Estadística II (Parciales)

Juan Carlos Trejos Iglesias

2025-1

Índice

1. Parcial 1

1.1. Ejercicio 1

Enunciado:

Al examinar las facturas emitidas por una empresa, un auditor encuentra que los montos en dólares de las facturas tienen una media de \$1,732 y una desviación estándar de \$298. ¿Cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 45 facturas, la factura promedio sea mayor a \$1,800?

Solución:

- Media poblacional: $\mu = 1732$
- Desviación estándar poblacional: $\sigma = 298$
- Tamaño de la muestra: $n = 45$
- Valor muestral a evaluar: $\bar{x} = 1800$

Paso 1: Calcular la desviación estándar de la media muestral (error estándar):

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{298}{\sqrt{45}} \approx \frac{298}{6{,}708} \approx 44{,}41$$

Paso 2: Calcular el valor del estadístico Z:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1800 - 1732}{44{,}41} \approx \frac{68}{44{,}41} \approx 1{,}53$$

Paso 3: Buscar la probabilidad asociada al valor Z:

Consultando la tabla Z:

$$P(Z > 1{,}53) \approx 0{,}0630$$

Respuesta: La probabilidad de que el promedio de una muestra de 45 facturas sea mayor a \$1,800 es aproximadamente **6.30 %**.

1.2. Ejercicio 2

Enunciado:

Los resultados de una encuesta reciente indicaron que el 17.7 % de todos los adultos colombianos habían tomado un vuelo en avión comercial durante el último año. Si tomamos una muestra aleatoria de 400 adultos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral sea mayor que 0.37?

Solución:

- Proporción poblacional: $p = 0{,}177$
- Proporción muestral a evaluar: $\hat{p} = 0{,}37$
- Tamaño de la muestra: $n = 400$

Paso 1: Verificar condiciones para usar distribución normal:

$$np = 400 \cdot 0{,}177 = 70{,}8 > 5 \quad \text{y} \quad n(1-p) = 400 \cdot (1 - 0{,}177) = 329{,}2 > 5$$

Se puede usar la aproximación normal.

Paso 2: Calcular el error estándar:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}177 \cdot 0{,}823}{400}} \approx \sqrt{0{,}0003644} \approx 0{,}01909$$

Paso 3: Calcular el valor Z:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0{,}37 - 0{,}177}{0{,}01909} \approx \frac{0{,}193}{0{,}01909} \approx 10{,}11$$

Paso 4: Obtener la probabilidad:

$$P(\hat{p} > 0{,}37) = P(Z > 10{,}11) \approx 0$$

Respuesta: La probabilidad de que la proporción muestral sea mayor a 0.37 es aproximadamente **0** (cero).

1.3. Ejercicio 3

Enunciado:

El tiempo de espera de un pedido en una hamburguesería en Manizales se distribuye normalmente con una media de 4.1 minutos y una desviación estándar de 1.3 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de espera promedio para una muestra aleatoria de diez clientes esté entre 4.0 y 4.2 minutos?

Solución:

- Media poblacional: $\mu = 4{,}1$
- Desviación estándar: $\sigma = 1{,}3$
- Tamaño de la muestra: $n = 10$
- Intervalo a evaluar: $[4{,}0,\ 4{,}2]$

Paso 1: Calcular el error estándar de la media muestral:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}3}{\sqrt{10}} \approx \frac{1{,}3}{3{,}1623} \approx 0{,}4112$$

Paso 2: Calcular los valores Z correspondientes al intervalo:

$$Z_1 = \frac{4{,}0 - 4{,}1}{0{,}4112} \approx \frac{-0{,}1}{0{,}4112} \approx -0{,}2431$$

$$Z_2 = \frac{4{,}2 - 4{,}1}{0{,}4112} \approx \frac{0{,}1}{0{,}4112} \approx 0{,}2431$$

Paso 3: Calcular la probabilidad entre esos valores Z:

$$P(4{,}0 < \bar{x} < 4{,}2) = P(-0{,}2431 < Z < 0{,}2431)$$

$$P(Z < 0{,}2431) \approx 0{,}5962, \quad P(Z < -0{,}2431) \approx 1 - 0{,}5962 = 0{,}4038$$
$$P(-0{,}2431 < Z < 0{,}2431) = 0{,}5962 - 0{,}4038 = 0{,}1924$$

Respuesta: La probabilidad de que el promedio del tiempo de espera de una muestra de 10 clientes esté entre 4.0 y 4.2 minutos es aproximadamente **0.1924** o **19.24 %**.

1.4. Ejercicio 4

Enunciado:

Una varianza combinada s_p^2 se forma combinando información de dos muestras independientes. Si $S_1^2 = 39$, $S_2^2 = 25$ y $n_1 = n_2$, ¿cuál es la varianza combinada?

Solución:

- $S_1^2 = 39$
- $S_2^2 = 25$
- $n_1 = n_2 = n$ (el mismo tamaño)

Paso 1: Usar la fórmula de la varianza combinada:

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Paso 2: Como $n_1 = n_2 = n$, entonces:

$$s_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{2n - 2} = \frac{(n-1)(S_1^2 + S_2^2)}{2n - 2}$$

Paso 3: Simplificar:

$$s_p^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2} = \frac{39 + 25}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

Respuesta: La varianza combinada es **32**.

1.5. Ejercicio 5

Enunciado:

En una muestra aleatoria de 500 residentes de Manizales, 350 indicaron que eran propietarios de su vivienda. En otra muestra aleatoria de 700 residentes de Pereira, 455 eran propietarios de su vivienda. ¿Cuál es el intervalo de confianza del 99 % para la diferencia entre proporciones?

Solución:

- Muestra 1 (Manizales): $n_1 = 500$, $x_1 = 350 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{350}{500} = 0{,}70$
- Muestra 2 (Pereira): $n_2 = 700$, $x_2 = 455 \Rightarrow \hat{p}_2 = \frac{455}{700} \approx 0{,}65$
- Nivel de confianza: 99 % $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}576$

Paso 1: Calcular el error estándar (EE):

$$EE = \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0{,}70(0{,}30)}{500} + \frac{0{,}65(0{,}35)}{700}}$$

$$EE = \sqrt{\frac{0{,}21}{500} + \frac{0{,}2275}{700}} = \sqrt{0{,}00042 + 0{,}000325} = \sqrt{0{,}000745} \approx 0{,}02729$$

Paso 2: Calcular el intervalo de confianza:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \cdot EE = 0{,}70 - 0{,}65 \pm 2{,}576 \cdot 0{,}02729 = 0{,}05 \pm 0{,}0703$$

$$\text{Límite inferior: } 0{,}05 - 0{,}0703 = -0{,}0203$$

$$\text{Límite superior: } 0{,}05 + 0{,}0703 = 0{,}1203$$

Respuesta: El intervalo de confianza del 99 % para la diferencia entre proporciones es aproximadamente **[-0.0203, 0.1203]**.

Enunciado de ejercicios 6 y 7:

Una empresa distribuidora de leche en Manizales, está interesada en estimar la cantidad promedio de leche (litros) que consumen los manizaleños por semana. Suponga que x es el número de litros consumidos por semana. En una muestra de 10 semanas se encontró que:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 4332 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 2026408$$

1.6. Ejercicio 6

Un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional de las ventas es:

Primero, calculamos la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{4332}{10} = 433{,}2$$

Luego, calculamos la varianza muestral:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{2026408 - \frac{4332^2}{10}}{9} = \frac{2026408 - 1875190{,}4}{9} = \frac{151217{,}6}{9} \approx 16802$$

La desviación estándar muestral es:

$$s = \sqrt{16802} \approx 129{,}6$$

El error estándar de la media es:

$$SE = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{129{,}6}{\sqrt{10}} \approx 41{,}02$$

Usando el valor crítico de la distribución t de Student para un nivel de significancia $\alpha = 0{,}10$ (es decir, un intervalo de confianza del 90 %) con $n - 1 = 9$ grados de libertad, que es:

$$t_{0{,}05,\,9} \approx 1{,}833$$

Este valor se obtiene consultando tablas de la distribución t o usando una calculadora estadística.

Usando el valor $t_{0,05,9} \approx 1{,}833$, el intervalo de confianza del 90 % es:

$$IC = \bar{X} \pm t \cdot SE = 433{,}2 \pm 1{,}833 \cdot 41{,}02 = 433{,}2 \pm 75{,}18$$

$$\Rightarrow IC \approx (358{,}02,\ 508{,}38)$$

Respuesta: El intervalo de confianza del 90 % para la varianza poblacional de las ventas de leche son [**358.02, 508.38**].

1.7. Ejercicio 7

Un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional de las ventas es:

Ya tenemos:

$$s^2 = 16802, \quad n = 10, \quad gl = n - 1 = 9$$

Para construir el intervalo de confianza para la varianza, se usan los valores críticos de la distribución chi-cuadrado con $gl = 9$ grados de libertad.

Estos valores críticos se obtienen consultando tablas de la distribución χ^2 o con calculadoras estadísticas, para los niveles de significancia $\alpha/2 = 0{,}025$ y $1 - \alpha/2 = 0{,}975$:

$$\chi^2_{0{,}025{,}9} \approx 19{,}02, \quad \chi^2_{0{,}975{,}9} \approx 2{,}70$$

Luego, el intervalo de confianza para la varianza poblacional σ^2 es:

$$IC_{1-\alpha} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}}, \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}} \right)$$

Sustituyendo valores:

$$IC = \left(\frac{9 \cdot 16802}{19{,}02}, \quad \frac{9 \cdot 16802}{2{,}70} \right) = \left(\frac{151218}{19{,}02}, \quad \frac{151218}{2{,}70} \right)$$

$$\Rightarrow IC \approx (7948{,}3, \quad 55933{,}3)$$

Respuesta: El intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional de las ventas de leche es [**7948.3, 55933.3**].