. Gastos en centro comercial (en miles de pesos)

a. El mejor estimador de la media poblacional es la media muestral:

b. Intervalo de confianza del 95

c. La media poblacional podr'ia ser 50, ya que est'a dentro del intervalo. No podr'ia ser 60, pues est'a fuera del intervalo de confianza.

1.6. 5. Tiempos en minutos para llegar al trabajo

a. Media muestral: $\bar{X} = 35{,}07$

b. El mejor estimador de la media poblacional es la media muestral, que indica el valor promedio que se espera en la población.

c. Intervalo de confianza del 90

d. Se utiliza la distribuci'on t porque la desviaci'on est'andar poblacional es desconocida y el tama no muestral es peque no ($n < 30$).

2. Taller de intérvalos de confianza

2.1. 1. Factor de confiabilidad $Z_{\alpha/2}$

2.1.1. 1.a) ¿Cuál es el valor de $Z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 96 %?

Respuesta: Para un nivel de confianza del 96

2.1.2. 1.b) ¿Cuál es el valor de $Z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 88 %?

Respuesta: Para un nivel de confianza del 88

2.1.3. 1.c) ¿Cuál es el valor de $Z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 80 %?

Respuesta: Para un nivel de confianza del 80

2.1.4. 1.d) Si $\alpha = 0{,}07$, ¿cuál es $Z_{\alpha/2}$?

Respuesta: Con $\alpha = 0{,}07$, $\alpha/2 = 0{,}035$ y de la tabla normal $Z_{0{,}035} \approx 1{,}81$.

2.1.5. 1.e) Si $\alpha/2 = 0{,}07$, ¿cuál es $Z_{\alpha/2}$?

Respuesta: Directamente $\alpha/2 = 0{,}07$ corresponde a $Z_{0{,}07} \approx 1{,}48$.

2.2. 2. Cálculo del margen de error E para estimar la media poblacional μ

2.2.1. 2.a) Con nivel de confianza del 98 %, muestra de $n = 64$ y desviación poblacional $\sigma = 12$, ¿cuál es el margen de error?

Respuesta: Para 98 % se usa $Z_{0{,}01} = 2{,}33$, luego

2.2.2. 2.b) Con nivel de confianza del 99 %, muestra de $n = 120$ y desviación poblacional $\sigma = 10$, ¿cuál es el margen de error?

Respuesta: Para 99

2.3. 3. Límites inferior y superior de confianza

2.3.1. 3.a) Con $\bar{X} = 50$, $n = 64$, $\sigma = 40$ y $\alpha = 0{,}05$, ¿cuáles son los límites del intervalo de confianza al 95 %?

Respuesta: $Z_{0,025} = 1{,}96$,

2.3.2. 3.b) Con $\bar{X} = 510$, $n = 485$, $\sigma = 50$ y $\alpha = 0{,}10$, ¿cuáles son los límites del intervalo de confianza al 90 %?

Respuesta: $Z_{0,05} = 1{,}645$,

2.3.3. 3.c) Con $\bar{X} = 585$, $n = 225$, varianza $\sigma^2 = 4000$ ($\sigma \approx 63{,}25$) y $\alpha = 0{,}01$, ¿cuáles son los límites del intervalo de confianza al 99 %?

Respuesta: $Z_{0,005} = 2{,}58$,

2.4. 4. Estimación de la media de gastos en centro comercial

Se tiene una muestra de 20 clientes con gastos (en miles de pesos):

2.4.1. 4.a) ¿Cuál es el mejor estimador de la media poblacional?

Respuesta: La media muestral $\bar{X} = 49{,}315$ miles de pesos.

2.4.2. 4.b) ¿Cuál es el intervalo de confianza del 95 % para la media?

Respuesta: Con $n = 20$, $s = 9{,}018$, y $t_{0,025,19} = 2{,}093$:

2.4.3. 4.c) ¿Es razonable afirmar que la media poblacional es 50? ¿Y 60?

Respuesta: 50 sí es razonable porque está dentro del intervalo; 60 no lo es pues queda fuera.

2.5. 5. Estimación del tiempo de llegada al trabajo

Se tiene una muestra de 15 empleados con tiempos (en minutos):

2.5.1. 5.a) ¿Cuál es la media muestral?

Respuesta: $\bar{X} = 35{,}07$ minutos.

2.5.2. 5.b) ¿Cuál es el mejor estimador de la media poblacional y qué indica?

Respuesta: La media muestral, que estima el valor promedio de la población.

2.5.3. 5.c) ¿Cuál es el intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional?

Respuesta: Con $n = 15$, $s = 6{,}017$, $t_{0{,}05{,}14} = 1{,}761$:

2.5.4. 5.d) ¿Por qué se utiliza la distribución t en este caso?

Respuesta: Porque la desviación estándar poblacional es desconocida y el tamaño muestral es menor de 30, lo cual requiere usar la t de Student.

3. Taller intérvalos de confianza 2

3.1. Pregunta 1: Nivel de confianza

Enunciado: To construct a 95 % confidence interval estimate for the difference between two population proportions, the confidence level would be

A) 1.96

B) 0.95

C) 0.475

D) 0.05

Solución paso a paso:

1. Identificamos que el nivel de confianza se expresa como proporción del área bajo la curva, no como valor crítico.
2. El nivel deseado es el 95 %, equivalente a 0.95.
3. Los valores críticos (por ejemplo, 1.96) se usan para calcular los límites del intervalo, pero no representan directamente el nivel de confianza.

Respuesta: B (0.95)

3.2. Pregunta 2: Valor crítico para 97.8 %

Enunciado: The z-value needed to construct 97.8 % confidence interval estimate for the difference between two population proportions is

A) 2.29

B) 2.02

C) 1.96

D) 1.65

Solución paso a paso:

1. Calculamos el nivel de significancia: $\alpha = 1 - 0{,}978 = 0{,}022$.
2. Como es bilateral, dividimos: $\alpha/2 = 0{,}011$ en cada cola.
3. Buscamos en la tabla Z el valor que deja un área de 0.011 a la derecha: $z \approx 2{,}29$.

Respuesta: A (2.29)

3.3. Pregunta 3: Intervalo entre medias (poblaciones normales)

Enunciado: Independent samples of math scores from students in the U.S. and Europe were collected from normal populations. A sample of 50 students from the U.S. had an average score of 570 while a sample of 50 European students had an average score of 540. Assume the population standard deviations for the US and Europe are 102 and 115, respectively. What is the 95 % confidence interval for the difference between population means?

A) $30 \pm 35{,}65$

B) $30 \pm 21{,}73$

C) $30 \pm 42{,}61$

D) $30 \pm 64{,}23$

Solución paso a paso:

1. Calculamos la diferencia de medias: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 570 - 540 = 30$.
2. Error estándar:

$$SE = \sqrt{\frac{102^2}{50} + \frac{115^2}{50}} = \sqrt{\frac{10404}{50} + \frac{13225}{50}} = \sqrt{208{,}08 + 264{,}5} \approx 21{,}765.$$

3. Valor crítico Z para 95 %: 1.96.
4. Margen de error: $ME = 1{,}96 \times 21{,}765 \approx 42{,}61$.
5. Intervalo: $30 \pm 42{,}61$.

Respuesta: C ($30 \pm 42{,}61$)

3.4. Pregunta 4: Valor crítico para 92.5 %

Enunciado: The z value needed to construct 92.5 % confidence interval estimate for the difference between two population proportions is

A) 2.58

B) 2.33

C) 1.96

D) 1.78

Solución paso a paso:

1. Calculamos $\alpha = 1 - 0{,}925 = 0{,}075$.
2. Dividimos bilateralmente: $\alpha/2 = 0{,}0375$.
3. Buscamos valor Z que deja 0.0375 en cola derecha: $z \approx 1{,}78$.

Respuesta: D (1.78)

3.5. Pregunta 5: Distribución para proporciones

Enunciado: Which distribution is used in developing a confidence interval for the difference between the proportions of two populations using information from two large-samples?

A) The normal distribution

B) The Student's t-distribution

C) The exponential distribution

D) All of the above distributions can be used.

Solución paso a paso:

1. Para muestras grandes (n ¿30), el Teorema Central del Límite garantiza aproximación normal.
2. Se usa la distribución normal estándar para intervalos entre proporciones.

Respuesta: A (The normal distribution)

3.6. Pregunta 6: Intervalo con varianzas desiguales

Enunciado: In constructing a 95 % confidence interval estimate for the difference between the means of two normally distributed populations, where the unknown population variances are assumed not to be equal, summary statistics computed from two independent samples are as follows:

$$n_1 = 50, \quad \bar{x}_1 = 175, \quad s_1 = 18{,}5, \quad n_2 = 42, \quad \bar{x}_2 = 158, \quad s_2 = 32{,}4$$

¿El límite superior del intervalo de confianza es:

A) 19.123

B) 28.212

C) 24.911

D) 5.788

Solución paso a paso:

1. Diferencia de medias: $\Delta = 175 - 158 = 17$.
2. Error estándar:
$$SE = \sqrt{\frac{18{,}5^2}{50} + \frac{32{,}4^2}{42}} = \sqrt{6{,}845 + 25{,}0} \approx 5{,}64.$$
3. Grados de libertad aproximados (Welch):
$$df \approx \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \approx 70.$$
4. Valor crítico t para df70 y 95 %: $t_{0{,}025{,}70} \approx 2{,}0$.
5. Margen de error: $ME = 2{,}0 \times 5{,}64 \approx 11{,}28$.
6. Límite superior: $17 + 11{,}28 = 28{,}28 \approx 28{,}212$.

Respuesta: B (28.212)