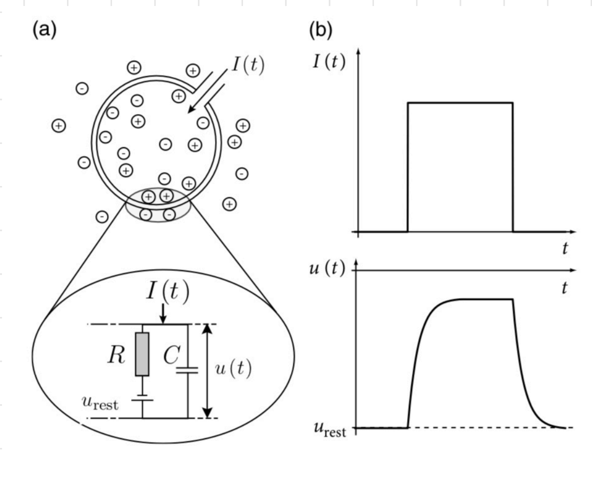
Modelos Integrate and Fire:

Podemos simplificar aún más nuestros modelos de actividad neuronal? Sí

- La forma del potencial de acción es prototipada, su forma no acarrea información
- Spikes son eventos donde lo importante es el tiempo de recepción de la neurona post-sináptica
- Por debajo del umbral la dinámica neuronal es aproximadamente Ohmica (Membrana pasiva)



$$I(t) = I_R + I_C$$

$$I(t) = (V_m - V_{rest})/R + C\, dV_m/dt \qquad (1)$$

Haciendo $\tau_m = RC$ (constante de tiempo de membrana)

$$\tau_m \dot{V}_m = -(V_m - V_{rest}) + R I(t) \qquad (2)$$

→ Ecuación Dif. Lineal !!!

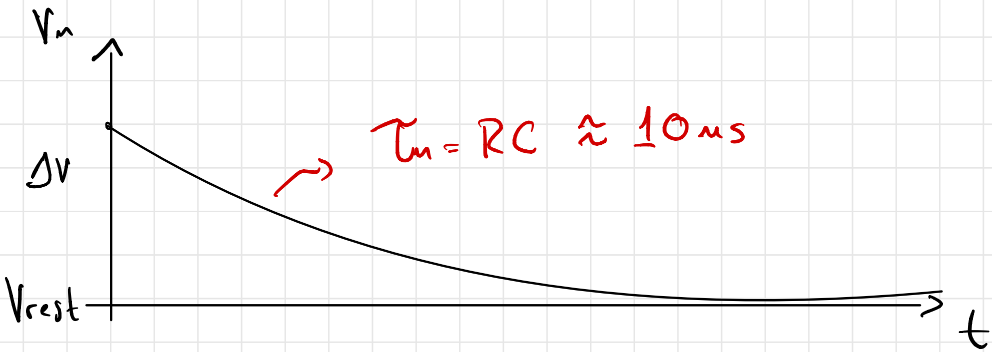
LEAKY INTEGRATOR

1 Dimensión, solución conocida

Si en $t = t_0$ $V_m(t_0) = V_{rest} + \Delta V$ y $I(t) = 0$

la solución es

$$V_m(t) = \Delta V \, e^{-(t-t_0)/\tau_m} + V_{rest} \qquad (3)$$



Entrada Pulso:

Supongamos un pequeño impulso de amplitud I_0 de duración $0 < t < \Delta$. Si $V_m(0) = V_{rest}$, entre $0 < t < \Delta$, la solución es

$$(4) \qquad V_m(t) = V_{rest} + R I_0 \left[1 - \exp\left(-t/\tau_m\right)\right]$$

(Ver figura arriba)

Si la corriente nunca para (DC) haciendo $t \to \infty$

$$V_m(t \to \infty) = V_{rest} + R I_0$$

¿Que sucede cuando $\Delta \ll \tau_m$?

Al cabo de Δ el pot. de membrana evolucionará

a (5) $V_m(\Delta) = V_{rest} + R I_0 \left[1 - e^{-\Delta/\tau_m}\right]$ (

Dado que $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \cdots$

Si $x = -\Delta/\tau_m \ll 1$ entonces $\exp(x) \approx 1 + x$

$$V_m(\Delta) = V_{rest} + R I_0 \frac{\Delta}{\tau_m} \; ; \quad (6)$$

Si hacemos Δ más y más pequeño pero aumentando I_0 de tal forma que $\int I(t)\, dt = q$

$I_0 = q/\Delta$; de (6)

$$V_m(\Delta) = V_{rest} + q R/\tau_m = V_{rest} + q/C$$

en el límite $\Delta \to 0$ la corriente libera una cantidad de carga q instantáneamente

$$I(t) = q\,\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} q/\Delta \quad \text{para } 0 < t < \Delta$$

$\delta(t)$: delta de dirac

↓

Abstracción matemática para indicar un cambio instantáneo

$\delta(x) = 0$ para $x = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

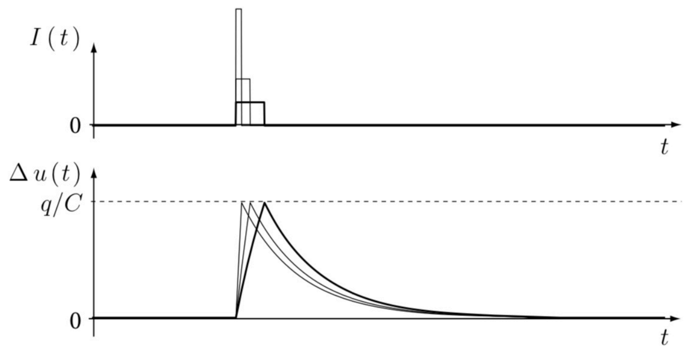


Fig. 1.7 Short pulses and total charged delivered on the passive membrane. The amplitude of the voltage response (bottom) of a leaky integrator driven by a short current pulse $I(t)$ (top) depends only on the total charge $q = \int I(t)\mathrm{d}t$, not on the height of the current pulse.

Por tanto la solución de la Ec. diferencial

$$\tau_m \dot{V}_m = -(V_m - V_{rest}) + R\,\underbrace{q}_{\text{cantidad de carga total insertada}}\,\delta(t)$$

instantáneamente en $t = 0$

es $V_m(t) = V_{rest}$ $\quad t \leq 0$ y

$$V_m(t) = V_{rest} + qR/\tau_m \, e^{-t/\tau_m} \qquad t>0$$

El modelo Leaky Integrator no es capaz de producir spikes!!! . Cómo incluir este fenómeno?

R/ Agregar un umbral artificial, si llamo t^f el tiempo de disparo de la neurona, entonces el mecanismo de disparo es

$$t^f: \quad V_m(t^f) = V_{th}$$

inmediatamente después se resetea a un nuevo valor. (reseteo)

$$\lim_{\delta\to0;\,\delta>0} V_m(t^f+\delta) = V_{reset} \qquad (7)$$

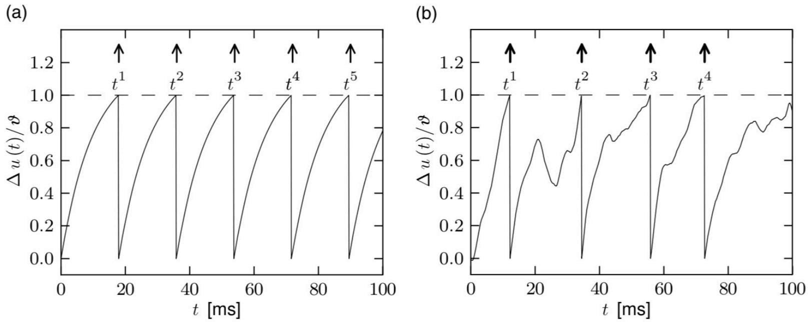


Fig. 1.9 Integrate-and-fire model. (a) Time course of the membrane potential of an integrate-and-fire neuron driven by constant input current $I_0 = 1.5$. The voltage $\Delta u(t) = u - u_{rest}$ is normalized by the value of the threshold ϑ. Units of input current are chosen so that $I_0 = 1$ corresponds to a trajectory that reaches the threshold for $t \to \infty$. After a spike, the potential is reset to $u_r = u_{rest}$. (b) Voltage response to a time-dependent input current.

Para $t > t^f$ la dinámica vuelve a ser descrita por la Eq. (2) hasta el siguiente spike.

El tren de spikes que emite la neurona i se puede escribir formalmente como

$$S_i(t) = \sum_f \delta(t - t_i^f)$$ ⇒ Spikes son eventos puntuales en el tiempo

$\boxed{\text{Lab. LIF}}$

Nonlinear IF:

Dependiendo de las necesidades (aproximar mejor la dinámica subumbral, facilidad análisis...) se puede modificar la Eq. (2) por

$$\tau_m \dot{V}_m = f(V_m) + RI \qquad (8)$$

junto con el mecanismo de reseteo (7)

También es posible agregar un tiempo refractario

$$t^f: \quad V_m(t^f) = V_{th}$$
$$V_m(t^f + \Delta_{abs}) = V_{reset}$$

LIF $\Rightarrow$ $f(V_m) = -(V_{rest} - V_m)$

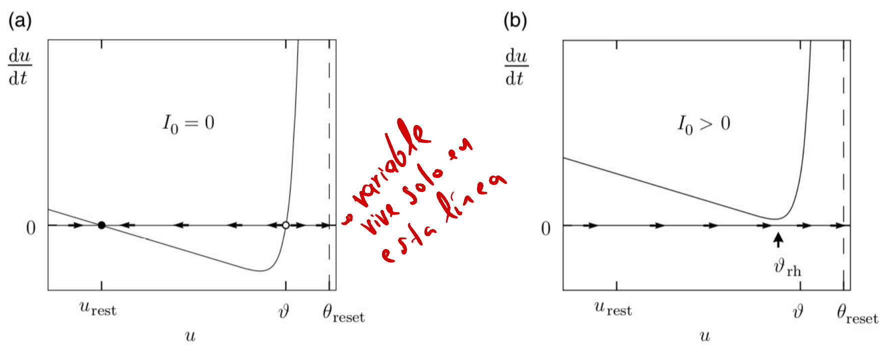
Exponential Integrate and Fire (EIF):

$$f(V_m) = -(V_{rest} - V_m) + \Delta_T \, e^{\frac{(V_m - V_{rh})}{\Delta_T}}$$

¿Cómo podemos analizar geométricamente EDOs en 1-dimensión? $\Rightarrow$ Desmos

En un sistema 1D $\dot{x} = f(x)$ el análisis geométrico se realiza graficando $f(x)$ vs x

5.1 Thresholds in a nonlinear integrate-and-fire model 121



$\rightarrow$ variable vive solo en esta línea

Puntos de eq: $f(x) = 0$, es decir el cruce de la curva $f(x)$ con el eje horizontal

Estabilidad: El signo de la pendiente de la

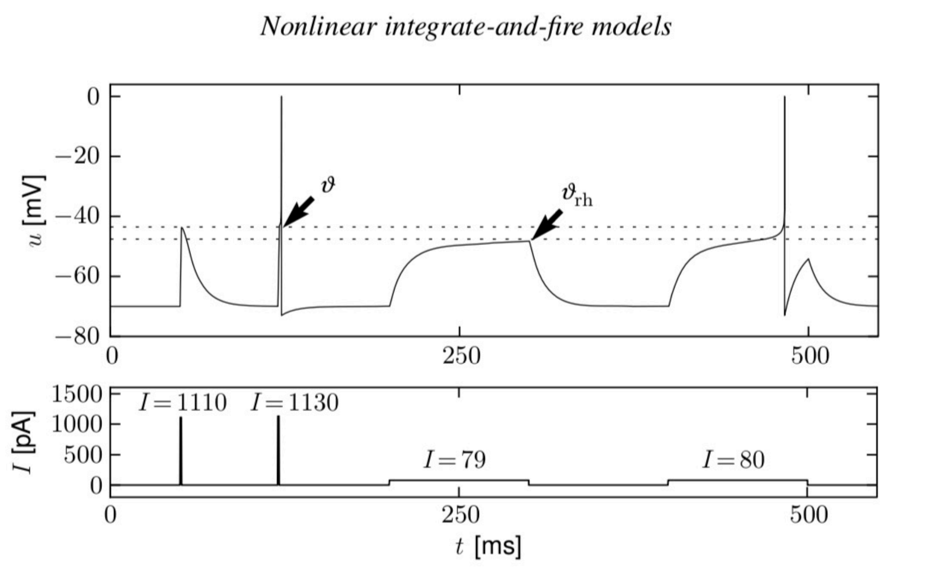
Curva $f'(x)$ en el equilibrio x^* determina la estabilidad

$f'(x) < 0 \rightarrow$ Estable

$f(x) > 0 \rightarrow$ Inestable

¿Cómo se ve para el LIF?

En el EIF el threshold "real" lo define V_{rh}. Cualquier condición inicial $V > V_{rh}$ rápidamente trata de crecer al infinito alcanzando V_{th} rápidamente



Por qué es interesante el EIF?

De la Eq. (8) despejamos $f(V_m)$

$$f(V_m(t)) = \frac{1}{C} I(t) - \dot{V}_m(t) \qquad C = \tau/R$$

Experimentalmente podemos hacer un protocolo de inyectar corrientes $I(t)$ y medir el voltaje $V_m(t)$. Del registro del voltaje se puede medir $\dot{V}_m(t)$. Una medida en t da un valor de $V_m(t)$ (x) que graficamos respecto a $\frac{1}{C} I(t) - \dot{V}_m(t)$ (y) al repetir el experimento rápidamente obtenemos:

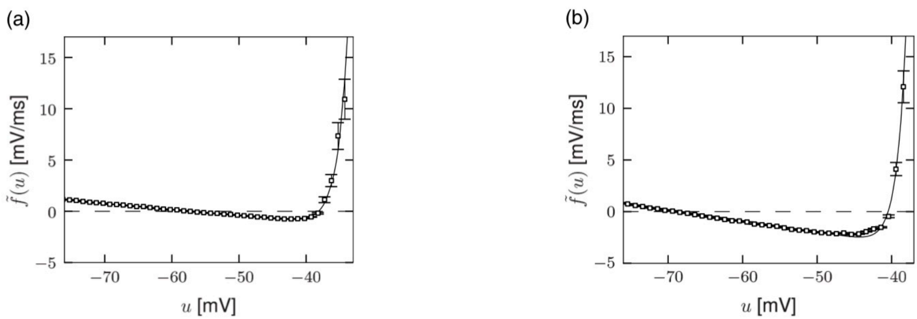


Fig. 5.4 Extracting nonlinear integrate-and-fire models from data. The function $f(u)$ characterizing the nonlinearity of an integrate-and-fire model according to Eq. (5.2) is derived from experimental data using random current injection into neurons. (a) Cortical pyramidal cells. Experimental data points (symbols) and fit by an exponential integrate-and-fire model. (b) As in (a), but for an inhibitory interneuron. Data courtesy of Laurent Badel and Sandrine Lefort (Badel *et al.*, 2008a).

Quadratic integrate and Fire

$$f(V_m) = a_0 (V_m - V_{rest})(V - V_c) \quad \text{con } V_c > V_{rest}$$

Hacer ejercicio !!!